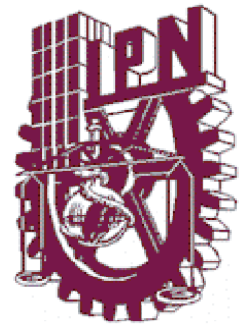


Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas



Condensados de Bose-Einstein autogravitantes

Tesis que presenta

Blanca Lucía Moreno Ley

Para obtener el Grado de
Licenciada en Física y Matemáticas
con especialidad en Física

Director de Tesis Externo
Dr. Tonatiuh Matos Chassin

Director de Tesis Interno
Dr. Rubén Cordero Elizalde



México, D.F.
Diciembre 2007

A mis padres:

Arturo Moreno Bello y Blanca Estela Ley Estrada

A mi hermana:

Cristina Montserrat Moreno Ley

A quienes amo profundamente.

Índice

1. Introducción	6
1.1. Formación de estructura en el Universo	7
1.2. De Bariones no, de neutrinos no, entonces, ¿de qué?	11
2. La naturaleza de la materia oscura	13
3. Un poco de Relatividad General	15
3.1. Las ecuaciones de campo en relatividad general para el vacío	15
3.2. Ecuación de Einstein	16
3.3. Ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto	17
4. Deducción de la ecuación de Lane-Emden	20
4.1. Coordenadas para espacios-tiempo esféricamente simétricos	20
4.2. Ecuaciones diferenciales para la estructura estelar	21
4.3. Estrellas newtonianas: Los Polítropos	24
4.3.1. Polítropos	25
4.3.2. La función de Lane-Emden	25
5. Los bosones y su comportamiento	27
5.1. Condensación de Bose	27
5.2. Ecuación de estado para un Condensado de Bose-Einstein	28
6. Las ecuaciones de Oppenheimer-Volkov y Lane-Emden para un condensado de Bose-Einstein	30
6.1. Condensados de Bose-Einstein como candidatos a materia oscura	30
7. Materia Oscura en Galaxias	32
7.1. Materia oscura, Condensados de Bose-Einstein y centros de Galaxias	32
8. Conclusiones	37
9. Apéndice de Inflación.	39
9.1. El Modelo del Hot Big Bang	39
9.1.1. Problemas del Hot Big Bang	40
9.2. Un universo inflacionario	41
9.3. Soluciones	43
9.3.1. La aproximación de slow-roll y los parámetros de inflación	44
9.3.2. Espectros y observables	45

Agradecimientos

Deseo agradecer infinitamente a mis padres, que a pesar de todas las dificultades, hicieron de mí, una mujer responsable que no desiste ante sus metas. Gracias por el apoyo económico, moral y afectivo que me han brindado durante el largo camino de mi vida.

A mi hermana, que sin su apoyo y cariño no habría podido seguir adelante para poder ser así un ejemplo de orgullo para ella.

A mis amigos, Cristhian Garay, Guadalupe Simón, Moisés Miguel, Evelia Cortéz, Javier Méndez, Eduardo Oropeza, José Manuel Lara, Maricruz Mendoza. Especialmente a Leticia Escobar y Julio César Vera, quienes forman una parte muy importante de mi vida, a quienes admiro y quiero profundamente. A todos ellos, gracias por estar conmigo y formar juntos el sendero de nuestro futuro.

Al Dr. Luis Antonio Arias Hernández, quien es el responsable de que yo haga de la ciencia y la física, formar una parte importante e indispensable de mi vida. Gracias por el tiempo que dedicó a que yo saliera adelante cada día, compartiendo sus experiencias de vida y su amor a la ciencia.

A mis profesores y sinodales, Dr. Rubén Cordero Elizalde, Dr. Francisco Turrubiates, M. en C. Héctor Uriarte y M. en C. José Calderón Mendoza, a ellos gracias por creer en mí, su paciencia y apoyo a lo largo de mi carrera.

A la Dra. Erandy Ramírez Pérez, quien tuvo la paciencia y amabilidad para explicarme y ayudarme en la realización de mi tesis.

A la Escuela Superior de Física y Matemáticas y mis profesores, quienes brindaron las bases necesarias para mi formación como científica y como un ser humano que siempre estará al servicio de la Patria.

Especialmente quiero agradecer y también dedicar este trabajo al Dr. Tonatiuh Matos Chassin, quien estuvo conmigo en situaciones difíciles brindándome todo su apoyo como asesor y como ser humano, quien siempre está dispuesto a ofrecer una sonrisa y echarme porras para seguir adelante, quien comparte su conocimiento y me permite formar parte del trabajo que desarrolla. Por todo esto y más, mi más profundo agradecimiento, admiración, respeto y cariño.

Blanca Lucía Moreno Ley

Celestial Dream

Here in the Universe I find some things that are so hard to understand.

The vastness of space just takes my breath away I see through history.

The years they come and go,

the seconds that will shape my destiny.

The time that we spend here Is precious, that I see so clear

What is our place in here?

What is the meaning of the pain we feel?

Where did all this come from?

The galaxies, the moon, the stars, oh! I don't know.

I really want to know what is the meaning of evolution.

They say that we are the crown of all creation,

So let's break free from these chains,

Of fear, hate and greed

And join together singing our

Celestial Dream Freedom is awaiting

For those who take the path less traveled

And in the end we'll all sing our Celestial Dream

-Stratovarius-

1. Introducción

Pensar en que tan grande y vasto puede el universo ser, nos lleva a imaginar miles de cosas, algunas, basadas en lo que nuestros ojos simplemente ven, y otras simplemente producto de nuestro cerebro que comienza a recrear e imaginar todo un universo plagado de dimensiones extras, universos paralelos y por que no, seres vivos por todas las galaxias.

Pensaríamos al principio que son simplemente eso: productos de nuestra imaginación, pero...quien sabe. Aún el humano está limitado por este cuerpo y estos cinco sentidos que no le dejan saber, por el momento, más allá de una simple y a la vez compleja realidad.

Cada una de las estrellas que vemos en el cielo son como nuestra estrella, el sol, y en conjunto forman la vía láctea. El universo está formado por millones de galaxias, algunas tan lejanas que a simple vista no pueden ser observadas. Pero para poder entender y estudiar nuestro universo, primero tenemos que resolver el problema de utilizar números muy grandes en las descripciones cosmológicas.

Por ejemplo, el radio de la tierra es aproximadamente 6400 Km., la distancia de la Tierra al Sol es 150 millones de Km. y nuestro sistema planetario, tiene un radio de alrededor de 6000 millones de kilómetros. Como vemos, las distancias comienzan a ser muy grandes y es conveniente expresar estas distancias astronómicas en unidades apropiadas.

Una de las unidades más utilizadas es el *año luz*. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año, es decir 10^{13} Km. Así, la estrella más cercana al sol es “Proxima Centauri” (en la constelación de Centauro) y aproximadamente está a 4 años luz de nosotros, la estrella polar, está como a 700 años luz y, la luz que recibimos de esta estrella, ¡fue emitida a principios del siglo XIV!

La Vía Láctea mide 45,000 años luz. Aún esta medida del año luz, es demasiado pequeña para poder describir la galaxia entera, por esta razón los astrónomos utilizan una medida aún más grande: El *Kilopársec* (Kpc). Un Kilopársec equivale a 3000 años luz. El radio de una galaxia típica como la de nosotros es de 15 Kpc. Nuestra galaxia, así como el Sol, son solo una entre un gran número de galaxias y estrellas.

La galaxia más cercana a la vía láctea es Andrómeda. Esta galaxia está a una distancia de 700 Kpc. Alrededor de estas dos galaxias existen otras 30 galaxias. Algunas de ellas son llamadas “galaxias enanas”, estas son galaxias pequeñas y contienen solo algunos millones de estrellas.

Al conjunto de Andrómeda, la vía Láctea y las galaxias enanas, forman una unidad en la escala cósmica, llamada “Grupo Local de Galaxias”. El tamaño del Grupo Local es de 1000 Kpc (1 Mpc)

Una característica de este universo, es que las galaxias tienden a formar grupos o “cúmulos”. Los astrónomos han detectado cúmulos muchísimo más grandes que nuestro Grupo Local. Uno de ellos es el llamado “Cúmulo Coma” que contiene cerca de 1000 galaxias individuales.

Pero existen estructuras todavía más grandes que los cúmulos. Las observaciones han revelado que estos cúmulos forman grandes agregados llamados “Super cúmulos” con tamaños de 30 a 60 Mpc. Nuestro grupo local es un miembro de la periferia de un super cúmulo llamado “Super cúmulo de Virgo”

¿Qué tan grande nuestro universo es? Potentes telescopios han medido que la región observable del universo tiene un tamaño de 6000 Mpc. Ninguna de estas aglomeraciones de galaxias, ni las estrellas que las conforman, están estáticas, todas ellas se mueven relativamente unas con otras; por ejemplo, la vía láctea, se mueve en conjunto respecto a Andrómeda a una velocidad de 100 Km/s, más aún, el grupo local se mueve coherentemente a 600 Km/s.

Dados el tamaño de los diferentes sistemas y la velocidad con la cual los objetos se mueven en estos sistemas, se puede calcular el periodo típico de una órbita para estas estructuras. Sabemos que la tierra hace un año alrededor del Sol; el Sol, completa una órbita en nuestra galaxia en 200 millones de años y a la Vía Láctea le toma 5 mil millones de años en ir de orilla a orilla del cúmulo donde se encuentra.

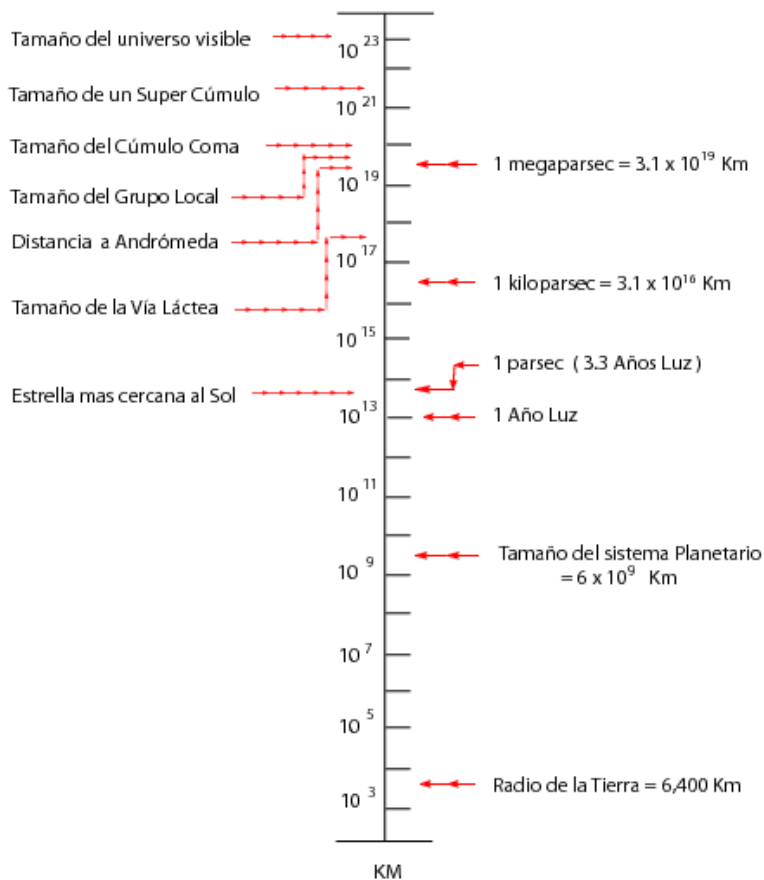


Figura 1: Jerarquía de estructuras desde los planetas hasta los super cúmulos

Las edades de las grandes estructuras como las galaxias, cúmulos, etc., es de aproximadamente 13 mil millones de años. Esta es la escala del tiempo donde los fenómenos cósmicos toman lugar.

Es difícil saber a ciencia cierta cuando fueron hechas las primeras observaciones astronómicas. Sin embargo, el hombre comenzó a observar y a tratar de explicar lo que ocurría en su alrededor, en el momento en que tomó conciencia de sí mismo y de su entorno. Poco a poco, el hombre ha ido evolucionando en cuanto al conocimiento y ha construido cada vez instrumentos más precisos para observar, - como los telescopios, microscopios, etc - y así poder desarrollar teorías basadas en su observación.

1.1. Formación de estructura en el Universo

Nuestra concepción del universo ha ido cambiando con el paso del tiempo. Desde tiempos remotos, el hombre siempre ha deseado tener un papel protagónico en el origen del universo, suponiendo que la tierra era el centro de todo, y de ahí todo lo demás giraba en torno a ella. Con Nicolás Copérnico, esta idea romántica de ser el centro del universo se vino abajo, cuando propuso que el centro de nuestro sistema planetario era el Sol y que nosotros girábamos en torno a ella. Como ésta y muchas otras cosas se vieron puestas en tela de juicio con las observaciones realizadas por los astrónomos de diferentes épocas.

Ahora sabemos con los telescopios actuales que no solo somos nosotros y nuestra galaxia, sino que hay miles de millones de galaxias que están a nuestro alrededor. Sin embargo, todavía

queda una pregunta abierta a la cual tratamos de dar siempre una respuesta donde nuevamente nosotros estemos dentro de la respuesta ¿De qué está hecho el universo? Anteriormente se pensaba que todo lo que podemos observar y detectar estaba hecho de materia semejante a la que nosotros estamos hechos. Sin embargo actualmente sabemos que realmente esa materia es solo una minúscula parte de la materia total del universo.

Otro punto importante en la historia del universo es la idea de un universo homogéneo e isótropo. Pero esta homogeneidad e isotropía solo se presenta a ciertas escalas. Es evidente que el Sol, la vía láctea y nuestro sistema planetario es una anisotropía del universo. Estas anisotropías son muy importantes y llegan a escalas realmente grandes. Estas ideas se plasman en el *principio cosmológico* el cual establece que “*No existe un lugar ni una dirección preferente en el universo*” es decir el universo es homogéneo e isótropo. Este principio es cierto solo a grandes escalas (de 100 Mpc o más).

La formación de estructura en el universo está dominada por la fuerza gravitacional, la cual sabemos es una fuerza atractiva. La hipótesis inicial consiste en suponer que existe un mecanismo que provoca una serie de fluctuaciones iniciales las cuales evolucionarán hasta formar la estructura. Los modelos inflacionarios¹ brindan una solución a esta hipótesis. Las fluctuaciones cuánticas del inflatón son amplificadas por el proceso inflacionario, brindando las fluctuaciones de densidad requeridas para el momento inicial de la formación de estructura. Es aquí donde la fuerza de gravitación entra para determinar la evolución de estas fluctuaciones primordiales. En las regiones donde hay mayor concentración de materia (fluctuación positiva de densidad), la gravedad provoca que la masa de los alrededores sea atraída gravitacionalmente, y consecuentemente, los alrededores de la fluctuación positiva, perderán cada vez más una mayor cantidad de materia, provocando así una fluctuación negativa de densidad. Pero, esta suposición, es decir fluctuaciones de la materia que hasta ahora se conoce, no reproduce el universo observado. Por este motivo ha sido necesario introducir otro tipo de materia que provoque las fluctuaciones deseadas y reproduzca el universo como actualmente lo observamos.

Consideraremos a la materia del universo como un fluido hidrodinámico en un universo en expansión. El fluido y el espacio-tiempo, el cual es el causante de la interacción gravitacional fluctúan, sin embargo esta suposición arroja resultados similares a un universo dominado por materia.

Para el caso de un universo dominado por radiación, el resultado es semejante para fluctuaciones más pequeñas que el tamaño del horizonte en el momento del desacople materia-radiación. Se presenta una diferencia significativa cuando la fluctuación es mayor que el tamaño del horizonte.

Introduzcamos las ecuaciones básicas de la hidrodinámica.

La ecuación de la conservación de la masa (1), donde ρ es la densidad del fluido y \mathbf{v} es su velocidad.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

La ecuación de movimiento (2), que es simplemente la segunda Ley de Newton aplicada al fluido, donde p es la presión del fluido y ϕ el potencial de campo gravitacional actuando sobre el fluido.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi, \quad (2)$$

La ecuación (3) del campo gravitacional, que está dada por la ecuación de Poisson, donde G es la constante de gravitación,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (3)$$

¹Ver el Apéndice de Inflación.

y finalmente la ecuación de la estadística del sistema dada por la conservación de la entropía (4),

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

El sistema (1,2,3,4) de ecuaciones lineales de segundo grado, nos dará la información necesaria. Para resolver, debemos decirle al sistema que el fluido está en un fondo homogéneo excepto por las fluctuaciones que formarán después la estructura². Esto se denotará escribiendo $\rho \rightarrow \rho_0 + \delta\rho$, $v \rightarrow v_0 + \delta v$, etc. así con todas las cantidades que fluctúan.

Pediremos que δ sea lo suficientemente pequeña como para despreciar términos cuadráticos y así resolver un sistema lineal en δ . Lo que se obtiene es un conjunto de ecuaciones para las cantidades ρ_0 , \mathbf{v}_0 , etc. y otro sistema para las cantidades perturbadas $\delta\rho$, δv , etc. Cuando obtenemos la ecuación para la entropía se observa que la densidad de entropía se conserva, es decir, que $s_0 = \text{constante}$.

El sistema para las cantidades perturbadas queda como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + 3H\delta\rho + H\mathbf{x} \cdot \nabla \delta\rho + \rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + H\delta\mathbf{v} + H\mathbf{x} \cdot \nabla \delta\mathbf{v} &= -\frac{v_s^2}{\rho_0} \nabla \delta\rho - \nabla \delta\phi \\ \nabla^2 \delta\phi &= 4\pi G \delta\rho, \end{aligned} \quad (5)$$

donde se introduce la expansión del universo mediante $\mathbf{v} = \mathbf{x}H$, con H el parámetro de Hubble $H = (\ln a)'$ siendo a el factor de escala del universo y el operador, $' = \frac{\partial}{\partial t}$. También se ha introducido la relación termodinámica

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho + \delta s + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \delta\rho = v_s^2 \delta\rho,$$

ya que la entropía se conserva.

El sistema (5) ya es lineal y puede resolverse. Primero resolvamos para $H = 0$ es decir un universo que no esté en expansión, con esta suposición tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} &= -\frac{v_s^2}{\rho_0} \nabla \delta\rho - \nabla \delta\phi \\ \nabla^2 \delta\phi &= 4\pi G \delta\rho. \end{aligned} \quad (6)$$

Resolviendo el sistema (5) junto con el sistema (6) obtenemos una sola ecuación para la fluctuación de la densidad

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 - 4\pi G \rho_0 \right] \delta\rho = 0. \quad (7)$$

Tras suponer que la densidad de fluctuación se dispersa como ondas, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\omega^2 = 4\pi^2 v_s^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{G\rho_0}{\pi v_s^2} \right),$$

la cual define naturalmente una longitud de onda $\lambda_j = \sqrt{\pi v_s^2 / G\rho_0}$ llamada la longitud de Janes. Analicemos un poco esta última ecuación, si ω es real, es decir, si la fluctuación que se forma es menor que la longitud de Janes $\lambda < \lambda_j$, entonces la solución para la fluctuación es una

²Para un análisis más detallado consultar las referencias [9, 10].

³Un universo en expansión o contracción se describe mediante el factor de escala $a(t)$, así existe una relación entre la velocidad de recesión \mathbf{v} y la distancia propia \mathbf{x} : $\mathbf{v} = \mathbf{x}H$.

superposición de ondas, ondas sonoras en el fluido que eventualmente se disiparán. Ahora si la frecuencia ω es imaginaria, esto es, la fluctuación es mayor que λ_j , entonces la fluctuación crece formando un objeto cada vez mayor. La ecuación (7) es muy importante para poder describir la formación de objetos estelares y planetarios.

Supongamos ahora un universo en expansión. En este caso H no es cero y lo que se espera es que la expansión del fluido disminuya la posibilidad de formar fluctuaciones crecientes. Haciendo los cálculos necesarios llegamos a una ecuación que es fundamental para el entendimiento de la evolución de las fluctuaciones primordiales

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2H \frac{d\delta}{dt} + \left(v_s^2 \frac{\kappa^2}{a^2} - 4\pi G \rho_0 \right) \delta = 0, \quad (8)$$

donde se define la densidad de contraste $\delta = \frac{\rho_1}{\rho_0}$ la cual nos ayuda a medir las fluctuaciones.

Para resolver la ecuación (8) comencemos con la época en la que domina la materia, esto es, cuando la radiación se “enfrió” y los fotones dejan de interactuar con los electrones. En esta época de radiación-materia (aproximadamente hace 47,000 años), la materia se comporta como polvo con presión cero y para este caso⁴ $a \sim t^{2/3}$, $\rho \sim t^{-2}$, $v_s^2 = 0$ y $H = \frac{2}{3}t^{-1}$. Entonces la ecuación(8) se transforma en

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{4}{3} \frac{1}{t} \frac{d\delta}{dt} - \frac{2}{3} \frac{1}{t^2} \delta = 0,$$

cuyas soluciones son $\delta \sim 1/t$ -modos que desaparecen conforme avanza el tiempo- y $\delta \sim a$ que son modos que crecen proporcionalmente a la expansión del universo. Este resultado nos dice que la densidad de contraste de un universo dominado por materia crecerá proporcionalmente a la expansión del universo. Entonces las fluctuaciones que formarán las galaxias, estrellas, cúmulos de galaxias, etc., se desarrollan en la época de la materia.

En la época donde la radiación era dominante tenemos que $p = \frac{1}{3}\rho$, $a \sim t^{1/2}$, $\rho \sim t^{-2}$, $v_s^2 = 1/3$, entonces la ecuación (8) de las fluctuaciones se transforma en

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\delta}{dt} + \left(\frac{A}{t} k^2 - \frac{3}{8t^2} \right) \delta = 0.$$

Esta ecuación tiene soluciones oscilantes decrecientes, es decir, las fluctuaciones no se forman, oscilan y luego desaparecen. En un campo de radiación, cualquier concentración de materia será dispersado por los choques entre la radiación y las partículas. Esto implica que si las fluctuaciones tienen que crecer para formar galaxias, estas sólo lo pueden hacer durante la época en la que domina la materia.

En la época dominada por radiación la estructura material del universo, no hay posibilidades para que estas fluctuaciones se formen y crezcan. Sin embargo, haciendo un análisis relativista se puede demostrar que existe un tipo de fluctuaciones que crecen durante la época de radiación. Estas fluctuaciones son las que su tamaño inicial es más grande que el tamaño de la región que está en contacto causal. Si una fluctuación es lo suficientemente grande, más grande que el tamaño del horizonte de eventos que la contiene, entonces las partículas en la fluctuación no tienen tiempo de interactuar con la radiación y logran sobrevivir al impacto de los fotones. Pero como estas fluctuaciones son muy grandes, sólo formarán estructura grande.

Así un universo dominado por radiación nos dará fluctuaciones muy grandes y ayudarán solo a la formación de supercúmulos y de estructura mayor, pero no a la formación de galaxias.

Antes de la época de la recombinación, el universo se encontraba en un estado en donde dominaba la radiación. En esta época $\delta \sim t \sim a^2$ y la masa contenida dentro de una región

⁴Estas cantidades se obtienen al resolver la ecuación de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}$$

donde a es el factor de escala, Ω el parámetro de densidad y Λ es constante cosmológica.

causalmente conectada, dentro del horizonte, evolucionaba como $M_{hor} \sim t^{3/2} \sim a^3$. La densidad de contraste para una fluctuación de número de onda k estará dada por

$$\delta_k \sim a^2 M_k^{-(n+3)/6}.$$

Si suponemos que el número espectral es $n = 1$, todas las fluctuaciones tendrán densidad de contraste $\delta_k = 1$ al cruzar su horizonte de eventos sin importar el número de onda k , es decir hay una invariancia de escala para estas fluctuaciones. A este espectro se le conoce como el *espectro de Harrison-Zeldovich*. Las simulaciones numéricas indican que $n \approx 0,94$ y significa que en nuestro universo hay fluctuaciones que son invariantes de escala.

Los astrónomos utilizan los mapas de galaxias para poder deducir la densidad de contraste. La época en que se desarrollan las fluctuaciones primordiales, es decir, las fluctuaciones que se generaron después de la recombinación, para poder lograr crecer hasta formar galaxias, es esencialmente la época en que domina la materia, el crecimiento de las fluctuaciones es proporcional al factor de escala, $\delta \sim a = \frac{1}{1+z}$ donde z es el corrimiento al rojo. Sabemos que la recombinación tomó lugar en $z \approx 1100$ y por lo tanto las fluctuaciones primordiales son del orden de $\delta|_{rec} \approx 10^{-3}$.

Veamos si esto concuerda con las observaciones. Después de la recombinación los fotones ya no interactuaron con ningún tipo de materia y entonces podemos saber la forma y la amplitud de las fluctuaciones primordiales a través de la radiación de fondo.

Supongamos que la materia bariónica formó la estructura que actualmente conocemos, utilizamos bariones por ser las partículas más pesadas de la materia estable conocida. Entonces la densidad de contraste de la materia es proporcional a la densidad de contraste de los bariones,

$$\delta|_{rec} \sim \frac{\delta n_B}{n_B}|_{rec}.$$

Como los fotones ya no interactuaron con nada después de la recombinación, la densidad de contraste debería verse reflejada en las fluctuaciones de la radiación de fondo. Entonces se esperaría fluctuaciones de la radiación de fondo del orden de $\sim 10^{-3}$.

Sin embargo, en los 90's fue lanzado el satélite COBE para medir las fluctuaciones de la radiación de fondo. El COBE para sorpresa de muchos midió que estas fluctuaciones eran del orden de $\delta < 10^{-5}$ lo cual no concordaba con lo predicho.

Entonces nuestra hipótesis de suponer que toda esa materia estaba hecha de bariones fue una hipótesis equivocada. El siguiente candidato a ser esa materia fueron neutrinos masivos. Los neutrinos se desprendieron de la interacción de las partículas muy temprano, cuando la materia todavía estaba dominada por la radiación. Así, los neutrinos contribuyen a la formación de estructura a muy grande escala y contribuyen a la formación de estructura a pequeña escala solo si su masa es mayor que 20eV, pero con el acelerador Superkamiokande y observaciones solares, se encontraron neutrinos de masas mucho menores que 10eV, así que los neutrinos masivos también quedan descartados [6].

Solo nos queda proponer algún tipo de materia exótica que no está incluida en el modelo Estándar de partículas de Weinberg-Salam-Glashow, y es ahí donde nosotros estamos interesados.

1.2. De Bariones no, de neutrinos no, entonces, ¿de qué?

En los años 30's el astrónomo suizo F. Zwicky observó que en el cúmulo de Coma había un aparente déficit de masa, al ver que las galaxias en el cúmulo se movían con velocidades demasiado elevadas, las cuales no se podían explicar con la masa observada en su telescopio. En la década de los 70's Vera Rubín y sus colaboradores observaron varias galaxias en el rango óptico y calcularon el contenido de materia de las galaxias. Después usando el corrimiento al rojo del movimiento de estrellas que se mueven en la galaxia debido a su rotación, pudieron calcular las velocidades de rotación de las estrellas. Luego de determinar la velocidad de las estrellas, encontraron que debería de haber una cantidad enorme de materia no visible en las

galaxias, para que la galaxia se pudiera mantener en equilibrio, resultado semejante al de Zwicky pero ahora en galaxias. En la actualidad se ha observado esta discrepancia tanto en galaxias como en cúmulos de galaxias.

Debido a la fuerza de gravedad que existe entre galaxias, el gas que se encuentra entre las galaxias en los cúmulos, se calienta. Este calentamiento es proporcional a la materia total que hay en el cúmulo, lo que provoca que la temperatura del gas también muestre un déficit de materia con respecto a la materia luminosa. Esto da como resultado que la contribución total de la materia no visible o materia oscura, comparada con la densidad crítica⁵ del universo es de 23 %. Conclusiones semejantes se obtienen al hacer observaciones de lentes gravitacionales.

Observaciones con telescopios ópticos y radiotelescopios los cuales pueden detectar la presencia de polvo frío en las galaxias, mostraron que la densidad de materia bariónica no es mayor que 1 % de la densidad crítica. También se ha observado que la contribución de la densidad de masa bariónica es a lo más 5 % de la densidad crítica del universo, entonces en los cúmulos galácticos debe existir algún tipo de materia que no interviene en la destrucción del deuterio, pero que contribuya gravitacionalmente a la formación de estructura.

Otro aspecto que es importante tomar en cuenta es el aspecto cosmológico, en este sentido, una evidencia de que existe algún otro tipo de materia que no logramos detectar es mediante la observación de la radiación de fondo. Al espectro de fluctuaciones de la radiación de fondo se le llama “espectro angular de potencias”. Las observaciones hechas de la radiación de fondo realizadas independientemente por los grupos “Maxima” y “Boomerang” a principios del 2000 muestran que la densidad del universo está muy cerca de ser la densidad crítica, es decir, el universo es casi plano y no presenta el pico que teóricamente presentaría el espectro de fluctuaciones para materia del tipo bariónica.

El tipo de materia que andamos buscando, la cual llamaremos *materia oscura*, tiene que ser poco interactuante con el resto de la materia para que en la época de radiación, las posibles fluctuaciones que se formen no se destruyan por la interacción con esta. También debe ser fría, para que las fluctuaciones se desarrollen desde el universo temprano, y en la época de la recombinación la densidad de contraste de las fluctuaciones obtenga un tamaño adecuado.

A este tipo de materia se le llama Materia Oscura Fría (por sus iniciales CDM, Cold Dark Matter). Sin embargo las simulaciones que se hacían con estas características en la materia no reproducían la formación de estructura que actualmente conocemos. A finales de los años 90's ciertas observaciones de supernovas llamadas SNIa dieron evidencias de la expansión acelerada del universo, y ¿cómo es posible esto?. Los telescopios muestran galaxias bien formadas desde hace mucho tiempo, entonces se propone que debe existir algo que impida la formación de demasiada estructura a pequeña escala, y esto se logra si se supone que el universo está acelerado.

Las observaciones de las supernovas SNIa junto con la hipótesis de que existe una constante cosmológica que provoca justamente estos efectos en el universo, fueron aspectos muy importantes, ya que con esto se lograba explicar la expansión con aceleración del universo y la formación de estructura a cualquier escala. El modelo cosmológico con constante cosmológica llamado Λ CDM parece ajustar a las observaciones que se tienen del universo.

Cabe resaltar que a la “materia” que provoca la expansión acelerada del universo se le llama “energía oscura”, para diferenciarla de la materia oscura y ya que tiene características diferentes a esta. Resumiendo, tenemos tres tipos fundamentales de materia en el universo: la materia oscura, que es atractiva y la responsable de la formación de estructura en el universo; la energía oscura, que es repulsiva y la causante de la expansión acelerada del universo, además de la materia bariónica, es decir, toda la materia contenida en el modelo estándar de partículas y que solo representa el 4 % de la materia del universo.

Actualmente los parámetros que tiene el modelo Λ CDM son: Materia bariónica 4 %, Materia oscura 23 % y Energía oscura 73 %.

⁵La densidad crítica del universo es la densidad que nos determina si el universo es cerrado o abierto.

2. La naturaleza de la materia oscura

Conforme los científicos avanzan día a día en la investigación de los constituyentes de la materia, se hace cada vez más necesario poner atención en las pequeñas imperfecciones de la radiación que permea todo el universo observable.

Hay más evidencia cada día de la existencia de materia exótica la cual es el 96% de la materia total contenida en el universo. Ya habíamos escrito anteriormente que el 73% de la materia cósmica es gravitacionalmente repulsiva y se le conoce como energía oscura, por otro lado, el 23% de la materia cósmica es gravitacionalmente atractiva y tiene el nombre de materia oscura. Se le llama “oscura” por que no emite radiación electromagnética y no interactúan con las partículas del Modelo Estándar de Partículas (MEP).

Hasta ahora se han propuesto varios candidatos para ser materia y energía oscura, uno de los más populares son las partículas de la extensión supersimétrica del MEP.

Como ya habíamos mencionado, el modelo cosmológico Λ CDM, es un modelo muy exitoso a nivel cosmológico: Cuenta con la estructura a gran escala y la expansión acelerada del universo, también con las fluctuaciones de micro-Kelvin de la radiación cósmica de fondo y predice que la materia oscura debe ser fría (esto en concordancia con las observaciones cosmológicas), la evolución de pequeñas perturbaciones en un universo homogéneo e isotrópico. Sin embargo este modelo falla a nivel galáctico ya que predice perfiles de densidad con picos en las galaxias, pero las nuevas observaciones indican que los perfiles de densidad en el centro de las galaxias son planos.

La materia oscura juega un papel importante en la formación de galaxias. Existen diferentes propuestas teóricas en torno al MEP, el más exitoso es la teoría de supercuerdas y los modelos de branas. La característica principal de estos modelos es la existencia de *campos escalares*, los llamados dilatones, radiones, etc. Dentro del MEP también tenemos la partícula Higgs.

Con esto en mente, se construye un modelo para la materia oscura usando un campo escalar, teniendo en cuenta que más que una partícula, la materia oscura podría ser una nueva interacción fundamental. A este modelo se le llama Materia Oscura de Campo Escalar (SFDM)⁶.

Con la teoría y las observaciones del universo tenemos las siguientes características para nuestro modelo:

- Impondremos la condición de que el campo escalar debe reproducir el comportamiento del modelo de CDM a escalas cosmológicas.
- SFDM debe proveernos de la información necesaria para la formación de estructura de galaxias que proporcionan las observaciones actuales.
- Por razones teóricas, el campo escalar debe ser estable.
- Los modelos de SFDM no deben de alterar el comportamiento de los modelos de Λ CDM para el universo temprano, debe ser poco dominante en esas épocas.

Uno de los campos escalares que cumplen las condiciones arriba impuestas es el potencial de cosenos hiperbólicos *cosh*. Se propuso el siguiente lagrangiano⁷ efectivo para el modelo Λ – SFDM:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Lambda-SFDM} &= \mathcal{L}_{GR} + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_\Lambda - \sqrt{-g} [\Phi^{,\mu}\Phi_{,\mu} + 2V(\Phi)] \\ V(\Phi) &= \frac{m_\Phi^2}{8\pi G\lambda^2} \left[\cosh\left(\sqrt{8\pi G\lambda}\Phi\right) - 1 \right]\end{aligned}\quad (9)$$

donde λ y m_Φ son parámetros libres del modelo con m_Φ la masa del campo escalar. Fijando las condiciones que debe de cumplir, es decir, reproducir el modelo de CDM a escalas cosmológicas,

⁶SFDM por sus siglas en inglés de Scalar Field Dark Matter.

⁷Para mayor detalle ver [8].

obtenemos que

$$\begin{aligned}\lambda &\sim 20 \\ m_\Phi &\sim 10^{-23} eV\end{aligned}$$

Expliquemos con más detalle el modelo para la ecuación (9). Después de inflación, el universo es dominado por la componente de radiación, y el potencial escalar es exponencial. El valor tan grande de λ hace que la materia escalar domine y se comporte como parte del flujo de radiación. Es en esta época en la que el campo se aproxima a un mínimo de potencial, y permite que la radiación se comporte como polvo. Para este tiempo la evolución de un universo homogéneo e isotrópico procede de la misma manera que en el modelo de Λ CDM.

Después las fluctuaciones escalares crecen como en CDM, excepto para todas las estructuras más pequeñas que $\lambda_\Phi = m_\Phi^{-1} \sim 10pc$, la cual es suprimida. Esto eventualmente previene, una fluctuación escalar que colapse y forme objetos gravitacionales compactos y la formación de perfiles de densidad prominentes en el centro.

Esto se ha sustentado con las simulaciones numéricas para el colapso de una fluctuación escalar simple, la cual termina en un objeto escalar autogravitante llamado *oscilación*⁸.

Los oscilaciones son configuraciones estables si su masa está por debajo del valor crítico $M_{crit} \sim 0,6 \frac{m_{Pl}^2}{m_\Phi}$, con esta masa obtenemos un valor de $M_{crit} \sim 10^{12} M_\odot$ la cual es la masa típica de una galaxia.

Así con este modelo para campo escalar, aún queda una pregunta por contestar: ¿Podría ser la materia oscura un campo escalar el cual sea el único responsable del proceso entero de la formación de estructura del universo, desde perturbaciones primordiales hasta galaxias? Esa respuesta podría ser afirmativa...

⁸Para mayor información consulte las referencias [15, 16, 17].

3. Un poco de Relatividad General

Comenzaremos por introducir algunos conceptos importantes de Relatividad General que nos ayudaran a comprender la física y la matemática que envuelve el estudio de colapsos gravitacionales para poder hacer un análisis más detallado de estos.

3.1. Las ecuaciones de campo en relatividad general para el vacío

En 1916 Albert Einstein formuló su Teoría de la Relatividad General. Para la cual tuvo en consideración algunos puntos importantes:

1. El principio de equivalencia. Este principio nos dice que si estamos bajo la influencia de un campo gravitacional, entonces, podemos eliminar la gravedad local y utilizar la relatividad especial.
2. Este principio también establece que localmente no podemos distinguir entre un campo gravitacional y un campo inercial y en consecuencia considerar la fuerza de gravedad como una fuerza inercial.
3. Siguiendo la relatividad especial, consideremos que una partícula de prueba libre viaja en geodésicas tipo temporales. Así las fuerzas inerciales residen en las ecuaciones de las geodésicas en los términos que involucran la conexión de la métrica con una métrica plana. Si deseamos incluir términos que contengan efectos gravitacionales en la conexión de la métrica, se generaliza la métrica a una métrica curva.
4. Si tomamos en cuenta efectos no-locales, entonces observaremos una variación en el campo gravitacional. Estas variaciones provocan que la partícula viaje en geodésicas que converjan o diverjan. La convergencia o divergencia se describe con el tensor de Riemann (14) a través de la ecuación de la geodésica.
5. La contracción del tensor de Riemann es el tensor de Ricci y que el tensor de Ricci sea nulo implica que también lo es el tensor de Einstein.

Ahora, enunciaremos las ecuaciones de campo que Einstein propuso, y que describen el campo gravitacional producido por la materia-energía. La materia-energía están descritas por el tensor momento-energía $T^{\mu\nu}$. La equivalencia entre masa y energía de la relatividad especial sugiere que todas las formas de energía sirven como fuentes del campo gravitacional.

El tensor de momento-energía satisface la conservación de la energía y la conservación del momento de un campo de materia, a esto se le conoce como *la ley de conservación energía-momento*, lo cual implica que $T^{\mu\nu}$ cumple la siguiente ecuación:

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \tag{10}$$

La derivada covariante del tensor de Einstein se anula a través de la contracción de las identidades de Bianchi (18), es decir:

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0.$$

Estas dos últimas ecuaciones sugieren que los dos tensores son proporcionales y uno puede escribir que:

$$G^{\mu} = \kappa T^{\mu\nu}. \tag{11}$$

Finalmente las ecuación (11) constituyen las *ecuaciones completas de campo* de la relatividad general.

Nosotros trabajaremos en unidades relativistas, en las cuales tomaremos, $c = 1$ que es la velocidad de la luz y $G = 1$ es la constante de la gravitación, por lo tanto la constante de acoplamiento toma el valor de

$$\kappa = 8\pi.$$

3.2. Ecuación de Einstein

Albert Einstein identificó al tensor momento-energía $T_{\mu\nu}$ como la fuente de la curvatura del espacio-tiempo.

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (12)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es un tensor que describe la curvatura del espacio-tiempo y κ , la constante relativista o de acoplamiento que tiene el valor de :

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (13)$$

y es un escalar constante, cuya magnitud determina que densidad de energía efectiva está distorsionando el espacio-tiempo.

El tensor de curvatura de Riemman,

$$R_{\alpha\beta\nu}^{\rho} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\nu}^{\rho}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma}\Gamma_{\beta\gamma}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}\Gamma_{\nu\gamma}^{\rho}, \quad (14)$$

cuantifica la curvatura del espacio-tiempo y $G_{\mu\nu}$ es una contracción de dicho tensor.

La ecuación de Einstein o Tensor de Einstein, se escribe como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (15)$$

el cual es un tensor simétrico que satisface las contracciones de las identidades de Bianchi (Ver ecuación(18)),

$$\nabla_b G_{\mu\nu} = 0,$$

donde $R_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$, el tensor métrico, son ambos tensores simétricos.

Con los símbolos de Christoffel definidos por

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\alpha} = \frac{1}{2}\Sigma_{\lambda} g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \right).$$

El tensor de Ricci el cual es un tensor simétrico está dado por

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\rho}^{\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\sigma}\Gamma_{\beta\sigma}^{\rho}.$$

El escalar de curvatura o escalar de Ricci es una contracción del tensor de Ricci:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}.$$

La ecuación de las geodésicas está dada por:

$$\ddot{x}^{\mu} + \Sigma_{\alpha\beta} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^0 \dot{x}^{\mu} \right) \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} = 0.$$

Utilizaremos las siguientes definiciones, que bien, son muy formales pero nos ayudarán para entender las formulaciones de la métrica y algunos cálculos.

Comenzaremos por definir el concepto de *conexión*.

Sea $\{e_a\}_{a=1\dots n}$ una base no necesariamente coordinada del espacio tangente TM^n de la variedad M^n , es decir, $e_a = e_a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Entonces

$$\nabla_{e_b} e_a = \Gamma_{ab}^c e_c \in TM^n.$$

A esta última expresión se le conoce como conexión donde Γ_{ab}^c son funciones diferenciables y los coeficientes de la conexión.

Para una base coordenada, los coeficientes de la conexión son llamados símbolos de Christoffel y estos se escriben como:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (16)$$

Algo muy importante que hay que definir es la derivada covariante, la cual nos ayudará a deducir la ecuación de Oppenheimer-Volkov y por consiguiente la ecuación de Lane-Emden.

La *derivada covariante* que se denota por $\nabla_c T_{b\dots}^{a\dots}$ o $T_{b\dots;c}^{a\dots}$ se define como:

$$\nabla_c T_{b\dots}^{a\dots} = \partial_c T_{b\dots}^{a\dots} + \Gamma_{dc}^a T_{b\dots}^d + \dots - \Gamma_{bc}^d T_{d\dots}^a - \dots.$$

Nosotros trabajaremos con un tensor momento-energía que es dos veces contravariante $T^{\mu\nu}$. Así su derivada covariante será:

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu s}^\mu T^{s\nu} + \Gamma_{\nu s}^\nu T^{\mu s}. \quad (17)$$

Proposición (Identidades de Bianchi)

Sea M^n una variedad con conexión ∇ y tensor de curvatura R_{ijk}^n . Entonces se cumple que

$$R_{ijk;l}^n + R_{ikl;j}^n + R_{ilj;k}^n = 0. \quad (18)$$

Definición. Sea φ un grupo uniparamétrico de transformaciones que a su vez es una isometría⁹ $\varphi_t^* g = g$. Entonces el vector generado por $\dot{\varphi}_x = X$ se llama *vector de Killing*.

Proposición. Un vector de Killing $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ cumple con la ecuación diferencial

$$L_X g_{ij} = X^k g_{ij;k} + g_{kj} X_{;i}^k + g_{ik} X_{;j}^k = 0. \quad (19)$$

donde L_X es la derivada de Lie¹⁰ y la métrica está dada como $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$.

Las ecuaciones (19) son llamadas las Ecuaciones de Killing y cualquier solución de ellas es llamado *campo vectorial de Killing* X^α .

3.3. Ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto

Una gran parte de sistemas físicos macroscópicos, incluido el universo, pueden ser considerados como un fluido perfecto.

En el caso de un medio puramente mecánico, cuyo estado en cualquier punto puede ser especificado mediante la tensión mecánica (o presión) p_{ij}^0 y densidad ρ_{00} medidas por un observador local, nosotros podemos definir el tensor momento-energía como

$$T_o^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} p_{xx}^0 & p_{xy}^0 & p_{xz}^0 & 0 \\ p_{yx}^0 & p_{yy}^0 & p_{yz}^0 & 0 \\ p_{zx}^0 & p_{zy}^0 & p_{zz}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{00} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

⁹Una isometría es simplemente una transformación para la cual $g_{\alpha\beta}$ bajo esta transformación es una forma invariante.

¹⁰Sea M^n variedad y $T \in T_s^r$ tensor sobre M^n . Sea ϕ un grupo uniparamétrico de transformaciones sobre M^n y $X = \dot{\phi}_x$. La derivada de Lie de T a lo largo de X se define como

$$L_X T|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T|_p - \phi_t^* T|_p).$$

donde ϕ_x y ϕ_t son las funciones inducidas por ϕ y $*$ es el operador de Hodge o transformación de dualidad.

La derivada de Lie también se puede escribir como

$$[U, fV] = f[U, V] + V(U \cdot \nabla f),$$

donde $[U, V]$ es el paréntesis de Lie dado por

$$[U, V]^\alpha = U^\beta \nabla_\beta V^\alpha - V^\beta \nabla_\beta U^\alpha.$$

En relatividad general se puede definir de la misma manera un tensor momento-energía para un medio mecánico eligiendo sus coordenadas en un sistema de coordenadas propio $(x_o^1, x_o^2, x_o^3, x_o^4)$. Para obtener las componentes en cualquier otro sistema de coordenadas (x^1, x^2, x^3, x^4) , tenemos que utilizar la ley de transformación para un tensor

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^\beta} T_o^{\alpha\beta}. \quad (21)$$

La ecuación (21) nos dá una expresión general del tensor momento-energía de un medio mecánico en cualquier sistema de coordenadas.

Cuando tenemos en cada punto del fluido una velocidad \vec{v} , tal que un observador moviéndose con esta velocidad ve el fluido alrededor de él como isótropo, decimos que el fluido es *perfecto*.

En el caso de un fluido perfecto nosotros podemos eliminar la dependencia del sistema de coordenadas propio (ya que es isótropo) y dejarlo en términos del sistema en el que nos encontremos. Podemos definir a un fluido perfecto también como un medio mecánico incapaz de soportar tensiones transversales, las únicas componentes de la tensión para un observador local serán aquellas correspondientes a la presión hidrostática p_0 , así el tensor momento-energía, tendrá simplemente el siguiente conjunto de componentes:

$$\begin{aligned} T_o^{11} &= T_o^{22} = T_o^{33} = p_0 \\ T_o^{44} &= \rho_{00} \\ T^{\alpha\beta} &= 0 \quad (\alpha \neq \beta). \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (21) tenemos lo siguiente:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^1} p_0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^2} p_0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^3} p_0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^4} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^4} \rho_{00}. \quad (22)$$

Tenemos una expresión para $T^{\mu\nu}$ en términos de las coordenadas propias x_o^i y de las coordenadas de nuestro interés x^i , para simplificarlo, debemos primero escribir las componentes contravariantes del tensor métrico $g^{\mu\nu}$ en las coordenadas deseadas involucrando al mismo tiempo las componentes en el sistema propio, es decir:

$$g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^\beta} g_o^{\alpha\beta}.$$

Sustituyendo los valores en coordenadas propias tenemos

$$g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^1} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^2} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^3} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^4} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^4}. \quad (23)$$

Ahora escribamos la velocidad macroscópica del fluido en las coordenadas deseadas

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^1} \frac{dx_o^1}{d\tau} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^2} \frac{dx_o^2}{d\tau} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^3} \frac{dx_o^3}{d\tau} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^4} \frac{dx_o^4}{d\tau}$$

la cual se reduce a

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^4}, \quad (24)$$

ya que las componentes espaciales de la velocidad son cero y solo sobrevive la componente temporal en coordenadas propias.

Sustituyendo (23) y (24) en (22) obtenemos la ecuación del tensor momento-energía para un fluido perfecto en la forma general:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{oo} + p_0) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - g^{\mu\nu} p_0, \quad (25)$$

donde ρ_{00} y p_0 son la densidad y la presión propia del fluido y las cantidades $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ son las componentes de la velocidad macroscópica del fluido en el sistema de coordenadas en el cual se esté trabajando.

Por otro lado p_o y ρ_{00} están relacionadas mediante una ecuación de estado la cual gobierna el comportamiento del fluido perfecto que se tome en consideración, esto es

$$p = p(\rho).$$

El tensor $T_{\mu\nu}$ satisface las leyes de conservación (10).

4. Deducción de la ecuación de Lane-Emden

4.1. Coordenadas para espacios-tiempo esféricamente simétricos

Generalmente los campos gravitacionales son débiles, tanto que para algunas deducciones en astrofísica se desprecian. Sin embargo existen objetos en los cuales los efectos relativistas desempeñan un papel muy importante.

Uno de estos objetos es la estrella de neutrones, una estrella fría compuesta primordialmente de neutrones y soportada contra el colapso gravitacional debido a la presión ejercida por la generación de los neutrones. Otro de estos objetos son los agujeros negros, un objeto supermasivo que no puede escapar del colapso gravitacional.

La existencia de estrellas de neutrones y agujeros negros fue sugerida en 1930 sobre fundamentos teóricos, a través del trabajo de J. Robert Oppenheimer y sus colaboradores.

Para comenzar el estudio de nuestro universo y de este tipo de objetos, es necesario establecer el sistema que mejor los describa. En la mayoría de los objetos astrofísicos más importantes, encontramos que estos presentan una simetría cercana a la esférica.

Entonces resolvamos las ecuaciones de campo en el vacío para el caso más simple, la simetría esférica. Tenemos dos tipos de soluciones: la solución estacionaria y la solución para un universo estático.

Una solución es *estacionaria* si es independiente del tiempo, lo cual no significa que la solución no evolucionará de alguna manera, sino que simplemente el tiempo no tiene nada que ver con esta evolución.

Es decir la solución es estacionaria, si, en un sistema de coordenadas adecuado, la métrica es independiente del tiempo

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^1} = 0,$$

pero el elemento de línea ds^2 contendrá siempre términos cruzados¹¹ en $dx^1 dx^\alpha$.

Un espacio-tiempo se dice *estacionario* si y solo si admite un campo vectorial de Killing tipo temporal.

Por otro lado *estático* nos indica que no puede estar evolucionando, es decir, estático significa simétrico con el tiempo alrededor de un origen de tiempo y la geometría no cambia bajo regresiones en el tiempo $t \rightarrow -t$. Nosotros trabajaremos con soluciones estáticas.

Matemáticamente hablando, en un *espacio-tiempo estático* existe un sistema de coordenadas adaptado al campo vectorial temporal de Killing en el cual la métrica es independiente del tiempo y no aparecen términos cruzados en los elementos de línea que involucra al tiempo, es decir, $g_{1\alpha} = 0$.

Ahora, un espacio-tiempo se dice *esféricamente simétrico* si y solo si admite tres vectores espaciales de Killing X^α linealmente independientes, para los cuales sus órbitas son cerradas, es decir, son círculos topológicos.

En este tipo de espacios existe un sistema coordenado x^α llamado cartesiano en el cual los campos de Killing X^α son de la forma

$$\begin{aligned} X^1 &= 0 \\ X^\alpha &= \omega_\beta^\alpha x^\beta \\ \omega_{\alpha\beta} &= -\omega_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

La cantidad $\omega_{\alpha\beta}$ depende de los tres parámetros que especifican las tres rotaciones espaciales. El espacio-tiempo esféricamente simétrico implica que es invariante ante rotaciones.

Así, nosotros utilizaremos el siguiente elemento de línea o métrica estándar que cumple las características antes mencionadas:

$$ds^2 = -e^{2u(r)} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (26)$$

¹¹Recordemos que los índices nos indican la dimensión de nuestro espacio-tiempo, en este caso los índices van de $j = 1, \dots, 4$ los cuales denotan una coordenada temporal x^1 y tres coordenadas espaciales x^j $j = 2, 3, 4$.

y por lo tanto el siguiente tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2u(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\frac{2m(r)}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

4.2. Ecuaciones diferenciales para la estructura estelar

Primero, mediante las herramientas de la relatividad general calcularemos la presión, la densidad y el campo gravitacional dentro de una estrella estática y esféricamente simétrica.

Utilizando la métrica dada por la ecuación(26), tenemos que sus componentes son:

$$g_{tt} = -e^{2u(r)}, \quad g_{rr} = \frac{1}{1-\frac{2m(r)}{r}}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta$$

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{para} \quad \mu \neq \nu.$$

El tensor momento-energía para un fluido perfecto (ver sección 3.3) está dado por¹²

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)v_\mu v_\nu + pg_{\mu\nu}.$$

El 4-vector velocidad está dado por la siguiente relación de ortogonalidad:

$$g^{\mu\nu}v_\mu v_\nu = -1.$$

Como el fluido está en reposo, tenemos que

$$v_r = v_\theta = v_\varphi = 0,$$

y solo sobrevive la coordenada temporal del 4-vector velocidad:

$$v_t = -(-g^{tt})^{-1/2} = -\sqrt{e^{2u(r)}}$$

$$v_t = -e^{u(r)}.$$

Así el tensor momento-energía mixto para un fluido perfecto toma la forma siguiente:

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\rho(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(r) \end{pmatrix}.$$

Para poder aplicar la ley de conservación, es decir calcular

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \tag{27}$$

primero debemos transformar el tensor $T^\mu{}_\nu$ en un tensor dos veces contravariante, el cual lo haremos mediante la siguiente ley de transformación:

$$T^{\mu\nu} = g^{\alpha\nu}T^\mu{}_\alpha$$

así el tensor momento-energía queda como:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-2u(r)}\rho(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2}p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta p(r) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

¹²Aquí v_i es igual a $\frac{dx_i}{d\tau}$, la velocidad propia del fluido.

El tensor momento-energía involucra la presión $p(r)$ y la densidad $\rho(r)$ y estas a su vez están relacionadas a través de la ecuación de estado. Para un fluido simple en equilibrio termodinámico local existe siempre una relación de la forma

$$p = p(\rho, S),$$

la cual expresa a la presión en términos de una densidad de energía y una entropía específica. En la mayoría de las situaciones la entropía puede considerarse constante, de donde se obtiene la siguiente relación,

$$p = p(\rho)$$

Ahora calculemos las leyes de conservación de la energía (27). Observemos que estas son cuatro ecuaciones, una para cada valor del índice libre μ . Debido a la simetría esférica, solo una de estas ecuaciones no es idénticamente nula, esto sucede cuando $\mu = r$, es decir

$$T^{r\nu}_{;\nu} = T^{rt}_{;t} + T^{rr}_{;r} + T^{r\theta}_{;\theta} + T^{r\varphi}_{;\varphi} \quad (29)$$

Las componentes de $T^{r\nu}_{;\nu}$ están dadas por¹³

$$\begin{aligned} T^{rt}_{;t} &= \frac{1}{r} \left[\frac{du(r)}{dr} (r - 2m(r)) \left(p(r) + e^{2u(r)} \rho(r) e^{-2u(r)} \right) \right] \\ T^{rr}_{;r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{dp(r)}{dr} \right) (r - 2m(r)) \\ T^{r\theta}_{;\theta} &= 0 \\ T^{r\varphi}_{;\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Así, la ecuación (29) queda como:

$$\begin{aligned} T^{r\nu}_{;\nu} &= T^{rt}_{;t} + T^{rr}_{;r} + T^{r\theta}_{;\theta} + T^{r\varphi}_{;\varphi} = 0 \\ T^{r\nu}_{;\nu} &= \frac{1}{r} \left[\frac{du(r)}{dr} (r - 2m(r)) \left(p(r) + e^{2u(r)} \rho(r) e^{-2u(r)} \right) \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{dp(r)}{dr} \right) (r - 2m(r)) = 0. \end{aligned}$$

Es decir:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{du(r)}{dr} (r - 2m(r)) \left(p(r) + e^{2u(r)} \rho(r) e^{-2u(r)} \right) \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{dp(r)}{dr} \right) (r - 2m(r)) = 0. \quad (30)$$

Resolviendo esta última relación obtenemos una ecuación que va a ser importante en cálculos posteriores:

$$(\rho + p) \frac{du}{dr} = -\frac{dp}{dr}. \quad (31)$$

Esta es la ecuación que nos dice que gradiente de presión se necesita para mantener al fluido estático en el campo gravitacional, cuyos efectos dependen de $\frac{du}{dr}$.

Ahora obtengamos una expresión para la función $m(r)$ la cual se le conoce como el parámetro de masa.

La ecuación de Einstein establece que,¹⁴

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu},$$

con $T_{\mu\nu} = tr \left(\rho e^{2u}, p \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}, r^2 p, pr^2 \sin^2 \theta \right)$.

¹³Recordemos que las funciones potencial newtoniano $u(r)$, densidad $\rho(r)$, masa $m(r)$ y presión $p(r)$, son todas funciones de r .

¹⁴No olvidemos que debido a la convención de unidades relativistas, $\kappa = 8\pi$.

La componente (t, t) de las ecuaciones de Einstein está dada por:

$$G_{tt} = -8\pi T_{tt},$$

si $T_{tt} = \rho e^{2u}$ y $G_{tt} = -\frac{2}{r^2} e^{2u} \frac{dm}{dr}$, tenemos la siguiente ecuación:

$$-\frac{2}{r^2} e^{2u} \frac{dm}{dr} = -8\pi \rho e^{2u}.$$

Resolviéndola obtenemos una ecuación para el parámetro de masa $m(r)$:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi \rho r^2, \quad (32)$$

o bien

$$M(r) \equiv \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr', \quad (33)$$

la cual nos indica la masa que existe dentro de una esfera de radio r .

La componente (r, r) es:

$$G_{rr} = \frac{2 \left[-2r \frac{du}{dr} M - M + r^2 \frac{du}{dr} \right]}{r^2 (r - 2M)},$$

y la componente del tensor momento-energía correspondiente es:

$$T_{rr} = \frac{p}{1 - \frac{2m}{r}}$$

Calculemos $G_{rr} = -8\pi T_{rr}$, lo cual nos queda como:

$$\frac{2 \left[-2r \frac{du}{dr} m - m + r^2 \frac{du}{dr} \right]}{r^2 (r - 2m)} = \frac{-8\pi p}{1 - \frac{2m}{r}}.$$

Resolviendo esta última igualdad obtenemos una tercera ecuación importante:

$$\frac{du}{dr} = \frac{4\pi p r^3 + M}{r(r - 2M)}. \quad (34)$$

Si sustituimos la ecuación (31) en la ecuación (34) obtenemos una ecuación en función de p , m y ρ .

Esta es la ecuación del equilibrio hidrostático para un sistema con simetría esférica en relatividad general conocida como la *Ecuación de Oppenheimer-Volkov*¹⁵:

$$-r^2 p'(r) = M(r) \rho(r) \left[1 + \frac{p(r)}{\rho(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)} \right] \left[1 - \frac{2M(r)}{r} \right]^{-1}. \quad (35)$$

La ecuación de Oppenheimer-Volkov es una ecuación no lineal de primer orden para $p(r)$

Si conocemos la ecuación de estado del fluido, las ecuaciones (32) y (35), tenemos un sistema de tres ecuaciones para las tres incógnitas $\rho(r)$, $M(r)$ y $p(r)$.

¹⁵la (') indica derivada total respecto a r , $\frac{d}{dr}$

4.3. Estrellas newtonianas: Los Polítropos

La mayoría de las estrellas que observamos, pueden ser muy bien descritas mediante la física Newtoniana sin tomar en cuenta la relatividad general. Este tipo de estrellas newtonianas nos sirven como límite para poder describir algunos objetos más “exóticos” y así entender las propiedades de dichos objetos.

En la astrofísica Newtoniana la energía interna y la presión son mucho más pequeñas que la densidad de masa en reposo¹⁶,

$$\begin{aligned} e &\ll m_N n \\ p &\gg m_N n, \end{aligned}$$

así la densidad total que domina es la densidad de la masa en reposo, $\rho \approx m_N n$ y también se tienen las siguientes suposiciones

$$\begin{aligned} p &\ll \rho \\ 4\pi r^3 p &\ll M. \end{aligned} \tag{36}$$

Además, el potencial gravitacional es pequeño en cualquier lugar, así

$$\frac{2M}{r} \ll 1. \tag{37}$$

Utilizando las condiciones (36) y (37) en (35), la ecuación de Oppenheimer-Volkov obtenemos

$$-r^2 p'(r) = M(r) \rho(r). \tag{38}$$

Tomando en cuenta que definimos a $M(r)$ como

$$M(r) \equiv \int_0^r 4\pi^2 \rho(r') dr', \tag{39}$$

entonces dividiendo (38) por $\rho(r)$ tenemos

$$-r^2 \frac{p'}{\rho} = M,$$

utilizando la ecuación (39) y diferenciando respecto a r esta última relación, obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) = 4\pi G r^2 \rho. \tag{40}$$

Esta ecuación diferencial puede ser resuelta siempre y cuando se tengan ciertas condiciones iniciales. Si $\rho(0)$ es finita, entonces necesariamente $p'(0) = 0$ tiene que anularse. Teniendo una ecuación de estado $p = p(\rho)$ con $\frac{dp}{d\rho} \neq 0$ podemos obtener a la densidad $\rho(r)$ resolviendo la ecuación (40) con las condiciones iniciales de que $\rho'(0) = 0$ y que la densidad en el origen $\rho(0)$ tenga algún valor dado¹⁷.

Otra forma de escribir la ecuación de Oppenheimer-Volkov bajo la condición que $2M \ll r$ es

$$\frac{dp(r)}{dr} = -4\pi r p(p + \rho). \tag{41}$$

la cual se resolverá teniendo una ecuación de estado $p = p(\rho)$.

¹⁶Se define M_0 como el producto de m_N la masa en reposo del nucleón y N el número de nucleones en la estrella, donde m_N tiene el valor de 1.66×10^{-24} g.

¹⁷Estas condiciones sobre la densidad ρ se pueden resumir pidiendo que $\rho(r)$ sea una función analítica en $r = 0$.

4.3.1. Polítropos

Ahora deduzcamos una ecuación de estado para la cual la densidad de energía interna es proporcional a la presión, es decir

$$e \equiv \rho - m_N n = (\gamma - 1)^{-1} p, \quad (42)$$

donde γ es una constante arbitraria. La condición de entropía uniforme por nucleón está dada por

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\rho}{n} \right) + p \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{n} \right) = 0, \quad (43)$$

de la ecuación (42) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho}{n} \right) &= \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho}{n} - m_N \right) \\ &= \frac{d}{dr} \left(\frac{e}{n} \right). \end{aligned}$$

Así la ecuación (43) queda como

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{e}{n} \right) + p \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{n} \right) = 0. \quad (44)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{e}{n} \right) &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{n} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{1}{n} \frac{dp}{dr} + p \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{n} \right) \right]. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (44) obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{e}{n} \right) + p \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{1}{n} \frac{dp}{dr} + p \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{n} \right) \right] + p \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{n} \right) \\ 0 &= \frac{1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{1}{n} \right) \frac{dp}{dr} + \gamma p \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{n} \right) \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

Resolviendo esta última ecuación diferencial para $p(r)$ obtenemos que

$$p \propto n^\gamma,$$

o bien como $\rho \approx m_N n$ tenemos que

$$p = K \rho^\gamma. \quad (46)$$

La constante de proporcionalidad K depende de la entropía por nucleón y de la composición química, pero no depende de r ni del valor de la densidad en $r = 0$. A las estrellas para las cuales la ecuación de estado que las describe es de la forma de (46) se les conoce como *polítropos*.

4.3.2. La función de Lane-Emden

Ahora transformemos la ecuación (40) para el caso de un polítropo en una ecuación adimensional mediante un cambio de variable.

Sea ξ una variable independiente definida por

$$r = \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho(0)^{\frac{\gamma-2}{2}} \xi, \quad (47)$$

y sea θ una nueva variable dependiente definida por

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(0)\theta^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ p &= K\rho(0)^\gamma\theta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.\end{aligned}\tag{48}$$

Utilizando regla de la cadena obtenemos el nuevo operador

$$\frac{d}{dr} = \frac{d\xi}{dr} \frac{d}{d\xi},$$

donde $\frac{d\xi}{dr} = \left(\frac{k\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right)^{-\frac{1}{2}} \rho(0)^{-\frac{\gamma-2}{2}}$, entonces bajo estos cambios de variable el lado izquierdo de la ecuación (40) se escribe como:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dp(r)}{dr} \right) &\rightarrow \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{-\frac{1}{2}} \rho(0)^{-\frac{\gamma-2}{2}} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \rho(0)^{\gamma-2} \xi^2 \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\rho(0)\theta^{\frac{1}{\gamma-1}}} \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{-\frac{1}{2}} \rho(0)^{-\frac{\gamma-2}{2}} K\rho(0)^\gamma \frac{\gamma}{\gamma-1} \theta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}-1} \frac{d\theta}{d\xi} \right] \\ &\rightarrow \rho(0)^{\gamma-1} K \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right).\end{aligned}$$

El lado derecho de la ecuación (40) queda como

$$-4\pi G r^2 \rho(r) \rightarrow -4\pi G \frac{KG}{4\pi G(\gamma-1)} \rho(0)^{\gamma-2} \xi^2 \theta^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Finalmente igualando términos y reacomodando tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dp(r)}{dr} \right) &= -4\pi G r^2 \rho(r) \\ \rho(0)^{\gamma-1} K \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) &= -4\pi G \frac{KG}{4\pi G(\gamma-1)} \rho(0)^{\gamma-2} \xi^2 \theta^{\frac{1}{\gamma-1}}.\end{aligned}\tag{49}$$

Así reduciendo la ecuación (49), obtenemos una ecuación adimensional en términos de las nuevas variables θ y ξ

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0.\tag{50}$$

Bajo este cambio las condiciones de frontera serán

$$\theta(0) = 1 \quad \theta'(0) = 0.\tag{51}$$

La función $\theta(\xi)$ definida por el conjunto de ecuaciones (48) es conocida como la *Función de Lane-Emden* de índice $(\gamma-1)^{-1}$.

5. Los bosones y su comportamiento

En esta sección estudiaremos la estadística de Bose-Einstein y las partículas que la obedecen. Nos enfocaremos en encontrar la ecuación de estado para los bosones, la cual utilizaremos para calcular una ecuación tipo Lane-Emden.

5.1. Condensación de Bose¹⁸

Para un gas ideal de Bose, la función de partición está dada por¹⁹

$$\mathcal{Q}(z, V, T) = \prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}}, \quad (52)$$

donde $z = e^{\beta\mu}$ es la fugacidad, $\epsilon_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m}$ son los niveles de energía del sistema donde $p \equiv |\mathbf{p}|$ y \mathbf{p} es el momento de una partícula simple:

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi\hbar}{V^{1/3}} \mathbf{n},$$

con \mathbf{n} un vector y V el volumen del sistema.

Entonces la ecuación de estado para el gas ideal de Bose se escribe como

$$\frac{PV}{kT} = \log \mathcal{Q}(z, V, T) = -\sum_{\mathbf{p}} \log(1 - ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}), \quad (53)$$

el número de partículas y la energía interna están dadas por,

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \log \mathcal{Q}(z, V, T) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}}{1 - ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}}, \quad (54)$$

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \log \mathcal{Q}(z, V, T) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\sum_{\mathbf{p}} \log \left(\frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}} \right) \right] \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \beta} \log(1 - ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}) \\ U &= \sum_{\mathbf{p}} \frac{z\epsilon_{\mathbf{p}}e^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}}{1 - ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}}. \end{aligned} \quad (55)$$

Los números de ocupación promedio están dados por

$$\begin{aligned} \langle n_{\mathbf{p}} \rangle &= -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}} \log \mathcal{Q}(z, V, T) \\ &= \frac{ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}}{1 - ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}} \end{aligned} \quad (56)$$

De estas últimas ecuaciones se sigue que

$$N = \sum_{\mathbf{p}} \langle n_{\mathbf{p}} \rangle.$$

Para un gas ideal de Bose los sumandos que aparecen en la ecuación (53) y (54) divergen cuando $z \rightarrow 1$ debido a que el término correspondiente a $\mathbf{p} = 0$ diverge. Separando los términos correspondientes a $\mathbf{p} = 0$ y reemplazando las sumas por integrales obtenemos la siguiente

¹⁸En esta sección k es la constante de Boltzmann.

¹⁹El producto continuo de una secuencia de términos $x_k, x_{k+1} \cdots x_m$ se escribe como $\prod_{k=1}^m x_k$.

ecuación de estado

$$\begin{aligned}\frac{PV}{kT} &= -\frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \log \left(1 - ze^{-\frac{\beta p^2}{2m}} \right) - \log(1-z) \\ N &= \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{ze^{-\frac{\beta p^2}{2m}}}{1 - ze^{-\frac{\beta p^2}{2m}}} + \frac{z}{1-z}.\end{aligned}\quad (57)$$

donde $N = \frac{V}{v}$.

Estas ecuaciones también pueden ser escritas en la siguiente forma equivalente

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \log(1-z) \quad (58)$$

$$N = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{z}{1-z} \quad (59)$$

$$U = \frac{3}{2} \frac{kT}{\lambda^3} g_{5/2}(z). \quad (60)$$

Reescribiendo la ecuación (59) de la siguiente forma tenemos que

$$\lambda^3 \frac{\langle n_0 \rangle}{V} = \frac{\lambda^3}{v} - g_{3/2}(z), \quad (61)$$

donde $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}}$ es la longitud de onda termodinámica, y

$$\begin{aligned}g_{5/2}(z) &\equiv -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^2 \log(1 - ze^{-x^2}) \\ g_{3/2}(z) &\equiv z \frac{\partial}{\partial z} g_{5/2}(z).\end{aligned}$$

Como la ecuación (56) implica, que la cantidad $\frac{z}{1-z}$ es el número de ocupación promedio $\langle n_0 \rangle$ para el estado base de la partícula con $\mathbf{p} = 0$ entonces

$$\langle n_0 \rangle = \frac{z}{1-z} \quad (62)$$

La energía interna está relacionada directamente con la presión mediante

$$U = \frac{3}{2} PV. \quad (63)$$

Este término contribuye significativamente en la ecuación (59) si $\langle n_0 \rangle / V$ es un número finito, es decir, que una fracción finita de todas las partículas en el sistema ocupan el primer nivel de energía con $\mathbf{p} = 0$. Bajo estas circunstancias se presenta la condensación de Bose-Einstein.

5.2. Ecuación de estado para un Condensado de Bose-Einstein

Utilicemos las relaciones anteriores para deducir la ecuación de estado.

Sustituyendo (60) en (63)

$$P = \frac{kT}{\lambda^3} g_{5/2}(z). \quad (64)$$

De la longitud de onda termodinámica

$$T = \frac{2\pi\hbar^2}{mk\lambda^2}.$$

Sustituyendo en (64)

$$P = \frac{2\pi\hbar^2}{m\lambda^5} g_{5/2}(z), \quad (65)$$

de (61)

$$\lambda^3 \left(\frac{N}{V} - \frac{\langle n_0 \rangle}{V} \right) = g_{3/2}(z). \quad (66)$$

Ahora elevando a la 5/3 la ecuación (66) y despejando λ^5 tenemos

$$\lambda^5 = \frac{g_{3/2}(z)^{5/3}}{\left(\frac{N}{V} - \frac{\langle n_0 \rangle}{V} \right)^{5/3}}. \quad (67)$$

Sustituyendo (67) en (65)

$$P = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)^{5/3}} \left(\frac{N}{V} - \frac{\langle n_0 \rangle}{V} \right)^{5/3}.$$

Reescribiendo la ecuación anterior

$$P = \frac{2\pi\hbar^2}{m^{8/3}} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)^{5/3}} \left(\frac{mN}{V} - \frac{m\langle n_0 \rangle}{V} \right)^{5/3},$$

si $\rho = \frac{mN}{V}$ es la densidad del gas de Bose y $\rho_0 = \frac{m\langle n_0 \rangle}{V}$ es la densidad media de las partículas en el estado base, finalmente se obtiene la ecuación de estado buscada:

$$p = \omega (\rho - \rho_0)^{5/3}, \quad (68)$$

donde se define la constante $\omega = \frac{2\pi\hbar^2}{m^{8/3}} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)^{5/3}}$.

Ahora, si $\frac{\langle n_0 \rangle}{V} > 0$ cuando la temperatura y el volumen específico son tales que $\frac{\lambda^3}{v} > g_{3/2}(1)$ cierta fracción de las partículas bosónicas ocuparán el estado base con $\mathbf{p} = 0$, es decir, el gas se condensará.

La superficie termodinámica que separa la región de condensación de la región del gas de Bose está dada por

$$\lambda_c^3 \frac{N}{V} = g_{3/2}(1) = 2,612. \quad (69)$$

Para un volumen específico definimos una temperatura crítica T_c para la cual se forma el condensado de Bose

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m^{5/3}} \left(\frac{\rho}{g_{3/2}(1)} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (70)$$

donde λ_c se puede interpretar como el valor para el cual la longitud de onda termodinámica es del mismo orden de magnitud que la separación promedio entre partículas.

A temperatura constante, la ecuación (61) define una densidad crítica

$$\rho_c = \frac{mg_{3/2}(1)}{\lambda^3}. \quad (71)$$

Así, la región de condensación del gas de Bose está determinada por $T < T_c$ o $\rho > \rho_c$. En esta región la fugacidad $z \approx 1$ y las funciones $g(z)$ tienden a la función ζ de Riemann²⁰, $g_l(z) \rightarrow \zeta(l)$.

²⁰Los valores numéricos de las funciones $\zeta(z)$ son $\zeta(3/2) = 2,612375349$ y $\zeta(5/2) = 1,341487257$

6. Las ecuaciones de Oppenheimer-Volkov y Lane-Emden para un condensado de Bose-Einstein

Ahora ya tenemos todo lo necesario para calcular las ecuaciones diferenciales de estructura estelar para una ecuación de estado $p = \omega (\rho - \rho_0)^{5/3}$.

Retomemos la ecuación (41)

$$\frac{dp(r)}{dr} = -4\pi r p(p + \rho), \quad (72)$$

entonces utilicemos la regla de la cadena para tener una ecuación diferencial en función de ρ :

$$\begin{aligned} \frac{dp(r)}{dr} &= \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} \\ &= \frac{5}{3} \omega (\rho - \rho_0)^{2/3} \frac{d\rho}{dr}, \end{aligned}$$

así, la ecuación (41) la reescribimos como

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dr} &= \frac{3 - 4\pi r \omega (\rho - \rho_0)^{5/3}}{5 \omega (\rho - \rho_0)^{2/3}} \left[\omega (\rho - \rho_0)^{5/3} + \rho \right] \\ \frac{d\rho}{dr} &= -\frac{12}{5} \pi r (\rho - \rho_0) \left[\omega (\rho - \rho_0)^{5/3} + \rho \right] \end{aligned} \quad (73)$$

esta ecuación diferencial puede ser resuelta numéricamente.

6.1. Condensados de Bose-Einstein como candidatos a materia oscura

Anteriormente se mencionó que hay fuertes evidencias de la existencia de dos tipos de materia que ocupan en conjunto el 96 % de la materia total del universo pero de las cuales se desconoce su naturaleza. Recientes observaciones del WMAP para la radiación cósmica de fondo y los diagramas de Hubble para las SNIa indican que cierta energía oscura, que es desconocida, domina la densidad de energía cósmica global e induce la aceleración del universo. Por otro lado, la materia oscura domina la densidad de energía local.

Ya hemos platicado acerca del modelo de $\Lambda - SFDM$ y sus características principales. A continuación se describe un modelo que tiene como clave los condensados de Bose-Einstein.

Este modelo lo construyeron científicos japoneses (ver referencia [7]) Las principales características son:

- Se introduce un gas de Bose como materia oscura (DM), el cual domina inicialmente la densidad de energía y el condensado de Bose-Einstein se identifica como energía oscura (DE).
- El condensado tiene presión negativa debido a su potencial lo cual se refleja en la interacción atractiva. Esta presión negativa actuaría como una constante cosmológica y garantiza la expansión acelerada.
- La sedimentación del condensado lentamente beneficia a la evolución cósmica.
- Cuando la densidad de energía del condensado de Bose-Einstein excede cierto valor crítico, el condensado rápidamente colapsa en una estrella de bosones compacta y agujeros negros, lo cual se comporta como materia oscura fría y luego se convierte en galaxias. Estos ciclos de colapsos y sedimentación se presentan varias veces después de la fase de desacoplamiento

de los fotones, y así, reproduce la estructura a gran escala tal y como lo predice el modelo de Λ CDM y las observaciones en el patrón de las fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo²¹.

²¹Conocida en la literatura como CMB -Cosmic Microwave Background-

7. Materia Oscura en Galaxias

Como ya habíamos comentado en la sección 1.2, no solo la mayoría de la materia bariónica es indetectable por el ojo humano, si no que no toda la materia es bariónica. La mayoría de la materia en el universo es materia oscura no bariónica, la cual no absorbe, no emite o dispersa luz en cualquier longitud de onda. Una manera de detectar materia oscura es observar su influencia gravitacional sobre la materia visible. Un método clásico de detectar materia oscura, consiste en observar las velocidades de las estrellas en las órbitas de galaxias espirales.

Las galaxias espirales contienen discos planos de estrellas; dentro de este disco, las estrellas están en una órbita circular alrededor del centro de la galaxia. Si suponemos una estrella que se mueva en una órbita circular de radio R y con una velocidad orbital v , entonces esta velocidad en términos de la masa $M(R)$, que sería la masa contenida en una esfera de radio R , tenemos que

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}.$$

El brillo de la superficie I del disco de una galaxia espiral típica decae exponencialmente con la distancia desde el centro

$$I(R) = I(0) \exp\left(-\frac{R}{R_s}\right)$$

con la longitud de escala R_s que típicamente serán unos cuantos kiloparsecs.

7.1. Materia oscura, Condensados de Bose-Einstein y centros de Galaxias

Los campos escalares son uno de los más importantes e interesantes campos “misteriosos” en la física teórica. Campos escalares fundamentales son necesarios en toda teoría de unificación pero hasta ahora nadie a logrado detectar uno. De existir, estos campos deben tener características muy especiales.

En los últimos años, diversos grupos de científicos han sugerido que los agujeros negros y los centros de galaxias podrían ser estrellas de bosones. También se propuso que la materia oscura de los halos de galaxias podrían ser estrellas de bosones o bien los oscilaciones podrían ser halos de materia oscura [17, 9].

La idea principal es que el campo escalar exista como un campo fundamental, y que estén presentes en una época muy temprana, cerca del origen del universo. Conforme el universo se expande, los campos escalares se enfrían junto con todas las partículas hasta que estos se separan del resto de la materia. Después de esto, solo la expansión del universo mantiene fríos a los campos escalares. No obstante, después de la inflación, fluctuaciones primordiales hicieron que los campos escalares colapsaran y formaran objetos astrofísicos como estrellas o galaxias.

Las fluctuaciones primordiales provocaron que las estrellas de campos escalares colapsaran debido a su fuerza gravitacional. El enfriamiento de los campos escalares continuó hasta que la fluctuación se separa de la expansión del universo. Después de esto, no existía algo que pudiera causar el enfriamiento del campo escalar.

Si después de que la fluctuación del campo escalar se separó de la expansión del universo, la temperatura interna del campo escalar está por encima de la temperatura crítica de condensación, entonces la fluctuación colapsará a un objeto tipo Maxwell-Boltzman como polvo (este proceso es bien conocido). Más aún, si esta fluctuación está por debajo de la temperatura crítica de condensación, el objeto colapsará como un condensado de Bose-Einstein. Esta es la región que nos interesa.

En la sección 5, se dedujeron todas las propiedades de los condensados de Bose-Einstein (CBE), de las cuales haremos uso a continuación. Las simulaciones numéricas han mostrado que, después de que los CBE han sido formados, estos tienen comportamientos estadísticos tipo

polvo en el universo. Si esto es así, después del desacoplamiento con el resto de la materia, la temperatura del CBE será:

$$T_{CBE} = T_{oCBE} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2, \quad (74)$$

donde T_{oCBE} es la temperatura del CBE y $a_0 = 1$ es el valor del factor de escala actual. De la misma manera, conforme el CBE se comporte como materia en el universo, su densidad va como $\rho_{CBE} = \frac{\rho_{oCBE}}{a^3}$ donde ρ_{oCBE} es la densidad de materia de CBE que existen actualmente en el universo.

Con estos resultados, la ecuación (70) podemos escribirla como:

$$T_c = = \frac{2\pi\hbar^2}{km^{5/3}} \left(\frac{\Omega_{0CBE}\rho_{crit}}{\zeta(3/2)} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{a^2} \quad (75)$$

$$= 6,2 \times 10^{-31} \frac{(\Omega_{0CBE}h^2)^{2/3}}{\left(\frac{m}{GeV}\right)^{5/3}} \frac{1}{a^2} GeV, \quad (76)$$

donde Ω_{0CBE} es la proporción actual de CBE en el universo y ρ_{crit} es la densidad crítica del universo.

Si el esquema del modelo estándar de partículas actual pudiera ser extendido a altas temperaturas, uno podría esperar que el campo escalar que forma los CBE, interactuaría con el resto de las partículas por encima de alguna temperatura T_s . Debido a que la física de partículas elementales es bien conocida hasta temperaturas del orden de TeV, no podemos esperar entonces que alguna partícula exótica como estos campos escalares aparecieran bajo temperaturas del orden de TeV. Vamos a suponer que los campos escalares que forman los CBE se desacoplan del resto de la materia a temperaturas por encima de los TeV. Debajo de estas temperaturas, este campo escalar tiene poca interacción con el resto de la materia. Si suponemos que este campo escalar forma los CBE, la temperatura crítica del condensado debe ser mucho menor que la temperatura del campo escalar desacoplado. Este hecho da un límite superior de la masa del campo escalar:

$$m_\phi < 10^{-17} eV. \quad (77)$$

Por otro lado, de las simulaciones numéricas, se sabe que los campos escalares forman objetos gravitacionalmente compactos con una masa crítica dada por

$$M_{crit} \sim s \frac{m_{Pl}^2}{m_\phi}, \quad (78)$$

donde m_{Pl} es la masa de Planck y s es el factor tal que $s = 0,601$ para campos escalares complejos (estrellas de bosones) y $s = 0,1$ para campos escalares reales (oscilaciones). Con el valor dado en (77), el campo escalar puede formar CBE gravitacionalmente compactos con una masa crítica dada por

$$\begin{aligned} M_{crit} &> 1,491 \times 10^{64} GeV \\ &= 2,568 \times 10^{40} gr \\ &= 13,36 \times 10^6 M_\odot \end{aligned} \quad (79)$$

Este es un resultado interesante, si realmente existe el campo escalar en el universo, como lo predicen las teorías fundamentales como supercuerdas, branas, etc. y este campo escalar (CE) juega algún rol en el universo en este momento, entonces este CE debe tener una masa más pequeña que la dada en la ecuación (77) y formará CBE gravitacionalmente compactos con masas alrededor de las masas dadas en (79).

Para entender el comportamiento de las estrellas de campos escalares (SFS por sus siglas en inglés Scalar Field Stars), supondremos que nuestra estrella es esféricamente simétrica y con la siguiente ecuación de estado (ver sección 5.2)

$$p = \omega (\rho - \rho_0)^{5/3}.$$

La ecuación diferencial de Oppenheimer-Volkov (ver sección 6), la cual puede ser resuelta numéricamente

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{12}{5}\pi r (\rho - \rho_0) \left[\omega (\rho - \rho_0)^{5/3} + \rho \right]. \quad (80)$$

En la ecuación (80) tenemos dos límites interesantes. Primero supongamos que la constante ω^{22} es pequeña, tal que $p \ll \rho$. Esta situación ocurre cuando tenemos campos escalares muy masivos, es decir, $m \gg 1$. En este caso la ecuación (80) tiene una solución analítica.

Para cuando $p \ll \rho$ en la ec.(68) tenemos que

$$\begin{aligned} p &\ll \rho \\ p + \rho &\ll \rho \\ \omega(\rho - \rho_0)^{5/3} + \rho &\ll \rho \end{aligned}$$

Sustituyendo esto último en la ecuación (80) se obtiene una ecuación diferencial para $\rho(r)$,

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{12}{5}\pi r \rho (\rho - \rho_0). \quad (81)$$

Finalmente resolviendo esta ecuación analíticamente,

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 - \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho(0)}\right) e^{-\frac{6}{5}\pi\rho_0 r^2}}. \quad (82)$$

Notemos que cuando $r \rightarrow \infty$, la función $\rho(r) \rightarrow \rho_0$. Tomemos el valor inicial de la densidad como el producto de los valores iniciales del radio y la densidad, $\rho(0) = r_0\rho_0$.²³

El comportamiento para la densidad utilizando la ecuación (82) se muestra en la siguiente figura:

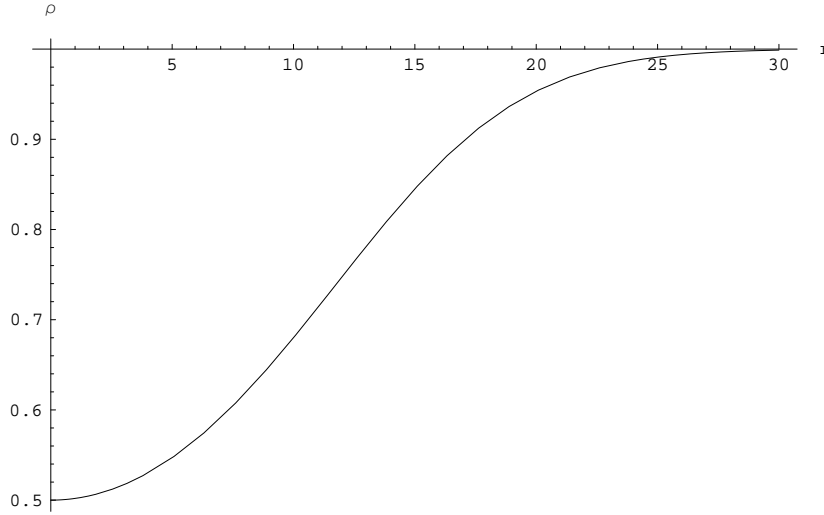


Figura 2: Gráfica de la densidad $\rho(r)$ para el caso $p \ll \rho$ y $r_0 < 1$. Se tomó el valor de $r_0 = 1/2$ y $\rho_0 = 0,002$.

²²Recordemos que el valor de la constante es $\omega = \frac{2\pi\hbar^2}{m^{8/3}} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)^{5/3}}$. Véase sección 5.2.

²³Como estamos tratando el caso de la formación de una galaxia ideal, los valores de r_0 el radio inicial y ρ_0 son arbitrarios.

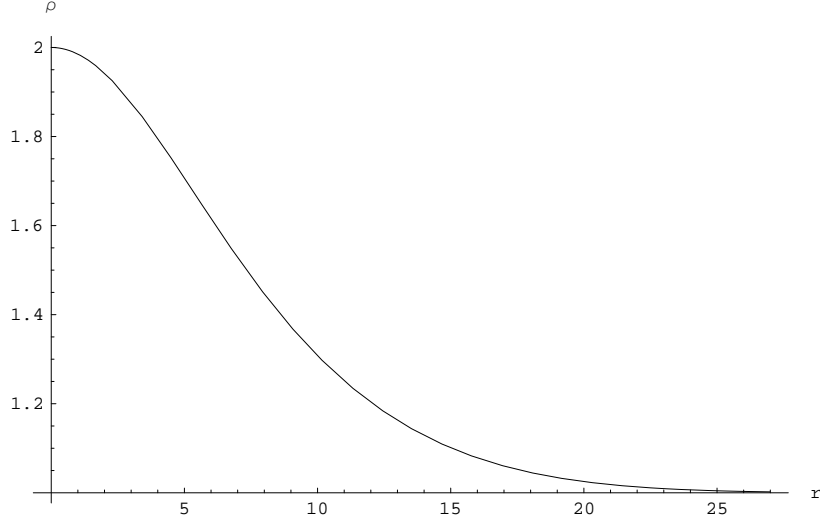


Figura 3: Gráfica de la densidad $\rho(r)$ para el caso $p \ll \rho$, $r_0 > 1$. Para este caso se tomó el valor de $r_0 = 2$ y $\rho_0 = 0,002$.

La función de la densidad cambia abruptamente para diferentes valores de r_0 . Si $r_0 > 1$, la densidad $\rho(r)$ decrece, pero si $r_0 < 1$ la densidad aumenta como se puede observar en las gráficas obtenidas.

El segundo y el más interesante límite de la ecuación (80) es para $p \gg \rho$. Esto sucede cuando la masa del campo escalar es demasiado pequeña $m \ll 1$ respecto al CBE astrofísico. En este límite la ecuación de Oppenheimer-Volkov toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} p &\gg \rho \\ \omega(\rho - \rho_0)^{5/3} &\gg \rho \end{aligned}$$

Así, escribimos

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{12}{5}\pi r \omega (\rho - \rho_0)^{8/3}, \quad (83)$$

cuya solución que también es analítica está dada por

$$\rho(r) = \frac{\rho(0) - \rho_0}{\left[2\pi r^2 \omega (\rho(0) - \rho_0)^{5/3} + 1\right]^{3/5}} + \rho_0. \quad (84)$$

De la ecuación (68) evaluada en 0, tenemos que

$$p(0) = \omega (\rho(0) - \rho_0)^{5/3},$$

sustituyendo esta última expresión en (84),

$$\rho(r) = \left(\frac{\frac{p(0)}{\omega}}{2\pi r^2 p(0) + 1} \right)^{3/5} + \rho_0. \quad (85)$$

o bien, podemos escribir esta última ecuación en términos de la presión $p(r)$ como,

$$p(r) = \frac{1}{2\pi r^2 + \frac{1}{p(0)}}. \quad (86)$$

Para este caso cuando $p \gg \rho$ la presión domina el CBE y adquiere su máximo para $p(0)$.

Lejos del centro del CBE, es decir, para r muy grande, la ecuación (85) se aproxima a

$$\rho = \left(\frac{\frac{1}{\omega}}{2\pi r^2} \right)^{3/5} + \rho_0. \quad (87)$$

Con estos resultados y las simulaciones hechas por varios científicos, tenemos ahora un nuevo paradigma para la formación de estructura. En el paradigma del modelo de SFDM, después del big bang, el campo escalar se expande hasta el desacoplamiento del resto de la materia. Si el campo escalar tiene una masa demasiado pequeña, tal que su temperatura crítica de condensación es menor que la temperatura de desacoplamiento, el campo escalar forma un condensado de Bose-Einstein. Entonces el CE colapsa formando objetos cuya masa final no es más grande que la masa crítica²⁴ m_{Planck}^2/m .

Estos objetos contienen perfiles de densidad muy similares a los mostrados en la figura 2, además de que son objetos muy estables bajo perturbaciones.

Se ha propuesto que la materia oscura en las galaxias y cúmulos de galaxias, es un campo escalar con una masa de $10^{-23}eV$. Si este fuera el caso, la principal diferencia para la formación de estructura de estos campos escalares ultra ligeros y el paradigma *bottom up*²⁵ sería que los objetos SFDM se forman justo después del colapso del campo escalar y permanecen solo durante la expansión del universo. Además, estos pueden colisionar unos con otros, pero después de la colisión quedan inalterados, y se comportan como solitones.

Este paradigma implica que deberíamos ver galaxias bien formadas con la masa actual para corrimientos al rojo muy grandes, más grandes que los que se predice con el paradigma de bottom-up, i.e., por CDM.

²⁴La masa de Planck es $m_{Planck} = \left(\frac{G\hbar}{c^3} \right)^{1/2} = 2,177 \times 10^{-8}kg$.

²⁵En un universo que esté dominado por materia oscura fría, los objetos que se formarían primero serían muy pequeños, primero galaxias, luego cúmulos y supercúmulos. Este escenario es llamado “escenario bottom-up”, y es consistente con las edades observadas de galaxias y supercúmulos.

8. Conclusiones

Uno de los problemas más fundamentales en la cosmología moderna es la naturaleza de la materia oscura, esto ha provocado una búsqueda intensa de candidatos que permitan la formación de estructura cosmológica que se observa hoy en día. Existen algunos candidatos que pueden considerarse como exóticos, por ejemplo, los campos escalares, los cuales son simplemente partículas.

Una de las ideas principales de estos campos escalares es que pueden formar condensados de Bose-Einstein, y permitir la formación de estructura a gran escala. El tipo de objetos que son formados por campos escalares han sido investigados en detalle usando herramientas numéricas. Una de las características más atractivas del modelo de campo escalar es la construcción de configuraciones estables las cuales demandan perfiles de densidad planas en el origen, lo cual es una ventaja sobre los modelos de materia oscura los cuales tienen picos en este tipo de perfiles.

En general, campos escalares complejos pueden formar configuraciones en equilibrio estable llamadas estrellas de bosones, que son regulares y cuya densidad de energía es independiente del tiempo. Campos escalares reales también forman configuraciones en equilibrio llamadas oscilaciones.

Para un potencial escalar libre, las configuraciones en equilibrio Newtoniano pueden ser tan grandes como un halo galáctico si la masa del bosón es demasiado ligera. El régimen Newtoniano es la parte de interés astrofísico, si uno calcula la longitud de Compton asociada a la masa de un bosón ultraligero, esta es del orden de $10^{-23}eV$, esto es $\lambda_c \sim 1 pc$. Desde el punto de vista de física de partículas, esta masa bosónica es extremadamente pequeña. Por consiguiente, estos bosones ligeros formarán objetos que serán demasiados pequeños comparados con escalas típicas galácticas. Sin embargo, en el régimen Newtoniano, la gravedad es más débil y permite la formación de objetos escalares mucho más grandes.

Resumiendo, la materia oscura puede ser considerada como una partícula de campo escalar ultra ligera. La evolución cosmológica de la materia oscura escalar (SFDM) y sus fluctuaciones lineales, pueden ser tomadas de materia oscura fría (CDM). Por otro lado, configuraciones escalares auto-gravitantes pueden reproducir algunas propiedades generales de halos de galaxias observadas hoy en día.

Se trabajó con una serie de modelos para la formación de galaxias usando un modelo cosmológico con campo escalar en el cual la materia oscura está modelada por un campo escalar ϕ , el cual se propuso como condensados de Bose-Einstein. En el modelo de materia oscura escalar (SFDM), la materia oscura consiste de una partícula ultra ligera cuya masa utilizada en este trabajo fué de $m_\phi = 1,1 \times 10^{-23}eV$. En el modelo de SFDM, se sugiere que el campo escalar pudiera ser un buen candidato de materia oscura en los halos de galaxias.

Se trabajó con un condensado de Bose-Einstein en el régimen clásico, obteniendo una ecuación de estado, la cual gobernará el comportamiento de nuestro condensado. Bajo estas condiciones, se encontró una ecuación diferencial de Oppenheimer-Volkov la cual se resolvió analítica y numéricamente para dos límites de interés. El primer límite fue en suponer una presión muchísimo menor que la densidad, situación que ocurre cuando tenemos campos escalares muy masivos. Para este primer caso se obtuvo una solución analítica dada por:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 - \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho(0)}\right) e^{-\frac{6}{5}\pi\rho_0 r^2}}. \quad (88)$$

Para este primer límite, se tomaron en cuenta dos casos, para cuando el radio $r_0 > 1$ y $r_0 < 1$. Para ambos radios se hicieron las gráficas correspondientes, las cuales muestran el comportamiento de la función de densidad $\rho(r)$, la cual decrece para radios mayores que uno e incrementa para radios menores que la unidad.

El segundo caso en consideración fue suponer que la presión era más grande que la densidad $p \gg \rho$, esto ocurre cuando la masa del campo escalar es muy pequeña. En este límite se obtuvo

también una solución analítica a la ecuación de Oppenheimer-Volkov dada por

$$\rho(r) = \frac{\rho(0) - \rho_0}{\left[2\pi r^2 \omega (\rho(0) - \rho_0)^{5/3} + 1\right]^{3/5}} + \rho_0. \quad (89)$$

Si nosotros graficamos la densidad en función del radio, con el valor de la masa del campo escalar propuesta, obtenemos un perfil de densidad constante, es decir, no hay picos como se predice con el modelo de Λ CDM, y este perfil está de acuerdo con las simulaciones actuales de perfiles de densidad en las galaxias.

De estos resultados, nosotros podemos decir que los colapsos de campos escalares forman objetos cuya masa final no es más grande que la masa crítica. Estos objetos tendrán perfiles de densidad muy similares a los mostrados en la figura superior 2. Así la materia oscura en las galaxias podrían ser campos escalares de masas del orden de $10^{-23} eV$.

Otra conclusión interesante es que, debido a que los objetos de campos escalares ultraligeros se formaron justo después del colapso del campo escalar y permanecieron durante la expansión del universo, estos pueden colisionar unos con otros y permanecer inalterados después de la colisión, un comportamiento tipo solitones. Lo que implicaría galaxias bien formadas en un universo muy joven.

Finalmente, los condensados de Bose-Einstein deben ser considerados como un buen candidato a la materia oscura que se encuentra en los halos de galaxias, y no desistir en la búsqueda de estos campos escalares con los nuevos experimentos que están por ponerse en marcha.

9. Apéndice de Inflación.

Las propiedades observadas de las galaxias, cuasares y supernovas las cuales son en corrimientos al rojo relativamente pequeños ($z < 6$), nos hablan del universo a la edad de $t > 1Gyr$. Las propiedades de la radiación cósmica de fondo nos hablan del universo al tiempo de la última dispersión ($z_{ls} \approx 1100$, $t_{ls} \approx 0,35Myr$). La abundancia de elementos ligeros como el deuterio y helio nos hablan del universo en el tiempo del Big Bang y nucleosíntesis ($z_{nuc} \approx 3 \times 10^8$, $t_{nuc} \approx 3min$).

El escenario del Big Bang caliente (Hot Big Bang), en el cual el universo temprano fué dominado por radiación, tiene tres problemas fundamentales, llamados el *problema de la planitud*, el *problema del horizonte* y el *problema de los monopolos*. El problema de la planitud podemos establecerlo como “El universo es plano hoy en día y era más plano en el pasado”. El problema del horizonte nos dice: “El universo es homogéneo e isótropo ahora y fue más en el pasado”. El problema del monopolo establece que “El universo está aparentemente libre de monopolos magnéticos”.

No existe una Teoría de Gran Unificación definitiva que pueda resolver este último problema, sin embargo, podemos decir que al menos en esta época del universo no se han observado monopolos magnéticos. Sin embargo los problemas de lo plano y el horizonte no están del todo resueltos. El físico Alan Guth fue el primero en proponer la idea de *inflación* en 1981 e introdujo una manera de resolver el problema de lo plano, el problema del horizonte y el problema de los monopolos con un simple mecanismo cosmológico.

Pero, ¿qué es inflación?, en el contexto cosmológico, la inflación puede definirse como la hipótesis de que existió un periodo en la historia temprana del universo, cuando la expansión fue acelerada, es decir, cuando $\ddot{a} > 0$.

Comencemos por describir el modelo del Hot Big Bang para así poder introducir el concepto de un universo Inflacionario²⁶.

9.1. El Modelo del Hot Big Bang

Como ya hemos visto la métrica que describe a un universo homogéneo e isotrópico en expansión fue desarrollada en la década de los 20's y es conocida como la métrica de Friedmann-Robertson-Walker,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right],$$

donde $a(t)$ es el radio del universo o factor de escala, κ es la curvatura del universo y puede ser -1 para un universo abierto, 0 para un universo plano y 1 para uno cerrado.

Cuando $\kappa = 0$, la métrica puede ser escrita en la forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

la parte espacial de la métrica describe un espacio tridimensional Euclídeo, es decir, plano, y cuando $a(t)$ es constante o varía lentamente el universo plano describe a un espacio de Minkowski.

Actualmente las observaciones del CMB²⁷ de las oscilaciones bariónicas están en concordancia con un universo plano. La posición del primer pico en $l = 200$ en la expansión de armónicos esféricos es predicha para un universo plano [18].

En coordenadas cartesianas, las ecuaciones de Einstein que describen la evolución del factor de escala asumiendo al universo constituido por un fluido perfecto, como ya habíamos supuesto, son:

$$\begin{aligned} H^2 + \frac{\kappa}{a^2} &= \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3} (\rho + p). \end{aligned} \tag{90}$$

²⁶La siguiente sección es una recopilación de las notas sobre Inflación de la Dra. Erandy Ramírez.

²⁷Cosmic Microwave Background (Radiación Cósmica de Fondo).

De estas dos ecuaciones se puede deducir una ecuación de conservación la cual escribimos en la forma:

$$\dot{\rho}a^3 + 3(\rho + p)a^2\dot{a} = 0, \quad (91)$$

Esta ecuación es equivalente a la ley de conservación de energía para una expansión adiabática. La expansión en el universo es adiabática porque el calor no fluye (la entropía total no cambia).

Después de inflación se asume al universo como un gas con velocidad cuadrática promedio v^2 . Tenemos dos posibilidades, un universo lleno de radiación ($v^2 \approx 1$) o de polvo ($v^2 \rightarrow 0$). Con la relación entre la presión y la densidad [21, 27, 19], obtenemos una relación entre la densidad y el factor de escala,

$$\begin{aligned} p &= \frac{v^2}{3}\rho \iff p = \alpha\rho \\ v \ll 1 &\Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \\ v \approx 1 &\Rightarrow \alpha \rightarrow \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Si $p = \alpha\rho$ en la ecuación (91), obtenemos una ecuación para ρ ,

$$\rho \propto a^{-3(1+\alpha)},$$

de esta última ecuación se obtienen dos posibles soluciones:

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\Rightarrow \rho \propto a^{-3} \\ \alpha = \frac{1}{3} &\Rightarrow \rho \propto a^{-4}, \end{aligned} \quad (92)$$

la primera para polvo y la segunda solución para radiación²⁸.

Cuando $a(t)$ varía lentamente, tenemos que $\frac{8\pi G}{3}\rho \gg \frac{\kappa}{a^2}$, luego podemos hacer la siguiente aproximación válida para un universo lleno de polvo o de radiación [19, 20],

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3}\rho,$$

podemos resolver para $a(t)$ utilizando las soluciones (92) encontradas antes para la densidad en términos del factor de escala:

$$\frac{\dot{a}}{a} \approx \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} a^{-\frac{3}{2}(1+\alpha)} \Rightarrow a \propto t^{2/3}.$$

De aquí obtenemos dos soluciones que son independientes de la geometría del universo:

$$\begin{aligned} p = 0 &\Rightarrow \alpha \propto t^{2/3} \\ p = \frac{1}{3} &\Rightarrow \alpha \propto t^{1/2} \end{aligned}$$

Hemos obtenido las soluciones para la dinámica del universo a grandes escalas dependiendo del tipo de materia que consideremos compuesto al mismo. Sin embargo, este escenario tiene varios problemas, algunos de los cuales mencionaremos a continuación [27, 19, 21, 23].

9.1.1. Problemas del Hot Big Bang

1. *El problema de la singularidad.* Las soluciones encontradas anteriormente para el factor de escala muestran un comportamiento como una función proporcional al tiempo elevado a cierta potencia. Al mismo tiempo, la densidad depende inversamente del factor de escala.

²⁸El factor extra a en el denominador para radiación proviene del corrimiento del rojo que experimentan los fotones debido a la expansión del universo.

Si tomamos el límite cuando $t \rightarrow 0$, de estas soluciones tenemos una singularidad en la densidad:

$$\begin{aligned} t \rightarrow 0 &\Rightarrow a \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 &\Rightarrow \rho \rightarrow \infty \end{aligned}$$

y las soluciones no pueden ser continuadas formalmente para cuando $t < 0$.

2. *El problema del horizonte.* H^{-1} no solamente determina la edad del universo, sino también el radio de la parte observable del universo, es decir, la medida de la distancia en donde tienen lugar los procesos causales en el universo. Por lo tanto, regiones separadas por una distancia mayor que el horizonte no pueden influenciar unas a otras. Estudios del CMBR (el fondo de radiación cósmica de microondas) muestran que a $t \approx 10^5$ años, el universo era muy homogéneo e isotrópico a escalas mayores que el horizonte, con temperaturas distintas en regiones que diferían por menos que 10^{-4} . De las ecuaciones de Einstein (90), se puede demostrar que hay aproximadamente 10^6 regiones causalmente desconectadas en el universo a $t \approx 10^5$ años. La probabilidad de que estas regiones hayan alcanzado este equilibrio térmico fortuitamente, sin interactuar entre ellas, es decir, que están causalmente desconectadas es de 10^{-24} - 10^{-30} . Sin embargo, esto es lo que se observa con una precisión de $\frac{\nabla T}{T} \approx \mathcal{O}(10^{-5})$.
3. *Formación de Galaxias.* El modelo del Hot Big Bang está construido bajo la hipótesis de que se cumple el Principio Cosmológico, así como la métrica de Friedmann-Robertson-Walker se supone a la materia como un fluido perfecto sin inhomogeneidades. Sin embargo, las estructuras que se observan a gran escala en el universo como galaxias y cúmulos de galaxias indican que debió existir algún tipo de inestabilidades gravitacionales y también de la materia a través de las cuales se formaron. Las inhomogeneidades iniciales que llevaron a esto no pueden ser explicadas por el modelo del Hot Big Bang.
4. *Monopolos Magnéticos.* Algunas teorías de gran unificación predicen la existencia de estructuras conocidas como monopolos y otras reliquias con una abundancia que no es observada en el universo. El modelo del Hot Big Bang tampoco puede explicar que ocurrió con esta materia y porque no se observa.
5. *El problema de la planitud del universo.* La escala natural de longitud o radio característico de curvatura del espacio es la escala de Planck $l_P \simeq M_P^{-1} \simeq 10^{-33} \text{cm}$. Para $l \leq l_P$ las fluctuaciones cuánticas de la métrica hacen imposible en general describir el espacio en términos clásicos. A $l \simeq 10^{28} \text{cm}$. 60 órdenes de magnitud más grande que l_P el espacio tiempo es casi perfectamente Euclídeo. Surge una pregunta después de todo este análisis, ¿de dónde viene este comportamiento a un valor tan alejado de l_P ?

9.2. Un universo inflacionario

Como una alternativa a la solución de los problemas mencionados anteriormente, se introdujo el concepto de un universo inflacionario cuyas características principales se presentan a continuación [19, 23, 24]:

- A etapas muy tempranas de su evolución, el universo pudo estar en un estado de vacío inestable teniendo una densidad de energía cuya ecuación de estado es $p = -\rho$. De acuerdo a la ecuación de conservación (91), tenemos que:

$$\dot{\rho} a^3 = 0 \Rightarrow \rho = \text{cte.}$$

que es la densidad de energía del vacío inestable en el que se encuentra el universo y la cual no cambia conforme el mismo se expande.²⁹

- Sobre un tiempo característico de expansión $\delta t = H^{-1}$ hay poco cambio en la magnitud de H , por lo cual se puede hablar de una expansión cuasiexponencial del universo. Dado que $H = \frac{\dot{a}}{a}$ y H es casi constante, esta ecuación puede ser resuelta para a en función de t dando:

$$a(t) = a_0 \exp\left(\int_0^t H(t) dt\right) \simeq a_0 e^{Ht}, \quad (93)$$

lo que se conoce como etapa cuasi de Sitter de su expansión. Justo éste régimen de expansión cuasiexponencial es conocido como *inflación*.

- Formalmente la definición de cualquier etapa inflacionaria del universo es definida como:

$$\ddot{a}(y) > 0,$$

o equivalentemente [27],

$$\frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{a} < 0,$$

es decir, una etapa en la que el radio u horizonte comóvil del universo decrece. No debemos confundir esta cantidad con H^{-1} que es el horizonte el cual permanece casi constante durante inflación. La cantidad definida anteriormente contiene también un factor de a para hacerlo comóvil, y el factor de escala esta creciendo exponencialmente, mientras que H no.

- Inflación llega al final cuando H comienza a decrecer rápidamente. La energía almacenada en el estado de vacío es transformada en energía térmica, y el universo se vuelve extremadamente caliente. A partir de este punto su evolución es descrita por la teoría del Hot Big Bang, con la salvedad de que las condiciones iniciales de expansión del universo caliente son determinadas por procesos que ocurrieron en la etapa inflacionaria y que son independientes de la estructura del universo anterior a inflación. Es decir, inflación provee a la teoría del Hot Big Bang de las condiciones iniciales a partir de las cuales puede empezar a explicar la evolución del universo sin verse afectada por la condiciones del mismo antes de inflación.
- El campo escalar ϕ que aparece en teorías de unificación podría jugar el papel del estado de vacío con densidad de energía $V(\phi)$ que se necesita para empezar inflación [19, 21]. La magnitud del campo en un universo en expansión depende de la temperatura y también de transiciones de fase que pueden cambiar a ϕ , la energía almacenada en el campo es transformada en energía térmica. Si la transición de fase tiene lugar en un estado metaestable de vacío a una temperatura muy baja, la entropía total del universo se puede incrementar considerablemente y un universo de Friedmann puede volverse “caliente”.
- Starobinsky (1979-80) [22] encontró la primera solución inflacionaria. Utilizando la métrica de de Sitter como una solución a las ecuaciones de Einstein con correcciones cuánticas. La solución (de Sitter) es inestable, y después de que el estado de vacío inicial decae, el espacio de Sitter se transforma en un universo de Friedmann caliente. Su objetivo principal era resolver el problema de la singularidad cosmológica inicial, lo cual no se logró y la pregunta de las condiciones iniciales continuó sin explicación. Sin embargo, las ventajas del universo inflacionario todavía no habían sido reconocidas en esta etapa.

²⁹Conforme el universo se expande, hay más vacío compensando la expansión y manteniendo la densidad del mismo constante.

- Alan Guth (1981) [23], reconoció la necesidad de considerar modelos del universo con una etapa de expansión cuasi exponencial. El sugirió utilizar la expansión cuasi exponencial (inflación) del universo en un estado de vacío superenfriado para resolver los problemas del HBB.
- El campo escalar ϕ tiene que estar en equilibrio térmico con los demás campos del sistema para poder localizarlo en el vacío falso al valor $\phi = 0$. A altas temperaturas incluso este es un valor preferencial del sistema. Mientras el campo esta en este vacío, inflación tiene lugar y dura hasta que el vacío decae completamente por tunelaje cuántico y una transición de fase de primer orden en la que hay una producción de “burbujas”. El nuevo estado $\phi_0 \neq 0$ se encuentra adentro de las burbujas, como en el caso del agua hirviendo. La colisión de las burbujas con la nueva fase adentro recalienta al universo. El problema de este primer modelo es que la colisión de las burbujas llevaba a demasiadas inhomogeneidades después de inflación, lo cual no se desea, ya que buscamos un universo homogéneo e isotrópico como resultado. Este es el problema del “graceful exit” de la inflación antigua.
- La inflación nueva Linde (1980) [24] y simultáneamente Albrecht y Steinhardt (1980) [25] es otra propuesta para conservar el universo inflacionario resolviendo los problemas del primer modelo. En este modelo, inflación ocurre no solo por super enfriamiento, sino también por el rodamiento lento del campo a su vacío real.
- El tiempo característico de rodamiento es muchísimo mayor que H^{-1} y si hay producción de burbujas, las inhomogeneidades por la colisión de las mismas quedan fuera del horizonte (H^{-1}) ya que, al ser el tiempo característico más grande que esta cantidad, el universo continua inflando mientras las burbujas colisionan y la expansión las “saca” del contacto causal con el mismo. El universo ahora se recalienta por oscilaciones del campo alrededor de mínimo del potencial y no por la colisión de las burbujas.
- Este modelo requiere que el potencial tenga una parte suficientemente plana alrededor de $\phi = 0$, por lo tanto, las constantes de acoplamiento del potencial deben de ser tan pequeñas que el campo no puede estar en equilibrio térmico.
- De aquí que la única restricción sobre ϕ es que su densidad de energía no exceda la densidad de energía total del universo. Esto lleva al siguiente modelo.

Inflación caótica Linde [26]. Teniendo la condición $\phi \geq M_P$, el potencial crece más lentamente que $\exp(\phi)$. Esta condición la satisface cualquier potencial de la forma,

$$V(\phi) = \frac{\lambda \phi^n}{n M_P^{n-4}}, \quad n > 0, \quad 0 < \lambda \ll 1.$$

En particular, las observaciones actuales del CMB favorecen los modelos inflacionarios caóticos con $n = 2$ y han descartado el caso $n = 4$ o potencias mayores [28].

El nombre de inflación caótica viene del hecho de que al tener fluctuaciones cuánticas del campo, se crea el llamado “ruido estocástico”. Si el campo tiene valores lo suficientemente grandes, sus fluctuaciones pueden ocasionar que “escale” el potencial de regreso y comience de nuevo la expansión acelerada a partir de un valor más grande. Esto es, en distintos lugares del universo, el campo puede tener diferentes valores y estar llevando a cabo inflación en regiones separadas causalmente. Lo cual quiere decir que afuera de nuestro horizonte, el universo puede ser muy inhomogéneo y anisotrópico [21, 26].

9.3. Soluciones

El proceso inflacionario descrito anteriormente conlleva a la solución de los problemas del HBB en la siguiente forma:

1. La expansión exponencial es introducida para hacer que el término $\frac{\kappa}{a^2}$ en la ecuación de Friedmann se haga muy pequeño comparado con $\frac{8\pi G}{3}$, lo cual implica hacer al universo plano.
2. Este proceso asegura que la parte observable del universo 10^{28} , resulte de inflar una pequeña región que estaba causalmente conectada inicialmente y por lo tanto, en equilibrio térmico.
3. *Formación de estructura.* Durante inflación, el campo escalar lleva a cabo fluctuaciones mientras se encuentra a un nivel cuántico. Estas fluctuaciones dan lugar a inestabilidades gravitacionales que llevan a la formación de estructura. Inflación es el único candidato que explica satisfactoriamente la formación de estructura.
4. *Los monopolos magnéticos* y otras reliquias son diluidos por la expansión, ya que la densidad varía inversamente proporcional al factor de escala, el cual está creciendo exponencialmente.

9.3.1. La aproximación de slow-roll y los parámetros de inflación

Los modelos inflacionarios están basados en la posibilidad de evolución lenta del campo escalar ϕ en un potencial $V(\phi)$. La aproximación de *slow-roll* desprecia la contribución a la dinámica de los términos que cambian más lentamente en las ecuaciones de movimiento.

De la ecuaciones de Einstein (90) para un campo escalar con densidad y presión dados por [27]:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \\ p &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi),\end{aligned}$$

las ecuaciones para inflación son:

$$\begin{aligned}H^2 &= \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \\ 0 &= \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi),\end{aligned}\tag{94}$$

donde $m_{Pl}^2 = \frac{1}{G}$ es la masa de Planck, y la (') indica derivada con respecto al campo escalar. Esta aproximación es la más utilizada, y aunque funciona en casi todos los modelos inflacionarios, debe llegar un momento en que falle para que inflación termine. Violaciones pequeñas de la misma pueden resultar en variaciones significativas de las predicciones comunes de los observables inflacionarios [28, 33], los cuales serán definidos en una sección posterior.

Para especificar completamente un modelo inflacionario, es suficiente dar explícitamente su potencial, el parámetro de Hubble ó el primer parámetro de la jerarquía de slow-roll en términos del campo [32]. Esto es gracias al formalismo de Hamilton-Jacobi [32]. La aproximación tiene dos modalidades:

1. Pone restricciones sobre la forma del potencial y requiere que la evolución del campo escalar haya alcanzado su forma asintótica³⁰. Si lo que tenemos para especificar el modelo inflacionario es el potencial del campo escalar, la aproximación de slow-roll requiere la pequeñez de los siguientes dos parámetros [31]:

$$\begin{aligned}\epsilon_V &= \frac{m_{Pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \\ \eta_V &= \frac{m_{Pl}^2}{8\pi} \frac{V''}{V}.\end{aligned}\tag{95}$$

³⁰Potential slow-roll approximation.

El valor pequeño de estas cantidades, es usado para despreciar el término cinético en la ecuación de Friedmann y el término de la aceleración en la ecuación de onda (94). Esta es una condición necesaria pero no suficiente para garantizar que esos términos sean despreciados. La aproximación de slow-roll en esta variante solamente restringe la forma del potencial, no las propiedades de las soluciones dinámicas. Las soluciones son más generales porque contienen a $\dot{\phi}$ que gobierna el tamaño del término cinético. Este término podría ser tan grande como se quisiera sin importar que los parámetros (95) sean muy pequeños. En general, este formalismo requiere la suposición de que el campo escalar se aproxima a una solución atractora asintótica determinada por

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{V'}{3H}$$

este atractor inflacionario es de gran importancia en la aplicación de la aproximación de slow-roll. Esto significa que dada una solución para un potencial, esta es estable bajo perturbaciones lineales y va a un atractor. Pero al dar otra condición inicial para el mismo modelo, esa solución también va a un atractor y así sucesivamente, al final, todos los atractores para distintas condiciones iniciales son el mismo para un modelo particular.

El final de inflación está dado por $\epsilon_V \simeq 1$, esto es solo aproximado debido a que ésta también es una condición necesaria pero no suficiente.

2. La solución inflacionaria pone condiciones sobre la evolución del parámetro de Hubble durante inflación (Hubble slow-roll approximation). Si $H(\phi)$ es tomada como la cantidad primaria para especificar un modelo inflacionario, hay una expresión más conveniente para los parámetros de slow-roll dada por:

$$\begin{aligned}\epsilon_H &= \frac{m_{Pl}^2}{4\pi} \left(\frac{H'}{H} \right)^2 \\ \eta_H &= \frac{m_{Pl}^2}{4\pi} \frac{H''}{H},\end{aligned}$$

la condición $\epsilon_H < 1$ es condición necesaria y suficiente para que inflación tenga lugar. No es necesario suponer la existencia del atractor inflacionario e inflación termina exactamente cuando $\epsilon_H = 1$. Si H es una función de ϕ entonces $\dot{\phi}$ no debe cambiar signo, es decir, el campo no debe llegar al mínimo del potencial para que el formalismo de Hamilton-Jacobi pueda ser aplicado.

Las expresiones de los parámetros de slow-roll dadas anteriormente en sus dos modalidades dependen de la dinámica específica que se esté usando. En este caso, damos por hecho la cosmología estándar, pero si la dinámica cambia como en los modelos de branas, las definiciones anteriores tendrían que cambiar para ser consistentes con la dinámica.

9.3.2. Espectros y observables

Generación cuántica de perturbaciones. Durante inflación, el campo escalar o *inflatón* lleva a cabo fluctuaciones cuánticas, estas surgen porque el inflatón alcanza el mínimo de su potencial a diferentes tiempos en diferentes lugares del universo. Hay tres tipos de perturbaciones en el espacio tiempo: escalares, vectoriales y tensoriales. La amplitud de las perturbaciones vectoriales decae en un universo en expansión, las tensoriales no dan lugar a formación de estructura y las escalares sí, estas son conocidas como perturbaciones de la densidad también [29].

El escenario inflacionario predice que el espectro de las perturbaciones de la densidad debieran ser gaussianas y dependientes de la escala. Esto es cierto para los modelos en que el campo escalar está acoplado débilmente. Pero la suposición de gaussianidad no es genérica a todos los modelos. Originalmente, se había pensado que eran independientes de la escala (espectro de Harrison-Zeldovich) aunque esto era solo aproximado [30]. Esto es debido a que el campo

escalar debe llevar a cabo una evolución para que inflación termine eventualmente y esto implica dependencia en la escala a los espectros [19, 21].

H^{-1} es la medida de los procesos causales en un universo espacialmente plano, homogéneo e isotrópico. El tamaño de una escala dada con respecto a esta cantidad es de gran importancia para entender como fueron generados los espectros primordiales de las perturbaciones.

Cantidades como el espectro de potencia son definidas vía una expansión de Fourier de funciones con número de onda comóvil k y la combinación k/aH aparece varias veces en estas expresiones. Hay comportamiento físico distinto dependiendo de si esta cantidad es menor o mayor a la unidad.

Inflación es definida como una época en que el factor de escala se acelera, y el radio comóvil de Hubble $(aH)^{-1}$ debe decrecer lo que implica que las escalas físicas crezcan más rápidamente que el radio de Hubble. Como resultado, un modo dado empezará adentro del radio de Hubble en el régimen en que la expansión es despreciable. Conforme la expansión continua, la longitud de onda de la perturbación es “estirada” y el modo crece mucho más rápidamente que el radio de Hubble (en coordenadas físicas) y lo rebasa, después de esto permanece “congelado”.

$${}^0G_\nu^\mu + \delta G_\nu^\mu = 8\pi G ({}^0T_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu) \quad (96)$$

La cantidad que nos interesa estudiar es la amplitud de la perturbación de la curvatura δG_ν^μ , no la del campo escalar δT_ν^μ , ya que una vez que inflación termina este debe decaer para dar formación al resto de las partículas que componen al universo. Sin embargo sus perturbaciones afectan a la gravedad a través de las ecuaciones de Einstein, ver (96) y esa perturbación permanece en la curvatura del espacio-tiempo. Su amplitud puede relacionarse con cantidades observadas en la radiación cósmica de fondo lo cual sirve para imponer constricciones sobre los modelos inflacionarios [27, 33].

Las cantidades que dan la intensidad o potencia de cada modo en función de la escala son los espectros de potencia para las perturbaciones escalares (de densidad) y tensoriales (gravitacionales). Su amplitud puede ser especificada con mayor precisión en términos de una expansión en parámetros de slow-roll, cuyas definiciones a orden más bajo para la amplitud son [29]:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s(k) &= \frac{2}{5} \mathcal{P}_R^{1/2} = \frac{4}{5} \frac{H^2}{m_{Pl}^2 |H'|} \Big|_{k=aH} \\ \mathcal{A}_T(k) &= \frac{1}{10} \mathcal{P}_g^{1/2} = \frac{2}{5\sqrt{\pi}} \frac{H}{m_{Pl}} \Big|_{k=aH} \end{aligned}$$

Ambas expresiones están evaluadas para la escala con valor igual al horizonte comóvil aH , es decir, se evalúan cuando el modo cruza el horizonte. Distintas evaluaciones llevan a distintos errores en la precisión de los observables inflacionarios. La normalización dada para el coeficiente del espectro en la primera igualdad es arbitraria.

El primer observable inflacionario es la razón de la contribución a la amplitud de las perturbaciones gravitacionales a las de la densidad (o tensoriales a las escalares) r [29]:

$$r \simeq \epsilon = \frac{\mathcal{A}_T^2}{\mathcal{A}_s^2},$$

también conocida como la primera ecuación de consistencia inflacionaria. Esta cantidad todavía no se ha medido debido a que no se han detectado aún ondas gravitacionales.

Inflación predice la existencia de las mismas, por lo que la detección sería de suma importancia para esta teoría. Se han dado estimaciones a su valor a través del número de *e-foldings* (cantidad de expansión que ocurre antes del final de inflación):

$$N \equiv \ln \frac{a_f}{a_i} = -\sqrt{\frac{4\pi}{m_{Pl}^2}} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_H}} d\phi \simeq -\sqrt{\frac{4\pi}{m_{Pl}^2}} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_V}} d\phi,$$

y el índice espectral. La primera igualdad se cumple sólo a orden más bajo en la aproximación de slow-roll, el siguiente orden contiene una expansión en los parámetros de slow-roll.

El *índice espectral* es la cantidad primaria para clasificar modelos inflacionarios, mide también la desviación del espectro de la invariancia con la escala. La definición general esta dada por:

$$\begin{aligned}n_s(k) - 1 &= \frac{d \ln \mathcal{A}_s^2}{d \ln k} \\n_T(k) &\equiv \frac{d \ln \mathcal{A}_T^2}{d \ln k},\end{aligned}$$

cuando $n_s(k) = 1$, el espectro de las perturbaciones escalares es invariante de la escala. Sobre el rango en que las observaciones pueden hacerse, los espectros pueden ser tratados como leyes de potencias [29].

Finalmente, n_T como r no han sido medidas, pero son unas de las cantidades que especifican a un modelo inflacionario y pueden ser parámetros que pueden ser medidos mediante el experimento de Planck.

Referencias

- [1] d'Inverno, Ray, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press , New York , 1992.
- [2] Weinberg, Steven, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Jhon Wiley & Sons, Canadá, 1972.
- [3] García-Colín Scherer, Leopoldo, *Introducción a la Física Estadística*, El Colegio Nacional, México, 2005.
- [4] Tolman, C. Richard, *Relativity thermodynamics and cosmology*, Dover Publications,Inc. , New York , 1987.
- [5] Shutz, Bernard F., *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, Gran Bretaña, 1985.
- [6] C.Boehm, P. Fayet and R. Schaeffer, astro-ph/0012404.
- [7] Tadashi Nakajima, *Dynamical Stability of Cusps and Cores: Implications to Centers of Galaxies and Clusters of Galaxies*, astro-ph/0607097, (2006).
- [8] Tonatiuh Matos, L.Arturo Ureña-López, *On the nature of Dark Matter*, International Journal of Modern Physics D Vol. 13, No. 00 (2004).
- [9] P. Coles and F. Lucchin, *Cosmology. The origin and Evolution of Cosmic Structure*. Jhon Wiley & Sons (1997)
- [10] P.J.E Peebles and B. Ratra, *Astrophys. L. Lett.* **325**, (1988) L17; B.Ratra and P.J.E Peebles, *Phys. Rev. D* **37** (1988) 3406.
- [11] Tonatiuh Matos, *Formación de Estructura en el Universo*, Curso, Noviembre 2005.
- [12] F. Siddhartha Guzmán, L. Arturo Ureña-López, *Gravitational cooling of self-gravitating Bose-Condensates*, astro-ph/0603613, (2006).
- [13] F. Siddhartha Guzmán, L. Arturo Ureña-López, *Newtonian Collapse of Scalar Field Dark Matter*, astro-ph/0303440v1, (2003).
- [14] T. Matos and G. Torres, *Galaxy formation simulations with Scalar Field Dark Matter* , *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, **39** , 2003.
- [15] E. Seidel and W. M. Suen, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1659 (1991).
- [16] M. Alcubierre, F. S. Guzmán, T. Matos, D. Núñez, L. A. Ureña-López and P. Wiederhold, *Class. Quantum Grav.* **19**, 5017 (2002), gr-qc/0301105.
- [17] D. Page, *Classical and Quantum decay of oscillatons: Oscillating self-gravitating real scalar field solitons*, gr-qc/0310006.
- [18] W. J. Percival et al., *Measuring the matter density using baryon oscillations in the SDSS*. *The Astrophys. J.* 657, 51,2007.
- [19] A. Linde, *Particle physics and inflationary cosmology*. *Contemp. Concepts Phys.* 5, 2005. e-print: arxiv:hep-th/0503203.
- [20] E.W. Kolb, M. S. Turner, *The early Universe*,Addison-Wesley. ISBN:0-201-11604-9, 1988.
- [21] R. Brandenberger, *Inflationary cosmology: progress and problems*, Invited lectures at the International School on Cosmology, Kish Island, Iran, Jan. 22-Feb. 4 1999. eprint arxiv:hep-ph/9910410.

- [22] A. A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*. Phys. Lett. B91: 99, 1980. JETP Lett. 30, 682 (1979) [Pisma Zh. Eksp. Toer. Fiz. 30, 719, 1979].
- [23] A. H. Guth, *The Inflationary Universe: A possible solution to the Horizon and Flatness Problems*, Phys. Rev. D 23, 347, 1981.
- [24] A. Linde, *A new Inflationary Universe Scenario: A possible Solution Of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems*, Phys. Lett. B 108, 389, 1982.
- [25] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Cosmology For Grand Unified Theories With Radiatively Induced Symmetry Breaking*, Phys. Rev. Lett. 48, 1220 (1982).
- [26] A. Linde (1986). *Eternal chaotic inflation*. Mod. Phys. Lett. A1. A. Linde (1986). *Eternally existing self-reproducing chaotic inflationary universe*. Phys. Lett. B175.
- [27] A. Liddle, D. Lyth (2000). *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge. ISBN:0-521-57598-2.
- [28] Spergel, D.N.; et al. (WMAP collaboration) (2006). *Three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Implications for cosmology*, arxiv:astro-ph/0603449.
- [29] J. E. Lidsey et al. *Reconstructing the inflaton potential an overview*, Reviews of Modern Physics, 69,2, 1997.
- [30] J. M. Bardeen et al. *Spontaneous creation of almost scale-free density perturbations in an inflatonary universe*, Phys.Rev. D 28,4,1983.
- [31] A. R. Liddle et al. *Formalising the slow-roll approximation in inflation*, Phys. Rev. D 50, 7222, 1994, eprint arxiv:astro-ph/9408015.
- [32] A. R. Liddle, *The inflationary energy scale*, Phys. Rev. D 49,739,1994, eprint arxiv:astro-ph/9307020.
- [33] W. H. Kinney et al. *Inflation model constraints from the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe three-year data*, eprint: arxiv:astro-ph/0605338., Phys. Rev. D 74, 023502, 2006.
- [34] "Notas sobre inflación", Erandy Ramírez, 2007.