

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
UNIDAD PROFESIONAL "ADOLFO LÓPEZ MATEOS"

TESIS:

**“ANÁLISIS DE CURVAS GEODÉSICAS EN UNIVERSOS
TIPO GOWDY”**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Física y Matemáticas

PRESENTA:

Miguel Ángel García Aspeitia

ASESOR:

M. en C. Héctor Javier Uriarte Rivera



MÉXICO D.F. 20, ABRIL DEL 2007.

El modo de dar una vez al clavo es cien veces a la herradura.

AGRADECIMIENTOS

*** A Dios:**

Por nunca dejarme caer y guiarme en caminos oscuros.

***A mis padres:**

Martha Aspeitia Salazar y Miguel Ángel García Galicia por su apoyo, amor incondicional y valiosos consejos, así como por todas sus enseñanzas las cuales me han sido útiles a lo largo de mi vida.

***A mi hermano:**

Luis Eduardo Ángel García Aspeitia por su grandiosa compañía y apoyo en todos los días de mi vida.

***A mi novia:**

Yasmín Berenice Alcántara Pérez por su paciencia, apoyo y amor así como sus valiosos consejos.

*** A mis amigos:**

Sergio Alejandro de la Torre Pérez, Aidé Ruiz de la Rosa, Emilio Piña y Ángeles por su amistad, compañía y por todo los consejos que me dieron cada día.

***A mis maestros y Asesores:**

Dra. Nora Eva Bretón Baéz, M. en C. Hector Javier Uriarte Rivera, Dr. Hernando Quevedo Cubillos, Dr. Arturo Zuñiga Segundo, Dr. Jaime Avendaño Lopéz. M en C. José Calderón Mendoza por sus enormes enseñanzas que le dieron claridad a las ideas de la ciencia así como su enorme apoyo.

***A mis escuelas de nivel superior:**

Instituto Politécnico Nacional (IPN) y Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN por concederme el privilegio de aprender en sus escuelas, así como permitirme pertenecer al campo científico del mismo.

INDICE

Resumen	6
Introducción	7
Capítulo I. Conceptos básicos para el estudio de la cosmología.....	10
1.1 Isometrías y vectores de Killing.....	10
1.2 Algebra de Lie.....	11
1.3 Homogeneidad, isotropía y ecuación de Einstein.....	11
Capítulo II. Revisión de cosmologías homogéneas e isotrópicas y Cosmologías homogéneas y anisotrópicas.....	13
2.1 Cosmología de Friedmann-Robertson-Walker-Lemaitre.....	13
2.2 Cosmologías de Bianchi	17
Capítulo III. Cosmologías inhomogéneas y anisotrópicas (Cosmologías de Gowdy).....	24
3.1 Elementos de línea para universos tipo Gowdy.....	24
3.2 Ecuaciones geodésica para las topologías $S^1 \otimes S^2$ y S^3	27
3.3 Vectores de Killing y constantes de movimiento asociadas.....	34
3.4 Ecuaciones para los casos con masa y sin masa de las integrales de movimiento sobre la métricas de Gowdy	40
3.5 Soluciones exactas para los modelos de Gowdy $S^1 \otimes S^2$ y S^3	43
Capítulo IV. Análisis de las geodésicas $S^1 \otimes S^2$ y S^3	46
4.1 Análisis de las geodésicas $S^1 \otimes S^2$ y S^3	46
4.2 Análisis de singularidades mediante el escalar de curvatura en los casos $S^1 \otimes S^2$ y S^3	55
4.3 Análisis de singularidades mediante el escalar de curvatura fijando una de las variables, en los casos $S^1 \otimes S^2$ y S^3	58

Conclusiones	61
Apartado de conceptos matemáticos	63
Referencias	66

RESUMEN

El interés de este trabajo es considerar un cosmos primigenio con anisotropía e inhomogeneidad. El trabajo se enfoca en la propuesta de una métrica con estas condiciones, llamada métrica de Gowdy [3].

Esta métrica consiste en soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein que representan universos cerrados con varias topologías $(S^3, S^1 \otimes S^2, T^3)$ los cuales contienen ondas gravitacionales.

La forma de onda en estas soluciones es plana, pero todas las ondas se propagan a través de una única dirección preferencial y tienen polarización común.

Se escriben las métricas para dos tipos de topología. Finalmente, se encuentran las ecuaciones diferenciales, que gobiernan el movimiento de partículas con masa y sin masa en las topologías S^3 y $S^1 \otimes S^2$ para universos polarizados tipo Gowdy. Se realiza un análisis de las curvas geodésicas.

INTRODUCCIÓN

Para lograr comprender el comportamiento del cosmos, primero se requiere conocer en qué consisten los términos homogéneo e isótropo, sin entrar todavía en el formalismo matemático. En términos muy simples, homogéneo, se refiere a la ausencia de puntos privilegiados y la isotropía se refiere a la ausencia de direcciones privilegiadas; dichos términos, juegan un papel muy importante en el entendimiento de nuestro universo, como veremos a continuación.

Gracias a los datos observacionales, como el estudio de radiación de fondo cósmica, o el estudio de formaciones estelares (supercúmulos, cúmulos de galaxia) obtenidos durante el siglo XX y principios del siglo XXI, se sabe que en el universo no existe demasiado variación en la densidad de materia, ni existe una dirección predominante como un todo. Esto significa que el universo es isótropo a grandes escalas (alrededor de 200 M. Psc). No existe razón para creer que la localización de nuestra galaxia es única y de manera similar no existen pruebas de la existencia de algún eje privilegiado.

El conteo de radio galaxias, cuasares y fuentes de rayos-X testifican la homogeneidad de la distribución de materia en el universo. Dicha homogeneidad (isotropía) inclusive se observa en las reliquias de radiación de fondo provenientes de los inicios del cosmos.

Utilizando los resultados observacionales, se recurre a la modelación matemática de nuestro universo primeramente imponiendo simplificaciones con simetrías homogéneas e isótropas (modelo de Friedmann-Robertson-Walker-Lemaitre), las cuales dan una visión de las condiciones actuales del universo y reducen de manera importante los cálculos en las ecuaciones de Einstein.

El siguiente paso natural para comprender al cosmos recién creado es considerarlo anisotrópico, pero manteniendo la condición de homogeneidad. El término anisotrópico se refiere a aquél que cuenta con direcciones privilegiadas. La forma matemática, mas simple para modelar las condiciones de anisotropía y homogeneidad, es utilizando una clasificación de nueve grupos propuestos por Bianchi, los cuales ordenan las diferentes formas de Anisotropía. Dichos grupos son conocidos con el nombre de los IX Grupos de Bianchi. Realizando un riguroso tratamiento matemático sobre cada grupo de Bianchi en un espacio-tiempo y resolviendo las ecuaciones de Einstein se obtiene una modelación del cosmos bajo dichas simetrías.

Esta tesis hace mención de las propuestas anteriores y se enfocará principalmente en el análisis de la métrica propuesta por Gowdy.

Una de las posibles formas, para tratar de entender el comportamiento del universo en sus principios, Robert H. Gowdy [3] propuso un elemento de línea no homogéneo ni isótropo para una topología hipertoroidal y tres-esferoidal. Dichas métricas contienen funciones que dependen únicamente de una de sus coordenadas y del tiempo (En este caso la coordenada z y del tiempo t).

Cabe mencionar que se pueden obtener métricas generalizadas, a partir de las ya propuestas por Gowdy para sus diferentes topologías. M. Carmeli, Ch. Charach y S. Malin [1] proponen una solución inhomogénea que es interpretada como un espacio homogéneo y en el cual existen ondas gravitacionales viajeras a través de una sola dirección, la única diferencia con el estudio de Gowdy es que introducen un campo escalar.

De igual manera, en el artículo de A. Sánchez, A. Macias y H. Quevedo [5] ejemplifican el método por construcción para un modelo cosmológico de Kantowski-Sachs y una generalización de esta correspondencia a un modelo no polarizado T^3 de Gowdy.

Estas métricas generalizadas, llevan elementos fuera de la diagonal y nos muestran polarizaciones diferentes en las ondas gravitacionales modeladas en estas métricas. Se tiene bien sabido que existen muchos más ejemplos de modelos cosmológicos inhomogéneos y anisotrópicos en los cuales la complejidad matemática tiene otro nivel, pero siempre teniendo en cuenta como base el modelo cosmológico propuesto por Gowdy.

En esta tesis, a partir del modelo propuesto por Gowdy (S^3 y $S^1 \otimes S^2$), se obtienen las ecuaciones de las curvas geodésicas y se comparan dichas ecuaciones entre los diferentes elementos de línea para distintas topologías. De igual manera, se señalan sus diferencias y similitudes para la trayectoria de partículas con masa y sin ella.

Un punto que no se puede dejar pasar en el estudio de los modelos cosmológicos, es el caso de las singularidades; cuyos problemas matemáticos, nos hacen pensar que la teoría propuesta por Einstein es incompleta en esas regiones, tan es así, que generan nuevas propuestas que complementan dicha carencia en las teorías actuales.

Es claro que el estudio de estas cosmologías es de importancia para la física que trata modelos de Gowdy, pues en ella están inmersos temas variados, que van desde ondas gravitacionales, gravitación cuántica, estudio de las singularidades en cosmologías de Gowdy. Y no está demás el recalcar que probablemente, el universo primigenio tenía estas características y que la formación de estructura se atribuye a dichas condiciones.

Tan es así que gracias a la falta de homogeneidad e isotropía en los albores de nuestro universo, la formación de supercúmulos, galaxias, estrellas e inclusive la vida fueran posibles.

CAPÍTULO I

CONCEPTOS BÁSICOS PARA EL ESTUDIO DE LA COSMOLOGÍA

Para un análisis cosmológico completo es necesario recurrir al formalismo matemático. Es por ello que en este capítulo se define matemáticamente, el concepto de Homogeneidad e Isotropía. Para ello primeramente, se requieren de algunos conceptos básicos que entran en el ámbito de la geometría diferencial. Debido a lo extenso que es el campo de la geometría diferencial, se dará por hecho que el lector conoce algunos de los conceptos básicos que aquí se introducen.

1.1. ISOMETRÍAS Y VECTORES DE KILLING

En el caso de la cosmología, las simetrías que nos interesarán son las simetrías de la métrica g o **isometrías**, esto es: el conjunto S de transformaciones (difeomorfismo)

$$S = \{\varphi: M \rightarrow M \ni \varphi^*(g) = g\}. \quad (1.1.1)$$

O bien, si X_A , $A=1, \dots, r$ son los generadores infinitesimales de S

$$\mathfrak{L}_{X_A} g = 0. \quad (1.1.2)$$

La cual se escribe, en unas coordenadas cualesquiera x^a y abusando de la notación

$$\mathfrak{L}_{X_A} g_{ab} = 0. \quad (1.1.3)$$

Se dice entonces que los campos X_A son los vectores de **Killing** (de la métrica g), que generan el grupo de isometrías S de la métrica g , donde \mathfrak{L} denota la derivada de Lie.

1.2 ÁLGEBRA DE LIE

Es un espacio vectorial generado por los vectores de Killing X_A , $A = 1, \dots, r$ junto con el paréntesis de Lie: $[X_A, X_B] = C_{AB}^M X_M$ donde C_{AB}^M son las llamadas constantes de estructura [10].

Si X es un vector de Killing, entonces se tiene que para cualquier sistema de coordenadas:

$$\mathfrak{S}_X g_{ab} = 0 \Rightarrow X_{a;b} + X_{b;a} = 0. \quad (1.2.1)$$

Donde el punto y coma representan la derivada covariante. La ecuación anterior recibe el nombre de ecuación de Killing. Recordemos que para un sistema de coordenadas en particulares los vectores de Killing son tales que $X = \partial_i$ por tanto las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

$$\mathfrak{S}_X g_{ab} = \partial_i g_{ab} = 0. \quad (1.2.2)$$

Esto es la isometría generada por X , implica que la métrica no depende de la coordenada x^i .

1.3 HOMOGENEIDAD, ISOTROPÍA Y ECUACIÓN DE EINSTEIN

Espacio-tiempo espacialmente homogéneo:

Un espacio-tiempo se dice que es espacialmente homogéneo si existe una familia uniparamétrica de hipersuperficies (3-dimensionales) [2], que denotaremos (Σ_t) , de tipo espacio foliando el espacio-tiempo, de modo que para dos puntos cualesquiera sobre una misma hipersuperficie $p, q \in \Sigma_t$, existe una isometría φ tal que $\varphi(p) = q$. Como hay tres direcciones espaciales independientes, las isometrías que implementan la homogeneidad estarán generadas por vectores de Killing linealmente independientes.

Espacio-tiempo espacialmente isótropo:

Se dice que un espacio-tiempo es espacialmente isótropo, si existe una familia de curvas de tipo tiempo, que no se cortan y que llenan todo M^4 , cuyo vector velocidad en cada punto u y tal que, dado un punto cualquiera $p \in M$ y dos vectores unitarios cualesquiera de tipo espacio $v_1, v_2 \in T_p M$ y ortogonales a $u \in T_p M$, existe una isometría φ tal que: $\varphi(p) = p$ $\varphi^*(u) = u$ y $\varphi^*(v_1) = v_2$. Como podemos rotar alrededor de tres direcciones espaciales independientes, se sigue que las isometrías que implementan la isotropía estarán generadas por tres vectores de Killing linealmente independientes.

Ecuación de Einstein

La Relatividad General, en esencia esta conformada por 10 ecuaciones diferenciales acopladas, la cual rige la física de los sistemas gravitacionales [4].

Primeramente, para trabajar con la relatividad general, es necesario introducir un espacio tiempo mediante la ecuación matemática llamada tensor métrico, que viene dada de la forma:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a \otimes dx^b . \quad (1.3.1)$$

Sin embargo como ya habíamos mencionado. la parte esencial de esta teoría, viene dada por la ecuación de Einstein, la cual toma la forma:

$$G_{ab} = kT_{ab} . \quad (1.3.2)$$

La cual nos hace notar, que la materia (lado derecho de la ecuación 1.3.2), deforma el espacio tiempo a su alrededor (lado izquierdo de la ecuación 1.3.2).

Sin embargo la idea consiste en que sea compatible con la naturaleza y que produzca resultados físicamente aceptables.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE COSMOLOGÍAS HOMOGÉNEAS E ISOTRÓPICAS Y COSMOLOGÍAS HOMOGÉNEAS Y ANISOTRÓPICAS

En las secciones 2.1 y 2.2 de este capítulo, se revisarán la cosmología de Friedmann-Robertson-Walker-Lemaitre (FRWL) [2] y los nueve grupos de Bianchi. Se observa que en la cosmología propuesta por Friedmann-Robertson-Walker-Lemaitre se hacen consideraciones de un universo homogéneo e isotrópico. También se encuentran las soluciones correspondientes para la métrica de (FRWL) y un análisis para un universo con curvatura plana.

En la sección 2.2, se considerará la forma de la métrica $ds^2 = -dt^2 + g_{ij}(t)dx^i dy^j$ sobre los nueve grupos de Bianchi, que corresponden a un universo en condiciones de homogeneidad y anisotropía. Se mencionarán sus vectores de Killing, sus constantes de estructura, su base, así como su base dual para cada uno de los nueve grupos.

2.1 COSMOLOGÍA DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER-LEMAITRE. (COSMOLOGÍAS HOMOGÉNEAS E ISÓTROPAS)

Definición de Modelo Cosmológico:

Un modelo cosmológico es cualquier espacio-tiempo que contiene materia [13] en todos sus puntos, que se está expandiendo en alguna región durante algún período de tiempo y que explica la mayor cantidad de evidencias experimentales

Cosmología de Friedmann-Robertson-Walker-Lemaitre (FRWL)

Considérese un modelo de Universo isotrópico y homogéneo a gran escala (principio cosmológico), y que se expande continuamente con un factor de escala $R(t)$ [11]. Debido a las simetrías de Homogeneidad e Isotropía, podemos obtener un conjunto de vectores de Killing:

Escribamos en coordenadas esféricas:

$$x^0 = t, \quad x^1 = r \cos(\theta) \cos(\phi), \quad x^2 = r \cos(\theta) \sin(\phi), \quad x^3 = r \sin(\theta).$$

De tal manera, que los vectores de Killing vienen de la forma:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \left[\left(1 - \frac{k}{4} r^2\right) \delta_1^0 + \frac{k}{2} x^0 x^1 \right] \partial_0, & \xi_2 &= \left[\left(1 - \frac{k}{4} r^2\right) \delta_2^0 + \frac{k}{2} x^0 x^2 \right] \partial_0, \\ \xi_3 &= \left[\left(1 - \frac{k}{4} r^2\right) \delta_3^0 + \frac{k}{2} x^0 x^3 \right] \partial_0, & & \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$$\xi_4 = x^3 \partial_2 - x^2 \partial_3,$$

$$\xi_5 = x^1 \partial_3 - x^3 \partial_1$$

$$\xi_6 = x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2$$

Donde los primeros tres implementan la homogeneidad y los tres últimos la isotropía

Bajo esas condiciones, la métrica del espacio tiempo en coordenadas esféricas, se escribe como:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2.1.2)$$

Donde el escalar de curvatura toma los valores de -1, 0, +1 para un universo con geometría hiperbólica, euclídea y esférica respectivamente, (Ver figuras).

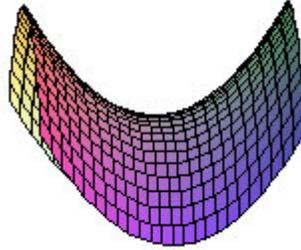


Figura (1) Geometría hiperbólica. K=-1

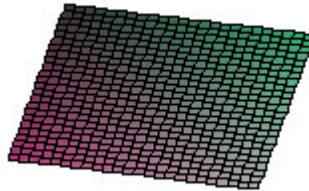


Figura (2) Geometría Plana o Euclídea. K=0

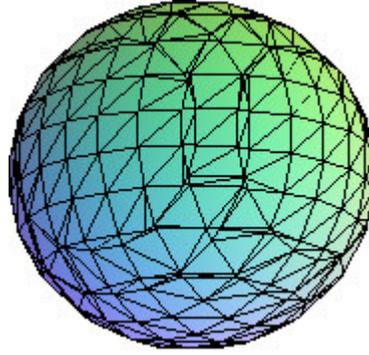


Figura (3) Esférica. K=1

Considérese también el caso más simple de distribución de la materia en el Universo, donde las partículas (supercúmulos de galaxias) se encuentran en el espacio tiempo generando un haz de geodésicas divergentes desde un punto en el pasado finito o en la distancia, si aceptamos el postulado de Weyl (Weyl H.1923) entonces puede asumirse que el tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$ de las partículas, se puede modelar como el de un fluido perfecto con presión P y densidad ρ , esto es:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}. \quad (2.1.3)$$

Donde u^α es la velocidad de las partículas, P y ρ la presión y la densidad respectivamente y $g^{\mu\nu}$ el tensor métrico contravariante. Adicionalmente la isotropía demanda que $T^{\mu\nu}$ sea diagonal.

Bajo tales consideraciones, las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein están dadas por:

$$\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right)^2 + \frac{kc^2}{R^2(t)} = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (2.1.4)$$

$$\frac{2\ddot{R}(t)}{R(t)} + \left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right)^2 + \frac{kc^2}{R^2(t)} = -\frac{8\pi G}{c^2}P. \quad (2.1.5)$$

El análisis observacional actual nos dice que el universo tiene una curvatura la cual, prácticamente es plana ($k = 0$). Sin embargo, eso no excluye las otras posibilidades. Como únicamente se está haciendo un breve análisis, únicamente trabajaremos con el caso plano. De esto tendríamos que las ecuaciones (2.1.4) y (2.1.5) se reducirían a:

$$\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho. \quad (2.1.6)$$

$$\frac{2\ddot{R}(t)}{R(t)} + \left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right)^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} P. \quad (2.1.7)$$

A partir de las ecuaciones anteriores podemos obtener que la densidad crítica del Universo, con geometría plana esta dada por:

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.1.8)$$

Donde H_0 es la llamada constante de Hubble y se determina de manera observacional. El conocimiento de dicha constante es de vital importancia para el conocimiento de la densidad crítica y la edad del cosmos. La ecuación asociada a la constante de Hubble está dada por:

$$H_0 = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)}. \quad (2.1.9)$$

De igual manera, a partir de las ecuaciones (2.1.5) y (2.1.6), podemos obtener el factor de escala del universo a cualquier intervalo de tiempo t . La ecuación (2.1.9) nos da una posible idea del factor de escala actual del universo.

$$R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.1.10)$$

La ecuación (2.1.10) es para constante cosmológica y hace mención de la posible edad del Universo. Nótese que para el cálculo de la edad del universo es necesario el conocimiento experimental de la constante de Hubble.

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}. \quad (2.1.11)$$

Estudios más recientes han observado, que el cosmos no únicamente se expande, sino que además se está acelerando, incluso se propone la existencia de la llamada materia y energía oscura, con las cuales es posible que alteren el resultado observacional de la constante de Hubble. Estas y muchas más predicciones impresionantes no están contenidas en la información matemática que contiene la métrica de FRWL.

Es difícil tratar de explicar muchos de los fenómenos que actualmente se conocen, sin embargo se han hecho grandes avances tratando de darles una explicación física basados en las matemáticas.

Hablar hoy en día de una edad o una densidad crítica del universo pareciera ser una conclusión muy apresurada, pues debido a la existencia de materia exótica y extraños comportamientos cosmológicos es que no se puede dar una última conclusión.

2.2 GRUPOS DE BIANCHI EN COSMOLOGÍA (COSMOLOGÍAS HOMOGÉNEAS E ANISOTRÓPICAS)

Para el análisis del cosmos, es necesario reducir el número de simetrías existentes. Si se reducen simetrías, se pueden estudiar regiones o tiempos del universo, que no son estudiadas por la métrica de FRWL. El siguiente paso natural es considerar nuevamente una simetría homogénea pero ahora pidiendo la condición de que el universo sea anisotrópico. Se puede entender la condición de anisotropía como la existencia de direcciones privilegiadas en las que el cosmos evoluciona.

El tratamiento matemático de la condición de anisotropía está dado bajo nueve grupos llamados "Grupos de Bianchi". En este apartado, se considerarán los nueve grupos de Bianchi, así como sus características particulares de cada uno de ellos.

GRUPOS DE BIANCHI.

Luigi Bianchi trabajó en su famosa "clasificación de Bianchi" [6] en la cual propuso nueve posibles clases de isometrías de los grupos de Lie tridimensionales, sobre variedades Riemannianas

La lista de las nueve clases de isometrías de Bianchi contiene álgebras de Lie, grupos de Lie así como variedades tridimensionales homogéneas (posiblemente anisótropas) de Riemann.

Debido al papel importante que juegan los grupos de Bianchi, en el estudio de la cosmología, se mencionará cada uno de ellos, así como de sus vectores de Killing, base y base dual asociado al grupo, conmutadores entre vectores de Killing, constantes de estructura y una métrica admitida sobre cada uno de los grupos. Teniendo en cuenta, que los grupos de Bianchi se trabajan con condiciones de homogeneidad pero no necesariamente de isotropía.

La métrica NUT Espacio-Tiempo, la cual se propone en la tabla de los grupos de Bianchi sigue la forma evolutiva que se muestra en la figura (4). Empieza siendo un disco, y degenera a una elipsoide, luego a una esfera y finalmente a una estructura parecida a un cigarro, para volver a repetirse el proceso, pero ahora en forma inversa. La forma de la figura, se obtuvo resolviendo las ecuaciones de Einstein para la métrica NUT.

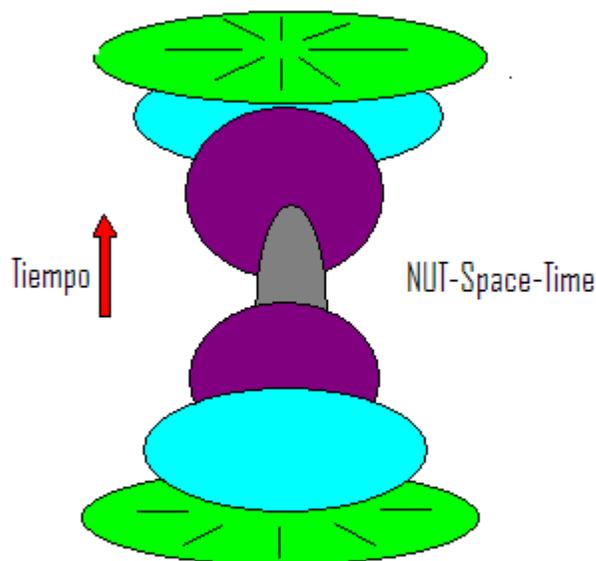


Figura (4)

La forma general de la métrica, para los grupos de Bianchi, viene dada de la siguiente manera:

$$ds^2 = -dt^2 + C_{ij}(t)dx^i dx^j . \quad (2.2.1)$$

OBSERVACIÓN:

El cálculo de las constantes de estructura así como la forma de conmutación entre los vectores de Killing asociados a cada grupo es obtenido mediante las ecuaciones 2.2.1 y 2.2.2.

$$C_{bc}^d = \varepsilon_{bcf} N^{df} + 2\delta_{[c}^d A_{b]} . \quad (2.2.1)$$

$$[\xi_a, \xi_b] = C_{ab}^c \xi_c . \quad (2.2.2)$$

Y $\Omega, \alpha, \beta, \gamma$ son funciones únicamente de t.

TABLA DE LOS IX GRUPOS DE BIANCHI

GRUPO I

Vectores de Killing:

$$\xi_1 = \partial_1 \quad \xi_2 = \partial_2 \quad \xi_3 = \partial_3 \quad (2.2.3)$$

Base y Base Dual.

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_1 & X_2 &= \partial_2 & X_3 &= \partial_3 \\ \omega_1 &= dx^1 & \omega_2 &= dx^2 & \omega_3 &= dx^3 \end{aligned}$$

Conmutadores entre vectores de Killing:

$$[\xi_i, \xi_j] = 0$$

Métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2\Omega} [e^{2\alpha} (dx^1)^2 + e^{2\beta} (dx^2)^2 + e^{2\gamma} (dx^3)^2]$$

Constantes de Estructura:

$$C_{jk}^i = 0$$

GRUPO II

Vectores de Killing:

$$\xi_1 = \partial_2 \quad \xi_2 = \partial_3 \quad \xi_3 = \partial_1 + x^3 \partial_2 \quad (2.2.4)$$

Base y Base Dual.

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_2 & X_2 &= \partial_3 & X_3 &= \partial_1 \\ \omega^1 &= dx^2 - x^1 dx^3 & \omega^2 &= dx^3 & \omega^3 &= dx^1 \end{aligned}$$

Constantes de Estructura:

$$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1 \quad \text{Para todos los otros } i,j,k. C_{jk}^i = 0$$

Conmutadores entre vectores de Killing:

$$[\xi_2, \xi_3] = \xi_1 \quad [\xi_1, \xi_2] = [\xi_1, \xi_3] = 0$$

Métrica :

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2\Omega} [e^{2\alpha} (dx^2 - x^1 dx^3)^2 + e^{2\beta} (dx^3)^2 + e^{2\gamma} (dx^1)^2]$$

GRUPO III

Vectores de Killing:

$$\xi_1 = \partial_2 \quad \xi_2 = \partial_3 \quad \xi_3 = \partial_1 + X^2 \partial_2 \quad (2.2.5)$$

Base y Base Dual.

$$X_1 = e^{x^1} \partial_2 \quad X_2 = \partial_3 \quad X_3 = \partial_3$$

$$\omega^1 = e^{-x^1} dx^2 \quad \omega^2 = dx^3 \quad \omega^3 = dx^1$$

Conmutadores entre vectores de Killing:

$$[\xi_1, \xi_2] = [\xi_2, \xi_3] = [\xi_3, \xi_1] = [\xi_1, \xi_2] = [\xi_2, \xi_1] = [\xi_3, \xi_1] = [\xi_3, \xi_2]$$

$$[\xi_1, \xi_3] = -[\xi_3, \xi_1] = \xi_1$$

Constantes de Estructura:

$$-C_{31}^1 = C_{13}^1 = 1 \quad \text{El resto } C_{jk}^i = 0$$

Métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2\Omega} [e^{2\alpha} (e^{-x^1} dx^2)^2 + e^{2\beta} (dx^3)^2 + e^{2\gamma} (dx^1)^2]$$

GRUPO IV

Vectores de Killing:

$$\xi_1 = \partial_2 \quad \xi_2 = \partial_3 \quad \xi_3 = \partial_1 + (x^2 + x^3) \partial_2 + x^3 \partial_3 \quad (2.2.6)$$

Base y Base Dual.

$$X_1 = e^{x^1} \partial_2 \quad X_2 = x^1 e^{x^1} \partial_2 + e^{x^1} \partial_3 \quad X_3 = \partial_1$$

$$\omega^1 = e^{-x^1} dx^2 - x^1 e^{-x^1} dx^3 \quad \omega^2 = e^{-x^1} dx^3 \quad \omega^3 = dx^1$$

Conmutadores entre vectores de Killing:

$$[\xi_i, \xi_j] = \xi_k = -[\xi_k, \xi_i] \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_1 + \xi_2 = -[\xi_3, \xi_2] \quad \text{El resto } [\xi_i, \xi_j] = 0$$

Constantes de Estructura:

$$C_{13}^1 = -C_{31}^1 = 1 \quad C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1 \quad C_{23}^2 = -C_{32}^2 = 1 \quad \text{El resto } C_{jk}^i = 0$$

Métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2\Omega} [e^{2\alpha} (e^{-x^1} dx^2 - x^1 e^{-x^1} dx^3)^2 + e^{2\beta} (e^{-x^1} dx^3)^2 + e^{2\gamma} (dx^1)^2]$$

GRUPO V

Vectores de Killing:

$$\xi_1 = \partial_2 \quad \xi_2 = \partial_3 \quad \xi_3 = \partial_1 + x^2 \partial_2 + x^3 \partial_3 \quad (2.2.7)$$

Base y Base Dual.

$$X_1 = e^{x^1} \partial_2 \quad X_2 = e^{x^1} \partial_3 \quad X_3 = \partial_1$$

$$\omega^1 = e^{-x^1} dx^2 \quad \omega^2 = e^{-x^1} dx^3 \quad \omega^3 = dx^1$$

Constantes de Estructura:

$$C_{13}^1 = -C_{31}^1 = 1 \quad C_{23}^2 = -C_{32}^2 = 1 \quad \text{El resto de } C_{jk}^i = 0$$

Conmutadores entre vectores de Killing:

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_1 = -[\xi_3, \xi_1] \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_2 = -[\xi_3, \xi_2] \text{ El resto de } [\xi_i, \xi_j] = 0$$

Métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2\Omega} [e^{2\alpha} (e^{-x^1} dx^2)^2 + e^{2\beta} (e^{-x^1} dx^3)^2 + e^{2\gamma} (dx^1)^2]$$

GRUPO VI

Vectores de Killing:

$$\xi_1 = \partial_2 \quad \xi_2 = \partial_3 \quad \xi_3 = \partial_1 + x^2 \partial_2 + hx^3 \partial_3 \quad (2.2.8)$$

Base y Base Dual.

$$X_1 = e^{x^1} \partial_2 \quad X_2 = e^{hx^1} \partial_3 \quad X_3 = \partial_1 \\ \omega^1 = e^{-x^1} dx^2 \quad \omega^2 = e^{-hx^1} dx^3 \quad \omega^3 = dx^1$$

($h \neq 0,1$)

Constantes de Estructura:

$$C_{13}^1 = -C_{31}^1 = 1 \quad C_{23}^2 = -C_{32}^2 = h \text{ El resto de } C_{jk}^i = 0$$

Conmutadores entre vectores de Killing:

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_1 = -[\xi_3, \xi_1] \quad [\xi_2, \xi_3] = h\xi_2 = -[\xi_3, \xi_2] \text{ El resto de } [\xi_i, \xi_j] = 0$$

Métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2\Omega} [e^{2\alpha} (e^{-x^1} dx^2)^2 + e^{2\beta} (e^{-hx^1} dx^3)^2 + e^{2\gamma} (dx^1)^2]$$

GRUPO VII

Para trabajar con este grupo, primero definimos lo siguiente:

$$A = e^{kx^1} \cos ax^1 \quad B = -\frac{1}{a} e^{-kx^1} \operatorname{sen} ax^1 \quad C = e^{-kx^1} \cos ax^1 \quad D = -\frac{1}{a} e^{-kx^1} \operatorname{sen} ax^1$$

Donde:

$$k = \frac{h}{2} \quad a = \frac{1}{4} e^{-kx^1} \operatorname{sen} ax^1 \quad (h^2 < 4)$$

Definamos sus vectores de killing:

$$\xi_1 = \partial_2 \quad \xi_2 = \partial_3 \quad \xi_3 = \partial_1 - x^3 \partial_2 + (x^2 + hx^3) \partial_3 \quad (2.2.9)$$

Base y Base Dual.

$$X_1 = (A + kB) \partial_2 - B \partial_3 \quad X_2 = B \partial_2 + (A - kB) \partial_3 \quad X_3 = \partial_1 \\ \omega^1 = (C - kD) dx^2 - D dx^3 \quad \omega^2 = D dx^2 + (C + kD) dx^3 \quad \omega^3 = dx^1$$

Constantes de Estructura:

$$C_{13}^2 = -C_{31}^2 = 1 \quad C_{23}^1 = -C_{32}^1 = -1 \quad C_{23}^2 = -C_{32}^2 = h \quad \text{El resto de } C_{jk}^i = 0$$

Conmutadores entre vectores de Killing:

$$[\xi_1, \xi_3] = -[\xi_3, \xi_1] = \xi_2 \quad [\xi_2, \xi_3] = -[\xi_3, \xi_2] = -\xi_1 + h\xi_2 \quad \text{El resto de } [\xi_i, \xi_j] = 0$$

Métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2\Omega} \{ e^{2\alpha} [(C - kD) dx^2 - D dx^3]^2 + e^{2\beta} [D dx^2 + (C + kD) dx^3]^2 + e^{2\gamma} (dx^1)^2 \}$$

GRUPO VIII

Vectores de Killing:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}e^{-x^3}\partial_1 + \frac{1}{2}[e^{x^3} + (x^2)^2 e^{-x^3}]\partial_2 - x^2 e^{-x^3}\partial_3, & \xi_2 &= \partial_3 \\ \xi_3 &= \frac{1}{2}e^{-x^3}\partial_1 - \frac{1}{2}[e^{x^3} + (x^2)^2 e^{-x^3}]\partial_2 - x^2 e^{-x^3}\partial_3\end{aligned}\quad (2.2.10)$$

Base y Base Dual.

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{1}{2}[1 + (x^1)^2]\partial_1 + \frac{1}{2}[1 - 2x^1 x^2]\partial_2 - x^1\partial_3, & X_2 &= -x^1\partial_1 + x^2\partial_2 + \partial_3 \\ X_3 &= \frac{1}{2}[1 - (x^1)^2]\partial_1 + \frac{1}{2}[2x^1 x^2 - 1]\partial_2 + x^1\partial_3 \\ \omega^1 &= dx^1 + [1 + (x^1)^2]dx^2 + [x^1 - x^2 - (x^1)^2 x^2]dx^3, & \omega^2 &= 2x^1 dx^2 + (1 - 2x^1 x^2)dx^3 \\ \omega^3 &= dx^1 + [-1 + (x^1)^2]dx^2 + [x^1 + x^2 - (x^1)^2 x^2]dx^3\end{aligned}$$

Constantes de Estructura:

$$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = -1 \quad C_{31}^2 = -C_{13}^2 = 1 \quad C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1 \quad \text{El resto de } C_{jk}^i = 0$$

Conmutadores entre vectores de Killing:

$$[\xi_2, \xi_3] = \xi_1 = -[\xi_3, \xi_2] \quad [\xi_3, \xi_1] = \xi_2 = -[\xi_1, \xi_3] \quad [\xi_1, \xi_2] = \xi_3 = -[\xi_2, \xi_1] \quad \text{El resto de } [\xi_i, \xi_j] = 0$$

Métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2\Omega} \{ e^{2\alpha} [dx^1 + (1 + (x^1)^2)dx^2 + (x^1 - x^2 - (x^1)^2 x^2)dx^3]^2 + e^{2\beta} [2x^1 dx^2 + (1 - 2x^1 x^2)dx^3]^2 + e^{2\gamma} [dx^1 + (-1 + (x^1)^2)dx^2 + (x^1 + x^2 - (x^1)^2 x^2)dx^3]^2 \}$$

GRUPO IX

Vectores de Killing:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \partial_2, & \xi_2 &= -\cos x^2 \partial_1 - \cot x^1 \operatorname{sen} x^2 \partial_2 + \frac{\operatorname{sen} x^2}{\operatorname{sen} x^1} \partial_3 \\ \xi_3 &= -\operatorname{sen} x^2 \partial_1 - \cot x^1 \cos x^2 \partial_2 + \frac{\cos x^2}{\operatorname{sen} x^1} \partial_3\end{aligned}\quad (2.2.11)$$

Base y Base Dual.

$$\begin{aligned}X_1 &= -\operatorname{sen} x^3 \partial_1 + \frac{\cos x^3}{\operatorname{sen} x^1} \partial_2 - \cot x^1 \cos x^3 \partial_3, & X_2 &= \cos x^3 \partial_1 + \frac{\operatorname{sen} x^3}{\operatorname{sen} x^1} \partial_2 - \operatorname{sen} x^3 \cot x^1 \partial_3 \\ X_3 &= \partial_3 \\ \omega^1 &= -\operatorname{sen} x^3 dx^1 + \operatorname{sen} x^1 \cos x^3 dx^2, & \omega^2 &= \cos x^3 dx^1 + \operatorname{sen} x^1 \operatorname{sen} x^3 dx^2 \\ \omega^3 &= \cos x^1 dx^2 + dx^3\end{aligned}$$

Constantes de Estructura:

$$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1 \quad C_{31}^2 = -C_{13}^2 = 1 \quad C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1 \quad \text{El resto de } C_{jk}^i = 0$$

Conmutadores entre vectores de Killing:

$$[\xi_2, \xi_3] = \xi_1 = -[\xi_3, \xi_2] \quad [\xi_3, \xi_1] = \xi_2 = -[\xi_1, \xi_3] \quad [\xi_1, \xi_2] = \xi_3 = -[\xi_2, \xi_1] \quad \text{El resto de } [\xi_i, \xi_j] = 0$$

Métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2\Omega} [e^{2\alpha} (-\operatorname{sen} x^3 dx^1 + \operatorname{sen} x^1 \cos x^3 dx^2)^2 + e^{2\beta} (\cos x^3 dx^1 + \operatorname{sen} x^1 \operatorname{sen} x^3 dx^2)^2 + e^{2\gamma} (\cos x^1 dx^2 + dx^3)^2]$$

En la lista anterior se utiliza la clasificación y la notación dada por Taub [4]. La representación de coordenadas es listada para cada forma diferencial. Si una región es espacialmente homogénea y tiene un grupo de Bianchi Tipo N ($N=I, \dots, IX$) se le dice que es un "Tipo N- Homogéneo

Teniendo como base estos grupos, se cuenta con la capacidad de construir modelos cosmológicos predictivos que den una importante aproximación de lo que sucedería en una expansión no isótropa.

CAPÍTULO III

COSMOLOGÍAS INHOMOGÉNEAS Y ANISÓTROPAS (COSMOLOGÍAS DE GOWDY)

Después de un análisis breve de las cosmologías con homogeneidad e isotropía y cosmologías con homogeneidad e anisotropía, se hará un análisis más profundo del comportamiento de un universo el cual contiene una estructura de inhomogeneidad e anisotropía, es decir, se reducirán la cantidad de simetrías existentes a comparación de los otros dos modelos cosmológicos; dichas cosmologías son conocidas con el nombre de cosmologías de Gowdy [11]

No está de más recordar que el interés primordial del estudio de dichas cosmologías se debe, en que se piensa que en los inicios de nuestro cosmos, éste no tenía un comportamiento homogéneo e isótropo como lo tiene ahora. Ya que gracias a las características de inhomogeneidad e anisotropía hay existencia de estructura (i.e. galaxias, estrellas, nebulosas, planetas,) las cuales son observadas diariamente. Cabe mencionar, que existen modelos inflacionarios, los cuales nos proponen las características que debe tener nuestro universo y se ajustan muy bien con los datos observacionales.

Un espacio- tiempo con las simetrías mencionadas, se acopla a un tensor energía momento mediante las ecuaciones de Einstein. Así pues, en este capítulo estudiaremos un modelo cosmológico cuyo elemento de línea depende del tiempo y de una de las coordenadas espaciales.

3.1 ELEMENTOS DE LINEA PARA UNIVERSOS TIPO GOWDY

Elementos de línea de Gowdy con ondas Gravitacionales Polarizadas

Gowdy construyó soluciones exactas en el vacío de las ecuaciones de campo de Einstein; las cuales representan un universo cerrado e inhomogéneo [12]. La irregularidad de este universo es causado por ondas gravitacionales a lo largo de la dirección z (Donde z es una de las tres direcciones espaciales). El requerimiento de estas hipersuperficies es ser compacto en adición a los límites de invarianza de G_2 de las posibles topologías de la sección espacial en los siguientes tres casos:

1. $T^1 \otimes T^1 \otimes T^1$. Topología Tres-Toroidal
2. $S^1 \otimes S^2$. Topología Hipertoroidal
3. $S^1 \otimes S^1 \otimes S^1$. Topología Tres-Espacial

Sea G una función, que defina cada una de las diferentes geometrías a las que trataremos.

El modelo con topología tres-toroidal, está determinado al escoger la función

$$G = t . \quad (3.1.1)$$

Mientras los modelos tres-esferoidal e hipertoroidal, están determinados por

$$G = \text{sen}(z)\text{sen}(t) . \quad (3.1.2)$$

Con $0 \leq z \leq \pi$, $0 \leq t \leq \pi$.

Gowdy mostró que la única singularidad ocurría en la gran explosión a $t=0$, para el caso del tres-toro y éste continuaba con una expansión infinita; mientras que para el universo hipertoroidal y tres-esferoidal, inician en la singularidad del gran explosión $t=0$, luego se expanden a algún volumen máximo y colapsan a una singularidad final.

El elemento de línea en general, para un modelo de anisotropía e inhomogeneidad, esta dado por:

$$ds^2 = L^2 \left[e^{2a} (dz^2 - dt^2) + R(B^{-1} e^{2w} dy^2 + B e^{-2w} dx^2) \right]. \quad (3.1.3)$$

Donde R y B son funciones en general, que se adaptan a la métrica y tanto a como w se mencionarán más adelante.

Gracias a la métrica en general propuesta en la ecuación (3.1.3), podemos dar métricas en particular para las dos topologías estudiadas en este trabajo.

El elemento de línea para una topología $S^1 \otimes S^2$ está dado por:

$$ds^2 = L^2 \text{sen}^2 t \left[e^{2(\gamma-w)} (dz^2 - dt^2) + e^{-2w} \text{sen}^2 z dx^2 \right] + L^2 e^{2w} dy^2. \quad (3.1.4)$$

Y para una topología tipo S^3 (esfera) está dada por:

$$ds^2 = \frac{1}{2} L^2 \text{sent} \left[e^{2\gamma} (dz^2 - dt^2) + 4e^{2w} \cos^2 \frac{z}{2} dy^2 + 4e^{-2w} \text{sen}^2 \frac{z}{2} dx^2 \right]. \quad (3.1.5)$$

Donde γ y w , son funciones de z y del tiempo y vienen relacionadas con la función la cual está mostrada en la ecuación (3.1.3) y de igual manera es función de a y de t . Luego entonces γ , w y a están relacionadas por:

$$\gamma = a + w - \ln(\text{sent}). \quad (3.1.6)$$

$$\gamma = a - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{2} \text{sent} \right). \quad (3.1.7)$$

Donde (3.1.6) corresponde al elemento de línea para (3.1.4) y (3.1.7) para el elemento de línea de (3.1.5).

$$w = \sum_i [A_i P_i(\cos t) + C_i Q_i(\cos t)] P_i(\cos z). \quad (3.1.8)$$

En la ecuación (3.1.8), P_i, Q_i son funciones de Legendre de primero y segundo orden respectivamente, A_i y C_i son coeficientes constantes los cuales están restringidos por condiciones correspondientes de regularidad sobre la métrica a $z = 0$ y $z = \pi$. Un caso particular de la métrica contiene uno de los modelos de Kantowski-Sachs [2].

El objetivo siguiente es nombrar las métricas de Gowdy para el caso no polarizado. En si, las métricas tienen el mismo principio, sin embargo su dificultad matemática aumenta. Así pues mencionaremos los elementos de línea no polarizada para las mismas topologías que mencionamos párrafos más arriba.

Forma General, de los elementos de línea de Gowdy con ondas Gravitacionales no Polarizadas

Los elementos de línea con ondas gravitacionales no polarizadas, en cosmologías de Gowdy [3] son no diagonales, en comparación con las polarizadas. El estudio para estos casos el cual no contiene ondas gravitacionales polarizadas, será breve y solo se mencionan aspectos importantes para dichos casos

El elemento de línea para el espacio $S^1 \otimes S^2$ está dado por:

$$ds^2 = -e^{-\frac{\gamma+3t}{2}} dt^2 + e^{-\frac{\gamma-t}{2}} dz^2 + h_1(t)h_2(z) \left[e^p (dx + Qdy)^2 + e^{-p} dy^2 \right]. \quad (3.1.9)$$

Donde $\gamma = \gamma(t, z)$, es una función únicamente de t y z . Los polinomios de Legendre P y Q de Primero y segundo orden respectivamente, dependen únicamente de: $P = P(t, z)$, $Q = Q(t, z)$ y donde $h_1(t) = e^{-t}$, $h_2(z) = 1$ vienen dadas con esas características para la topología T^3 .

El elemento de línea para el espacio $S^1 \otimes S^2$ viene dado por:

$$ds^2 = -e^{-\frac{\gamma+3t}{2}} dt^2 + e^{-\frac{\gamma-t}{2}} dz^2 + h_1(t)h_2(z) \left[e^p (dx + Qdy)^2 + e^{-p} dy^2 \right]. \quad (3.1.10)$$

Donde $\gamma = \gamma(t, z)$, es una función únicamente de t y z . Los polinomios de Legendre P y Q de primero y segundo orden respectivamente, dependen únicamente de: $P = P(t, z)$, $Q = Q(t, z)$ y $h_1(t) = \text{sen}(e^{-t})$, $h_2(z) = \text{sen}(z)$ vienen dadas con esas características para la topología $S^1 \otimes S^2$.

Las ecuaciones no polarizadas, se reducen a las polarizadas, únicamente tomando $Q = 0$, puesto que esto nos da elementos en la diagonal. Las ecuaciones anteriores, pueden ser obtenidas a partir de la ecuación 3.1.3.

3.2 ECUACIONES GEODÉSICAS PARA LAS TOPOLOGÍAS $S^1 \otimes S^2$ Y S^3

Primeramente, para hacer el análisis matemático de los elementos de línea para las cosmologías de Gowdy, es necesario tener en cuenta, las ecuaciones correspondientes a los símbolos de Christoffel y a las curvas geodésicas.

Las ecuaciones geodésicas son importantes puesto que indican las trayectorias que siguen las partículas a través de un espacio tiempo no necesariamente plano.

Curvas geodésicas para elementos de línea de Gowdy

Topología tipo $S^1 \otimes S^2$

El elemento de línea de dicha topología para la cosmología de Gowdy viene dado por:

$$ds^2 = L^2 \operatorname{sen}^2 t \left[e^{2(\gamma-w)} (dz^2 - dt^2) + e^{-2w} \operatorname{sen}^2 z dx^2 \right] + L^2 e^{2w} dy^2. \quad (3.2.1)$$

Donde el tensor métrico covariante está dado por:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} -L^2 \operatorname{sen}^2 t e^{2(\gamma-w)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 e^{-2w} \operatorname{sen}^2 t \operatorname{sen}^2 z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 e^{2w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^2 \operatorname{sen}^2 t e^{2(\gamma-w)} \end{bmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Mediante el inciso (g) del apartado, podemos calcular los símbolos de Christoffel asociados a la métrica, los cuales son:

$$\Gamma_{11}^1 = \operatorname{ctg}(t) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t}.$$

$$\Gamma_{14}^1 = \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}.$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{\operatorname{sen}^2(z) \left[-\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \operatorname{cot}(t) \right]}{e^{2\gamma}}.$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{e^{2w} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)}{\operatorname{sen}^2(t) e^{2(\gamma-w)}}.$$

$$\Gamma_{44}^1 = \operatorname{cot}(t) + \frac{\partial}{\partial t} (\gamma - w).$$

$$\Gamma_{12}^2 = \operatorname{cot}(t) - \frac{\partial w}{\partial t}.$$

$$\Gamma_{24}^2 = \operatorname{cot}(z) - \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3.2.3)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

$$\Gamma_{34}^3 = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

$$\Gamma_{11}^4 = \frac{\partial}{\partial z}(\gamma - w).$$

$$\Gamma_{14}^4 = \text{ctg}(t) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t}.$$

$$\Gamma_{22}^4 = \frac{\text{sen}^2(z) \left(-\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \text{cot}(z) \right)}{e^{2\gamma}}.$$

$$\Gamma_{33}^4 = -\frac{e^{2w} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)}{\text{sen}^2(t) e^{2(\gamma-w)}}.$$

$$\Gamma_{44}^4 = \frac{\partial}{\partial z}(\gamma - w).$$

Recordemos que la primera o segunda derivada con respecto a τ de cualquiera de las variables, las denotaremos por: $\dot{\alpha}$ ó $\ddot{\alpha}$ respectivamente donde: $\alpha = t, x, y, z$

Ahora, usando la ecuación de las geodésicas:

$$\frac{d^2 x^r}{d\tau^2} + \Gamma_{pq}^r \frac{dx^p}{d\tau} \frac{dx^q}{d\tau} = 0.$$

Podemos obtener las ecuaciones de las geodésicas para esta métrica, las cuales están dadas por:

$$\ddot{t} + \left(ctg(t) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t} \right) (\dot{t} + \dot{z}) + 2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dot{t} \dot{z} - \frac{sen^2(z) \left(\frac{\partial w}{\partial t} - cot(t) \right) \dot{x}^2}{e^{2\gamma}} - \frac{\frac{\partial w}{\partial t} e^{2w} \dot{y}^2}{sen^2(t) e^{2(\gamma-w)}} = 0.$$

$$\ddot{x} - 2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} - ctg(t) \right) \dot{t} \dot{x} - 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} - ctg(z) \right) \dot{x} \dot{z} = 0. \quad (3.2.4)$$

$$\ddot{y} + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \dot{t} \dot{y} + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \dot{t} \dot{z} = 0.$$

$$\ddot{z} + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) (\dot{t} + \dot{z}) + 2 \left(ctg(t) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t} \right) \dot{t} \dot{z} + \frac{sen^2(z) \left(\frac{\partial w}{\partial z} - cot(z) \right) \dot{x}^2}{e^{2\gamma}} - \frac{e^{2w} \frac{\partial w}{\partial z} \dot{y}^2}{sen^2(t) e^{2(\gamma-w)}} = 0.$$

Topología tipo S^3

El elemento de línea de dicha topología para la cosmología de Gowdy viene dado por:

$$ds^2 = \frac{1}{2} L^2 sen t \left[e^{2\gamma} (dz^2 - dt^2) + 4e^{2w} \cos^2 \frac{z}{2} dy^2 + 4e^{-2w} \sin^2 \frac{z}{2} dx^2 \right]. \quad (3.2.5)$$

donde el tensor métrico covariante está dado por:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} L^2 e^{2\gamma} sen(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2L^2 e^{-2w} sen^2\left(\frac{z}{2}\right) sen(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2L^2 e^{2w} sen(t) \cos^2\left(\frac{z}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} L^2 e^{2\gamma} sen(t) \end{bmatrix}. \quad (3.2.6)$$

Mediante el inciso (g) del apéndice, podemos calcular los símbolos de Christoffel asociados a la métrica, los cuales son:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(t) + \frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

$$\Gamma_{14}^1 = \frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

$$\Gamma_{22}^1 = - \frac{2e^{-2w} \operatorname{sen}^2 \frac{z}{2} \left(-\operatorname{cot}(t) + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \right)}{e^{2\gamma}}.$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{2e^{2w} \operatorname{cos}^2 \frac{z}{2} \left(\operatorname{cot}(t) + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \right)}{e^{2\gamma}}.$$

$$\Gamma_{44}^1 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(t) + \frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(t) - \frac{\partial w}{\partial t}.$$

$$\Gamma_{24}^2 = -\frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial w}{\partial z} - \operatorname{cot} \left(\frac{z}{2} \right) \right]. \quad (3.2.7)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(t) + \frac{\partial w}{\partial t}.$$

$$\Gamma_{34}^3 = -\frac{1}{2} \left[-2 \frac{\partial w}{\partial z} + \tan \left(\frac{z}{2} \right) \right].$$

$$\Gamma_{11}^4 = \frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

$$\Gamma_{14}^4 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(t) + \frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

$$\Gamma_{22}^4 = \frac{2e^{-2w} \operatorname{sen}^2 \frac{z}{2} \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \cot \frac{z}{2} \right)}{e^{2\gamma}}.$$

$$\Gamma_{33}^4 = \frac{2e^{2w} \cos^2 \frac{z}{2} \left(-2 \frac{\partial w}{\partial z} + \tan \frac{z}{2} \right)}{e^{2\gamma}}.$$

$$\Gamma_{44}^4 = \frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

Ahora, usando el inciso (h) del apéndice, podemos obtener las ecuaciones de las geodésicas para esta métrica las cuales están dadas por:

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \dot{t}^2 + \dot{z}^2 + \left(\operatorname{ctg}(t) + 2 \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \dot{t} \dot{z} + \frac{2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{z}{2} \right) \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \cot \left(\frac{z}{2} \right) \right) \dot{x}^2}{e^{2(\gamma+w)}} + \\ \frac{2 \cos^2 \left(\frac{z}{2} \right) \left[-2 \frac{\partial w}{\partial z} + \tan \left(\frac{z}{2} \right) \right] \dot{y}^2}{e^{2(\gamma-w)}} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{t} + \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg}(t) + 2 \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \dot{t}^2 + \dot{z}^2 + 2 \frac{\partial \gamma}{\partial z} \dot{t} \dot{z} - \frac{2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{z}{2} \right) \left(-\cot(t) + 2 \frac{\partial w}{\partial t} \right) \dot{x}^2}{e^{2(\gamma+w)}} \\ + \frac{2 \cos^2 \left(\frac{z}{2} \right) \left(\cot(t) + 2 \frac{\partial w}{\partial t} \right) \dot{y}^2}{e^{2(\gamma-w)}} = 0. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$\ddot{x} - \left(-ctg(t) + 2 \frac{\partial w}{\partial t} \right) \dot{x} + \left[2 \frac{\partial w}{\partial z} - \cot\left(\frac{z}{2}\right) \right] \dot{x} \dot{z} = 0.$$

$$\ddot{y} + \left(ctg(t) + 2 \frac{\partial w}{\partial t} \right) \dot{y} - \left[-2 \frac{\partial w}{\partial z} + \tan\left(\frac{z}{2}\right) \right] \dot{y} \dot{z} = 0.$$

3.3. VECTORES DE KILLING Y CONSTANTES DE MOVIMIENTO ASOCIADAS

Los vectores de Killing se refieren a las simetrías que contienen el espacio - tiempo y corresponden a las coordenadas cíclicas en el elemento de línea.

Como se puede observar en 2.1.1. la cosmología de FRWL contiene seis vectores de Killing y los espacios de Bianchi contienen tres vectores de Killing los cuales corresponden a sus coordenadas cíclicas respectivamente.

Por otra parte, se está tratando con métricas no homogéneas ni isótropas de tal manera que existen pocas simetrías dentro de los elementos de línea. Dado que g_{ij} no depende de dos coordenadas, cada una de las cuatro métricas propuestas en esta tesis, contiene por lo menos, dos vectores de Killing asociados. Para obtener los vectores de Killing, es necesario recurrir a la ecuación 1.2.1 la cual es conocida como ecuación de Killing.

La resolución de dicha ecuación, en algunos casos se torna muy compleja; es por ello que muchas veces se recurre a argumentos físicos, de tal manera que podemos deducir algunos de los vectores de Killing correspondientes a la métrica.

Ahora bien, a cada vector de Killing, le corresponde una simetría del espacio tiempo, y a cada simetría le corresponden cantidades conservadas. Así pues, se pueden obtener unas primeras integrales de movimiento para cada uno de los elementos de línea.

El paso importante para esto es más que nada, la integración de las constantes de movimiento y así con ellas la obtención de: $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$, $t(\tau)$; es decir las variables dependientes del parámetro τ y mediante éstas, la posibilidad de generar gráficas de las geodésicas para este tipo de cosmologías.

Topología tipo $S^1 \otimes S^2$

Recordemos que la métrica viene dada por:

$$ds^2 = L^2 \text{sen}^2 t [e^{2(\gamma-w)} (dz^2 - dt^2) + e^{-2w} \text{sen}^2 z dx^2] + L^2 e^{2w} dy^2 \quad (3.3.1)$$

Como las variables, no dependen de x ni de y. Los vectores de Killing asociados vienen dados por:

$$\xi_1 = \partial_x \text{ y } \xi_2 = \partial_y \quad (3.3.2)$$

Ahora, teniendo en cuenta las simetrías existentes. Las constantes de movimiento para la Topología $S^1 \otimes S^2$ están dadas por:

$$k_1 = g_{xx} \dot{x} + g_{xy} \dot{y} \quad (3.3.3)$$

$$k_2 = g_{yy} \dot{y} + g_{xy} \dot{x} \quad (3.3.4)$$

Donde k_1 y k_2 están asociadas a cantidades conservadas de las partículas de prueba que se mueven el espacio - tiempo; es decir, los momento P_x y P_y son las cantidades conservadas asociadas a dichas constantes respectivamente.

Es claro que mediante las ecuaciones 3.3.3, 3.3.4 y el elemento de línea dado por la ecuación 3.3.1 es:

$$k_1 = L^2 \text{sen}(t) e^{-2w} \text{sen}^2(z) \dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{k_1 e^{2w}}{L^2 \text{sen}^2(t) \text{sen}^2(z)} \quad (3.3.5)$$

$$k_2 = L^2 e^{2w} \dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{k_2}{L^2 e^{2w}} \quad (3.3.6)$$

Las cuales son las primeras dos integrales de movimiento. Ahora necesitamos las otras dos.

Por otra parte, dividiendo la ecuación 3.3.1 entre $d\tau^2$ tenemos:

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = L^2 \text{sen}^2(t) \left[e^{2(\gamma-w)} \left(\frac{\dot{z}^2}{z} - \dot{t}^2 \right) + e^{-2w} \text{sen}^2(z) \dot{x}^2 \right] + L^2 e^{2w} \dot{y}^2 \quad (3.3.7)$$

Haciendo uso de las ecuaciones 3.3.5, 3.3.6 y 3.3.7 más un poco de trabajo algebraico, tenemos:

$$C = L^2 \text{sen}^2(t) e^{2(\gamma-w)} \left(\frac{\dot{z}^2}{z} - \dot{t}^2 \right) + \frac{k_1^2 e^{2w}}{L^2 \text{sen}^2(t) \text{sen}^2(z)} + \frac{k_2^2}{L^2 e^{2w}} \quad (3.3.8)$$

Donde C un invariante dado por:

$$C = \begin{cases} 0, (\text{fotón}) \\ -1, (\text{partícula con masa}). \\ 1, (\text{taquión}) \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Ahora bien, necesitamos encontrar ecuaciones diferenciales para z y t ; es por ello que es necesario hacer cálculos entre las ecuaciones 3.3.8 y la primera ecuación de las geodésicas para este caso.

Antes de obtener los resultados recordemos que γ viene dado como la siguiente forma:

$$\gamma = a(t, z) + w - \ln(\text{sen}(t)) \quad (3.3.10)$$

Para t el cálculo final se obtendría de la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{t} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial t} \right] \dot{t} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial z} \right] \dot{z} \dot{t} + \delta(t, z) = 0 \quad (3.3.11)$$

Donde:

$$\delta(t, z) = - \left[\frac{k_1 e^{w-a}}{L^2 \text{sen}(t) \text{sen}(z)} \right]^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} (a+w) - \text{ctg}(t) \right) + \left[\frac{k_2}{L^2 e^{a+w}} \right]^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} (w-a) \right) + \frac{C}{L^2 e^{2a}} \frac{\partial a}{\partial t}$$

Lo mismo para z , podemos escribir su ecuación diferencial partiendo de 3.3.8 y 3.3.11 de las geodésicas de este caso. Y está dada por:

$$\ddot{z} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial z} \right] \dot{z} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial t} \right] \dot{z} \dot{t} + \beta(t, z) = 0 \quad (3.3.12)$$

Donde:

$$\beta(t, z) = \left[\frac{k_1 e^{w-a}}{L^2 \text{sen}(t) \text{sen}(z)} \right]^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} (a+w) - \text{ctg}(z) \right) + \left[\frac{k_2}{L^2 e^{a+w}} \right]^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} (w-a) \right) + \frac{C}{L^2 e^{2a}} \frac{\partial a}{\partial z}$$

Topología tipo S^3

Recordemos que la métrica viene dada por:

$$ds^2 = \frac{1}{2} L^2 \text{sen} t \left[e^{2\gamma} (dz^2 - dt^2) + 4e^{2w} \cos^2 \frac{z}{2} dy^2 + 4e^{-2w} \sin^2 \frac{z}{2} dx^2 \right] \quad (3.3.13)$$

Como las variables no dependen de x ni de y . Los vectores de Killing asociados vienen dados por:

$$\xi_1 = \partial_x \text{ y } \xi_2 = \partial_y \quad (3.3.14)$$

Ahora, teniendo en cuenta las simetrías existentes. Las constantes de movimiento para la Topología S^3 están dadas por:

$$k_3 = g_{xx} \dot{x} + g_{xy} \dot{y} \quad (3.3.15)$$

$$k_4 = g_{yy} \dot{y} + g_{xy} \dot{x} \quad (3.3.16)$$

Donde k_3 y k_4 están asociadas a cantidades conservadas; es decir, los momento P_x y P_y son las cantidades conservadas asociadas a dichas constantes respectivamente.

Luego es claro que mediante las ecuaciones 3.3.15 ,3.3.16 y el elemento de línea dado por la ecuación 3.3.13 tenemos:

$$k_3 = 2L^2 e^{-2w} \text{sen}^2 \left(\frac{z}{2} \right) \text{sen}(t) \dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{k_3 e^{2w}}{2L^2 \text{sen}^2 \left(\frac{z}{2} \right) \text{sen}(t)} \quad (3.3.17)$$

$$k_4 = 2L^2 e^{2w} \text{sen}(t) \cos^2 \left(\frac{z}{2} \right) \dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{k_4}{2L^2 e^{2w} \text{sen}(t) \cos^2 \left(\frac{z}{2} \right)} \quad (3.3.18)$$

Las cuales son las primeras dos integrales de movimiento. Ahora necesitamos las otras dos.

Por otra parte, dividiendo la ecuación 3.3.13 entre $d\tau^2$ tenemos:

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{1}{2} L^2 \text{sen}(t) \left[e^{2\gamma} \left(\frac{\dot{z}^2}{z} - \dot{t}^2 \right) + 4e^{2w} \cos^2\left(\frac{z}{2}\right) \dot{y}^2 + 4e^{-2w} \text{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right) \dot{x}^2 \right] \quad (3.3.19)$$

Haciendo uso de las ecuaciones 3.3.17, 3.3.18 y 3.3.19 más un poco de trabajo algebraico, tenemos:

$$C = \frac{1}{2} L^2 \text{sen}(t) \left[e^{2\gamma} \left(\frac{\dot{z}^2}{z} - \dot{t}^2 \right) + \frac{k_4^2}{L^4 e^{2w} \text{sen}^2(t) \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)} + \frac{k_3^2 e^{2w}}{L^4 \text{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right) \text{sen}^2(t)} \right] \quad (3.3.20)$$

Donde C es un invariante dado por:

$$C = \begin{cases} 0, (\text{fotón}) \\ -1, (\text{partícula con masa}) \\ 1, (\text{taquión}) \end{cases} \quad (3.3.21)$$

Ahora bien, necesitamos encontrar ecuaciones diferenciales para z y t; es por ello que es necesario hacer cálculos entre las ecuaciones 3.3.20 y la primera ecuación de las geodésicas para este caso. Antes de obtener los resultados recordemos que γ viene dado como la siguiente forma:

$$\gamma = a(t, z) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2} \text{sen}(t)\right) \quad (3.3.22)$$

Para z el cálculo final se obtendría de la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{z} + 2 \left[\frac{\partial}{\partial z} a \right] \dot{z}^2 + 2 \left[\frac{\partial}{\partial t} a \right] \dot{t} \dot{z} + \alpha(t, z) = 0 \quad (3.3.23)$$

Donde:

#

$$\alpha(t, z) = \frac{k_3^2}{2L^4 \operatorname{sen}(t) e^{2(a-w)} \operatorname{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (a-w) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{z}{2}\right) \right] + \frac{k_4^2}{2L^4 \operatorname{sen}(t) e^{2(a+w)} \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (a-w) + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{z}{2}\right) \right] - \frac{C}{L^2 e^{2a}} \left(\frac{\partial a}{\partial z} \right)$$

Para t , podemos escribir su ecuación diferencial partiendo de 3.3.20 y la última ecuación de las geodésicas de este caso. Y está dada por:

$$\ddot{t} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial t} \right] \dot{t} + 2 \frac{\partial a}{\partial z} \dot{t} z + \eta(t, z) = 0 \quad (3.3.24)$$

$$\eta(t, z) = - \frac{k_3^2}{2L^4 \operatorname{sen}(t) e^{2(a-w)} \operatorname{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (a+w) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(t) \right] - \frac{k_4^2}{2L^4 \operatorname{sen}(t) e^{2(a+w)} \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (a-w) - \frac{1}{2} \operatorname{ctgt} \right] - \frac{C}{L^2 e^{2a}} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right)$$

3.4. ECUACIONES PARA LOS CASOS CON MASA Y SIN MASA DE LAS INTEGRALES DE MOVIMIENTO SOBRE LAS MÉTRICAS DE GOWDY

En la sección 3.3 obtuvimos la derivación de las ecuaciones diferenciales de z , t en función de τ . Ahora el siguiente punto, será escribir las ecuaciones de la sección anterior, para los casos con masa y sin masa de ambas topologías.

TOPOLOGÍA TIPO $S^1 \otimes S^2$

PARTÍCULAS SIN MASA

Para las partículas sin masa, tenemos que $C = 0$ como lo señala 3.3.9 es decir, las ecuaciones se ven de la forma:

$$\ddot{t} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial t} \right] \dot{t} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial z} \right] \dot{z} \dot{t} + \delta(t, z) = 0 \quad (3.4.1)$$

Donde:

$$\delta(t, z) = - \left[\frac{k_1 e^{w-a}}{L^2 \text{sen}(t) \text{sen}(z)} \right]^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} (a+w) - \text{ctg}(t) \right) + \left[\frac{k_2}{L^2 e^{a+w}} \right]^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} (w-a) \right)$$

$$\ddot{z} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial z} \right] \dot{z} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial t} \right] \dot{z} \dot{t} + \beta(t, z) = 0 \quad (3.4.2)$$

Donde:

$$\beta(t, z) = \left[\frac{k_1 e^{w-a}}{L^2 \text{sen}(t) \text{sen}(z)} \right]^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} (a+w) - \text{ctg}(z) \right) + \left[\frac{k_2}{L^2 e^{a+w}} \right]^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} (w-a) \right)$$

PARTÍCULAS CON MASA

Para las partículas con masa, tenemos que $C = -1$ como lo señala 3.3.9. Es decir, las ecuaciones se ven de la forma:

$$\ddot{t} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial t} \right] \dot{t} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial z} \right] \dot{z} \dot{t} + \delta(t, z) = 0 \quad (3.4.3)$$

Donde:

$$\delta(t, z) = - \left[\frac{k_1 e^{w-a}}{L^2 \text{sen}(t) \text{sen}(z)} \right]^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} (a+w) - \text{ctg}(t) \right) + \left[\frac{k_2}{L^2 e^{a+w}} \right]^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} (w-a) \right) - \frac{1}{L^2 e^{2a}} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right)$$

$$\ddot{z} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial z} \right] \dot{z} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial t} \right] \dot{z} \dot{t} + \beta(t, z) = 0 \quad (3.4.4)$$

Donde:

$$\beta(t, z) = \left[\frac{k_1 e^{w-a}}{L^2 \text{sen}(t) \text{sen}(z)} \right]^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} (a+w) - \text{ctg}(z) \right) + \left[\frac{k_2}{L^2 e^{a+w}} \right]^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} (w-a) \right) - \frac{1}{L^2 e^{2a}} \left(\frac{\partial a}{\partial z} \right)$$

TOPOLOGÍA TIPO S^3

PARTÍCULAS SIN MASA

Para las partículas sin masa, tenemos que $C = 0$ como lo señala 3.3.21 es decir, las ecuaciones se ven de la forma:

$$\ddot{z} + 2 \left[\frac{\partial}{\partial z} a \right] \dot{z} + 2 \left[\frac{\partial}{\partial t} a \right] \dot{t} \dot{z} + \alpha(t, z) = 0 \quad (3.4.5)$$

Donde:

$$\alpha(t, z) = \frac{k_3^2}{2L^4 \text{sen}(t) e^{2(a-w)} \text{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (a-w) - \frac{1}{2} \text{ctg}\left(\frac{z}{2}\right) \right] + \frac{k_4^2}{2L^4 \text{sen}(t) e^{2(a+w)} \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (a-w) + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{z}{2}\right) \right]$$

$$\ddot{t} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial t} \right] \dot{t} + 2 \frac{\partial a}{\partial z} \dot{t} \dot{z} + \eta(t, z) = 0 \quad (3.4.6)$$

Donde:

$$\eta(t, z) = -\frac{k_3^2}{2L^4 \operatorname{sen}(t)e^{2(a-w)} \operatorname{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (a+w) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(t) \right] - \frac{k_4^2}{2L^4 \operatorname{sen}(t)e^{2(a+w)} \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (a-w) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}t \right]$$

PARTÍCULAS CON MASA

Para las partículas con masa, tenemos que $C = -1$ como lo señala 3.3.9 es decir, las ecuaciones

para \dot{z} y \dot{t} se pueden ver de la forma:

$$\ddot{z} + 2 \left[\frac{\partial}{\partial z} a \right] \dot{z}^2 + 2 \left[\frac{\partial}{\partial t} a \right] \dot{t} \dot{z} + \alpha(t, z) = 0 \quad (3.4.7)$$

Donde:

$$\alpha(t, z) = \frac{k_3^2}{2L^4 \operatorname{sen}(t)e^{2(a-w)} \operatorname{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (a-w) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{z}{2}\right) \right] + \frac{k_4^2}{2L^4 \operatorname{sen}(t)e^{2(a+w)} \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (a-w) + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{z}{2}\right) \right] + \frac{1}{L^2 e^{2a}} \left(\frac{\partial a}{\partial z} \right)$$

$$\ddot{t} + 2 \left[\frac{\partial a}{\partial t} \right] \dot{t}^2 + 2 \frac{\partial a}{\partial z} \dot{t} \dot{z} + \eta(t, z) = 0 \quad (3.4.8)$$

Donde:

$$\eta(t, z) = -\frac{k_3^2}{2L^4 \operatorname{sen}(t)e^{2(a-w)} \operatorname{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (a+w) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(t) \right] - \frac{k_4^2}{2L^4 \operatorname{sen}(t)e^{2(a+w)} \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (a-w) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}t \right] + \frac{1}{L^2 e^{2a}} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right)$$

3.5 SOLUCIONES EXACTAS PARA LOS MODELOS DE GOWDY $S^1 \otimes S^2$ Y S^3

Para poder establecer una solución a las ecuaciones que se muestran en la sección 3.4, es necesario conocer el valor de la función $a(t, z)$ la cual es requerida en las ecuaciones anteriormente escritas. Las soluciones para $a(t, z)$ en ambos tipos de topologías, vienen propuestas en el artículo [14].

Definiendo $O_n = \ln \tan(t/2) - \frac{A_n}{C_n}$ donde A_n y C_n son las constantes que muestra la ecuación

(3.1.8).

Como sabíamos, w viene dada como una sumatoria, más sin embargo, proponemos una solución particular para w de la siguiente manera:

$$w \approx \sum_i^3 w_i = w_0 + w_1 + w_2 \quad (3.5.1)$$

donde:

$$w_0 = -C_0 O_0, \quad w_1 = -C_1 \cos z (\cos t O_1 + 1).$$

$$w_2 = -\frac{C_2}{4} (3 \cos^2 z - 1) [(3 \cos^2 t - 1) O_2 + 3 \cos t]$$

Para el caso $S^1 \otimes S^2$, la expresión de la función "a" correspondiente es:

$$a = A^* - w + \ln(\sen^2 t) \quad (3.5.2)$$

donde A^* esta dada por:

$$A^* = \frac{1}{4} C_1^2 \sen^2 z (\sen^2 t O_1^2 - 2 \cos t O_1 - 1) + \frac{3}{32} C_2^2 \sen^2 z \left\{ -3 \sen^2 t O_2^2 \left[\sen^2 z (8 - 9 \sen^2 t) - 8 \cos^2 t \right] \right.$$

$$+ 2 \cos t O_2 \left[3 \sen^2 z (2 - 9 \sen^2 t) + 24 \sen^2 t - \frac{8}{C_2} (C_0 + C_2) \right]$$

$$\left. + 3 \sen^2 z (5 - 9 \sen^2 t) + 24 \sen^2 t - \frac{16}{C_2} (C_0 + C_2) \right\} \quad (3.5.3)$$

$$+\frac{1}{2}C_1C_2 \cos z \operatorname{sen}^2 z [3\operatorname{sen}^2 t \cos t O_1 O_2 - (1 - 3\operatorname{sen}^2 t)O_1 + (2 - 3\operatorname{sen}^2 t)O_2 - 3\cos t]$$

y con las siguientes condiciones sobre C_n y A_n :

$$(C_0 + C_2, C_1) = (\pm 2, 0) \text{ ó } (0, \pm 2) \text{ y } A_2 C_1 + A_1 C_0 = 0 \quad (3.5.4)$$

Escogiendo condiciones apropiadas gracias a (3.5.4) tenemos que pueden estar dadas de la siguiente forma:

$$C_0 = 0, C_2 = 0, C_1 = 2 \text{ y } A_0 = A_1 = A_2 = 0$$

A partir de las condiciones anteriores y despreciando la condición, sobre $w = 0$. Es decir, tomando $w = w_1$ y tenemos que su forma final es:

$$w = -2 \cos(z) \left[\cos(t) \left(\ln \left(\tan \frac{t}{2} \right) \right) + 1 \right] \quad (3.5.5)$$

Entonces para la topología $S^1 \otimes S^2$, "a" viene dada como:

$$a = \frac{1}{2} \left\{ 2(\cos(z) - \operatorname{sen}^2(z))(\cos(t)) \left(\ln \tan \frac{t}{2} \right) + \operatorname{sen}^2 z \left(\operatorname{sen}^2 t \left(\ln \tan \frac{t}{2} \right)^2 - 1 \right) + 2 \cos(z) \right\} + \ln \operatorname{sen}(t) \quad (3.5.6)$$

Para el caso S^3 , la función "a" esta dada por:

$$a = A^* - \cos z (w_0 + w_2(t, 0)) - w(t, 0) + \ln \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} t \right) \quad (3.5.7)$$

Con:

$$(A_0 + A_2, A_1) = (\pm 2, 1) \text{ ó } (0, 1 \pm 2) \text{ y } C_2(A_1 - 1) + A_1 C_0 = A_0 = 0 \quad (3.5.8)$$

Utilizando condiciones apropiadas mediante (3.5.8), las constantes, pueden ser propuestas de la siguiente forma:

$$C_0 = 0, C_2 = 0, C_1 = -1 \text{ y } A_0 = A_1 = A_2 = 0$$

Como el primer término de w es cero, se toma el segundo término de tal manera que w se pueda ver como:

$$w(t,0) = \cos(t) \left(\ln \tan \frac{t}{2} \right) + 1 \quad (3.5.9)$$

Luego entonces, para la topología S^3 " a " viene dada por:

$$a = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 z \left[\operatorname{sen}^2 t \left(\ln \tan \frac{t}{2} \right)^2 - 1 \right] - \cos t \left(\ln \tan \frac{t}{2} \right) \left[1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 z \right] - 1 + \ln \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} t \right) \right\} \quad (3.5.10)$$

CAPÍTULO IV

4.1 ANÁLISIS DE LAS GEODÉSICAS PARA LOS CASOS $S^1 \otimes S^2$ Y S^3

En el estudio de la cosmología se cuenta con diferentes modelos, que intentan comprender el comportamiento de nuestro cosmos y con varias aproximaciones matemáticas, las cuales reducen el número de cálculos. Pero si el conocimiento acerca del mismo se quiere obtener con mayor precisión, es necesario omitir la mayor cantidad de aproximaciones y por ende sumergirnos en la belleza de las matemáticas.

En este estudio se observa que cada una de las ecuaciones que se han trabajado indican el cómo se comporta un modelo de nuestro universo temprano y las cosas que lo componen (partículas). Pero al intentar entender con mayor precisión el comportamiento de nuestro cosmos, la cantidad de ecuaciones y su dificultad aumenta.

El objetivo principal de esta tesis, como se mencionó anteriormente, es entender el movimiento de las partículas con masa y sin masa en las métricas de Gowdy principalmente en el caso polarizado linealmente, para las topologías $S^1 \otimes S^2$ y S^3 . Es por ello que el trabajo se enfoca en la forma gráfica de las trayectorias geodésicas, que se obtuvieron a partir de las ecuaciones diferenciales de la sección 3.4 y con la ayuda de la sección 3.5.

Las ecuaciones diferenciales presentadas en el apartado 3.4 predicen el movimiento de partículas a través de la cosmología de Gowdy en ambas topologías. La solución de esas ecuaciones se mostrará de manera gráfica.

Debido a la complejidad de las Ecuaciones diferenciales anteriores y a la existencia de regiones en las que el programa computacional tiene problemas así como problemas de no poder explicar del todo los movimientos de las partículas, es que se decidió estudiar geodésicas fijando una de las coordenadas en las ecuaciones diferenciales, imponiéndoles rangos apropiados del parámetro afín τ y de las coordenadas z, t ; para así poder darle mejores interpretaciones físicas a nuestros resultados.

Caso $S^1 \otimes S^2$:

Imponiéndole:

$$z = \frac{\pi}{2}, \dot{z} = 0$$

Las ecuaciones quedan únicamente en función de t y τ por tanto:

$$\ddot{t} + 2\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)\dot{t} + \delta(t) = 0 \quad (4.1.1)$$

$$a = \frac{1}{2} \left\{ -2 \cos(t) \left[\ln \left(\tan \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right] + \operatorname{sen}^2(t) \left(\ln \left(\tan \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right)^2 - 1 \right\} + \ln(\operatorname{sen}(t)) \quad (4.1.2)$$

Donde para las partículas sin masa $\delta(t)$ viene dada por:

$$\delta(t) = -e^{-2a} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen}^2(t)} \left(\frac{\partial a}{\partial t} - \cot(t) \right) + \frac{\partial a}{\partial t} \right\} \quad (4.1.3)$$

Y para las partículas con masa $\delta(t)$ viene dada por:

$$\delta(t) = -e^{-2a} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen}^2(t)} \left(\frac{\partial a}{\partial t} - \cot(t) \right) + 2 \frac{\partial a}{\partial t} \right\} \quad (4.1.3)$$

Graficando 4.1.1 para las partículas sin masa con las siguientes condiciones de iniciales tenemos:

$$\tau \in (-0.65, 0.65)$$

$$t(0) = 1$$

$$D(t) = 0 \quad (4.1.4)$$

$$t \in (0, 1.5)$$

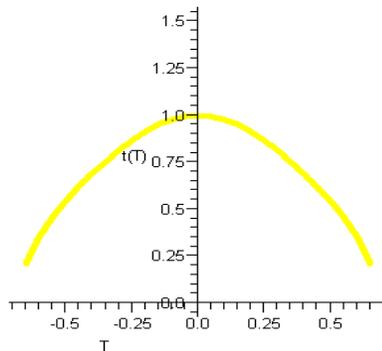


Figura (5)

Gráfica correspondiente a 4.1.1, Partícula sin masa. Condiciones: $k_1=1$, $k_2=1$, $L=1$

De igual manera, graficando 4.1.1 pero para las partículas con masa con las siguientes condiciones de frontera tenemos:

$$\begin{aligned}
\tau &\in (-0.6, 0.6) \\
t(0) &= 1 \\
D(t) &= 0 \\
t &\in (0, 1.5)
\end{aligned}
\tag{4.1.5}$$

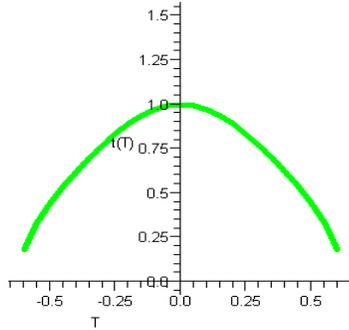


Figura (6)

Gráfica correspondiente a 4.1.1, Partícula con masa. Condiciones: $k_1=1$, $k_2=1$, $L=1$

Nuestras condiciones iniciales hacen continuo el movimiento de las partículas e incluso se observa un movimiento menos caótico que en los casos más generales, por lo menos en esta región.

Fijando z en $\frac{\pi}{2}$ podemos hacer un análisis del comportamiento de $\tau(t)$. La razón de fijarla en $\frac{\pi}{2}$ es para simplificar de manera notable nuestras ecuaciones.

Como podemos observar, las partículas comienzan desde una singularidad, crece a través de t conforme τ crece y terminan cayendo nuevamente en una singularidad para valores de $\tau \approx \pm 0.6$ para ambos tipos de partículas, la gráfica presenta divergencias las cuales físicamente las consideramos como singularidades en la topología $S^1 \otimes S^2$. En la expresión analítica, se observan anomalías correspondientes a $t = 0$ en la que los coeficientes de las geodésicas $\tau(t)$ divergen.

En esencia, el comportamiento es cualitativamente el mismo para los casos con masa y sin masa.

Para completar el Análisis, ahora fijémonos en un tiempo:

$$t = 0, t = \frac{\pi}{2}$$

Es por ello que las ecuaciones quedan únicamente en función de z, τ :

$$\ddot{z} + 2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} \right) \dot{z} + \beta(z) = 0 \tag{4.1.6}$$

Donde:

$$a = \frac{1}{2} (2 \cos(z) - \operatorname{sen}^2(z)) \quad (4.1.7)$$

Donde para las partículas sin masa $\beta(t)$ viene dada por:

$$\beta(z) = \frac{e^{2(w-a)}}{\operatorname{sen}^2(z)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (a+w) - \cot(z) \right] + e^{-2(w+a)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (w-a) \right] \quad (4.1.8)$$

Y para las partículas con masa $\beta(t)$ viene dada por:

$$\beta(z) = \frac{e^{2(w-a)}}{\operatorname{sen}^2(z)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (a+w) - \cot(z) \right] + e^{-2(w+a)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (w-a) \right] - e^{-2a} \frac{\partial a}{\partial z} \quad (4.1.8)$$

Graficando 4.1.6 para las partículas sin masa con las siguientes condiciones iniciales tenemos:

$$\tau \in (-0.31, 0.31)$$

$$z(0) = 1$$

$$D(z) = 0 \quad (4.1.9)$$

$$z \in (0, 1.5)$$

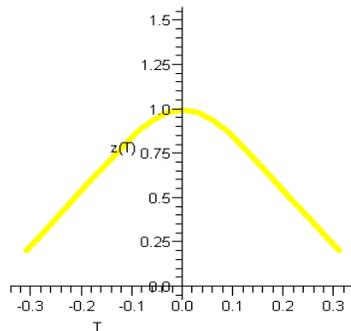


Figura (7)

Gráfica correspondiente a 4.1.6, Partícula sin masa. Condiciones: $k_1=1$, $k_2=1$, $L=1$

De igual manera, graficando 4.1.6 pero para las partículas con masa con las siguientes condiciones iniciales tenemos:

$$\tau \in (-0.3, 0.3)$$

$$z(0) = 1$$

$$D(z) = 0 \quad (4.1.10)$$

$$z \in (0,1.5)$$

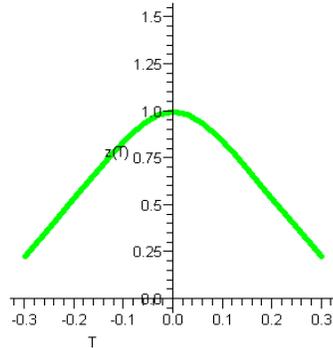


Figura (8)

Gráfica correspondiente a 4.1.6, Partícula con masa. Condiciones: $k_1=1$, $k_2=1$, $L=1$

Cualitativamente, el movimiento de las partículas con masa y sin masa dentro de esta topología, no tiene demasiada diferencia. Para tiempos variables del parámetro afín negativo τ del eje z , nace de una singularidad, llega un máximo en $z = 1$ y perece en una nueva singularidad. En el caso más general, no observamos para valores de τ negativos, sin embargo, observamos que ya existía un universo que de igual manera tiende a degenerar para $\tau > 0.3$, las diferencias son que nace en $z = 2$ y que se supondría que tendería a oscilar conforme τ crece.

Caso S^3 :

Nuevamente haremos un tratamiento como el anterior:

Imponiéndole:

$$z = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{z} = 0$$

Las ecuaciones quedan únicamente en función de t y τ por tanto:

$$\ddot{t} + 2 \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right) \dot{t} + \eta(t) = 0 \quad (4.1.11)$$

donde:

$$a = \frac{1}{8} \left[\text{sen}^2(t) \left(\ln \left(\tan \frac{t}{2} \right) \right)^2 - 1 \right] - \frac{3}{4} \cos(t) \left(\ln \left(\tan \frac{t}{2} \right) \right) - 1 \quad (4.1.12)$$

Donde para las partículas sin masa $\eta(t)$ viene dada por:

$$\eta(t) = \frac{1}{\text{sen}(t)} \left\{ e^{-2(a-w)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (a+w) - \frac{1}{2} \cot(t) \right] - e^{-2(a+w)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (a-w) - \frac{1}{2} \cot(t) \right] \right\} \quad (4.1.13)$$

Y para las partículas con masa $\eta(t)$ viene dada por:

$$\eta(t) = \frac{1}{\text{sen}(t)} \left\{ e^{-2(a-w)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (a+w) - \frac{1}{2} \cot(t) \right] - e^{-2(a+w)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (a-w) - \frac{1}{2} \cot(t) \right] \right\} - e^{-2a} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right) \quad (4.1.14)$$

Graficando 4.1.11 para las partículas sin masa con las siguientes condiciones iniciales tenemos:

$$\tau \in (-0.85, 0.85)$$

$$t(0) = 1$$

$$D(t) = 0 \quad (4.1.15)$$

$$t \in (0, 1.5)$$

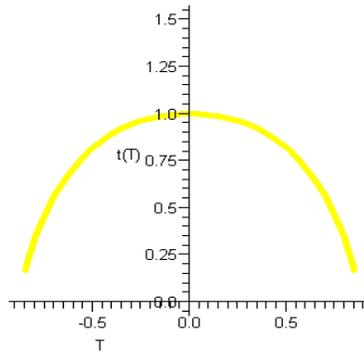


Figura (9)

Gráfica correspondiente a 4.1.11, Partícula sin masa. Condiciones: $k_3=1$, $k_4=1$, $L=1$

De igual manera, graficando 4.1.11 pero para las partículas con masa con las siguientes condiciones iniciales tenemos:

$$\tau \in (-10, 10)$$

$$t(0) = 1$$

$$D(t) = 0 \quad (4.1.15)$$

$$t \in (0, 3)$$

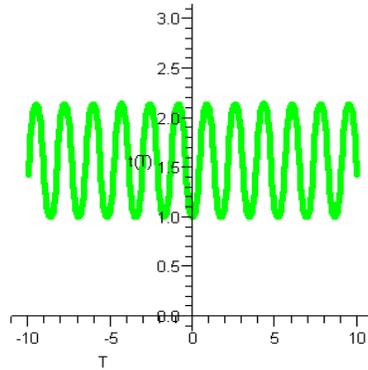


Figura (10)

Gráfica correspondiente a 4.1.11, Partícula con masa. Condiciones: $k_3=1, k_4=1, L=1$

La belleza de las gráficas 9 y 10 es indiscutible, pues podemos notar que la partícula sin masa tiende a degenerarse a una singularidad para valores de $\tau > 0.6$. Mientras que al sumarle el término correspondiente a las partículas con masa, este hace que nuestra partícula masiva pareciera que no degenerara en una singularidad y resulte como una oscilación tipo cosenoidal que continuará \forall valor τ .

De igual manera que para la topología $S^1 \otimes S^2$ para tener un mejor análisis necesitamos trabajar la siguiente ecuación diferencial para z .

Sean las condiciones:

$$t = \frac{\pi}{2}, \dot{t} = 0$$

luego la ecuación diferencial se vería como:

$$z'' + 2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} \right) z' + \alpha(z) = 0 \quad (4.1.16)$$

donde:

$$a = -\frac{1}{8} \operatorname{sen}^2(z) - 1 \quad (4.1.17)$$

Para las partículas sin masa $\alpha(t)$ viene dada por:

$$\alpha(z) = \frac{1}{2e^{2(a-1)} \operatorname{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (a-1) - \frac{1}{2} \cot\left(\frac{z}{2}\right) \right] + \frac{1}{2e^{2(a+1)} \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (a-1) + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{z}{2}\right) \right] \quad (4.1.18)$$

y para las partículas con masa $\alpha(t)$ viene dada por:

$$\alpha(z) = \frac{1}{2e^{2(a-1)} \operatorname{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (a-1) - \frac{1}{2} \cot\left(\frac{z}{2}\right) \right] + \frac{1}{2e^{2(a+1)} \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (a-1) + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{z}{2}\right) \right] + e^{-2a} \left(\frac{\partial a}{\partial z} \right) \quad (4.1.19)$$

Graficando 4.1.16 para las partículas sin masa con las siguientes condiciones iniciales tenemos:

$$\begin{aligned} \tau &\in (-5,5) \\ t(z) &= 1 \\ D(z) &= 0 \\ z &\in (0,5) \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

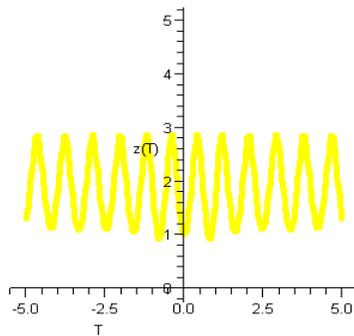


Figura (11)

Gráfica correspondiente a 4.1.16, Partícula sin masa. Condiciones: $k_3=1$, $k_4=1$, $L=1$

De igual manera, graficando 4.1.16 pero para las partículas con masa con las siguientes condiciones de frontera tenemos:

$$\begin{aligned} \tau &\in (-5,5) \\ z(0) &= 1 \\ D(z) &= 0 \\ z &\in (0,5) \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

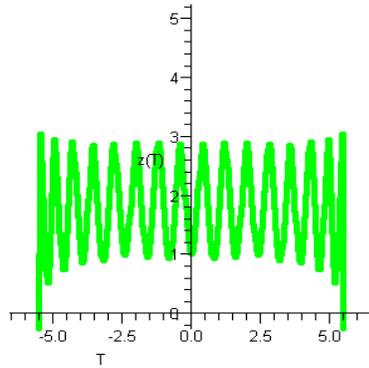


Figura (12)

Gráfica correspondiente a 4.1.16, Partícula con masa. Condiciones: $k_3=1$, $k_4=1$, $L=1$

En la figura 12 notamos un movimiento oscilatorio conforme τ aumenta. Las oscilaciones nunca terminan y tienden a infinito mientras $\tau \rightarrow \infty$ aunque es posible observar, que las oscilaciones no son tan simétricas como los de la figura 10. Para la partícula masiva, no sucede lo mismo, aunque su movimiento es oscilatorio conforme τ aumenta alrededor de $\tau \approx \pm 5.5$ este presenta una divergencia en su movimiento.

Se puede notar, que si el parámetro afín, puede tomar todos los valores de $(-\infty, \infty)$ sin que la geodésica se interrumpa, o equivalentemente que en las ecuaciones geodésicas alguno diverja, entonces la geodésica es completa.

En un espacio tiempo con todas sus geodésicas completas se dice que es geodésicamente completo y se puede suponer que dicho espacio tiempo no tiene singularidades. Sin embargo, nuestros espacios tiempos, contiene singularidades por lo menos en algunos de los casos con masa o sin masa.

Para hacer un Análisis más profundo acerca de la topología $S^1 \otimes S^2$ y la topología S^3 es necesario de la sección 4.2.

4.2 ANÁLISIS DE SINGULARIDADES MEDIANTE EL ESCALAR DE CURVATURA EN LOS CASOS $S^1 \otimes S^2$ Y S^3

Como pudimos observar en la sección anterior, las gráficas mostraban regiones de divergencia que en primera instancia las considerábamos como singularidades físicas. Pero esta idea es en parte analítica y en parte intuitiva.

Debido a estas carencias de exactitud es que se decidió analizar las singularidades bajo la herramienta del escalar de curvatura. La idea es calcular el escalar y que nos de idea de donde podrían existir las singularidades y poderlas cotejar con las gráficas de la sección anterior.

La forma matemática del escalar de curvatura viene dada por la ecuación:

$$R = R_{ab} g^{ab} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^d} - \frac{\partial \Gamma_{ad}^b}{\partial x^b} + \Gamma_{ad}^c \Gamma_{bc}^d - \Gamma_{ab}^c \Gamma_{dc}^d \right) g^{ab} \quad (4.2.1)$$

Con la ecuación 4.2.1, podemos calcular el escalar de curvatura para la métrica 3.1.4 para el caso $S^1 \otimes S^2$.

Entonces el escalar es:

$$\begin{aligned} R = & -\frac{1}{L^2 \text{sen}^6(t) \text{sen}^2(z) e^{2(\gamma-w)}} \left(2 \left(-1 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \cos^2(z) \cos^4(t) - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \cos^2(t) \cos^2(z) - \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right) \cos^4(t) \cos^2(z) - \right. \right. \\ & - \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \cos^4(t) - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \cos^2(t) - \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \cos^2(z) \cos^4(t) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \cos^2(z) + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \cos^4(t) \cos^2(z) \\ & - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \cos^2(t) + \cos^2(z) - 2 \cos(z) \text{sen}(z) \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \cos^2(t) - 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \cos^2(t) \cos^2(z) + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \cos^2(z) - \\ & - \cos(t) \text{sen}(t) \frac{\partial w}{\partial t} - 2 \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right) \cos^2(t) + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \cos^2(t) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \cos^2(t) + \cos(t) \text{sen}(t) \frac{\partial w}{\partial t} \cos^2(z) - \\ & - \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \cos(z) \text{sen}(z) \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \cos^2(z) \cos^2(t) + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \cos^2(z) - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \cos^2(t) \cos^2(z) + \\ & + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \cos^2(z) \cos^2(t) + \text{sen}(z) \cos^4(t) \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \cos(z) + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \cos^2(t) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \cos^4(t) + \cos^3(t) \text{sen}(t) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \\ & \left. 2 \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} \right) \cos^2(t) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \cos^4(t) - \cos^3(t) \text{sen}(t) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \cos^2(z) - 2 \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} \right) \cos^2(t) \cos^2(z) + \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} \right) \cos^4(t) \cos^2(z) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right) \cos^2(t) \cos^2(z) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \cos^4(t) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \cos^2(z) + \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right) \cos^4(t) - \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} \right) \cos^4(t) - \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right) \cos^2(z) \\
& \left. \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} \cos^2(z) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \cos^4(t) \cos^2(z) \right) \quad . \quad (4.2.2)
\end{aligned}$$

Como podemos observar, el escalar de curvatura se vuelve divergente para los valores:

$$z = \pm n\pi \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$t = \pm m\pi \text{ con } m = 0, 1, 2, \dots$$

No solamente por el cociente que existe sino también por la función γ la cual depende de w y diverge para los mismos valores mencionados.

Si hacemos una análisis para la cosmología $S^1 \otimes S^2$, esta es cerrada entre el intervalo $(0, \pi)$; esto supondría que existe una oscilación en este intervalos. Nuestras gráfica mostradas en la sección anterior también oscilan entre un intervalo simétrico pero distinto al intervalo $(0, \pi)$. Esto suponemos que es debido a las condiciones iniciales que le damos a nuestras ecuaciones.

También notamos, que si hacemos una extensión después de la singularidad inicial y final, deberíamos observar, que esta volvería a nacer de una singularidad y perecer en una singularidad entre otro nuevo intervalo.

Para el caso S^3 tenemos que el escalar de curvatura viene dado de la forma:

$$\begin{aligned}
R = & \frac{1}{L^2 \text{sen}^3(t) \text{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right) \cos\left(\frac{z}{2}\right) e^{2\gamma}} \left(-4 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \cos\left(\frac{z}{2}\right) \cos^2(t) - 4 \cos^3\left(\frac{z}{2}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \cos^2(t) - 4 \cos\frac{z}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \right. \\
& + 3 \cos\frac{z}{2} + 4 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \cos\frac{z}{2} + 4 \cos\frac{z}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \cos^2(t) + 4 \cos^3\frac{z}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \text{sen}\frac{z}{2} + 4 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \cos^3\frac{z}{2} \cos^2(t) + \\
& + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \text{sen}\frac{z}{2} \cos^2(t) - 3 \cos^3\left(\frac{z}{2}\right) - 4 \cos\frac{z}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} \right) \cos^2(t) + 4 \cos\frac{z}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right) \cos^2(t) - 4 \cos^3\frac{z}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} \right) + \\
& + 4 \cos^3\frac{z}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right) + 4 \cos^3\frac{z}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} \right) \cos^2(t) - 4 \cos^3\frac{z}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right) \cos^2(t) + 4 \cos\frac{z}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} \right) - 4 \cos\frac{z}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right) - \\
& \left. - 4 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \cos^3\frac{z}{2} \right) \quad . \quad (4.2.3)
\end{aligned}$$

El escalar de curvatura, quedó indefinido para los valores:

$$t = n\pi \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots$$
$$z = 2m\pi \text{ con } m = 0, 1, 2, \dots \text{ y } z = (2m + 1)\pi \text{ con } m = 0, 1, 2, \dots$$

Esto supondría que en cada máximo y mínimo de la función generada, existe una singularidad. Estas características nos dan una idea del porque deberían oscilar en algunos casos las partículas.

En principio lo que suponíamos es que en algunos casos las gráficas continuaban un movimiento oscilatorio de tal manera que nunca existían singularidades. Pero al observar estos resultados, podemos pensar que cada máximo y mínimo de las oscilaciones es en esencia una singularidad y la función se vuelve muy discontinua cuando se acerca de estos valores.

La siguiente idea, es fijar alguna de las variables del escalar de curvatura, para así poder hacer un análisis más profundo con respecto a las singularidades.

4.3 ANÁLISIS DE SINGULARIDADES MEDIANTE EL ESCALAR DE CURVATURA FIJANDO UNA DE LAS VARIABLES, EN LOS CASOS $S^1 \otimes S^2$ Y S^3

Si fijamos alguno de los parámetros en el escalar de curvatura, tal como se realizó en la sección 4.2, podemos obtener una idea de la existencia o no de singularidades en este tipo de cosmologías. En primera instancia, existe una pérdida de generalidad al fijar alguno de los valores en el escalar de curvatura; aun que es necesario para poder describir gráficamente lo que esta sucediendo en cada una de estas topologías.

Topología $S^1 \otimes S^2$.

Fijemos:

$$t = \frac{\pi}{2}$$

Y escribiendo las correspondientes funciones γ y w , podemos graficar la ecuación 4.2.2 como:

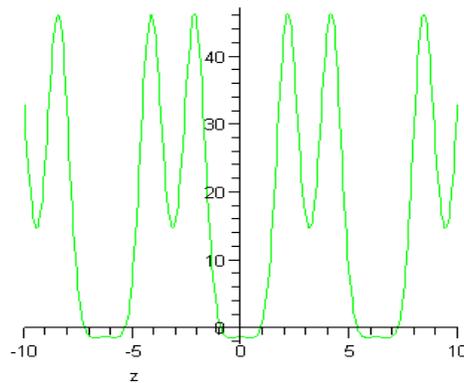


Figura (13)

Gráfica correspondiente a 4.2.2, escalar de Curvatura Vs z. Condiciones: $k_1=1, k_2=1, L=1$

Si ahora se fija:

$$z = \frac{\pi}{2}$$

Sobre la ecuación 4.2.2 con las mismas funciones γ y w para esta topología tendríamos que la gráfica tiene la forma:

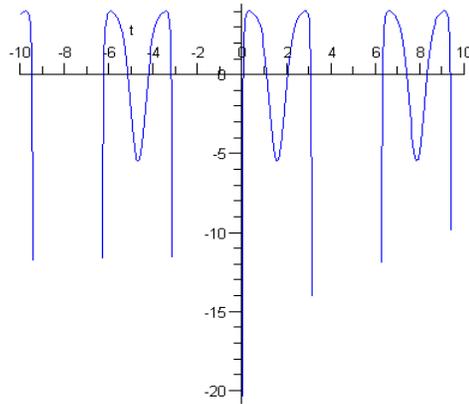


Figura (14)

Gráfica correspondiente a 4.2.2, escalar de Curvatura Vs t. Condiciones: $k_1=1$, $k_2=1$, $L=1$

La figura 13, no contiene singularidades como podemos observar, sin embargo su movimiento muestra oscilatorio acotado por las exponenciales que existen. En la figura 14 si notamos singularidades conforme t varía. Nos daría en primera instancia, un universo cerrado entre singularidad y singularidad.

Topología S^3

Para esta topología, se realizó el mismo trabajo, primero estableciendo una de las variables, tal y como se muestra a continuación:

Fijemos:

$$t = \frac{\pi}{2}$$

Y escribiendo las correspondientes funciones γ y w , podemos graficar la ecuación 4.2.3 como:

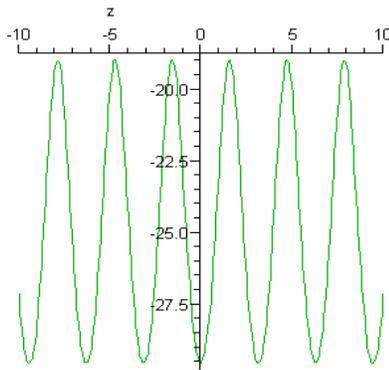


Figura (15)

Gráfica correspondiente a 4.2.3, escalar de Curvatura Vs z. Condiciones: $k_3=1, k_4=1, L=1$

Si ahora se fija:

$$z = \frac{\pi}{2}$$

Sobre la ecuación 4.2.3 con las mismas funciones γ y w para esta topología tendríamos que la gráfica tiene la forma:

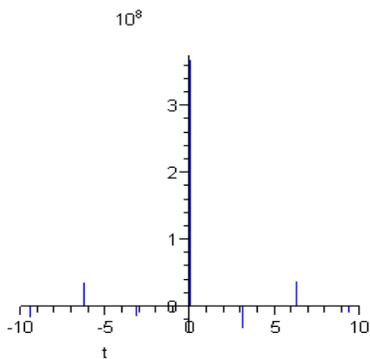


Figura (16)

Gráfica correspondiente a 4.2.3, escalar de Curvatura Vs t. Condiciones: $k_3=1, k_4=1, L=1$

Al observar, la figura 15 notamos un escalar de Ricci que solo se muestra negativo conforme le damos valores a z. Por otra parte, el escalar de curvatura presenta singularidades en los valores de t. En este caso t no podría correr en valores negativos, puesto que no tiene ningún sentido desde el punto de vista físico; sin embargo se muestra puesto que nos dá una idea de cómo se comporta el escalar de Ricci para cualquier valor de t.

CONCLUSIONES

El establecimiento de algunos de los parámetros mostrados en la sección 4.1 así como establecimiento de las singularidades gracias al escalar de curvatura, mostrado en la sección 4.2 y 4.3, nos dan una idea más clara acerca del comportamiento de estas cosmologías.

Lo primero que podemos concluir por lo menos para la topología $S^1 \otimes S^2$ es que se tratan de cosmologías cerradas; es decir nacen de una singularidad y terminan extinguiéndose en otra singularidad, además de que las características de estas cosmologías son que siguen este proceso de extinción y nacimiento conforme el parámetro τ aumenta. En el caso t vs τ únicamente la parte en la que crece en el tiempo es físicamente aceptable; pero debido a la riqueza matemática que existe, es por lo que se muestra su movimiento completo.

Como observadores del comportamiento de estas cosmologías, es necesario poner partículas de prueba ya sean con masa o sin masa en estas regiones cosmológicas. Ellas nos dan una idea de cómo se mueve el espacio tiempo a sus alrededores y nos llevan a conclusiones acerca de la topología espacio temporal de dichas cosmologías. Algo importante que no podemos dejar pasar, es que las partículas que colocamos fueron con condiciones de caída libre. Aunque no estamos restringidos a imponer estas condiciones, pero en particular el análisis está realizado bajo la idea de que las partículas están en caída libre.

Otra pregunta que no puede quedar en el aire y que podemos hacer es: si existen ondas gravitacionales en estas cosmologías. La respuesta, tal vez no la podamos encontrar en nuestras gráficas, puesto que la idea que nos dan acerca de este fenómeno es muy ambigua y nos puede llevar a dar un mal diagnóstico acerca de nuestra cosmologías.

Tal vez lo mas acertado sería hacer un análisis mas riguroso matemáticamente hablando o incluso imponiéndole condiciones iniciales distintas de manera que nos puedan dar una idea mas cercana y que podamos concluir sin ninguna reserva de que se tratan de ondas gravitacionales.

Es obvio que existen muchos artículos anteriores las cuales confirman estas características particulares.

En resumen; para la topología $S^1 \otimes S^2$ se obtuvo un análisis satisfactorio, que nos confirmó la existencia de que estas cosmologías son cerradas con varios puntos de singularidad tal como lo confirmó el escalar de curvatura; así como un máximo posible existente para la expansión cosmológica y el cual es variable conforme las condiciones de frontera sean impuestas.

Para la topología S^3 , tenemos comportamientos curiosos, en el cual parecería que la partícula sin masa nace y cae en una singularidad, mientras que la partícula masiva simplemente oscila.

Mientras que para las graficas z, τ , suceden oscilaciones en ambos casos aunque la partícula masiva termina cortando su movimiento en un τ determinado.

Los escalares de curvatura, mostrados en la sección 4.3 de la tesis, nos muestran que la función solo es continua en valores distintos a $z = 2m\pi$ con $m=0,1,2\dots$ y $z = (2m+1)\pi$ con $m=0,1,2\dots$. Esto nos lleva a pensar, que en el caso en el que la partícula oscile, las singularidades existen en cada máximo y mínimo de dichas oscilaciones.

Esto implica que al igual que en la anterior topología, se trata de una cosmología cerrada en la que el cosmos nace de una singularidad y termina decayendo en otra singularidad.

Si observamos las gráficas de la topología S^3 notamos que este modelo evoluciona mucho más rápido de lo que evoluciona la cosmología $S^1 \otimes S^2$ (véanse figuras de la sección anterior)

En general, aunque la topología S^3 se comporte diferente, también se trata de una cosmología cerrada que nace de una singularidad evoluciona y perece en otra singularidad y prosigue este comportamiento por lo menos para el caso sin masa en la gráfica que esta en función de z, τ .

Como se observa, ambos modelos dan una idea del como se comportan las cosmologías con poca cantidad de simetrías, es claro pensar, que para obtener mayores conclusiones acerca de estas cosmologías es necesario ir agregando nuevas propiedades a nuestro espacio tiempo. La primera idea que se ocurre es proponer ahora un espacio tiempo que no sea vacío y trabajar con las ecuaciones de Einstein así como con ecuaciones de desviación de geodésicas, etc...Pero eso es material para una nueva investigación acerca de las cosmologías $S^1 \otimes S^2$ y S^3 .

Finalmente, si se desea hacer un estudio más riguroso en la cosmología, el siguiente paso sería, los casos no polarizados, los cuales nos llevan a resultados más cercanos a la realidad, acerca de la formación de estructura. Esto es debido a que las ondas gravitacionales se desplazan en la dirección z pero su polarización ahora es arbitraria.

Los artículos actuales estudian principalmente los casos no polarizados, debido a que se trabaja con la creación y aniquilación de partículas debido a las ondas gravitacionales; así como el estudio de singularidades, formación de estructura y estudio de los inicios de nuestro universo.

En esencia si el universo hubiese contenido siempre las características de homogeneidad e isotropía que actualmente conocemos, no daría cabida a toda esta gran cantidad de estructura que actualmente conocemos. Así pues quizá incluso la vida no hubiese podido existir, si en sus inicios no hubiese contenido esas características de inhomogeneidad e anisotropía.

APENDICE DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

a) Grupo:

Dados a y $b \in G$, un grupo G es un conjunto que cumple las siguientes condiciones:

- 1) $(a)(b) \in G$
- 2) Existe un único elemento I conocido como elemento identidad, tal que $Ia = aI = a$ para cada elemento del conjunto G
- 3) Existe la multiplicación, de tal manera que es asociativa. $(ab)c = a(bc)$
- 4) Existe el elemento inverso para cada elemento de G y es único tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = I$

b) Variedad:

Una variedad C^k de dimensión n es un conjunto M con un atlas C^k ; si $k \geq 1$, se dice que M es una variedad diferenciable.

c) Grupo de Lie:

Un grupo de Lie, es una variedad diferenciable G dotada de una estructura de grupo que es compatible, es decir tal que la operación de grupo.

$p: G \times G \rightarrow G, p(x, y) = xy$ es diferenciable.

d) Difeomorfismo:

Un difeomorfismo Ψ , es una aplicación biyectiva de una variedad diferenciable M sobre una variedad diferenciable N tal que Ψ y Ψ^{-1} son diferenciables; dos variedades diferenciables M y N son difeomorfas si existe un difeomorfismo Ψ de M sobre N .

e) Familia Uniparamétrica de Transformaciones:

Sea M una variedad diferenciable. Un grupo uniparamétrico de transformaciones, Φ , en M , es una aplicación diferenciable de $M \times \mathbb{R}$ en M tal que $\Phi(x, 0) = x$ y $\Phi(\Phi(x, t), s) = \Phi(x, t + s)$ para todo $x \in M, t, s \in \mathbb{R}$

f) Tensor Métrico:

El elemento de línea de un espacio, viene dado por una forma cuadrática conocida como elemento de línea cuya ecuación viene dada por:

$$ds^2 = g_{pq} dx^p dx^q$$

Donde las magnitudes g_{pq} son las componentes de un tensor covariante de segundo orden denominado tensor métrico o tensor fundamental. Este tensor es simétrico.

g) Símbolos de Christoffel:

Los símbolos de Christoffel, son expresiones en coordenadas espaciales para la conexión de Levi-Civita derivada del tensor métrico. La ecuación para obtener los símbolos de Christoffel está dada por:

$$\Gamma_{pq}^s = \frac{1}{2} g^{sr} \left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r} \right)$$

h) Curvas Geodésicas:

La distancia entre dos puntos t_1 y t_2 sobre una curva $x^r = x^r(t)$ en un espacio de Riemann viene dada por:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{pq} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt}} dt$$

Pues bien, aquella curva en el espacio que pasando por dos puntos hagan mínima la distancia entre ellos se llama geodésica de dicho espacio. En el cálculo de variedades se demuestra que la ecuación diferencial de las líneas geodésicas está dada por:

$$\frac{d^2 x^r}{ds^2} + \Gamma_{pq}^r \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} = 0$$

En donde s indica el parámetro de la longitud de línea. Las geodésicas en el plano, por ejemplo, son rectas y las correspondientes en una esfera son arcos de círculo máximo

h) Homogeneidad e Isotropía:

Dado un grupo G que actúa sobre una variedad M como grupo de Lie de transformaciones, se dice que G es el grupo de simetría de un determinado campo tensorial T si $\mathfrak{S}_{X_A} T = 0$ siendo X_A , $A=1\dots r$ los generadores infinitesimales del grupo. Alternativamente, si $\varphi_g^* T = T$ para todos los difeomorfismos $\varphi_g : M \rightarrow M$ asociados a todos los elementos $g \in G$. Recordemos que el conjunto de todos estos difeomorfismos formaban un grupo con la operación composición de funciones, que era idéntico (isomorfo) a G .

Ahora a este grupo se le llamará S ; es decir:

$$S = \{\varphi_{t_A} : M \rightarrow M, \exists g(t_A) \in G\}$$

Y llamaremos igualmente a los campos X_1, \dots, X_r generadores infinitesimales de S y las referencias al grupo original G serán prácticamente inexistentes. Fijémonos que hemos puesto φ_{t_A} en lugar de φ_g puesto que nos interesará esencialmente la dependencia en los parámetros t_A del difeomorfismo φ_g , y no el elemento g del cual proviene; es más, en lo sucesivo prescindiremos incluso de la referencia a los parámetros t_A siempre y cuando no sea preciso referirnos a ellos, y así hablaremos en general del grupo de simetrías S del tensor T como el conjunto:

$$S = \{\varphi : M \rightarrow M, \exists \varphi^*(T) = T\}$$

Entendiendo que tiene estructura de grupo con la operación composición. Alternativamente:

$$S = \{\varphi : M \rightarrow M, \exists \mathfrak{S}_{X_A} T = 0\}, X_A, A = 1, \dots, r \text{ generadores infinitesimales de } S.$$

REFERENCIAS

- [1] M. Carmeli, C Charach, S. Malin.
Survey of Cosmological Models with Gravitational, scalar and electromagnetic waves
Reports, 76 (1981), pags 79-156.
- [2]. M. P. Ryan and L. C. Shepley.
Homogeneous Relativistic Cosmologies
Princeton Series in Physics. (1975) Pag: 111-115.
- [3]. R.H. Gowdy
Gravitational Waves in Closed Universes.
Physical Review Letters. Vol. 27. . (1971) Pag: 826-829
- [4]. C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler
Gravitation,
Ed. Freeman. (1973) Capítulo 30. Anisotropic and Inhomogeneous cosmologies. Pag: 800-815.
- [5]. A. Sánchez. A. Macias. H. Quevedo.
Generating Gowdy cosmological models.
Journal of Mathematical Physics. Vol 45, (2004) Pag:12-13
- [6]. P. Szekeres
A class of Inhomogeneous Cosmological Models
Physical Review. Vol 41. (1975) Pag: 55-64.
- [7]. B. K. Berger and V. Moncrief
Numerical Investigation of cosmological singularities
Physical Review D. Vol. 48. (1993) Pag: 4676-4687.
- [8]. L. Bianchi
Groups of Bianchi,
Wikipedia, The free Enciclopedia. Internet.
- [9] Murria R. Spiegel
Análisis Vectorial.

Editorial: Mc Graw Hill. Año de Edición: 1998.

Capítulo 8. Análisis Tensorial. Pag 172 y 173.

[10]. M. en C. Gerardo F. Torres del Castillo.

Notas Sobre Variedades Diferenciales.

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I.P.N (1981).

[11]. J. B. Hartle

Gravity and Introduction to Einstein's General Relativity.

Editorial: Mc Graw Hill. Año de Edición: 1996

Capítulo 8. Geodesics. Pg 169-179

[12]. J. L. Hanquin and J. Demaret

Gowdy $S^1 \otimes S^2$ and S^3 inhomogeneous cosmological models.

Journal of Mathematical Physics. Vol. 23. (1983) Pag:1-3.

[13].H. Quevedo.

The Big Bang in T^3 Gowdy Cosmological Models.

Physical Review D. Vol 67. (2001) Pag: 1-10.

[14]. H. Quevedo.

Acausality in Gowdy spacetimes

Physical Review D. Vol 72. (2004) Pag:3-5.

[15]. B. K. Berger, D. Garfinkle y V. Swamy

Detection of Computer Generated Gravitational Waves in Numerical Cosmologies.

Physical Review D. Vol 64. (1994) Pag. 1-24.

[16]. Maple Soft. Número. 10.

Resolución de Ecuaciones Diferenciales.