



Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y
Matemáticas

APLICACIÓN DEL GRUPO $SO(2,1)$ A SISTEMAS
CUÁNTICOS UNIDIMENSIONALES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Miguel Martínez Dorantes

ASESOR DE TESIS:

Dr. Víctor David Granados García



México

2007

Primero mas que nada quiero agradecer a toda mi familia, a mis padres, a mis hermanos y hermanas por todo el apoyo que me han dado durante toda mi vida sin el cual no hubiera logrado concluir este trabajo.

*Agradezco el apoyo de todos mis profesores que he
tenido a lo largo de esta carrera por sus valiosas
enseñanzas, en especial me gustaría agradecer al Dr.
Víctor Granados García por ser un gran amigo y por
su valiosa ayuda durante mis estudios.*

*No podía faltar agradecer a todos mis amigos y
amigas que han sido una parte muy importante
durante toda la carrera, en especial en estos
últimos años, ya que siempre han estado ahí para
apoyarme cuando mas lo necesito.*

Índice General

RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
1. GRUPOS CONTINUOS	3
1.1 Grupo de Lie	3
1.2 Generadores infinitesimales.	6
1.3 Álgebra de Lie $so(2,1)$	7
1.4 Operadores de Casimir, ascenso y descenso	8
2. ÁLGEBRA $so(2,1)$ DE SISTEMAS CUÁNTICOS UNIDIMENSIONALES	12
2.1 Oscilador armónico unidimensional.	12
2.2 Pozo infinito.	15
2.2.1 Método de Shi-Hai Dong y Zhong-Qi Ma	17
2.2.2 Método de S. Kais y R.D. Levine	18
2.3 Método alternativo para obtener el álgebra $so(2,1)$ en problemas unidimensionales	20
3.- SUPERSIMETRÍA EN MECÁNICA CUÁNTICA	24
3.1 Operadores de ascenso y descenso generalizados.	24
3.2 Supersimetría en el oscilador armónico unidimensional.	27
3.3 Supersimetría en el pozo infinito.	28
CONCLUSIONES	30
REFERENCIAS	31

RESUMEN

Probamos que con ayuda de los operadores de ascenso y descenso para el oscilador armónico unidimensional se pueden construir operadores que satisfacen el álgebra $so(2,1)$. Con ayuda de estos operadores es posible construir el operador de Casimir que a su vez nos permite encontrar el espectro de energía por métodos algebraicos.

Encontramos que para el pozo infinito de potencial también nos es posible construir operadores que satisfagan esta misma álgebra, estos son los propuestos por S. Kais y R.D. Levine, así como los propuestos por Shi-Hai Dong y Zhong-Qi Ma , aunque a estos últimos es necesario hacer una aclaración para probar que satisfacen correctamente esta álgebra.

Además para problemas unidimensionales, mostramos que expandiendo los operadores en su base dual siempre es posible encontrar operadores de ascenso y descenso que satisfagan el álgebra $so(2,1)$, sin embargo el que existan estos no garantiza que sean operadores diferenciales. Posteriormente utilizando esta expansión probamos que para el pozo infinito de potencial no es posible encontrar operadores de ascenso y descenso de la forma de Infeld y Hull.

Posteriormente encontramos los compañeros supersimétricos para los Hamiltonianos del oscilador armónico unidimensional y del pozo infinito de potencial, así como las funciones propias para ambos. Debido a que el Hamiltoniano para el oscilador armónico unidimensional y su compañero supersimétrico comparten las mismas autofunciones y ya que los operadores de ascenso y descenso generalizado corresponden a los operadores ya conocidos, entonces nos es posible encontrar el espectro de energías con estas técnicas. Sin embargo no es posible aplicar la misma técnica al pozo de potencial, pues los Hamiltonianos en ese caso no comparten las mismas autofunciones, por lo que no tiene sentido hablar de relaciones de conmutación para los operadores de ascenso generalizados.

INTRODUCCIÓN

El oscilador armónico unidimensional es uno de los sistemas físicos más estudiados ya que todo sistema que oscila alrededor de un punto de equilibrio estable puede ser estudiado en primera aproximación como si fuera un oscilador armónico. Similarmente el problema de una partícula encerrada en un pozo de potencial infinito es un problema sencillo que es básico en los cursos de mecánica cuántica. Por estas razones en el desarrollo de este trabajo trataremos de obtener la simetría que presentan estos problemas.

Decimos que un objeto presenta alguna simetría si le aplicamos una transformación y este permanece invariante ante ella. En el siglo XIX, los matemáticos ya habían intentado describir matemáticamente todas las posibles operaciones relacionadas con la simetría, utilizando como herramienta principal la teoría de grupos. Una idea básica de la teoría de grupos es describir operaciones de simetría utilizando el álgebra, ya que tanto la estructura algebraica de los grupos, así como las denominadas Álgebras de Lie, tiene la peculiaridad de ser las herramientas matemáticas que describen el concepto de simetría.

Por lo tanto podemos decir que la teoría de grupos es el estudio de la simetría, y además esta poderosa herramienta nos permite dar interesantes y a veces muy detalladas descripciones de sistemas físicos incluso cuando no entendemos exactamente lo que estos sistemas son.

Todo lo relacionado con simetría en los problemas físicos es de gran importancia, sobre todo ya que la simetría, en todas sus formas, tiene una relación directa con la conservación de ciertas magnitudes fundamentales. Fue en 1915 cuando Emmy Noether (1882-1935) pudo probar que toda ley de simetría, tanto en la Mecánica Clásica como en la Mecánica Cuántica, origina una propiedad de conservación, por ejemplo, los teoremas de conservación de energía, se originan por la uniformidad del tiempo, el teorema de conservación del momento lineal, debido a la homogeneidad del espacio y el teorema de conservación del momento angular, debido a la isotropía del espacio.

Para encontrar la simetría en los problemas de nuestro interés, en el primer capítulo desarrollaremos algunos elementos de la teoría de grupos y principalmente centraremos nuestra atención en algunos operadores de ascenso y descenso, ya que contar con estos puede ser muy útil para el tratamiento cuántico, posteriormente en el segundo capítulo encontraremos el álgebra de Lie que satisfacen estos operadores. En el tercer capítulo desarrollaremos un método de factorización que nos permite encontrar el compañero supersimétrico de un Hamiltoniano y sus funciones de estado asociadas, esto por medio de los operadores de ascenso y descenso generalizados, aplicaremos este método tanto al oscilador armónico unidimensional como al pozo infinito de potencial.

CAPITULO 1

GRUPOS CONTINUOS.

El concepto de grupo de Lie junto con la definición de grupo incluye la condición de analiticidad, o por lo menos de diferenciabilidad, de las funciones que definen el producto del grupo, debido a esto podemos utilizar el aparato del análisis, y más precisamente, la teoría de las ecuaciones diferenciales. En este primer capítulo comenzaremos con una pequeña introducción a la teoría de grupos continuos, que utilizaremos mas adelante para el tratamiento de algunos sistemas físicos. En particular centraremos nuestra atención en el grupo de Lie $SO(2,1)$, para el cual construiremos operadores de ascenso y descenso, que también nos permitirán construir el operador de Casimir para este grupo.

1.1 Grupos de Lie.

Un grupo se dice que es continuo ^[1] si una definición de continuidad es impuesta sobre los parámetros del grupo de modo que una pequeña variación en uno de los factores del producto produzca un pequeño cambio en el producto. Para definir esta continuidad nos restringiremos al caso más sencillo, en el que los elementos del grupo pueden ser etiquetados, ya sea por un conjunto finito de parámetros que varían de manera continua, o por un conjunto de funciones. Por ejemplo, el conjunto de transformaciones

$$x' = ax + b, \text{ con } a, b \in (-\infty, \infty), \quad (1.1)$$

es un grupo continuo con dos parámetros reales a y b . En general un grupo continuo r -paramétrico G tiene r parámetros a_1, a_2, \dots, a_r , que varían continuamente, por lo que para cada elemento de G existe un único conjunto de parámetros $a \in \mathbb{R}^r$, lo cual nos permite representar a cada elemento del grupo como $R(a)$. A estos grupos en los que sus elementos pueden ser etiquetados por un conjunto finito de parámetros que varían continuamente los llamamos *grupos continuos finitos*. El rango de variación de los parámetros puede ser toda la recta real, o estar confinados en un intervalo finito. Si el dominio de variación de los parámetros es cerrado y acotado decimos que el grupo es compacto.

Los requerimientos para que un conjunto G sea un grupo continuo son:

1.-Dado $R(a) \in G$ debe existir un conjunto de valores paramétricos $a^0 \in \mathbb{R}^r$, tales que

$$R(a^0) R(a) = R(a) R(a^0) = R(a) \quad \forall R(a) \in G, \quad (1.2)$$

que es el elemento identidad del grupo.

2.- Para cualquier $R(a) \in G$, podemos encontrar $\bar{a} \in \mathbb{R}^r$ tal que

$$R(\bar{a})R(a) = R(a)R(\bar{a}) = R(a^0), \quad (1.3)$$

en donde el elemento $R(\bar{a})$ es el inverso de $R(a)$, es decir,

$$[R(a)]^{-1} = R(\bar{a}). \quad (1.4)$$

3.- El producto de dos elementos $R(a), R(b) \in G$ debe pertenecer al conjunto, por lo que dados dos parámetros $a, b \in \mathbb{R}^r$ debe existir un parámetro $c \in \mathbb{R}^r$ tal que $R(c) \in G$ y además

$$R(c) = R(a)R(b). \quad (1.5)$$

Las condiciones anteriores son las que definen un grupo, pero además se requiere que el producto sea una función analítica de a y b , es decir, debe existir una función $\phi : \mathbb{R}^{2r} \rightarrow \mathbb{R}^r$ tal que

$$c = \phi(a, b), \quad (1.6)$$

y que posea todas las derivadas de todos los ordenes en cada una de las entradas, similarmente \bar{a} debe ser función analítica de a . Con todas estas condiciones formamos un *grupo de Lie r -paramétrico*. A continuación mostramos unos ejemplos de grupos de Lie r -paramétricos.

a) *Grupo lineal en dos dimensiones $GL(2)$* . Este grupo viene dado por el conjunto de transformaciones

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y, \\ y' &= a_3x + a_4y, \end{aligned} \quad \text{en donde } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.7)$$

En este caso los cuatro parámetros son esenciales (los mínimos necesarios para describir al grupo). Si consideramos a x y y como las componentes de un vector tenemos que

$$r' = Ar \quad \text{o de manera explícita} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

De lo anterior podemos observar que el grupo lineal en dos dimensiones es isomorfo al grupo de matrices con la multiplicación de matrices, por lo que es fácil demostrar que es un grupo continuo finito, cuyos elementos son:

$$\text{Elemento identidad } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Elemento inverso } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_4}{a_1 a_4 - a_2 a_3} & -\frac{a_2}{a_1 a_4 - a_2 a_3} \\ -\frac{a_3}{a_1 a_4 - a_2 a_3} & \frac{a_1}{a_1 a_4 - a_2 a_3} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Producto } C = AB = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & a_1 b_2 + a_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{bmatrix}.$$

Este es un grupo no abeliano 4-paramétrico.

b) *El Grupo lineal en 3 dimensiones $GL(3)$.* Este grupo consiste de las transformaciones de la forma

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ y' &= a_4 x + a_5 y + a_6 z, \\ z' &= a_7 x + a_8 y + a_9 z, \end{aligned} \quad \text{en donde } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1.9)$$

y escrito en forma matricial

$$r' = Ar; \quad y \quad \det A \neq 0$$

El grupo lineal en 3 dimensiones es no abeliano el cual tiene 9 parámetros esenciales que pueden variar en un rango infinito, por lo que $GL(3)$ es no compacto al igual que $GL(2)$.

c) *El grupo no compacto $SO(2,1)$* ¹. Este es un caso particular de $GL(3)$, en

donde además de la definición de $GL(3)$, se impone la condición de que las transformaciones mantengan invariante la métrica $I = x^2 - y^2 - z^2$ es decir, si

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 - z'^2 &= (a_1 x + a_2 y + a_3 z)^2 - (a_4 x + a_5 y + a_6 z)^2 - (a_7 x + a_8 y + a_9 z)^2 \\ &= x^2 (a_1^2 - a_4^2 - a_7^2) - y^2 (-a_2^2 + a_5^2 + a_8^2) + z^2 (-a_3^2 + a_6^2 + a_9^2) \\ &\quad + 2xy (a_1 a_2 - a_4 a_5 - a_7 a_8) + 2xz (a_1 a_3 - a_4 a_6 - a_7 a_9) \\ &\quad + 2yz (a_2 a_3 - a_5 a_6 - a_8 a_9), \end{aligned}$$

para que $I = I'$, se tiene que cumplir que

$$\begin{aligned} a_1^2 - a_4^2 - a_7^2 &= -a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 = -a_3^2 + a_6^2 + a_9^2 = 1, \\ a_1 a_2 - a_4 a_5 - a_7 a_8 &= a_1 a_3 - a_4 a_6 - a_7 a_9 = a_2 a_3 - a_5 a_6 - a_8 a_9 = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

¹Grupo ortogonal especial con una forma cuadrática con signatura (2,1), es decir con dos signos iguales y otro opuesto, denotado $SO(2,1)$ por sus siglas en inglés.

Por lo que si inicialmente teníamos 9 parámetros esenciales, con las 6 restricciones impuestas se reduce a un grupo de tres parámetros, los cuales se pueden escribir de la forma:

$$\begin{aligned}
x' &= x [\cosh \alpha \cosh \beta] + y [-\sinh \alpha \sin \theta - \cosh \alpha \sinh \beta \cos \theta] \\
&\quad + z [\cosh \alpha \sinh \beta \sin \theta - \sinh \alpha \cos \theta], \\
y' &= x [-\sinh \beta] + y [\cos \theta \cosh \beta] + z [-\sin \theta \cosh \beta], \\
z' &= x [-\cosh \beta \sinh \alpha] + y [\cosh \alpha \sin \theta + \sinh \alpha \sinh \beta \cos \theta] \\
&\quad + z [\cosh \alpha \cos \theta - \sinh \alpha \sinh \beta \sin \theta].
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Pero además podemos generar subgrupos de $SO(2, 1)$ que consistan de transformaciones que dependan de menos parámetros. Por ejemplo, fijando $\theta = \beta = 0$ obtenemos $L_2(\alpha)$, de manera similar fijando $\theta = \alpha = 0$ obtenemos $L_3(\beta)$ y tanto $L_2(\alpha)$ como $L_3(\beta)$ dependen de un solo parámetro y pertenecen al grupo de transformaciones de Lorentz que es un grupo no compacto, pues $\alpha, \beta \in (-\infty, \infty)$. Pero si tomamos $\alpha = \beta = 0$ obtenemos el grupo de rotaciones alrededor del eje x que es un grupo compacto pues $\theta \in [0, 2\pi]$. Explícitamente las transformaciones anteriores vienen dadas por

$$L_2(\alpha) : (x', y', z') = (x \cosh \alpha - z \sinh \alpha, y, x \sinh \alpha + z \cosh \alpha), \tag{1.12}$$

$$L_3(\beta) : (x', y', z') = (x \cosh \beta - y \sinh \beta, x \sinh \beta + y \cosh \beta, z), \tag{1.13}$$

$$R_1(\theta) : (x', y', z') = (x, y \cos \theta - z \sin \theta, y \sin \theta + z \cos \theta). \tag{1.14}$$

1.2 Generadores infinitesimales del grupo $SO(2, 1)$.

Si tenemos un grupo G de transformaciones de la forma $x' = f(x, a)$, en donde a son los parámetros, para construir un transformación infinitesimal, basta tomar $a \rightarrow a^0$ y expandir $x' = f(x, a)$ en serie de Taylor a primer orden alrededor de $a = a^0$. Por ejemplo, para las transformaciones del grupo $SO(2, 1)$ mostradas en la ecuación(1.11) las transformaciones infinitesimales vienen dadas por

$$\begin{aligned}
x' &= x + y [-\alpha\theta - \beta] + z [\beta\theta - \alpha], \\
y' &= x [-\beta] + y + z [-\theta], \\
z' &= x [-\alpha] + y [\theta + \alpha\beta] + z [1 - \alpha\beta\theta].
\end{aligned} \tag{1.15}$$

En donde se tiene que $\alpha = \beta = \theta \rightarrow 0$ y las funciones trigonométricas e hiperbólicas se aproximaron en serie de Taylor solo a primer orden.

Una vez que se tienen las transformaciones infinitesimales del grupo, se aplican las definiciones ^[1]

$$T_\rho = \sum_{i=1}^n u_{i\rho}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ en donde } u_{ik} = \left(\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} \right)_{a=0}, \tag{1.16}$$

en donde a los operadores T_ρ se les conoce como los *generadores infinitesimales del grupo*. Para el grupo $SO(2,1)$ tenemos que los parámetros corresponden a $a_k = \alpha, \beta, \theta$, y $x_i = x, y, z$. Utilizando la ecuación(1.16) para la transformación infinitesimal (1.15), obtenemos que

$$u_{ik} = \begin{pmatrix} -z & -y & 0 \\ 0 & -x & -z \\ -x & 0 & y \end{pmatrix},$$

por lo que los operadores infinitesimales del grupo $SO(2,1)$ son

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{i=1}^3 u_{i1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = -z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \\ T_2 &= \sum_{i=1}^3 u_{i2}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = -y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, \\ T_3 &= \sum_{i=1}^3 u_{i3}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

1.3 Álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$

Al calcular las relaciones de conmutación de los operadores infinitesimales del grupo $SO(2,1)$ obtenemos que

$$[T_1, T_2] = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.18)$$

$$[T_2, T_3] = -x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad (1.19)$$

$$[T_3, T_1] = -y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, \quad (1.20)$$

por lo que utilizando (1.17), encontramos que los operadores infinitesimales del grupo $SO(2,1)$ satisfacen las relaciones de conmutación

$$[T_1, T_2] = -T_3, \quad [T_2, T_3] = T_1, \quad [T_3, T_1] = T_2. \quad (1.21)$$

Redefiniendo 3 nuevos operadores dados por $L_1 = iT_1$, $L_2 = iT_2$, $L_3 = iT_3$, y calculando sus relaciones de conmutación tenemos que

$$[L_1, L_2] = -iL_3, \quad [L_2, L_3] = iL_1, \quad [L_3, L_1] = iL_2. \quad (1.22)$$

En general, si tenemos 3 operadores L_1, L_2, L_3 , decimos que éstos representan el álgebra de Lie $so(2,1)^2$ si satisfacen las relaciones de conmutación anteriores, por ejemplo:

1) El conjunto de matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

que son operadores que actúan sobre vectores columna $(a \ b \ c)^T$ con $a, b, c \in \mathbb{C}$.

2) El siguiente conjunto de operadores diferenciales

$$\tilde{L}_1 = -i \left(z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \tilde{L}_2 = -i \left(x \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \tilde{L}_3 = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (1.24)$$

que actúan sobre el conjunto de funciones n -veces diferenciables con $n \geq 2$ definidas sobre \mathbb{R}^3 .

Si además los operadores que satisfacen el álgebra $so(2,1)$ son hermitianos, entonces decimos que son una representación unitaria de ésta álgebra.

1.4 Operadores de Casimir, ascenso y descenso.

Una combinación de elementos del álgebra de Lie que conmuta con todos los generadores es llamado un invariante o un operador de Casimir del grupo^[2]. Este operador no necesariamente pertenece al álgebra de Lie. Para construir este operador para el grupo $SO(2,1)$ consideramos tres operadores L_1, L_2, L_3 que satisfacen las relaciones de conmutación (1.22) del álgebra de Lie $so(2,1)$. Primero es conveniente definir dos nuevos operadores dados por

$$L_{\pm} = L_1 \pm iL_2, \quad (1.25)$$

los cuales son conocidos como operadores de ascenso y descenso respectivamente^[3], y que junto con L_3 satisfacen las relaciones de conmutación

$$[L_3, L_{\pm}] = \pm L_{\pm}, \quad [L_+, L_-] = -2L_3, \quad (1.26)$$

²Cuando nos referimos al grupo lo denotamos por $SO(2,1)$, pero cuando nos referimos a el álgebra la denotamos con minúsculas $so(2,1)$

ya que

$$\begin{aligned}
[L_3, L_{\pm}] &= [L_3, L_1 \pm iL_2] \\
&= [L_3, L_1] \pm i[L_3, L_2] \\
&= iL_2 \pm L_1 \\
&= \pm L_{\pm}, \\
[L_+, L_-] &= [L_1 + iL_2, L_1 - iL_2] \\
&= [L_1, L_1] + i[L_2, L_1] - i([L_1, L_2] + i[iL_2, L_2]) \\
&= -2L_3,
\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de (1.22). El operador de Casimir para el grupo $SO(2, 1)$ ^[3] esta definido por

$$\begin{aligned}
C &= L_{\pm}L_{\mp} - L_3(L_3 \mp 1) \\
&= (L_1 \pm iL_2)(L_1 \mp iL_2) - L_3^2 \pm L_3 \\
&= L_1^2 \mp iL_1L_2 \pm iL_2L_1 + L_2^2 - L_3^2 \pm L_3 \\
&= L_1^2 \mp i[L_1L_2] + L_2^2 - L_3^2 \pm L_3,
\end{aligned} \tag{1.27}$$

pero de (1.22) tenemos que $[L_1, L_2] = -iL_3$, por lo que

$$C = L_1^2 + L_2^2 - L_3^2. \tag{1.28}$$

Notemos que en este caso a diferencia del momento angular, el operador de Casimir no corresponde solo a la suma de operadores hermitianos positivo definidos, por lo que sus autovalores pueden ser positivos o negativos.

Ahora construimos un conjunto de funciones ortonormales ϕ_{μ}^k , con $\mu, k \in \mathbb{Q}$, que sean autofunciones simultáneas de L_3 , y C ^[3], es decir, funciones tales que

$$L_3\phi_{\mu}^k = \mu\phi_{\mu}^k, \quad y \quad C\phi_{\mu}^k = q\phi_{\mu}^k. \tag{1.29}$$

A continuación probaremos que $q = k(1 - k)$ y $\mu = k, +1, k + 2, \dots$, para algunos $k \in \mathbb{Q}$.

De las relaciones de conmutación (1.26) tenemos que $L_3L_{\pm} = L_{\pm}L_3 \pm L_{\pm}$ y al aplicar este operador a las funciones ϕ_{μ}^k obtenemos

$$\begin{aligned}
L_3(L_{\pm}\phi_{\mu}^k) &= L_{\pm}L_3\phi_{\mu}^k \pm L_{\pm}\phi_{\mu}^k, \\
L_3(L_{\pm}\phi_{\mu}^k) &= (\mu \pm 1)(L_{\pm}\phi_{\mu}^k),
\end{aligned}$$

y esto se cumple si y sólo si

$$L_{\pm}\phi_{\mu}^k = c_{k\mu}\phi_{\mu\pm 1}^k. \tag{1.30}$$

Las funciones ϕ_μ^k , no son funciones propias de los operadores L_\pm ^[3], sin embargo estas funciones son tales que suben o bajan el índice μ en uno, y además $|c_{k\mu}| = \sqrt{(\mu \pm k)(\mu \mp k \pm 1)}$, esto es fácil de probar a partir de (1.29) y de la definición de L_\pm pues

$$\begin{aligned} \langle L_\pm \phi_\mu^k | L_\pm \phi_\mu^k \rangle &= \langle c_{k\mu} \phi_{\mu\pm 1}^k | c_{k\mu} \phi_{\mu\pm 1}^k \rangle \\ &= |c_{k\mu}|^2 \langle \phi_{\mu\pm 1}^k | \phi_{\mu\pm 1}^k \rangle = |c_{k\mu}|^2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Por otro lado para una representación unitaria se cumple que $L_\pm^\dagger = L_\mp$, por lo que

$$\begin{aligned} \langle L_\pm \phi_\mu^k | L_\pm \phi_\mu^k \rangle &= \langle \phi_\mu^k | L_\pm^\dagger L_\pm \phi_\mu^k \rangle \\ &= \langle \phi_\mu^k | L_\mp L_\pm \phi_\mu^k \rangle, \end{aligned}$$

pero de la definición del operador de Casimir tenemos que $C = L_\pm L_\mp - L_3(L_3 \mp 1)$, por lo que $L_\mp L_\pm = C + L_3^2 \pm L_3$, sustituyendo esto en la expresión de arriba

$$\begin{aligned} \langle L_\pm \phi_\mu^k | L_\pm \phi_\mu^k \rangle &= \langle \phi_\mu^k | (C + L_3^2 \pm L_3) \phi_\mu^k \rangle \\ &= \langle \phi_\mu^k | (C \phi_\mu^k + L_3^2 \phi_\mu^k \pm L_3 \phi_\mu^k) \rangle \\ &= \langle \phi_\mu^k | (q \phi_\mu^k + \mu^2 \phi_\mu^k \pm \mu \phi_\mu^k) \rangle \\ &= (q + \mu^2 \pm \mu) \langle \phi_\mu^k | \phi_\mu^k \rangle = (q + \mu^2 \pm \mu), \end{aligned} \quad (1.32)$$

por lo de que de las ecuaciones (1.31) y (1.32) concluimos que

$$|c_{k\mu}| = \sqrt{q + \mu^2 \mp \mu} = \sqrt{(\mu \pm k)(\mu \mp k \pm 1)}. \quad (1.33)$$

Ahora, notemos que de la ecuación (1.27) tenemos que

$$L_+ L_- = L_3(L_3 - 1) + C, \quad (1.34)$$

aplicando sobre las autofunciones ϕ_μ^k obtenemos

$$\begin{aligned} L_+ L_- \phi_\mu^k &= (L_3(L_3 - 1) + C) \phi_\mu^k \\ &= (\mu(\mu - 1) + q) \phi_\mu^k. \end{aligned}$$

Como $L_+^\dagger = L_-$, y así los autovalores de $L_+ L_-$, deben de ser positivos definidos, ya que por un lado

$$\langle \phi_\mu^k | L_+ L_- \phi_\mu^k \rangle = \mu(\mu - 1) + q,$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \langle \phi_\mu^k | L_+ L_- \phi_\mu^k \rangle &= \langle L_+^\dagger \phi_\mu^k | L_- \phi_\mu^k \rangle \\ &= \langle L_- \phi_\mu^k | L_- \phi_\mu^k \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

por lo que de aquí concluimos que

$$\mu(\mu - 1) + q \geq 0. \quad (1.35)$$

Ahora encontraremos los valores de μ y q para los cuales se satisface la relación (1.35). Es fácil ver que los valores permitidos de q son de la forma $q = k(1 - k)$ con la condición de que de

$$k \leq \mu. \quad (1.36)$$

Por lo que μ tomará valores de la forma $\mu = k, k + 1, k + 2, \dots$ con lo cual generamos un espectro para L_3 acotado inferiormente, pero no superiormente, el cual denotaremos por D_k^+ .

En resumen, si tenemos una representación unitaria del grupo Lie no compacto $SO(2, 1)$, en la cual $L_{\pm}^{\dagger} = L_{\mp}$, si ϕ_{μ}^k son funciones tales que

$$L_3 \phi_{\mu}^k = \mu \phi_{\mu}^k \text{ y } C \phi_{\mu}^k = q \phi_{\mu}^k, \quad (1.37)$$

entonces podemos escribir a q como

$$q = k(1 - k),$$

y generaremos un espectro discreto D_k^+ para L_3 acotado inferiormente, pero no superiormente, en donde

$$\mu = k, k + 1, k + 2, \dots$$

De manera similar, si realizamos todo el análisis anterior pero ahora considerando que $L_- L_+ = L_3(L_3 + 1) + C$ en lugar de (1.34), entonces encontraremos un espectro acotado superiormente, pero no inferiormente para L_3 pero como no será utilizado en este trabajo, no desarrollaremos este caso.

CAPITULO 2

ÁLGEBRA $SO(2,1)$ DE SISTEMAS CUÁNTICOS UNIDIMENSIONALES

Los grupos y álgebras de Lie pueden ser muy útiles si se aplican a problemas físicos, en particular estos han mostrado su utilidad en la aplicación a la mecánica cuántica, como la utilización del grupo compacto $SO(3)$ para el desarrollo de la teoría del momento angular.

En este capítulo aplicaremos la teoría del grupo no compacto $SO(2, 1)$, que se desarrollo en el capítulo anterior y lo aplicaremos a sistemas cuánticos unidimensionales, en particular veremos que es posible encontrar el espectro de energía del Oscilador Armónico Unidimensional (O.A.U.) por métodos algebraicos.

Para el pozo infinito primero se pensó que presentaba el álgebra $so(2)^{[5]}$, pero en este capítulo analizaremos el método propuesto por Shi-Hai Dong y Zhong-Qi Ma^[7], así como el propuesto por S. Kais y R.D. Levine^[4], en el cual se proponen algunos operadores de ascenso y descenso los cuales junto con un tercer operador satisfacen el álgebra de Lie $so(2, 1)$, además, proponemos una forma alternativa de encontrar una representación del álgebra de Lie $so(2, 1)$, para sistemas cuánticos unidimensionales.

2.1 Oscilador Armónico Unidimensional.

Un problema físico que presenta el álgebra $so(2, 1)$ es el O.A.U.. La ecuación de Schrödinger para este sistema viene dada por

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2}\right) \psi_n = E_n \psi_n, \quad (2.1)$$

en donde tomaremos de aquí en adelante $m = \hbar = \omega = 1$. Para construir los operadores asociados a este problema que satisfacen esta álgebra primero recordemos las definiciones de el operador de creación \hat{a}^\dagger , y el operador de aniquilación \hat{a} , los cuales vienen dados por:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx}\right), \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx}\right), \quad (2.2)$$

que están definidos sobre las funciones propias del Hamiltoniano del O.A.U. Si aplicamos estos operadores a las funciones de estado tenemos que

$$\hat{a}^\dagger \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}, \quad \hat{a} \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}. \quad (2.3)$$

Además estos satisfacen la relación de conmutación $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, por lo que el Hamiltoniano H también lo podemos escribir como $H = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$. Con ayuda de estos operadores definimos unos nuevos dados por:

$$L_1 = \frac{1}{4} (\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger) = \frac{1}{4} \left(x^2 + \frac{d^2}{dx^2} \right), \quad (2.4)$$

$$L_2 = -\frac{i}{4} (\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}) = \frac{i}{4} \left(x \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} x \right), \quad (2.5)$$

$$L_3 = \frac{1}{4} (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) = \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) = \frac{H}{2}, \quad (2.6)$$

que son una representación del álgebra de Lie $so(2, 1)$. Para este grupo el operador de Casimir viene dado por la ecuación (1.28)

$$\begin{aligned} C &= L_1^2 + L_2^2 - L_3^2 \\ &= \frac{1}{16} (\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger)^2 - \frac{1}{16} (\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a})^2 - \frac{1}{16} (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)^2 \\ &= \frac{1}{16} (2\hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + 2\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger), \end{aligned}$$

Este operador sobre una función de estado ψ_n , produce

$$\begin{aligned} C\psi_n &= \frac{1}{16} (2\hat{a}^2\hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^2\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger) \psi_n \\ &= \frac{1}{16} (2(n+1)(n+2) + 2n(n-1) - n^2 - 2n(n+1) - (n+1)^2) \psi_n \\ &= \frac{3}{16} \psi_n. \end{aligned}$$

Comparando esto con la ecuación (1.37), tenemos que $q = \frac{3}{16}$, pero tenemos que $q = k(1-k)$, por lo tanto $k = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$. Es importante notar que podemos sustituir $k \rightarrow 1-k$, y los resultados no dependen de esto. Con los dos valores obtenidos de k generamos dos espectros distintos pues los autovalores μ de L_3 toman valores $\mu = k, k+1, k+2, \dots$, denotaremos estos espectros como $D_{\frac{3}{4}}^+$ y $D_{\frac{1}{4}}^+$. Pero además, de la definición de L_3 en la ecuación (2.6) tenemos que $L_3 = \frac{H}{2}$, por lo que el espectro de L_3 esta relacionado con el espectro de energía como $2\mu = E_n$. Así los espectros de energía generados son

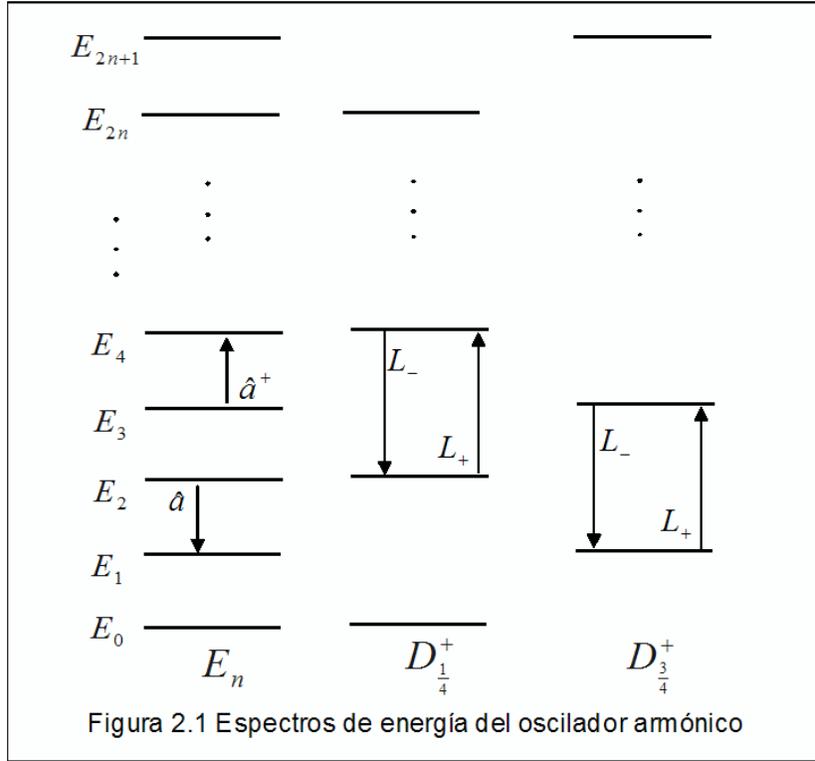
$$D_{\frac{3}{4}}^+ \Rightarrow E = \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots$$

$$D_{\frac{1}{4}}^+ \Rightarrow E = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \dots$$

Por lo que volviendo a las unidades de las constantes fundamentales, todo el espectro de energía viene dados por

$$E_N = \left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

en donde $N = 0, 1, \dots$ es el número cuántico principal.



Los dos espectros generados por separado $D_{\frac{3}{4}}^+$ y $D_{\frac{1}{4}}^+$, están relacionados con la paridad de las soluciones de la ecuación de Schrödinger del O.A.U. ya que estas soluciones están relacionadas con los polinomios de Hermite

$$D_{\frac{3}{4}}^+ \rightarrow \phi_{n+\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} \rightarrow \psi_{2n+1} = N_{2n+1} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) H_{2n+1}(x), \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$D_{\frac{1}{4}}^+ \rightarrow \phi_{n+\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \rightarrow \psi_{2n} = N_{2n} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) H_{2n}(x), \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots$$

Por lo que los operadores de ascenso y descenso L_{\pm} definidos en (1.25) suben o bajan índices, pero sobre funciones de la misma paridad.

Además debido a que estos operadores se suben y bajan índices entre funciones de la misma paridad es posible encontrar relaciones de recurrencia entre esas funciones, utilizando las ecuaciones (1.30) y (1.33).

Para el caso en que $k = \frac{1}{4}$ tenemos que $\mu = n + \frac{1}{4}$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, por lo cual tenemos que

$$\left| c_{\frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}} \right| = \frac{\sqrt{\left(n + \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \right) \left(n + \frac{1}{4} \mp \frac{1}{4} \pm 1 \right)}}{\sqrt{\left(n \pm \frac{1}{2} \right) \left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right)}}$$

este caso corresponde al caso de las funciones pares. Ahora notemos que las funciones propias de este Hamiltoniano son funciones reales, y además debido a la definición de los operadores L_1, L_2 y L_3 , los operadores de ascenso y descenso serán operadores con coeficientes reales por lo que mandan funciones reales en funciones reales, y así $|c_{k\mu}| = c_{k\mu}$. Así obtenemos la relación de recurrencia

$$L_{\pm} \psi_{2n} = \sqrt{\left(n \pm \frac{1}{2} \right) \left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right)} \psi_{2n \pm 2}, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

De manera similar, para el caso en el que $k = \frac{3}{4}$ tenemos que $\mu = n + \frac{3}{4}$, que corresponde al caso de las funciones impares tenemos que

$$L_{\pm} \psi_{2n+1} = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \left(n + 1 \pm \frac{1}{2} \right)} \psi_{2n+1 \pm 2}, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

De la definición de los operadores L_{\pm} podemos escribir las relaciones de recurrencia anteriores de forma diferencial

$$(x^2 \mp 1) \psi_{2n} + \psi_{2n}'' \mp 2x \psi_{2n}' = 4 \sqrt{\left(n \pm \frac{1}{2} \right) \left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right)} \psi_{2n \pm 2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

y de manera similar para las funciones impares

$$(x^2 \mp 1) \psi_{2n+1} + \psi_{2n+1}'' \mp 2x \psi_{2n+1}' = 4 \sqrt{\left(n \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(n + 1 \pm \frac{1}{2} \right)} \psi_{2n+1 \pm 2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2.2 Pozo infinito.

Consideremos una partícula que se encuentra sometida a un potencial dado por

$$V(x) = 0 \quad \text{si } 0 \leq x \leq a, \quad V(x) \rightarrow \infty \quad \text{si } x \notin [0, a]. \quad (2.7)$$

Entonces podemos escribir la ecuación de Schrödinger para este sistema como

$$H\psi_n = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \psi_n = E_n \psi_n. \quad (2.8)$$

Donde las autofunciones ψ_n deben satisfacer las condiciones de frontera $\psi_n(0) = \psi_n(a) = 0$, con lo cual, de manera explícita las autofunciones y los autovalores de energía vienen dados por

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2}{2a^2}. \quad (2.9)$$

De la forma de las soluciones (2.9) si consideramos el teorema del seno de la suma de dos ángulos^[6] que se expresa como $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$, podemos construir un operador de ascenso o de descenso T_{\pm} tales que al aplicarse sobre las funciones de estado ψ_n

$$T_{\pm} \psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{(n \pm 1) \pi x}{a} \quad (2.10)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{a}} \left[\sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \pm \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \right]. \quad (2.11)$$

Por lo cual podemos definir los operadores T_{\pm} de la forma

$$T_{\pm} = \left[\cos \frac{\pi x}{a} \pm \frac{a\pi}{n} \sin \frac{\pi x}{a} \frac{d}{dx} \right], \quad (2.12)$$

en donde podemos apreciar claramente que estos operadores dependen del número cuántico n . Más aun, estos operadores se pueden definir de tal forma que no sólo suban o bajen un nivel^[6], si los escribimos de la forma

$$T_{\pm}^{[m]} = \left[\cos \frac{m\pi x}{a} \pm \frac{a\pi}{n} \sin \frac{m\pi x}{a} \frac{d}{dx} \right]. \quad (2.13)$$

Estos operadores suben o bajan m niveles, es decir, si aplicamos el operador $T_{\pm}^{[m]}$ a su función de estado asociada ψ_n tenemos que $T_{\pm}^{[m]} \psi_n = \psi_{n \pm m}$. Pero hay que tener cuidado, ya que el operador $T_{\pm}^{[m]}$ que actúa sobre ψ_n no es el mismo que actúa sobre ψ_k si $k \neq n$, pues al aplicar este operador a un estado $|k\rangle$, el operador sería

$$T_{\pm}^{[m]} = \left[\cos \frac{m\pi x}{a} \pm \frac{a\pi}{k} \sin \frac{m\pi x}{a} \frac{d}{dx} \right],$$

y si lo queremos aplicar a un estado $|l\rangle$, el operador sería

$$T_{\pm}^{[m]} = \left[\cos \frac{m\pi x}{a} \pm \frac{a\pi}{l} \sin \frac{m\pi x}{a} \frac{d}{dx} \right],$$

por lo que la definición de este operador no es la más correcta, ya que surgen problemas al intentar realizar composiciones.

2.2.1 Método de Shi-Hai Dong y Zhong-Qi Ma.

Una forma para construir los operadores T_{\pm} , fue propuesta por Shi-Hai Dong y Zhong-Qi Ma^[7] para lo cual definen un operador de número \hat{n} y su operador inverso \hat{n}^{-1} dados en la notación de Dirac por:

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle, \quad \hat{n}^{-1} |n\rangle = \frac{1}{n} |n\rangle. \quad (2.14)$$

Con ellos se definen los operadores de ascenso y descenso dados por

$$P_- = \left[\cos z \hat{n} - \sin z \frac{d}{dz} \right] \hat{n}^{-1} (\hat{n} - 1), \quad (2.15)$$

$$P_+ = \left[\cos z \hat{n} + \sin z \frac{d}{dz} \right], \quad (2.16)$$

con $z = \frac{\pi x}{a}$. Al aplicar estos operadores sobre las funciones de estado, son tales que se obtiene que

$$P_- |n\rangle = (n-1) |n-1\rangle, \quad P_+ |n\rangle = n |n+1\rangle. \quad (2.17)$$

Con estos operadores deseamos calcular $P_+ P_- |n\rangle = (n-1) P_+ |n-1\rangle$, donde es necesario determinar

$$P_+ |n-1\rangle = \left[\cos z \hat{n} |n-1\rangle + \sin z \frac{d}{dz} |n-1\rangle \right], \quad (2.18)$$

y debido a la notación en (2.14), se puede presentar una confusión al evaluar $\hat{n} |n-1\rangle$, tal vez la notación no sea la mas adecuada, pero la definición establece hermitianos que $\hat{n} |m\rangle = m |m\rangle$, $\hat{n}^{-1} |m\rangle = \frac{1}{m} |m\rangle$, por lo que $\hat{n} |n-1\rangle = (n-1) |n-1\rangle$. Por ejemplo se pueden definir operadores de número y su inverso^[8] ambos en la forma

$$\hat{N} = \sum_{k=1}^{\infty} k |k\rangle \langle k|, \quad \hat{N}^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |k\rangle \langle k|. \quad (2.19)$$

Al aplicar estos operadores sobre una función de estado tenemos

$$\hat{N} |n\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k |k\rangle \langle k | n\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k |k\rangle \delta_{kn} = n |n\rangle, \quad (2.20)$$

$$\hat{N}^{-1} |n\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |k\rangle \langle k | n\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |k\rangle \delta_{kn} = \frac{1}{n} |n\rangle. \quad (2.21)$$

Así podemos construir operadores de ascenso y descenso utilizando las ecuaciones (2.15) y (2.16) dados por

$$T_- = \left[\cos z \hat{N} - \sin z \frac{d}{dz} \right] \hat{N}^{-1} (\hat{N} - 1), \quad (2.22)$$

$$T_+ = \left[\cos z \hat{N} + \sin z \frac{d}{dz} \right]. \quad (2.23)$$

Ahora tenemos una expresión para los operadores de ascenso y descenso con la cual podemos realizar composiciones adecuadamente, lo cual nos permite escribir el Hamiltoniano de este sistema en términos de estos operadores como

$$H |n\rangle = \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 T_- T_+ |n\rangle,$$

además satisfacen las relaciones de conmutación

$$[T_-, T_+] |n\rangle = 2 \hat{T}_0 |n\rangle, \quad (2.24)$$

en donde

$$T_0 = \hat{N} - \frac{1}{2}, \quad (2.25)$$

y además definiendo de esta forma este operador se satisface que

$$[T_0, T_{\pm}] |n\rangle = \pm T_{\pm} |n\rangle, \quad (2.26)$$

por lo cual estos operadores son una representación del álgebra del grupo $\text{SO}(2,1)$ ^[7].

2.2.2 Método de S. Kais y R.D. Levine.

Otra forma de construir operadores de ascenso y descenso para el pozo infinito^[4], es utilizando una variable auxiliar y que permite definir operadores sobre las variables x y y . Con este propósito se define una base $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$f_n(x, y) = \psi_n(x) \exp(i n y). \quad (2.27)$$

Con ella se buscan operadores J_+ (J_-) de ascenso (descenso) tales que

$$J_{\pm} f_n(x, y) = n f_{n \pm 1}(x, y). \quad (2.28)$$

Explícitamente resulta que

$$J_{\pm} = \exp(\pm i y) \left[(-i \cos x) \frac{\partial}{\partial y} \pm (\sin x) \frac{\partial}{\partial x} \right]. \quad (2.29)$$

Adicionalmente se define J_3 como

$$J_3 = -i \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.30)$$

Las relaciones de conmutación de estos operadores vienen dadas por

$$[J_+, J_-] = -2 J_3, \quad [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad (2.31)$$

lo cual se puede verificar fácilmente.

Así estos operadores generan el álgebra del grupo $SO(2, 1)$. Notemos además que el operador J_3 sirve como el operador de número, es decir,

$$J_3 f_n(x, y) = n f_n(x, y),$$

y que el Hamiltoniano H puede ser escrito en términos de J_3 como

$$H = \frac{\pi^2}{2a^2} J_3^2. \quad (2.32)$$

Alternativamente podemos escribir H en función de los operadores de ascenso y descenso como

$$H = J_+ J_- + \frac{1}{2} [J_-, J_+]. \quad (2.33)$$

Destaca el hecho que el Hamiltoniano escrito en la forma (2.33) es formalmente idéntico al del oscilador armónico unidimensional (O.A.U.) cuando este es escrito con los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} como

$$H = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]. \quad (2.34)$$

La similitud es clara ya que J_- juega el papel de \hat{a} y de manera similar J_+ juega el papel de \hat{a}^\dagger .

Esta forma de escribir los operadores J_\pm y J_3 satisface adecuadamente el álgebra $so(2, 1)$, pero lo hace al aplicarse sobre la base $f_n(x, y) = \psi_n(x) \exp(iny)$. Sin embargo, si aplicamos estos operadores sobre la base $\psi_n(x)$, estos no reproducen el álgebra.

2.3 Método alternativo para obtener el álgebra SO(2,1) en problemas unidimensionales.

Para el desarrollo de esta sección, primero consideremos el siguiente resultado.

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , T una transformación lineal con $T : V \rightarrow V$ y $\{|m\rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal. Si $T(|m\rangle) = \sum_k a_{km} |k\rangle$ ¹ con $a_{km} \in \mathbb{C}$, entonces T se puede expandir en términos de su base dual $\{\langle m|\}_{m \in \mathbb{N}}$ como

$$T = \sum_{k,m} a_{km} |k\rangle \langle m|.$$

Esto es fácil de probar, ya que toda transformación lineal T se puede expandir en términos de su base dual como

$$T = \sum_m T(|m\rangle) \langle m|, \quad (2.35)$$

pero como $T(|m\rangle) = \sum_k a_{km} |k\rangle$, entonces sustituyendo esto en la ecuación anterior, T se puede escribir como

$$T = \sum_{k,m} a_{km} |k\rangle \langle m|. \quad (2.36)$$

Ahora consideremos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un problema unidimensional

$$H|n\rangle = \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (2.37)$$

Las soluciones de esta ecuación forman una base ortonormal $\{|n\rangle\}_{n=0,1,2,\dots}$ para un espacio vectorial V sobre \mathbb{C} . El espacio dual V^* es generado por las transformaciones lineales $\{T_k\}$ con $T_k = \langle k|$, donde $T_k(|n\rangle) = \delta_{kn}$. Así todo operador lineal que actúe sobre el espacio vectorial V de soluciones de (2.37), se puede expandir en la forma (2.36). Por ejemplo, para distintos valores de a_{km} obtenemos algunos operadores ya conocidos

$$\begin{aligned} a) \text{ Si } a_{km} = \delta_{km}; I &= \sum_{k=1}^{\infty} |k\rangle \langle k| & c) \text{ Si } a_{km} = -k^2 \delta_{km}; \left[\frac{d^2}{dz^2} \right] &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} -k^2 |k\rangle \langle k| \right] \\ b) \text{ Si } a_{km} = k \delta_{km}; N &= \sum_{k=1}^{\infty} k |k\rangle \langle k| & d) \text{ Si } a_{km} = E_k \delta_{km}; H &= \sum_{k=1}^{\infty} E_k |k\rangle \langle k|. \end{aligned}$$

¹Como $T : V \rightarrow V$ siempre podemos escribir la transformación lineal de esta forma.

- a) Operador identidad,
- b) Operador de número,
- c) La representación matricial de la segunda derivada en cualquier espacio generado por la base $\{\sin nz\}_{n \in \mathbb{N}}$,
- d) Hamiltoniano con E_k la energía del k -ésimo estado.

Por lo anterior, los operadores de ascenso y descenso se deben expandir en la forma (2.36). De manera sencilla se pueden construir varios operadores de ascenso y descenso para cualquier problema unidimensional tomando²

$$T'_+ = \sum_{k=0}^{\infty} A(k) |k+1\rangle \langle k| \quad , \quad T'_- = \sum_{k=1}^{\infty} D(k) |k-1\rangle \langle k|, \quad (2.38)$$

los cuales cumplen que

$$T'_+ |n\rangle = A(n) |n+1\rangle \quad , \quad T'_- |n\rangle = D(n) |n-1\rangle, \quad (2.39)$$

$$T'_- |0\rangle = 0.$$

Los valores de $A(k)$ y $D(k)$ se pueden tomar de tal forma que se puedan obtener propiedades específicas. Por ejemplo, para que obtengamos una representación unitaria, es necesario que $T'_+{}^\dagger = T'_-$, por lo que

$$\begin{aligned} T'_+{}^\dagger &= \sum_{k=0}^{\infty} (A(k) |k+1\rangle \langle k|)^\dagger = \sum_{k=0}^{\infty} A^*(k) (|k+1\rangle \langle k|)^\dagger \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^*(k) \langle k|^\dagger |k+1\rangle^\dagger = \sum_{k=0}^{\infty} A^*(k) |k\rangle \langle k+1| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A^*(k-1) |k-1\rangle \langle k| = T'_- = \sum_{k=1}^{\infty} D(k) |k-1\rangle \langle k|, \end{aligned}$$

y esto se cumple si $D(k) = A^*(k-1)$ ^[9], y además si tenemos operadores de este tipo es posible obtener algunas relaciones de consistencia que permiten encontrar el espectro de energía del O.A.U. y el de un rotor rígido por métodos algebraicos entre otros.

De manera similar se pueden definir operadores

$$T'_+ = \sum_{k=1}^{\infty} k |k+1\rangle \langle k|, \quad T'_- = \sum_{k=2}^{\infty} k |k-1\rangle \langle k|, \quad (2.40)$$

²El índice en las sumatorias se tomó considerando que el estado base es $|0\rangle$. En caso que el estado base sea $|1\rangle$ (como en el pozo infinito), entonces los índices deben comenzar en 1 y 2 respectivamente, y así $T'_- |1\rangle = 0$.

los cuales , junto con el operador de número definido (2.19) satisfacen el álgebra $so(2, 1)$

$$[T'_+, T'_-] = -2 N, \quad [N, T'_\pm] = \pm T'_\pm, \quad (2.41)$$

lo cual se puede comprobar fácilmente.

Estos operadores son muy parecidos a los operadores J_\pm y J_3 definidos en (2.29) y (2.30). La diferencia entre ellos es que los J 's reproducen esta álgebra sobre la base $f_n(x, y) = \psi_n(x) \exp(iny)$, y los operadores T'_\pm y N actúan sobre la base definida por $|n\rangle$, en donde $\langle x | n \rangle = \psi_n(x)$. Fácilmente podemos ver que tienen las misma propiedades, pero cada uno actuando sobre sus espacios correspondientes.

$$\begin{aligned} J_\pm f_n(x, y) &= n f_{n\pm 1}(x, y) & T'_\pm |n\rangle &= n |n \pm 1\rangle, \\ J_3 f_n(x, y) &= n f_n(x, y) & N |n\rangle &= n |n\rangle, \\ H = J_+ J_- + \frac{1}{2} [J_-, J_+] & & H = T'_+ T'_- + \frac{1}{2} [T'_-, T'_+] &. \end{aligned}$$

Notemos que los operadores T'_\pm , no cumplen con la condición de que $D(k) = A^*(k-1)$, por lo que no son una representación unitaria de el álgebra $so(2, 1)$.

Si ahora expandimos los operadores (2.22) , (2.23) y (2.25), entonces estos quedan escritos de la forma

$$P_+ = \sum_{k=1}^{\infty} k |k+1\rangle \langle k|, \quad P_- = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) |k-1\rangle \langle k|, \quad P_0 = \sum_{k=2}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right) |k\rangle \langle k|. \quad (2.42)$$

Estos operadores cumplen con la condición de que $D(k) = A^*(k-1)$, por lo que además son una representación unitaria. Es importante notar que esta forma de escribir los operadores, P_\pm y P_0 es independiente de la forma del potencial, es decir, estos operadores se pueden definir para cualquier potencial unidimensional³, en donde estos operadores satisfacen el álgebra $so(2, 1)$.

Pero este resultado no garantiza el que existan operadores diferenciales que satisfagan esta álgebra, sin embargo, con ellos podemos probar que no existen operadores diferenciales tales que el Hamiltoniano del pozo infinito se pueda factorizar por el método de Infeld y Hull^[10]. Este método, consiste en encontrar operadores de ascenso y descenso de la forma

$$T_+ = \frac{d}{dx} + f(x), \quad T_- = -\frac{d}{dx} + f(x). \quad (2.43)$$

³Recordando que para el pozo infinito el estado base es $|1\rangle$. Para cualquier otro problema en el que el estado base sea $|0\rangle$, los índices debe cambiarse por 0 y 1 respectivamente.

Si existieran estos operadores, entonces se expandirían de la forma

$$T_+ = \sum_{k=1}^{\infty} A(k) |k+1\rangle \langle k| \quad , \quad T_- = \sum_{k=2}^{\infty} D(k) |k-1\rangle \langle k|. \quad (2.44)$$

Ahora probaremos por contradicción que no es posible que existan operadores de este tipo. Para ello restando ambas expresiones de la ecuación (2.43) y así obtenemos que

$$T_+ - T_- = 2 \frac{d}{dx}. \quad (2.45)$$

Por otro lado de la ecuación (2.44) tenemos que

$$T_+ - T_- = \sum_{k=1}^{\infty} (A(k) |k+1\rangle - D(k) |k-1\rangle) \langle k|, \quad (2.46)$$

y al aplicarlo sobre un estado $|n\rangle$ llegamos a que

$$(T_+ - T_-) |n\rangle = A(n) |n+1\rangle - D(n) |n-1\rangle \quad (2.47)$$

y utilizando (2.45) obtenemos que

$$\frac{d}{dx} \langle x | n \rangle = \frac{1}{2} [A(n) \langle x | n+1 \rangle - D(n) \langle x | n-1 \rangle] \quad (2.48)$$

pero $\langle x | n \rangle = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$, y entonces obtenemos que

$$\frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} = \frac{1}{2} \left(A(n) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{(n+1)\pi x}{a} - D(n) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{(n-1)\pi x}{a} \right) \#_C, \quad (2.49)$$

esto no se cumple independientemente de la forma de los coeficientes. Con esto concluimos que no es posible obtener operadores de este tipo y por consecuencia, no se puede factorizar el Hamiltoniano del pozo con este tipo de operadores.

CAPITULO 3

SUPERSIMETRÍA EN MECÁNICA CUÁNTICA.

El concepto de supersimetría relaciona estados bosonicos y fermionicos en mecánica cuántica ha jugado un papel central en el desarrollo de la teoría cuántica de campos por dos décadas^[11]. En este capitulo mostraremos un método por el cual podemos obtener el compañero supersimétrico de Hamiltonianos con energía de estado base igual a cero. Por medio de este método obtenemos espectros de energía idénticos para los Hamiltonianos supersimétricos salvo el estado base. En particular aplicaremos este método para los potenciales del pozo infinito y del oscilador armónico unidimensional. Esto con el objetivo de comparar los operadores de ascenso y descenso generalizados con los estudiados en los capítulos anteriores.

3.1 Operadores de ascenso y descenso generalizados

Si tenemos una Hamiltoniano H^0 tal que la energía del estado base es cero^[12], es decir con un potencial $V^0(x)$ tal que

$$H^0\psi_0 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\psi_0 + V^0(x)\psi_0 = 0, \quad (3.1)$$

entonces podemos escribir el potencial $V^0(x)$ en términos de la función de estado ψ_0 como

$$V^0(x) = \frac{1}{2}\frac{\psi_0''}{\psi_0}. \quad (3.2)$$

De igual forma cual podemos describir al Hamiltoniano H^0 como

$$H^0 = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\psi_0''}{\psi_0}\right). \quad (3.3)$$

Al tener potencial de esta forma, este puede ser factorizado por operadores de la forma

$$Q^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mp\frac{d}{dx} - \frac{\psi_0'}{\psi_0}\right], \quad (3.4)$$

en los cuales es importante notar que un operador es el adjunto del otro , i.e., $(Q^\pm)^\dagger = Q^\mp$. Al calcular el producto de estos operadores tenemos que

$$Q^\pm Q^\mp = \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} \pm \frac{\psi_0''}{\psi_0} + (1 \mp 1) \left(\frac{\psi_0'}{\psi_0} \right)^2 \right]. \quad (3.5)$$

Así podemos nuevamente describir al Hamiltoniano H^0 como

$$H^0 = Q^+ Q^- = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V^0(x). \quad (3.6)$$

Definimos un nuevo potencial $V^1(x)$, y su correspondiente Hamiltoniano H^1 como

$$V^1(x) = V^0(x) - \frac{d}{dx} \frac{\psi_0'}{\psi_0} \quad \text{y} \quad H^1 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V^1. \quad (3.7)$$

Igualmente este nuevo Hamiltoniano H^1 será factorizable, sólo que el producto aparece en orden inverso

$$H^1 = Q^- Q^+ = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V^1. \quad (3.8)$$

El Hamiltoniano H^1 es llamado el compañero supersimétrico de H^0 y viceversa. Definimos un nuevo conjunto de funciones dado por

$$\psi_{n-1}^1 = c_n Q^- \psi_n^0 \quad \text{con} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.9)$$

en donde c_n son constantes de normalización. Sólo definimos estas funciones para $n \geq 1$, pues para $n = 0$ probaremos que $Q^- \psi_0^0 = 0$. En efecto si realizamos el producto interno de $Q^+ Q^- \psi_0^0$ con ψ_0^0 de la ecuación (3.6) obtenemos que

$$\langle \psi_0^0 | Q^+ Q^- \psi_0^0 \rangle = 0. \quad (3.10)$$

Por otro lado $(Q^+)^\dagger = Q^-$, por lo que sustituyendo en la ecuación anterior tenemos que

$$\langle Q^- \psi_0^0 | Q^- \psi_0^0 \rangle = 0, \quad (3.11)$$

pero esto sucede si y solo si $Q^- \psi_0^0 = 0$.

Ahora si aplicamos el Hamiltoniano H^1 a las funciones ψ_n^1 , de la definición de las funciones y de las ecuaciones (3.8) y (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned} H^1 \psi_n^1 &= Q^- Q^+ \psi_n^1 = c_{n+1} Q^- Q^+ Q^- \psi_{n+1}^0 \\ &= c_{n+1} Q^- H^0 \psi_n^0 = E_{n+1}^0 (c_{n+1} Q^- \psi_{n+1}^0) \\ &= E_{n+1}^0 \psi_n^1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Así hemos probado que ψ_n^1 es autofunción de H^1 , y que además la energía correspondiente a la función ψ_n^1 , viene dada por

$$E_n^1 = E_{n+1}^0. \quad (3.13)$$

Aplicando Q^+ a la función ψ_{n-1}^1 , de la definición y de la ecuación (3.6) tenemos que

$$Q^+ \psi_{n-1}^1 = c_n Q^+ Q^- \psi_n^0 = c_n E_n^0 \psi_n^0. \quad (3.14)$$

Pero de el hecho de que las funciones deben ser normalizadas, si realizamos el producto interno $\langle Q^+ \psi_n^1 | \psi_{n+1}^0 \rangle$ por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} \langle Q^+ \psi_n^1 | \psi_{n+1}^0 \rangle &= \langle c_{n+1} E_{n+1}^0 \psi_{n+1}^0 | \psi_{n+1}^0 \rangle \\ &= c_{n+1} E_{n+1}^0 \langle \psi_{n+1}^0 | \psi_{n+1}^0 \rangle \\ &= c_{n+1} E_{n+1}^0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pero ya que $(Q^+)^\dagger = Q^-$, entonces por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \langle Q^+ \psi_n^1 | \psi_{n+1}^0 \rangle &= \langle \psi_n^1 | Q^- \psi_{n+1}^0 \rangle \\ &= \left\langle \psi_n^1 \left| \frac{1}{c_{n+1}} \psi_{n-1}^1 \right. \right\rangle \\ &= \frac{1}{c_{n+1}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Así concluimos que $c_{n+1} E_{n+1}^0 = \frac{1}{c_{n+1}}$, por lo que $c_n = \frac{1}{\sqrt{E_n^0}}$. En resumen, hemos probado las siguientes igualdades

$$H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0, \quad (3.17a)$$

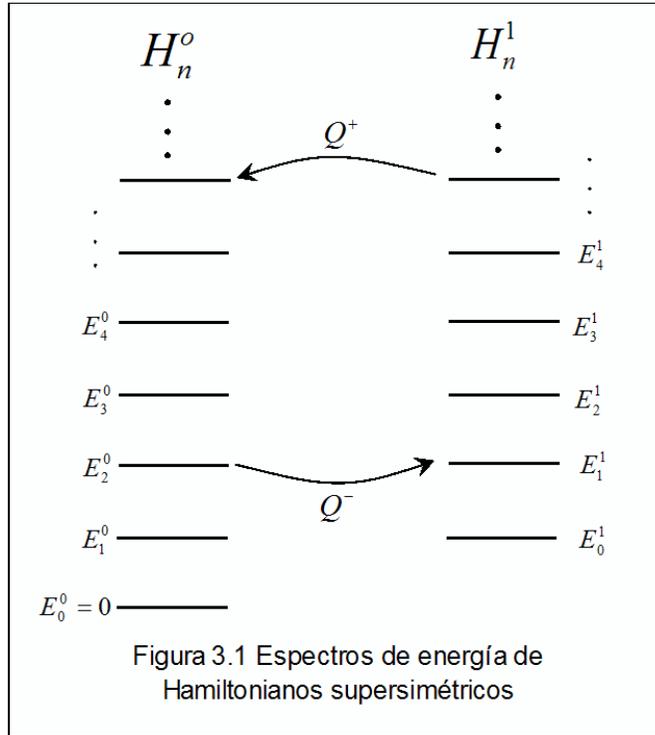
$$H^1 \psi_n^1 = E_n^1 \psi_n^1 \quad \text{con} \quad E_n^1 = E_{n+1}^0 \quad (3.17b)$$

$$Q^- \psi_n^0 = \sqrt{E_n^0} \psi_{n-1}^1 \quad \text{con} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.17c)$$

$$Q^+ \psi_n^1 = \sqrt{E_n^0} \psi_{n+1}^0 \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17d)$$

Notando que el espectro de ambos Hamiltonianos es idéntico salvo el estado base

con energía $E_0^0 = 0$.



3.2 Supersimetría en el oscilador armónico unidimensional

Para este sistema la función correspondiente al estado base viene dado por

$$\psi_0 = c \exp(ax^2), \quad (3.18)$$

en donde a y c son constantes. Calculamos los operadores Q^\pm utilizando (3.4), los cuales explícitamente vienen dados por

$$Q^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mp \frac{d}{dx} + x \right]. \quad (3.19)$$

Utilizando (2.8) calculamos el Hamiltoniano con energía del estado base nula y su compañero supersimétrico

$$H^0 = Q^+ Q^- = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}, \quad (3.20)$$

$$H^1 = Q^- Q^+ = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}. \quad (3.21)$$

Las autofunciones correspondiente a estos Hamiltonianos vienen dadas por

$$\psi_n^0 = N_n^0 \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right] H_n(x),$$

$$\psi_n^1 = N_n^1 \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right] H_n(x),$$

y sus correspondientes energías viene dadas por

$$E_n^0 = n\hbar\omega, \quad E_n^1 = (n+1)\hbar\omega, \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.22)$$

en donde N_n son constantes de normalización y H_n son los polinomios de Hermite. En este caso observamos que las funciones propias de ambos Hamiltonianos son las mismas y estas generan el mismo espectro. La diferencia entre estos Hamiltonianos es que el nivel n -ésimo de energía correspondiente al Hamiltoniano H^0 es el $n+1$ -ésimo estado del Hamiltoniano H^1 . Esto es debido a que los operadores Q^+ y Q^- que calculamos coinciden con los operadores de ascenso y descenso ya conocidos a y a^\dagger .

3.3 Supersimetría en el pozo infinito

La función asociada al estado base del pozo infinito de potencial viene dada por

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}, \quad (3.23)$$

y la energía para este estado base viene dada por

$$E_0 = \frac{\pi^2}{2a^2}, \quad (3.24)$$

por lo que ahora definimos un Hamiltoniano H^0 dado por

$$H^0 = H - \frac{\pi^2}{2a^2}. \quad (3.25)$$

En donde H es el Hamiltoniano del pozo infinito definido en (2.8). Esto lo hacemos con el propósito de que la energía del estado base para el Hamiltoniano H^0 sea igual a cero. Las funciones propias de este nuevo Hamiltoniano H^0 son las mismas que las de H , y por consecuencia el espectro de energías E_n^0 de H^0 viene dado por

$$E_n^0 = E_n - E_0 = \frac{\pi^2}{2a^2}(n^2 - 1), \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.26)$$

Si hacemos un cambio en el índice $n \rightarrow n+1$ entonces

$$E_n^0 = \frac{\pi^2}{2a^2}n(n+2), \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.27)$$

y las funciones de onda quedan dadas por

$$\psi_n^0 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{(n+1)\pi x}{a}, \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

Con este nuevo Hamiltoniano H^0 y con el cambio realizado en el índice logramos obtener una buena supersimetría, en la cual a ψ_0^0 , le corresponde una energía $E_0^0 = 0$.

Para encontrar el compañero supersimétrico de H^0 primero encontraremos los operadores Q^\pm . Utilizando la ecuación (3.4), obtenemos que

$$Q^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mp \frac{d}{dx} - \frac{\pi}{a} \cot \frac{\pi x}{a} \right].$$

Utilizando (3.7) encontramos los potenciales, los cuales vienen dados por

$$V_0 = \frac{1}{2} \frac{\psi_0''}{\psi_0} = -\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{a^2}, \quad V_1 = \frac{\pi^2}{2a^2} \left(2 \sin^{-2} \frac{\pi x}{a} - 1 \right).$$

Con estos potenciales obtenemos los Hamiltonianos

$$H^0 = Q^+ Q^- = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{a^2}, \quad (3.29)$$

$$H^1 = Q^- Q^+ = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\pi^2}{2a^2} \left(2 \sin^{-2} \frac{\pi x}{a} - 1 \right). \quad (3.30)$$

Para encontrar sus correspondientes autofunciones aplicamos las ecuaciones (3.17), explícitamente vienen dadas por

$$\psi_n^0 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{(n+1)\pi x}{a}, \quad (3.31)$$

$$\psi_n^1 = \frac{\pi}{a^2} \left[-(n+2) \cos \frac{(n+2)\pi x}{a} - \cot \frac{\pi x}{a} \sin \frac{(n+2)\pi x}{a} \right], \quad (3.32)$$

ambas con $n = 0, 1, 2, \dots$. Estas generan espectros de energías dados por

$$E_n^0 = \frac{\pi^2}{2a^2} n(n+2), \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.33)$$

$$E_n^1 = \frac{\pi^2}{2a^2} (n+1)(n+3), \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Por lo que aunque podemos factorizar el Hamiltoniano, estos operadores aparentemente cambian los índices como en el caso del O.A.U., pero en realidad no lo hacen pues lo que cambian son funciones propias del Hamiltoniano H^0 en funciones propias del Hamiltoniano H^1 . Debido a esto, los operadores Q^\pm no pueden ser utilizados como operadores de ascenso y descenso como en el caso del O.A.U., pues las soluciones de los Hamiltonianos supersimétricos no son las mismas como sucede para el O.A.U.

CONCLUSIONES

En el desarrollo de este trabajo hemos mostrado que para los problemas unidimensionales es posible definir operadores de ascenso y descenso que junto con un tercer operador satisfagan el álgebra de Lie $so(2,1)$.

En el caso particular del oscilador armónico unidimensional, los operadores L_1, L_2 y L_3 satisfacen el álgebra de Lie $so(2,1)$. Con ellos logramos construimos el operador de Casimir para este grupo y encontramos que tiene el autovalor $\frac{3}{16}$. Con este autovalor obtuvimos valores para k de $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ con los cuales generamos dos espectros distintos para L_3 . Estos dos espectros están relacionados con la paridad de las funciones. Uniendo estos dos espectros obtenemos todo el espectro de energías para el oscilador armónico unidimensional. Aquí es importante notar que los operadores L_{\pm} cambian el índice μ en ± 1 , por lo que si aplicamos estos operadores a las autofunciones del Hamiltoniano del O.A.U., estos cambiarán el índice n correspondiente al número cuántico principal en ± 2 y debido a ello pudimos encontrar relaciones de recurrencia entre funciones de la misma paridad.

Para el caso del potencial de pozo infinito se pueden construir operadores de la forma propuesta por Shi-Hai Dong y Zhong-Qi Ma. Aunque estos no sean totalmente diferenciales explícitamente (ya que incluyen el operador de número), estos no dependen del número cuántico n , además estos satisfacen el álgebra de Lie $so(2,1)$. De la misma forma los operadores propuestos por S. Kais y R.D. Levine, aunque necesitan de una variable auxiliar y definir una nueva base, también reproducen la misma álgebra.

Si tenemos operadores de ascenso y descenso expresados en términos de bras y kets como en la expresión (2.44) es fácil generar ésta álgebra, pero esto no garantiza que existan operadores diferenciales que lo hagan. Sin embargo, usando esta expansión probamos que el potencial del pozo infinito no es factorizable por operadores de ascenso y descenso de la forma:

$$T_+ = \frac{d}{dx} + f(x), \quad T_- = -\frac{d}{dx} + f(x).$$

Finalmente, observamos que todo Hamiltoniano puede ser factorizado utilizando operadores supersimétricos. En particular, cuando aplicamos esta técnica al O.A.U, los operadores supersimétricos Q^+ y Q^- que calculamos coinciden con los operadores de ascenso y descenso ya conocidos a y a^\dagger . Pero para el caso del pozo infinito aunque podemos factorizar el Hamiltoniano, los operadores Q^\pm no pueden ser utilizados como operadores de ascenso y descenso como en el caso del O.A.U., pues las soluciones de los Hamiltonianos supersimétricos no son las mismas como sucede para el O.A.U.

AGRADECIMIENTOS. Agradecemos el apoyo de COFAA, PRONABES, EDD, PIFI, CGPI Proyecto (20060855)

REFERENCIAS

- [1] Morton Hamermesh. *Group Theory and its application to physical problems*. Dover Publications, Inc. New York (1962).
- [2] Braian G. Wybourne. *Classical Groups for Physicist* Wiley-Interscience Publication (1974).
- [3] K. B. Wolf *Topics in Non Compact Groups, Group Theory and Its Applications in Physics* Ed. T.H. Seligman, AIP Conference Proceedings No. 71 New York (1981).
- [4] S. Kais and R.D. Levine *Square-well potential by an algebraic approach*. Phys. Rev. 34, 6 (1986) 4615
- [5] Dennis Aebersold and Andrew Langerman. *SO(2) and the study of the infinite-well potential*. Am. J. Phys. 45, 3 (1977) 272.
- [6] J. García Ravelo , A Queijeiro, R Cuevas, J. J. Peña and J. Morales. *The General Addition Theorem and Leader Operators*. Applied Mathematics Letters 20 (2007) 758.
- [7] Shi-Hai Dong, Zhong-Qi Ma. *The hidden symmetry for a quantum system with an infinitely deep square-well potential*. Am. J. Phys 70, 5 (2002) 520.
- [8] David J. Griffiths *Introduction to Quantum Mechanics* second edition. Pearson Prentice Hall New Jersey (1995).

- [9] Luis de la Peña, *Introducción a la Mecánica Cuántica*, segunda edición, Ediciones Científicas Universitarias, México (1991).
- [10] I. Infeld and T.E. Hull *The Factorization Method* Rev. Mod. Phys. 23, 1 (1951) 21.
- [11] Masud Chaichian, Rolf Hagedorn *Symmetries in Quantum Mechanics From angular momentum to supersymmetry*, Int. f Physics Publishing, Bristol and Philadelphia (1997).
- [12] Franz Schwalb, *Quantum Mechanics* tercera edición Springer (2002).