INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Unidad Profesional "Adolfo López Mateos"

ECUACIONES DE MAXWELL

"Relevancia de las matemáticas en electromagnetismo"

Tesis presentada por

Emma Margarita Pereyra Talamantes

en cumplimiento con los requisitos necesarios
para obtener el título de

Licenciado en Física y Matemáticas

Director de tesis

Dr. Gonzalo Ares de Parga Álvarez

México, D. F., Junio de 2007.

Resumen

En el presente trabajo se analizarán las ecuaciones de Maxwell en su forma integral con el objetivo de entender el significado físico de cada una de ellas, además se expondrán brevemente algunos ejemplos, así como también algunos detalles acerca del desarrollo histórico de las mismas. Se ha de realizar también un estudio más detallado y profundo de la expresión ya conocida para la llamada ”derivada material” y se estudiará la relación que ésta mantiene con las derivadas temporales de integrales de línea, superficie y volúmen; esto, con el fin de generalizar el concepto para las distintas integrales utilizadas. Lo relevante de este análisis consiste en el hecho de que no ha sido necesario utilizar formalismos matemáticos como formas diferenciales y derivadas de Lie, pues las expresiones se calculan utilizando únicamente análisis vectorial. Esta tesis también tratará, de manera general, un fenómeno importante en el electromagnetismo: el retardo. La importancia del retardo electromagnético, en nuestro caso particular, radica en el hecho de que el fenómeno está directamente relacionado con el análisis relativista de la ecuaciones de Maxwell y ya que, como mencionamos anteriormente, lo que se pretende es analizar la mayor parte de los aspectos de dichas ecuaciones, hemos considerado conveniente incluirlo como complemento en nuestro trabajo de estudio.

Índice

Introducción

El término electromagnetismo proviene del hecho de que no podemos estudiar los campos eléctricos y magnéticos por separado. Un campo magnético variable produce un campo eléctrico (como ocurre en el fenómeno de inducción electromagnética, la cual es la base para el funcionamiento de generadores eléctricos, motores de inducción eléctrica y transformadores). Similarmente, un campo eléctrico variable genera un campo magnético. Es esta dependencia mutua de los campos eléctricos y magnéticos, la que motiva a considerarlos como uno solo: el campo electromagnético.

Maxwell y el electromagnetismo

James Clerk Maxwell fue una de las mentes matemáticas más preclaras de su tiempo y se le representa frecuentemente como el ejemplo del científico clásico del siglo XIX cuya influencia se deja notar grandemente en la física del siglo XX habiendo hecho contribuciones fundamentales en la comprensión de la naturaleza. Sin embargo, son sus aportaciones al campo del electromagnetismo las que lo sitúan entre los grandes científicos de la historia. En el prefacio de su obra Treatise on Electricity and Magnetism (1873) declaró que su principal tarea consistía en justificar matemáticamente conceptos físicos descritos hasta ese momento de forma únicamente cualitativa, como las leyes de la inducción electromagnética y de los campos de fuerza, enunciadas por Michael Faraday. El primer éxito, y el más notable, de la teoría de

Maxwell fue la elucidación de la naturaleza de la luz. Maxwell demostró, a partir de sus ecuaciones matemáticas, que la luz es una onda electromagnética que consiste en oscilaciones del campo electromagnético. Maxwell además logró describir los efectos electromagnéticos al aumentar el término de corriente de desplazamiento en la ecuación de Ampère y con ello propuso finalmente un conjunto de ecuaciones para describir el campo electromagnético. Estas últimas se conocen como las ecuaciones de Maxwell, las cuales permitieron ver en forma clara que la electricidad y el magnetismo son dos manifestaciones de un mismo fenómeno físico, el electromagnetismo. El fenómeno era similar a la gravitación, cuyas leyes fueron descubiertas por Newton; así como un cuerpo masivo produce una fuerza gravitacional sobre otro, un cuerpo eléctricamente cargado y en movimiento produce una fuerza electromagnética sobre otro cuerpo cargado. Un aspecto común entre la gravitación y el electromagnetismo es la existencia de una aparente acción a distancia entre los cuerpos, acción que tanto disgustaba a Newton. Maxwell no resolvió ese problema, pero inventó un concepto que desde entonces se ha utilizado constantemente en la física: el campo electromagnético. Según esta interpretación, en todo punto del espacio alrededor de una carga existe una fuerza electromagnética, cuya intensidad y dirección están definidas por medio de unas fórmulas matemáticas. En realidad, más que un concepto, el campo es una definición que da cierta consistencia a la idea de que una carga eléctrica actúa sobre otra lejana, sin tener que recurrir a una acción a distancia. Sólo en el siglo XX se pudo encontrar cierta base física a este concepto, pero en tiempos de Maxwell el campo electromagnético era una noción matemática sumamente útil, descrita por ecuaciones, pero cuya realidad física trascendía toda interpretación teórica. El electromagnetismo ha sido la base de la llamada Segunda Revolución Industrial, fundamentalmente en los aspectos de la conversión electromecánica de energía y las comunicaciones. Actualmente las aplicaciones electromagnéticas dominan toda la técnica moderna, por ello se hace cada vez más necesaria la modelación de los fenómenos físicos mediante la teoría de campos. Las ecuaciones de Maxwell han sido utilizadas a lo largo de los últimos 150 años para describir los fenómenos electromagnéticos, en particular, han encajado perfectamente con la teoría de la relatividad. Sin embargo, nos hemos percatado que no todos los estudiantes de licenciatura tienen la habilidad de comprender completamente la teoría relacionada con relatividad, es por ello que en esta tesis se pretende encontrar una explicación sencilla del electromagnetismo haciendo uso únicamente de conocimientos básicos de física, para que así, los estudiantes que apenas se familiarizan con las ecuaciones de Maxwell sean capaces de entender algunas de las implicaciones relativistas que dichas ecuaciones encierran, al menos parcialmente, sin que les sea necesario llevar un curso más avanzado de relatividad o electromagnetismo. Describiremos un fenómeno relativista que encierran las ecuaciones de Maxwell buscando siempre la manera de que durante todo el análisis realizado sólo sean indispensables conocimientos básicos de relatividad y teoría electromagnética. En el primer capítulo estudiaremos las ecuaciones de Maxwell y describiremos parte de sus aplicaciones; se hablará un poco de las características y significado de cada ecuación, así como de sus orígenes y deducción. En el segundo capítulo se estudiarán a detalle las distintas formas de la derivada material, partiendo de las expresiones y definiciones existentes para derivadas e integrales paramétricas y enfatizando la importancia que tiene el utilizar la expresión correcta de la misma al realizar cálculos que involucran variacion temporal de parámetros de integración. El objetivo de este capítulo es calcular tales derivadas utilizando una herramienta matemática sencilla pero formal: el análisis vectorial [1]. Esto nos permitirá entender perfectamente las representaciones integrales de las ecuaciones de Maxwell. La idea de presentar cálculos heurísticos en la segunda parte de nuestra tesis, exponiendo a su vez el cálculo formal, surgió con la intención de ser capaces de establecer una comparación entre los dos diferentes métodos, y así, basándonos en los resultados obtenidos en cada caso, poder determinar qué ventajas y desventajas ofrece cada uno de ellos. Por ejemplo, el darnos cuenta que en el cálculo heurístico la derivada de una integral de volumen presenta la misma forma que una derivada material, puede provocar que el resultado sea generalizado de una manera errada, cuando en realidad se deben tomar en cuenta las consideraciones que fueron requeridas para llegar a dicho resultado, pues aunque nosotros pudimos corroborar que el resultado era exacto, podrían presentarse situaciones en las cuales esto no sea posible y tal vez entonces la física del problema se torne confusa o inclusive errónea. En el tercer capítulo finalmente, trataremos aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell de una forma un poco más complicada que en el capítulo 1, hablaremos un poco de la deducción de la ecuación de continuidad que, para nuestro caso particular, representará la conservación de la carga en los fenómenos electromagnéticos.

Por otro lado, partiendo del análisis de las soluciones encontradas para la ecuación de onda obtenida de operar entre sí las ecuaciones de Maxwell, expondremos de la manera más breve y concisa (aunque no por ello menos clara) el fenómeno del retardo electromagnético, explicando sus características más importantes.En la mayoría de los sistemas de unidades las ecuaciones de Maxwell se expresan acompañadas de algunas constantes que terminan por hacer el estudio de las ecuaciones más complicado de lo que en realidad es, por esta razón hemos de utilizar el sistema de unidades gaussiano a lo largo del trabajo, así podremos dejar de preocuparnos por las constantes y trabajar más fácilmente el análisis sin expresiones muy largas o engorrosas.

CAPÍTULO 1

Ecuaciones de Maxwell

1.1 Los orígenes de las ecuaciones de Maxwell y su deducción

Las ecuaciones de Maxwell son las ecuaciones que describen los fenómenos electromagnéticos. La gran contribución de James Clerk Maxwell fue reunir en estas ecuaciones largos años de resultados experimentales, debidos a Coulomb, Gauss, Ampère, Faraday y otros, introduciendo los conceptos de campo y corriente de desplazamiento, y unificando los campos eléctricos y magnéticos en un solo concepto: el campo electromagnético. Todos los fenómenos clásicos (no cuánticos) se pueden describir a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Este sistema de ecuaciones resulta especialmente atractivo porque remarca las simetrías intrínsecas entre ellas haciendo más fácil su utilización e inspirando aplicaciones posteriores[11]. Dicho lo anterior, comenzaremos con nuestro primer capítulo realizando un análisis breve de dichas ecuaciones y dando, si es posible, algunos ejemplos prácticos de su utilización.

1.1.1 *La ley de Gauss*

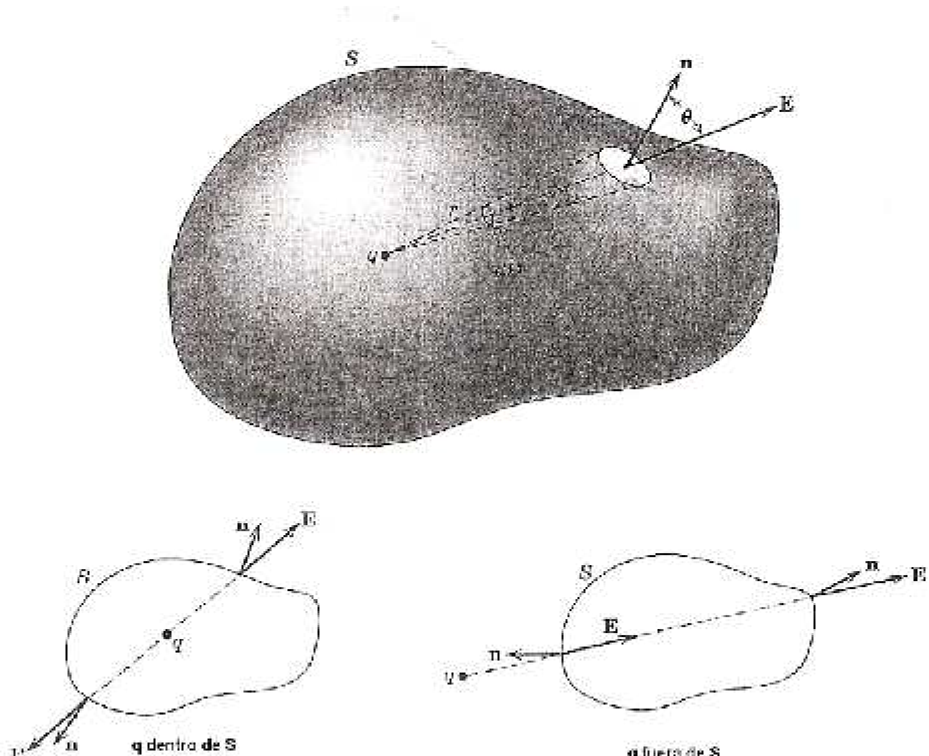

FIGURA 1

La FIGURA 1 pretende ilustrar el enunciado de la ley de Gauss, el cual afirma lo siguiente: "Existe una relación importante entre la integral de la componente normal del campo eléctrico sobre una superficie cerrada y la carga total encerrada por la superficie". Sin embargo, para derivar dicha relación deberemos empezar estudiando la ley de Coulomb.

La ley de Coulomb establece que dadas dos cargas estáticas, cada una ejerce una fuerza sobre la otra de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{F}_{12} = q_1 q_2 \frac{(\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2)}{|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2|^3}, \tag{1.1}$$

donde q_1, q_2, $\overrightarrow{r}_1$ y $\overrightarrow{r}_2$ representan a las cargas y posiciones de las dos partículas y $\overrightarrow{F}_{12}$ describe a la fuerza que siente q_1 debido a la presencia de q_2.

Ahora bien, podemos definir el campo eléctrico en un punto P producido por una carga q como:

$$\overrightarrow{E} = q\frac{(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_q)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_q|^3}, \tag{1.2}$$

donde $\overrightarrow{r}$ es la distancia del punto P al origen y $\overrightarrow{r}_q$ es la distancia de la carga q al origen.

Si la distribución de carga es continua, debido al principio de superposición, la Ec.(1.2) se transforma en:

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \int \rho(\overrightarrow{r'})\frac{(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'})}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|^3}dV'. \tag{1.3}$$

Este campo eléctrico no depende del tiempo, pues como hemos hecho notar la ley de Coulomb sólo es válida para situaciones no dependientes del tiempo. No obstante, a partir de esta última ecuación se puede llegar a una forma que experimentalmente se verá es correcta para cualquier situación; o sea, para casos dependientes del tiempo. Si aplicamos a la expresión obtenida para el campo eléctrico el teorema de Gauss para superficies cerradas, encontraremos la expresión para la Ley de Gauss en su forma integral :

$$\begin{aligned} \int \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{S} &= \int \nabla \cdot \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) dV \\ &= \int 4\pi\rho(\overrightarrow{r}) dV = 4\pi Q, \end{aligned} \tag{1.4}$$

Y como esto es válido para cualquier volúmen entonces los integrandos en ambas partes de la Ec.(1.4) son iguales, es decir:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = 4\pi\rho(\overrightarrow{r}), \tag{1.5}$$

que no es más que la ley de Gauss en forma diferencial. Esta ley de Gauss en realidad es más general dado que, a diferencia de la ley de Coulomb, no establece ninguna condición sobre la dependencia radial del campo, en otras palabras, no pone restricciones sobre la simetría del sistema. Además podemos decir, sin pérdida de generalidad, que es válida para situaciones dependiendtes del tiempo y escribirla como:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) = 4\pi\rho(\overrightarrow{r}, t). \tag{1.6}$$

A pesar de que la ley de Coulomb nos ha dirigido de manera natural a la ley de Gauss, no podemos decir que dichas leyes son equivalentes entre sí. Esta afirmación es consecuencia del hecho de que la ley de Coulomb es válida sólo para situaciones estáticas. En realidad si pretendiéramos llegar a la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss, nos encontraríamos con ciertas dificultades debidas a la simetría del sistema. Analicemos un ejemplo de esto.

EJEMPLO: Supongamos una partícula puntual cargada (q) y apliquemos la ley de Gauss en este caso. Si la partícula cargada se encuentra en reposo podemos considerar que el campo eléctrico tiene simetría radial, y por lo tanto, si la superficie es una esfera centrada en la carga tenemos que

$$\overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = EdS, \tag{1.7}$$

Finalmente aplicando el teorema de Gauss, se obtiene que el campo eléctrico esta dado como

$$E = \frac{q}{r^2}, \tag{1.8}$$

de donde es posible obtener el campo de Coulomb si tomamos en cuenta que el campo es radial (por tratarse de una esfera).

Por otro lado, si la carga está en movimiento, no podríamos afirmar nada acerca del campo pues el movimiento de las cargas genera distintas direcciones del campo para distintos instantes de tiempo, es decir, se rompe la simetría. De lo anterior podemos deducir que sólo en ciertos casos será factible obtener la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss, por ello, es poco certero decir que tales leyes son equivalentes entre sí. A pesar de todo, no podemos negar que ambas leyes son un recurso muy práctico en el cálculo de campo eléctrico cuando se tienen condiciones de simetría favorables en el sistema analizado.

1.1.2 *Ley de los monopolos magnéticos*

La segunda ecuación de Maxwell implica la no existencia del monopolo magnético y se expresa matemáticamente como:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0. \tag{1.9}$$

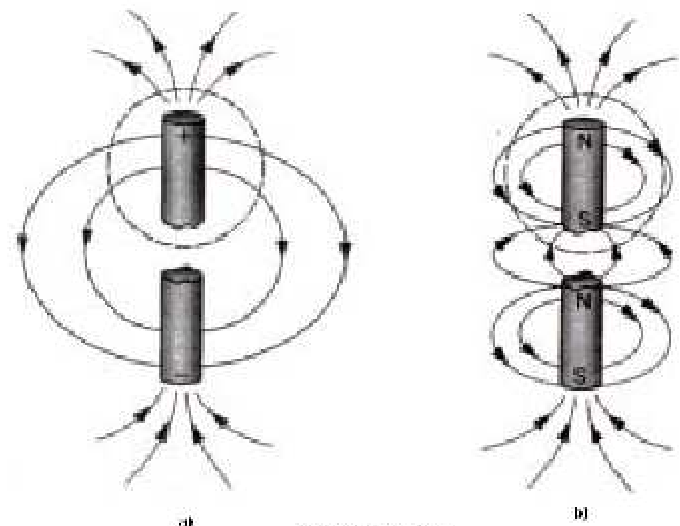

FIGURA 2

DIFERENCIA EN LOS PATRONES DE CAMPO
a) Cuando un dipolo eléctrico se corta a la mitad, la carga negativa se aisla en una pieza y la carga positiva en otra.
b) Cuando un dipolo magnético se corta a la mitad, aparece un nuevo par de polos norte y sur.

Lo anterior trae consigo una diferencia notable entre los campos eléctrico y magnético, pues las líneas de campo toman características particulares en cada caso como se ilustra en la FIGURA 2; por ello, cuando se pretenda realizar un análisis de campos electromagnéticos es importante hacer las consideraciones apropiadas en cada situación. En caso de que algún día se encontrase evidencia de la existencia del monopolo magnético, la ley de Gauss para el campo magnético quedaría como

$$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = \rho_m \tag{1.10}$$

donde ρ_m correspondería a la densidad de monopolos magnéticos. Esta densidad de carga llevaría aparejada una densidad de corriente J_m , la cual obligaría a modificar la ley de Faraday y asimismo habría que ampliar la expresión de la ley de fuerza de Lorentz para incluir la fuerza sobre cargas magnéticas con un campo magnético.

Esta ley indica además que las líneas de los campos magnéticos deben ser cerradas. Esto significa que sobre una superficie cerrada, sea cual sea ésta, no seremos capaces de encerrar una fuente o sumidero de campo. Es decir, si calculamos el flujo magnético a través de una superficie cerrada, el resultado será nulo:

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} = 0. \tag{1.11}$$

Esta última ecuación, establece la no existencia de monopolos magnéticos. Esto no indica solamente que no existan cargas magnéticas sino que también restringe al campo magnético. En efecto, si consideramos un campo magnético muy sencillo como $\overrightarrow{B} = x\widehat{i}$ estaremos cometiendo un error pues $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} \neq 0$ y esto no satisface nuestra ley, por lo tanto no puede ser.

1.1.3 *Ley de Faraday*

Esta ecuación relaciona los campos eléctrico y magnético, pero tiene también muchas otras aplicaciones prácticas, es una de las leyes de Maxwell más interesantes pues nos permite entender el funcionamiento de aparatos electromagnéticos que basan en ella sus modos de operación como los motores y generadores eléctricos entre muchos otros. Más precisamente, demuestra que un voltaje puede ser generado variando el flujo magnético que atraviesa una superficie dada.

La ley de Faraday establece que el voltaje inducido en un circuito es directamente proporcional a la rapidez con que cambia el flujo magnético que lo atraviesa[6].

$$-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\oint \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S} = \oint \overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{l.} \tag{1.12}$$

NOTA: La permutación de la integral de superficie y la derivada temporal se puede hacer siempre y cuando la superficie de integración no cambie con el tiempo.

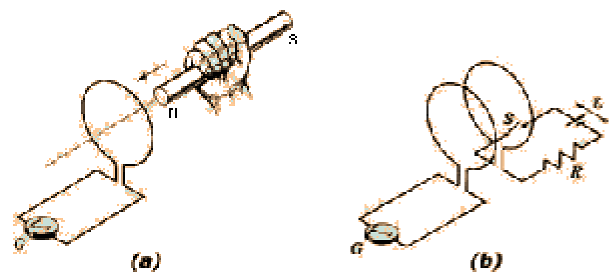

FIGURA 3

En realidad Faraday la expuso de forma muy especial, dado que las ecuaciones deducidas por él fueron resultados meramente experimentales que consistieron básicamente en la observación de los fenómenos como los que se ilustran en la FIGURA 3. En a) lo que influirá en la deflexión de la aguja del galvanómetro (producto de la corriente inducida) será solamente el movimiento relativo entre la bobina y el imán; se registra sólo una diferencia en el sentido de la deflexión de la aguja: si se coloca el polo norte hacia la bobina la aguja se mueve al contrario de cuando se utiliza el polo sur. Por otro lado, en b) lo que interviene en la inducción es el cambio en la corriente que circula por la bobina: cuando el interruptor se abre se tiene una fuerza electromotriz inducida igual a la que se induce cuando el interruptor se cierra, pero de sentido contrario.

De manera más formal, la ley de Faraday está dada por la ecuación:

$$-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d\oint \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}}{dt} = \oint \overrightarrow{E'}\cdot d\overrightarrow{l} = \xi, \tag{1.13}$$

donde Φ representa el flujo magnético que atraviesa una superficie abierta; o sea: que contenga una frontera. En este caso sería un circuito cerrado.

$\overrightarrow{E'}$ representa el campo eléctrico medido desde el sistema de referencia en que la diferencial de longitud $\overrightarrow{dl}$ se encuentra en reposo aunque éste último se mida en el sistema de referencia donde se calcula el flujo. ξ se conoce como la fuerza electromotriz del circuito y el signo menos simplemente aparece para indicar el sentido de dicha fuerza (opuesta a la dirección del campo que la produce). Faraday lo expuso de esta manera para poder contemplar los circuitos en movimiento, sin embargo, esto trae como consecuencia una ley más amplia que además de contemplar la forma diferencial e integral que normalmente se expone en los libros de texto, contiene información adicional sobre las transformaciones de los campos eléctricos y magnéticos[11].

Volviendo a la interpretación clásica de la ley de Faraday, se considera que el campo eléctrico se mide en el sistema de referencia donde se mide el flujo y desaparece la prima quedando como:

$$-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d\oint \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}}{dt} = \oint \overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{l} = \xi. \tag{1.14}$$

La aproximación realizada es pequeña si el circuito y/o la superficie no se mueven o contorsionan, o bien, si lo hace a una velocidad $v \ll c$. Si el circuito se considera ”fijo”, podemos entonces meter la derivada total del tiempo como una derivada parcial dentro de la integral:

$$-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\oint \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\cdot d\overrightarrow{S} = \oint \overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{l}. \tag{1.15}$$

Por otro lado, si consideramos el teorema de Stokes, llegamos a:

$$-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\oint \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\cdot d\overrightarrow{S} = \oint \nabla \times \overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{S}. \tag{1.16}$$

Como esto es válido para cualquier superficie, podemos concluir que

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}. \tag{1.17}$$

Las Ecs.(1.16) y (1.17) representan la ley de Faraday en forma integral y diferencial respectivamente; sin embargo, como ya hemos mencionado antes, el intercambio de la diferencial y la integral se puede realizar sólo cuando la superficie no presenta deformaciones. En el capítulo 2 ahondaremos un poco más en estas cuestiones, por el momento veamos un ejemplo ilustrativo del caso estático que hemos analizado para le sea más sencillo al lector entender la utilidad de la expresión para la ley de Faraday.

EJEMPLO: Consideremos un circuito rectangular cuya longitud horizontal disminuye con el tiempo a un ritmo constante como en la FIGURA 4.

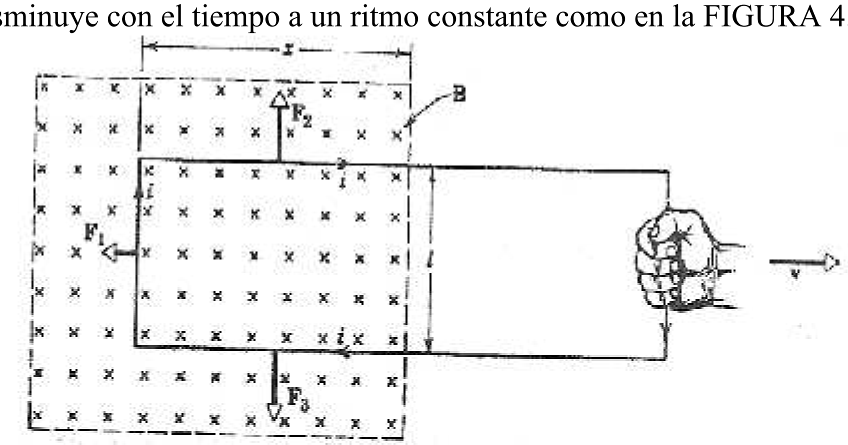

FIGURA 4

Vemos entonces que el cambio en dicha longitud estará definido por

$$X = x - vt. \tag{1.18}$$

donde X representa la longitud final en la horizontal del circuito. Su anchura es constante y vale l. Por tanto, el área es igual a

$$A = lX = l(x - vt). \tag{1.19}$$

Por otro lado, aplicamos un campo magnético constante en la dirección perpendicular al rectángulo que, sin pérdida de generalidades, puede considerarse en la dirección del eje z; de esta manera, aplicando la Ec.(1.14) es fácil obtener la fuerza electromotriz en la superficie encerrada por la espira:

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d\oint \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d\oint \overrightarrow{B}\cdot \widehat{n}dA}{dt} \\ &= -\frac{1}{c}\frac{d\oint BdA}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\oint Bd(lX) = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}Bl(x-vt) \\ &= \frac{1}{c}Blv. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Con lo cual es fácil concluir que si el flujo de campo magnético es constante sobre la superficie, no tendremos ninguna fuerza electromotriz. Esto nos permite entonces entender el principio básico de algunos motores: todo consiste en un cambio de flujo magnético, el cual puede hacerse variando el campo magnético o bien, variando la superficie de integración. Así, queda un poco más clara la importancia de las ecuaciones de electromagnetismo en el análisis de los fenómenos físicos que nos rodean.

1.1.4 *Ley de Ampère-Maxwell*

Entre las leyes de Biot-Savart y la de Ampère-Maxwell, sucede algo similar que con las leyes de Coulomb y Gauss, pues la ley de Biot-Savart resulta ser equivalente a la ley de Ampère, la cual a su vez representa la ley de Ampère-Maxwell para el caso estacionario. En efecto, si partimos de la ley de Biot-Savart (que como sabemos es válida sólo en el caso estacionario), el campo magnético generado por una distribución de corriente lineal I independiente del tiempo se expresa como:

$$\overrightarrow{B} = \frac{1}{c}\int \frac{I}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|} d\overrightarrow{l} \times \left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right). \tag{1.21}$$

Por lo que, si consideramos una densidad de corriente volumétrica, podemos escribir[10]:

$$\overrightarrow{B} = \frac{1}{c}\int \frac{\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r'},t) \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'})}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|^3} dV'. \tag{1.22}$$

Además, utilizando el hecho de que[10]:

$$\nabla\left(\frac{1}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|}\right) = \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|^3} \tag{1.23}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{B} = \frac{1}{c}\nabla \times \int \frac{\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r'},t)}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|} dV', \tag{1.24}$$

y aplicando el rotacional al campo magnético obtenemos:

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \frac{1}{c}\nabla \times \nabla \times \int \frac{\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r'},t)}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|} dV'. \tag{1.25}$$

Con la identidad

$$\nabla \times \nabla \times \overrightarrow{A} = \nabla(\nabla \cdot \overrightarrow{A}) - \nabla^2 \overrightarrow{A}, \tag{1.26}$$

llegamos a:

$$\begin{aligned} \nabla \times \overrightarrow{B} &= \frac{1}{c}\nabla \int \nabla \cdot \left[\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r'}, t) \cdot \frac{1}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|} \right] dV' \\ & \quad -\frac{1}{c} \int \overrightarrow{J}(\overrightarrow{r'}, t) \left[\nabla^2 \frac{1}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|} \right] dV'. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Para el caso estático la primera integral se anula, y dado que[10]

$$\nabla^2 \frac{1}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|} = -4\pi\delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}), \tag{1.28}$$

entonces

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \frac{4\pi}{c} \overrightarrow{J}. \tag{1.29}$$

Finalmente integrando la expresión anterior y utilizando algunos teoremas de análisis vectorial es fácil obtener la forma integral de ésta ecuación, la cual se expresa de la siguiente manera:

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot d\,\overrightarrow{l} = \frac{4\pi}{c} \oint \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{S}. \tag{1.30}$$

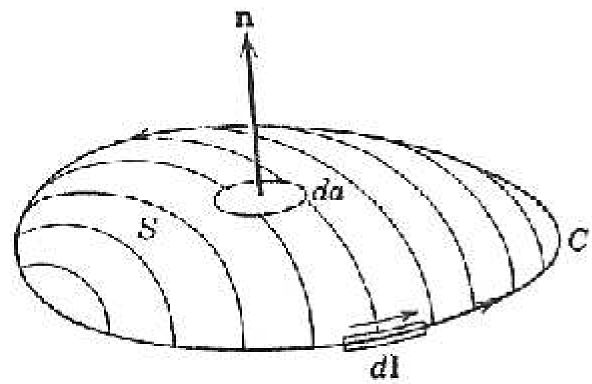

FIGURA 5

**Los contornos y superficies de integración se ilustran más claramente en la FIGURA 5, considerando $d\overrightarrow{S} = \widehat{n}da$

Las Ecs.(1.29) y (1.30) representan la Ley de Ampère en su forma diferencial e integral respectivamente. Sin embargo, a esta ecuación le falta un término que fue incorporado por Maxwell al darse cuenta que existía una contradicción en ciertas circunstancias físicas cuando el sistema no era estacionario.

EJEMPLO: Consideremos una línea con corriente que llega a un capacitor de placas paralelas como lo ilustra la FIGURA 6 y tomemos la Ec.(1.30). Por un lado se tiene que si el circuito es redondo centrado en la línea de corriente y el condensador está suficientemente lejos para poder considerar una simetría axial la integral del campo magnético en dicho contorno es:

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{l} = B2\pi r, \tag{1.31}$$

siendo r el radio del circuito y podemos escojer cualquier superficie abierta que tenga como frontera el circuito considerado, de las cuales la más natural es la superficie S (superficie plana o disco generado por el circuito C).

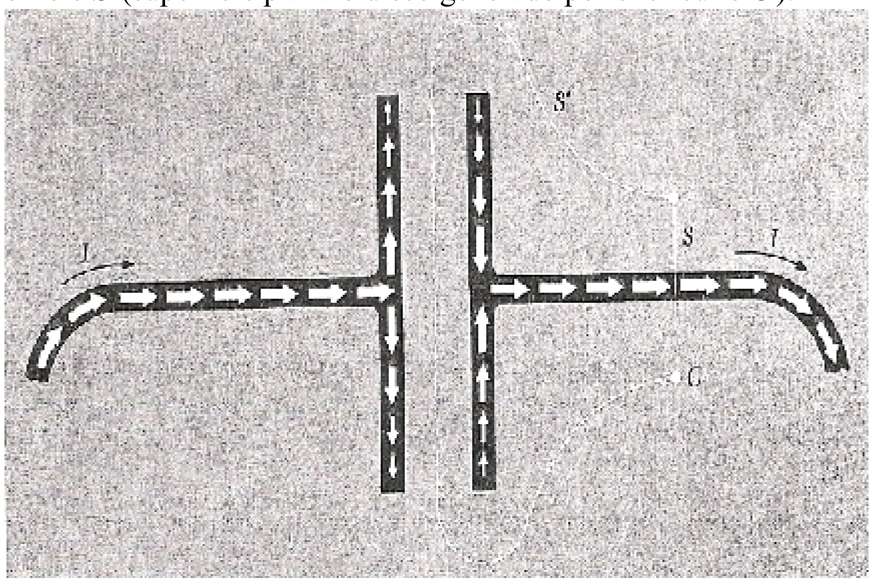

FIGURA 6

En este caso:

$$\frac{4\pi}{c}\oint \overrightarrow{J}\cdot d\overrightarrow{S} = \frac{4\pi}{c}I, \tag{1.32}$$

siendo I la corriente total que atraviesa la superficie. Dicho lo anterior, podemos entonces concluir que

$$B2\pi r = \frac{4\pi}{c}I \Rightarrow B = 2\frac{I}{r}. \tag{1.33}$$

Este resultado es utilizado en casi todos los libros de enseñanza cuando la ley de Ampère es analizada.

No obstante, podemos también escoger la superficie S' que pasa exactamente entre las placas del condensador de tal forma que ninguna corriente la atraviesa y en consecuencia:

$$\oint \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{S} = 0 \Longrightarrow B = 0 \tag{1.34}$$

.

Evidentemente las Ecs.(1.33) y (1.34) son contradictorias.

En efecto, fue Maxwell quien en 1865 consideró necesario modificar la ley de Ampère introduciendo a ésta un nuevo término denominado "corriente de desplazamiento". El análisis parte de recordar la consideración de que $\nabla \cdot \overrightarrow{J} = 0$ para campos estáticos, la cual era satisfecha claramente por la ley de Ampére

$$\nabla \cdot \nabla \times \overrightarrow{B} = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \overrightarrow{J} = 0. \tag{1.35}$$

Sin embargo, lo que Maxwell observó fue que si tomamos la ecuación de continuidad y la ley de Gauss en su forma diferencial, obtenemos fácilmente una nueva expresión para la densidad de corriente $\overrightarrow{J}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \overrightarrow{J} = \nabla \cdot \left(\overrightarrow{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{J} = \overrightarrow{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{1.36}$$

Este último término se conoce como la "corriente de desplazamiento de Maxwell" debido a que en el análisis hace las veces de una corriente que depende de una derivada temporal.

Con lo anterior Maxwell convierte la Ley de Ampère a una ley más general, válida para campos dependientes del tiempo:

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}. \tag{1.37}$$

Finalmente, nuestro primer capítulo queda concluído al haber obtenido las Ecs.(1.6), (1.9), (1.17) y (1.37) que representan las ecuaciones de Maxwell, necesarias para la descripción de los fenómenos electromagnéticos.

CAPÍTULO 2

Derivadas temporales de integrales y su relación con la derivada material

2.1 La derivada material en electromagnetismo

Es muy frecuente en electromagnetismo[10], [8], tener que realizar derivadas respecto a un parámetro (que normalmente es el tiempo) de integrales de volumen, superficie y línea. Por ejemplo, el cálculo de la variación de la carga en un volumen dado, al igual que el cambio con respecto al tiempo de un flujo magnético implican conocer la derivada con respecto al tiempo de una integral, y si no se es cuidadoso en el análisis, podemos llegar a confundir el concepto de "derivada material" y conducirnos a errores importantes. En la literatura es fácil encontrar cálculos intuitivos de tales derivadas (paramétricas)[10], [8], pero dada la naturaleza heurística de estos, regularmente se presta a confusiones. Podemos encontrar también cálculos un poco más formales[9], pero restringidos a situaciones especiales o en general obtenidos mediante métodos matemáticos complicados. Es por ello que en este capítulo, desarrollaremos un método relativamente sencillo que nos permita obtener dichas expresiones utilizando únicamente conocimientos básicos de análisis vectorial[12].

2.1.1 *Derivada temporal de la integral de una densidad de carga volumétrica*

Cuando uno quiere conocer el cambio con respecto al tiempo de la carga contenida en un volumen que se mueve o se deforma es muy común utilizar el concepto de derivada material[10]. No obstante, al aplicarlo en forma directa puede cometerse un error grave. Para entender esta posible equivocación, comenzaremos en esta sección reproduciendo el cálculo realizado en forma heurística o intuitiva de la derivada temporal de una integral de volumen, y de este modo sea más sencillo para el lector percatarse de cada una de las consideraciones realizadas durante el proceso.

Sabemos que una integral de superficie o volumen puede depender de un parámetro como puede ser el tiempo. Este parámetro puede deformar la superficie o el volumen y por esta razón sería sólo el tiempo quién describiría la evolución de dicho cambio. Sin embargo, puede darse el caso de que el integrando dependa también del mismo parámetro en forma implícita o explícita. Por ejemplo, llamemos A a la carga contenida en un volumen, si consideramos una densidad volumétrica de carga $\rho(\overrightarrow{r}, t)$ y la integramos en un volumen variable en el tiempo $V(t)$ podremos definir:

$$A = \int_{V(t)} \rho(\overrightarrow{r}, t) dV, \tag{2.38}$$

Si nuestro volumen se deforma o se mueve, es posible que gane o pierda carga, es decir: A dependera del tiempo. Por tanto, si ahora queremos conocer la razón de cambio de A con respecto al tiempo, lo normal será derivar:

$$\frac{d}{dt}A = \frac{d}{dt}\left[\int_{V(t)} \rho(\overrightarrow{r}, t)dV\right]. \tag{2.39}$$

Para poder entender cómo debe entrar la derivada con respecto al tiempo en la integral debemos recurrir a las verdaderas definiciones de derivada e integral, esto es:

$$\frac{d}{dt}A = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}\right]. \tag{2.40}$$

incorporando la integral

$$\frac{d}{dt}A = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\begin{array}{c} \lim_{\Delta V_i \to 0}\left[\sum_{i=1}^{n(t+\Delta t)} \rho(\overrightarrow{r}_i, t+\Delta t)\Delta V_i\right] \\ -\lim_{\Delta V_i \to 0}\left[\sum_{i=1}^{n(t)} \rho(\overrightarrow{r}_i, t)\Delta V_i\right] \end{array}\right], \tag{2.41}$$

donde $n(t)$ representa el número de divisiones que se consideran del volumen al tiempo t. Es claro que no existe dependencia temporal en la $\overrightarrow{r}$ pues aunque en realidad se tenga un fluido en movimiento para efectos de la integral la densidad $\rho(\overrightarrow{r}, t)$ sólo lleva la dependencia temporal en la entrada del tiempo. Si restamos y sumamos al término de la derecha la Ec.(2.41) la cantidad:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\lim_{\Delta V_i \to 0}\left[\sum_{i=1}^{n(t+\Delta t)-n(t)} \rho(\overrightarrow{r}_i, t+\Delta t)\Delta V_i\right]\right]. \tag{2.42}$$

la Ec.(2.41) queda igual a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A \quad &= \quad \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\lim_{\Delta V_i \to 0}\left[\sum_{i=1}^{n(t+\Delta t)-n(t)} \rho(\overrightarrow{r}_i, t+\Delta t)\Delta V_i\right]\right] \\ &+ \lim_{\Delta t \to 0}\left[\lim_{\Delta V(t) \to 0}\left[\sum_{i=1}^{n(t)} \frac{(\rho(\overrightarrow{r}_i, t+\Delta t) - \rho(\overrightarrow{r}_i, t))}{\Delta t}\Delta V_i\right]\right]. \end{aligned} \tag{2.43}$$

En la Ec.(2.43) hemos logrado separar la expresión en dos términos, el primero sólo considera la sumatoria de los términos que aparecen en el volumen al tiempo $t + \Delta t$ y no al tiempo t; el segundo corresponderá a la integral de la parcial con respecto al tiempo de la densidad justamente en el tiempo t.

Obviamente hemos supuesto todo el proceso con funciones suaves que nos permiten permutar las sumatorias. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\lim_{\Delta V_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n(t+\Delta t)-n(t)} \rho(\overrightarrow{r}_i, t + \Delta t) \Delta V_i \right] \right] \\ &+ \lim_{\Delta V(t) \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n(t)} \frac{(\partial \rho(\overrightarrow{r}_i, t))}{\partial t} \Delta V_i \right]. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Lo cual nos lleva a:

$$\frac{d}{dt}A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Delta V} \rho(\overrightarrow{r}, t) dV \right] + \int_{V(t)} \frac{\partial \rho(\overrightarrow{r}, t)}{\partial t} dV. \tag{2.45}$$

Analicemos la primera integral del miembro derecho de la Ec.(2.45).

$$dV = d\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{v} \Delta t, \tag{2.46}$$

donde $\overrightarrow{v}$ es la velocidad de cada diferencial de superficie del volumen como lo ilustra la FIGURA 7.

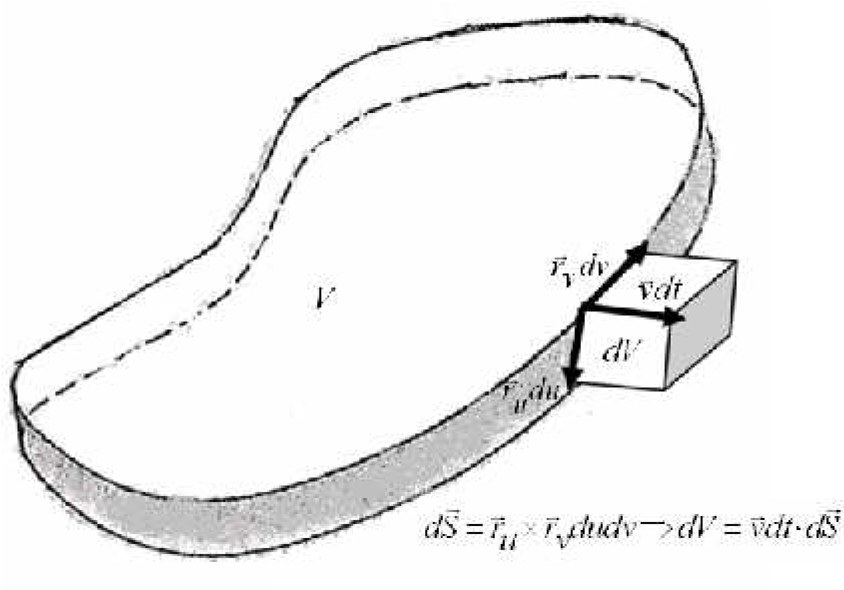

FIGURA 7

Esto resulta en que el primer término de la Ec.(2.45) se puede expresar como:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Delta V} \rho(\overrightarrow{r}, t) dV \right] = \int_{S(t)} \rho(\overrightarrow{r}, t) \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{S}, \tag{2.47}$$

y consecuentemente, utilizando el teorema de Gauss llegamos a

$$\frac{d}{dt} A = \int_{V(t)} \nabla \cdot (\rho(\overrightarrow{r}, t) \overrightarrow{v}) dV + \int_{V(t)} \frac{\partial \rho(\overrightarrow{r}, t)}{\partial t} dV. \tag{2.48}$$

Este resultado es conocido[9], sin embargo mal interpretado en la mayoría de los casos pues se asume que la velocidad $\overrightarrow{v}$ en la integral corresponde al flujo de las partículas y en realidad solamente tiene que ver con el movimiento del volumen (esta afirmación será más clara al realizar el cálculo formal en la siguiente sección). Esto significa que si ρ representa una densidad de carga en movimiento y se calcula la derivada con respecto a un volumen fijo ($\overrightarrow{v} = 0$), se tendrá:

$$\frac{d}{dt}A = \int_{V=cte} \frac{\partial \rho(\overrightarrow{r}, t)}{\partial t} dV, \tag{2.49}$$

un resultado que es independiente de si existe o no un flujo. De hecho, si consideramos un fluido en movimiento con velocidad $\overrightarrow{u}$ y calculamos $\frac{d}{dt}A$ para un volumen fijo, la Ec.(2.49) nos indicará el cambio de masa en ese volumen. Empero, si el volumen se mueve con el fluido (esto es $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$) tendremos que

$$\frac{d}{dt}A = \int_{V(t)} \nabla \cdot (\rho(\overrightarrow{r}, t)\overrightarrow{u})dV + \int_{V(t)} \frac{\partial \rho(\overrightarrow{r}, t)}{\partial t} dV, \tag{2.50}$$

siendo $\overrightarrow{u}$ la velocidad del fluido en cada punto. Por otro lado, en la literatura tenemos que[2]

$$\nabla \cdot (\rho(\overrightarrow{r}, t)\overrightarrow{u}) = \rho(\nabla \cdot \overrightarrow{u}) + (\nabla \rho) \cdot \overrightarrow{u}, \tag{2.51}$$

si además consideramos que el fluido es incompresible, a partir de la *ecuación continuidad de la dinámica de los fluidos* [1], podemos obtener fácilmente que se satisface la condición $\nabla \cdot \overrightarrow{u} = 0$ y reescribiendo la expresión anterior, llegamos a:

$$\nabla \cdot (\rho(\overrightarrow{r}, t)\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \cdot (\nabla \rho). \tag{2.52}$$

De este modo la Ec(2.50) se convierte entonces en:

$$\frac{d}{dt}A = \int_{V(t)} \overrightarrow{u} \cdot \nabla \rho(\overrightarrow{r}, t)dV + \int_{V(t)} \frac{\partial \rho(\overrightarrow{r}, t)}{\partial t} dV. \tag{2.53}$$

2.1.2 *Cálculo formal de la derivada temporal de una integral de volumen*

Hemos observado en la sección anterior que en el camino recorrido para llegar a la expresión escrita en la Ec.(2.53) se han tenido que tomar en cuenta ciertos aspectos del flujo analizado y con ello se deja en entredicho la exactitud y/o validez de la derivada obtenida. Por esta razón, consideramos importante realizar una vez más el cálculo descrito en el apartado precedente pero de una manera menos intutitiva, es decir, empleando herramientas matemáticas mucho más formales. La técnica que desarrollaremos ahora se basa en el análisis vectorial, ya que esto nos permitirá comprobar si los resultados anteriores son exactos y a su vez, sentar las bases para obtener la derivada de una integral cualquiera respecto a un parámetro. Habiendo hecho estas acotaciones, calcularemos la integral de la Ec.(2.39)considerando que el volumen se mueve o se deforma independientemente del flujo. Empezaremos describiendo el volumen por medio de un cambio de coordenadas.

Definamos

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v, w, t), \tag{2.54}$$

donde u, v y w son coordenadas que general a cada instante un punto del volumen considerado $V(t)$ como en la FIGURA 8.

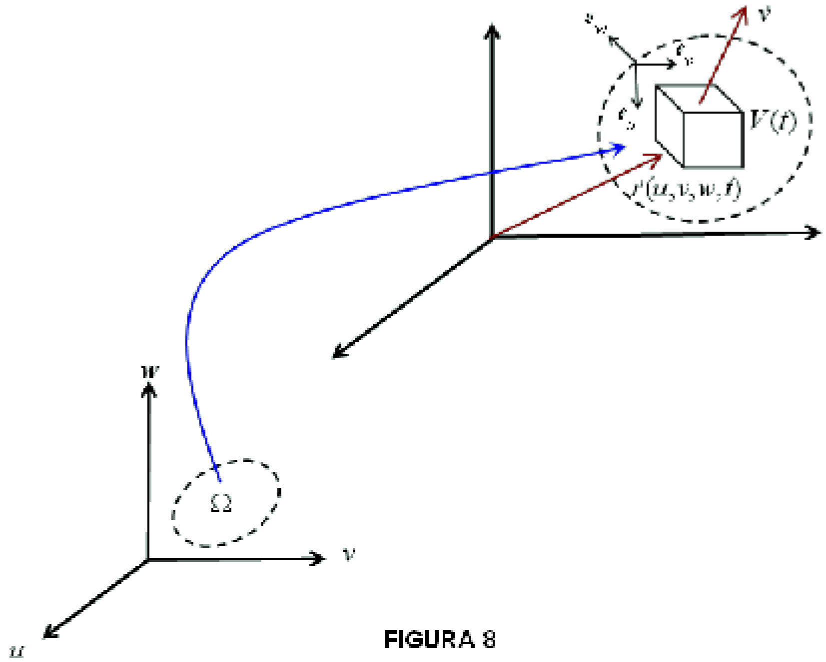

FIGURA 8

El tiempo t queda como un parámetro y ahora debido al cambio de coordenadas $\overrightarrow{r}$ sí depende del tiempo. Definiremos a continuación un conjunto de vectores $\overrightarrow{r}_u$, $\overrightarrow{r}_v$, $\overrightarrow{r}_w$, $\widehat{e}_u$, $\widehat{e}_v$, $\widehat{e}_w$ y las cantidades h_u, h_v, h_w con el fin de hacer más entendible los cálculos de esta sección. Sea

$$\overrightarrow{r}_\alpha(u,v,w,t) = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}, \qquad \widehat{e}_\alpha(u,v,w,t) = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}}{\left|\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}\right|} = \frac{\overrightarrow{r}_\alpha}{h_\alpha},$$

$$h_\alpha(u,v,w,t) = \left|\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}\right| \qquad con \qquad \alpha = u, v, w. \tag{2.55}$$

**Nótese que todas las cantidades dependen de las variables u, v, w y t. Además, supondremos que el sistema formado por los vectores $\widehat{e}_u$, $\widehat{e}_v$ y $\widehat{e}_w$ forman una base ortonormal (véase FIGURA 8).

Una vez definidas estas cantidades podemos ver que:

$$\frac{d}{dt}A = \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho dV \tag{2.56}$$

puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A &= \frac{d}{dt}\int\int\int_{\Omega} \rho(\overrightarrow{r}(u,v,w,t),t)\left|\frac{\partial xyz}{\partial uvw}\right| dudvdw \\ \Longrightarrow & \frac{d}{dt}A = \frac{d}{dt}\int\int\int_{\Omega} \rho(\overrightarrow{r}(u,v,w,t),t)\Lambda d\Omega \end{aligned} \tag{2.57}$$

donde $\left|\frac{\partial xyz}{\partial uvw}\right| = \Lambda(u,v,w,t)$ representa al Jacobiano y depende del tiempo. Empero $d\Omega$, que es la diferencial del volúmen generado por u, v y w tal que $\Omega \longrightarrow V$ a cada instante, no es dependiente del tiempo; esto es consecuencia de que hemos parametrizado de manera tal que el parámetro, en este caso el tiempo, sólo se exhiba en los términos integrandos y no en las diferenciales ni en los límites de integración. De lo anterior llegamos a que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A = & \int\int\int_{\Omega} \frac{d}{dt}\left[\rho(\overrightarrow{r}(u,v,w,t),t)\right]\left|\frac{\partial xyz}{\partial uvw}\right| \\ & + \int\int\int_{\Omega} \left[\rho(\overrightarrow{r}(u,v,w,t),t)\right]\frac{d}{dt}\left[\left|\frac{\partial xyz}{\partial uvw}\right|\right] dudvdw. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Simplificando, tenemos:

$$\frac{d}{dt}A = \int_{\Omega}\left[\frac{d}{dt}\left[\rho\right]\Lambda + \rho\frac{d}{dt}\Lambda\right] d\Omega, \tag{2.59}$$

donde $d\Omega = dudvdw$. Debemos tener cuidado al escribir la derivada de ρ pues este término tiene dependencia temporal de manera implícita y explícita, esto es:

$$\frac{d}{dt}\rho = \frac{\partial}{\partial t}\rho(\overrightarrow{r},t) + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\rho(\overrightarrow{r},t). \tag{2.60}$$

Con esto podremos escribir la Ec.(2.59) como

$$\frac{d}{dt}A = \int_\Omega \left[\Lambda \frac{\partial}{\partial t}\rho(\overrightarrow{r}, t) + \Lambda(\overrightarrow{v} \cdot \nabla)\rho(\overrightarrow{r}, t) + \rho \frac{d}{dt}\Lambda\right] d\Omega. \tag{2.61}$$

Utilizando las definiciones expresadas en la Ec.(2.55), es fácil ver que

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = [\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{r}_w] = h_u h_v h_w. \tag{2.62}$$

La última identidad sólo es válida para coordenadas ortogonales[2], pero como ya mencionamos esto se satisface para nuestro caso y entonces

$$\frac{d}{dt}\Lambda = \left[\frac{\partial \overrightarrow{r}_u}{\partial t}, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{r}_w\right] + \left[\overrightarrow{r}_u, \frac{\partial \overrightarrow{r}_v}{\partial t}, \overrightarrow{r}_w\right] + \left[\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v, \frac{\partial \overrightarrow{r}_w}{\partial t}\right], \tag{2.63}$$

dadas las expresiones para $\overrightarrow{r}_u$, $\overrightarrow{r}_v$ y $\overrightarrow{r}_w$ en Ec.(2.55) podemos definir

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}_n}{\partial t} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{r}}{\partial n \partial t} = \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial t} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial n} = \overrightarrow{v}_n \;\; con \;\; n = u, v, w \tag{2.64}$$

pero sin confundir esta definición con la proyección de la velocidad $\overrightarrow{v} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial t}$ en la dirección de $\widehat{e}_{n.}$ Así, reescribimos la Ec.(2.63) y obtenemos

$$\frac{d}{dt}\Lambda = [\overrightarrow{v}_u, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{r}_w] + [\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{v}_v, \overrightarrow{r}_w] + [\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{v}_w]\,. \tag{2.65}$$

Por otro lado, si utilizamos las identidades vectoriales para coordenadas ortogonales[1], expresamos cada uno de los sumandos de la derecha como

$$[\overrightarrow{v}_u, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{r}_w] = [\overrightarrow{v}_u, \widehat{e}_v, \widehat{e}_w]\, h_v h_w = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial u} \cdot \widehat{e}_u h_u h_v h_w, \tag{2.66}$$

$$[\overrightarrow{r}_w, \overrightarrow{v}_v, \overrightarrow{r}_u] = [\widehat{e}_w, \overrightarrow{v}_v, \widehat{e}_u]\, h_w h_u = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial v} \cdot \widehat{e}_v h_v h_w h_u,$$

$$[\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{v}_w] = [\widehat{e}_u, \widehat{e}_v, \overrightarrow{v}_w]\, h_w h_u = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \cdot \widehat{e}_w h_w h_u h_v.$$

Por lo que

$$\frac{d}{dt}\Lambda = \left[\frac{1}{h_u}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial u} \cdot \widehat{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial v} \cdot \widehat{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \cdot \widehat{e}_w\right] h_u h_v h_w. \tag{2.67}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\Lambda = h_u h_v h_w \left[\widehat{e}_u \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \widehat{e}_v \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \widehat{e}_w \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right] \cdot \overrightarrow{v}. \tag{2.68}$$

Y si definimos un operador ∇ tal que

$$\nabla = \widehat{e}_u \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \widehat{e}_v \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \widehat{e}_w \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}, \tag{2.69}$$

la Ec.(2.68) resulta ser

$$\frac{d}{dt}\Lambda = h_u h_v h_w \nabla \cdot \overrightarrow{v}, \tag{2.70}$$

con lo cual

$$\int_\Omega \rho \frac{d}{dt}\Lambda d\Omega = \int_\Omega \rho(\nabla \cdot \overrightarrow{v})\Lambda d\Omega, \tag{2.71}$$

donde $\overrightarrow{v}$ corresponde a la velocidad de cada uno de los elementos del volumen. Aplicando este resultado a la Ec.(2.61), tenemos

$$\frac{d}{dt}A = \int_\Omega \left[\Lambda \frac{\partial}{\partial t}\rho(\overrightarrow{r}, t) + \Lambda(\overrightarrow{v} \cdot \nabla)\rho(\overrightarrow{r}, t) + \rho\,(\nabla \cdot \overrightarrow{v})\,\Lambda\right] d\Omega. \tag{2.72}$$

Mas aún, factorizando Λ y recordando que $\Lambda d\Omega = dV$ obtenemos finalmente

$$\frac{d}{dt}A = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}\rho + (\overrightarrow{v} \cdot \nabla)\rho + \rho\,(\nabla \cdot \overrightarrow{v})\right] dV \tag{2.73}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}A = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho\overrightarrow{v})\right] dV, \tag{2.74}$$

que no es más que la Ec.(2.48) que habíamos obtenido anteriormente. Como conclusión podemos afirmar que las Ecs.(2.48) y (2.74) representan la derivada con respecto al tiempo de la integral del volumen que se mueve o distorsiona. Podemos considerar esto como un resultado exacto debido a que en los dos análisis (heurístico y formal) hemos obtenido la misma expresión para la derivada que estudiamos.

El método formal, aunque resulta ser más largo que el método heurístico resulta ser más confiable debido a que obtiene el resultado de manera directa sin utilizar aproximaciones o indefiniciones en el proceso. La diferencia entre el análisis heurístico y el análisis formal es el hecho de que en este último, además de utilizar un cambio de coordenadas, se ha parametrizado a la velocidad del elemento de volumen en cada punto; esto último trae como consecuencia que la dependencia temporal quede restringida sólo a ciertos parámetros (que en algunos casos logran ser completamente independientes, como en el caso del volumen) logrando con ello que el análisis sea más claro y que el desarrollo matemático del problema se vuelva mucho más sencillo.

2.1.3 *Derivada temporal de un flujo: Ley de Faraday*

Si regresamos un poco sobre el primer capítulo de esta tesis, podremos ver que una de las ecuaciones de Maxwell presenta una relación semejante a las que hemos estado analizando. No obstante, debido a que las expresiones anteriormente descritas no son idénticas a la ecuación de Maxwell mencionada, nos dimos a la tarea de buscar alguna que resultase ser exactamente igual a ella: la derivada temporal de un flujo. Con anterior, es fácil darnos cuenta de que la ecuación de Maxwell a la que nos referimos es la llamada ley de Faraday, en su forma integral. Para realizar este estudio, procederemos de la misma forma que en la primera sección de este capítulo: empezaremos con el cálculo heurístico de la derivada temporal de un flujo considerando que la superficie se mueve o se deforma con el tiempo, para después analizar qué tan certeras o erradas resultan nuestras ecuaciones.

Primeramente consideremos una superficie abierta S cuya frontera es un circuito C que se mueve y deforma con el tiempo, es decir, $S = S(t)$ y $C = C(t)$. Sea $\overrightarrow{B}$ un campo magnético variable tal que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t)$. Matemáticamente, el flujo Φ debido al campo $\overrightarrow{B}$ a través de la superficie S se define como:

$$\Phi = \int_{S(t)} \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t) \cdot d\overrightarrow{S}. \tag{2.75}$$

Para calcular la razón de cambio con respecto al tiempo del flujo Φ derivamos la Ec.2.75:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S}. \qquad (2.76)$$

Con la definición de derivada tenemos:

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{1}{\Delta t}\int_{S_2} \overrightarrow{B}_{t+dt} \cdot d\overrightarrow{S_2} - \int_{S_1} \overrightarrow{B}_t \cdot d\overrightarrow{S}_1 \qquad (2.77)$$

Donde los subíndices $t + dt$ y t se refieren al tiempo de evaluación de los campos y a la posición de la superficie mostrados en la FIGURA 9.

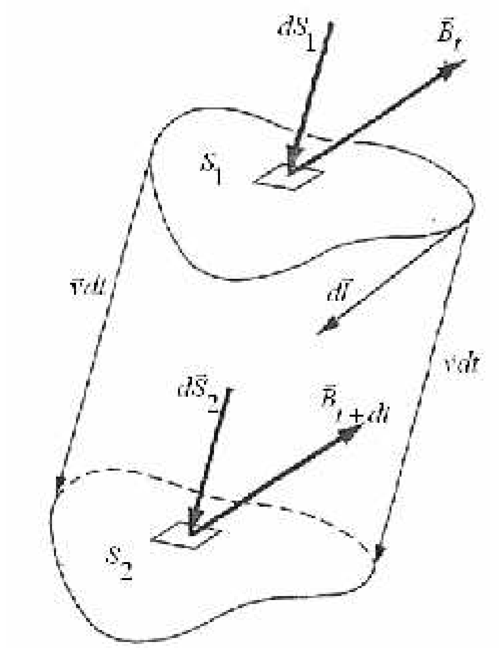

FIGURA 9

Aplicando el teorema de Gauss en un tiempo t para el volumen encerrado por S_1 , S_2 y la superficie barrida por el contorno debido al movimiento de la superficie del tiempo t al tiempo $t + \Delta t$.

$$\int_V \nabla \cdot \overrightarrow{B} dV \simeq \int \left(\overrightarrow{B}_t \cdot d\overrightarrow{S_2} - \overrightarrow{B}_t \cdot d\overrightarrow{S}_1\right) - \oint \overrightarrow{B}_t \cdot \left(\overrightarrow{v} dt \times d\overrightarrow{l}\right) \quad (2.78)$$

**Debe observarse aquí la primera suposición en el análisis: para el último término se ha definido $d\overrightarrow{S} = \overrightarrow{v}dt \times d\overrightarrow{l}$ con el fin de representar el cambio de flujo a través de la superficie generada por el movimiento de la frontera de la superficie S, la expresión para $d\overrightarrow{S}$ se deduce de la FIGURA 9 considerando que $\overrightarrow{v}$ es la velocidad de cada elemento de superficie o del contorno sin que esto sea formalmente justificado. Por otro lado, el flujo a través de las superficies S_1 y S_2 se considera al tiempo t debido a que el teorema de Gauss aplica sólo para valores simultáneos del campo magnético $\overrightarrow{B}$. El valor para $\overrightarrow{B}$ sobre S_2 al tiempo $t + dt$ puede ser encontrado en términos de su valor al tiempo t mediante el teorema de aproximación de Taylor:

$$\overrightarrow{B}_{t+dt} = \overrightarrow{B}_t + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} dt + ... \tag{2.79}$$

Sustituyendo 2.78 y 2.79 en la ec.2.77 en el límite de $\Delta t \longrightarrow 0$ obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \simeq \int_{S(t)} \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \cdot d\overrightarrow{S} + \oint_{C(t)} \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{l} + \int_{S(t)} \frac{\nabla \cdot \overrightarrow{B}}{dt} dV. \tag{2.80}$$

Aplicando el teorema de Stokes y el hecho de que

$$dV \simeq \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{S} dt, \tag{2.81}$$

obtenemos finalmente

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S(t)} \left[\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \nabla \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{v} \right) + \left(\nabla \cdot \overrightarrow{B} \right) \overrightarrow{v} \right] \cdot d\overrightarrow{S}. \tag{2.82}$$

2.1.4 *La derivada de un flujo bajo el enfoque del análisis vectorial*

Ahora bien, mostraremos a continuación que es sencillo demostrar la validez de la Ec.(2.82) obteniéndola mediante un método más formal que involucra sólo análisis vectorial. En efecto, para realizar este cálculo deberemos parametrizar una superficie abierta, moviéndose y deformándose. Para ello, consideraremos las coordenadas u y v que parametricen a la superficie $S(t)$ a cada instante y de esta forma el tiempo será un parámetro independiente.

NOTA: Para poder proceder como lo hicimos anteriormente, es posible completar la parametrización agregando una tercer componente w de tal forma que u, v y w formen simplemente un cambio de coordenadas y los vectores $\widehat{e}_u$, $\widehat{e}_v$ y $\widehat{e}_w$ formen una base vectorial que sea ortonormal.

Tenemos entonces que cualquier punto de la superficie $S(t)$ se podrá escribir como

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v, t). \tag{2.83}$$

Por otro lado, si observamos la FIGURA 10 podremos darnos cuenta que los vectores $\overrightarrow{r}_u$ y $\overrightarrow{r}_v$ son paralelos a la superficie, mientras que $\overrightarrow{r}_w$ es siempre perpendicular a ellos (y en consecuencia también a la superficie). Sin embargo, no se debe confundir $\overrightarrow{r}_w$ con la velocidad $\overrightarrow{v}$ de cada elemento de superficie ni tienen porque, estos útlimos, ser paralelos entre sí.

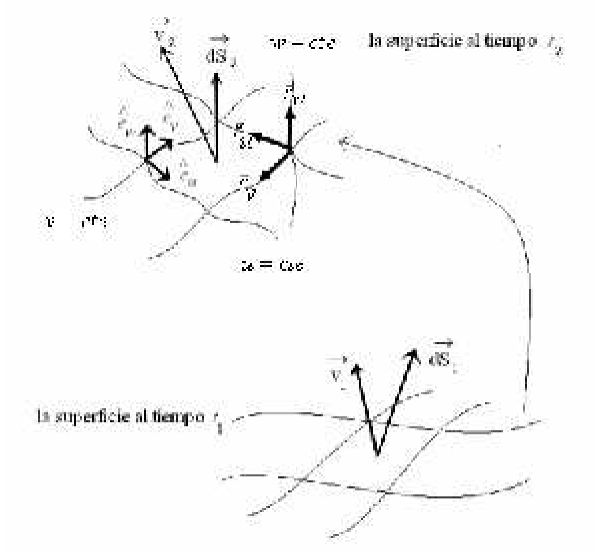

FIGURA 10

Por lo anterior es claro que a cada instante el elemento de superficie está descrito por

$$d\overrightarrow{S} = \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v dudv, \tag{2.84}$$

y de ello podemos obtener la derivada del flujo como

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{d}{dt}\int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S}. \tag{2.85}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{d}{dt}\int_{\Gamma} \overrightarrow{B}\left[(u,v,t),t\right] \cdot \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v dudv, \tag{2.86}$$

donde Γ representa la superficie descrita por u y v, tal que $\Gamma \longrightarrow S(t)$ a cada instante. Por otro lado, considerando las definiciones dadas en la Ec.(2.55) podemos ver fácilmente que

$$\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = h_u h_v \widehat{e}_u \times \widehat{e}_v = h_u h_v \widehat{e}_w \tag{2.87}$$

Luego entonces

$$d\overrightarrow{S} = \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v dudv = (h_u \widehat{e}_u) \times (h_v \widehat{e}_v)\, dudv \tag{2.88}$$

$$\Longrightarrow d\overrightarrow{S} = h_u h_v \left(\widehat{e}_u \times \widehat{e}_v\right) dudv = h_u h_v \widehat{e}_w dudv. \tag{2.89}$$

Aplicamos la derivada entonces en la Ec.(2.86)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi &= \int_\Gamma \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{B}\left[(u,v,t),t\right]\right] \cdot \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v dudv \\ &\quad + \int_\Gamma \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}(u,v,t),t) \cdot \left[\frac{d}{dt}(\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v)\right] dudv, \end{aligned} \tag{2.90}$$

y recurriendo al mismo razonamiento que utilizamos para la Ec.(2.60) el primer término de la suma se convierte simplemente en

$$\int_\Gamma \left[\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \nabla)\overrightarrow{B}\right] \cdot \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v dudv, \tag{2.91}$$

mientras que el segundo por el momento lo escribimos como

$$\int_\Gamma \overrightarrow{B} \cdot \frac{\partial(\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v)}{\partial t} dudv, \tag{2.92a}$$

utilizando la parcial respecto del tiempo con la intención de enfatizar la dependencia explícita de $\overrightarrow{r}_u$ y $\overrightarrow{r}_v$. Si utilizamos lo obtenido en la Ec.(2.89) podemos escribir que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}\right]\cdot \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v dudv \\
&+ \int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot \frac{\partial(h_u h_v \widehat{e}_w)}{\partial t} dudv \\
&= \int_\Gamma \left[\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}\right]\cdot \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v dudv \\
&+ \int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot \widehat{e}_w \frac{\partial(h_u h_v)}{\partial t} dudv + \int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot h_u h_v \frac{\partial(\widehat{e}_w)}{\partial t} dudv \\
&= \int_\Gamma \left[\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}\right]\cdot \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v dudv \\
&+ \int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot \widehat{e}_w \left(h_u \frac{\partial h_v}{\partial t} + h_v \frac{\partial h_u}{\partial t}\right) dudv + \int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot h_u h_v \frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t} dudv.
\end{aligned} \tag{2.93}
$$

Recordando las definiciones dadas en la Ec.(2.55) vemos que

$$
\frac{\partial h_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}\right| = \frac{\partial}{\partial t}\sqrt[2]{\sum\left(\frac{\partial r_i}{\partial \alpha}\right)^2}, \tag{2.94}
$$

donde r_i representa las componentes del vector $\overrightarrow{r}$. Ahora procederemos a desarrollar el álgebra implícita en la ecuación anterior con el fin de encontrar una expresión para $\frac{\partial h_\alpha}{\partial t}$ que nos convendrá más adelante en los cálculos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h_\alpha}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum\left(\frac{\partial r_i}{\partial \alpha}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum\left(\frac{\partial r_i}{\partial \alpha}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum\left(\frac{\partial r_i}{\partial \alpha}\right)^2\right) = \frac{1}{2h_\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}\right|^2 \\
&= \frac{1}{2h_\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}\right)^2 = \frac{1}{2h_\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2h_\alpha}\left[\left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}\right) + \left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2h_\alpha}\left[2\left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}\right)\right] = \frac{1}{2h_\alpha}\left[2\widehat{e}_\alpha h_\alpha \overrightarrow{v}_\alpha\right] = \overrightarrow{v}_\alpha \cdot \widehat{e}_\alpha
\end{aligned} \tag{2.95}
$$

Por otro lado, si definimos $\overrightarrow{B}_w = \overrightarrow{B} \cdot \widehat{e}_w$ podremos escribir la Ec.(2.93) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi &= \int_{S(t)} \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \nabla \right) \overrightarrow{B} \right) \cdot d\overrightarrow{S} \\ &+ \int_{\Gamma} \overrightarrow{B}_w \left(h_u \overrightarrow{v}_v \cdot \widehat{e}_v + h_v \overrightarrow{v}_u \cdot \widehat{e}_u \right) dudv + \int_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot h_u h_v \frac{\partial \left(\widehat{e}_w \right)}{\partial t} dudv, \end{aligned} \tag{2.96}$$

factorizando $h_u h_v dudv$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi &= \int_{S(t)} \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \nabla \right) \overrightarrow{B} \right) \cdot d\overrightarrow{S} \\ &+ \int_{\Gamma} \left[\overrightarrow{B}_w \left(\frac{\overrightarrow{v}_v}{h_v} \cdot \widehat{e}_v + \frac{\overrightarrow{v}_u}{h_u} \cdot \widehat{e}_u \right) + \overrightarrow{B} \cdot \frac{\partial \left(\widehat{e}_w \right)}{\partial t} \right] h_u h_v dudv, \end{aligned} \tag{2.97}$$

y considerando que

$$\overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v dudv = \overrightarrow{B} \cdot \widehat{e}_w h_u h_v dudv = \overrightarrow{B}_w h_u h_v dudv, \tag{2.98}$$

podemos conmutar el producto punto en el segundo sumando para obtener

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi &= \int_{S(t)} \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \nabla \right) \overrightarrow{B} \right) \cdot d\overrightarrow{S} \\ &+ \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \left(\frac{\widehat{e}_v}{h_v} \cdot \overrightarrow{v}_v + \frac{\widehat{e}_u}{h_u} \cdot \overrightarrow{v}_u \right) \cdot d\overrightarrow{S} + \int_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot \frac{\partial \left(\widehat{e}_w \right)}{\partial t} h_u h_v dudv. \end{aligned} \tag{2.99}$$

NOTA: Para simplificar la notación, de aquí en adelante vamos a escribir $d\Gamma = h_u h_v dudv$.

Por otro lado, retomando la expresión dada en la Ec.(2.64) para $\overrightarrow{v}_n$ es fácil obtener

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi &= \int_{S(t)} \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \nabla\right) \overrightarrow{B} \right) \cdot d\overrightarrow{S} \qquad (2.100) \\
&\quad + \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \left[\left(\frac{\widehat{e}_v}{h_v} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial v} + \frac{\widehat{e}_u}{h_u} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial u} \right) \right] \cdot d\overrightarrow{S} + \int_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot \frac{\partial \left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t} d\Gamma \\
&= \int_{S(t)} \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \nabla\right) \overrightarrow{B} \right) \cdot d\overrightarrow{S} \\
&\quad + \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \left[\left(\frac{\widehat{e}_v}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\widehat{e}_u}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \right) \cdot \overrightarrow{v} \right] \cdot d\overrightarrow{S} + \int_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot \frac{\partial \left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t} d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Sumamos y restamos en la integral el término

$$
\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w}, \qquad (2.101)
$$

con lo cual resulta una nueva expresión para $\frac{d}{dt}\Phi$ dada como

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi &= \int_{S(t)} \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \nabla\right) \overrightarrow{B} \right) \cdot d\overrightarrow{S} \qquad (2.102) \\
&\quad + \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \left[\left(\frac{\widehat{e}_v}{h_v} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial v} + \frac{\widehat{e}_u}{h_u} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial u} + \frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \right) \right] \cdot d\overrightarrow{S} \\
&\quad - \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \right] \cdot d\overrightarrow{S} + \int_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot \frac{\partial \left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t} h_u h_v du dv,
\end{aligned}
$$

donde identificamos fácilmente el operador ∇ definido en la Ec.(2.69) y escribimos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi &= \int_{S(t)}\left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}+(\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}\right)\cdot d\overrightarrow{S} \\ &\quad+\int_{S(t)}\overrightarrow{B}\,(\nabla\cdot\overrightarrow{v})\cdot d\overrightarrow{S}-\int_{S(t)}\overrightarrow{B}\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial w}\right]\cdot d\overrightarrow{S} \\ &\quad+\int_{\Gamma}\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}h_u h_v du dv \\ &= \int_{S(t)}\left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}+(\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{B}+\overrightarrow{B}\,(\nabla\cdot\overrightarrow{v})\right)\cdot d\overrightarrow{S} \\ &\quad-\int_{S(t)}\overrightarrow{B}\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial w}\right]\cdot d\overrightarrow{S}+\int_{\Gamma}\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}d\Gamma.\end{aligned} \tag{2.103}$$

Enfocaremos nuestra atención en los dos últimos términos de la ecuación anterior, con el fin de encontrar para ellos, una expresión que simplifique los cálculos y nos provea de términos más convenientes para nuestro propósito.

Definamos entonces

$$I=-\int_{S(t)}\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial w}\right]+\int_{\Gamma}\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}d\Gamma, \tag{2.104}$$

y llamemos J al último sumando de la ecuación anterior.

Siendo así, trabajaremos un poco el álgebra de este término tomando en cuenta las definiciones dadas en la Ec.(2.55):

$$\begin{aligned} J &= \int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\widehat{e}_w\right)}{\partial t}d\Gamma \qquad (2.105)\\ \Longrightarrow\ & J=\int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\overrightarrow{r}_w}{h_w}\right)}{\partial t}d\Gamma\\ &= \int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\left[\frac{1}{h_w}\frac{\partial\overrightarrow{r}_w}{\partial t}+\overrightarrow{r}_w\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{h_w}\right]d\Gamma\\ &= \int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\left[\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}\right)+\overrightarrow{r}_w\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{h_w}\right]d\Gamma\\ &= \int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\left[\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial t}\right)+\overrightarrow{r}_w\left(-\frac{1}{h_w^2}\frac{\partial h_w}{\partial t}\right)\right]d\Gamma. \end{aligned}$$

Desarrollaremos el último término en la expresión anterior de manera que podamos simplificarlo como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}_w\left(-\frac{1}{h_w^2}\frac{\partial h_w}{\partial t}\right) &= \overrightarrow{r}_w\left(-\frac{1}{h_w^2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}\right|\right) \qquad (2.106)\\ &= \widehat{e}_w\left(-\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}\right|\right)=\widehat{e}_w\left(-\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial t}\left|h_w\widehat{e}_w\right|\right)\\ &= \widehat{e}_w\left(-\frac{1}{h_w}\frac{\partial h_w}{\partial t}\right)=\widehat{e}_w\left(-\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}}\right)\\ &= \widehat{e}_w\left(-\frac{1}{h_w}\left[\left(\frac{1}{2\sqrt[2]{\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}\right)\right)\right]\right)\\ &= \widehat{e}_w\left(-\frac{1}{h_w}\left[\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}}}\right]\right)\\ &= \widehat{e}_w\left(-\frac{1}{h_w}\left[h_w\widehat{e}_w\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}\right)\frac{1}{h_w}\right]\right)\\ &= \widehat{e}_w\left(-\frac{1}{h_w}\widehat{e}_w\cdot\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial w}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo en J lo anterior y recordando la definición dada en la Ec.(2.89) para $d\overrightarrow{S}$ obtenemos una nueva expresión dada por

$$\begin{aligned} J &= \int_\Gamma \overrightarrow{B} \cdot \left[\frac{1}{h_w} \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} - \widehat{e}_w \left(\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \right) \right] d\Gamma \\ &= \int_\Gamma \overrightarrow{B} \cdot \left(\frac{1}{h_w} \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \right) d\Gamma - \int_\Gamma \overrightarrow{B} \cdot \widehat{e}_w d\Gamma \left(\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \right) \\ &= \int_\Gamma \overrightarrow{B} \cdot \left(\frac{1}{h_w} \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \right) d\Gamma - \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left(\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \right), \end{aligned} \tag{2.107}$$

la cual introduciremos en la Ec.(2.104) para escribir:

$$\begin{aligned} I &= -\int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \right] + \int_\Gamma \overrightarrow{B} \cdot \frac{\partial \left(\widehat{e}_w \right)}{\partial t} d\Gamma \\ &= -\int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \right] \\ &\quad + \int_\Gamma \overrightarrow{B} \cdot \left(\frac{1}{h_w} \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \right) d\Gamma - \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left(\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \right) \\ &= -2 \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \right] + \int_\Gamma \overrightarrow{B} \cdot \left(\frac{1}{h_w} \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \right) d\Gamma. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Definiendo el vector velocidad $(\overrightarrow{v})$ como

$$\overrightarrow{v} = (v_u, v_v, v_w) = v_u \widehat{e}_u + v_v \widehat{e}_v + v_w \widehat{e}_w, \tag{2.109}$$

podemos continuar con el desarrollo del álgebra y darnos cuenta de que la Ec.(2.108) se convierte en

$$
\begin{aligned}
I &= -2\int_{S(t)} \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\left(v_u\widehat{e}_u+v_v\widehat{e}_v+v_w\widehat{e}_w\right)\right] \\
&\quad +\int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\left(\frac{1}{h_w}\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial w}\right)d\Gamma \\
&= -2\int_{S(t)} \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial\left(v_u\widehat{e}_u\right)}{\partial w}+\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial\left(v_v\widehat{e}_v\right)}{\partial w}+\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial\left(v_w\widehat{e}_w\right)}{\partial w}\right] \\
&\quad +\int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\left(\frac{1}{h_w}\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial w}\right)d\Gamma \\
&= -2\int_{S(t)} \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\left(\widehat{e}_u\frac{\partial v_u}{\partial w}+v_u\frac{\partial\widehat{e}_u}{\partial w}\right)\right] \\
&\quad -2\int_{S(t)} \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\left(\widehat{e}_v\frac{\partial v_v}{\partial w}+v_v\frac{\partial\widehat{e}_v}{\partial w}\right)\right] \\
&\quad -2\int_{S(t)} \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\left(\widehat{e}_w\frac{\partial v_w}{\partial w}+v_w\frac{\partial\widehat{e}_w}{\partial w}\right)\right] \\
&\quad +\int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\left(\frac{1}{h_w}\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial w}\right)d\Gamma,
\end{aligned}
\tag{2.110}
$$

y tomando en cuenta que $\widehat{e}_u, \widehat{e}_v$ y $\widehat{e}_w$ forman una base ortonormal podemos simplificar la Ec.(2.110):

$$
\begin{aligned}
I &= -2\int_{S(t)} \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot v_u\frac{\partial\widehat{e}_u}{\partial w}\right] \\
&\quad -2\int_{S(t)} \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot v_v\frac{\partial\widehat{e}_v}{\partial w}\right] \\
&\quad -2\int_{S(t)} \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}\left[\frac{1}{h_w}\frac{\partial v_w}{\partial w}+\left(v_w\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial\widehat{e}_w}{\partial w}\right)\right] \\
&\quad +\int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\left(\frac{1}{h_w}\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial w}\right)d\Gamma,
\end{aligned}
\tag{2.111}
$$

pero dado que

$$
\widehat{e}_w\cdot\widehat{e}_w = 1, \tag{2.112}
$$

al derivar, nos daremos cuenta de que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w}\left[\widehat{e}_w \cdot \widehat{e}_w\right] &= 2\widehat{e}_w \cdot \frac{\partial}{\partial w}\left[\widehat{e}_w\right] = \frac{\partial}{\partial w}\left[1\right] = 0 \\
&\Longrightarrow \widehat{e}_w \cdot \frac{\partial}{\partial w}\left[\widehat{e}_w\right] = 0,
\end{aligned} \tag{2.113}$$

y obtendremos finalmente

$$\begin{aligned}
I &= -2\int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot v_u \frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial w}\right] \\
&\quad -2\int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot v_v \frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial w}\right] \\
&\quad -2\int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{1}{h_w}\frac{\partial v_w}{\partial w}\right] \\
&\quad +\int_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot \left(\frac{1}{h_w}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w}\right) d\Gamma.
\end{aligned} \tag{2.114}$$

Con lo anterior, podemos regresar al cálculo de la derivada del flujo de la Ec.(2.103), llegando a:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi &= \int_{S(t)} \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \nabla\right)\overrightarrow{B} + \overrightarrow{B}\left(\nabla \cdot \overrightarrow{v}\right)\right) \cdot d\overrightarrow{S} \\
&\quad -2\int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot v_u \frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial w}\right] - 2\int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot v_v \frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial w}\right] \\
&\quad -2\int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{1}{h_w}\frac{\partial v_w}{\partial w}\right] + \int_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot \left(\frac{1}{h_w}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w}\right) d\Gamma.
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Como ya hemos mencionado, lo que pretendemos con este cálculo es probar de manera matemáticamente formal que la expresión para el flujo obtenida en la Ec.(2.82) es correcta. En la Ec.(2.115) ya se observa cierta similitud con la Ec.(2.82), pero se tienen aún algunas excepciones.

Con la intención de alcanzar la igualdad entre las dos ecuaciones antes mencionadas continuaremos los cálculos utilizando el siguiente método.

Primero, consideremos la propiedad vectorial[1]: Sea $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, se define el producto siguiente

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) &= \overrightarrow{A}\left(\nabla \cdot \overrightarrow{B}\right) - \overrightarrow{B}\left(\nabla \cdot \overrightarrow{A}\right) \\ &+ \left(\overrightarrow{B} \cdot \nabla\right)\overrightarrow{A} - \left(\overrightarrow{A} \cdot \nabla\right)\overrightarrow{B}\,. \end{aligned} \tag{2.116}$$

Ahora la aplicamos a los vectores $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{v}$

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{v}\right) &= \overrightarrow{B}\left(\nabla \cdot \overrightarrow{v}\right) - \overrightarrow{v}\left(\nabla \cdot \overrightarrow{B}\right) \\ &+ \left(\overrightarrow{v} \cdot \nabla\right)\overrightarrow{B} - \left(\overrightarrow{B} \cdot \nabla\right)\overrightarrow{v}, \end{aligned} \tag{2.117}$$

con lo que fácilmente notamos que la Ec.(2.82) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \int_{S(t)} \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \overrightarrow{B}\left(\nabla \cdot \overrightarrow{v}\right) + \left(\overrightarrow{v} \cdot \nabla\right)\overrightarrow{B}\right) \cdot d\overrightarrow{S} \\ &- \int_{S(t)} \left(\overrightarrow{B} \cdot \nabla\right)\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{S}, \end{aligned} \tag{2.118}$$

permitiéndonos comparar entonces la Ec.(2.82) obtenida de forma intuitiva, con la Ec.(2.115) que representa nuestro resultado formal. De tal comparación obtenemos que la condición de igualdad que debe satisfacerse para probar que los cálculos intuitivos son correctos es:

$$
\begin{aligned}
-\int_{S(t)} \left(\overrightarrow{B} \cdot \nabla\right) \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{S} &= -2 \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot v_u \frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial w}\right] \\
&\quad -2 \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot v_v \frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial w}\right] \\
&\quad -2 \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{1}{h_w} \frac{\partial v_w}{\partial w}\right] \\
&\quad + \int_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot \left(\frac{1}{h_w} \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w}\right) d\Gamma,
\end{aligned}
\tag{2.119}
$$

o lo que es lo mismo

$$
\begin{aligned}
\Psi &= \int_{S(t)} \left(\overrightarrow{B} \cdot \nabla\right) \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{S} \\
&= 2 \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot v_u \frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial w}\right] \\
&\quad +2 \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w} \cdot v_v \frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial w}\right] \\
&\quad +2 \int_{S(t)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \left[\frac{1}{h_w} \frac{\partial v_w}{\partial w}\right] \\
&\quad - \int_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot \left(\frac{1}{h_w} \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w}\right) d\Gamma.
\end{aligned}
\tag{2.120}
$$

Pues bien, busquemos ahora una expresión más conveniente para el término del lado izquierdo de la igualdad. Definiremos

$$
\overrightarrow{B} = (B_u, B_v, B_w) = B_u \widehat{e}_u + B_v \widehat{e}_v + B_w \widehat{e}_w, \tag{2.121}
$$

utilizaremos las definiciones de $\overrightarrow{v}$ y ∇ dadas en las Ecs.(2.109) y (2.69) y realizaremos el álgebra necesaria para obtener una expresión comparable con los términos del lado derecho.

Entonces, enfatizado lo anterior tenemos que

$$
\begin{aligned}
\Psi &= \int_{S(t)} \langle (B_u\widehat{e}_u + B_v\widehat{e}_v + B_w\widehat{e}_w) \\
&\quad \cdot \left(\frac{\widehat{e}_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\widehat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\widehat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\rangle \\
&\quad (v_u\widehat{e}_u + v_v\widehat{e}_v + v_w\widehat{e}_w)\cdot d\overrightarrow{S} \\
&= \int_{S(t)} \langle \left(\frac{B_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{B_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{B_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\rangle \\
&\quad (v_u\widehat{e}_u + v_v\widehat{e}_v + v_w\widehat{e}_w)\cdot d\overrightarrow{S} \\
&= \int_{S(t)} \frac{B_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}(v_u\widehat{e}_u + v_v\widehat{e}_v + v_w\widehat{e}_w)\cdot d\overrightarrow{S} \\
&\quad + \int_{S(t)} \frac{B_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}(v_u\widehat{e}_u + v_v\widehat{e}_v + v_w\widehat{e}_w)\cdot d\overrightarrow{S} \\
&\quad + \int_{S(t)} \frac{B_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}(v_u\widehat{e}_u + v_v\widehat{e}_v + v_w\widehat{e}_w)\cdot d\overrightarrow{S} \\
&= \int_{S(t)} \frac{B_u}{h_u}\left(\frac{\partial v_u}{\partial u}\right)\widehat{e}_u\cdot d\overrightarrow{S} + \int_{S(t)} \frac{B_u}{h_u}\left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial u}\right)v_u\cdot d\overrightarrow{S} \\
&\quad + \int_{S(t)} \frac{B_u}{h_u}\left(\frac{\partial v_v}{\partial u}\right)\widehat{e}_v\cdot d\overrightarrow{S} + \int_{S(t)} \frac{B_u}{h_u}\left(\frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial u}\right)v_v\cdot d\overrightarrow{S} \\
&\quad + \int_{S(t)} \frac{B_u}{h_u}\left(\frac{\partial v_w}{\partial u}\right)\widehat{e}_w\cdot d\overrightarrow{S} + \int_{S(t)} \frac{B_u}{h_u}\left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial u}\right)v_w\cdot d\overrightarrow{S} \\
&\quad + \int_{S(t)} \frac{B_v}{h_v}\left(\frac{\partial v_u}{\partial v}\right)\widehat{e}_u\cdot d\overrightarrow{S} + \int_{S(t)} \frac{B_v}{h_v}\left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial v}\right)v_u\cdot d\overrightarrow{S} \\
&\quad + \int_{S(t)} \frac{B_v}{h_v}\left(\frac{\partial v_v}{\partial v}\right)\widehat{e}_v\cdot d\overrightarrow{S} + \int_{S(t)} \frac{B_v}{h_v}\left(\frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial v}\right)v_v\cdot d\overrightarrow{S} \\
&\quad + \int_{S(t)} \frac{B_v}{h_v}\left(\frac{\partial v_w}{\partial v}\right)\widehat{e}_w\cdot d\overrightarrow{S} + \int_{S(t)} \frac{B_v}{h_v}\left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial v}\right)v_w\cdot d\overrightarrow{S} \\
&\quad + \int_{S(t)} \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial v_u}{\partial w}\right)\widehat{e}_u\cdot d\overrightarrow{S} + \int_{S(t)} \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial w}\right)v_u\cdot d\overrightarrow{S} \\
&\quad + \int_{S(t)} \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial v_v}{\partial w}\right)\widehat{e}_v\cdot d\overrightarrow{S} + \int_{S(t)} \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial w}\right)v_v\cdot d\overrightarrow{S} \\
&\quad + \int_{S(t)} \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial v_w}{\partial w}\right)\widehat{e}_w\cdot d\overrightarrow{S} + \int_{S(t)} \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial w}\right)v_w\cdot d\overrightarrow{S},
\end{aligned}
\tag{2.122}
$$

NOTA: Es importante mencionar que en el desarrollo anterior se ha utilizado la notación $\langle(...)\rangle$ para indicar que la expresión que se encuentra dentro de ellos sigue siendo un operador vectorial que como se puede observar, es muy semejante al operador ∇ definido con anterioridad. En cuando al álgebra, lo único que se hizo fue aplicar dicho operador sobre el vector $\overrightarrow{v}$ para después escribir explícitamente cada una de las derivadas y obtener así, los 16 términos que se presentan al final de la Ec.(2.122).

Sin embargo, recordando que $d\overrightarrow{S}$ tiene la forma dada en la Ec.(2.89) y que los vectores $\widehat{e}_u$, $\widehat{e}_v$ y $\widehat{e}_w$ son ortogonales, podemos reducir un poco la expresión anterior a sólo12 términos

$$\begin{aligned}\Psi &= \int_\Gamma \frac{B_u}{h_u}\left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial u}\right) v_u \cdot \widehat{e}_w d\Gamma \\ &+ \int_\Gamma \frac{B_u}{h_u}\left(\frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial u}\right) v_v \cdot \widehat{e}_w d\Gamma + \int_\Gamma \frac{B_u}{h_u}\left(\frac{\partial v_w}{\partial u}\right) d\Gamma \\ &+ \int_\Gamma \frac{B_u}{h_u}\left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial u}\right) v_w \cdot \widehat{e}_w d\Gamma + \int_\Gamma \frac{B_v}{h_v}\left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial v}\right) v_u \cdot \widehat{e}_w d\Gamma \\ &+ \int_\Gamma \frac{B_v}{h_v}\left(\frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial v}\right) v_v \cdot \widehat{e}_w d\Gamma + \int_\Gamma \frac{B_v}{h_v}\left(\frac{\partial v_w}{\partial v}\right) d\Gamma \\ &+ \int_\Gamma \frac{B_v}{h_v}\left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial v}\right) v_w \cdot \widehat{e}_w d\Gamma + \int_\Gamma \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial w}\right) v_u \cdot \widehat{e}_w d\Gamma \\ &+ \int_\Gamma \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial w}\right) v_v \cdot \widehat{e}_w d\Gamma + \int_\Gamma \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial v_w}{\partial w}\right) d\Gamma \\ &+ \int_\Gamma \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial w}\right) v_w \cdot \widehat{e}_w d\Gamma.\end{aligned} \tag{2.123}$$

Además, si consideramos el resultado obtenido en la Ec.(2.113), nos quedarán únicamente 9 términos de los 18 que habíamos obtenido inicialmente.

Por tanto, la Ec.(2.122) se puede expresar como

$$
\begin{aligned}
\Psi \;=\; & \int_\Gamma \frac{B_u}{h_u}\left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial u}\right) v_u \cdot \widehat{e}_w d\Gamma \\
& + \int_\Gamma \frac{B_u}{h_u}\left(\frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial u}\right) v_v \cdot \widehat{e}_w d\Gamma + \int_\Gamma \frac{B_u}{h_u}\left(\frac{\partial v_w}{\partial u}\right) d\Gamma \\
& + \int_\Gamma \frac{B_v}{h_v}\left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial v}\right) v_u \cdot \widehat{e}_w d\Gamma \\
& + \int_\Gamma \frac{B_v}{h_v}\left(\frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial v}\right) v_v \cdot \widehat{e}_w d\Gamma + \int_\Gamma \frac{B_v}{h_v}\left(\frac{\partial v_w}{\partial v}\right) d\Gamma \\
& + \int_\Gamma \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial w}\right) v_u \cdot \widehat{e}_w d\Gamma \\
& + \int_\Gamma \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial w}\right) v_v \cdot \widehat{e}_w d\Gamma + \int_\Gamma \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial v_w}{\partial w}\right) d\Gamma.
\end{aligned}
\tag{2.124}
$$

Para seguir adelante en la simplificación, demostraremos la validez de algunas identidades de forma general para poder aplicarlas después en casos particulares. Tomando las definiciones dadas en la Ec.(2.55) es fácil demostrar como $\overrightarrow{r}_\alpha \cdot \widehat{e}_\beta = 0$, y con ello observar fácilmente que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\widehat{e}_\beta\right) \cdot \widehat{e}_\gamma &= \frac{1}{h_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\overrightarrow{r}_\beta}{h_\beta}\right) \cdot \widehat{e}_\gamma \\
&= \frac{1}{h_\alpha}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{h_\beta}\right)\overrightarrow{r}_\beta \cdot \widehat{e}_\gamma + \frac{1}{h_\beta}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r}_\beta}{\partial \alpha}\right)\cdot \widehat{e}_\gamma\right] \\
&= \frac{1}{h_\alpha h_\beta}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \beta}\right) \cdot \widehat{e}_\gamma \\
&= \frac{1}{h_\alpha h_\beta}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r}_\alpha}{\partial \beta}\right) \cdot \widehat{e}_\gamma = \frac{1}{h_\beta}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\overrightarrow{r}_\alpha}{h_\alpha}\right) \cdot \widehat{e}_\gamma \\
&= \frac{1}{h_\beta}\left(\frac{\partial \widehat{e}_\alpha}{\partial \beta}\right) \cdot \widehat{e}_\gamma \qquad \forall\, \alpha \neq \beta \neq \gamma.
\end{aligned}
\tag{2.125}
$$

Es relativamente sencillo demostrar que la igualdad anterior se satisface para cualquier orden de los 3 subíndices, bastará con analizar de igual manera cada caso particular. Sin embargo, la condición dada en la Ec.(2.125) se cumple siempre y cuando los 3 subíndices sean distintos entre sí.

Por otro lado, dado que los vectores $\widehat{e}_\alpha$, $\widehat{e}_\beta$ y $\widehat{e}_\gamma$ son perpendiculares podemos concluir que cualquier derivada de dos vectores distintos se anula, es decir:

$$\frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial\left(\widehat{e}_\beta\cdot\widehat{e}_\gamma\right)}{\partial\alpha}=\frac{1}{h_\alpha}\left[\left(\frac{\partial\widehat{e}_\beta}{\partial\alpha}\right)\cdot\widehat{e}_\gamma+\left(\frac{\partial\widehat{e}_\gamma}{\partial\alpha}\right)\cdot\widehat{e}_\beta\right]=0, \tag{2.126}$$

y por ende

$$\Longrightarrow\frac{1}{h_\alpha}\left(\frac{\partial\widehat{e}_\beta}{\partial\alpha}\right)\cdot\widehat{e}_\gamma=-\frac{1}{h_\alpha}\left(\frac{\partial\widehat{e}_\gamma}{\partial\alpha}\right)\cdot\widehat{e}_\beta\quad\forall\ \alpha\neq\beta\neq\gamma. \tag{2.127}$$

Escribiendo de manera general la definición dada para $\overrightarrow{v}$ en la Ec.(2.109)

$$\overrightarrow{v}=\left(v_\alpha,v_\beta,v_\gamma\right)=v_\alpha\widehat{e}_\alpha+v_\beta\widehat{e}_\beta+v_\gamma\widehat{e}_\gamma, \tag{2.128}$$

es fácil obtener:

$$\begin{aligned}
\widehat{e}_\alpha\cdot\frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial\overrightarrow{r}_\gamma}{\partial t} &= \frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\gamma}=\frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial t}=\frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma}\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial\gamma} \\
&= \frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(v_\alpha\widehat{e}_\alpha+v_\beta\widehat{e}_\beta+v_\gamma\widehat{e}_\gamma\right) \\
&= \frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma}\cdot\left[\frac{\partial\left(v_\alpha\widehat{e}_\alpha\right)}{\partial\gamma}+\frac{\partial\left(v_\beta\widehat{e}_\beta\right)}{\partial\gamma}+\frac{\partial\left(v_\gamma\widehat{e}_\gamma\right)}{\partial\gamma}\right] \\
&= \frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma}\cdot\left[\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial\gamma}\right)\widehat{e}_\alpha+\left(\frac{\partial\widehat{e}_\alpha}{\partial\gamma}\right)v_\alpha\right] \\
&\quad+\frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma}\cdot\left[\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial\gamma}\right)\widehat{e}_\beta+\left(\frac{\partial\widehat{e}_\beta}{\partial\gamma}\right)v_\beta\right] \\
&\quad+\frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma}\cdot\left[\left(\frac{\partial v_\gamma}{\partial\gamma}\right)\widehat{e}_\gamma+\left(\frac{\partial\widehat{e}_\gamma}{\partial\gamma}\right)v_\gamma\right],
\end{aligned} \tag{2.129}$$

tomando en cuenta la Ec.(2.113) y la ortogonalidad de los vectores $\widehat{e}$ la expresión se reduce a

$$\begin{aligned} \widehat{e}_\alpha \cdot \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial \overrightarrow{r}_\gamma}{\partial t} &= \frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma} \cdot \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial \gamma}\right)\widehat{e}_\alpha \\ &+\frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_\beta}{\partial \gamma}\right) v_\beta + \frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_\gamma}{\partial \gamma}\right) v_\gamma . \end{aligned} \tag{2.130}$$

De lo anterior fue posible obtener 2 resultados, aplicando en cada caso una identidad diferente sobre el segundo término de la suma. El primero resulta al tomar la Ec.(2.125) pues obtenemos que en general $\forall \alpha, \beta, \gamma$ distintas se satisface

$$\begin{aligned} \widehat{e}_\alpha \cdot \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial \overrightarrow{r}_\gamma}{\partial t} &= \frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma} \cdot \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial \gamma}\right)\widehat{e}_\alpha \\ &+\frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\beta} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_\gamma}{\partial \beta}\right) v_\beta + \frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_\gamma}{\partial \gamma}\right) v_\gamma , \end{aligned} \tag{2.131}$$

por otro lado, si utilizamos la Ec.(2.127) se debe satisfacer

$$\begin{aligned} \widehat{e}_\alpha \cdot \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial \overrightarrow{r}_\gamma}{\partial t} &= \frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma} \cdot \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial \gamma}\right)\widehat{e}_\alpha \\ &-\frac{\widehat{e}_\gamma}{h_\beta} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_\alpha}{\partial \beta}\right) v_\beta + \frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_\gamma}{\partial \gamma}\right) v_\gamma . \end{aligned} \tag{2.132}$$

Otra igualdad que nos será útil en el siguiente cálculo es que

$$\widehat{e}_\alpha \cdot \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial \overrightarrow{r}_\gamma}{\partial t} = \frac{\widehat{e}_\alpha}{h_\gamma} \cdot \frac{\partial \left(h_\gamma \widehat{e}_\gamma\right)}{\partial t} = \widehat{e}_\alpha \cdot \frac{\partial \widehat{e}_\gamma}{\partial t} . \tag{2.133}$$

Hechas las anteriores observaciones podremos retomar el cálculo particularizando algunas de las identidades, de manera que las expresiones sean favorables a nuestros fines prácticos.

Para $\alpha = u$, $\beta = v$ y $\gamma = w$ la Ec.(2.131) se escribe como

$$\begin{aligned} \widehat{e}_u \cdot \frac{1}{h_w}\frac{\partial \overrightarrow{r}_w}{\partial t} &= \frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot \left(\frac{\partial v_u}{\partial w}\right)\widehat{e}_u \\ &\quad + \frac{\widehat{e}_u}{h_v} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial v}\right) v_v + \frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial w}\right) v_w, \end{aligned} \tag{2.134}$$

mientras que para $\alpha = w$, $\beta = v$ y $\gamma = u$ la Ec.(2.132) se convierte en

$$\begin{aligned} \widehat{e}_w \cdot \frac{1}{h_u}\frac{\partial \overrightarrow{r}_u}{\partial t} &= \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot \left(\frac{\partial v_w}{\partial u}\right)\widehat{e}_w \\ &\quad - \frac{\widehat{e}_u}{h_v} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial v}\right) v_v + \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial u}\right) v_u. \end{aligned} \tag{2.135}$$

Ahora bien, tomando $\alpha = w$ y $\gamma = u$ podemos expresar la Ec.(2.133)

$$\widehat{e}_u \cdot \frac{1}{h_w}\frac{\partial \overrightarrow{r}_w}{\partial t} = \widehat{e}_u \cdot \frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial t}, \tag{2.136}$$

e invirtiendo el orden, es decir, con $\alpha = u$ y $\gamma = w$ el resultado que se obtiene para la Ec.(2.133) es

$$\widehat{e}_w \cdot \frac{1}{h_u}\frac{\partial \overrightarrow{r}_u}{\partial t} = \widehat{e}_w \cdot \frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial t}, \tag{2.137}$$

Luego, si sumamos las Ecs.(2.134) y (2.135) se tiene que

$$\begin{aligned}
\widehat{e}_u \cdot \frac{1}{h_w}\frac{\partial \overrightarrow{r}_w}{\partial t} + \widehat{e}_w \cdot \frac{1}{h_u}\frac{\partial \overrightarrow{r}_u}{\partial t} &= \frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot \left(\frac{\partial v_u}{\partial w}\right)\widehat{e}_u \\
&\quad + \frac{\widehat{e}_u}{h_v} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial v}\right)v_v + \frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial w}\right)v_w \\
&\quad + \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot \left(\frac{\partial v_w}{\partial u}\right)\widehat{e}_w - \frac{\widehat{e}_u}{h_v} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial v}\right)v_v \\
&\quad + \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial u}\right)v_u \\
&= \frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot \left(\frac{\partial v_u}{\partial w}\right)\widehat{e}_u + \frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial w}\right)v_w \\
&\quad + \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot \left(\frac{\partial v_w}{\partial u}\right)\widehat{e}_w + \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial u}\right)v_u
\end{aligned} \tag{2.138}$$

y utilizando las Ecs.(2.136) y (2.137)

$$\begin{aligned}
\widehat{e}_u \cdot \frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial t} + \widehat{e}_w \cdot \frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial t} &= \frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot \left(\frac{\partial v_u}{\partial w}\right)\widehat{e}_u + \frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial w}\right)v_w \\
&\quad + \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot \left(\frac{\partial v_w}{\partial u}\right)\widehat{e}_w + \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial u}\right)v_{u.}
\end{aligned} \tag{2.139}$$

Sin embargo, el lado izquiero de la igualdad se hace cero dada la ortogonalidad $\widehat{e}_u$ y $\widehat{e}_w$, pues la derivada temporal de el producto punto entre ellos dos se define como

$$\frac{\partial\left(\widehat{e}_w \cdot \widehat{e}_u\right)}{\partial t} = \frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial t} \cdot \widehat{e}_u + \widehat{e}_w \cdot \frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial t} = 0 \tag{2.140}$$

lo cual implica que la Ec.(2.138) resulta ser simplemente

$$-\frac{1}{h_w} \cdot \left(\frac{\partial v_u}{\partial w}\right) - \frac{\widehat{e}_u}{h_w} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial w}\right)v_w = \frac{1}{h_u} \cdot \left(\frac{\partial v_w}{\partial u}\right) + \frac{\widehat{e}_w}{h_u} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial u}\right)v_u \tag{2.141}$$

***De este punto en adelante prosigue un álgebra directa pero demasiado tediosa, por lo que hemos optado por dejarla fuera de la redacción de este documento con la intención de que la lectura del mismo no resulte una tarea demasiado pesada.

Sólo nos limitaremos a mencionar que durante el proceso fue necesario emplear las identidades presentes en las Ecs.(2.125), (2.127) y (2.141). Enfatizado lo anterior, continuaremos nuestro análisis mostrando a continuación la transformación que ha sufrido la Ec.(2.124) durante el desarrollo del álgebra ya mencionada.

$$\begin{aligned}
\Psi \;=\; & -\int_\Gamma \frac{B_u}{h_w}\left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial w}\right) v_w \cdot \widehat{e}_u d\Gamma \\
& -\int_\Gamma \frac{B_u}{h_w}\left(\frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial w}\right) v_v \cdot \widehat{e}_u d\Gamma - \int_\Gamma \frac{B_u}{h_w}\left(\frac{\partial v_u}{\partial w}\right) d\Gamma \\
& -\int_\Gamma \frac{B_v}{h_w}\left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial w}\right) v_u \cdot \widehat{e}_v d\Gamma \\
& -\int_\Gamma \frac{B_v}{h_w}\left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial w}\right) v_w \cdot \widehat{e}_v d\Gamma - \int_\Gamma \frac{B_v}{h_w}\left(\frac{\partial v_v}{\partial w}\right) d\Gamma \\
& +\int_\Gamma \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial w}\right) v_u \cdot \widehat{e}_w d\Gamma \\
& +\int_\Gamma \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial w}\right) v_v \cdot \widehat{e}_w d\Gamma + \int_\Gamma \frac{B_w}{h_w}\left(\frac{\partial v_w}{\partial w}\right) d\Gamma .
\end{aligned} \tag{2.142}$$

Hasta aquí, hemos encontrado una expresión simplificada sólo para el lado izquierdo de la Ec.(2.120), veamos entonces qué sucede del lado derecho para poder establecer la comparación que requerimos. Es fácil notar, que dada la definición para $d\overrightarrow{S}$ en la Ec.(2.89), los tres primero términos del lado derecho de la Ec.(2.120) pueden escribirse como

$$2\int_\Gamma B_w \left[\frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot v_u \frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial w} + \frac{\widehat{e}_w}{h_w}\cdot v_v \frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial w} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial v_w}{\partial w}\right] d\Gamma . \tag{2.143}$$

Además, si desarrollamos un poco el útimo término de la suma en la Ec.(2.120) veremos que

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot \left(\frac{1}{h_w} \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial w} \right) d\Gamma \;=\; & -\int_{\Gamma} \frac{B_u}{h_w} \left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial w} \right) v_w \cdot \widehat{e}_u d\Gamma \\
& -\int_{\Gamma} \frac{B_u}{h_w} \left(\frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial w} \right) v_v \cdot \widehat{e}_u d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{B_u}{h_w} \left(\frac{\partial v_u}{\partial w} \right) d\Gamma \\
& -\int_{\Gamma} \frac{B_v}{h_w} \left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial w} \right) v_u \cdot \widehat{e}_v d\Gamma \\
& -\int_{\Gamma} \frac{B_v}{h_w} \left(\frac{\partial \widehat{e}_w}{\partial w} \right) v_w \cdot \widehat{e}_v d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{B_v}{h_w} \left(\frac{\partial v_v}{\partial w} \right) d\Gamma \\
& -\int_{\Gamma} \frac{B_w}{h_w} \left(\frac{\partial \widehat{e}_u}{\partial w} \right) v_u \cdot \widehat{e}_w d\Gamma \\
& -\int_{\Gamma} \frac{B_w}{h_w} \left(\frac{\partial \widehat{e}_v}{\partial w} \right) v_v \cdot \widehat{e}_w d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{B_w}{h_w} \left(\frac{\partial v_w}{\partial w} \right) d\Gamma .
\end{aligned} \tag{2.144}
$$

Finalmente, si sumamos las tres últimas ecuaciones veremos que dicha suma se anula, y dado que dichas ecuaciones representan el lado derecho e izquierdo de la Ec.(2.120) queda entonces demostrado que la igualdad implícita en dicha ecuación se satisface. Por lo tanto, podemos concluir con seguridad que la expresión formal para la derivada de la Ec.(2.85) es

$$
\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S(t)} \left[\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \nabla \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{v} \right) + \left(\nabla \cdot \overrightarrow{B} \right) \overrightarrow{v} \right] \cdot d\overrightarrow{S} \tag{2.145}
$$

Es evidente que la Ec.(2.145) es exactamente igual a la Ec.(2.82) obtenida heurísticamente. Esto significa que nuestro método funciona, ya que hemos logrado nuestro propósito: corroborar que nuestros cálculos intuitivos y formales son idénticos, y por lo tanto se pueden considerar exactos. Ahora sólo nos resta condensar los resultados para no perder de vista los puntos importantes del estudio realizado.

2.1.5 *Operadores materiales*

Para resumir los cálculos anteriores, vamos a generalizar los resultados obtenidos. Dados $A = \int_{V(t)} \rho(\overrightarrow{r}, t) dV$ y $\Phi = \int_{S(t)} \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t) \cdot d\overrightarrow{S}$, integrales (de volumen y superficie respectivamente) de una función dependiente del tiempo, se dice que las derivadas de Φ y A respecto a dicho parámetro se expresarán como:

$$\frac{d}{dt} A = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{v}) \right] dV \tag{2.146}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S(t)} \left[\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \nabla \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{v} \right) + \left(\nabla \cdot \overrightarrow{B} \right) \overrightarrow{v} \right] \cdot d\overrightarrow{S}. \tag{2.147}$$

De manera natural, podemos definir un operador para cada una de las integrales analizadas:

$$\frac{D_V}{Dt} \rho = \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{v}) \tag{2.148}$$

$$\frac{D_S}{Dt} \overrightarrow{B} = \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \nabla \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{v} \right) + \left(\nabla \cdot \overrightarrow{B} \right) \overrightarrow{v}. \tag{2.149}$$

Por otro lado, si buscamos un poco en la literatura, podremos encontrar el concepto de *derivada material* dado por:

$$\frac{D}{Dt} F = \frac{\partial}{\partial t} F + (\overrightarrow{v} \cdot \nabla) F. \tag{2.150}$$

La expresión anterior calcula el cambio con respecto al tiempo de una función $F = F(\overrightarrow{r}, t)$ que se evalúa a lo largo de una trayectoria dada con velocidad $\overrightarrow{v}$[7].

Si comparamos la ecuación anterior con las Ecs.(2.53) y (2.74), uno podría llegar a pensar que para el cálculo de $\frac{d}{dt}A$ bastará con aplicar el concepto de derivada material al término que se encuentra dentro de la integral, pues el cambio en la Ec.(2.38) y (2.56) consiste básicamente en considerar el operador $\frac{\partial}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \nabla)$ dentro de la integración. Sin embargo, a lo largo de este capítulo pudimos darnos cuenta de que no para toda integral es aplicable este resultado y por tanto, no debemos generalizarlo pues estaríamos cometiendo un grave error.

Además si incluímos la expresión para la derivada material entre las ecuaciones antes mencionadas 2.148 y 2.149, podemos entonces definir un nuevo conjunto de *"Operadores Materiales"* de la siguiente forma:

$$\frac{D_f}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \nabla) f$$

$$\frac{D_V}{Dt}\rho = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{v}) \tag{2.151}$$

$$\frac{D_S}{Dt}\overrightarrow{B} = \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \nabla \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{v}\right) + \left(\nabla \cdot \overrightarrow{B}\right) \overrightarrow{v},$$

donde queda claro que para utilizar cada una de ellas deberemos considerar la situación que se desee analizar.

CAPÍTULO 3

Aplicación de las ecuaciones de Maxwell

3.1 Conservación de la carga y retardo electromagnético

Existen muchísimos temas que pueden analizarse a partir de las ecuaciones de Maxwell, sin embargo en este capítulo solamente analizaremos dos de ellos: el primero, sólo por manejar las ecuaciones de Maxwell, consiste en demostrar la conservación de la carga y sus expresiones diferenciales e integrales que tendrán cierta similitud en cuanto al manejo integral de las ecuaciones de Faraday y Ampère-Maxwell. El otro consiste en entender el fenómeno conocido como *"retardo electromagnético",* un aspecto relativista que puede analizarse de una forma relativamente sencilla utilizando el análisis vectorial y las relaciones existentes entre las ecuaciones de Maxwell. Cabe aclarar que el análisis presentado en este documento, al menos en lo que refiere a este capítulo, ha sido incluído únicamente con el propósito de dar al lector una idea general de la utilidad y aplicación que tienen las ecuaciones de Maxwell en electromagnetismo y por tanto, los cálculos matemáticos que encontrará a continuación podrían ser, en algunos casos, poco claros.

3.1.1 *Conservación de la carga*

El principio de conservación de la carga establece que no hay destrucción ni creación neta de carga eléctrica, y afirma que en todo proceso electromagnético la carga total de un sistema aislado se conserva. En un proceso común de electrización, por ejemplo, el número total de protones y electrones no se altera, lo único que se observa es una separación de las cargas eléctricas; pueden aparecer cargas eléctricas donde antes no había, pero siempre lo harán de modo que la carga total del sistema permanezca constante. Además esta conservación es local, ocurre en cualquier región del espacio por pequeña que ésta sea. En otras palabras, la conservación de la carga implica (al igual que la conservación de la masa) que en cada punto del espacio se satisface una ecuación de continuidad, la cual nos muestra la relación existente entre la derivada de la densidad de carga eléctrica y la divergencia del vector densidad de corriente eléctrica. Con el fin de ilustrar un poco la matemática y razonamientos implícitos en dicha *"ecuación de continuidad"* vamos ahora a explicitar el cálculo requerido para llegar a ella, para después analizar el significado de la misma, procurando indicar las consideraciones realizadas durante el proceso .

Primeramente, tomemos la Ec.(1.37) y saquemos su divergencia

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}, \tag{3.152}$$

como la divergencia de un rotacional se anula llegamos a

$$4\pi\nabla\cdot\overrightarrow{J}+\nabla\cdot\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}=0. \tag{3.153}$$

Si ahora utilizamos la Ec.(1.6), obtenemos

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\overrightarrow{J}=0. \tag{3.154}$$

Esta última ecuación se conoce como la conservación de la carga, esto debido a que si integramos esta ecuación en un volúmen dado (sin movimiento) tenemos:

$$\int\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\overrightarrow{J}\right]dV=0, \tag{3.155}$$

como sabemos que $\overrightarrow{J}=\rho\overrightarrow{v}$, siendo $\overrightarrow{v}$ la velocidad de las cargas, llegamos a

$$\int\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\overrightarrow{v}\right]dV=0. \tag{3.156}$$

Ahora bien, si la integral se realiza sobre un volumen que se mueve con una velocidad $\overrightarrow{v}$ que en cada punto es igual a la velocidad de las cargas, entonces

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{d\int\rho dV}{dt}=\int(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\overrightarrow{v})dV \quad\Longrightarrow\frac{dQ}{dt}=0. \tag{3.157}$$

Lo anterior representa la conservación de la carga. En efecto, vemos que la expresión final en este cálculo resulta semejante (al menos en forma) a la Ec.(2.53), lo cual es un resultado acorde con las ecuaciones obtenidas en el capítulo 2, pues hemos supuesto que la velocidad de las cargas es igual a la velocidad con la que el volumen se está moviendo.

3.1.2 *Campos electromagnéticos retrasados*

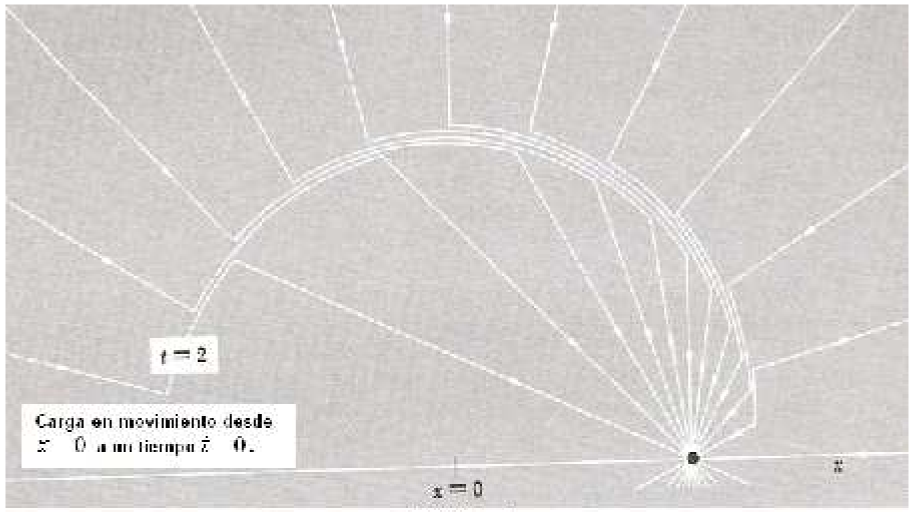

FIGURA 11

La interpretación física de estos campos retrasados resulta muy interesante. Por ejemplo, analicemos el caso que se muestra en la FIGURA 11: Si una carga puntual situada en $x = 0$ se mueve repentinamente, el efecto de cambio se propaga hacia afuera igual que un frente de onda esférico. Además, supondremos que la velocidad con que se propaga la información que nos indicará que la carga ha cambiado de posición es igual a c (considerando que son ondas electromagnéticas) y tomaremos $t = 2 = 2 \times 10^{-10} seg$. En $2 \times 10^{-10} seg$ la luz ha viajado únicamente $6cm$, por tanto, los puntos que se encuentren mas allá de esa distancia no pueden haber recibido aún la información del cambio, es decir, no se han dado cuenta de que la carga ya no esta en la posición $x = 0$. De hecho, todos los puntos que se encuentren fuera de una esfera de radio $6cm$ centrada en el origen estarán ”viendo” el campo de una carga en reposo aún en el origen, esto es, observan un campo producido por la carga en un tiempo anterior.

El fenómeno es similar a lo que ocurre con la luz en el cielo nocturno: la luz que nosotros vemos ahora, salió de las estrellas en un ”tiempo retardado” el cual está relacionado directamente con la distancia de separación entre la estrella y la tierra.

Ahora bien, confiando en que el ejemplo anterior haya ilustrado de manera general lo que este fenómeno refiere, procederemos a realizar un análisis sobre las matemáticas involucradas en esto para que, de este modo, el lector pueda corroborar una vez más, la importancia de las ecuaciones de Maxwell en el estudio de los fenómenos electromagnéticos.

Pues bien, iniciaremos nuestro estudio escribiendo el sistema de ecuaciones que constituyen las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E} = 4\pi\rho, \tag{3.158}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}, \tag{3.159}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = 0, \tag{3.160}$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0. \tag{3.161}$$

Al tener las ecuaciones de electromagnetismo válidas para todos los campos en general, podremos ahora analizarlas y entonces definir los llamados “potenciales retardados”.

Dada la Ec.(3.161), podemos definir

$$\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}, \tag{3.162}$$

donde $\overrightarrow{A}$ representa un potencial vectorial arbitrario. Reescribiendo la Ec.(3.160) obtenemos

$$\nabla \times \left(\overrightarrow{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \right) = 0. \tag{3.163}$$

Como el rotacional es cero, podremos escribir la expresión dentro del paréntesis como el gradiente de un potencial escalar ϕ, y así:

$$\overrightarrow{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \tag{3.164}$$

Podemos reescribir entonces en términos de $\overrightarrow{A}$ y ϕ las dos ecuaciones de Maxwell restantes:

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \overrightarrow{A} \right) = -4\pi\rho. \tag{3.165}$$

$$\nabla^2 \overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \overrightarrow{J}. \tag{3.166}$$

Por la definición de $\overrightarrow{B}$ en términos de $\overrightarrow{A}$ podemos considerar arbitraria la definicion de $\overrightarrow{A}$ y hacer las restricciones necesarias para nuestros intereses particulares. Por tanto, definimos

$$\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + \nabla \Lambda, \tag{3.167}$$

y para que el campo eléctrico permanezca sin cambio definimos el potencial escalar como

$$\phi^{'} = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \tag{3.168}$$

Con esta definición tenemos la libertad de elegir un grupo de potenciales $(\overrightarrow{A}, \phi)$ de tal forma que satisfacen la norma de Lorentz:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \tag{3.169}$$

y así obtenemos dos ecuaciones de onda (inhomogéneas), una para ϕ y otra para $\overrightarrow{A}$, que formarán un grupo de ecuaciones equivalente a las 4 ecuaciones de Maxwell anteriores:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \tag{3.170}$$

$$\nabla^2 \overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\overrightarrow{J}. \tag{3.171}$$

Para probar que siempre podemos elegir los potenciales de manera que se satisface la Ec.(3.169) suponemos que $(\overrightarrow{A}, \phi)$ satisfacen las Ecs.(3.165) y (3.166) pero no la Ec.(3.169). Aplicamos las Ecs.(3.167) y (3.168) sobre $\overrightarrow{A}$ y ϕ exigiendo que se cumpla la Ec.3.169:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A}^{'} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi^{'}}{\partial t} = 0 = \nabla \cdot \overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}. \tag{3.172}$$

Entonces, sí es posible encontrar una función Λ que satisface:

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right). \tag{3.173}$$

Los nuevos potenciales $\overrightarrow{A'}$ y ϕ'satisfacen la Ec.(3.169) así como las ecuaciones de onda expuestas en las Ecs.(3.170) y (3.171).

La norma de Lorentz es muy utilizada en electrodinámica porque mediante ella podemos obtener las ecuaciones de onda que establecen relaciones entre ϕ y $\overrightarrow{A}$.

Más aún, dicha ecuación es un concepto independiente del sistema de coordenadas utilizado y por tanto es ideal para las consideraciones hechas en relatividad especial. Notemos que la estructura básica de las Ecs.(3.170) y (3.171) está descrita por:

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -4\pi f\left(\overrightarrow{r}, t\right), \qquad (3.174)$$

donde $f\left(\overrightarrow{r}, t\right)$ es una función de distrubución conocida y c es la velocidad de propagación de la luz. Esta ecuación se resuelve en el libro de Jackson[10], utilizando el método de la función de Green en tres dimensiones y luego obtiene la función de Green en cuatro dimensiones. Sin embargo podemos deducir la función de Green en cuatro dimensiones en forma directa. La función de Green dependerá de las variables $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r'}, t, t')$ y además, deberá satisfacer la ecuación:

$$\left(\nabla_x^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G\left(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r'}, t, t'\right) = -4\pi\delta\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right)\delta\left(t - t'\right). \qquad (3.175)$$

En el espacio infinito sin superficies de frontera tenemos la solución

$$\Psi(\overrightarrow{r},t) = \int G\left(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r'},t,t'\right) f\left(\overrightarrow{r},t\right) d^3\overrightarrow{r'}dt'. \tag{3.176}$$

Sin embargo la función de Green deberá satisfacer ciertas condiciones de frontera por ciertas consideraciones físicas. La función de Green básica que satisface la Ec.(3.175) es una función dependiente únicamente de diferencias en coordenadas y tiempos. Para encontrar dicha función consideraremos la transformada de Fourier en ambos lados y utilizaremos las funciones δ del lado derecho bajo la siguiente representación:

$$\delta\left(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}\right)\delta\left(t-t'\right) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\int e^{i\overrightarrow{k}\cdot\left(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}\right)} e^{-i\omega(t-t')} d\omega d^3k. \tag{3.177}$$

Por esta razón podemos escribir $G\left(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r'},t,t'\right)$ como

$$G\left(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r'},t,t'\right) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\int g\left(\overrightarrow{k},\omega\right) e^{i\overrightarrow{k}\cdot\left(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}\right)} e^{-i\omega(t-t')} d\omega d^3k. \tag{3.178}$$

La transformada de Fourier $g\left(\overrightarrow{k},\omega\right)$ será determinada entonces cuando sustituyamos las Ecs.(3.177) y (3.178) en la Ec.(3.175), resultando en:

$$g\left(\overrightarrow{k},\omega\right) = \frac{1}{4\pi^3}\frac{1}{\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)}. \tag{3.179}$$

Si consideramos la integración sobre ω, la singularidad para $g\left(\overrightarrow{k},\omega\right)$ la tendremos en $\omega = \pm ck$. Entonces podemos hacer dicha integración con una integral de Cauchy en el plano complejo de ω.

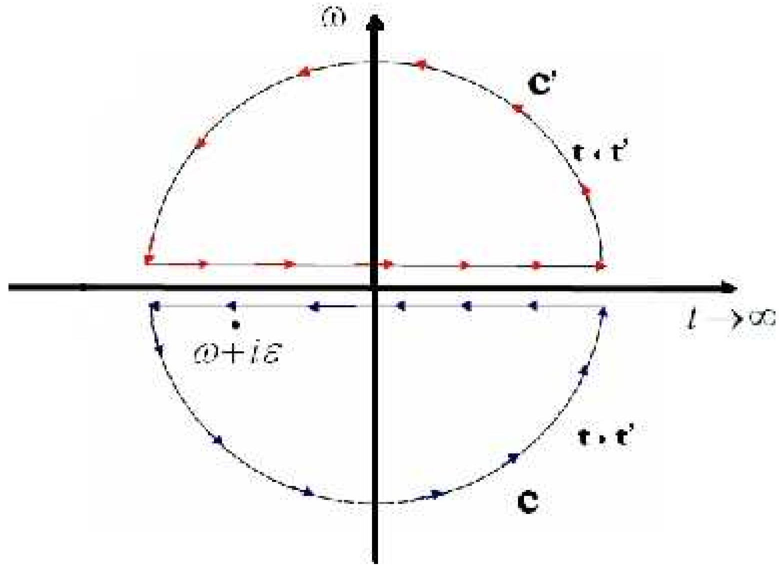

FIGURA 12

De la FIGURA 12 vemos que para $t > t'$ la integral a lo largo del eje real en la Ec.(3.178) es equivalente a la integral cerrada del contorno C que aparece en la mitad inferior del plano, mientras que para $t < t'$ el contorno a integrar será C' que aparece en la mitad superior.

Para tal integración entonces se tienen 2 soluciones, pero en este caso nosotros sólo vamos a exponer el cálculo para la solución retardada. Empezaremos por suponer que las singularidades en $\omega = \pm ck$ están desplazadas debajo del eje real como se muestra en la figura. El desplazamiento de las singularidades podremos entonces escribirlo simplemente como $\omega + i\epsilon$ en lugar de ω y de esta forma, nuestra función de Green será

$$G\left(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r'}, t, t'\right) = \frac{1}{4\pi^3} \int\int \frac{e^{i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{R} - i\omega\tau'}}{\left(k^2 - \frac{1}{c^2}\left(\omega + i\epsilon\right)^2\right)} d\omega d^3k \tag{3.180}$$

donde $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}$, $\tau = t - t'$ y ϵ es una constante positiva.

La integración sobre ω para $\tau > 0$ la obtenemos aplicando la integral de Cauchy sobre el contorno C y de esta manera tenemos

$$G = \frac{c}{2\pi^2} \int e^{i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{R}} \frac{sen\left(c\tau k\right)}{k} d^3k \tag{3.181}$$

De la primera integración sobre angulos

$$G = \frac{2c}{\pi \overrightarrow{R}} \int_0^{\infty} sen\left(k\overrightarrow{R}\right) sen(c\tau k) dk \tag{3.182}$$

Haciendo la integral sobre k podemos integrar sobre todo el intervalo $-\infty < k < \infty$, con un cambio de variable $x = ck$ reescribimos la ecuación anterior como

$$G = \frac{1}{2\pi \overrightarrow{R}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left[\tau - \left(\frac{\overrightarrow{R}}{c}\right)\right]x} - e^{i\left[\tau + \left(\frac{\overrightarrow{R}}{c}\right)\right]x} dx \tag{3.183}$$

Utilizando las definiciones de la función Delta de Dirac tenemos que

$$G = \frac{1}{\overrightarrow{R}} \delta \left[\tau - \left(\frac{\overrightarrow{R}}{c}\right)\right] \Longrightarrow G\left(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r'}, t, t'\right) = \frac{\delta\left(t' + \frac{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|}{c} - t\right)}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|} \tag{3.184}$$

Esta función de Green es conocida como *Función de Green Retardada* debido a que muestra el comportamiento asociado con una perturbación de onda. Es decir, nos dice que el efecto observado en el punto $\overrightarrow{r}$ a un tiempo t es el resultado de una perturbación originada en el punto $\overrightarrow{r'}$ a un tiempo retrasado $t' = t - \frac{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|}{c}$.

Finalmente la solución para la Ec.(3.174) queda descrita por la función

$$\Psi\left(\overrightarrow{r}, t\right) = \int \frac{\delta\left(t' + \frac{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|}{c} - t\right)}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|} f\left(\overrightarrow{r'}, t'\right) d^3\overrightarrow{r'} dt' \tag{3.185}$$

donde la integración sobre t' puede ser realizada para obtener la llamada *"Solución retardada"*

$$\Psi\left(\overrightarrow{r},t\right)=\int\frac{\left[f\left(\overrightarrow{r'},t'\right)\right]_{ret}}{\left|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}\right|}d^{3}\overrightarrow{r'} \tag{3.186}$$

**El bracket $[]_{ret}$ significa que el tiempo t' está siendo evaluado en un tiempo retrasado $t'=t-\frac{\left|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}\right|}{c}$.

Para $\tau<0$, el resultado es similar pero se obtiene la soluciòn avanzada; o sea que: $t'=t+\frac{\left|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}\right|}{c}$.

No obstante, utilizaremos sólo las soluciones retrasadas pues se supone que conoceremos las condiciones de frontera en el tiempo $t=-\infty$.

Queda entonces demostrado que las interacciones no son instantáneas. En efecto, el retraso implica que uno conoce los campos eléctricos y magnéticos debido a una velocidad de interacción que es igual a lo que se conoce como la velocidad de la luz c.

Aunado esto último con el principio de Galileo, que se refiere a que las leyes del universo son iguales en cualquier sistema de referencia, se obtiene el principio de relatividad de Einstein que asegura que la velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema de referencia inercial y es igual a c.

CONCLUSIÓN

Durante todo este trabajo de tesis se ha intentado hablar de las matemáticas involucradas en electromagnetismo de la manera más simple y clara posible. Se ha procurado enfatizar en aspectos importantes que deben ser considerados en el análisis de ciertos fenómenos electromagnéticos, con el fin de evitar ciertas confusiones que conducen la mayoría de las veces a conclusiones erradas y por tanto descripciones físicas que podrían carecer de sentido. Ejemplos claros en este documento han sido: las diferencias entre la ley Coulomb y ley de Gauss, la importancia y origen de la corrección de la ley Ampère-Maxwell y las restricciones ímplicitas en los cálculos heurísticos necesarios para obtener las expresiones de las derivadas de superficie y volumen. La relevancia de esto radica en el hecho de que el trabajo en la física ha sido desde siempre un proceso evolutivo que requiere de antecedentes para continuar perfeccionándose, por tanto, si se es informal en los cálculos se tendrán resultados poco certeros, por ende análisis físicos que describirán fenómenos alejados de nuestras realidad, y si esto sucede entonces la utildad de la ciencia en nuestra vida cotidiana se hace nula.

Otro aspecto importante que se trató en este análisis, es que algunos resultados obtenidos mediante el uso de análisis vectorial básico son cálculados regularmente mediante el uso de métodos matemáticos mucho más complejos provocando así, que algunos estudiantes (sobre todo de los primeros semestres de licenciatura) seamos incapaces de entender la física implícita en ellos, más aún, genera una especie de ”tabú” alrededor de problemas físicos que contrario a lo que podríamos pensar, resultan ser relativamente simples. Tal es el caso de la derivada de un flujo que, aunque ha sido obtenida por algunos autores usando formas diferenciales y derivadas de Lie [9] o de manera intuitiva[8], no significa que no pueda ser analizada de otra forma pues, como hemos visto anteriormente, fue factible llegar a la misma expresión de manera formal sin necesidad de usar herramientas matemáticas complicadas. De la misma manera, esta situación se presenta en el caso del retardo electromagnético, pues en el transcurso del trabajo encontramos distintos autores cada uno con sus formas particulares de resolver el problema, y aunque algunos eran más complejos que otros los resultados son iguales[10],[5], [4].

El propósito de este texto, además de simplificar las matemáticas en el cálculo de derivadas de integrales, es lograr que el lector pueda percatarse de cuán importante es en realidad intentar siempre ser formales en los cáculos para que de este modo, las repercusiones en los resultados finales sean mínimas, y evitar obtener un porcentaje de error elevado, que nos impida contribuir al desarrollo de la ciencia y la tecnología.

REFERENCIAS

[1] Hsu, Hwei P. *"Análisis Vectorial"* (Fondo Educativo Interamericano, México, 1973) Caps. 3, 4 y 5, pgs. 58, 203.

[2] Spiegel, Murray R. *"Análisis Vectorial"* (Serie Schaum, Mc Graw Hill, México 2003) pgs. 26, 146.

[3] Reitz, John R.& Milford, Frederick J. *"Fundamentos de la Teoría Electromagnética"* (UTEHA, México 1969) pgs. 337-343.

[4] Griffiths, David J. *"Introduction to Electrodynamics"* (Prentice Hall, Third Edition, New Jersey 1999) pgs. 422-425.

[5] Greiner, Walter *"Classical Electrodynamics"* (Springer-Verlag, New York Inc.

[6] Purcell, Edward M. *"Electricity and Magnetism"* (Mc Graw Hill, Berkeley Physics Course Vol. 2, Second Edition) Chap. 5 & 7, pp 272, 459, 460

[7] Acheson, D. J. *"Elementary Fluid Dynamics"* (Claredon, Oxford 1990) Chap. 1, pp 4, 5, 8.

[8] Panofsky, Wolfgang K. H. *"Classical Electricity and Magnetism"* (Addison-Wesley, Second Edition, 1962) pp 160-163.

[9] Frankel, Theodore *"Gravitacional Curvature, an Introduction to Einstein's Theory"* (Freeman, San Francisco, 1979) pp 56-64.

[10] Jackson, John D. *"Classical Electrodynamics"* (John Wiley & Sons, Third Edition, 1998) pp 29, 178, 179.

[11] Gelman, Harry *"Faraday's law for relativistic and deformed motion of a circuit"* Eur. J. Phys. Vol. 12, pp 230-233. (1990)

[12] Ares de Parga, G., Pereyra, E.M. y Gutiérrez, F. *"La relación entre las derivadas con respecto al tiempo de integrales de volumen, de superficie y de línea y la derivada material"* Rev. Mex. Fís. E, Vol. 53-1. (2007).