INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Medida e Integral de Haar

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PRESENTA:
Luis Manuel Díaz Meza.

Asesor:

Prof. Rubén S. Mancio Toledo.

México D. F., Octubre de 2007

Con todo mi cariño para

Jair, Tristan, Michel, Alan, Zoe, Carol y el travieso Dominic.

Agradecimientos

Por su apoyo y cariño a lo largo de toda mi vida, por su siempre oportuno y sabio consejo, por su ejemplo, . . . , y por tantas cosas más, les estoy infinitamente agradecido a mis padres, Sra. Manuela Meza y Sr. Victor Raúl Díaz; y por que se que siempre estarán a mi lado agradezco a mis hermanos Victor, Octavio, Yari y Julian.

Por su ayuda incondicional, por su tiempo y amor, por estar presente en cada momento, mis más sinceros agradecimientos a Ana Stefany.

Por ser un excelente maestro y consejero, por su ayuda en las diversas materias, por su paciencia al dirigirme en este trabajo agradezco al Prof. Rubén S. Mancio Toledo.

Por su incondicional amistad a lo largo de estos años, un especial agradecimiento para Monica, Jael Rocío, Paola y Toño Koala.

Y por la educación que recibí agradezco al Instituto Politécnico Nacional y a los muchos buenos maestros que tuve.

Índice general

Capítulo 0

Introducción

Los espacios localmente compactos tienen la propiedad de que las medidas definidas sobre ellos poseen propiedades similares a las de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Una característica muy importante que tienen estos espacios es la existencia de subconjuntos compactos, los cuales tienes propiedades de interés. Pero a pesar de la gama de propiedades que poseen estos espacios, son suficientemente generales, para permitir desarrollar una Teoría de la Integración con utilidad en muchas áreas de la ciencia. Además, como se menciona en la página 2 de [18], la Teoría de la Integración sobre espacios abstractos se puede puede reducir a la integración sobre espacios localmente compactos.

La medida de Haar constituye un importante campo de la Teoría de la Medida pues es una generalización útil de la Teoría de Integración de Lebesgue en el grupo $\mathbb{R}^n$. La medida de Haar es una medida invariante por traslaciones sobre un grupo topológico Hausdorff localmente compacto. Un caso particular de los grupos topológicos fue introducido por Sophus Lie en 1870 para estudiar simetrías de ecuaciones diferenciales. A comienzos del siglo XX Hilbert y Brouwer consideraron grupos topológicos mas generales que los tratados por Lie y es cuando Hilbert propone un famoso problema, posteriormente la teoría general es establecida en los años 1926 y 1927 por los matemáticos Schreier y Leja. El famoso probrema, propuesto en 1900 por Hilbert, es conocido como el quinto problema de Hilbert y consiste en la pregunta

¿Es cada grupo topológico localmente euclidiano un grupo de Lie?

En 1933 Haar da un paso fundamental hacia la solución del problema, estableciendo la existencia de una medida invariante por traslaciones sobre un grupo topológico localmente compacto con una base numerable de abiertos. Ese mismo año J. Von Neumann, utilizando ese resultado, resuelve afirmativamente el problema de Hilbert para grupos compactos localmente euclidianos y también prueba que para grupos compactos la medida de Haar es única, salvo una constante multiplicativa. Von Neumann y A. Weyl generalizaron el resultado de Haar a grupos localmente compactos y en 1940 Weyl prueba que la existencia de una medida invariante por traslaciones en un grupo es una característica de los grupos localmente compactos; pero su demostración se basa en el Teorema de Tychonov, el cual es una consecuencia del axioma de elección. En 1940 H. Cartan da una prueba de este resultado sin hacer uso de este tipo de teoremas y además garantiza simultáneamente su existencia y su unicidad, a cambio, su demostración es mas larga y menos simple que la de Weyl.

En este trabajo se estudian algunas de las ideas, en Teoría de la Medida, que se descubrieron entre los siglos XIX y XX. En el Capítulo I se desarrollan los requisitos básicos para entender el espacio ambiente en el que trabajaremos. Se dan las nociones básicas de la teoría de conjuntos, sin ánimos de axiomatizar pero si con algo de profundidad, pasando desde las operaciones de conjuntos, las operaciones de cardinales y el Teorema de Cantor-Bernstein. También se estudian los espacios topológicos, en donde se dan una explicación de los axiomas de numerabilidad y separación. Se exponen los principales resultados, de espacios compactos llagando hasta el Teorema de Tychonoff, para después estudiar espacios mas generales como la son los espacios localmente compactos. Todos estos resultado son aplicables también a los grupos topológicos, que son el resultado de añadir una estructura de grupo a un espacio topológico. Estos espacios son de particular interés para este trabajo pues son el espacio base en el cual se desarrollará la medida e integral de Haar.

En el Capítulo II se estudia el que tal vez sea el objeto de estudio mas importante de este trabajo, la medida. Una propiedad importante para medidas , debida a que podemos "sumar" series infinitas numerables, es la propiedad de aditividad numerable y por ello es necesario el concepto previo de σ–álgebra. Medida es un concepto muy general y con el fin de estudiar a las más interesantes se define el concepto de medida exterior, junto con el Teorema de Completación de Medidas nos llevan al Teorema de Carathéodory, que justifica el estudio de las medidas exteriores. El ejemplo mas importante de esta sección es la construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

En el Capítulo III se da la definición de integral de Lebesgue. Aquí se hace más notorio la ventaja de estudiar espacios en los cuales hay una estructura previa, hasta aquí solo la topología. Pero haciendo hincapié en los espacios topológico localmente compactos, en donde se enuncia el Teorema de Representación de Riesz, el cual nos permite unir la Teoría de la Integración con el estudio de los funcionales lineales en el espacio de las funciones medibles.

Finalmente se da la prueba de la existencia de una medida regular μ en los subconjuntos de Borel de un grupo topológico localmente compacto G que es invariante bajo traslación izquierda, llamada la medida de Haar. Se verifica que hay, salvo una constante multiplicativa, sólo una medida de Haar en G.

Capítulo 1

Topología y Teoría de Conjuntos

1.1. Nociones Básicas de la Teoría de Conjuntos

1.1.1. Conjuntos

No entraremos en los detalles de la Teoría Axiomática de Conjuntos pues sólo con los principios de la Teoría Cantoriana o Intuitiva nos es suficiente para lo que se expondrá en este trabajo. Por ello, no trataremos de dar una definición rigurosa de lo que es un conjunto, sólo diremos que un **conjunto** es una colección, una familia o un conglomerado de objetos. A tales objetos se les llama **elementos** o **miembros** del conjunto y se dirá que pertenecen al conjunto. A los conjuntos los denotaremos con letras mayúsculas A, B, $X, \ldots$ y a sus elementos con letras minúsculas a, b, $x, \ldots$ Algunas ocasiones describiremos a un conjunto de la siguiente manera $\{a,\, b,\, c, \ldots\}$, mostrando sus elementos entre llaves, o si $P(x)$ es la propiedad que define a los elementos del conjunto lo denotaremos por $\{x \mid P(x)\}$. El **conjunto vacío** es el conjunto que no tiene elementos y lo denotaremos con el símbolo $\varnothing$. Cuando un elemento x pertenece a un conjunto A se utilizará el símbolo $\in$ para denotar este hecho, por lo que escribiremos $x \in A$. Cuando todos los elementos del conjunto A sean también elementos de otro conjunto B diremos que A es un **subconjunto** de B y utilizaremos la notación $A \subseteq B$ o $B \supseteq A$. Diremos que dos conjuntos A y B son **iguales** y lo escribiremos $A = B$ si consisten exactamente de los mismos elementos. Equivalentemente $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, en caso contrario se dirá que A y B son **distintos** o diferentes y se escribirá $A \neq B$. Si $A \subseteq B$ pero $A \neq B$ diremos que A es **subconjunto propio** de B.

Frecuentemente utilizaremos un nuevo conjunto definido a partir de uno dado. Mas específicamente, si A es un conjunto cualquiera entonces el conjunto de todos los subconjuntos de A recibe el nombre de **conjunto potencia** de A y se denota con $\mathcal{P}(A)$, es decir,

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

1.1.2. Operaciones con Conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera.

(i) Se define la **unión** de A y B (denotado $A \cup B$) como el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}.$$

(ii) Se define la **intersección** de A y B (denotado $A \cap B$) como el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}.$$

Sea $\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$ una familia indizada de conjuntos,

(i) Se define la unión de la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ como el conjunto

$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha \ \text{ para algún } \alpha \in J\}.$$

(ii) Se define la intersección de la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ como el conjunto

$$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha \ \text{ para todo } \alpha \in J\}.$$

Dos conjuntos A y B se dicen **ajenos** o **disjuntos** si $A \cap B = \varnothing$, *i.e.*, si ellos no tienen ningún elemento en común. Más generalmente, si $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos tal que $A \cap B = \varnothing$ para cada par de conjuntos distintos $A, B \in \mathcal{F}$, entonces se dice que $\mathcal{F}$ es una **familia ajena**.

Fácilmente nos damos cuenta de que las operaciones de unión e intersección son conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A;$$

y también asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Además de que también cumplen las siguientes leyes distributivas:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

La **diferencia** $A \setminus B$ entre dos conjuntos A y B (en ese orden), se define como

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Un caso importante de la diferencia de conjuntos es cuando todos los conjuntos que trabajamos son subconjuntos de un conjunto principal U. En este caso a $U \setminus A$ se le da el nombre de **complemento** de A el cual se denota por A^{c}. Una propiedad importante de la operación complemento son las **leyes de De Morgan**:

$$(\cup A_\alpha)^{\mathsf{c}} = \cap A_\alpha^{\mathsf{c}},$$
$$(\cap A_\alpha)^{\mathsf{c}} = \cup A_\alpha^{\mathsf{c}}.$$

Otra operación que se usará mas adelante es el producto cartesiano de conjuntos: Sean A y B dos conjuntos cualquiera; se define el **producto cartesiano** de A con B, denotado $A \times B$, como el conjunto de parejas ordenadas siguiente

$$A \times B = \{(a,\, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Esta definición se puede extender de manera natural a un número finito de conjuntos, es decir, si $A_1, A_2, \cdots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$ son conjuntos, entonces el producto cartesiano $\prod_{i=1}^{n} A_i$ de ellos es:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Más adelante definiremos el producto cartesiano de una familia arbitraria de conjuntos, pero antes necesitamos algunos conceptos.

1.1.3. Relaciones de Equivalencia

Muchas veces al trabajar con un conjunto nos damos cuenta de que algunos de sus elementos gozan de alguna propiedad común. Esta propiedad causa diferencias entre sus elementos y esto divide al conjunto en grupos diferentes. Por ejemplo en una caja llena de gises y lápices de color, la propiedad de *"pintar de un mismo color"* causa que hagamos distinción entre las pinturas verdes y las rojas. Para formalizar esta idea tan importante en matemáticas es necesario introducir algunos conceptos.

Definición 1.1.1

Sea A un conjunto no vacío. Una ***relación binaria*** *R en A es cualquier subconjunto de $A \times A = A^2$. Dados $a, b \in A$ diremos que a* ***está relacionado con*** *b si $(a, b) \in R$ y en este caso escribiremos aRb.*

Definición 1.1.2

Sea A un conjunto no vacío y sea R una relación binaria en A.

(i) *R es* ***reflexiva*** *en A si para todo $a \in A$, aRa.*

(ii) *R es* ***simétrica*** *en A si para todo $a, b \in A$, aRb implica bRa.*

(iii) *R es* ***transitiva*** *en A si para todo $a, b, c \in A$ tal que aRb y bRa implica aRc.*

(iv) *R es una* ***relación de equivalencia*** *en A si es reflexiva, simétrica y transitiva.*

El concepto de relación de equivalencia es una de las nociones más básicas y por ello más importantes de las matemáticas.

Sea A un conjunto y R una relación de equivalencia en A. Sean $a, b \in A$. Si aRb diremos que a es **equivalente** a b módulo R. Sea $a \in A$ se define la **clase de equivalencia** de a módulo R como el conjunto

$$[a]_R = \{x \in A \mid aRx\}.$$

Como la relación es de equivalencia tenemos que aRa para todo $a \in A$, así $a \in [a]_R$ para todo $a \in A$. Una consecuencia de las definiciones anteriores es el siguiente:

Teorema 1.1.3

Sea A un conjunto y sean $a, b \in A$.

(*a*) *a es equivalente a b módulo R si y sólo si $[a]_R = [b]_R$.*

(*b*) *a no es equivalente a b módulo R si y sólo si $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$.*

Definición 1.1.4

Sea A un conjunto y sea $S \subseteq \mathcal{P}(A)$. Diremos que S es una ***partición*** *de A si*

(*i*) *$B \neq \varnothing$ para todo $B \in S$.*

(*ii*) *$B_1 \cap B_2 = \varnothing$ para todo par de conjuntos distintos $B_1, B_2 \in S$.*

(*iii*) *$A = \cup S = \cup \{B \mid B \in S\}$.*

Notación 1.1.5

Sea R una relación de equivalencia en A. Denotaremos a la familia de todas las clases de equivalencia módulo R por $A/_R$, es decir,

$$A/_R = \{[a]_R \mid a \in A\}.$$

El conjunto $A/_R$ recibe el nombre de **conjunto cociente** de A módulo R.

Existe una correspondencia entre las relaciones de equivalencia y las particiones sobre un conjunto. Según el Teorema 1.1.3, una relación de equivalencia divide al conjunto en subconjuntos ajenos, además, cada elemento de A pertenece a su clase de equivalencia con lo cual las clases de equivalencia cubren totalmente el conjunto A. El teorema siguiente enuncia esto con más precisión.

Teorema 1.1.6

Sea R una relación de equivalencia en A. Entonces $A/_R$ es una partición de A.

En este sentido enunciamos el siguiente:

Teorema 1.1.7

Sea S una partición del conjunto A y sea R_S la relación en A definida por

$$R_S = \{ (a,b) \in A \times A \mid \text{ existe } C \in S \text{ tal que } a, b \in C \} .$$

Entonces R_S es una relación de equivalencia en A.

Definición 1.1.8

Sea A un conjunto y S una partición de A. La relación R_S obtenida en el Teorema 1.1.7, recibe el nombre de ***relación de equivalencia inducida en** A **por la partición** S.*

Teorema 1.1.9

Sea A un conjunto.

(*a*) *Si R es una relación de equivalencia en A y $S = A/_R$, entonces $R_S = R$.*

(*b*) *Si S es una partición de A, entonces $A/_{R_S} = S$.*

1.1.4. Funciones

Un concepto de suma importancia en las matemáticas es el de función. Daremos la definición rigurosa teniendo presente que lo que se maneja en análisis no es tanto la función como tal, sino la "regla de correspondencia".

Definición 1.1.10

Sean X y Y dos conjuntos. Una ***función*** *f de X a Y, denotada $f : X \to Y$, es una relación en $X \times Y$ tal que si xfy_1, xfy_2, entonces $y_1 = y_2$. Al conjunto X se le llama* ***dominio*** *de f, ademas se define el* ***rango, codominio*** *o* ***imagen*** *de f como el conjunto*

$$\operatorname{rang}(f) = \operatorname{Im}(f) = \{ y \in Y \mid \exists x \in X \text{ tal que } xfy \} .$$

Si $x \in X$ al único elemento $y \in Y$ que cumple que xfy le daremos el nombre de ***valor*** *de f en x y escribiremos $f(x) = y$.*

Otros conceptos relacionados con las funciones son los siguientes:

Sean X, Y conjuntos y sea $f : X \to Y$ una función. Si $x \in X$, al elemento correspondiente $y = f(x)$ de Y se le llama **imagen** de x bajo la función f. Si $y \in Y$ y existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$, entonces a x se le llama **preimagen** de y. Si $A \subseteq X$, al conjunto

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{ existe } x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}$$

se le da el nombre de **imagen directa** de A bajo f. Si $B \subseteq Y$ al conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

se le llama **preimagen** o **imagen inversa** de B bajo f. La **gráfica** de f es el conjunto

$$G_f = \{(x, y) \mid x \in X,\ y = f(x)\} \subset X \times Y.$$

Diremos que f es **suprayectiva** si la $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Y}$. Equivalentemente, f es suprayectiva si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Diremos que f es **inyectiva** si $f^{-1}(\{y\})$ consta de a lo más de un elemento para cada $y \in \mathrm{Y}$. Diremos que f es **biyectiva** si es suprayectiva e inyectiva y que f es una biyección entre X y Y. Nótese que en este caso para cada $y \in Y$ existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$, esto permite definir una función de Y a X la cual denotaremos por f^{-1} y nos referiremos a ella como la **función inversa** de f. Resulta inmediato comprobar que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in X$ y $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in Y$.

Si $f : X \to \mathrm{Y}$, $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ son funciones, la función $h : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ definida por la condición $h(x) = g(f(x))$ recibe el nombre de **función composición** y se denota por $h = g \circ f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Sean X, X_1 conjuntos con $X \subseteq X_1$. Si $f : X \to Y$, $f_1 : X_1 \to Y$ son funciones tales que $f(x) = f_1(x)$ para cada $x \in X$, diremos que f_1 es una **extensión** de f y que f es la **restricción** de f_1 a X y se usara la notación $f = f_1|_X$.

Notación 1.1.11

Si A, B son conjuntos, denotaremos por B^A al conjunto

$$B^A = \{ f : A \to B \mid \ f \text{ es función } \} .$$

Ahora es posible generalizar el producto cartesiano:

Definición 1.1.12

Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de conjuntos no vacía. Se define el ***producto cartesiano*** *de la familia como:*

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha = \left\{ f : J \to \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \mid \ f(\alpha) \in A_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \mathrm{J} \right\} .$$

1.1.5. Cardinalidad

Definición 1.1.13

Sean A y B dos conjuntos. Si existe una biyección $f : A \to B$ diremos que los conjuntos son ***equipotentes*** *o que tienen el mismo* ***número cardinal*** *y lo denotaremos por $A \equiv B$.*

Teorema 1.1.14

Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Entonces:

(a) *A es equipotente a A.*

(b) *Si A es equipotente a B, entonces B es equipotente a A.*

(c) *Si A es equipotente a B y B es equipotente a C entonces A es equipotente a C.*

Es decir que la propiedad de ser equipotentes $A \equiv B$, es una relación de equivalencia en la clase de todos los conjuntos.

Definición 1.1.15

Diremos que la cardinalidad de un conjunto A es menor o igual a la cardinalidad del conjunto B, en símbolos $A \leq_c B$, si existe una función inyectiva de A a B.

Observación 1.1.16

Nótese que $A \leq_c B$ significa que $A \equiv B$ o que existe $C \subseteq B$ tal que $A \equiv C$. Escribiremos $A <_c B$ cuando $A \leq_c B$ pero A y B no sean equipotentes.

Lema 1.1.17

Sean A, B y C conjuntos. Entonces:

(a) $A \leq_c A$.

(b) *Si $A \leq_c B$ y $B \equiv C$, entonces $A \leq_c C$.*

(c) *Si $A \leq_c B$ y $A \equiv C$, entonces $C \leq_c B$.*

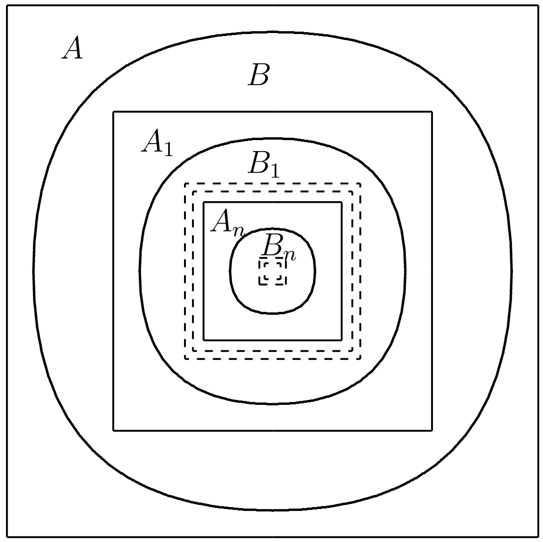
(d) *Si $A \leq_c B$ y $B \leq_c C$, entonces $A \leq_c C$.*

El Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein viene a completar las propiedades anteriores. Aun cuando, su demostración no es elemental por lo que necesitaremos un lema previo.

Lema 1.1.18 (Teorema de la "torta" para números cardinales)

Sean A, A_1 y B conjuntos. Si $A_1 \subseteq B \subseteq A$ y $A_1 \equiv A$ entonces $A \equiv B$.

Demostración. Para la demostración nos auxiliaremos de la siguiente figura:



Debemos de encontrar una biyección $g : A \to B$. Sea $f : A \to A_1$ una biyección. Definimos, de manera recursiva, las sucesiones $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ y $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ de conjuntos de la siguiente manera:

$$A_0 = A, \qquad B_0 = B,$$

y para $n \in \mathbb{N}$,

$$A_{n+1} = f\left(A_n\right), \qquad B_{n+1} = f\left(B_n\right).$$

En la figura los A_n son los cuadrados y los B_n son los discos.

Además $A_0 \subseteq B_0 \subseteq A_1$, y de la definición de A_n se sigue que $A_n \subseteq A_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos para $n \in \mathbb{N}$

$$C_n = A_n \setminus B_n,$$

y

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n, \qquad D = A \setminus C.$$

De la definición de A_n y de B_n se sigue que $f\left(C_n\right) = C_{n+1}$, así

$$f\left(C\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Finalmente se define

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in C \\ x & \text{si} \quad x \in D \end{cases}.$$

No es difícil comprobar que tanto $g|_C$ como $g|_D$ son funciones inyectivas y sus rangos son ajenos. Luego g es una función inyectiva y transforma A en $f(C) \cup D = B$. ■

Teorema 1.1.19 (Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein)

Sean X y Y dos conjuntos tal que $X \leq_c Y$ y $Y \leq_c X$. Entonces $X \equiv Y$.

Demostración. Si $X \leq_c Y$, entonces existe una función inyectiva $f : X \to Y$. Si $Y \leq_c X$, entonces existe otra función inyectiva $g : Y \to X$. Debemos probar que existe una biyección $h : X \to Y$. Tomemos la función $g \circ f : X \to X$, tal función es inyectiva y claramente $g(f(X)) \subseteq g(Y) \subseteq X$; más aún como f y g son funciones inyectivas se tiene que $X \equiv g(f(X))$ y $Y \equiv g(Y)$. Aplicando el Lema 1.1.18, a los conjuntos $A = X$, $B = g(Y)$, $A_1 = g(f(X))$ se completa la demostración. ■

Corolario 1.1.20

Para cualesquiera conjuntos A y B se cumple:

$$A <_c B \quad \textit{si y sólo si} \quad A \leq_c B \quad \textit{y} \quad B \not\equiv A.$$

Puesto que la propiedad de *"ser equivalentes"* es una relación de equivalencia en la clase de todos los conjuntos, a cada conjunto X le asignaremos el símbolo $|X|$, o $\operatorname{card}(X)$ llamado **la cardinalidad** de X, tal que

$$X \equiv Y \quad \text{si y sólo si} \quad |X| = |Y|.$$

En otras palabras, decimos que X e Y tienen la misma cardinalidad o el mismo número cardinal si y sólo si pertenecen a la misma clase de equivalencia y tenemos que.

- $|A| = |B|$ si $A \equiv B$.
- $|A| \leq |B|$ si $A \leq_c B$.
- $|A| < |B|$ si $A <_c B$.

Con esta definición de cardinales se puede hablar de una aritmética de números cardinales que generaliza a la aritmética de los naturales, además tal definición garantiza que cada número natural y el cero son números cardinales. Por otra parte, el Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein garantiza la existencia de la *"tricotomía"* en la clase de todos los números cardinales, es decir, dados α, β números cardinales, se cumple una y sólo una de las afirmaciones siguientes:

$$\alpha < \beta, \qquad \alpha = \beta, \qquad \beta < \alpha.$$

1.1.6. Conjuntos Finitos e Infinitos

Definición 1.1.21

Sea A un conjunto, entonces:

(i) *A es **finito** si existe un número natural n tal que $A \equiv \{1, 2, \ldots, n\}$, y escribiremos $|A| = n$.*

(ii) *A es **infinito** si existe B subconjunto propio de A tal que $A \equiv B$.*

(iii) *A es **numerable** si A es finito o si $A \equiv \mathbb{N}$.*

(iv) *A es **no numerable** si no es numerable.*

Las definiciones de 1.1.21 son muy comunes en las matemáticas y sus resultados son de un uso muy natural. A continuación se mencionaran algunas de las propiedades que estaremos utilizando en este trabajo.

(a) Si A es un conjunto finito y $B \subseteq A$ entonces B es finito.

(b) Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son conjuntos finitos entonces $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ es finito.

(c) El conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto finito A es también finito.

(d) Si A es infinito entonces $|A| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora estableceremos dos resultados de suma importancia en la Teoría de Conjuntos, a saber.

Teorema 1.1.22 (Teorema de Cantor)

Para todo conjunto A, se cumple que $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Demostración. Véase [12] pág. 163. ∎

Teorema 1.1.23

El conjunto $\mathbb{N}$ es infinito (numerable).

Demostración. Es una consecuencia inmediata de los Axiomas de Dedekind, en particular del axioma de la función *sucesor*. ∎

Los conjuntos numerables tienen, también, propiedades importantes. Los subconjuntos $B \subseteq A$ de un conjunto A numerable son también numerables. La unión finita de conjuntos numerables es numerable. Un hecho interesante es que el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable. Así, por ejemplo, podemos enumerar el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Utilizaremos el método de la **diagonal de Cantor**, como se muestra en la siguiente figura:

$$\begin{array}{cccc}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & \cdots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & \cdots \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Entonces la biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se establece como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
(0,0) & (1,0) & (0,1) & (2,0) & (1,1) & (0,2) & \cdots
\end{array}$$

Si k es un número natural podemos probar por inducción que $\mathbb{N}^k$ es también numerable. Explotando esta misma idea del método de la diagonal se puede probar que la unión numerable de conjuntos numerables es también numerable. Es decir, si A_0, A_1, A_2, $\ldots$ es una sucesión de conjuntos numerables. Entonces $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ es numerable. Para demostrarlo formamos para cada A_n una enumeración de sus elementos: a_{n0}, a_{n1}, a_{n2}, $\ldots$, de esta forma el conjunto $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ se puede enumerar utilizando el método de la diagonal, como se muestra en el siguiente diagrama:

$$
\begin{array}{lcccc}
A_0: & a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots \\
A_1: & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\
A_2: & a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Este último resultado permite demostrar que los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables infinitos, pues

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}, \quad \text{en donde} \quad -\mathbb{N} = \{k \in \mathbb{R} \mid -k \in \mathbb{N}\}.$$

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n, \quad \text{en donde} \quad Q_n = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Notación 1.1.24

Usaremos el símbolo $\aleph_0$ para denotar la cardinalidad de los conjuntos infinitos numerables, es decir $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$.

El resultado siguiente es de suma importancia.

Teorema 1.1.25

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración. Utilizaremos nuevamente la diagonal de Cantor. Supongamos que $\mathbb{R}$ es numerable, entonces podemos formar una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ con todos los números reales. Sea $a_0^n.a_1^n a_2^n a_3^n \cdots$ la expansión decimal de r_n. Sea $b_n = 1$ si $a_n^n = 0$, b_n en otro caso, y sea r el número real cuya expansión decimal es $0.b_1 b_2 b_3 \cdots$. Entonces como $b_n \neq a_n^n$ se tiene que $r \neq r_n$ para todo n, entonces r no pertenece a los reales lo cual es una contradicción. ∎

Ejemplo 1.1.26

El conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable. De hecho $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$. Véase [12] pág. 170.

Notación 1.1.27

Utilizaremos el símbolo $\mathfrak{c}$, para designar la cardinalidad de los números reales, es decir, $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$. $\mathfrak{c}$ también recibe el nombre de ***cardinalidad del continuo****.*

En general, si $(A, \leq)$ es un *coto* (conjunto totalmente ordenado) y $B \subseteq A$, $B \neq \varnothing$, se dice que B es un **intervalo** si siempre que $b_1, b_2 \in B$, $x \in A$ sean tales que $b_1 \leq x \leq b_2$, entonces $x \in B$. Y tenemos el siguiente.

Corolario 1.1.28

Si $S \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo no degenerado, entonces $|S| = \mathfrak{c}$.

Aquí conviene comentar algo de mucho interés en la teoría de conjuntos, *"La Hipótesis del Continuo"*.

Del Teorema de Cantor 1.1.22, se deduce que $\aleph_0 < \mathfrak{c}$, además no es díficil demostrar que la clase de todos los números cardinales es bien ordenada y que $\aleph_0$ es el primer cardinal infinito, es decir, si α es un cardinal infinito, entonces $\aleph_0 \leq \alpha$. Por todo esto, cabe hacerse la pregunta siguiente:

¿Existe un conjunto A tal que $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$?

La respuesta a esta pregunta es la *"Hipótesis del Continuo"*:

"No existe ningún conjunto A tal que $\aleph_0 < \mathrm{card}(A) < \mathfrak{c}$". En otras palabras

$$\aleph_1 = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}.$$ [1]

Finalizaremos está sección con algunos resultados importantes de la Teoría de Conjuntos y que son de mucha utilidad en teoría de la medida:

Teorema 1.1.29 (Lema de Kuratowski–Zorn)

Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado en el que toda cadena tiene cota superior, entonces X tiene un elemento maximal.

[1] Para interpretar el cardinal $2^{\aleph_0}$ debemos tener presente que si A es un conjunto, entonces $\mathcal{P}(A)$ es equipotente al conjunto $\{0,1\}^A = \{f : A \to \{0,1\} \mid f \text{ es función}\}$ de ahí que

$$|\mathcal{P}(\mathrm{A})| = \left|\{0,1\}^A\right| := 2^{|A|}.$$

Teorema 1.1.30 (Teorema de Zermelo o principio del buen orden)

Todo conjunto no vacío puede bien ordenarse.

Teorema 1.1.31 (Axioma de Elección o Axioma de Zermelo–Russel)

Toda familia no vacía de conjuntos no vacíos tiene producto cartesiano no vacío.

Teorema 1.1.32 (Forma clásica del Axioma de Elección)

Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos ajenos dos a dos. Entonces existe un conjunto no vacío $E \subseteq \cup\mathcal{F}$ tal que $\operatorname{card}(E \cap A) = 1$ *para todo $A \in \mathcal{F}$.*

Teorema 1.1.33 (Axioma de Elección para familias indizadas de conjuntos)

Sea $\mathcal{F} = \{X_\alpha \mid \alpha \in J\}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Entonces existe una función $\varphi : J \to \bigcup\limits_{\alpha \in J} X_\alpha$ tal que $f(\alpha) \in X_\alpha$ para todo $\alpha \in J$.

Teorema 1.1.34

Los enunciados 1.1.29, 1.1.30, 1.1.31, 1.1.32 y 1.1.33 son equivalentes entre si.

Demostración. Véase [16] pág. 27.[2] ■

1.2. Topología

1.2.1. Espacios Topológicos

Para comenzar daremos la definición de espacio topológico.

Definición 1.2.1

Un ***espacio topológico*** *es una pareja (X, τ), en donde X es un conjunto no vacío y τ es una familia de subconjuntos de X que tiene las siguientes propiedades:*

(*i*) $\varnothing, \mathrm{X} \in \tau$.

(*ii*) *Si $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \tau$, entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.*

[2]En este contexto, véase la obra: Rubin Herman and Rubin Jean E., *Equivalents of the Axiom of Choice* Amsterdam, North–Holland Publishing Company, 1963.

(iii) *Si* $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$*, entonces* $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

Donde I *es cualquier conjuto de índices.*

A los elementos de τ se les llama conjuntos **abiertos** en X y se dice que τ es una **topología** para X. En lo sucesivo, para designar un espacio topológico lo haremos, si no hay ambigüedad en cuanto a la topología, solamente mencionando al conjunto X. Si τ_1 y τ_2 son dos topologías para X tales que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, decimos que τ_1 es más **gruesa** que τ_2 o que τ_2 es más **fina** que τ_1.

Si X es un espacio topológico, entonces un conjunto $F \subseteq \mathrm{X}$ se dice **cerrado** en X si y sólo si $\mathrm{X} \setminus F$ es abierto en X. La familia de conjuntos cerrados tiene las siguientes propiedades:

(a) El espacio X y el conjunto vacío $\varnothing$ son cerrados.

(b) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

(c) La intersección de cualquier familia de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Es posible dar una definición alternativa de espacio topológico en términos de sus conjuntos cerrados.

Sea $A \subseteq \mathrm{X}$ se define el **interior** de A, como la unión de todos los subconjuntos abiertos de X contenidos en A y se denotará con $\overset{\circ}{A}$. La **cerradura, clausura** o **adherencia** de A es la intersección de todos los conjuntos cerrados de X que contienen a A, se denota con el símbolo $C\ell\,(A)$.

Proposición 1.2.2 (Propiedades del interior y la clausura)

Sea X *un espacio topológico y sean* $A, B \subseteq \mathrm{X}$*, entonces:*

(Ia) $\overset{\circ}{A} = \mathrm{X} \setminus C\ell\left(A^{\mathsf{C}}\right)$.

(Ib) $\overset{\circ}{\mathrm{X}} = \mathrm{X}$.

(Ic) $\overset{\circ}{A} \subseteq A$.

(Id) $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

(Ie) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

(If) $\overset{\circ}{A}$ *es el abierto "más grande" contenido en* A.

(Ig) A *es abierto si y sólo si* $A = \overset{\circ}{A}$.

(Ih) $x \in \overset{\circ}{A}$ *si y sólo existe* $U \subseteq \mathrm{X}$ *abierto tal que* $x \in U \subseteq A$.

(Ca) $A \subseteq C\ell\,(A)$.

(Cb) *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $C\ell\,(A) \subseteq C\ell\,(B)$.

(Cc) $x \in C\ell\,(A)$ *si y sólo si para todo* $U \subseteq \mathrm{X}$ *abierto con* $x \in U$ *se cumple que* $U \cap A \neq \varnothing$.

(Cd) $C\ell\,(\varnothing) = \varnothing$ *y* $C\ell\,(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$

(Ce) $C\ell\,(A \cup B) = C\ell\,(A) \cup C\ell\,(B)$.

(Cf) $C\ell\,(C\ell\,(A)) = C\ell\,(A)$.

(Cg) $C\ell\,(A)$ *es el cerrado "más pequeño" de* X *que contiene a* A.

$Ch)$ A *es cerrado en* X *si y sólo si* $A = C\ell\,(A)$.

Definición 1.2.3

(i) *Si* (X, τ) *es un espacio topológico y* $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$, *la topología* $\tau|_{\mathrm{Y}} := \{U \cap \mathrm{Y} \mid U \in \tau\}$ *para* Y *es llamada la* ***topología de subespacio*** *o la* ***topología inducida***, *y el espacio topológico* $(\mathrm{Y}, \tau|_{\mathrm{Y}})$ *es llamado un* ***subespacio topológico*** *de* (X, τ).

(ii) *Sean* (X, τ_1) *y* (Y, τ_2) *espacios topológicos. Un conjunto* $W \subseteq \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *es llamado* ***abierto en la topología producto*** $\tau_1 \times \tau_2$ *si para cada punto* $(x, y) \in W$ *existen* $U \subseteq \mathrm{X}$ *y* $V \subseteq \mathrm{Y}$ *abiertos en* X *e* Y *respectivamente, con* $x \in U$, $y \in V$ *tales que* $U \times V \subseteq W$. *El conjunto* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *dotado con la topología* $\tau_1 \times \tau_2$ *recibe el nombre de* ***espacio producto***.

De manera inductiva se puede definir la topología producto para cualquier cantidad finita de factores.

Definición 1.2.4

(*i*) *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Un conjunto* $V \subseteq \mathrm{X}$ *es una* ***vecindad*** *de un punto* $x \in \mathrm{X}$ *si existe* $U \in \tau$ *tal que* $x \in U \subseteq V$*. En otras palabras* V *es vecindad de* x *si y sólo si* $x \in \overset{\circ}{V}$*.*

(*ii*) *El conjunto*

$$\eta_x = \{ V \subseteq \mathrm{X} \mid \ V \text{ es vecindad de } x \ \}$$

recibe el nombre de ***filtro de vecindades de*** x*.*

Definición 1.2.5

Sea (X, τ) *un espacio topológico. Una familia* $\mathcal{B} \subseteq \tau$ *es una* ***base*** *para la topología de* X *si todo subconjunto abierto no vacío de* X *es unión de elementos de* $\mathcal{B}$*.*

Un espacio topológico puede tener muchas bases para su topología. Se puede demostrar que una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es una base de X si y sólo si $\mathcal{B} \subseteq \tau$, y para todo punto $x \in \mathrm{X}$ y para toda vecindad V de x existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq V$.

De la caracterización anterior para una base se siguen inmediatamente las siguientes propiedades:

(*a*) Para cualesquiera $x \in \mathrm{X}$ y $U, V \in \mathcal{B}$ con $x \in U$, $x \in V$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

(*b*) Para todo $x \in \mathrm{X}$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$, es decir, $\mathrm{X} = \cup \mathcal{B}$.

Recíprocamente, si una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de un conjunto cualquiera X cumple las dos condiciones anteriores, entonces hay una sola topología en X para la cual $\mathcal{B}$ es base.

Una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos abiertos de X se dice que es una **subbase** para la topología de X si la familia de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base para la topología de X. Si $x \in \mathrm{X}$, una familia $\mathcal{B}(x) \subseteq \eta_x$ es una **base local** en x si para toda $V \in \eta_x$ existe $U \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in U \subseteq V$. Para todo $x \in \mathrm{X}$ el sistema de vecindades η_x tiene las siguientes propiedades:

(*a*) $\varnothing \notin \eta_x$

(*b*) Si $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \eta_x$, entonces $\bigcap_{i=1}^{k} V_i$.

(*c*) Si $V \in \eta_x$ y $A \subseteq \mathrm{X}$ es tal que $A \supseteq V$, entonces $A \in \eta_x$.

Cabe observar que si se conoce una base $\mathcal{B}$ para un espacio topológico X entonces el conjunto $\mathcal{B}_x$ de todos los elementos de $\mathcal{B}$ que contienen a x es una base local para x. Recíprocamente si para cada $x \in \mathrm{X}$, $\mathcal{B}(x)$ es una base local, entonces el conjunto $\mathcal{B} = \bigcup_{x\in \mathrm{X}} \mathcal{B}(x)$ forma una base para la topología de X.

Definición 1.2.6 (Axiomas de Numerabilidad)

Sea (X, τ) *es un espacio topológico.*

(*i*) *Se dice que* X *satisface el* ***primer axioma de numerabilidad*** *o que es* ***primero numerable*** *si para todo* $x \in \mathrm{X}$ *existe una base local numerable para su sistema fundamental de vecindades* η_x*.*

(*ii*) *Se dice que* X *satisface el* ***segundo axioma de numerabilidad*** *o que es* ***segundo numerable*** *si tiene una base numerable para su topología.*

Se sigue fácilmente de las definiciones 1.2.6 que un espacio segundo numerable debe ser necesariamente primero numerable. Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$ tiene ambas propiedades, tomando como base para su topología las bolas de radio racional centradas en puntos con coordenadas racionales, sin embargo no todo espacio primero numerable es segundo numerable. De hecho, se tiene el siguiente:

Ejemplo 1.2.7

(*i*) *Todo espacio métrico* (X, d) *es primero numerable*

(*ii*) *El espacio métrico* $(\mathbb{R}, |\ |)$ *es segundo numerable y en consecuencia también es primero numerable.*

En todo lo que sigue siempre consideraremos a $\mathbb{R}$ como espacio topológico $(\mathbb{R}, \xi)$, en donde ξ es la topología euclidiana, es decir la topología inducida por la métrica del valor absoluto.

Definición 1.2.8 (Axiomas de separabilidad)

Sea X *un espacio topológico.*

(*i*) X *es* T_0 *o de* ***Kolmogorov*** *si dados* $x, y \in X$, $x \neq y$, *existe* $\mathcal{U}$ *abierto de* X *tal que* $x \in \mathcal{U}$ *y* $y \notin \mathcal{U}$ *o existe* $\mathcal{V}$ *abierto de* X *tal que* $x \notin \mathcal{V}$ *y* $y \in \mathcal{V}$.

(*ii*) X *es* T_1 *o de* ***Frechet*** *si dados* $x, y \in X$, $x \neq y$, *existen* $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ *abiertos de* X *tales que* $x \in \mathcal{U}$, $y \notin \mathcal{U}$ *y* $x \notin \mathcal{V}$, $y \in \mathcal{V}$.

(*iii*) X *es* T_2 *o de* ***Hausdorff*** *si dados* $x, y \in X$, $x \neq y$, *existen abiertos* $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ *de* X *tales que* $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$ *y* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$.

(*iv*) X *es* ***regular*** *si dados* $A \subseteq X$ *cerrado y* $x \in X \setminus A$ *existen* $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ *abiertos de* X *tales que:* $A \subseteq \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{V}$ *y* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$.

(*v*) X *se dice* T_3 *si* X *es* T_1 *y regular.*

(*vi*) X *es* ***completamente regular*** *si dados* $A \subseteq X$ *cerrado,* $x \in X \setminus A$ *existe una función continua* $f : X \to [0, 1]$ *tal que* $f(A) = \{0\}$ *y* $f(\{x\}) = \{1\}$.

(*vii*) X *es* $T_{3\frac{1}{2}}$ *o de* ***Tychonoff*** *si es* T_1 *y completamente regular.*

(*viii*) X *es* ***normal*** *si dados* $A, B \subseteq X$ *cerrados ajenos, existen* $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ *abiertos de* X *tales que* $A \subseteq \mathcal{U}$, $B \subseteq \mathcal{V}$ *y* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$.

(*ix*) X *es* T_4 *si es* T_1 *y normal.*

Observación 1.2.9

$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Demostración. Véase la sección §4–2 de [17] . ■

El axioma T_1 garantiza que para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ sea cerrado. Mejor aún, si X es un espacio topológico, entonces X es T_1 si y sólo si para todo $x \in X$, $C\ell(\{x\}) = \{x\}$. En particular, en todo espacio métrico los puntos son "cerrados" pues todo espacio métrico es Hausdorff.

Sea X un espacio topológico. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X se dice que **converge** a un punto $a \in X$, denotado $x_n \to a$, si para cada vecindad U de a existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Nótese que en todo espacio Hausdorff una sucesión puede tener a lo más un punto de convergencia.

Por otra parte, todo subespacio de un espacio Hausdorff es a su vez Hausdorff y si X y Y son dos espacios Hausdorff su producto $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ es también Hausdorff.

Definición 1.2.10
Sean X, Y *espacios topológicos y sea* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *una función. Entonces:*

(*i*) f *es* ***continua*** *si la imagen inversa de cualquier subconjunto abierto de* Y *es un abierto de* Y*,*

(*ii*) f *es* ***abierta*** *si la imagen de un abierto de* X *bajo* f *es abierto en* Y*,*

(*iii*) f *es* ***homeomorfismo*** *si es biyectiva y tanto* f *como* f^{-1} *son continuas, en este caso* X *y* Y *se dicen homeomorfos.*

Por ejemplo, es fácil comprobar que la función $id_{\mathrm{X}} : (\mathrm{X}, \tau) \to (\mathrm{X}, \tau)$ es abierta, continua y es un homeomorfismo.. Si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ y $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ son ambas funciones abiertas, continuas o son homeomorfismos, entonces $g \circ f : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ es también abierta, continua o un homeomorfismo.

Si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ es abierta o continua y $\mathrm{X}_0 \subseteq \mathrm{X}$ es un subespacio, entonces la restricción $f|_{\mathrm{X}_0} : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{Y}$ es también abierta o continua. Además $(f_1, f_2) : \mathrm{X} \to \mathrm{Y} \times \mathrm{Z}$ es continua si y sólo si $f_1 : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ y $f_2 : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ son ambas continuas. Una función biyectiva que es tanto abierta y continua es un homeomorfismo.

Una de las construcciones clásicas de la topología es el producto de espacios topológicos este se construye a partir del siguiente procedimiento: Sean X un conjunto no vacío, (Y, τ) un espacio topológico y sea $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ una función. Entonces la familia:

$$\tau_f = \left\{ f^{-1}(U) \mid U \in \tau \right\}$$

es una topología para X y es la "más pequeña" (minimal) que hace continua a la función $f : (\mathrm{X}, \tau_f) \to (\mathrm{Y}, \tau)$. La topología τ_f recibe el nombre de **topología débil** inducida en X por la función f.

Sea X es un conjunto y sea A un conjunto de índices. Para cada $\alpha \in A$ sea $f_\alpha : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}_\alpha$ una función de X a algún espacio topológico Y_α, entonces la topología débil τ que hace que cada una de las funciones f_α sea continua tiene como subbase a la familia:

$$\mathcal{S} = \left\{ f_\alpha^{-1}\left(U_\alpha\right) \mid U_\alpha \text{ es abierto en } \mathrm{Y}_\alpha,\, \alpha \in A \right\}.$$

De esta forma, si $\{\mathrm{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia de espacios topológicos y $\mathrm{X} = \prod_{\alpha \in A} \mathrm{X}_\alpha$, entonces la topología débil que hace que las *proyecciones* (funciones coordenadas) $\pi_\alpha : \mathrm{X} \to \mathrm{X}_\alpha$ sean continuas y es la más pequeña con esta propiedad, recibe el nombre de **topología producto** o de **Tychonoff** para X. Los espacios X_α reciben el nombre de **factores** o **aristas** del espacio producto. En el caso de que A sea finito es posible demostrar que esta definición coincide con la Definición 1.2.3, inciso (*ii*).

Proposición 1.2.11

Si X_α *es un espacio topológico Hausdorff para cada* $\alpha \in A$, *entonces* $\mathrm{X} = \prod_{\alpha \in A} \mathrm{X}_\alpha$ *es Hausdorff.*

Demostración. Véase [6] pág 138. ■

Teorema 1.2.12 (Propiedad universal de la topología producto)

Si Y *es un espacio topológico arbitrario y* X_α *es un espacio topológico para cada* $\alpha \in A$ *y si* $\mathrm{X} = \prod_{\alpha \in A} \mathrm{X}_\alpha$, *entonces* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *es continua si y sólo si* $\pi_\alpha \circ f$ *es continua para cada* $\alpha \in A$.

Demostración. Véase [6] pág., 101 o bien [4], pág., 66. ■

Concluiremos esta sección con dos resultado de suma importancia, los cuales no se demostrarán pero se puede consultar, por ejemplo en [4] o en [7], para una demostración clara.

Teorema 1.2.13 (Lema de Urysohn)

Todo espacio topológico T_4 *es* $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$. *Mejor aún, si* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}$ *son cerrados ajenos, entonces existe una función continua* $f : \mathrm{X} \to [0,1]$ *tal que* $f(\mathrm{A}) = \{0\}$, $f(\mathrm{B}) = \{1\}$

Teorema 1.2.14 (Teorema de extensión de Tietze)

Sea X *un espacio* T_4*. Si* $A \subseteq \mathrm{X}$ *es cerrado y* $f : A \to [0,1]$ *es continua, entonces existe una función continua* $f^* : \mathrm{X} \to [0,1]$ *tal que* $f^*|_A = f$*.*

1.2.2. Espacios Compactos

Sea X un espacio topológico. Una familia Ω de subconjuntos abiertos de X se llama **cubierta abierta** de X si la unión de todos los elementos de Ω es X. Una **subcubierta abierta** de Ω es un subconjunto de Ω que es también cubierta abierta de X.

Definición 1.2.15

Sea X *un espacio topológico. Se dice que* X *es* ***compacto*** *si cualquier cubierta abierta* Ω *de* X *tiene una subcubierta finita.*

De manera más general un subconjunto $E \subseteq \mathrm{X}$ de un espacio topológico se dice que es un **subconjunto compacto** si es un espacio compacto con la topología relativa de subespacio. Se puede ver fácilmente que E es un subconjunto compacto de X si toda cubierta abierta (con la topología de X) de E se puede reducir a una cubierta finita. También es obvio que todo conjunto finito es compacto y que la unión finita de conjuntos compactos es compacta.

Proposición 1.2.16

Si X *e* Y *son subconjuntos ajenos y compactos de un espacio Hausdorff* H*, entonces existen* $V, W \subseteq \mathrm{H}$ *abiertos y tales que* $V \cap W = \varnothing$ *y* $\mathrm{X} \subseteq V$*,* $\mathrm{Y} \subseteq W$*. En otras palabras compacto y Hausdorff implica* T_4*.*

Demostración. Si X y Y constan de un sólo punto entonces el resultado es cierto por ser H Hausdorff.

Demostraremos el caso en el que Y consta de un sólo punto, $\mathrm{Y} = y$, y X es arbitrario. Sea $x \in \mathrm{X}$, entonces $x \neq y$ luego existen V_x y W_x subconjuntos disjuntos y abiertos tal que $x \in V_x$ y $y \in W_x$. La Familia $\{V_x\}_{x \in \mathrm{X}}$ es una cubierta abierta de X. Por ser X compacto existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, puntos de X tal que $\mathrm{X} \subseteq V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Sea

$V = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$ y $W = W_{x_1} \cap \cdots \cap W_{x_n}$. Claramente V y W son ajenos y $\mathrm{X} \subseteq V$ y $y \in W$.

Finalmente se demostrará el caso general. Sea $y \in \mathrm{Y}$, por el caso anterior existen conjuntos V_y y W_y abiertos y disjuntos tal que $\mathrm{X} \subseteq V_y$ y $y \in W_y$. La familia $\{W_y\}_{y \in \mathrm{Y}}$ es una cubierta abierta para Y. Por la compacidad de Y existen puntos $y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathrm{Y}$ tal que $\mathrm{Y} \subseteq W_{y_1} \cup \cdots \cup W_{y_m}$. Sea $V = V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_n}$ y $W = W_{y_1} \cup \cdots \cup W_{y_n}$. Se ve fácilmente que V y W son disjuntos y $\mathrm{X} \subseteq V$ y $y \in W$. ■

Nótese que una parte de la demostración de la Proposición 1.2.16, nos permite afirmar que todo espacio Hausdorff y compacto es regular.

Por otra parte, sea X es un subconjunto compacto de un espacio topológico Hausdorff y x un punto en el complemento de X. Por la Proposición 1.2.16, existe un conjunto abierto V tal que $x \in V$ y $V \cap \mathrm{X} = \varnothing$. Por lo tanto el complemento de X es abierto. Es decir, en un espacio topológico Hausdorff los subconjuntos compactos son cerrados. El recíproco no es cierto pero se tiene la siguiente proposición.

Proposición 1.2.17

Sea X *un espacio topológico Hausdorff y compacto y sea* $A \subseteq \mathrm{X}$. *Entonces,* A *es compacto si y sólo si es cerrado.*

Demostración. La necesidad esta probada por el comentario anterior. Supongamos que A es cerrado. Sea $\{V_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de A. La familia $\{V_i\}_{i \in I} \cap \{\mathrm{X} \setminus A\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto existe una subcubierta finita de X la cual resulta una subcubierta de A una vez que se extraiga $\mathrm{X} \setminus A$ (si es que lo contiene). Así A es compacto. ■

En el caso de $\mathbb{R}^n$ y en general en todo espacio euclidiano de dimensión finita, los conjuntos compactos están totalmente caracterizados. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, como $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff se sigue que A es cerrado. La familia $\{V_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de vecindades de radio n con centro en el origen forman una cubierta abierta para A, por compacidad se sigue que existe n tal que $A \subseteq V_n$, es decir A es acotado. El recíproco también es cierto y se enuncia como sigue:

Teorema 1.2.18 (Teorema de Heine–Borel)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces A es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Demostración. Véase [4], pág., 89. ■

Ejemplo 1.2.19

Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ el intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es compacto; pero $\mathbb{R}$ no lo es pues no es acotado.

Las funciones continuas preservan la compacidad.

Proposición 1.2.20

Sean X, Y espacios topológicos, sea $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ una función continua y sea $A \subseteq \mathrm{X}$ compacto. Entonces $f(A)$ es compacto en Y. En particular si X es compacto y f es además suprayectiva, entonces Y es compacto.

Demostración. Sea $\{W_i\}$ una cubierta abierta de $f(A)$, entonces como f es continua $\{f^{-1}(W_i)\}$ es una cubierta abierta de A y se le puede extraer una subcubierta finita de A la cual bajo f es una subcubierta finita de $f(A)$. ■

Un caso de interés para este trabajo es cuando f es una función real, es decir $\mathrm{Y} = \mathbb{R}$ con la topología euclidiana. En este caso $f(\mathrm{X})$ es compacto en $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, es cerrado y acotado. Entonces $f(\mathrm{X})$ tiene un ínfimo y un supremo en $\mathbb{R}$. Entonces se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.2.21

Toda función real de un espacio compacto es acotada y tiene un máximo y mínimo. Es decir, Si X es un espacio topológico compacto y $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existen $x_0, x_1 \in \mathrm{X}$ tales que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in \mathrm{X}$.

Proposición 1.2.22

Sea X un espacio topológico compacto y sea $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe una cubierta abierta finita $\{V_i\}$ de X tal que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ si x, $y \in V_i$ para algún i.

Demostración. Sea $t \in$ X, entonces existe una vecindad abierta U_t de t tal que

$$|f(x) - f(t)| \leq \epsilon/2 \qquad \text{si } \; x \in U_t.$$

Así

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(t)| + |f(y) - f(t)| \leq \varepsilon \qquad \text{si } \; x, y \in U_t.$$

Por la compacidad de X existen $t_1, \ldots, t_n \in X$ tal que $\{U_{t_i}\}_{i=1}^n$ es una cubierta abierta de X. Basta tomar $V_i = U_{t_i}$ para completar la prueba. ■

Concluimos esta sección enunciando un teorema que nos habla sobre la compacidad de la topología producto. La demostración puede consultarse en [6] pág 224.

Teorema 1.2.23 (Teorema de Tychonoff)

Sea $\{\mathrm{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *una familia de espacios topológicos. Entonces el espacio producto* $\mathrm{X} = \prod_{\alpha \in A} \mathrm{X}_\alpha$ *es compacto si y sólo si* X_α *es compacto para todo* $\alpha \in A$.

Demostración. Véase [4], pág., 90. ■

1.2.3. Espacios Localmente Compactos

Definición 1.2.24

Un espacio topológico Hausdorff es ***localmente compacto*** *si cada uno de sus puntos tiene una vecindad compacta.*[3]

Obviamente un espacio compacto X, es localmente compacto, pues X es vecindad de cada uno de sus puntos.[4] Más sin en cambio el recíproco es falso, por ejemplo, $\mathbb{R}$ no es compacto pero para cada punto $x \in \mathbb{R}$ el intervalo $[x-1, x+1]$ es una vecindad compacta de x, por lo que $\mathbb{R}$ es localmente compacto.

Proposición 1.2.25

Sea X *un espacio localmente compacto y sea* $A \subseteq \mathrm{X}$ *compacto, entonces las vecindades compactas de* A *forman una base para el sistema de vecindades de* A.

[3] No es necesario que el espacio sea Hausdorff para que sea localmente compacto, sin embargo, para fines de este trabajo consideraremos sólo espacios localmente compactos y Hausdorff.

[4] Si se quita la condición de que X sea Hausdorff, esto puede no ser cierto.

Demostración. Supóngase primero que X es compacto. Sea U vecindad de A, sin perdida de generalidad podemos suponer que U es abierta. Entonces de la Proposición 1.2.17, se sigue que $X \backslash U$ es compacto y por la Proposición 1.2.16, existen $V, W \subseteq \mathrm{X}$ abiertos ajenos que contienen a A y a $\mathrm{X} \setminus U$ respectivamente. Como $V \subseteq \mathrm{X} \setminus W$ el cual es cerrado, se tiene que también $C\ell\,(V) \subseteq \mathrm{X} \setminus W$. Además de $\mathrm{X} \setminus W \subseteq U$, se concluye que $C\ell\,(V) \subseteq U$. Pero $C\ell\,(V)$ es una vecindad cerrada de A contenida en U, y $C\ell\,(V)$ es compacto por la Proposición 1.2.17.

Para el caso general supongamos que X es localmente compacto. Veamos, primero, que A tiene al menos una vecindad compacta U. Sea $x \in A$, sea U_x vecindad compacta de x. Como A esta cubierto por los interiores de los conjuntos U_x, existen puntos $x_1, \cdots, x_n$ de A tal que A se encuentra en el interior de $U = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Ahora U es compacto. Así U es una vecindad compacta de A. Sea V una vecindad arbitraria de A. Entonces $U \cap V$ es una vecindad de A en el espacio compacto U, por el primer caso existe una vecindad compacta W de A en el espacio U tal que $W \subseteq U \cap V$. En particular, $W \subseteq V$, y W es una vecindad compacta de A en el espacio X. ■

Corolario 1.2.26

En un espacio localmente compacto las vecindades cerradas de cualquier subconjunto compacto constituyen una base para las vecindades de este conjunto.

Corolario 1.2.27

Si X *es un espacio localmente compacto y Hausdorff. Entonces cada vecindad de un punto* $x \in \mathrm{X}$ *contiene una vecindad compacta de* x*. (Es decir, las vecindades compactas de* x *forman una base local de vecindades para* x*.)*

Resumiendo, podemos obtener una caracterización de los espacios localmente compactos, a saber:

Teorema 1.2.28

Sea X *un espacio topológico Hausdorff. Entonces* X *es localmente compacto si y sólo si para todo* $x \in \mathrm{X}$ *el sistema fundamental de vecindades* η_x *tiene una base local consistente de vecindades compactas de* x*.*

Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice **localmente cerrado** en X si todo punto $x \in A$ tiene una vecindad V en X tal que $A \cap V$ es cerrado en V. Los subconjuntos cerrados y los abiertos son localmente cerrados en X.

Proposición 1.2.29

Sea X *un espacio localmente compacto y* $A \subseteq$ X*, entonces* A *es localmente compacto (con la topología de subespacio) si y sólo si* A *es localmente cerrado en* X.

Demostración. Supongamos que A es localmente compacto. dado $x \in A$ existe una vecindad compacta U de x en A. Sea V una vecindad de x en X tal que $U = A \cap V$. Entonces $A \cap V$ es cerrada en V y por lo tanto A es localmente cerrado.

Ahora supongamos que A es localmente cerrado. Si $x \in A$, nosotros podemos determinar una vecindad V de x de X tal que $A \cap V$ es cerrada en V. Por la Proposición 2.4.6 podemos encontrar una vecindad W de x contenida en V. Por tanto, tenemos que $A \cap W = (A \cap V) \cap W$, vemos que $\mathrm{X} \cap W$ es un subconjunto cerrado de W por tanto compacto. Así $A \cap W$ es una vecindad compacta de x en el espacio A, por lo tanto es localmente compacto. ■

En particular cualquier subconjunto cerrado y cualquier abierto de un espacio localmente compacto son, a su vez, localmente compactos. También cabe notar que la unión y la intersección de un número finito de subconjuntos localmente compactos es también localmente compacto.

1.3. Grupos Topológicos

En esta sección estudiaremos los elementos básicos de la teoría de grupos topológicos. Estos objetos, como su nombre lo indica, son la fusión de dos teorías antes ajenas la teoría de grupos y la topología. Al tratar de introducir una topología en un conjunto dotado de una estructura de grupo tenemos que hacerlo de manera que podamos aprovechar ambas estructuras y estas sean consistentes.

Definición 1.3.1

Sea G un conjunto, $\cdot$ una operación binaria en el conjunto y τ una familia de subconjuntos de G. Diremos que la terna $(G, \cdot, \tau)$ es un ***grupo topológico*** *si se* *cumplen las tres condiciones siguientes:*

(i) $(G, \cdot)$ *es un grupo;*

(ii) (G, τ) *es un espacio topológico y*

(iii) *Las funciones* $g_1 : (G, \tau) \times (G, \tau) \to (G, \tau)$ *y* $g_2 : (G, \tau) \to (G, \tau)$ *definidas por*

$$g_1(x, y) = xy\cdot$$
$$g_2(x) = x^{-1}$$

son continuas.

Cuando el contexto sea claro y no cause confusión denotaremos a un grupo topológico con G en vez de $(G, \cdot, \tau)$. En ocasiones no usaremos el símbolo $\cdot$ para la operación del grupo y entonces escribiremos xy en vez de $x \cdot y$. Usaremos el símbolo e para designar a la identidad del grupo. La condición (iii) de la Definición 1.3.1, la podemos escribir en términos de vecindades, recordando que η_x denota al filtro de vecindades de x, de la siguiente manera:

$(iii)'$ Sean $x, y \in G$, para cada $U \in \eta_{xy}$ existen vecindades $V \in \eta_x$ y $W \in \eta_y$ tales que $V \cdot W \subseteq U$; y para cada $U \in \eta_{x^{-1}}$ existe $V \in \eta_x$ tal que $V^{-1} \subseteq U$. Donde $U \cdot V = \{v \cdot w \mid v \in V,\ w \in W\}$ y $V^{-1} = \{v^{-1} \mid v \in V\}$.

Por ejemplo, todo grupo dotado con la topología discreta es un grupo topológico que recibe el nombre de **grupo discreto**. Existe una caracterización de los grupos topológicos que resulta más simple en ocasiones y es:

Lema 1.3.2

Sea $(G, \cdot)$ *un grupo y* τ *una topología para* G. *Entonces* $(G, \cdot, \tau)$ *es un grupo topológico si y sólo si la función* $g_3 : (G, \tau) \times (G, \tau) \to (G, \tau)$, *donde* $g_3(x, y) = xy^{-1}$ *es continua.*

Demostración. Si G es un grupo topológico es claro que $g_3(x, y) = g_1(x, g_2(y))$ es decir, g_3 es continua pues g_1 y g_2 lo son. Recíprocamente $g_2(y) = g_3(e_G, y)$ y $g_1(x, y) = g_3(x, g_2(y))$ y en virtud de la topología producto resulta que g_1 y g_2 son continuas. ∎

En un grupo topológico G la función $(x,y) \mapsto xy$ es continua por definición, en particular es continua en cada entrada separadamente. Es decir si $g \in G$ es fijo, entonces las funciones $\varphi_g, \sigma_g : G \to G$ definidas por $\varphi_g(x) = xg$ y $\sigma_g(x) = gx$, $x \in G$ son continuas. Por la misma razón sus inversas $\varphi_{g^{-1}}$, $\sigma_{g^{-1}}$ también son continuas; así φ_g y σ_g son homeomorfismos. A φ_g y σ_g se les da el nombre de **traslación derecha** e **izquierda** respectivamente. Por ello cada vecindad V de la identidad e de G es transformada por el homeomorfismo φ_g a la vecindad V_g de g y a la vecindad ${}_gV$ por σ_g. Esto es muy importante pues al trabajar en grupos topológicos las propiedades topológicas locales sólo tienen que investigarse en un sólo punto a saber, e.

Por razones similares la función $x \mapsto x^{-1}$ es un homeomorfismo de G que manda a V en la vecindad V^{-1} de e. Luego es claro que para cada vecindad $U \in \eta_e$ el conjunto $V = U \cap U^{-1} \subseteq U$ también es una vecindad de e y cumple que $V = V^{-1}$. Así el conjunto de **vecindades simétricas** (es decir, $V = V^{-1}$) de la identidad e forman una base para η_e.

Teorema 1.3.3

Para cada $U \in \eta_e$ existe $V \in \eta_e$ vecindad abierta tal que $VV = VV^{-1} \subseteq U$.

Demostración. Véase [1] pág 118. ∎

Del Teorema 1.3.3, se deduce uno de los resultados más importantes en cuanto a grupos topológicos, a saber:

Corolario 1.3.4

Todo grupo topológico $(G, \cdot, \tau)$ es un espacio regular.

Demostración. Es consecuencia del Teorema 1.3.3. Véase [1] pág 118. ∎

Proposición 1.3.5

Sean G un grupo topológico, $x, y \in G$ y $A, B, C, D \subseteq G$ tales que A es abierto y B es cerrado. Entonces:

(a) $C\ell(D^{-1}) = (C\ell(D))^{-1}$.

(b) $C\ell(xDy) = x\, C\ell(D)\, y$.

(*c*) *DA y AD son abiertos.*

(*d*) *By y yB son cerrados.*

(*e*) *$C\ell(C)\,C\ell(D) \subseteq C\ell(CD)$.*

Demostración. Es consecuencia de la continuidad de las funciones $(x,y) \mapsto xy$, $x \mapsto x^{-1}$, y las traslaciones. ■

Definición 1.3.6

*Sea G un grupo topológico y sea $H \subseteq G$. Decimos que H es un **subgrupo topológico** de G si es un subgrupo de G y tiene la topología de subespacio.*

Proposición 1.3.7

Si H es un subgrupo de G, entonces su cerradura $C\ell(H)$ también es un subgrupo de G.

Demostración. Sólo debemos demostrar que $C\ell(H)$ es un subgrupo. Como H es subgrupo la función $(x,y) \mapsto xy$ transforma $H \times H$ en H y por ser continua transforma $C\ell(H \times H)$ en $C\ell(H)$ y, por tanto, $C\ell(H) \times C\ell(H)$ en $C\ell(H)$, luego $C\ell(H)\,C\ell(H) \subseteq C\ell(H)$, es decir, $C\ell(H)$ es cerrado bajo la operación de grupo. De la misma forma y usando la función $x \mapsto x^{-1}$ se demuestra que $(C\ell(H))^{-1} \subseteq C\ell(H)$, es decir, $C\ell(H)$ es cerrado bajo inversos. Así $C\ell(H)$ es un subgrupo de H. ■

Se define de manera natural un **grupo compacto** como un grupo topológico que es un espacio compacto. Un **grupo localmente compacto** es un grupo topológico que es un espacio localmente compacto. Un **grupo Hausdorff** es un grupo topológico que es un espacio de Hausdorff y de la misma forma los demás conceptos.

Ejemplo 1.3.8

$(\mathbb{R}, +, \xi)$ es un grupo localmente compacto y Hausdorff, en donde la topología ξ, está determinada por la familia de vecindades simétricas de 0, siguiente:

$$\mathcal{B}_0 = \{(-1/n, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Teorema 1.3.9 (Subgrupos topológicos de $(\mathbb{R}, +, \xi)$)

(*a*) *Los subgrupos algebraicos de* $(\mathbb{R}, +, \xi)$ *son discretos o densos.*

(*b*) *Los subgrupos cerrados de* $(\mathbb{R}, +, \xi)$ *son* $\mathbb{R}$*,* $\{0\}$ *y* $a\mathbb{Z}$ *con* $a > 0$*.*

(*c*) *El único subgrupo abierto de* $(\mathbb{R}, +, \xi)$ *es* $\mathbb{R}$*.*

Demostración. Véase [9], página 16. ■

Proposición 1.3.10

Sea G *un grupo topológico. Sean* K*,* $L \subseteq G$ *compactos, entonces* KL *y* K^{-1} *son compactos.*

Demostración. La compacidad de KL se sigue de que KL es la imagen del conjunto compacto $K \times L$ bajo la función contínua $(x, y) \mapsto xy$. En el caso de K^{-1} se usa la continuidad de la función $x \mapsto x^{-1}$. ■

Sean G y H grupos topológicos, se pueden definir los siguientes conceptos de manera natural.

Un **homomorfismo continuo** del grupo G al grupo H es una función $f : G \to H$ que es un homomorfismo de grupos y es continua. Un **isomorfismo topológico** entre G y H es una función tal que es un isomorfismo de grupos y un homeomorfismo de espacios topológicos. Un **automorfismo topológico** del grupo G es un isomorfismo topológico de G en sí mismo.

Por ejemplo si g es un elemento fijo de un grupo topológico G, entonces la función $x \mapsto gxg^{-1}$ es un automorfismo topológico. Esto se sigue de que la función es un automorfismo de grupos, y es la composición de dos homomorfismos $x \mapsto gx$, $x \mapsto xg^{-1}$.

Sean X y Y subconjuntos de un grupo topológico G. Supongamos que X es abierto, entonces $\mathrm{XY} = \bigcup_{y \in \mathrm{Y}} \mathrm{X}y$, en donde cada uno de los conjuntos $\mathrm{X}y$ es abierto para cada $y \in \mathrm{Y}$. Por lo tanto, XY también es abierto.

Observación 1.3.11

Un grupo topológico G *es un grupo Hausdorff si y sólo si la identidad* e *es "cerrada" en* G*, es decir, el conjunto* $\{e\}$ *es cerrado en* G*. De hecho en cualquier espacio*

Hausdorff cada punto es cerrado. Recíprocamente si $\{e\}$ es cerrado y $a \neq b$, entonces $ab^{-1} \neq e$ existe una vecindad U de e tal que Hab^{-1} no contiene a e. Sea V una vecindad de e tal que $VV \subset U$. Entonces Va y $V^{-1}b$ son vecindades disjuntas de a y b respectivamente. Así G es un grupo Hausdorff.

Si $\{G_i\}_{i\in J}$ es una familia de grupos topológicos, entonces el conjunto $G = \prod\limits_{i\in J} G_i$ con la estructura de grupo producto y con la topología producto es también es un grupo topológico, pues si $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\} \in G$ la función $(x, y) \mapsto xy$ dada por $xy = \{x_i y_i\}$ es continua si y sólo si la función $(x, y) \mapsto x_i y_i$ es continua para cada índice i. Pero la función $(x, y) \mapsto x_i y_i$ es la composición de las funciones continuas $(x, y) \mapsto (x_i, y_i)$ con $(x_i, y_i) \mapsto x_i y_i$, así $(x, y) \mapsto x_i y_i$ es continua y por lo tanto $(x, y) \mapsto xy$ es continua. De manera similar $x \mapsto x^{-1}$ es continua. Luego G es un grupo topológico. $G = \prod\limits_{i\in J} G_i$ recibe el nombre de **producto topológico** de la familia $\{G_i\}_{i\in J}$.

1.4. Ejemplos de Grupos Topológicos

En esta sección mencionaremos algunos ejemplos de grupos topológicos y de sus propiedades.

Ejemplo 1.4.1

Sea X *un espacio métrico compacto con métrica d. Sea* Hom(X) *el conjunto de todos los homomorfismos de* X *en si mismos. La operación de composición de funciones hace de* Hom(X) *un grupo. Se define una métrica en* Hom(X) *como:*

$$\rho(f,\, g) := \sup_{x\in \mathrm{X}} \{d(f(x),\, g(x))\}\,,$$

para cada $f,\, g \in \mathrm{Hom}(\mathrm{X})$. Entonces Hom(X) *es un grupo topológico si se considera la topología que define la métrica ρ.*

Ejemplo 1.4.2

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n. La topología natural de V se obtiene tomando una base $e_1,\, e_2, \ldots, e_n$ de V y tomando el isomorfismo de espacios vectoriales de V en $\mathbb{R}^n$ definido por $x = \sum x_i e_i \to (x_1,\, x_2, \ldots, x_n)$. Asignamos a

$\mathbb{R}^n$ la topología producto y a V la topología que hace al isomorfismo entre V y $\mathbb{R}^n$ un homomorfismo. La topología que se obtiene de esta manera es independiente de la elección de la base. Es fácil ver que los mapeos $(x, y) \to x+y$ de $V \times V$ en V y $x \to -x$ de V en V son continuos, con lo cual V es un grupo topológico con la operación de suma de vectores. De hecho, V localmente compacto y Hausdorff, debido a que R también lo es.

De lo anterior es obvio que para cada n, $\mathbb{R}^n$ es un grupo localmente compacto con la operación de suma. Si identificamos a $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ entonces es claro que $\mathbb{C}$ es también un grupo localmente compacto y Hausdorff con la operación de suma de números complejos.

Ejemplo 1.4.3

Sea $\mathbb{R}^*$ el conjunto de números reales distintos de cero dotado con la operación producto y la topología que hereda como subconjunto de $\mathbb{R}$. Es fácil ver que de esta manera $\mathbb{R}^*$ es un grupo topológico, que además es localmente compacto y Hausdorff. Si designamos con $\mathbb{R}^*_+$ a los números reales positivos, entonces $\mathbb{R}^*_+$ es un subgrupo topológico de $\mathbb{R}^*$; más aún, la función logaritmo $\log : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ es un isomorfismo topológico entre el grupo multiplicativo $\mathbb{R}^*_+$ y el grupo aditivo de los números reales. Además $\mathbb{R}^*$ es topológicamente isomorfo al producto del grupo topológico $\mathbb{R}^*_+$ con el subgrupo multiplicativo $\{1, -1\}$ de $\mathbb{R}^*$.

*El grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$ de los números complejos diferentes de cero con la topología de subespacio de $\mathbb{C}$ es un grupo localmente compacto y Hausdorff. El subgrupo topológico $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{C}^*$ de todos los números complejos con norma unitaria es un grupo compacto. En general, si $n \in \mathbb{N}$, definimos el n–**toro** como:*

$$\mathbb{T}^n := \left(\mathbb{S}^1\right)^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times, \ldots, \times \mathbb{S}^1}_{n\ veces},$$

es claro que $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1$. Entonces $\mathbb{T}_n$ es un grupo topológico compacto y Hausdorff. Cabe notar que $\mathbb{T}^n$ es un grupo abeliano.

Ejemplo 1.4.4

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre el campo K de los números reales o complejos. Denotaremos con $\mathcal{L}(V)$ el conjunto de transformaciones lineales de

V en si mismo, con las operaciones usuales de suma y multiplicación de transformaciones lineales $\mathcal{L}(V)$ es un espacio vectorial de dimensión n^2 y como un caso particular del Ejemplo 1.4.2 $\mathcal{L}(V)$ adquiere una estructura natural de grupo topológico. El conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$ de matrices $n \times n$ sobre el campo K es también un grupo localmente compacto y Hausdorff con la operación de suma de matrices y la topología que resulta de identificarlo con $\mathbb{R}^{n^2}$ por medio de $(a_{ij}) \to (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{nn})$ el cual es topológicamente isomorfo a $\mathcal{L}(V)$. Se puede probar que la función $\det : \mathcal{M}_{n\times n}(K) \to K$ es continua, así el conjunto $Gl(n,K)$ de todas las matrices $n \times n$ invertibles es un subconjunto abierto de $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$ pues $Gl(n,K) = \det^{-1}(K \setminus \{0\})$. Con la topología de subespacio y con la operación de producto de matrices $Gl(n,K)$ es un grupo topológico. La función determinante $\det$ es un homomorfismo continuo de $Gl(n,K)$ en K^* debido a las propiedades ya conocidas de dicha función.

Un ejemplo un poco más practico y que nos será de utilidad más adelante es el siguiente.

Ejemplo 1.4.5

Sea G el conjunto de matrices A 2×2 de la forma

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$. Entonces G es un grupo con el producto usual de matrices. Se define una métrica d en G como sigue:

Sean $A, B \in G$ con

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$d(A, B) := \sqrt{(x-z)^2 + (y-w)^2}\,.$$

Entonces G es un grupo topológico con la topología definida por la métrica d.

Capítulo 2

σ–Algebras y Medidas

2.1. Algebras y σ–Algebras

DEFINICIÓN 2.1.1

Sea X *un conjunto no vacío. Un* ***álgebra*** *en* X *es una familia* $\mathcal{A}$ *de subconjuntos de* X *que cumple con las siguientes propiedades:*

(*i*) $\mathcal{A}$ *es cerrada bajo complemento, i.e. si* $E \in \mathcal{A}$*, entonces también su complemento* $\mathrm{X} \setminus E \in \mathcal{A}$*.*

(*ii*) $\mathcal{A}$ *es cerrada bajo uniones finitas, i.e. si* $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ *es una colección finita de subconjuntos de* $\mathcal{A}$*, entonces* $\bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j \in \mathcal{A}$*.*

Un álgebra $\mathcal{A}$ *es una* $\sigma-$***álgebra*** *sobre* X *si cumple*

(*iii*)′ $\mathcal{A}$ *es cerrada bajo uniones numerables i.e. si* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una colección numerable de subconjuntos de* $\mathcal{A}$*, entonces* $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$*.*

OBSERVACIÓN 2.1.2

Sea X *un conjunto no vacío.*

(*i*) *Si* $\mathcal{A}$ *es un álgebra o una* σ*–álgebra sobre* X*, entonces* $\varnothing, \mathrm{X} \in \mathcal{A}$*.*

(*ii*) *Toda* σ*–álgebra sobre* X *es un álgebra sobre* X*.*

(*iii*) *Un álgebra* $\mathcal{A}$ *sobre* X *es una* σ*–álgebra sobre* X *si es cerrada bajo uniones numerables y ajenas.*

(*iv*) *Toda álgebra (resp.,* σ*–álgebra) sobre* X *es cerrada bajo intersecciones finitas (resp., bajo intersecciones numerables).*

Demostración.

(*i*) Si $E \in \mathcal{A}$, entonces $\mathrm{X} \setminus E \in \mathcal{A}$, luego $E \cup (\mathrm{X} \setminus E) = \mathrm{X} \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\varnothing \in \mathcal{A}$.

(*ii*) Es inmediata.

(*iii*) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre X. Supongamos que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones numerables y ajenas. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$F_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)^{\mathsf{C}}.$$

Claramente $F_n \in \mathcal{A}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $F_i \cap F_j = \varnothing$ si $i \neq j$. Por hipótesis $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{A}$, pero $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, luego $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ y, por tanto, $\mathcal{A}$ es una σ–álgebra sobre X.

(*iv*) Es inmediata de las leyes de de Morgan. ■

Ejemplo 2.1.3

Sea X *un conjunto no vacío.*

(*a*) *Si* X *es infinito entonces la familia* $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathrm{X} \mid A \text{ o } \mathrm{X} \setminus A \text{ es finito}\}$ *es un álgebra que no es una* σ*–álgebra.*

(*b*) *La familia* $\mathcal{A} = \{\varnothing, \mathrm{X}\}$ *es una* σ*–álgebra sobre* X *la cual se conoce como la* σ–**álgebra indiscreta**.

(*c*) *El conjunto potencia de* X, $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ *es otra* σ*–álgebra sobre* X *y recibe el nombre de* σ–***álgebra discreta***.

(*d*) *La familia* $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathrm{X} \mid A \text{ o } \mathrm{X} \setminus A \text{ es numerable}\}$*, es también una* σ*-álgebra sobre* X*. En el caso en que* X *sea a lo más numerable ésta* σ*–álgebra coincide con el conjunto potencia, en otro caso será distinta.*

Si $\{\mathcal{A}_a\}$ es una familia no vacía de álgebras (o σ–álgebras) sobre X, es fácil comprobar que $\bigcap\limits_a \mathcal{A}_a$ es también un álgebra (o σ–álgebra) sobre X.

Sea S una familia arbitraria de subconjuntos de X, entonces existe una mínima σ–álgebra sobre X que contiene a S, llamada σ–**álgebra generada** por S y se denotará por $\sigma(S)$. A S se le da el nombre de **generador** de $\sigma(S)$. La construcción de $\sigma(S)$ es como sigue:

(*i*) Existe al menos una σ–álgebra sobre X que contiene a S; a saber, $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ la σ–álgebra discreta de X.

(*ii*) Sea Φ la familia de todas las σ–álgebras sobre X que contienen a S.

(*iii*) Entonces tomemos $\sigma(S) = \cap\,\Phi$

Claramente $\sigma(S)$ es una σ–álgebra sobre X que contiene a S además, es la más "pequeña" (con respecto a $\subseteq$) de las σ–álgebras que contienen a S. Esto sigue siendo cierto se se substituye el término σ–álgebra por el de álgebra y el **álgebra generada** por S se construye de forma semejante.

Hasta aquí se han definido todos estos términos sobre conjuntos cualquiera. Los casos importantes son aquellos en los que los conjuntos tienen estructuras propias y la σ–álgebra asociada es "compatible" con dicha estructura, por ejemplo, los espacios topológicos.

Definición 2.1.4

*Sea (X, τ) un espacio topológico. Se define la σ–**álgebra de Borel** sobre X como la mínima σ–álgebra $\mathcal{B}$ que contiene a τ, es decir, la σ–álgebra de Borel sobre X es la σ–álgebra generada por τ. A los miembros de $\mathcal{B}$ se les llama **conjuntos de Borel** o **borelianos**.*

En particular todos los conjuntos abiertos y todos los cerrados de X pertenecen a $\mathcal{B}$. Se dice que un subconjunto de X es un F_σ si es la unión numerable de conjuntos cerrados; y se dice que es un G_δ si es la intersección numerable de conjuntos abiertos de X. Entonces cada conjunto F_σ y cada G_δ es un boreliano y existen muchas familias que generan la σ–**álgebra de Borel**, no sólo los conjuntos abiertos.

Proposición 2.1.5

Sea (X, τ) *un espacio topológico, entonces la* σ*-álgebra de Borel es también generada por la familia de todos los conjuntos compactos.*

Demostración. Véase [3] pág. 5. ■

En espacios topológicos arbitrarios, o aun en los localmente compactos, las dos estructuras definidas arriba pueden ser diferentes, aunque este fenómeno se considera patológico en el análisis matemático. De hecho, las dos estructuras coinciden si el espacio en consideración es un espacio localmente compacto, separable y métrico tal cual lo es $(\mathbb{R}, \xi)$. Si además el espacio en cuestión es un espacio *"polaco"* (métrico separable y completo) "medir" en él ya no es tan complejo. Nótese que $(\mathbb{R}, \xi)$ es un espacio polaco.

2.2. Medida y Medida Exterior

Definición 2.2.1

Sea $\mathcal{P}$ *una familia de subconjuntos de* X*, y sea* $\phi : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$ *una función de conjuntos. Entonces* ϕ *es:*

(*i*) ***monótona*** *si* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}$ *son tales que* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$*, entonces* $\phi(\mathrm{A}) \leq \phi(\mathrm{B})$.

(*ii*) ***finitamente aditiva*** *si* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}$ *con* $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \in \mathcal{P}$ *y* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$*, entonces*

$$\phi(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \phi(\mathrm{A}) + \phi(\mathrm{B}).$$

(*iii*) ***numerablemente subaditiva*** *si* $\{\mathrm{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}$ *es una familia numerable de subconjuntos de* X *tales que* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n \in \mathcal{P}$ *con* $\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m = \varnothing$ *si* $n \neq m$*, entonces*

$$\phi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(\mathrm{A}_n).$$

y ***numerablemente aditiva*** *si*

$$\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n),$$

(*iv*) σ–***finita*** *si existe* $\{\mathrm{A}_n\}_n \subseteq \mathcal{P}$ *con* $\phi(\mathrm{A}_n) < \infty$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *y tal que*

$$\mathrm{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n.$$

Definición 2.2.2

Sea X *un conjunto no vacío.*

(*i*) *Si* $\mathcal{A}$ *es un álgebra sobre* X*, una* ***premedida*** μ *en* X *es una función de conjuntos* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$*, tal que* $\mu(\varnothing) = 0$ *y es numerablemente aditiva.*

(*ii*) *Si* $\mathcal{A}$ *es una* σ*–álgebra sobre* X*, una* ***medida*** μ *en* X *es una función de conjuntos* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$*, tal que* $\mu(\varnothing) = 0$ *y es numerablemente aditiva.*

Es fácil comprobar que toda premedida y toda medida es monótona y que una medida es también premedida. Una medida (resp., premedida) μ en X es llamada **finita** si $\mu(\mathrm{X}) < \infty$, es llamada σ–**finita** si X puede ser escrito como unión numerable de elementos de $\mathcal{A}$ de medida finita (resp., de premedida finita). Una medida μ en X se dice **semifinita** si para cada $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = +\infty$ existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq A$ y $o < \mu(B) < +\infty$. Una medida μ en X se dice **completa** si cumple que para cada $F \subseteq A$ con $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$ se tiene que $F \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 2.2.3

Sea X *no vacío y sea* $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ *la* σ*–álgebra discreta sobre* X*. Sea* $\mu : \mathcal{P}(\mathrm{X}) \to [0, \infty]$ *la función de conjuntos:*

$$\mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card}(A) & \textit{si } A \textit{ es finito} \\ +\infty & \textit{si } A \textit{ es infinito} \end{cases}.$$

μ *así definida es una medida en* X *llamada* ***medida de conteo****. En el caso particular en que* $\mathrm{X} = \mathbb{N}$*,* μ *es* σ*–finita y semifinita.*

Definición 2.2.4

Un ***espacio de medida*** *es una terna* $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$*, donde* X *es un conjunto,* $\mathcal{A}$ *es una* σ*–álgebra sobre* X *y* μ *es una medida en* X*. Algunas veces escribiremos* X *en vez* *de* $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *si esto no causa confusión. Los elementos de la* σ*–álgebra* $\mathcal{A}$ *se denominan subconjuntos* ***medibles*** *de* X *y si* $A \in \mathcal{A}$ *al valor* $\mu(A) \in [0, +\infty]$ *se le llama la medida de* A*. Decimos que* A *es de* ***medida cero*** *o* ***nulo*** *si* $\mu(\mathrm{A}) = 0$.

Vemos intuitivamente que una medida debería de cumplir la siguiente condición: Si $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ y $\mathcal{A}$ es de medida cero, entonces B debería ser de medida cero. Pero esto no siempre es cierto pues en general B no necesariamente es un elemento de $\mathcal{A}$ y por tanto no es medible. Pero podemos definir una extensión de μ en donde este tipo de conjuntos tengan medida cero. Pero antes debemos de garantizar que el dominio de definición de la extensión sea realmente una σ–álgebra.

Definición 2.2.5

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida. Decimos que* μ *es* ***completa*** *si siempre que* $A \in \mathcal{A}$ *con* $\mu(A) = 0$ *y* $B \subseteq A$ *entonces* $B \in \mathcal{A}$.

En este caso $\mu(\mathrm{B}) = 0$, debido a la monotonía de μ. Es decir, una medida es completa si cada subconjunto de un conjunto nulo es también nulo.

Teorema 2.2.6 (Teorema de completación de medidas)

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida y sean*

$$\mathcal{N} = \{\mathrm{N} \in \mathcal{A} \mid \ \mu(\mathrm{N}) = 0\}$$
$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{\mathrm{E} \cup \mathrm{F} \mid \ \mathrm{E} \in \mathcal{A},\ \mathrm{F} \subset \mathrm{N} \text{ para algún } \mathrm{N} \in \mathcal{N}\}.$$

Entonces $\widetilde{\mathcal{A}}$ *es una* σ*–álgebra sobre* X *que contiene a* $\mathcal{A}$ *y existe una única medida completa* $\widetilde{\mu} : \widetilde{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ *tal que* $\widetilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.

Demostración. La demostración se dividirá en 5 partes:

I. Demostremos primero que $\mathcal{A} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}$ y que $\widetilde{\mathcal{A}}$ es una σ–álgebra.

Si $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, entonces $\mathrm{A} = \mathrm{A} \cup \varnothing$ y $\mu(\varnothing) = 0$, y por lo tanto $\mathrm{A} \in \widetilde{\mathcal{A}}$, es decir que $\mathcal{A} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$. Por otra parte, puesto que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{N}$ son cerradas bajo uniones numerables, resulta que $\widetilde{\mathcal{A}}$ es también cerrada bajo uniones numerables. Solo falta demostrar que $\widetilde{\mathcal{A}}$ es cerrada bajo complementos. En efecto, si $\mathrm{E} \cup \mathrm{F} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ con $\mathrm{E} \in \mathcal{A}$ y $\mathrm{F} \subset \mathrm{N}$ para algún $\mathrm{N} \in \mathcal{N}$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $\mathrm{E} \cap \mathrm{N} = \varnothing$, pues en caso contrario, ponemos $\mathrm{F}-\mathrm{E}$ y $\mathrm{N}-\mathrm{E}$ en vez de F y N (ya que $\mu(\mathrm{N}-\mathrm{E})=0$ y $\mathrm{F}-\mathrm{E}\subset\mathrm{N}-\mathrm{E}\in\mathcal{N}$). De esta forma:

$$\mathrm{E}\cup\mathrm{F}=(\mathrm{E}\cup\mathrm{N})\cap\left(\mathrm{N}^{\mathsf{C}}\cup\mathrm{F}\right).$$

Por lo que

$$(\mathrm{E}\cup\mathrm{F})^{\mathsf{C}}=\left((\mathrm{E}\cup\mathrm{N})\cap\left(\mathrm{N}^{\mathsf{C}}\cup\mathrm{F}\right)\right)^{\mathsf{C}}=(\mathrm{E}\cup\mathrm{N})^{\mathsf{C}}\cup\left(\mathrm{N}^{\mathsf{C}}\cup\mathrm{F}\right)^{\mathsf{C}},$$

pero $\mathrm{E},\mathrm{N}\in\mathcal{A}$, de manera que $(\mathrm{E}\cup\mathrm{N})^{\mathsf{C}}\in\mathcal{A}$. Ahora bien,

$$\left(\mathrm{N}^{\mathsf{C}}\cup\mathrm{F}\right)^{\mathsf{C}}=\mathrm{N}\cap\mathrm{F}^{\mathsf{C}}=\mathrm{N}-\mathrm{F}\subset\mathrm{N}\in\mathcal{N},$$

luego $(\mathrm{E}\cup\mathrm{F})^{\mathsf{C}}\in\widetilde{\mathcal{A}}$ y, por tanto, $\widetilde{\mathcal{A}}$ es una σ–álgebra sobre X.

II. Ahora demostremos la existencia de $\widetilde{\mu}$.

Definimos la función de conjuntos $\widetilde{\mu}:\widetilde{\mathcal{A}}\to[0,+\infty]$ de la siguiente regla de correspondencia:

$$\widetilde{\mu}(\mathrm{E}\cup\mathrm{F}):=\mu(\mathrm{E}). \tag{2.1}$$

Primero, debemos demostrar que $\widetilde{\mu}$ está bien definida. Sean $\mathrm{E}_1\cup\mathrm{F}_1,\mathrm{E}_2\cup\mathrm{F}_2\in\widetilde{\mathcal{A}}$ tales que:

$$\mathrm{E}_1\cup\mathrm{F}_1=\mathrm{E}_2\cup\mathrm{F}_2 \tag{2.2}$$

donde $\mathrm{F}_1\subset\mathrm{N}_1$ y $\mathrm{F}_2\subset\mathrm{N}_2$ para algunos $\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2\in\mathcal{N}$. Por otra parte la ecuación (2.2) implica que $\mathrm{E}_1\subset\mathrm{E}_2\cup\mathrm{N}_2$ y $\mathrm{E}_2\subset\mathrm{E}_1\cup\mathrm{N}_1$ y como μ es una medida sobre X se tiene que:

$$\begin{aligned}\mu(\mathrm{E}_1)&\leq\mu(\mathrm{E}_2)+\mu(\mathrm{N}_2)=\mu(\mathrm{E}_2)\\ \mu(\mathrm{E}_2)&\leq\mu(\mathrm{E}_1)+\mu(\mathrm{N}_1)=\mu(\mathrm{E}_1).\end{aligned}$$

Con lo que $\mu(\mathrm{E}_1)=\mu(\mathrm{E}_2)$ y por lo tanto, $\widetilde{\mu}(\mathrm{E}_1\cup\mathrm{F}_1)=\widetilde{\mu}(\mathrm{E}_2\cup\mathrm{F}_2)$ y, por lo tanto, $\widetilde{\mu}$ es función.

III. Ahora demostremos que $\widetilde{\mu}$ es una medida sobre X.

(a) Si N es cualquier subconjunto nulo de X, entonces $\widetilde{\mu}(\varnothing)=\widetilde{\mu}(\varnothing\cup\mathrm{N})=\mu(\varnothing)=0$.

(b) Sea $\{E_n \cup F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\widetilde{\mathcal{A}}$ tal que

$$(E_i \cup F_i) \cap (E_j \cup F_j) = \varnothing \quad \text{para } i \neq j.$$

Entonces la sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ es de elementos ajenos dos a dos, luego

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cup F_n)\right) &= \widetilde{\mu}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n)\right)\right) \\
&:= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\mu}(E_n \cup F_n).
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\widetilde{\mu}$ es una medida sobre X.

IV. Ahora demostremos que $\widetilde{\mu}$ es completa.

Sea $M \in \widetilde{\mathcal{A}}$ tal que $\widetilde{\mu}(M) = 0$. Entonces existen $E \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{N}$ y $F \subset N$ tal que $M = E \cup F$ y $\widetilde{\mu}(M) = \widetilde{\mu}(E \cup F) = \mu(E) = 0$

Sea $G \subset M$, debemos probar que $G \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Pero $G \subset M$ implica que $G \subset E \cup F \subset E \cup N$; como $E, N \in \mathcal{A}$ y

$$\mu(E \cup N) \leq \mu(E) + \mu(N) = 0 + 0 = 0,$$

entonces $E \cup N \in \mathcal{N}$. Luego $G = \varnothing \cup G$ donde $G \subset E \cup N \in \mathcal{N}$. Por lo tanto $G \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

V. Por último se demostrará la unicidad de $\widetilde{\mu}$.

Sea $\mu_1 : \widetilde{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ otra medida completa tal que $\mu_1|_{\mathcal{A}} = \mu$. Debemos probar que $\widetilde{\mu} = \mu_1$.

Sea $E \cup F \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Entonces

$$\mu_1(E \cup F) \leq \mu_1(E) + \mu_1(F) = \mu_1(E) + 0 = \mu_1(E) = \mu(E),$$

luego

$$\mu_1(E \cup F) \leq \mu(E) = \widetilde{\mu}(E \cup F).$$

Por otra parte

$$\widetilde{\mu}(E \cup F) \leq \widetilde{\mu}(E) + \widetilde{\mu}(F) = \widetilde{\mu}(E) + 0 = \widetilde{\mu}(E) = \mu(E) = \mu_1(E \cup F).$$

Luego $\widetilde{\mu} = \mu_1$.

Por lo tanto, la completación es única. ∎

DEFINICIÓN 2.2.7

A la función de conjuntos $\widetilde{\mu}$ *del Teorema 2.2.6, se le llama* ***completación*** *de* μ.

Notemos por otra parte, que si μ es completa, entonces $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ y $\widetilde{\mu} = \mu$. Sin embargo, no todos los subconjuntos de X son medibles, ni siquiera si la medida es completa.

Supongamos que $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida. La fórmula

$$\mu^* (\mathrm{S}) = \inf \{ \mu (\mathrm{A}) \mid \mathrm{A} \in \mathcal{A},\ \mathrm{S} \subseteq \mathrm{A} \}$$

para cada $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{X}$ define una función $\mu^* : \mathcal{P}(\mathrm{X}) \rightarrow [0, +\infty]$. Esta función cumple con la siguientes propiedades: $\mu^*(\varnothing) = 0$, $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$, es monótona, es numerablemente subaditiva, y

$$\mu^* (\mathrm{S}) = \mu^* (\mathrm{S} \cap \mathrm{A}) + \mu^* \left(\mathrm{S} \cap \mathrm{A}^{\mathsf{C}} \right)$$

para cualesquiera conjuntos $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ y $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{X}$.

Esto motiva las siguientes

DEFINICIÓN 2.2.8

Sea X *un conjunto no vacío, una* ***medida exterior*** *en* X*, es una función de conjuntos* $\mu : \mathcal{P}(\mathrm{X}) \rightarrow [0, +\infty]$ *tal que*

(*i*) $\mu(\varnothing) = 0$.

(*ii*) μ *es monótona.*

(*iii*) μ *es numerablemente subaditiva.*

DEFINICIÓN 2.2.9

Sea μ^* *una medida exterior sobre el conjunto no vacío* X*, un conjunto* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ *se dice* μ^**–**medible*** *si*

$$\mu^* (\mathrm{E}) = \mu^* (\mathrm{E} \cap \mathrm{A}) + \mu^* \left(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}^{\mathsf{C}} \right) \quad \textit{para todo} \ \ \mathrm{E} \subseteq \mathrm{X}.$$

Se observa, a partir de la subaditividad, que

$$\mu^* (E) \leq \mu^* (E \cap A) + \mu^* \left(E \cap A^{\mathsf{C}}\right)$$

siempre se cumple, cualquiera que sean los conjuntos E y A, y si $\mu^* (E) = +\infty$ la desigualdad contraria es clara. Entonces la definición es equivalente a decir que $A \subseteq X$ es μ^*–medible si y sólo si $\mu^* (E) \geq \mu^* (E \cap A) + \mu^* \left(E \cap A^{\mathsf{C}}\right)$ para todo $E \subset X$ tal que $\mu^* (E) < +\infty$.

Lema 2.2.10

Toda medida exterior μ^* sobre el conjunto no vacío X, es finitamente aditiva sobre el conjunto de los μ^*–medibles.

Demostración. Sean $A, B \subset X$ μ^*–medibles con $A \cup B$ μ^*–medible y $A \cap B = \varnothing$. Entonces

$$\begin{aligned} \mu^* (A \cup B) &= \mu^* ((A \cup B) \cap A) + \mu^* \left((A \cup B) \cap A^{\mathsf{C}}\right) \\ &= \mu^* (A \cap A) + \mu^* \left(B \cap A^{\mathsf{C}}\right) \\ &= \mu^* (A) + \mu^* \left(B \cap A^{\mathsf{C}}\right). \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \mu^* (B) &= \mu^* (B \cap A) + \mu^* \left(B \cap A^{\mathsf{C}}\right) \\ &= \mu^* (\varnothing) + \mu^* \left(B \cap A^{\mathsf{C}}\right) = \mu^* \left(B \cap A^{\mathsf{C}}\right). \end{aligned}$$

Por tanto $\mu^* (A \cup B) = \mu^* (A) + \mu^* (B)$ y así μ^* es finitamente aditiva sobre la familia de los μ^*-medibles. ■

Teorema 2.2.11 (Teorema de Carathéodory)

Si μ^* es una medida exterior sobre el conjunto no vacío X, entonces la familia:

$$\mathcal{M} = \left\{A \subseteq X \mid A \textit{ es } \mu^* \textit{–medible}\right\}$$

es una σ–álgebra sobre X y $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida completa sobre X.

Demostración.

I. Demostremos primero que $\mathcal{M}$ es una σ–álgebra.

(*a*) Probemos que $\mathcal{M}$ es cerrada bajo complementos. Sea $A \in \mathcal{M}$, entonces

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E \cap A^{C}\right) = \mu^*\left(E \cap A^{C}\right) + \mu^*\left(E \cap \left(A^{C}\right)^{C}\right)$$

para todo $E \subseteq X$. De esta manera $A^{C} \in \mathcal{M}$.

(*b*) Veamos que $\mathcal{M}$ es cerrada bajo uniones finitas. Sean $A, B \in \mathcal{M}$. Sea $E \in \mathcal{P}(X)$ arbitrario, como A y B son medibles se tiene:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E \cap A^{C}\right) \quad \text{y} \\ \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*\left(E \cap B^{C}\right), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap A) &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*\left(E \cap A \cap B^{C}\right) \quad \text{y} \\ \mu^*\left(E \cap A^{C}\right) &= \mu^*\left(E \cap A^{C} \cap B\right) + \mu^*\left(E \cap A^{C} \cap B^{C}\right). \end{aligned}$$

De manera que podemos escribir $\mu^*(E)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) = {} & \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*\left(E \cap A \cap B^{C}\right) \\ & + \mu^*\left(E \cap A^{C} \cap B\right) + \mu^*\left(E \cap A^{C} \cap B^{C}\right). \end{aligned}$$

Pero $A \cup B = (A \cap B) \cup \left(A \cap B^{C}\right) \cup \left(A^{C} \cap B\right)$; así que por la subaditividad de la medida exterior:

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) \leq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*\left(E \cap A \cap B^{C}\right) + \mu^*\left(E \cap A^{C} \cap B\right)$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*\left(E \cap A^{C} \cap B^{C}\right) \\ &= \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*\left(E \cap (A \cup B)^{C}\right). \end{aligned}$$

Como la desigualdad contraria siempre se cumple, se sigue que:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*\left(E \cap (A \cup B)^{C}\right).$$

Por tanto $A \cup B$ es medible, es decir, $A \cup B \in \mathcal{M}$.

Luego, $\mathcal{M}$ cerrada bajo uniones finitas, es decir, $\mathcal{M}$ es un álgebra sobre X.

(c) Veamos ahora que $\mathcal{M}$ es cerrado bajo unión numerable de conjuntos ajenos. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos μ^*–medibles ajenos dos a dos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ y sea $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Como $\mathcal{M}$ es un álgebra sobre X, $B_n \in \mathcal{M}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora sea $E \in \mathcal{P}(X)$ arbitrario. Como A_n es μ^*–medible para cada $n \in \mathbb{N}$ se sigue del Lema 2.2.10 que

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*\left(E \cap B_n \cap A_n^{\mathsf{C}}\right)\\
&= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1})\\
&= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right)\\
&= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (E \cap A_i)\right)\\
&= \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Por otra parte, como B_n es μ^*–medible si $n \in \mathbb{N}$ se deduce de la ecuación (2.3) que

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*\left(E \cap B_n^{\mathsf{C}}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*\left(E \cap B^{\mathsf{C}}\right)$$

y tomando el límite cuando $n \to \infty$, deducimos que

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*\left(E \cap B^{\mathsf{C}}\right),$$

de donde por subaditividad de la medida exterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*\left(E \cap B^{\mathsf{C}}\right)\\
&\geq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)\right) + \mu^*\left(E \cap B^{\mathsf{C}}\right)\\
&= \mu^*(E \cap B) + \mu^*\left(E \cap B^{\mathsf{C}}\right) \geq \mu^*(E).
\end{aligned}$$

De esta forma $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*\left(E \cap B^{\mathsf{C}}\right)$. Luego, $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ y, por tanto, $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra sobre X.

II. Demostremos que $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida. Sólo debemos de probar que $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ es numerablemente aditiva. Para ello tomemos una sucesión de conjuntos $\{\mathrm{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μ^*-medibles y ajenos dos a dos. Por la subaditividad numerable de la medida exterior tenemos que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\left(\mathrm{A}_n\right),$$

y poniendo $\mathrm{B} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n$ en vez de E en la ecuación (2.3), obtenemos

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\left(\mathrm{A}_n\right).$$

Por tanto, μ^* es numerablemente aditiva en $\mathcal{M}$, luego $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida sobre X.

III. Finalmente sólo debemos demostrar que $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida completa. Sean $\mathrm{A}, \mathrm{E} \in \mathcal{P}(\mathrm{X})$, tales que $\mu^*(\mathrm{A}) = 0$ y E arbitrario. Entonces

$$\mu^*(\mathrm{E}) \leq \mu^*(\mathrm{E}\cap\mathrm{A}) + \mu^*\left(\mathrm{E}\cap\mathrm{A}^{\complement}\right) = \mu^*\left(\mathrm{E}\cap\mathrm{A}^{\complement}\right) \leq \mu^*(\mathrm{E}).$$

Luego $\mu^*(\mathrm{E}) = \mu^*(\mathrm{E}\cap\mathrm{A}) + \mu^*\left(\mathrm{E}\cap\mathrm{A}^{\complement}\right)$. Por tanto $\mathrm{A} \in \mathcal{M}$ y $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida completa. ■

2.3. ¡La Función Longitud No es una Medida!

Cuando trabajamos en $\mathbb{R}$ estamos acostumbrados a medir distancias o calcular longitudes, veremos que esta noción intuitiva no nos proporciona una verdadera medida en el sentido expuesto aquí.

El conjunto ordenado de los números reales extendidos se define como

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

con el orden $\leq$ usual de $\mathbb{R}$ extendido a $-\infty < a < +\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Se define el **conjunto de intervalos** de $\widetilde{\mathbb{R}}$ como el conjunto:

$$\mathcal{J} = \left\{\mathrm{I} \subset \widetilde{\mathbb{R}} \mid \text{ I es un intervalo}\right\}$$

y usaremos el símbolo $\mathrm{I}\,(a,b)$ para denotar a cualquiera de los intervalos (a,b), $[a,b]$, $(a,b]$ o $[a,b)$ con $a,b\in\widetilde{\mathbb{R}}$.

Cabe notar que si $a\in\mathbb{R}$ los conjuntos:

$$[-\infty,a]=\left\{x\in\widetilde{\mathbb{R}}|x\le a\right\}=\{x\in\mathbb{R}|x\le a\}\cup\{-\infty\}=(-\infty,a]\cup\{-\infty\}$$
$$[a,+\infty]=\left\{x\in\widetilde{\mathbb{R}}|a\le x\right\}=\{x\in\mathbb{R}|a\le x\}\cup\{+\infty\}=(a,+\infty]\cup\{+\infty\}$$

son intervalos. Entonces también $\mathbb{R},\widetilde{\mathbb{R}},\varnothing\in\mathcal{J}$ y $\{a\}\in\mathcal{J}$ para todo $a\in\mathbb{R}$. Notemos que $\mathcal{J}$ <u>no</u> <u>es</u> una σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$; ni siquiera es un álgebra sobre $\mathbb{R}$ pues claramente $\mathcal{J}$ no es cerrada bajo complementos.

Definición 2.3.1

La función de conjuntos $\ell ong:\mathcal{J}\to[0,\,+\infty]$ *definida por la regla de correspondencia:*

$$\ell ong\,(\mathrm{I}\,(a,b))=\begin{cases} b-a & si\;\; a,b\in\mathbb{R}\\ \\ +\infty & si\;\; a=-\infty\;\; o\; b=+\infty\end{cases}\tag{2.4}$$

se llama la función ***longitud.***

La función ℓong goza de muchas propiedades interesantes:

Teorema 2.3.2 (Propiedades de la función ℓong)

La función $\ell ong:\mathcal{J}\to[0,+\infty]$ *goza de las siguientes propiedades:*

(a) $\ell ong\,(\varnothing)=0$, $\ell ong\,(\mathbb{R})=\ell ong\,(\widetilde{\mathbb{R}})=+\infty$, $\ell ong\,(\{a\})=0$ *para todo* $a\in\mathbb{R}$.

(b) *La función longitud es monótona.*

(c) *La función longitud es finitamente aditiva.*

(d) *La función longitud es numerablemente subaditiva*

(e) *La función longitud es invariante bajo traslaciones, es decir, si* $\mathrm{I}\in\mathcal{J}$ *y* $x\in\mathbb{R}$, *entonces*

$$\ell ong\,(\mathrm{I}+x)=\ell ong\,(\mathrm{I})\quad para\ todo\ x\in\mathbb{R}.$$

donde $\mathrm{I}+x$ *es el intervalo:*

$$\mathrm{I}+x=\{r+x\mid r\in\mathrm{I}\}\,.$$

(f) *La función longitud es σ–finita.*

Demostración.

(a) Es inmediata de la definición de ℓong.

(b) Sean $\mathrm{I}, \mathrm{J} \in \mathcal{J}$ con $\mathrm{I} \subset \mathrm{J}$. Existen tres casos:

I. Si I es un intervalo infinito, entonces claramente el intervalo J también lo es, por lo que $\ell ong\,(\mathrm{I}) \leq \ell ong\,(\mathrm{J})$.

II. Si I es un intervalo infinito pero el intervalo J no lo es, entonces claramente $\ell ong\,(\mathrm{I}) \leq \ell ong\,(\mathrm{J})$.

III. Si los intervalos I, J no son infinitos, entonces los intervalos tienen extremos reales y así $\ell ong\,(\mathrm{I}) \leq \ell ong\,(\mathrm{J})$ es consecuencia del orden en $\mathbb{R}$.

(c) Sean $\mathrm{I}, \mathrm{J} \in \mathcal{J}$ con $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} \in \mathcal{J}$, $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \varnothing$. Hagamos $\mathrm{Q} = \mathrm{I} \cup \mathrm{J}$.

I. Si el intervalo Q es infinito, entonces al menos uno de los intervalos I, J es infinito, digamos que lo es J. Por lo tanto, $\ell ong\,(\mathrm{Q}) = +\infty$ y a su vez $\ell ong\,(\mathrm{J}) = +\infty$, por lo que

$$+\infty = \ell ong\,(\mathrm{Q}) = \ell ong\,(\mathrm{I}) + (+\infty) = \ell ong\,(\mathrm{I}) + \ell ong\,(\mathrm{J})\,.$$

II. Si Q es un intervalo de extremos reales, digamos $\mathrm{Q} = \mathrm{I}\,(a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces necesariamente debe existir $c \in \mathrm{Q} = \mathrm{I}\,(a, b)$ tal que $\mathrm{I} = \mathrm{I}\,(a, c)$ y $\mathrm{J} = \mathrm{I}\,(c, b)$. Por ejemplo, Si $\mathrm{Q} = (a, b]$, entonces $\mathrm{I} = (a, c]$, $\mathrm{J} = (c, b]$ o bien $\mathrm{I} = (a, c)$, $\mathrm{J} = [c, b]$. En todo caso:

$$\begin{aligned} \ell ong\,(\mathrm{Q}) &= b - a; \\ \ell ong\,(\mathrm{I}) &= c - a; \\ \ell ong\,(\mathrm{J}) &= b - c. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \ell ong\,(\mathrm{Q}) &= b - a \\ &= b - a + c - c \\ &= c - a + b - c \\ &= \ell ong\,(\mathrm{I}) + \ell ong\,(\mathrm{J})\,. \end{aligned}$$

(d) Sean $\{\mathrm{I}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{J}$ una familia de intervalos tales que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n \in \mathcal{J}$, entonces debemos mostrar que

$$\ell ong\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell ong\,(\mathrm{I}_n)\,.$$

La demostración no se hará en este trabajo, pero se puede consultar en [20] pág. 2.

(e) Sean $\mathrm{I} \in \mathcal{J}$ y $x \in \mathbb{R}$. Si I es un intervalo infinito, el conjunto $\mathrm{I} + x$ es también un intervalo infinito, por lo que

$$\ell ong\,(\mathrm{I}) = +\infty = \ell ong\,(\mathrm{I} + x)\,.$$

Si I es un intervalo finito, digamos $\mathrm{I}\,(a, b)$, entonces $\mathrm{I} + x$ es también un intervalo finito, de hecho, $\mathrm{I} + x = \mathrm{I}\,(a + x, b + x)$. Luego

$$\begin{aligned} \ell ong\,(\mathrm{I}) &= \ell ong\,(\mathrm{I}\,(a, b)) = b - a \\ \ell ong\,(\mathrm{I} + x) &= \ell ong\,(\mathrm{I}\,(a + x, b + x)) = b + x - (a + x) = b - a. \end{aligned}$$

Y por lo tanto, $\ell ong\,(\mathrm{I}) = \ell ong\,(\mathrm{I} + x)$.

(f) Es obvio que

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} [k, k+1]\,,$$

en donde $\ell ong\,([k, k+1]) = 1 < \infty$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. De manera semejante

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (k, k+1]\,,$$

en donde, $\ell ong\,((k, k+1]) = 1 < \infty$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, la función longitud es σ–finita. ■

Debido a que la función ℓong en finitamente aditiva se le puede extender a una premedida.

Sea $\mathcal{A}$ el álgebra generada por la familia $\mathcal{J}$ de intervalos de $\mathbb{R}$. Dado un intervalo $\mathrm{I}\,(a, b) \in \mathcal{J}$ su complemento $(\mathrm{I}\,(a, b))^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$ es nuevamente un intervalo (en el caso en el que al menos alguno de a o b no sea finito) o es unión de dos intervalos (en el caso de que ambos a y b sean finitos). Entonces se sigue que los elementos de $\mathcal{A}$ se pueden escribir como la unión finita de intervalos en $\mathcal{J}$, es decir si $P \in \mathcal{J}$, existen $a_1,\, b_1,\, a_2,\, b_2, \ldots, a_n\, b_n \in \mathbb{R}$ tal que $P = \mathrm{I}\,(a_1,\, b_1) \cup \cdots \cup \mathrm{I}\,(a_n,\, b_n)$. Luego extendemos el dominio de definición de ℓong al álgebra $\mathcal{A}$ de manera natural como:

$$\ell ong\,(P) = \ell ong\,(\mathrm{I}\,(a_1,\, b_1)) + \cdots + \ell ong\,(\mathrm{I}\,(a_n,\, b_n))\,. \tag{2.5}$$

Con lo cual *ℓong es una premedida* en $\mathbb{R}$, aun cuando no lo probaremos explícitamente pues se sigue de manera inmediata de las propiedades de la función ℓong (Teorema 2.3.2) y de la ecuación (2.5). En otras palabras, la familia:

$$\mathcal{A} = \{\,\mathcal{O} :\; \mathcal{O} \text{ es unión finita de intervalos no degenerados y ajenos de } \mathbb{R}\;\} \cup \{\varnothing\}\,,$$

es un álgebra sobre $\mathbb{R}$ y la función $\ell ong : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ es una premedida sobre $\mathbb{R}$.

Antes de continuar con la función ℓong veamos el siguiente resultado:

Teorema 2.3.3 (Teorema de Ulam)

Sea $\mu : \mathcal{P}\,(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ una medida sobre $\mathbb{R}$ tal que

(a) $\mu\,((n,\, n+1]) < \infty$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$*,*

(b) $\mu\,(\{x\}) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Entonces $\mu\,(\mathrm{E}) = 0$ *para todo* $\mathrm{E} \in \mathcal{P}\,(\mathbb{R})$*.*

Demostración. Claramente será suficiente con demostrar que $\mu\,((n,\, n+1]) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ (pues cada $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}$ puede ser cubierto por una cantidad finita o numerable de intervalos de la forma $(n,\, n+1]$). Sea $n \in \mathbb{Z}$ fijo y sea $\mathcal{U} = (n,\, n+1]$. Como $\operatorname{card}\,(\mathcal{U}) = \mathfrak{c}$, la hipótesis del continuo implica que existe un conjunto Ω bien ordenado por $<$ tal que para cada $x \in \mathcal{U}$, el conjunto

$$\Omega_x = \{\, y \in \Omega :\; y < x\}$$

es numerable. De esta forma

$$\operatorname{card}\,(\Omega_x) \leq \aleph_0$$

para todo $x \in \mathcal{U}$ y esto sucede si y sólo si existe una función inyectiva

$$\psi_x : \Omega_x \to \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, si x, $y \in \mathfrak{U}$ son tales que $x < y$, entonces $\psi_x(y) \in \mathbb{N}$, es decir $\psi_x(y)$ es un número natural. Mejor aún, la inyectividad de la función ψ_x implica que para todo x, y, $z \in \mathfrak{U}$ tales que $x < y < z$ se tiene $\psi_z(x) \neq \psi_z(y)$, es decir, una y solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

$$\psi_z(x) < \psi_z(y) \tag{2.6}$$

$$\psi_z(y) < \psi_z(x) \tag{2.7}$$

por la tricotomía de $\mathbb{N}$.

Definamos ahora, para cada $x \in \mathfrak{U}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto:

$$\mathrm{F}_{(x,n)} := \{\, y \in \mathfrak{U} : \; y > x, \; \psi_y(x) = n \,\}.$$

Por lo tanto, para cualquier $x \in \mathfrak{U}$ fijo

$$\mathfrak{U} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}_{(x,n)} \right) \cup \{ y \in \Omega \subset \mathfrak{U} : \; y < x \;\; \text{o} \;\; y = x \}. \tag{2.8}$$

Ya que el conjunto $\{ y \in \Omega \subset \mathfrak{U} : \; y < x \;\; \text{o} \;\; y = x \}$ es numerable y cada $y \in \mathfrak{U}$ es tal que $\mu(\{y\}) = 0$, se tiene que

$$\mu\left(\{ y \in \Omega \subset \mathfrak{U} : \; y < x \;\; \text{o} \;\; y = x \} \right) = 0.$$

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ la familia

$$\left\{ \mathrm{F}_{(x,n)} \right\}_{(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathfrak{U}}$$

es una familia de conjuntos ajenos dos a dos. En efecto, sean $x, y \in \mathfrak{U}$, $x \neq y$ y $n \in \mathbb{N}$, si existe $z \in \mathrm{F}_{(x,n)} \cap \mathrm{F}_{(y,n)}$, entonces $\psi_z(x) = n = \psi_z(y)$ y además $z > x$, $z > y$, pero como $x \neq y$ se tiene que

$$x < y < z \;\; \text{o bien} \;\; y < x < z,$$

en cualquiera de los dos casos la condición $\psi_z(x) = n = \psi_z(y)$ lleva a una contradicción. Por lo tanto, la familia $\left\{ \mathrm{F}_{(x,n)} \right\}_{(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathfrak{U}}$ es una familia de conjuntos ajenos dos a dos, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, ya que por hipótesis $\mu(\mathfrak{U}) < \infty$ y además $\mathfrak{U}$ es innumerable, $\mu\left(\mathrm{F}_{(n,x)}\right) > 0$ es posible sólo para una cantidad numerable de elementos $x \in \mathfrak{U}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{card}\left(\{ x \in \mathfrak{U} : \; \mu(\mathrm{F}_{n,x}) > 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \} \right) \leq \aleph_0.$$

Luego existe $x \in \mathcal{U}$ tal que $\mu(\mathrm{F}_{n,x}) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, de la ecuación (2.8), concluimos que $\mu(\mathcal{U}) = 0$. Por tanto $\mu(\mathrm{E}) = 0$ para todo $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$. ■

Corolario 2.3.4

La función longitud no es una medida sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. La función longitud cumple:

i) $\ell ong(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

ii) $\ell ong((n, n+1]) = 1 < \infty$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Por el Teorema de Ulam, si la función longitud fuese una medida sobre $\mathbb{R}$, entonces $\ell ong(\mathrm{E}) = 0$ para todo $\mathrm{E} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, lo cual es claramente absurdo. Por tanto, la función longitud no es una medida sobre $\mathbb{R}$. ■

Terminamos esta sección con algunos resultados que serán de mucha ayuda para construir la medida de Lebesgue.

Teorema 2.3.5 (Teorema de construcción de medidas exteriores)

Sea X *un conjunto no vacío. Sean* $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{X}$ *y sea* $\rho : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ *una función de conjuntos que cumplen:*

(i) $\varnothing, \mathrm{X} \in \mathcal{G}$.

(ii) $\rho(\varnothing) = 0$.

Entonces la función $\mu^* : \mathcal{P}(\mathrm{X}) \to [0, +\infty]$ *definida por*

$$\mu^*(\mathrm{E}) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(\mathrm{A}_n) \mid \mathrm{A}_n \in \mathcal{G}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{E} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\right\}$$

es una medida exterior sobre X.

Demostración. Véase [10] pág. 31. ■

Observación 2.3.6

Sea X *un conjunto no vacío,* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{X})$ *un álgebra sobre* X *y* μ_0 *una premedida sobre* X. *Entonces* *i)* μ_0 *es finitamente aditiva.*

ii) μ_0 *induce una medida exterior sobre* X, *a saber:*

$$\mu^*(\mathrm{E}) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_0(\mathrm{A}_n) : \mathrm{A}_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{E} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n\right\}. \tag{2.9}$$

Demostración. El inciso (ii) es consecuencia del Teorema de construcción de medidas exteriores, así que sólo demostraremos el inciso (i).

Sea $\{\mathrm{A}_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}$ una familia finita mutuamente ajena de elementos de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre X, se tiene que $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i \in \mathcal{A}$. Definamos $\mathrm{A}_k = \varnothing$ para todo $k > n$. De esta forma $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\mathrm{A}_k \in \mathcal{A}$. Por el inciso (ii) de la definición de premedida se tiene que:

$$\begin{aligned}\mu_0\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathrm{A}_k\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu_0(\mathrm{A}_n)\\ &= \mu_0(\mathrm{A}_1) + \cdots + \mu_0(\mathrm{A}_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\mu_0(\varnothing)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mu_0(\mathrm{A}_k).\end{aligned}$$

Por tanto μ_0 es finitamente aditiva. ■

Utilizando el Teorema de Carathéodory y la Observación 2.3.6, se establece la siguiente:

Proposición 2.3.7

Sean X *un conjunto no vacío,* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{X})$ *un álgebra sobre* X *y* $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *una premedida. Entonces.*

i) $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$. *Aquí* μ^* *es la medida exterior definida por la ecuación (2.9), del inciso* (ii) *de la Observación 2.3.6. En otras palabras* μ^* *es una extensión de* μ_0.

ii) *Todo elemento* $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ *es* μ^**–medible, es decir,* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$*, donde* $\mathcal{M}$ *es la* σ*–álgebra del Teorema de Carathéodory.*

Demostración.

i) Suponer $\mathrm{E} \in \mathcal{A}$. Si $\mathrm{E} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ con $\mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_1 &= \mathrm{E} \\
\mathrm{B}_2 &= \mathrm{E} - \mathrm{A}_1 \\
\mathrm{B}_3 &= \mathrm{E} - (\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2) \\
&\vdots \\
\mathrm{B}_n &= \mathrm{E} - \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{A}_i = \mathrm{E} \cap \left(\mathrm{A}_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{A}_i \right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

considerando $\mathrm{A}_0 = \varnothing$. Como $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre X, $\mathrm{B}_n \in \mathcal{A}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, la familia $\{\mathrm{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es mutuamente ajena y de manera obvia se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n = \mathrm{E} \in \mathcal{A}$. Por σ–aditividad de la premedida μ_0 sucede que

$$\mu_0(\mathrm{E}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(\mathrm{B}_n).$$

De la construcción de la familia $\{\mathrm{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se sigue que

$$\mu_0(\mathrm{E}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(\mathrm{B}_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(\mathrm{A}_n)$$

pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(\mathrm{A}_n) \in \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(\mathrm{C}_n) : \mathrm{C}_n \in \mathcal{A} \text{ para toda } n \in \mathbb{N},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{C}_n \supseteq \mathrm{E} \right\}. \quad (2.10)$$

Como la familia $\{\mathrm{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ es arbitraria y el conjunto $\mathrm{E} \in \mathcal{A}$ también lo es, se sigue que $\mu_0(\mathrm{E})$ es cota inferior del conjunto:

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(\mathrm{C}_n) : \mathrm{C}_n \in \mathcal{A} \text{ para toda } n \in \mathbb{N},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{C}_n \supseteq \mathrm{E} \right\}.$$

Por lo tanto,

$$\mu_0(\mathrm{E}) \leq \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(\mathrm{C}_n) : \mathrm{C}_n \in \mathcal{A} \text{ para toda } n \in \mathbb{N},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{C}_n \supseteq \mathrm{E} \right\} = \mu^*(\mathrm{E}).$$

Luego, $\mu_0(\mathrm{E}) \leq \mu^*(\mathrm{E})$ cualesquiera sea el conjunto $\mathrm{E} \in \mathcal{A}$. La desigualdad contraria $\mu^*(\mathrm{E}) \leq \mu_0(\mathrm{E})$, se obtiene al tomar en la ecuación $\mathrm{E} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$, $\mathrm{A}_1 = \mathrm{E}$ y $\mathrm{A}_k = \varnothing$ para todo $k > 1$. Por lo tanto, $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.

ii) Sea $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ debemos demostrar que $\mathrm{A} \in \mathcal{M} = \left\{\mathrm{M} \subseteq \mathrm{X} : \mathrm{M} \text{ es } \mu^*\text{–medible}\right\}$. Sea $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{X}$ y sea $\varepsilon > 0$. Por la caracterización de ínfimo de subconjuntos de $\mathbb{R}$ se tiene que existe una familia $\{\mathrm{B}_n\}_n \subseteq \mathcal{A}$ con $\mathrm{E} \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n$ y tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0\left(\mathrm{B}_n\right) \leq \mu^*\left(\mathrm{E}\right) + \varepsilon.$$

Pero como μ_0 es aditiva sobre $\mathcal{A}$ se cumple que:

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\mathrm{E}\right) + \varepsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0\left(\mathrm{B}_n \cap \mathrm{A}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0\left(\mathrm{B}_n \cap \mathrm{A}^c\right) \\ &\geq \mu^*\left(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}\right) + \mu^*\left(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}^c\right). \end{aligned}$$

Luego, $\mu^*\left(\mathrm{E}\right) + \varepsilon \geq \mu^*\left(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}\right) + \mu^*\left(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}^c\right)$ para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{X}$. Por tanto, $\mu^*\left(\mathrm{E}\right) \geq \mu^*\left(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}\right) + \mu^*\left(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}^c\right)$ para todo $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{X}$. Como la desigualdad contraria es siempre cierta, sucede que

$$\mu^*\left(\mathrm{E}\right) = \mu^*\left(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}\right) + \mu^*\left(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}^c\right) \quad \text{para todo } \mathrm{E} \subseteq \mathrm{X}.$$

Esto implica que A es μ^*–medible. ■

Resumiendo lo visto hasta este momento, se tiene que toda premedida induce una medida exterior que a su vez induce una medida completa, es decir si $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre X y $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ es una premedida, existe por el Teorema de construcción de medidas exteriores, una medida exterior $\mu^* : \mathcal{P}\left(\mathrm{X}\right) \to [0, +\infty]$ tal que $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ y por el Teorema de Caracthéodory existe una σ–álgebra $\mathcal{M}$ sobre X tal que $\mu^* : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ es una medida completa y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$.

Completaremos con el siguiente teorema los resultados necesarios para construir la medida de Lebesgue mediante la función longitud.

Teorema 2.3.8 (Teorema de extensión de premedidas)

Sean X *un conjunto no de vacío,* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}\left(\mathrm{X}\right)$ *un álgebra sobre* X *y* $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *una premedida sobre* X. *Sea* $\mathcal{N}$ *la* σ*–álgebra generada por* $\mathcal{A}$. *Entonces existe una medida* $\mu : \mathcal{N} \to [0, +\infty]$ *que restringida a* $\mathcal{A}$ *es* μ_0, *a saber,* $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ *con* $\mu = \mu^*|_{\mathcal{N}}$, *en donde,* μ^* *es la medida exterior inducida en* X *por* μ_0. *Si* $\nu : \mathcal{N} \to [0, +\infty]$ *es otra medida* *sobre* X *que extiende a* μ_0*, entonces* $\nu(\mathrm{E}) \leq \mu(\mathrm{E})$ *para todo* $\mathrm{E} \in \mathcal{N}$ *con igualdad cuando* $\mu(\mathrm{E}) < \infty$*. Además, si* μ_0 *es* σ*–finita, entonces* μ *es la única extensión de* μ_0 *a una medida con dominio* $\mathcal{N}$*.*

Demostración. Sea μ^* la medida exterior sobre X definida por la ecuación (2.9), del inciso (*ii*) de la Observación 2.3.6. Por el Teorema de Carathéodory, la familia.

$$\mathcal{M} = \left\{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{X}) : \mathrm{A} \text{ es } \mu^*\text{–medible}\right\}$$

es una σ–álgebra sobre X y $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida completa. Por la Proposición 2.3.7,

$$\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$$

y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$. Por lo tanto, la σ–álgebra $\mathcal{N}$, generada por $\mathcal{A}$ sobre X, está contenida en $\mathcal{M}$. Entonces pongamos $\mu : \mathcal{N} \to [0, +\infty]$ como:

$$\mu(\mathrm{E}) = \mu^*(\mathrm{E}) \quad \text{para todo } \mathrm{E} \in \mathcal{N},$$

μ es claramente una medida y además $\mu(\mathrm{A}) = \mu^*(\mathrm{A})$ para todo $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, es decir, $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu^*$.

Probemos pues la segunda afirmación. Si $\mathrm{E} \in \mathcal{N}$ y $\mathrm{E} \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ con $\mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $\nu : \mathcal{N} \to [0, +\infty]$ que extiende a μ_0, es decir, $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ y tal que $\nu(\mathrm{E}) \leq \mu(\mathrm{E})$ para todo $\mathrm{E} \in \mathcal{N}$. Sea $\mathrm{E} \in \mathcal{A}$ y $\mathrm{E} \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ con $\mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto:

$$\nu(\mathrm{E}) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(\mathrm{A}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(\mathrm{A}_n).$$

La última igualdad se debe a que $\mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y a que $\nu = \mu_0$ en $\mathcal{A}$. Luego, $\nu(\mathrm{E}) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_0(\mathrm{A}_n)$ cualesquiera que sea la familia $\{\mathrm{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ que cubra a E. De esta manera:

$$\begin{aligned}
\nu(\mathrm{E}) &\leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(\mathrm{A}_n) : \mathrm{A}_n \in \mathcal{A},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{E} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\right\} \\
&= \mu^*(\mathrm{E}) = \mu(\mathrm{E}).
\end{aligned}$$

Por otra parte, ya que $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre X y si $\mathrm{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$ se tiene:

$$\nu(\mathrm{A}) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\right) = \mu(\mathrm{A}). \tag{2.11}$$

Nótese que en la ecuación anterior es lícito tomar límites, por ser $\mathcal{A}$ un álgebra sobre X.

Por otra parte, si $\mu(\mathrm{E}) < \infty$, de la definición de límite de una sucesión de números reales, deducimos que para todo $\varepsilon > 0$, es posible elegir los elementos $\mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$ de manera que

$$\mu(\mathrm{A}) < \mu(\mathrm{E}) + \varepsilon.$$

y así $\mu(\mathrm{A} - \mathrm{E}) < \varepsilon$. Usando ahora la ecuación (2.11), tenemos que:

$$\mu(\mathrm{E}) \leq \mu(\mathrm{A}) = \nu(\mathrm{A}) = \nu(\mathrm{E}) + \nu(\mathrm{A} - \mathrm{E}) \leq \nu(\mathrm{E}) + \mu(\mathrm{A} - \mathrm{E}) \leq \nu(\mathrm{E}) + \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario se tiene que $\mu(\mathrm{E}) = \nu(\mathrm{E})$ siempre que $\mu(\mathrm{E}) < \infty$.

Para finalizar, supongamos que μ_0 es σ–finita, es decir, existe una familia de conjuntos $\{\mathrm{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, tal que $\mathrm{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n$ y $\mu_0(\mathrm{B}_n) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, bien podemos suponer que la familia $\{\mathrm{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ajena dos a dos. Entonces para cualquier $\mathrm{E} \in \mathcal{M}$, tenemos:

$$\mu(\mathrm{E}) = \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n\right) \cap \mathrm{E}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathrm{B}_n \cap \mathrm{E}) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(\mathrm{B}_n \cap \mathrm{E}) = \nu(\mathrm{E}).$$

Esto prueba la unicidad de μ en el caso de que μ_0 sea σ–finita y el teorema se ha probado. ∎

Observación 2.3.9

Leyendo con detenimiento la demostración del teorema, se observa que hemos probado que más que extender μ_0 a una medida sobre $\mathcal{N}$, la hemos extendido a una medida sobre $\mathcal{M}$ la σ–álgebra de los μ^*–medibles.

2.4. La Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Como hemos visto la función ℓong no es una medida en $\mathcal{J}$, pero podemos extenderla a una función de conjuntos que si lo sea. La forma moderna de hacerlo es vía una extensión de la función ℓong. Denotaremos con $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ a la **σ–álgebra de Borel en**

$\mathbb{R}$; es decir a la σ–álgebra generada, por ejemplo, por la familia $\mathcal{J}$. Entonces la función ℓong puede extenderse a una medida $\widehat{m}$ en la familia $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Luego existe una medida exterior m^* definida en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ que extiende a $\widehat{m}$. Dicha extensión no es una medida, pero por el Teorema de Caratheodory existe una única medida m completa definida en la σ–álgebra de Lebesgue $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ de todos los conjuntos m^*–medibles llamada la **medida de Lebesgue en** $\mathbb{R}$. Comenzando su desarrollo (junto con la integral de Lebesgue) por el matemático Henri León Lebesgue con una nota que él le envio a Comptes Rendu, la cual fue publicada en 1901. Esta nota que llevaba por título *"Sur une généralisation de l'intégrale définie"*, para después ser desarrollada completamente por el autor en 1902 en su tesis doctoral.

De hecho, tomando en cuenta que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ esta generada por la familia:

$$\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a<b\},$$

se sigue del Teorema de Extensión de Premedidas (Teorema 2.3.8) y del de construcción de medidas exteriores (Teorema 2.3.5) que la **medida exterior de Lebesgue** es la función $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ con regla de correspondencia:

$$m^*(\mathrm{E}) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell ong\,((a_n,b_n)) \,|\, \mathrm{E} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n,b_n) \right\}$$

Teorema 2.4.1

Para todo $\mathrm{E} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ *existen* $\mathrm{B} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *y* $\mathrm{N} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ *conjunto nulo tales que* $\mathrm{E} = \mathrm{B} \cup \mathrm{N}$.

Demostración. Es inmediata del Teorema de Completación de Medidas, (Teorema 2.2.6), el cual permite afirmar que:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \{\mathrm{B} \cup \mathrm{N} \mid \mathrm{B} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ \mathrm{N} \text{ es Lebesgue medible con } m(\mathrm{N}) = 0\}.$$

∎

Teorema 2.4.2

Para todo conjunto $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathrm{E} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.

(b) *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\mathrm{G} \subset \mathbb{R}$ *abierto con* $\mathrm{E} \subset \mathrm{G}$ *y tal que* $m^*(\mathrm{G} \setminus \mathrm{E}) < \varepsilon$.

(c) *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}$ *cerrado con* $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ *y tal que* $m^*(\mathrm{E} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon$.

(d) $\mathrm{E} = \mathrm{G} \setminus \mathrm{N}$, *en donde,* G *es* G_δ *y* N *es nulo.*

(e) $\mathrm{E} = \mathrm{F} \setminus \mathrm{N}$, *en donde,* F *es* F_σ *y* N *es nulo.*

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b) Sea $\mathrm{E} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. Existen dos casos a saber:

Caso I. Si $m(\mathrm{E}) < \infty$, entonces

$$m(\mathrm{E}) = m^*(\mathrm{E}) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell ong(\mathrm{I}_n) \mid \mathrm{I}_n \in \mathcal{J} \text{ para toda } n \in \mathbb{N},\ \mathrm{E} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n \right\}.$$

Luego, para todo $\varepsilon > 0$, debe existir una familia $\{\mathrm{J}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{J}$ tal que $\mathrm{E} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_n$ con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell ong(\mathrm{J}_n) < m^*(\mathrm{E}) + \varepsilon. \tag{2.12}$$

Sin perdida de generalidad podemos suponer J_n abierto para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_n$ es abierto en $\mathbb{R}$ y en consecuencia $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Escribamos ahora

$$\mathrm{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_n,$$

de esta forma

$$\mathrm{G} = (\mathrm{G} \setminus \mathrm{E}) \cup \mathrm{E}, \tag{2.13}$$

en donde la unión es ajena. Como $(\mathbb{R}, |\ \ |)$ es un espacio métrico 2° numerable, podemos suponer que la familia $\{\mathrm{J}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es mutuamente ajena y por lo escrito en párrafos anteriores $\mathrm{G} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ así que

$$m(\mathrm{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell ong(\mathrm{J}_n). \tag{2.14}$$

Por las ecuaciones (2.12) y (2.13), se tiene que

$$\begin{aligned} m(\mathrm{G}) &= m(\mathrm{G} \setminus \mathrm{E}) + m(\mathrm{E}) \\ &= m^*(\mathrm{G} \setminus \mathrm{E}) + m^*(\mathrm{E}) \\ &< m^*(\mathrm{E}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $m(\mathrm{E}) < \infty$ se tiene que $m^*(\mathrm{G} \setminus \mathrm{E}) < \varepsilon$.

Caso II. Si $m(\mathrm{E}) = \infty$, se procede como en el caso de la función longitud, aprovechando el hecho de que la medida de Lebesgue es σ–finita. Para cada $k \in \mathbb{N}$ escribimos

$$\mathrm{E}_k = \mathrm{E} \cap [-k, k] .$$

Claramente $\mathrm{E}_k \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y además $m(\mathrm{E}_k) < \infty$, mejor aún, es obvio que $m(\mathrm{E}_k) \leq 2k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por el caso finito, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\mathrm{G}_k \subset \mathbb{R}$ abierto, con $\mathrm{G}_k \supset \mathrm{E}_k$ y tal que

$$m(\mathrm{G}_k) < m(\mathrm{E}_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} . \tag{2.15}$$

Como $\mathrm{E} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}_k$ y $\mathrm{E} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{G}_k = \mathrm{G}$, en donde claramente G es abierto, se deduce de la ecuación (2.15) que:

$$\begin{aligned} m^*(\mathrm{G} \setminus \mathrm{E}) = m(\mathrm{G} \setminus \mathrm{E}) &\leq m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathrm{G}_k \setminus \mathrm{E}_k)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathrm{G}_k \setminus \mathrm{E}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (m(\mathrm{G}_k) \setminus m(\mathrm{E}_k)) \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como se quería.

(b) $\Rightarrow$ *(c)* Se sigue de las leyes de De Morgan. Pues, si $\mathrm{E} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, entonces $\mathrm{E}^{\mathsf{C}} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\mathrm{G} \subset \mathbb{R}$ abierto con $\mathrm{E}^{\mathsf{C}} \subset \mathrm{G}$ y tal que

$$m^*\left(\mathrm{G} \setminus \mathrm{E}^{\mathsf{C}}\right) = m\left(\mathrm{G} \setminus \mathrm{E}^{\mathsf{C}}\right) < \varepsilon,$$

pero entonces $\mathrm{F} = \mathrm{G}^{\mathsf{C}}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ con $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ y tal que

$$\begin{aligned} m^*(\mathrm{E} \setminus \mathrm{F}) &= m^*\left(\mathrm{E} \setminus \mathrm{G}^{\mathsf{C}}\right) \\ &= m^*\left(\mathrm{G} \setminus \mathrm{E}^{\mathsf{C}}\right) = m\left(\mathrm{G} \setminus \mathrm{E}^{\mathsf{C}}\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}$ cerrado con $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ y tal que $m^*(\mathrm{E} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon$. Ahora, si $\mathrm{G} \subset \mathbb{R}$ es G_δ, entonces G es intersección numerable de abiertos de $\mathbb{R}$, y en consecuencia $G \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, (nótese que G no tiene porque ser abierto), es decir, G es un medible boreliano. Por lo tanto, si $E \subset \mathbb{R}$ es la unión de un nulo y un G_δ, entonces E es Lebesgue medible, por lo que $(d) \Rightarrow (a)$ y $(a) \Rightarrow (b)$, por ello es suficiente con demostrar:

$\underline{(b) \Rightarrow (d)}$ Sea $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. Suponiendo (b) es posible encontrar, para cada $n \in \mathbb{N}$, un conjunto $\mathcal{O}_n \subset \mathbb{R}$ abierto con $E \subset \mathcal{O}_n$ y tal que $m^*(\mathcal{O}_n \setminus E) < \dfrac{1}{n}$. Sea

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n,$$

G es claramente un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$. Afirmamos ahora que $N = G \setminus E$ es un conjunto nulo. En efecto, es obvio que N es medible, pues G y E lo son. Además,

$$G \setminus E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \setminus E = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathcal{O}_n \setminus E).$$

Por lo tanto, $G \setminus E \subset (\mathcal{O}_n \setminus E)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y en consecuencia

$$m(N) = m(G \setminus E) \leq m(\mathcal{O}_n \setminus E) = m^*(\mathcal{O}_n \setminus E) < \frac{1}{n} \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Luego, $m(N) = 0$. Por otra parte, $E \subset G$ de manera que $G = (G \setminus E) \cup E = N \cup E$, así pues $E = G \setminus N$ con G un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$ y N nulo.

Ahora si F es un conjunto F_σ en $\mathbb{R}$, entonces F es unión numerable de cerrados, por lo que $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y, por tanto, F es Lebesgue medible. Por lo tanto, si $E = F \setminus N$ con F conjunto F_σ y N nulo se tiene que E es Lebesgue medible. Por lo tanto, $(e) \Rightarrow (a)$ y $(a) \Rightarrow (c)$. Así que sólo falta demostrar:

$\underline{(c) \Rightarrow (e)}$ Pero esta implicación se demuestra de manera semejante a la anterior. ■

Un corolario inmediato es el siguiente:

Corolario 2.4.3

Para todo conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ *con* $m(E) < \infty$.

(b) *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $G \subset \mathbb{R}$ *abierto con* $G \supseteq E$ *y tal que* $m(G) < m(E) + \varepsilon$.

(c) *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}$ *cerrado con* $\mathrm{E} \supseteq \mathrm{F}$ *y tal que* $m(\mathrm{E}) < m(\mathrm{F}) + \varepsilon$.

Y aún más.

Corolario 2.4.4

Si $\mathrm{E} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ *tal que* $m(\mathrm{E}) = 0$. *Entonces existe* $\mathcal{O} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *con* $\mathrm{E} \subset \mathcal{O}$ *y tal que* $m(\mathcal{O}) = 0$.

Demostración. Por el inciso (b) del Teorema 2.4.2, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\mathcal{O}_n \subset \mathbb{R}$ abierto, tal que $\mathrm{E} \subset \mathcal{O}_n$ con

$$m^*(\mathcal{O}_n \setminus \mathrm{E}) < \frac{1}{n}.$$

Como E es de medida finita entonces cada $\mathcal{O}_n$ es también de medida finita.

Sea $\mathcal{O} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$. Claramente $\mathcal{O} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pues es la intersección numerable de abiertos, además como $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_n$, entonces también es de medida finita. Luego

$$m^*(\mathcal{O} \setminus \mathrm{E}) \leq m^*(\mathcal{O}_n \setminus \mathrm{E}) = m(\mathcal{O} \setminus \mathrm{E}) = m(\mathcal{O}_n) - m(\mathrm{E}) < \frac{1}{n}.$$

Luego $m(\mathcal{O}) - m(\mathrm{E}) < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero $m(\mathrm{E}) = 0$. Por lo tanto, $m(\mathcal{O}) < 1/n$ para todo n, lo que implica que $m(\mathcal{O}) = 0$. ■

Definición 2.4.5

Sea $\mathrm{E} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. *Se define la* ***medida interior de Lebesgue*** *de* E *como:*

$$m_*(\mathrm{E}) = \sup\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell ong([a_n, b_n]) \mid \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subset \mathrm{E} \right\}$$

La demostración del teorema siguiente es una consecuencia sencilla de las propiedades del ínfimo y el supremo en $\mathbb{R}$ y por ello se omite.

Teorema 2.4.6

(a) $m_*(\mathrm{E}) \leq m^*(\mathrm{E})$ *para todo* $\mathrm{E} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(b) $\mathrm{E} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *es Lebesgue medible si y sólo si* $m_*(\mathrm{E}) = m^*(\mathrm{E})$.

El siguiente teorema nos da una propiedad muy importante, *la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es invariante bajo traslaciones*. La importancia radica en que esta propiedad permanece como esencial en la generalización a la medida de Haar del Capítulo 3.

Teorema 2.4.7

Si $\mathrm{E} \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$, *entonces* $\mathrm{E}+s,\ r\,\mathrm{E} \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ *para todo* $r, s \in \mathbb{R}$. *Además* $m\,(\mathrm{E}+s) = m\,(\mathrm{E})$, $m\,(r\,\mathrm{E}) = |\,r\,|\,m\,(\mathrm{E})$.[1]

Demostración.

(a) Sabemos que $m\,(\mathrm{E}) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell ong\,((a_n, b_n))\,|\,\mathrm{E} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right\}$. Por otra parte, si $\mathrm{E} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, entonces $\mathrm{E}+s \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n+s, b_n+s)$. En consecuencia, podemos afirmar que si existe $\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell ong\,((a_n, b_n))\,|\,\mathrm{E} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right\}$, entonces existe $\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell ong\,((a_n+s, b_n+s))\,|\,\mathrm{E}+s \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n+s, b_n+s)\right\}$. Luego $\mathrm{E}+s$ es Lebesgue medible. Por otra parte, como la función longitud es invariante bajo traslaciones se tiene que:

$$\begin{aligned} m\,(\mathrm{E}+s) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell ong\,((a_n+s, b_n+s))\,|\,\mathrm{E}+s \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n+s, b_n+s)\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell ong\,((a_n, b_n))\,|\,\mathrm{E}+s \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n+s, b_n+s)\right\} = m\,(\mathrm{E})\,. \end{aligned}$$

(b) Con un procedimiento semejante al anterior se demuestra que $m\,(r\,\mathrm{E}) = |\,r\,|\,m\,(\mathrm{E})$, pero para ello, es necesario analizar la relación entre $\ell ong\,(a,b)$ y $\ell ong\,(r\,(a,b))$. Pero mediante el empleo de la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi\,(x) = rx$, se llega a concluir que $\ell ong\,(r\,(a,b)) = |\,r\,|\,\ell ong\,((a,b))$. ■

Corolario 2.4.8

Si $\mathrm{E} \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$, *entonces* $-\mathrm{E} \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$. *Además* $m\,(-\mathrm{E}) = m\,(\mathrm{E})$.[2]

[1] $\mathrm{E}+s = \{x+s|\,x \in \mathrm{E}\}$ y $r\,\mathrm{E} = \{rx|\,x \in \mathrm{E}\}$.

[2] $-\mathrm{E} = \{x|\,-x \in \mathrm{E}\} = (-1)\mathrm{E}$.

Algunos resultados que no son difíciles de demostrar a partir del Teorema 2.4.7, pero que son importantes son:

(i) $\{x\} \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y además $m(\{x\}) = 0$

(ii) Todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ es nulo respecto a la medida de Lebesgue.

(iii) Todo abierto no vacío de $\mathbb{R}$ tiene medida de Lebesgue estrictamente positiva.

Por ejemplo, como los subconjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ de $\mathbb{R}$ son numerables entonces $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$, además como $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces también $\mathbb{I} \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{R}}$ con

$$m(\mathbb{Q}) = m(\mathbb{Z}) = m(\mathbb{N}) = 0 \;\text{ y }\; m(\mathbb{I}) = +\infty$$

Ejemplo 2.4.9 (El conjunto de Cantor ternario)

No todos los subconjuntos nulos de $\mathbb{R}$ son numerables, por ejemplo el conjunto de Cantor ternario es un boreliano nulo no numerable. En efecto, el conjunto de Cantor ternario se construye como sigue:

Definimos los conjuntos

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_1 =&\ [0,1] \\
\mathrm{E}_2 =&\ \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
\mathrm{E}_3 =&\ \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{0}, 1\right] \\
\vdots\ &\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Entonces el ***conjunto de Cantor ternario*** $\mathfrak{K}$ *es:*

$$\mathfrak{K} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n.$$

Hay varias formas de escribir el conjunto de Cantor, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K} =&\ \{x \in [0,1] \mid x \textit{ es una expansión en base } 3 \textit{ sin el dígito } 1\ \} \\
=&\ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mid a_n = 0, 2 \right\}. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

De donde se deduce, con un poco de esfuerzo, que

(a) $\mathfrak{K} \subsetneq [0,1]$

(b) $\mathfrak{K}$ *es cerrado y acotado, por lo que es compacto.*

(c) $\mathrm{card}\,(\mathfrak{K}) = \mathfrak{c}$

Para demostrar que la medida de Lebesgue de $\mathfrak{K}$ *es cero, calcularemos la medida de su complemento.*

$$\begin{aligned}
m\left(\left([0,1] \setminus \mathfrak{K}\right)\right) &= m\left([0,1] \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n\right) \\
&= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left([0,1] \setminus \mathrm{E}_n\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m\left([0,1] \setminus \mathrm{E}_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \ell ong\left([0,1] \setminus \mathrm{E}_n\right) \\
&= 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \cdots \\
&= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1.
\end{aligned}$$

De donde se deduce que $m\,(\mathfrak{K}) = 0$*.*

El conjunto de cantor nos permite demostrar que no todos los conjuntos Lebesgue medibles son borelianos. Para ello probaremos que $\mathrm{card}\,(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) < \mathrm{card}\,(\mathcal{L}_{\mathbb{R}})$ y, por tanto, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.

Como el conjunto ternario de Cantor $\mathfrak{K}$ es un conjunto nulo, respecto a la medida de Lebesgue y tiene cardinal $\mathfrak{c}$. Además como la medida de Lebesgue es una medida completa, todo subconjunto de $\mathfrak{K}$ es Lebesgue medible, es decir,

$$\mathcal{P}\,(\mathfrak{K}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{P}\,(\mathbb{R})\,.$$

Por lo tanto, $\mathrm{card}\,(\mathcal{P}\,(\mathfrak{K})) \leq \mathrm{card}\,(\mathcal{L}_{\mathbb{R}})$, pero

$$\mathrm{card}\,(\mathcal{P}\,(\mathfrak{K})) = 2^{\,\mathfrak{c}} = \mathrm{card}\,(\mathcal{P}\,(\mathbb{R}))\,.$$

En consecuencia,

$$\operatorname{card}(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}) = \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^{\mathfrak{c}}$$

y del Teorema de Cantor, sabemos que

$$\mathfrak{c} = \operatorname{card}(\mathfrak{K}) < 2^{\mathfrak{c}} = \operatorname{card}(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}).$$

Por otra parte, la σ–álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ esta generada por la familia $\mathcal{B} = \{(r,s)|r,s \in \mathbb{Q}\}$, la cual es numerable. Luego

$$\operatorname{card}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Esto demuestra que $\operatorname{card}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) < \operatorname{card}(\mathcal{L}_{\mathbb{R}})$ y que por tanto, debe existir al menos un subconjunto Lebesgue medible de $\mathbb{R}$ que no es boreliano. Sin embargo, la construcción explícita de tal conjunto, depende de la existencia de un subconjunto no Lebesgue medible de $\mathbb{R}$ (conjunto de Vitali).

Probaremos ahora que existe un conjunto $\mathcal{V} \subseteq [0,1]$ llamado el conjunto de **Vitali** que no es Lebesgue medible, la construcción que se observa a continuación es debida a Vitali (1905):

Definimos una relación en $\mathbb{R}$ como sigue:

$$x \sim y \quad \text{si y sólo si} \quad x - y \in \mathbb{Q}. \tag{2.17}$$

No es difícil demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\mathbb{R}/\sim\, = \{[x]\,|x \in \mathbb{R}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$ y así

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} [x], \tag{2.18}$$

en donde, la unión es ajena.

De hecho, como el grupo aditivo $(\mathbb{R},+)$ es abeliano, todos sus subgrupos son normales, en particular $(\mathbb{Q},+)$, por lo que la relación (2.17), define al grupo cociente:

$$\mathbb{R}/_{\mathbb{Q}} = \{\, x + \mathbb{Q}|\, x \in \mathbb{R}\,\}.$$

Utilizaremos la notación usual para las clases de equivalencia en un grupo cociente:

$$x + \mathbb{Q} = [x] = \{\, x + q|\, q \in \mathbb{Q}\,\}.$$

Debido a la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ se tiene que $[x] \cap [0,1] \neq \varnothing$ para toda $[x] \in \mathbb{R}/\sim$. Como las clases son ajenas, por el *axioma de elección*, podemos elegir exactamente un punto de cada conjunto $[x] \cap [0,1]$ y formamos con ellos el conjunto $\mathcal{V} \subset [0,1]$. Ahora para cada $q_n \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ sea $\mathcal{V}_n$ el conjunto:

$$\mathcal{V}_n = \mathcal{V} + q_n = \{v + q_n | v \in \mathcal{V}\}.$$

Afirmamos ahora que

$$[0,1] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n \subset [-1,2].$$

La inclusión derecha es obvia, por ello sólo demostraremos la inclusión izquierda. Sea $x \in [0,1]$, por la ecuación (2.18), debe existir $y \in \mathcal{V}$ tal que $x \in [y]$, por tanto $x \sim y$ y esto sucede si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$ si y sólo si $x - y = q_n$ para algún $q_n \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, luego $x \in \mathcal{V} + q_n = \mathcal{V}_n$, por tanto, $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$. Por otra parte, la ecuación (2.18), también implica que $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}_m = \varnothing$ para $n \neq m$.

Afirmamos ahora que $\mathcal{V}$ <u>no</u> <u>es</u> Lebesgue medible. En efecto, si $\mathcal{V}$ es Lebesgue medible, $\mathcal{V}_n$ también es Lebesgue medible para todo $n \in \mathbb{N}$ lo que implica que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ es a su vez Lebesgue medible. Por monotonía de la medida, se tiene que

$$m([0,1]) \leq m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n\right) \leq m([-1,2]),$$

o bien

$$1 \leq m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n\right) \leq 3$$

y por σ–aditividad

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(\mathcal{V}_n) \leq 3. \tag{2.19}$$

Por otra parte, como la medida es invariante bajo traslaciones se tiene que

$$m(\mathcal{V}_n) = m(\mathcal{V} + q_n) = m(\mathcal{V}).$$

Si $m(\mathcal{V}) = 0$, entonces $m(\mathcal{V}_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(\mathcal{V}_n) = 0$, lo que estaría en contradicción con la ecuación (2.19). Luego, $m(\mathcal{V}) > 0$, de hecho $m(\mathcal{V}) \geq 1$, por la construcción de cada $\mathcal{V}_n$, pero entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(\mathcal{V}_n) = \infty$, lo que también contradice a la ecuación (2.19). Por lo tanto, $\mathcal{V}$ no puede ser Lebesgue medible.

Corolario 2.4.10

$\mathcal{L}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

La existencia del conjunto de Vitali, permite construir explícitamente un conjunto Lebesgue medible no boreliano.

Ejemplo 2.4.11 (Un conjunto Lebesgue medible no boreliano)

Como antes, sea $\mathfrak{K}$ *el conjunto de Cantor ternario y sea* $\phi : [0,1] \to \mathfrak{K}$ *definida por*

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n},$$

cuando $x \in [0,1]$ *está dada por su expansión binaria:* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$. *Evidentemente* ϕ *es inyectiva y también es continua, aun que esto no se demostrará. Sea* $\mathcal{V} \subset [0,1]$ *el conjunto de Vitali y sea* $\mathrm{A} = \phi[\mathcal{V}]$. *Por supuesto que* $\mathcal{V} \cap \mathfrak{K} = \varnothing$, *es decir* $\mathcal{V} \not\subset \mathfrak{K}$, *pues al ser la medida de Lebesgue completa, si* $\mathcal{V} \subset \mathfrak{K}$, *entonces* $\mathcal{V}$ *sería medible, pero no lo es. Por otra parte,* $\mathrm{A} \subset \mathfrak{K} \subset [0,1]$, *por tanto,* A *es Lebesgue medible en* $\mathbb{R}$. *Como además* ϕ *es continua se tiene que* $\phi^{-1}[\mathcal{O}]$ *es abierto en* $[0,1]$ *para todo* $\mathcal{O} \subset \mathfrak{K} \subset [0,1]$ *abierto. Equivalentemente* $\phi^{-1}[\mathrm{B}]$ *es boreliano para todo* $\mathrm{B} \subset \mathfrak{K} \subset [0,1]$ *boreliano. Si* A *fuese boreliano, entonces por la inyectividad de* ϕ, $\phi^{-1}[\mathrm{A}] = \mathcal{V}$ *sería boreliano, pero como* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ *tendríamos que* $\mathcal{V}$ *es Lebesgue medible lo cual es imposible. Por lo tanto,* A *no es boreliano.* ■

Todo lo anterior nos permite resumir en un diagrama nuestra construcción de la medida de Lebesgue.

Si

$$\mathcal{J} = \{\text{ intervalos de } \mathbb{R} \},$$

$$\mathcal{A} = \{\text{ uniones finitas y ajenas de intervalos no degenerados de } \mathbb{R} \} \cup \{\varnothing\},$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightsquigarrow \sigma\text{–álgebra de Borel sobre } \mathbb{R},$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \{\mathrm{E} \subset \mathbb{R} : \mathrm{E} \text{ es Lebesgue–medible}\}.$$

Con

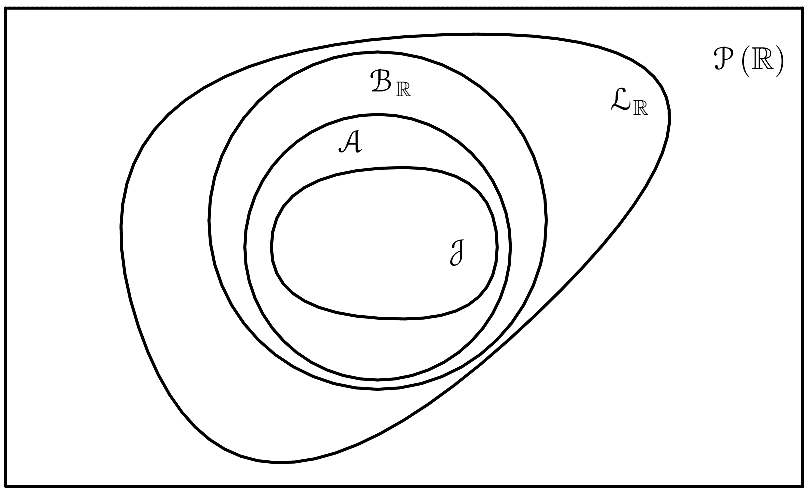
$\ell ong : \mathcal{J} \to [0, +\infty]$ función de conjuntos.

$\ell ong : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ premedida.

$m : \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ medida (boreliana).

$m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ medida exterior.

entonces se tiene el siguiente diagrama:



Todo esto con las propiedades siguientes:

(*i*) $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(*ii*) $m : \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ es una medida completa y es la única medida sobre $\mathbb{R}$ tal que $m|_{\mathcal{J}} = \ell ong$.

Capítulo 3

Medida e Integral de Haar

3.1. Funciones Medibles y la Integral

Los *morfismos* en la categoría de los espacios de medida son las así llamadas *"funciones medibles"* y para dar la definición de función medible nos apoyaremos en el siguiente hecho, si X, Y son conjuntos y $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ es una función, entonces f induce una función $\widehat{f} : \mathcal{P}(\mathrm{Y}) \to \mathcal{P}(x)$ definida como sigue

$$\widehat{f}(\mathrm{E}) = \{x \in \mathrm{X} : f(x) \in \mathrm{E}\}.$$

Esta función conserva uniones intersecciones y complementos, por ello es que si $\mathcal{N}$ es una σ–álgebra sobre Y, entonces la familia

$$\widehat{f}(\mathcal{N}) = \{\widehat{f}(\mathrm{F}) : \mathrm{F} \in \mathcal{N}\}$$

es una σ–álgebra sobre X.

Definición 3.1.1

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{M})$*,* $(\mathrm{Y}, \mathcal{N})$ *espacios medibles y sea* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *una función. Se dice que la función* f *es* $\mathcal{M}$*–*$\mathcal{N}$*–**medible** o simplemente **medible** si para cada* $\mathrm{F} \in \mathcal{N}$ *se tiene que* $f^{-1}(\mathrm{F}) \in \mathcal{M}$*.*

Nótese que si $(\mathrm{X}, \mathcal{M})$, $(\mathrm{Y}, \mathcal{N})$, $(\mathrm{Z}, \mathcal{O})$ son espacios medibles, y $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ son funciones medibles, entonces la función $g \circ f : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ es una función medible.

Una función de suma importancia en la teoría de la integración y que ocuparemos en lo subsecuente es la *función característica*. Sea X un conjunto cualesquiera, si $E \subseteq \mathrm{X}$ entonces se define la **función característica** o **indicador** de E, $\chi_E : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ como:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Observación 3.1.2

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $E \subseteq \mathrm{X}$*. Entonces* χ_E *es medible si y sólo si* E *es medible.*

En el caso de σ–álgebras generadas se tiene la siguiente:

Proposición 3.1.3

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{M})$, $(\mathrm{Y}, \mathcal{N})$ *espacios medibles y sea* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *una función. Si la* σ*–álgebra* $\mathcal{N}$ *es generada por la familia* $\mathcal{E}$*, entonces* f *es medible si y sólo si* $f^{-1}(\mathrm{F}) \in \mathcal{M}$ *para todo* $\mathrm{F} \in \mathcal{E}$*.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Se deduce de la definición de función medible.

$\Leftarrow$) Basta con observar que la familia $\{\mathrm{F} \in \mathrm{Y} : f^{-1}(\mathrm{F}) \in \mathcal{M}\}$ es una σ–álgebra que contiene a $\mathcal{E}$ y, por tanto a $\mathcal{N}$. ∎

Corolario 3.1.4

Sean X, Y *espacios métricos o topológicos y sean* $\mathcal{B}_{\mathrm{X}}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Y}}$ *las correspondientes* σ*–álgebras de Borel. Entonces toda función continua* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *es* $\mathcal{B}_{\mathrm{X}}$*–*$\mathcal{B}_{\mathrm{Y}}$*–medible*

Un caso particular del Corolario 3.1.4, es cuando $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathbb{R}$ en cuyo caso tenemos la siguiente:

Definición 3.1.5

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función.*

(1) *f se dice* ***Lebesgue–medible*** *si* $f^{-1}(\mathrm{E}) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ *para todo* $\mathrm{E} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

(2) *f se dice* ***Borel–medible*** *si* $f^{-1}(\mathrm{E}) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *para todo* $\mathrm{E} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Observación 3.1.6

Toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel–medible es Lebesgue–medible.

Teorema 3.1.7

Sean $\mathcal{A}$ una σ–álgebra en un conjunto X y Y un espacio topológico. Sea f una aplicación de X en Y.

(*a*) *Si Ω es la colección de todos los subconjuntos $E \subseteq \mathrm{X}$ tales que $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, entonces Ω es una σ–álgebra en Y.*

(*b*) *Si f es medible y $E \subseteq \mathrm{Y}$ es un conjunto de Borel, entonces $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$.*

Demostración.

(*a*) (*i*) Como $f^{-1}(\mathrm{Y}) = \mathrm{X}$, entonces $\mathrm{Y} \in \Omega$.

(*ii*) Sea $A \in \Omega$, como $f^{-1}(\mathrm{Y} \setminus A) = \mathrm{X} \setminus f^{-1}(A)$, entonces $\mathrm{X} \setminus A = A^{\mathsf{C}}$.

(*iii*) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$, como

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n),$$

entonces $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$.

(*b*) Sea Ω como en (*a*); dado $V \subset \mathrm{Y}$ abierto, como f es medible entonces $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$, así $V \in \Omega$, como Ω es σ–álgebra contiene todos los subconjuntos de Borel de Y.∎

De suma importancia para este trabajo es el caso de funciones con valores reales. En este caso, como consecuencia del teorema anterior se tiene el siguiente:

Teorema 3.1.8

Sea $\mathcal{A}$ una σ–álgebra en un conjunto no vacío X y sea $f : \mathrm{X} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ una función, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *f es medible.*

(b) *$f^{-1}((\alpha,\,\infty]) \in \mathcal{A}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(c) *$f^{-1}([-\infty,\,\alpha)) \in \mathcal{A}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos, por ejemplo $\underline{(a) \Leftrightarrow (b)}$, el caso $\underline{(a) \Leftrightarrow (c)}$ será similar.

Si f es medible es claro que $f^{-1}((\alpha,\,\infty]) \in \mathcal{A}$ pues $(\alpha,\,\infty]$ es abierto es $\widetilde{\mathbb{R}}$.

$$[-\infty,\,\alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-\infty,\,\alpha_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha_n,\,\infty]^{\mathsf{C}}$$

y dado que Ω es σ–álgebra se sigue que $[-\infty,\,\alpha) \in \Omega$. Lo mismo es cierto para

$$(\alpha,\,\beta) = [-\infty,\,) \cap (\alpha,\,\infty].$$

Esto prueba que Ω contiene a todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ y por lo tanto f es medible. ■

DEFINICIÓN 3.1.9

Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión en $[-\infty, \infty]$, y definimos

$$\alpha_k = \sup\{a_k,\,a_{k+1},\,a_{k+2},\ldots\}, \qquad \beta_k = \inf\{a_k,\,a_{k+1},\,a_{k+2},\ldots\}$$

para cada $k = 1,\,2,\,3,\,\ldots,$ y

$$\alpha = \inf\{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3,\ldots\}, \qquad \beta = \sup\{\beta_1,\,\beta_2,\,\beta_3,\ldots\}.$$

*Llamaremos a α el **límite superior** de $\{a_n\}$ y a β el **límite inferior** de $\{a_n\}$, y para usaremos la notación*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n, \qquad \beta = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

No es difícil probar que el límite superior y el límite inferior existen para cualquier sucesión y cumplen con las propiedades siguientes:

(i) $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty}(-a_n)$.

(*ii*) Si $\{a_n\}$ converge, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Sea X un conjunto y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con $f_n : X \to \widetilde{\mathbb{R}}$. Entonces definimos las funciones $\sup_n f_n$, y $\limsup_{n\to} f_n$ sobre X mediante

$$(\sup_n f_n)(x) = \sup_n (f_n(x)),$$

$$(\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) = \limsup_{n\to\infty} (f_n(x)).$$

y si para cada $x \in X$ el limite $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe, definimos el **límite puntual** de la sucesión f_n como:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

.

Teorema 3.1.10

Sea X *un conjunto y* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones medibles en* X *con valores en* $\widetilde{\mathbb{R}}$*, sean*

$$g = \sup_n f_n \qquad y \qquad h = \limsup_{n\to\infty} f_n,$$

entonces g *y* h *son medibles.*

Demostración. Por el teorema 3.1.8 solo es necesario demostrar que $g^{-1}(\alpha, \infty]$ y $h^{-1}(\alpha, \infty]$ son medibles para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Pero dado que:

$$g^{-1}(\alpha, \infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha, \infty]$$

se sigue que g es medible. Lo mismo sería cierto si intercambiamos supremo por ínfimo, y como

$$h = \inf_{k\geq 1}\{\sup_{i\geq k} f_i\},$$

se sigue que h es medible. ■

Corolario 3.1.11

Si f *y* g *son funciones medibles con valores en* $\widetilde{\mathbb{R}}$*, entonces también los son las funciones* $\max\{f, g\}$ *y* $\min\{f, g\}$.

Definición 3.1.12

*Si f es una función con valores en $\widetilde{\mathbb{R}}$, definimos la **parte positiva** y la **parte negativa** de f como: $f^+ = \max\{f, 0\}$ y $f^- = -\min\{f, 0\}$ respectivamente.*

Si f es medible, se sigue del Corolario 3.1.11, que f^+ y f^- son medibles. Además ambas funciones son, por definición, positivas y cumplen las igualdades:

$$\begin{aligned} |\,f\,| &= f^+ + f^- \\ f &= f^+ - f^-. \end{aligned}$$

Proposición 3.1.13

Sea $\mathcal{A}$ una σ–álgebra sobre el conjunto X. Si $f,\, g : \mathrm{X} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ son funciones medibles y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $f + g$, αf y fg también son medibles.

Demostración. Probemos que $f+g$ es medible. Por el Teorema 3.1.8, bastará con demostrar que para cada $t \in \mathbb{R}$ el conjunto $(f+g)^{-1}([-\infty, t))$ es medible. Por otra parte $(f+g)(x) < t$ si y sólo si existe un número racional r tal que $f(x) < r$ y $g(x) < t - r$. Luego

$$\begin{aligned} (f+g)^{-1}([-\infty,t)) =&\ \{x \in \mathrm{X} \mid (f+g)(x) < t\} \\ =&\ \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \left(\{x \in \mathrm{X} \mid f(x) < r\} \cap \{x \in \mathrm{X} \mid g(x) < t - r\}\right). \end{aligned}$$

Pero los conjuntos $\{x \in \mathrm{X} \mid f(x) < r\}$ y $\{x \in \mathrm{X} \mid g(x) < t - r\}$ son medibles por la medibilidad de las funciones f y g, de donde se sigue que $(f+g)^{-1}([-\infty,t))$ es medible por ser unión numerable de medibles.

Ahora demostremos que αf es medible. Si $\alpha = 0$ entonces αf es constante. Si $\alpha > 0$ se sigue del Teorema 3.1.8 y de la igualdad

$$\{x \in \mathrm{X} \mid \alpha f(x) < t\} = \{x \in \mathrm{X} \mid f(x) < t/\alpha\}.$$

Si $\alpha < 0$, entonces $\alpha f = (-\alpha)(-f)$.

Probemos ahora que fg es medible. Para ello observemos primero que para cualquier función medible h se cumple que h^2 es medible. En efecto, sea $t \in \mathbb{R}$, si $t \leq 0$, entonces

$$\left(h^2\right)^{-1}([-\infty,t)) = \varnothing.$$

Si $t > 0$, entonces

$$\left(h^2\right)^{-1}([-\infty, t)) = \left\{x \in \mathrm{X} \mid -\sqrt{t} < h(t) < \sqrt{t}\right\};$$

el cual es medible por ser la intersección de dos medibles y por el Teorema 3.1.8. Luego f^2, g^2 y $(f+g)^2$ son medibles. Como

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$$

se sigue que fg es medible por los párrafos precedentes. ■

Definición 3.1.14

Sea X *un espacio de medida, una función* $\phi : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ *se dice* ***simple*** *si es* $\mathbb{R}$*–combinación lineal finita de funciones características de ciertos subconjuntos de* X.

Observación 3.1.15

(1) *La imagen de toda función simple* ϕ *consta sólo de un número finito de elementos de* $[0, \infty)$.

(2) *Toda función escalonada* $\phi : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ *es una función simple.*

(3) *Para cada* $E \subseteq \mathrm{X}$ *la función característica* χ_E *es una función simple.*

(4) *Toda función simple* ϕ *tiene una representación de la forma:*

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \qquad (*)$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ *son las imágenes de* ϕ, $A_i = \{x \mid \phi(x) = a_i\}$, *y* χ_{A_i} *es la función característica de* A_i.

La ecuación $(*)$, *recibe el nombre de* ***representación canónica*** *de la función simple* ϕ. *Por supuesto que no hay unicidad en cuanto a la representación canónica de una función simple.*

(5) *Utilizando la ecuación* $(*)$, *es fácil comprobar que toda función simple* ϕ *es medible si y sólo si cada uno de los conjuntos* A_i *es medible.*

El siguiente resultado no es difícil de probar y por ello no se dará la demostración.

Proposición 3.1.16

Sean X *un espacio de medida,* $\phi_1, \phi_2 : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ *funciones simples y sea* $c \in \mathbb{R}$*, entonces* $\phi_1 + c\phi_2$ *es también una función simple.*

El motivo de estudiar a las funciones simples es debido al siguiente:

Teorema 3.1.17 (Aproximación por funciones simples)

Sea $f : \mathrm{X} \to [0, \infty]$ *una función medible, entonces existe una sucesión* $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de funciones* $\phi_n : \mathrm{X} \to [0, \infty)$ *simples medibles tales que:*

(*a*) $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \ldots \leq f$.

(*b*) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x)$ *para todo* $x \in \mathrm{X}$*, es decir* $\phi_n \xrightarrow{punt} f$ *en* X.

Demostración. Para cada n, $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n2^n$, definimos

$$E_{n,i} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right) \qquad \text{y} \qquad F_n = f^{-1}([n, \infty]),$$

para cada n, i estos conjuntos son disjuntos dos a dos, pues claramente los conjuntos $\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$ y $[n, \infty]$ lo son.Además dado que f es medible $E_{n,i}$ y F_n son medibles. Definimos

$$\phi_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}.$$

Veamos que la sucesión $\{\phi_n\}$ cumple (a). Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbf{X}$, entonces $f(x) \in F_n$ o existe un único i tal que $x \in E_{n,i}$.

Por construcción las funciones ϕ_n cumplen (a). Si x es tal que $f(x) < \infty$, entonces para n suficientemente grande $\phi_n(x) \geq f(x) - 2^{-n}$, si $f(x) = \infty$ entonces $\phi_n(x) = \infty$, y por lo tanto se tiene (b). ∎

3.1.1. Integración de Funciones

A fin de definir lo más general posible la integral de una función tenemos que seguir un camino constructivo comenzando por definir la integral de funciones simples.

Pero antes comentamos acerca de la aritmética de $[0, \infty]$. Definimos la suma $+$ y el producto $\cdot$ en $[-\infty, \infty]$ como:

- $a + \infty = \infty + a = \infty$ para todo a tal que $-\infty < a$,
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$ para todo a tal que $a < \infty$,
- $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$ para todo a tal que $0 < a$,
- $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$,
- $a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$ para todo a tal que $a < 0$.

y para números reales se define la suma y el producto de manera usual.

Definición 3.1.18

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida,* ϕ *una función simple medible sobre* X *y* $\alpha_1, \ldots, \alpha$ *los distintos valores de* ϕ*. Entonces* ϕ *se puede escribir de en la forma*

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

si $E \in \mathcal{A}$ *definimos la* ***integral de Lebesgue*** *de* ϕ *con respecto de* μ *sobre* E *como:*

$$\int_E \phi d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Con la convención $0 \cdot \infty = 0$*. Si* $E = \mathrm{X}$ *usaremos* $\int \phi d\mu$ *en vez de* $\int_X \phi d\mu$*.*

Por supuesto que la definición de integral no depende de la representación de las funciones simples. Véase [10], página 49.

Por ejemplo, si $E \subseteq \mathrm{X}$ es medible, la función característica de E, χ_E, es simple y medible. Entonces no es difícil ver que

$$\int \chi_E d\mu = \int_E d\mu = \mu(E).$$

Tomando en cuenta el Teorema de aproximación por funciones simples 3.1.17 podemos definir la integral para un caso más general de funciones, las funciones positivas.

Definición 3.1.19

Con la notación de la definición anterior. Sea $f : \mathrm{X} \to [0, \infty]$ *medible y* $E \in \mathcal{A}$*, definimos la* ***integral de Lebesgue*** *de* f *sobre* E*, con respecto a la medida* μ *como:*

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E \phi d\mu$$

en donde el supremo se considera sobre todas las funciones simples medibles ϕ *tales que* $0 \leq \phi \leq f$.

Advertencia 3.1.20

La definición 3.1.19 no es equivalente a la que aparece en §*25, página 102 de [11], pues con ésta última definición* $\displaystyle\int_E f d\mu < \infty$ *siempre, no así con la definición 3.1.19.*

Dado que toda función $f : \mathrm{X} \to [-\infty, \infty]$ medible se puede representar en la forma:

$$f = f^+ - f^-$$

donde f^+ y f^- son, respectivamente, la parte positiva y negativa de f y ambas son medibles, podemos extender la definición de integral de Lebesgue a una clase más general de funciones.

Definición 3.1.21

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida,* $E \in \mathcal{A}$*,* $f : \mathrm{X} \to [-\infty, \infty]$ *una función medible.*

(i) *Si al menos una de las integrales* $\displaystyle\int_E f^+ d\mu$, $\displaystyle\int_E f^- d\mu$ *es finita se define la* ***integral*** *de* f *en* E *respecto a la medida* μ *como:*

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

(ii) *Si ambas integrales* $\displaystyle\int_E f^+ d\mu$, $\displaystyle\int_E f^- d\mu$ *son finitas se dice que* f *es* ***sumable*** *o* ***Lebesgue integrable*** *en* E *y se define la* ***integral*** *de* f *en* E *respecto a la medida* μ *como:*

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

(*iii*) *Decimos que* $\int_E f\,d\mu$ *"no esta definida" si ambas integrales* $\int_E f^+ d\mu$, $\int_E f^- d\mu$ *son infinitas.*

Advertencia 3.1.22

La definición 3.1.21, es la definición más común de integral, y como tal aparece en [2], [3], [5], [10], etc. Véase el comentario de la página 106 de [11] y la advertencia 1. Resumiendo, con la definición 3.1.21, f es integrable en E si y sólo si $\int_E f\,d\mu < \infty$. *Sin embargo, existe una definición alternativa y es:*

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida,* $E \in \mathcal{A}$, $f : \mathrm{X} \to [-\infty, \infty]$ *una función medible.*

(*i*) *Decimos que f es* ***integrable*** *si al menos una de las integrales* $\int_E f^+ d\mu$, $\int_E f^- d\mu$ *es finita en cuyo caso se define la* ***integral*** *de f en* E *respecto a la medida μ como:*

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

(*ii*) *Si ambas integrales* $\int_E f^+ d\mu$, $\int_E f^- d\mu$ *son finitas se dice que f es* ***sumable*** *en E y se define la* ***integral*** *de f en* E *respecto a la medida μ como:*

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

(*iii*) *Decimos que* $\int_E f\,d\mu$ *"no esta definida" si ambas integrales* $\int_E f^+ d\mu$, $\int_E f^- d\mu$ *son infinitas.*

Por supuesto que este caso sumable implica integrable. Esta definición aparece en por ejemplo, [8], página 18. Sin embargo tiene sus inconvenientes uno de ellos es que hay que replantear el teorema 3.1.23.

En la época de Lebesgue, hablar de funciones integrables era referirse a la integral de Riemann; por ello Lebesgue emplea el término *funciones sumables* para hacer la distinción. Al parecer fueron Hardy y Litlewood los que acuñaron el término *funciones Lebesgue integrables* que usamos actualmente.

Un criterio muy utilizado sobre integrabilidad es el siguiente:

TEOREMA 3.1.23

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida,* $E \in \mathcal{A}$*,* $f : \mathrm{X} \to [-\infty, \infty]$ *una función medible. Entonces* f *es integrable en* E *si y sólo si* $|f|$ *es integrable en* E*.*

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que $|f| = f^+ + f^-$. ■

Tomemos ahora el caso en el que $\mathrm{X} = [a, b] \subset \mathbb{R}$, entonces cabe hacer la comparación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. En este caso la integral de Lebesgue es una extensión de la integral de Riemann, en el sentido del siguiente:

TEOREMA 3.1.24

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *acotada.*

(*a*) *Si* f *es Riemann integrable, entonces* f *es Lebesgue integrable y*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f dm.$$

(*b*) f *es Riemann integrable si y sólo si el conjunto*

$$\mathcal{D}_f = \{x \in [a, b] \mid f \text{ es discontinua en } x\}$$

tiene medida de Lebesgue cero.

DEMOSTRACIÓN. Véase [2], Teorema 5.7, página 181. ■

Pasamos a enunciar algunas propiedades de interés para la integral.

PROPOSICIÓN 3.1.25

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida,* $A, B, E \in \mathcal{A}$ *y* f, g *funciones no negativas medibles sobre* X*, entonces*

(*a*) *Si* $f \leq g$*, entonces* $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$*.*

(*b*) *Si* $A \subseteq B$*, entonces* $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$*.*

(*c*) $\int_E (f + cg) d\mu = \int_E f d\mu + c \int_E g d\mu$*, para todo* c *número real.*

(*d*) *Si* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in E$, *entonces* $\int_E f d\mu = 0$.

(*e*) *Si* $\mu(E) = 0$, *entonces* $\int_E f d\mu = 0$.

(*f*) $\int_E f d\mu = \int \chi_E f d\mu$.

Demostración. Véase [10], página 49. ■

Si $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida, $(\mathrm{Y}, \mathcal{B})$ es un espacio medible y $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ es medible, entonces f induce una medida μf^{-1} en $\mathcal{B}$ dada por:

$$\mu f^{-1}(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right)$$

para cada $B \in \mathcal{B}$. μf^{-1} es llamada la **imagen de μ bajo f**. Efectivamente μf^{-1} es una medida en $\mathcal{B}$. Pues

(*i*) $\mu f^{-1}(\varnothing) = \mu(f^{-1}(\varnothing)) = \mu(\varnothing) = 0$,

(*ii*) Si $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ajena de elementos de $\mathcal{B}$, por ser f medible, entonces $\{f^{-1}(B_n)\}$ es una sucesión ajena de elementos de $\mathcal{A}$. Además

$$f^{-1}(\cup_n B_n) = \cup_n f^{-1}(B_n),$$

luego $\mu f^{-1}(\cup_n B_n) = \sum_n \mu f^{-1}(B_n)$.

Proposición 3.1.26

Sea $f : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ *integrable y* $a \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\int f(x)\,dx = \int f(x+a)\,dx$$

Demostración. Véase [10], página 71. ■

Proposición 3.1.27

Sea ϕ *una función simple, medible y no negativa definida sobre el espacio de medida* $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$. *Entonces la función de conjuntos* $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *definida por*

$$\nu(E) = \int_E \phi_1 d\mu$$

para cada $E \in \mathcal{A}$, *define una medida sobre* X *con dominio* $\mathcal{A}$.

Demostración. Véase [10], página 49. ■

Un muy importante resultado que nos permitirá manejar de manera simple los procesos a límite es el siguiente:

Teorema 3.1.28 (Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue) *Sean* $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones medibles* $f_n : \mathrm{X} \to [0, +\infty]$ *y sea* $f : \mathrm{X} \to [0, +\infty]$ *una función tal que*

(*a*) $f_n \leq f_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(*b*) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_{n} f_n = f$.

Entonces f *es medible y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{X}} f_n d\mu = \int_{\mathrm{X}} f d\mu.$$

Demostración. Veamos que f es medible. Por (a) la sucesión de funciones es monótona y por tanto es convergente en $[0, \infty]$, luego

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \sup_{n} f_n.$$

Entonces por el teorema 3.1.10 f es medible.

De (a) se sigue que $\int_{\mathrm{X}} f_n d\mu \leq \int_{\mathrm{X}} f_{n+1} d\mu$ luego existe $\alpha \in [0, \infty]$ tal que $\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{X}} f_n d\mu$. Como $f_n \leq f$, se tiene que $\int_{\mathrm{X}} f_n d\mu \leq \int_{\mathrm{X}} f d\mu$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$\alpha \leq \int_{\mathrm{X}} f d\mu$$

Sea ϕ una función simple medible tal que $0 \leq \phi \leq f$, c una constante, $0 < c < 1$, y definamos

$$E_n = \{x \mid f_n(x) \geq c\phi(x)\} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Cada E_n es medible y $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \ldots$, y por (b), $\mathrm{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Consideremos algún $x \in \mathrm{X}$. Si $f(x) = 0$, entonces $x \in E_1$; si $f(x) > 0$, se tiene $c\phi(x) < f(x)$, porque $c < 1$; por tanto, $x \in E_n$ para algún n. Además

$$\int_{\mathrm{X}} f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} \phi d\mu$$

Para cada n.

Calculando el límite cuando $n \to \infty$ y por la proposición 3.1.27 se tiene que

$$\alpha \geq c \int_{\mathrm{X}} \phi d\mu.$$

para todo $0 < c < 1$, por lo tanto

$$\alpha \geq \int_{\mathrm{X}} \phi d\mu.$$

Finalmente se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{X}} f_n d\mu = \alpha = \int_{\mathrm{X}} f d\mu$$

como se quería. ■

Lema 3.1.29 (Lema de Fatou)

Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, con* $f_n : \mathrm{X} \to [0,\infty]$ *es una sucesión de funciones medibles para todo* n*, entonces*

$$\int_{\mathrm{X}} (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathrm{X}} f_n d\mu.$$

Demostración. Véase [10], página 52. ■

Un resultado de mucho interés en la Teoría de la Medida y que generaliza a la proposición 3.1.27 es el siguiente:

Teorema 3.1.30

Supongamos que $f : \mathrm{X} \to [0,\infty]$ *es medible y definimos, para cada* $E \in \mathcal{A}$

$$\nu(E) = \int_E f d\mu.$$

Entonces ν *es una medida sobre* X*, y*

$$\int_{\mathrm{X}} g d\nu = \int_{\mathrm{X}} g f d\mu$$

para toda $g : \mathrm{X} \to [0,\infty]$ *medible.*

Demostración. Véase [10], página 49. ■

3.1.2. Medidas Producto

Las demostraciones de esta subsección pueden consultarse en la sección 2.5 de [10], páginas 64–68.

En lo subsecuente, para evitar confusiones, si $\mathcal{A}$ es una σ–álgebra en un conjunto X diremos que un conjunto $A \in \mathcal{A}$ es $\mathcal{A}$–medible, en vez de sólo decir medible, haciendo hincapié en $\mathcal{A}$. Lo mismo se aplicará en el caso de funciones.

Sean X, Y conjuntos con σ–álgebras $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, respectivamente. Un **rectángulo medible** en el producto cartesiano $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, es un conjunto $A \times B$, con $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. La σ–álgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ en $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ generada por todos los rectángulos medibles es llamada la **σ–álgebra producto** de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Si $E \subset \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, $x \in \mathrm{X}$ y $y \in \mathrm{Y}$, los conjuntos

$$E_x = \{y \in \mathrm{Y} \mid (x, y) \in E\} \qquad E^y = \{x \in \mathrm{X} \mid (x, y) \in E\}$$

son llamados **secciones** de E. Si f es una función definida en $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, las **secciones** de f son las funciones f_x y f_y en X y Y, respectivamente, dadas por

$$f_x(y) = f(x, y) \qquad f^y(x) = f(x, y).$$

Lema 3.1.31

Sean X, Y *conjuntos con σ–álgebras* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

(a) *Si $E \subset \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$–medible, entonces para cada $x \in \mathrm{X}$ y $y \in \mathrm{Y}$ la sección E_x es $\mathcal{A}$–medible y la sección E^y es $\mathcal{B}$–medible.*

(b) *Si $f : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$–medible, entonces para cada $x \in \mathrm{X}$ y $y \in \mathrm{Y}$ la sección f_x es $\mathcal{A}$–medible y la sección f^y es $\mathcal{B}$–medible.*

Proposición 3.1.32

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ y $(\mathrm{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ dos espacios de medida con medias σ–finitas. Si $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, entonces la función $x \to \nu(E_x)$ es $\mathcal{A}$–medible y la función la función $y \to \mu(E^y)$ es $\mathcal{B}$–medible.

Teorema 3.1.33

Sean (X, $\mathcal{A}$, μ) *y* (Y, $\mathcal{B}$, ν) *dos espacios de medida con medias σ–finitas. Entonces existe una única medida $\mu \otimes \nu$ en la σ–álgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tal que*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

para cada $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. De hecho, para cada $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ se cumple

$$(\mu \otimes \nu) = \int_{\mathrm{X}} \nu(E_x) d\mu = \int_{\mathrm{Y}} \mu(E^y) d\nu.$$

Definición 3.1.34

La medida $\mu \otimes \nu$ del teorema precedente es llamada la **medida producto.**

Notación 3.1.35

Sea (X, $\mathcal{A}$, μ) *un espacio de medida. Decimos que una propiedad P de los puntos de* X *se cumple* **para casi toda** $x \in \mathrm{X}$ *o* **casi en todas partes, C.T.P.** *si el subconjunto de* X *de los puntos que no tienen la propiedad P tiene medida cero.*

El siguiente teorema nos permite caracterizar a las funciones $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$–integrables, y calcular su integral al expresarla en términos de integrales en los espacios (X, $\mathcal{A}$, μ) y (Y, $\mathcal{B}$, ν).

Teorema 3.1.36 (Teorema de Fubini)

Sean (X, $\mathcal{A}$, μ) *y* (Y, $\mathcal{B}$, ν) *dos espacios de medida, ambos, con medias σ–finitas, y sea $f : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ $(\mu \otimes \nu)$–integrable, entonces f_x es ν–integrable para casi toda $x \in \mathrm{X}$ y f^y es μ–integrable para casi toda $y \in \mathrm{Y}$. Además la función $g(x) = \int f_x d\nu$ es μ–integrable así como la función $h(y) = \int f^y d\mu$ es ν–integrable, y cumplen:*

$$\int_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}} f d(\mu \otimes \nu) = \int_{\mathrm{X}} \left[\int_{\mathrm{Y}} f_x d\nu \right] d\mu = \int_{\mathrm{Y}} \left[\int_{\mathrm{X}} f^y d\mu \right] d\nu.$$

3.2. Medidas en Espacios Localmente Compactos

3.2.1. El Teorema de Representación de Riesz

Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$. Una función lineal $I : V \to \mathbb{R}$ es llamada **funcional lineal** en V. Por ejemplo, dado un espacio de medida $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$, la proposición 3.1.13, afirma que el conjunto de todas la funciones medibles forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y la proposición 3.1.25(c) nos dice que la función

$$I(f) = \int f d\mu \tag{3.1}$$

define un funcional lineal en este espacio vectorial.

Definición 3.2.1

Sea X *un espacio topológico, y* $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ *una función continua; la cerradura del conjunto*

$$\mathrm{Sop}\,(f) = \{x \in \mathrm{X} \mid f\,(x) \neq 0\}$$

se llama el ***soporte*** *de* f.

Notación 3.2.2

Si X *es localmente compacto y Hausdorff, denotaremos*

$$\mathcal{K}\,(\mathrm{X}) = \{f : \mathrm{X} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{Sop}\,(f) \text{ es compacto}\}\,.$$

Si $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ tiene soporte compacto K, entonces por definición f es continua y por lo tanto,

$$\sup\{|\,f\,(x)\,| \mid x \in \mathrm{X}\} = \sup\{|\,f\,(x)\,| \mid x \in K\} < \infty.$$

por ello definimos la **norma uniforme** de f como:

$$\|\,f\,\|_u = \sup\{|\,f\,(x)\,| \mid x \in X\}\,.$$

Es claro que $\|\,f\,\|_u \in \mathbb{R}$.

No es difícil comprobar que $\mathcal{K}(\mathrm{X})$ forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Se dice que un funcional lineal I en $\mathcal{K}(\mathrm{X})$ es **positivo** si $I\,(f) \geq 0$ para todo $f \in \mathcal{K}\,(\mathrm{X})$ tal que $f \geq 0$.

PROPOSICIÓN 3.2.3

Si I es un funcional lineal positivo en $\mathcal{K}(\mathrm{X})$, entonces para cada $K \subset \mathrm{X}$ compacto existe una constante C_K tal que

$$|I(f)| \leq C_K \| f \|_u$$

para todo $f \in \mathcal{K}(\mathrm{X})$ con $\mathrm{Sop}(f) \subseteq K$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema de Urysohn, (Teorema 1.2.13) podemos encontrar una función $\phi : \mathrm{X} \to [0,1]$ tal que $\phi(x) = 1$ para todo $x \in K$. Sea $f \in \mathcal{K}(\mathrm{X})$ una función tal que $\mathrm{Sop}(f) \subseteq K$, entonces $|f(x)| \leq \|f\|_u \phi(x)$, para todo $x \in \mathrm{X}$. Luego $-\|f\|_u \phi \leq f \leq \|f\|_u$, es decir $\|f\|_u \phi - f \geq 0$ y $\|f\|_u \phi + f \geq 0$. Como I el lineal y positivo, $\|f\|_u I(\phi) - f \geq 0$ $\|f\|_u I(\phi) + f \geq 0$ y por lo tanto $|I(f)| \leq I(\phi)\|f\|_u$, solo resta tomar $C_K = I(\phi)$ ■

Recordamos que en un espacio topológico X, $\mathcal{B}(\mathrm{X})$ denota la σ–álgebra de Borel, es decir la σ–álgebra generada por la topología de X.

DEFINICIÓN 3.2.4

Sea X un espacio topológico Hausdorff. Una ***medida de Borel*** *μ es una medida definida en $\mathcal{B}(\mathrm{X})$. Una medida μ de Borel se llama* ***regular*** *si se cumplen las siguientes condiciones:*

(*i*) *para cada $K \subseteq \mathrm{X}$ compacto, $\mu(K) < \infty$.*

(*ii*) *para cada $A \in \mathcal{B}(\mathrm{X})$ se cumple*

$$\mu(A) = \inf \{\mu(U) \mid A \subseteq U,\ U \text{ es abierto}\}.$$

(*iii*) *para cada $U \subseteq X$ abierto se cumple*

$$\mu(U) = \sup \{\mu(K) \mid K \subseteq U,\ K \text{ es compacto}\}.$$

Usaremos el término medida **regular de Borel** *para designar a una medida de Borel que es regular.*

Proposición 3.2.5

Sea X *un espacio localmente compacto, Hausdorff y segundo numerable. Entonces cada subconjunto abierto de* X *es un* F_σ*, mas aún, es unión numerable de conjuntos compactos. También cada subconjunto cerrado de* X *es un* G_δ*.*

Demostración. Sean U un abierto de X y sea $\mathcal{B}$ una base numerable para la topología de X. Tomemos $\mathcal{B}_U$ como el conjunto de todos los elementos V de $\mathcal{B}$ para los cuales $C\ell(V) \subseteq U$ es compacto. Es claro que $\mathcal{B}_U$ es numerable, ahora demostremos que

$$U = \bigcup_{V \in \mathcal{B}_U} C\ell(V).$$

La inclusión $\bigcup_{V \in \mathcal{B}_U} C\ell(V) \subseteq U$ es clara. Sea $x \in U$ y como U es abierto y X es localmente compacto, por la proposición 1.2.25, existe una vecindad compacta K tal que $x \in \mathring{K} \subseteq K \subseteq U$. Como $\mathcal{B}$ es base, existe $V_0 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_0 \subseteq \mathring{K}$. Como K es compacto se tiene que $C\ell(V_0) \subseteq K$ es compacto. Luego $U \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{B}_U} C\ell(V)$. Así que U es un conjunto F_σ

Ahora supongamos que $C \subseteq$ X es cerrado. Entonces $C^{\complement}$ es abierto y, por lo anterior, es la union de una cantidad numerable de conjuntos F_n compactos (en particular cerrados). Luego C es la intersección de los conjuntos abiertos $F_n^{\complement}$ y por lo tanto es un G_δ. ■

Proposición 3.2.6

Sea X *un espacio localmente compacto y Hausdorff y segundo numerable, y sea* μ *una medida de Borel en* X *que es finita en cada subconjunto compacto, entonces* μ *es regular.*

Demostración. La condición (a) de la definición 3.2.4 es inmediata. Veamos, primero, que se satisface la condición (c). Sea $U \subseteq$ X abierto, por la Proposición 3.2.5 U es la unión numerable de conjuntos compactos $\{K_n\}$, como la familia de conjuntos $\left\{\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente se tiene que

$$\mu(U) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right).$$

■

PROPOSICIÓN 3.2.7

Sea X *un espacio localmente compacto y Hausdorff que tiene una base numerable, entonces toda medida regular en* X *es* σ*–finita.*

DEMOSTRACIÓN. El espacio total X es abierto y por la proposición 3.2.5, puede ser escrito como la unión de una cantidad numerable de conjuntos compactos, los cuales tienen medida finita, por ser μ regular. ■

LEMA 3.2.8

Sea X *un espacio localmente compacto y Hausdorff, y sea* μ *una medida de Borel regular en* X*. Si* $U \subseteq \mathrm{X}$ *es abierto, entonces*

$$\mu(U) = \sup\left\{ \int f d\mu \mid f \in \mathcal{K}(\mathrm{X}),\ 0 \le f \le \chi_U \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como

$$\mu(U) = \int \chi_U \, d\mu,$$

entonces se cumple la desigualdad

$$\mu(U) \ge \sup\left\{ \int f d\mu \mid f \in \mathcal{K}(\mathrm{X}),\ 0 \le f \le \chi_U \right\}.$$

Probemos la otra desigualdad. Sea $\varepsilon > 0$, como μ es regular existe un conjunto $K \subseteq U$ compacto tal que

$$\mu(U) \le \mu(K) + \varepsilon.$$

Como $\mu(K) = \displaystyle\int \chi_K d\mu$ y ε es arbitrario, se sigue que

$$\mu(U) \le \sup\left\{ \int \chi_K d\mu \mid K \subseteq U,\ K \ \text{ compacto} \right\}.$$

■

TEOREMA 3.2.9 (TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ)

Sea X *un espacio localmente compacto y Hausdorff, y sea* I *un funcional lineal positivo en* $\mathcal{K}(\mathrm{X})$*. Entonces existe una única medida regular de Borel* μ *en* X *tal que si* $f \in \mathcal{K}(\mathrm{X})$*, entonces:*

$$I(f) = \int f d\mu.$$

Demostración.

Existencia: Sea $U \subseteq$ X abierto, definimos la función μ^* en U como:

$$\mu^*(U) = \sup\{I(f) \mid f \in \mathcal{K}(\mathrm{X}),\ 0 \le f \le \chi_U\}.$$

Extendemos el dominio de definición de μ^* para cualquier subconjunto $A \subseteq X$ como:

$$\mu^*(U) = \inf\left\{\mu^*(U) \mid U \text{ es abierto y } A \subseteq U\right\}.$$

Ambas definiciones coinciden para los conjuntos abiertos, así μ^* está bien definida. No es difícil comprobar que μ^* es una medida exterior y por el teorema de Caratheodory 2.2.11 la restricción de μ^* a los conjuntos de Borel es una medida μ.

Unicidad Supongamos que ν es otra medida regular de Borel en X tal que para $f \in \mathcal{K}(\mathrm{X})$ se cumple que

$$\int f d\mu = I(f) = \int f d\nu.$$

Sea $U \subset$ X abierto, por el Lema 3.2.8

$$\begin{aligned} \mu(U) = &\ \sup\left\{\int f d\mu \mid f \in \mathcal{K}(\mathrm{X}),\ 0 \le f \le \chi_U\right\} \\ = &\ \sup\left\{\int f d\nu \mid f \in \mathcal{K}(\mathrm{X}),\ 0 \le f \le \chi_U\right\} = \nu(U) \end{aligned}$$

de donde se sigue que μ y ν son iguales en los conjuntos abiertos, pero por la regularidad de ambas se sigue la igualdad para cualquier conjunto de Borel, luego $\mu = \nu$. ■

3.3. Medida e Integral de Haar

En 1933, en un artículo publicado en el Annals of Mathematics (Volumen 34, Número 2), el matemático húngaro Alfréd Haar establece la existencia de una medida invariante bajo traslación en grupos topológicos compactos. En 1934 el matemático húngaro John von Neumann muestra la unicidad (salvo una constante multiplicativa) de la medida de Haar. En 1940 André Weil logra extender la definición de medida de Haar a los grupos topológicos localmente compactos.

Definición 3.3.1

Sean G un grupo topológico, $f : G \to \mathbb{R}$ una función, decimos que f es ***uniformemente continua por la izquierda*** *si para cada $\varepsilon > 0$ existe una vecindad V de e tal que para cada $x, y \in G$ con $xy^{-1} \in V$ se cumple que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Similarmente, decimos que f es* ***uniformemente continua por la derecha*** *si para cada $\varepsilon > 0$ existe una vecindad V de e tal que para cada $x, y \in G$ con $xy^{-1} \in V$ se cumple que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Es claro que en el caso de grupos abelianos ambas definiciones son equivalentes.

En lo sucesivo agregaremos una condición más a la topología de los espacios que estaremos tratando, la condición de ser Hausdorff, y diremos que G es un **grupo localmente compacto**, para abreviar, en vez de grupo topológico localmente compacto y Hausdorff.

Proposición 3.3.2

Sea G un grupo localmente compacto y $f \in \mathcal{K}(\mathrm{G})$, entonces f es uniformemente continua por la izquierda, y por la derecha.

Demostración. Veamos primero que f es uniformemente continua por la izquierda. Sea $K = \mathrm{Sop}(f)$. Entonces K es compacto y por la continuidad de f, para cada $x \in K$ existe una vecindad U_x de e tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ para cada $y \in U_x$ y $\varepsilon > 0$ dado, además podemos escoger U_x de tal forma que sea simétrica. Tomemos V_x vecindad de e tal que $V_x V_{x^{-1}} \subseteq U_x$. La familia $\{xV_x\}_{x \in K}$ es una cubierta abierta de K, y como K es compacto, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puntos en K tal que $\{x_i V_{x_i}\}_{i=1}^{n}$ es una cubierta finita de K. Sea $V \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ una vecindad abierta de e simétrica. Se mostrará que si $x, y \in G$ satisfacen $y \in xV$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Si $x, y \notin K$ entonces $f(x) = f(y) = 0$ y claramente se cumple la desigualdad. Así supongamos que al menos uno de los dos puntos pertenecen a K, por ejemplo $x \in K$, sea $y \in xV$, entonces existe x_i tal que $x \in x_i V_{x_i}$, luego $x \in x_i V_{x_i} \subset x_i U_{x_i}$ y $y \in xV \subset x_i V_{x_i} V_{x_i} \subseteq x_i U_{x_i}$ y por lo tanto $x, y \in x_i U_{x_i}$. De todo esto se sigue que $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon/2$ y $|f(y) - f(x_i)| < \varepsilon/2$, luego $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Por lo tanto f es uniformemente continua por la izquierda. De manera similar se prueba que f es uniformemente continua por la derecha. ■

Definición 3.3.3

Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Borel en G. Decimos que μ es ***invariante por la izquierda*** *si $\mu(xE) = \mu(E)$ para todo $x \in G$ y $E \in \mathcal{B}_G$. De manera análoga decimos que μ es* ***invariante por la derecha*** *si $\mu(Ex) = \mu(E)$ para todo $x \in G$ y $E \in \mathcal{B}_G$.*

Si I es un funcional lineal sobre $\mathcal{K}(G)$. Decimos que I es invariante por la izquierda (resp., por la derecha) si $I(L_x f) = I(f)$ (resp., $I(R_x f) = I(f)$) para toda f.

Por ejemplo, el Teorema 2.4.7 afirma que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es invariante tanto por la izquierda como por la derecha. Pero además debido al Corolario 2.4.3 la medida de Lebesgue también es regular. Además la Proposición 3.1.25 y la Proposición 3.1.26 afirman que la integral de Lebesgue es un funcional lineal invariante, en este caso tanto por la derecha como por la izquierda (pues $\mathbb{R}$) es un grupo aditivo abeliano. Esto motiva la siguiente:

Definición 3.3.4

Una ***medida izquierda*** *o* ***derecha de Haar*** *en G es una medida regular de Borel, diferente de cero que es invariante por la izquierda o por la derecha respectivamente.*

En todo lo que sigue usaremos la siguiente notación

$$\mathcal{K}^+(G) = \{f \in \mathcal{K}(G) \mid f \geq 0,\ \|f\|_u > 0\},$$

en donde $\|f\|_u$ es la norma uniforme; es decir $\|f\|_u = \sup\{f(x) \mid x \in G\}$. Cabe hacer notar que todo funcional $I \in \mathcal{K}(\mathrm{G})$ se puede escribir en la forma $I = I^+ - I^-$, donde I^+, $I^- \in K^+(G)$.

Proposición 3.3.5

Sea G un grupo localmente compacto, entonces

(a) *Una medida regular de Borel μ en G es una medida de Haar izquierda si y sólo si la medida $\widetilde{\mu}$ definida por $\widetilde{\mu}(E) = \widetilde{\mu}(E^{-1})$ es una medida de Haar derecha.*

(*b*) *Una medida regular de Borel no cero μ en G es una medida izquierda de Haar si y sólo si*

$$\int f d\mu = \int L_y f d\mu \quad \textit{para todo } f \in \mathcal{K}^+,\ y \in G.$$

(*c*) *Si μ es una medida de Haar izquierda en G, entonces $\mu(U) > 0$ para todo conjunto abierto no vacío $U \subseteq G$, y*

$$\int f d\mu > 0 \quad \textit{para todo } f \in \mathcal{K}^+.$$

(*d*) *Si μ es una medida de Haar en G, entonces $\mu(G) < \infty$ si y sólo si G es compacto.*

Demostración.

(*a*) Se sigue de

$$\widetilde{\mu}(Ex) = \mu\left((Ex)^{-1}\right) = \mu\left(x^{-1}E^{-1}\right) = \mu\left(E^{-1}\right) = \widetilde{\mu}(E).$$

(*b*) Supongamos que μ es una medida de Haar invariante por la izquierda. Por el Teorema de aproximación por funciones simples 3.1.17 bastará hacerlo para funciones simples. Sea $\phi : G \to \widetilde{\mathbb{R}} \in \mathcal{K}^+(G)$ una función simple, entonces existen n números $a_i \geq 0$ y conjuntos A_i medibles tal que

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}.$$

Como $y^{-1}x \in B$ si y sólo si $x \in yB$, entonces

$$L_y\phi(x) = \phi(y^{-1}x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(y^{-1}x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{yA_i}(x)$$

luego

$$\begin{aligned}\int \phi d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} d\mu &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(yA_i) = \int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{yA_i} d\mu = \int L_y \phi d\mu.\end{aligned}$$

(*c*) Como μ es regular, existe un compacto $K \subseteq G$ con $\mu(K) > 0$. Sea U abierto, entonces K se puede cubrir por un numero finito de traslaciones de U, digamos $\{x_i U\}$. Luego

$$\mu(K) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i U\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i U) = n\mu(U).$$

De donde se sigue que $\mu(U) > 0$. Si $f \in \mathcal{K}^+(G)$, sea $U = \{x \mid f(x) > \frac{1}{2}\|f\|_u\}$. Entonces

$$\int f d\mu \geq \frac{1}{2}\|f\|_u \mu(U) > 0$$

(*d*) Si G es compacto entonces $\mu(G) < \infty$ por ser μ regular. Por el contrario supongamos que $\mu(G) < \infty$ y que G no es compacto. Sea V una vecindad compacta de e, entonces G no puede ser cubierto por un número finito de traslaciones de V. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} x_i V$. Sea U una vecindad simétrica de e tal que $UU \subset V$. Entonces $\{x_n U\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta, pues si $m > n$ y $x_n U \cap x_m U \neq \varnothing$ se sigue que $x_m \in x_n UU \subset x_n V$, lo cual no puede ser. Luego

$$\mu(G) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} x_i U\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(x_i U).$$

■

Si $E \in \mathcal{B}_G$ es abierto y no vacío, definimos

$$(E : V) = \inf\left\{\#(A) \;\Big|\; E \subset \bigcup_{x \in A} xV\right\},$$

donde $\#(A) = \text{card}(A)$ si $\text{card}(A) < \infty$ o $\#(A) = \infty$ en otro caso.

Es decir, $(E : V)$ es el mínimo número de traslaciones de V que se necesitan para cubrir a E. También puede interpretarse como el tamaño relativo entre E y V. Cabe mencionar que si $(E : V) < \infty$, entonces es un número entero. Si $E \in \mathcal{B}_G$ y K es un conjunto compacto tal que $E \subset K$, entonces se pueden encontrar un número finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que $E \subset K \subset x_1 V \cup \ldots \cup x_n V$ y por lo tanto $(E : V) < \infty$.

Por otro lado, sea $\phi \in \mathcal{K}^+(G)$, como $\text{Sop}(\phi)$ es compacto y ϕ es continua, entonces ϕ alcanza su máximo, y por tanto $0 < \|\phi\|_u < \infty$. Luego existe $x \in G$ tal que $\phi(x) > \frac{1}{2}\|\phi\|_u$, y por lo tanto el conjunto $\mathcal{U} = \{x \mid \phi(x) > \frac{1}{2}\|\phi\|_u\}$ es no vacío. Es claro que es abierto. Sea $f \in \mathcal{K}^+(G)$ otra función, como el $\mathrm{Sop}(f)$ es compacto, existe una cantidad finita de puntos $x_1, \ldots, x_n \in G$ tal que

$$\mathrm{Sop}(f) \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i \mathcal{U}$$

Sea $x \in \mathrm{Sop}(f)$, existe j tal que $x \in x_j\mathcal{U}$, así $\phi(x_j^{-1}x) = L_{x_j}\phi(x)$ y por lo tanto

$$\frac{f(x)}{\|f\|_u} \leq 1 < \frac{\phi(x_j^{-1}x)}{\|\phi\|_u/2} = \frac{L_{x_j}\phi(x)}{\|\phi\|_u/2} \leq \frac{2}{\|\phi\|_u} \sum_{i=1}^{n} L_{x_i}\phi(x)$$

de donde

$$f \leq \frac{2\|f\|_u}{\|\phi\|_u} \sum_{i=1}^{n} L_{x_i}\phi.$$

La desigualdad, claramente, se sigue cumpliendo si $x \notin \mathrm{Sop}(f)$.

Entonces definimos el **número de Haar** de f con respecto a ϕ como:

$$(f : \phi) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_{x_i} \mid f \leq \sum_{i=1}^{n} c_i L_{x_i}\phi \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \text{ y } x_1, \ldots, x_n \in G \right\}.$$

Del Comentario precedente se sigue que $(f : \phi) \geq \frac{\|f\|_u}{\|\phi\|_u}$.

A primera vista el número de Haar pude parecer extraño, pero de hecho tiene mucha relación con el método de Riemann y Lebesgue para hallar la integral de un función. Para ilustrar la analogía tomemos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua con soporte compacto $K \subset [a, b]$, para algunos $a, b \in \mathbb{R}$. Así $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces para fines de integración, podemos considerar que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Según la teoría de integración de Riemann (véase [2] o [20], por ejemplo) f es Riemann–integrable, por ser continua. Luego, $\displaystyle\int_a^b f dx$ se puede aproximar por las sumas superiores[1] de f, es decir,

$$\int_a^b f dx = \inf \{ S(f, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b] \}$$

[1] Recuérdese que la suma superior $S(f, P)$ de f para la partición $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ está dada por

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

donde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ es el supremo de f en $[x_{i-1}, x_i]$.

Según se ve en un curso básico de Cálculo, se puede tomar la partición particular $P_0 = \{a,\, a+\delta,\, a+2\delta, \ldots, a+n\delta = b\}$, donde $\delta = \dfrac{b-a}{n}$ y se prueba que

$$\int_a^b f dx = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\delta)\right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre $n \in \mathbb{N}$, y ξ_i es el supremo de f en $[a+(i-1)\delta,\, a+i\delta]$.

Analicemos la suma superior $S\,(f, P_0)\, f = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\delta)$ de f para la partición P_0. Para ello definimos la función

$$\phi_{P_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \delta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

No es difícil ver que

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\phi_{P_0}(x+i\delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) L_{i\delta}\phi_{P_0}(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\right) L_{i\delta}\phi_{P_0}(x).$$

Con esto podemos darnos cuenta de la analogía entre la suma superior de una función Riemann–integrable para una partición y el número de Haar de una función respecto a otra. Desafortunadamente, para calcular la integral de una función en un grupo topológico no podemos continuar con el mismo procedimiento, de calcular el ínfimo de todas las sumas inferiores. En nuestra analogía llevamos implícito el hecho que conocemos el valor de $\int_0^{\delta} \phi_{P_0}\,(x)\, dx = \delta$.

A continuación enunciamos algunas propiedades del número de Haar.

Lema 3.3.6

Supongamos que $f,\, g,\, \phi \in \mathcal{K}^+(G)$, *entonces*

(*a*) $(f : \phi) = (L_x f : \phi)$ *para cada* $x \in G$,

(*b*) $(cf : \phi) = c(f : \phi)$ *para cada* $c > 0$,

(*c*) $(f+g : \phi) \leq (f : \phi) + (g : \phi)$,

(*d*) $(f : \phi) \leq (f : g)(g : \phi)$.

Demostración.

(*a*) Se sigue de que $f \leq \sum_{i=1}^n c_i L_{x_i}$ si y sólo si $L_x f \leq \sum_{i=1}^n c_i L_{xx_i}$.

(*b*) Se ve del cálculo siguiente:

$$\begin{aligned} c(f:\phi) =& c\inf\left\{\sum_{i=1}^n c_{x_i} \mid f \leq \sum_{i=1}^n c_i L_{x_i}\phi\right\} \\ =& \inf\left\{\sum_{i=1}^n c\,c_{x_i} \mid f \leq \sum_{i=1}^n c_i L_{x_i}\phi\right\} \\ =& \inf\left\{\sum_{i=1}^n c_{x_i} \mid cf \leq \sum_{i=1}^n c_i L_{x_i}\phi\right\} = (cf:\phi). \end{aligned}$$

(*c*) Si $f \leq \sum_{i=1}^m c_i L_{x_i}\phi$ y $g \leq \sum_{i=m+1}^n c_i L_{x_i}\phi$, entonces $f+g \leq \sum_{i=1}^n c_i L_{x_i}\phi$. Y como $\text{mín}\left\{\sum_{i=1}^n c_i\right\} \leq \text{mín}\left\{\sum_{i=1}^n c_i\right\} \leq \text{mín}\left\{\sum_{i=m+1}^n c_i\right\}$.

(*d*) $f \leq \sum_{i=1}^n c_i L_{x_i} g$ y $g \leq \sum_{j=1}^n d_j L_{y_j}\phi$, entonces $f \leq \sum_{i,j=1}^n c_i d_j L_{x_i y_j}\phi$. Dado que $\sum_{i,j} c_i d_j = \left(\sum_i c_i\right)\left(\sum_i d_j\right)$ se tiene el resultado. ∎

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ le asigna el valor 1 al intervalo $[0, 1]$ de manera natural, al generalizar la longitud. Ello nos permite comparar cualquier conjunto con $[0, 1]$ y poder asignarle una medida. En un grupo topológico no existe un conjunto preferido al cual tenga un valor predeterminado o dado de antemano por una condición extra. Sea $E_0 \subseteq G$ contenido en un conjunto compacto, sea V un abierto, entonces $(E_0 : V) > 0$. El número $(E : V)/(E_0 : V)$ es una estimación del tamaño de E comparado con E_0. Sean f_0, f, $\phi \in \mathcal{K}^+(G)$, entonces definimos

$$I_\phi(f) = \frac{(f:\phi)}{(f_0:\phi)}.$$

Si hacemos la analogía con la integral de Riemann, la función ϕ juega el papel de una partición (como habíamos mencionado antes), el número $I_\phi(f)$ juega el papel de la suma superior de Riemann. La función f_0 es la "normalización", pues como se ve fácilmente $I_\phi(f_0) = 1$.

Por el Lema 3.3.6(a), para cada ϕ el funcional I_ϕ es invariante por la izquierda. 3.3.6(b) nos dice que $I_(\phi)$ saca escalares, aun que no es no es lineal pues no es aditivo. De 3.3.6(d) se tiene que

$$(f_0 : f)^{-1} \leq I_\phi(f) \leq (f : f_0). \tag{3.2}$$

Lema 3.3.7

Si $f_1,\, f_2 \in \mathcal{K}^+(G)$ *y* $\epsilon > 0$, *existe una vecindad* V *de* e *tal que para cada* ϕ *con* $\operatorname{Sop}(\phi) \subseteq V$ *se cumple*

$$I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leq I_\phi(f_1 + f_2) + \epsilon$$

Demostración. Sea $g \in \mathcal{K}^+(G)$ tal que $g = 1$ en el $\operatorname{Sop}(f_1 + f_2)$, y sea δ tal que

$$0 < 2\,\delta < \text{mín}\left\{1,\ \frac{\epsilon}{(f_1 + f_2 : f_0) + (g : f_0)}\right\}.$$

Definimos las funciones

$$h = f_1 + f_2 + \delta g,$$

$$h_i(x) = \begin{cases} f_i(x)/h(x) & \text{si } x \in \operatorname{Sop}(f_i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Es claro que $h \in \mathcal{K}^+(G)$ y que $\operatorname{Sop}(f_i) \subseteq \operatorname{Sop}(h)$, por lo cual h_i esta bien definida, para $i = 1,\, 2$, más aún $h_i \in \mathcal{K}^+(G)$. Por la proposición 3.3.2 h_i es uniformemente continua, entonces existe una vecindad V de e tal que $|h_i(x) - h_i(y)| < \delta$ para $y^{-1}x \in V$. Sea $\phi \in \mathcal{K}^+(G)$, $\operatorname{Sop}(\phi) \subseteq V$, existen puntos $x_1, \ldots, x_n \in G$ y escalares $c_1, \ldots, c_n > 0$ tales que $h \leq \sum_1^2 c_j L_{x_j}\phi$, luego $|h_i(x) - h_i(x_j)| < \delta$ para $x_j^{-1}x \in \operatorname{Sop}(\phi)$, así

$$f_i(x) = h(x)h_i(x) \leq \sum_j c_j \phi(x_j^{-1}x)h_i(x) \leq \sum_j c_j \phi(x_j^{-1}x)[h_i(x_j) + \delta].$$

Pero entonces $(f_i : \phi) \leq \sum[h_i(x_j) + \delta]$, y como $h_1 + h_2 \leq 1$,

$$(f_1 : \phi) + (f_2 : \phi) \leq \sum_j c_j[1 + 2\delta].$$

Ahora, $\sum c_j$ puede hacerse arbitrariamente cercana a $(h : \phi)$, por el lema 3.3.6(b,c),

$$\begin{aligned} I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leq (1+2\delta)I_\phi(h) &\leq (1+2\delta)[I_\phi(f_1+f_2) + \delta I_\phi(g)] \\ &= I_\phi(f_1+f_2) + 2\delta I_\phi(f_1+f_2) + \delta(1+2\delta)I_\phi(g). \end{aligned}$$

En virtud de la ecuación (3.2) y por la forma en que escogió δ

$$2\delta I_\phi(f_1+f_2) + (1+2\delta)\delta I_\phi(g) \leq 2\delta(f_1+f_2 : f_0) + \delta(1+2\delta)(g : f_0) < \epsilon$$

Con lo cual se tiene el resultado. ■

El lema 3.2.8 nos muestra la relación, muy estrecha, entre una medida regular de Borel en un espacio topológico X y la integral de Lebesgue en el espacio K(X). En el caso de un grupo topológico G el Teorema de Representación de Riesz 3.2.9 nos indica la relación entre los funcionales lineales en K(G) y la integración en dicho espacio. Por ello es que estudiar el problema de hallar una medida regular de Borel en un grupo topológico G para, posteriormente, poder integrar funciones en dicho grupo, es equivalente al estudio de los funcionales lineales en $\mathcal{K}(G)$.

Teorema 3.3.8 (Existencia de la medida de Haar)

Todo grupo localmente compacto tiene una medida de Haar.

Demostración. Para cada $f \in \mathcal{K}^+(G)$ sea X_f el intervalo $[(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)]$, y sea $X = \prod_{f\in\mathcal{K}^+(G)} X_f$. Entonces X es un espacio topológico compacto y Hausdorff, por el teorema de Tychonoff 1.2.23. La ecuación (3.2) implica que para cada ϕ, $I_\phi(f) \in \mathrm{X}_f$, así

$$I_\phi \in \mathrm{X}.$$

Para cada vecindad compacta V de e, sea $K(V)$ la cerradura de $\{I_\phi \mid \mathrm{Sop}(\phi) \subseteq V\}$ en X. Sean $V_1, \ldots, V_n$ vecindades compactas de e, si $I \in \{I_\phi \mid \mathrm{Sop}(\phi) \subseteq \cap_{i=1}^n V_i\}$, entonces $I \in \bigcap_1^n K(V_j)$, de donde se deduce que $K\left(\bigcap_1^n V_j\right) \subseteq \bigcap_1^n K(V_j)$, pues $\bigcap_1^n K(V_j)$ es cerrado. Es decir la familia de conjuntos $\{K(V)\}$ tienen la propiedad de la intersección finita y por ser compactos, existe al menos un elemento I en la intersección de todos ellos.

Cada vecindad de I en X interseca al conjunto $\{I_\phi \mid \mathrm{Sop}(\phi) \subseteq V\}$ para cualquier vecindad V de e.. Es decir para cualquier vecindad V de e y para cualquier función

$f \in K^+(G)$ y $\epsilon > 0$ existe $\phi \in K^+(G)$ con $\operatorname{Sop}(\phi) \subseteq V$ tal que $|I(f) - I_\phi(f)| < \epsilon$. Del lema 3.3.6 (a), (b) se sigue que I es izquierdo invariante y saca escalares. Y del lema 3.3.7 se sigue que I satisface $I(f+g) = I(f) + I(g)$ para cada f, $g \in K^+(G)$.

De esta manera se ha encontrado un funcional lineal en $\mathcal{K}^+(\mathrm{G})$. Se puede extender a todo $\mathcal{K}(\mathrm{G})$ de la manera siguiente:

$$I(f) = I(f^+) - I(f^-)$$

para cada $f \in \mathcal{K}(\mathrm{G})$. Entonces I es un funcional lineal positivo en $\mathcal{K}(\mathrm{G})$. De hecho La ecuación (3.2) afirma que $I(f) > 0$ para todo $f \in \mathcal{K}^+(\mathrm{G})$. Y finalmente, por el Teorema de Representación de Riesz 3.2.9 existe una medida regular de Borel μ en G tal que $I(f) = \int f d\mu$. Si U es un abierto de G y $x \in G$, entonces

$$\begin{aligned}
\mu(xU) &= \sup\{I(f) \mid f \in \mathcal{K}(G) \text{ y } 0 \leq f \leq \chi_{xU}\} \\
&= \sup\{I(f) \mid f \in \mathcal{K}(\mathrm{X}) \text{ y } 0 \leq L_x f \leq \chi_U\} \\
&= \sup\{I(L_{x^{-1}} f) \mid f \in \mathcal{K}(\mathrm{X}) \text{ y } 0 \leq f \leq \chi_U\} \\
&= \sup\{I(f) \mid f \in \mathcal{K}(\mathrm{X}) \text{ y } 0 \leq f \leq \chi_U\} = \mu(U).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, μ es invariante por la izquierda, y por tanto μ es una medida de izquierda de Haar. ∎

Como se ha probado, entonces existe al menos una medida regular de Borel μ en el grupo topológico G. Y como se ve en la prueba, si $f \in \mathcal{K}(G)$ entonces la **integral de Haar** de f esta dada por

$$\int f d\mu = I(f),$$

donde I es el funcional hallado en la prueba del Teorema. De hecho de la invarianza de la medida μ se sigue que si $g \in G$ entonces

$$\int L_g f d\mu = \int f d\mu = I(f),$$

es decir la integral de Haar es izquierdo invariante.

De la demostración del Teorema precedente, se ve que la medida μ tiene una dependencia del funcional f_0 que se escogió previamente. Entonces en sentido estricto la medida no es única. Sin embargo existe una relación entre dos medidas de Haar. El siguiente teorema es debido a J. von Neumann (1934).

Teorema 3.3.9 (Unicidad de la medida Haar)

Si μ y ν son medidas de Haar en G, entonces existe una constante $c > 0$ tal que $\mu = c\nu$.

Demostración.

Caso I. Supongamos que μ es tanto invariante por la izquierda como por la derecha. Sea $h \in \mathcal{K}^+(G)$ tal que $h(x) = h(x^{-1})$ por ejemplo $h(x) = g(x) + g(x^{-1})$. Si $f \in \mathcal{K}(G)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int hd\nu \int fd\mu &= \int\int h(y)f(x)d\mu(x)d\nu(y) = \int\int h(y)f(xy)d\mu(x)d\nu(y) \\
&= \int\int h(y)f(xy)d\nu(y)d\mu(x) = \int\int h(x^{-1}y)f(y)d\nu(y)d\mu(x) \\
&= \int\int h(y^{-1}x)f(y)d\nu(y)d\mu(x) = \int\int h(y^{-1}x)f(y)d\mu(x)d\nu(y) \\
&= \int\int h(x)f(y)d\mu(x)d\nu(y) = \int hd\mu \int fd\nu,
\end{aligned}$$

Si tomamos

$$c = \frac{\displaystyle\int hd\mu}{\displaystyle\int hd\nu}$$

el resultado se tiene.

Caso II. Supongamos el caso general. Demostremos que existe una constante $c > 0$ tal que $\mu = c\nu$, pero por el lema 3.2.8 y dado que ambas medidas son regulares, es equivalente a demostrar que $\int fd\mu = c\int fd\nu$, o lo que es lo mismo demostrar que la función $r(f) = (\int fd\mu)/(\int fd\nu)$ es constante. Solo sera necesario hacerlo para $f \in \mathcal{K}^+(G)$.

Sean f, $g \in \mathcal{K}^+(G)$, veamos que $r(f)r(g)$. Sea V_0 una vecindad compacta de e y sean

$$A = [\text{Sop}(f)]V_0 \cup V_0[\text{Sop}(f)],$$
$$B = [\text{Sop}(g)]V_0 \cup V_0[\text{Sop}(g)].$$

Como $\mathrm{Sop}(f)$ es compacto, entonces A es el producto de dos compactos y por ello es compacto. Lo mismo es cierto para B. Sea $y \in V_0$, entonces las funciones

$$h_1(x) = f(xy) - f(yx),$$
$$h_2(x) = g(xy) - g(yx)$$

son continuas, mas aún $\mathrm{Sop}(h_1) \subseteq A$ y $\mathrm{Sop}(h_2) \subseteq B$.

Por la proposición 3.3.2, h_1, h_2 son uniformemente continuas, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe una vecindad simétrica compacta $V \subseteq V_0$ de e tal que

$$\sup_x |f(xy) - f(yx)| < \varepsilon$$

y

$$\sup_x |g(xy) - g(yx)| < \varepsilon \quad \text{para } y \in V.$$

Sea $h \in \mathcal{K}^+(G)$ con $\mathrm{Sop}(h) \subseteq V$ y $h(x) = h(x^{-1})$. Entonces

$$\begin{aligned}\int h d\nu \int f d\mu &= \int\int h(y)f(x)d\mu(x)d\nu(y)\\ &= \int\int h(y)f(yx)d\mu(x)d\nu(y),\end{aligned}$$

y como $h(x) = h(x^{-1})$,

$$\begin{aligned}\int h d\mu \int f d\nu &= \int\int h(x)f(y)d\mu(x)d\nu(y)\\ &= \int\int h(y^{-1}x)f(y)d\mu(x)d\nu(y) = \int\int h(x^{-1}y)f(y)d\nu(y)d\mu(x)\\ &= \int\int h(y)f(xy)d\nu(y)d\mu(x) = \int\int h(y)f(xy)d\mu(x)d\nu(y).\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\left|\int h d\nu \int f d\mu - \int h d\mu \int f d\nu\right| &= \left|\int\int h(y)\left[f(xy) - f(yx)\right]d\mu(x)d\nu(y)\right|\\ &\leq \varepsilon\mu(A)\int h d\nu.\end{aligned}$$

Por un razonamiento semejante,

$$\left|\int h d\nu \int g d\mu - \int h d\mu \int g d\nu\right| \leq \varepsilon\mu(B)\int h d\nu.$$

Dividiendo estas desigualdades por $(\int hd\nu)(\int fd\nu)$ y por $(\int hd\nu)(\int gd\nu)$, respectivamente, y sumándolas tenemos

$$\left| \frac{\displaystyle\int fd\mu}{\displaystyle\int fd\nu} - \frac{\displaystyle\int gd\mu}{\displaystyle\int gd\nu} \right| \leq \varepsilon \left(\frac{\mu(A)}{\displaystyle\int fd\nu} + \frac{\mu(B)}{\displaystyle\int gd\nu} \right)$$

Y dado que ε es arbitrario se sigue que

$$\frac{\displaystyle\int fd\mu}{\displaystyle\int fd\nu} = \frac{\displaystyle\int gd\mu}{\displaystyle\int gd\nu},$$

es decir, $r(f) = r(g)$ como se quería. ■

3.4. Ejemplos de Medidas de Haar

En la sección de grupos topológicos se mostraron algunos ejemplos de grupos topológicos, algunos de ellos localmente compactos y Hausdorff. Entonces cada uno de ellos pose una medida izquierda de Haar. A continuación presentamos algunos ejemplos de medidas izquierdas de Haar basados en dichos grupos topológicos.

Ejemplo 3.4.1 (Integración en un grupo finito)

Sea G un grupo finito, entonces por ser un conjunto finito cualquier topología Hausdorff con la cual sea provisto deberá ser la topología discreta, así G es un grupo topológico compacto y Hausdorff. Entonces G posé una medida izquierda de Haar, a saber, la medida μ en G definida como sigue: Sea $A \subseteq G$, entonces A es abierto en esta topología y por tanto es medible,

$$\mu(A) := \frac{|A|}{|G|}$$

es tanto una medida izquierda como derecha de Haar tal que $\mu(G) = 1$. Para cualquier otra medida de Haar ν en G existe un número positivo c tal que $\nu = c\mu$. En este caso cualquier función $f : G \to \mathbb{R}$ es ν–medible y su integral de Haar respecto de ν resulta

$$\int_G fd\nu = \frac{c}{|G|} \sum_{x \in G} f(x).$$

Ejemplo 3.4.2 (Integración en un espacio vectorial de dimensión finita)

Según vimos en el Ejemplo 1.4.2 el espacio $\mathbb{R}^n$ *es un grupo topológico Hausdorff y localmente compacto, entonces la medida de Lebesgue* m *es una medida izquierda de Haar. La más general integral de Haar en* $\mathbb{R}^n$ *esta dada por*

$$I(f) = c \int f dm.$$

Con c *una constante positiva. Como* $\mathbb{R}^n$ *es un grupo conmutativo no hay distinción entre la traslación izquierda y derecha de conjuntos, así esta medida es tanto medida izquierda como derecha de Haar. En este caso la medida de Lebesgue esta caracterizada por ser la única medida de Haar en* $\mathbb{R}^n$ *tal que el paralelepípedo* $(x_1, \ldots, x_n)$, $0 \leq x_i \leq 1$ *(para* $i = 1, \ldots, n$*) tiene medida 1. En el caso mas general, sea* V *un espacio vectorial de dimensión finita* n*, entonces a fin de establecer la integral de Haar tomamos una base* $e_1, \ldots, e_n$ *de* V *y sea* $I : V \to \mathbb{R}_n$ *el isomorfismo definido por* $I(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ *donde* $x = \sum x_i e_i$*. Entonces cada función* f *en* V *determina una función* fI^{-1} *en* $\mathbb{R}^n$*. Consideremos a las funciones reales* f *en* V *tal que* fI^{-1} *es Lebesgue integrable en* $\mathbb{R}^n$*, y entonces definimos una integral* I *de Haar de* f *como*

$$I(f) = \int fI^{-1} dm, \tag{3.3}$$

donde la integral del miembro derecho es la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$*. Si en vez de la base elegida tomamos cualquier otra, entonces el Teorema 3.3.9 garantiza que dicha integral será la misma que la integral dada por la ecuación (3.3) salvo una constante multiplicativa la cual será igual al determinante de la matriz de cambio de base. Como se puede observar, en el caso de un espacio vectorial arbitrario no existe una base privilegiada que permita determinar una medida e integral de Haar especial como en el caso de* $\mathbb{R}^n$*. Si el espacio vectorial es dotado con un producto interno, entonces podemos escoger una base ortonormal para determinar una mediada de Haar distinguida, la cual asocia el valor 1 al paralelepípedo formado por los elementos de dicha base. En este caso la integral de Haar es independiente de la elección de la base ortonormal.*

Ejemplo 3.4.3 (Integración en $\mathbb{C}^*$)

Se sabe del Ejemplo 1.4.3, el grupo $\mathbb{C}^*$ *de los números complejos diferentes de cero, es un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff, entonces tiene una medida* *izquierda de Haar. Sea* $I : \mathcal{K}(\mathbb{C}^*) \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$I(f) = \int_{\mathbb{C}^*} \frac{f(z)}{|z|^2}\, dxdy,$$

Para cada $f \in \mathcal{K}(\mathbb{C}^*)$ *y* $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$*. Como* f *tiene soporte compacto entonces la función* $z \to f(z)/|z|^2$ *es continua y tiene, también, soporte compacto y por ende es Lebesgue integrable, luego* I *esta bien definida. Además si* $f, g \in \mathcal{K}(\mathbb{C}^*)$ *y* $a \in \mathbb{R}$*, es claro que*

$$I(f + ag) = \int_{\mathbb{C}^*} \frac{(f + ag)(z)}{|z|^2} dxdy = \int_{\mathbb{C}^*} \frac{f(z)}{|z|^2} dxdy + a \int_{\mathbb{C}^*} \frac{g(z)}{|z|^2} dxdy = I(f) + aI(g),$$

por lo que I *es lineal.*

Mejor aún, I *es un invariante por la izquierda. En efecto, sea* $a \in \mathbb{C}^*$ *fijo, y* $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ *tal que* $g(z) = a^{-1}z$*. Es claro que* g *es biyectiva y continua y si se considera como una función de* $\mathbb{R}^2$ *en* $\mathbb{R}^2$ *se puede ver que su Jacobiano es* $J = |a|^{-2}$*, entonces usando el Teorema de Cambio de Variable*

$$\begin{aligned} I(L_a f) &= \int_{\mathbb{C}^*} \frac{L_a f(z)}{|z|^2} dxdy = \int_{\mathbb{C}^*} \frac{f(a^{-1}z)}{|z|^2} dxdy \\ &= \int_{\mathbb{C}^*} \frac{f \circ g(z)}{|g^{-1} \circ g(z)|^2} dxdy = \int_{\mathbb{C}^*} \frac{f(z)}{|g^{-1}(z)|^2} |a|^{-2} dxdy \\ &= \int_G \frac{f(z)}{|a|^{-2}|z|^2} |a|^{-2} dxdy = I(f). \end{aligned}$$

Entonces I *genera una medida de Haar invariante por la izquierda en* $\mathbb{C}^*$*, dada por el Teorema de Representación de Riesz. De Hecho si* $E \subseteq \mathbb{C}^*$ *es de Borel, entonces*

$$\mu(E) = \int_E \frac{dxdy}{x^2 + y^2}.$$

Por ejemplo si 0 es un punto de acumulación de E *entonces* $\mu(E) = \infty$*. En otro caso y si además* E *es acotado entonces existe un conjunto compacto* K *tal que* $E \subseteq K \subseteq \mathbb{C}^*$ *y como* μ *es de Haar, entonces* $\mu(E) < \infty$*. Aun para conjuntos simples como una bola centrada en la identidad el cálculo de su medida es complicado.*

Ejemplo 3.4.4 (Integración en el n–toro)

Segun el ejemplo 1.4.3 el n–toro es un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff, entonces debe tener una medida y una integral de Haar. Tomemos primero el caso $n = 1$, así $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1$, el grupo multiplicativo de los números complejos unitarios. La función, $r(x) = e^{2\pi xi}$ transforma periódicamente los números reales en el grupo $\mathbb{S}^1$, entonces cada función f definida en $\mathbb{S}^1$ determina una función fr en $\mathbb{R}$ que es periódica con periodo 1. De manera análoga consideramos la función

$$r\left(x_1, \ldots, r_n\right) = \left(e^{2\pi x_1 i}, \ldots, e^{2\pi x_n i}\right)$$

la cual asocia a cada función definida en $\mathbb{T}^n$ con una función fr definida en $\mathbb{R}^n$ que es periódica de periodo 1 en cada variable. De esta manera solo consideramos a las funciones f reales definidas en el n–toro tal que fr es Lebesgue integrable en el paralelepípedo P definido por $0 \leq x_i \leq 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, y en este caso definimos una integral de Haar de f en $\mathbb{T}^n$ como:

$$I\left(f\right) = \int_P f r dm,$$

donde la integral del lado derecho es la integral de Lebesgue en P. Como $\mathbb{T}^n$ es un grupo abeliano entonces la medida izquierda y la medida derecha de Haar son iguales, digamos μ. Por último calculemos la medida de Haar del grupo total $\mathbb{T}^n$ para la integral anterior.

$$\begin{aligned}\mu\left(\mathbb{T}^n\right) &= \sup\left\{\int f d\mu = I(f) \,|\, f \in \mathcal{K}(\mathrm{X}) \ y \ 0 \leq f \leq \chi_{\mathbb{T}^n}\right\} \\ &= I\left(\chi_{\mathbb{T}^n}\right) = \int_P \chi_{\mathbb{T}^n} r dm = \int \chi_P dm = 1.\end{aligned}$$

Así esta medida de Haar es justamente la que toma el valor 1 en el total.

Ejemplo 3.4.5 (Integración en $Gl(n, \mathbb{R})$)

Consideremos el grupo multiplicativo $Gl(n, \mathbb{R})$ de las matrices reales $n \times n$, según el ejemplo 1.4.4, $Gl(n, \mathbb{R})$ es un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff. La función $T : G \to \mathbb{R}^{n^2}$ dada por

$$T\left(\left(a_{ij}\right)\right) = \left(a_{11}, \ldots, a_{1n},\, a_{21}, \ldots,\, a_{2n}, \ldots\, a_{n1},\, a_{nn}\right)$$

define, para cada función f en $Gl(n,\mathbb{R})$ una función $f\circ T^{-1}$ en $\mathbb{R}^{n^2}$, consideremos solo a las funciones f reales con soporte compacto tal que $f\circ T^{-1}$ sea Lebesgue integrable, entonces definimos $I:\mathcal{K}(G)\to\mathbb{R}$ como

$$I(f)=\int_G \frac{f\circ T^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})}{\det\left(T^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})\right)^n}\,d\mu.$$

Donde μ es la medida de Lebesgue y por ende, si $f,\, g\in\mathcal{K}(G)$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
I\left(f+\alpha g\right) &= \int_G \frac{(f+\alpha g)\circ T^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})}{\det\left(T^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})\right)^n}\,d\mu \\
&= \int_G \frac{f\circ T^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})}{\det\left(T^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})\right)^n}\,d\mu+\alpha\int_G \frac{g\circ T^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})}{\det\left(T^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})\right)^n}\,d\mu \\
&= I\left(f\right)+\alpha I\left(g\right).
\end{aligned}$$

De lo cual se sigue que I es lineal. Veamos ahora que I es invariante por la izquierda. Tomemos $A\in G$), entonces como A es invertible entonces define un isomorfismo, y además $\det A\neq 0$. Por ello

$$\begin{aligned}
I\left(L_A f\right) &= \int_G \frac{(L_A f)\circ T^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})}{\det\left(A(TA)^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})\right)^n}\,d\mu \\
&= \int_G \frac{f\circ A^{-1}T^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})}{\det\left(AA^{-1}T^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})\right)^n}\,d\mu \\
&= \int_G \frac{f\circ (TA)^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})}{\det\left(A(TA)^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})\right)^n}\,d\mu \\
&= \int_G \frac{f\circ T^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})(\det A)^n}{(\det A)^n\det\left(T^{-1}(x_{11},\ldots,x_{nn})\right)}\,d\mu = I\left(f\right)
\end{aligned}$$

Esto significa que el funcional lineal genera una medida ν de Haar.

Ahora presentamos un ejemplo donde la medidas izquierda y derecha de Haar son distintas:

Ejemplo 3.4.6 (Asimetría de las medidas izquierda y derecha de Haar)

Consideremos el grupo topológico dado en el ejemplo 1.4.5, de matrices A 2×2 *de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $x,\, y \in \mathbb{R}$ *con* $x > 0$. *Como la topología de este grupo topológico es inducida por una métrica, entonces es localmente compacto y Hausdorff. Existe una correspondencia de* G *con* $\mathbb{R}^2$ *que asocia a cada matriz* $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *el vector* $\vec{A} = (x,\, y)$, *de esta manera cada subconjunto* $E \subseteq G$ *se corresponde con un conjunto* $\acute{E} \subseteq \mathbb{R}^2$. *Más aún, esta correspondencia es un homeomorfismo, así la topología de* G *es en cierto sentido la misma que la de* $\mathbb{R}^2$. *Haremos abuso de notación y usaremos* E *en vez de* $\acute{E}$.

Sea $E \subseteq G$ *un boreliano, entonces la función*

$$(x,\, y) \to \frac{1}{x^2}\, \chi_E$$

es medible en $\mathbb{R}^2$. *Entonces podemos definir una medida para los borelianos de* G *de la siguiente forma*

$$\mu(E) = \iint_E \frac{1}{x^2}\, dxdy,$$

donde el miembro derecho representa la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$. *Entonces* μ *define una medida de Borel que, por las propiedades de la integral de Lebesgue, es regular. Veamos que* μ *es una medida izquierda de Haar, para ello solo resta probar que* μ *es invariante por la izquierda. Debido a que la topología de* $\mathbb{R}^2$ *es generada por los rectángulos es suficiente probar que para* $E = [c,\, d] \times [a,\, b]$ *y* $g \in G$ *se cumple*

$$\mu(gE) = \mu(E).$$

Primero calculemos

$$\mu(E) = \int_a^b \int_c^d \frac{1}{x^2}\, dxdy = (b - a)\left(-\frac{1}{d} + \frac{1}{c}\right).$$

Por otro lado, si

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E \quad y \quad g = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$g \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux & uy+v \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

es decir, $x \to ux = \gamma$, $y \to uy + v = \eta$; *entonces* $x = \frac{\gamma}{u}$ *y* $y = \frac{\eta - v}{u}$, *y*

$$\mu(gE) = \int_{ua+v}^{ub+v} \int_{uc}^{ud} \frac{u^2}{\eta^2} \cdot \frac{1}{u^2}\, d\gamma d\eta = u\,(b-a)\left(-\frac{1}{ud} + \frac{1}{uc}\right) = \mu(E).$$

De donde se comprueba que μ *es una medida izquierda de Haar.*

Definiremos, ahora, una medida derecha de Haar ν. *Con las mismas condiciones que antes, sea*

$$\nu(E) = \iint_E \frac{1}{x}\, dxdy.$$

Demostremos que

$$\mu(E^{-1}) = \nu(E),$$

con lo cual, y por la Proposición 3.3.5(a), ν *es una medida derecha de Haar. Si*

$$g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces,

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} x^{-1} & -yx^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir, la transformación inversa tiene la forma: $x \to \gamma = x^{-1}$, $y \to \eta = -yx^{-1}$; *entonces* $x = \gamma^{-1}$, $y - \eta\gamma^{-1}$. *Así, el jacobiano es*

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{1}{\gamma^2} & 0 \\ \frac{\eta}{\gamma^2} & -\frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma^3}.$$

De donde resulta que

$$\mu(E) = \iint_E \frac{1}{x^2}\, dxdy = \iint_{E^{-1}} \gamma^2 \frac{1}{\gamma^3}\, d\gamma d\eta = \iint_{E^{-1}} \frac{1}{\gamma}\, d\gamma d\eta = \nu(E^{-1}).$$

Por último veamos que las medidas μ *y* ν *son distintas. Para ello tomemos* $E = (1,\, \infty) \times (0,\, 1)$ *y calculemos*

$$\mu(E) = \int_1^\infty \int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dydx = 1,$$

y

$$\nu(E) = \int_1^\infty \int_0^1 \frac{1}{x}\, dydx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = \infty.$$

De donde se obtiene que

$$\mu \neq \nu.$$

3.4.1. Integración en Grupos de Lie

La construcción de la medida de Haar es independiente de cualquier estructura diferencial, por el hecho de que en los grupos topológicos este concepto no existe en un primer plano. Sin embargo, si añadimos una estructura diferencial llegamos al concepto de **Grupo de Lie.** No es nuestra intención dar una explicación detallada de dicha teoría, solo mencionaremos algunos de los hechos principales, para una lectura más profunda se puede consultar el libro de Kumaresan [15] o el de Sepanski [22].

Un grupo de Lie G es un grupo y una variedad diferenciable en el cual las funciones producto y tomar inversos son infinitamente diferenciables. En particular, todo grupo de Lie es un grupo topológico y la condición de ser una variedad diferenciable implica que localmente G tiene la misma estructura topológica y diferencial que $\mathbb{R}^n$, es decir es localmente compacto y Hausdorff. Entonces como tal posee una medida Izquierda de Haar. Uno puede preguntarse por la relación que existe entre la integral de Haar y la estructura diferencial. Como un primer indicio podemos mencionar que los ejemplos (3.4.2), (3.4.3), (3.4.4), (3.4.5), son todos ellos grupos de Lie. Tal vez el último de ellos sea el de mayor importancia, junto con sus subgrupos.

En la teoría de variedades diferenciables se desarrolla un tipo de integral en la cual se hace uso de lo siguiente:

Si M es una variedad diferenciable de dimensión n, recordamos que una k–**forma** ω es un campo tensorial k veces covariante sobre M y completamente antisimétrico, es decir es una aplicación que asocia a cada punto $p \in M$ una función $\omega_p : T_p(M) \times \cdots \times T_p(M)(k \text{ veces}) \to \mathbb{R}$ que es multilineal y antisimétrica, donde $T_p(M)$ es el espacio tangente a la variedad M en el punto p. La notación estándar que se usa para el conjunto de las k–formas en M es $\Lambda^k(M)$. Se sabe que en $\Lambda^k(M)$ forma un módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$ de todas las funciones reales suaves sobre la variedad

M. El **producto exterior** de una k–forma ω con una l–forma η es una $(k+l)$–forma que se denota con $\omega \wedge \eta$, $\wedge$ resulta ser asociativo pero no siempre es simétrico. Dada una carta (U, ϕ) de M, ϕ se puede escribir como $\phi = (x_1, \ldots, x_n)$, donde x_i es la i–ésima función coordenada. Las diferenciales dx_i de las funciones coordenadas resultan ser 1–formas y además toda k–forma ω se puede escribir, de manera local, como:

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \tag{3.4}$$

en donde $\omega_{i_1 \ldots i_k}$ son funciones reales definidas sobre algún subconjunto abierto de la variedad que forma una carta y $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Se dice que ω es **suave** si cada $\omega_{i_1 \ldots i_k}$ lo es. Diremos que la variedad M es **orientable** si existe una n–forma ω tal que ω_p es no nula para todo $p \in M$; si este es el caso diremos que ω es una **tipo de orientación** de M. Dos cartas (U, ϕ^{-1}), (V, ψ^{-1}) con $\phi = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\psi = (y_1, \ldots, y_n)$ se dicen que están **consistentemente orientadas** si $U \cap V = \varnothing$ ó se cumple que $\det(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}) > 0$ en $U \cap V$, y un atlas formado únicamente por cartas consistentemente orientadas se llama un **atlas orientado**. El **soporte** de una n–forma diferencial es la cerradura del conjunto $\{p \in M \big| \omega_p \neq 0\}$.

Sea (U, ϕ^{-1}) una carta de M y ω una n–forma suave con soporte compacto contenido en U, entonces, debido a la ecuación (3.4) existe una función real f suave tal que ω se puede escribir como $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Se define la integral de ω en M como:

$$\int_M \omega := \int_{\phi(U)} f(\phi(p)) dx_1 \ldots dx_n, \tag{3.5}$$

donde la integral del lado derecho es la integral de Riemann de la función suave $f \circ \phi$ con soporte compacto. En general la integral 3.5 depende de la elección de la carta, pero si M es orientable, se puede corroborar (ver pag. 215 de [15]) que si (V, ψ^{-1}) es otra carta, consistentemente orientada con (U, ϕ^{-1}), tal que V contiene al soporte de ω, entonces

$$\int_{\phi(U)} f(\phi(p)) dx_1 \ldots dx_n = \int_{\psi(V)} f(\psi(p)) dy_1 \ldots dy_n.$$

De esta manera para poder definir la integral de cualquier n–forma con soporte compacto, no necesariamente soportada en el abierto de una carta, solo consideraremos variedades orientables. Sea M una variedad orientable de dimensión n y ω una n–forma con soporte compacto, escogemos una partición de la unidad $\{f_i\}$ subordinada a un atas orientado, entonces se define la **integral** de ω en M como:

$$\int_M \omega := \sum_i \int_{U_i} f_i\omega. \tag{3.6}$$

Debido a la compacidad del soporte de ω la suma del lado derecho se calcula sobre un número finito de sumandos. Se puede probar que la integral así definida es independiente de la elección de la elección de la partición de la unidad que se tomo.

Sea ω una n–forma con soporte compacto fija. Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función suave con soporte compacto, entonces se define la **integral de** f como:

$$\int_M f := \int_M f\omega. \tag{3.7}$$

En una variedad general no existe una manera natural de elegir una n–forma particular. Sin embargo, en el caso de los Grupos de Lie si la hay.

Sea G un Grupo de Lie de dimensión n. Una n–forma ω en G se llama **invariante por la izquierda** si $\omega(gp) = \omega(p)$, e **invariante por la derecha** si $\omega(pg) = \omega(p)$, para todo g, $p \in G$.

Lema 3.4.7

Sea G un grupo de Lie, entonces

(a) *salvo una constante multiplicativa no nula, existe una única n–forma invariante por la izquierda en G. En particular Todo grupo de Lie es una variedad orientable,*

(b) *Si G es compacto, existe una única forma invariante por la izquierda ω_G tal que*

$$\int_G \omega_G = 1.$$

Demostración.

(a) Sea $\{v_i\}$ una base ordenada de T_eG, y sea X_i el campo vectorial izquierdo invariante definido por $X_i(e) = v_i$. Si ω_i es la una forma dual de X_i, entonces la forma $\omega := \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ es una n–forma no nula en G. Obsérvese que, en virtud de la ecuación (3.6), cualquier otra n–forma en G siempre se puede escribir como $a\omega$. Así, excepto por un múltiplo escalar solo hay una manera de elegir una n–forma izquierdo invariante en G.

(*b*) Si ω es la n–forma del inciso anterior, entonces sea

$$c := \int_G \omega_G$$

y definimos

$$\omega_G = (1/c)\,\omega,$$

así ω_G es la n–forma pedida. ■

La ecuación (3.7), define una manera de integrar funciones con soporte compacto en G y el Teorema de Representación de Riesz (Teorema 3.2.9), garantiza la existencia de una única medida regular de Borel g en G tal que si f es una función real suave con soporte compacto, entonces:

$$\int_G f\omega_G = \int_G f dg.$$

Teorema 3.4.8

Sea G un grupo de Lie compacto. Entonces la medida g es invariante por la izquierda, invariante por la derecha e invariante bajo inversión, es decir,

$$\int_G f(hg)dg = \int_G f(gh)dg = \int_G f(g^{-1})dg = \int_G f(g)dg$$

para $h \in G$ y f una función integrable de Borel en G.

Demostración. Véase [22], página 20. ■

La medida g encontrada arriba es justamente la medida izquierda de Haar, por ello no debe de sorprender que en el caso de los grupos de Lie exista una única medida, pues estos en particular son grupos topológicos. Lo interesante es que la construcción de una integral, y por ello de una medida, en los grupos de Lie por dos caminos diferentes lleve a un mismo resultado: La unicidad de la medida invariante.

Conclusiones

Poder extender la Teoría de la Medida e Integración a espacios más generales que $\mathbb{R}^n$ ayuda a esclarecer los principios básicos de la teoría, además de que permite una mejor aplicación de los resultados a una mayor variedad de problemas.

La estructura de los espacios de medida permite dotar a un conjunto arbitrario de una función medida, sin embargo, esta función rara vez es de utilidad si el conjunto carece de una estructura propia. Históricamente el cálculo de áreas y volúmenes ha sido un problema geométrico, así lo mas natural es estudiar las propiedades de un medida en conjuntos dotados previamente con una topología y postulando que los conjuntos abiertos son los primeros en poderse medir. Las σ–álgebras es el dominio más natural para una medida si deseamos la aditividad para una medida y si pensamos en las propiedades aritméticas de los números reales y posteriormente en el conocimiento que tenemos de las sucesiones y series. Es aquí en donde surge el concepto de σ–álgebra de Borel. Pero Lebesgue introdujo un concepto de mayor alcance al extender los conjuntos que se pueden medir a la ahora conocida σ–álgebra de los Lebesgue medibles, los cuales resultan ser la unión de un Boreliano y un conjunto nulo; por ello Borel opinó[2] que el aporte de Lebesgue a la Teoría de la Medida fue introducir los conjuntos nulos, lo cual molestó mucho a Lebesgue. Sin embargo la teoría es mucho más aplicable a otras áreas de la ciencia y economía y se pueden obtener resultados mas bellos e interesantes si se consideran espacios con mas propiedades, como los espacios Hausdorff y los espacios localmente compactos. Con estas hipótesis se puede enunciar el Teorema de Representación de Riesz, el cual permite ampliar las herramientas de trabajo y torna el estudio de medidas al de funcionales lineales sobre el espacio de funciones reales, es

[2]Véase el artículo de Diomedes Bárcenas, La integral de Lebesgue un poco más de cien años después; Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XIII, No. 1 (2006), pág., 77

decir permite hacer uso de resultados algebraicos y de análisis funcional.

Añadir la estructura extra de Grupo Topológico permite obtener más resultados y una mejor aplicabilidad. Los resultados de mayor importancia en la Teoría de la Integración en Grupos Topológicos son el descubrimiento de Haar de la existencia de un medida regular invariante bajo traslación y el resultado de Neumann que garantiza la unicidad de dicha medida. El descubrimiento de la integral de Haar permite estudiar los conjuntos medibles en los grupos topológicos. Estos tienen aplicaciones en el estudio la Teoría de la Probabilidad, Teoría Ergódica, en el estudio de las simetrías en la Mecánica Cuántica bajo el estudio de los grupos de Lie, en la Teoría de integración en variedades.

En la tesis se calculo las integrales de Haar para varios grupos topológicos, en cada caso se hicieron explícitas las formulas que permiten integrar funciones, sin embargo, en la mayoría de los casos realizar el cálculo explícito de la medida de un conjunto medible es un problema numérico difícil. La idea original del trabajo de tesis no contemplaba la última aplicación en la integración en Grupos de Lie, sin embargo encontramos que es una de las mas interesantes (en nuestra opinión) aplicaciones de que tengamos conocimiento debido a la rica estructura que tienen estos objetos.

Bibliografía

[1] Borges Carlos R., *Elementary Topology and Applications*

Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000.

[2] Burk Frank, *Lebesgue Measure and Integration* An Introduction

New York, John Willey & Sons, Inc., 1998.

[3] Cohn Donald L., *Measure Theory*

Boston, Birkhäuser, 1997.

[4] Davis Sheldon W., *Topology*

The Walter Rudin Student Series in Advanced Mathematics

New York, Mac–Graw–Hill Companies, Inc., 2005.

[5] Dshalalow Jewgeni H., *Real Analysis* An Introduction to the Theory of Real Fuctions and Integration

Boca Raton, Florida, CRC Press, 2001.

[6] Dugundji, James, *Topology*

Allyn and Bacon, Inc.,Boston, 1966.

[7] Engelkind, Ryszard, *General Topology*

Berlin, Heldermann Verlag, 1989.

[8] Evans Lawrence C. and Gariepy Ronald F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions*

Boca Raton, FL., CRC Press, 1992.

[9] Flory G., *Problemas de Topología y de Análisis* (Tomo I)
Barcelona, Editorial Reverté, S. A., 1983.

[10] Folland Gerald B., *Real Analysis* Modern Techniques and Their Applications
New York, John Willey & Sons, Inc., 1999.

[11] Halmos Paul R., *Measure Theory*
New York, Springer–Verlag, New York Inc., 1974.

[12] Hernández Hernández Fernando, *Teoría de Conjuntos*
Aportaciones Matemáticas, Serie **textos** # 13
México, Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[13] Husain, Taqdir, *Introduction to Topological Groups*
Philadelphia and London, W. B. Saunders Company, 1966.

[14] Kolmogorov A. N. and Fomin S. V., *Introductory real analysis*
Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1970.

[15] Kumaresan, S.,*A Course Differential Geometry and Lie Groups*
Mumbai, Hindustan Book Agency (India), 2002.

[16] Kuratowski Kazimiersz, *Introduction to Set Theory and Topology*
Oxford, Pergamon Press, 1972.

[17] Munkres, James R., *Topology a First Course*
Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[18] Nachbin Leopoldo, *The Haar Integral*
New York, D. van Nostrand Company, Inc., 1965.

[19] Pesin Ivan N., *Classical and Modern Integration Theories*
New York, Academic Press, Inc., 1970.

[20] Rana Inder K., *An Introduction to Measure and Integration*

New Delhi, Narosa Publishing Hause, 1997.

[21] Szlenk Wieslaw *Teoría de la Medida y de la Integral*

México, Publicaciones del Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, 1985.

[22] Sepanski Mark R., *Compact Lie Groups*

New York, Springer Science+Business Media, LLC, 2007.

[23] Srivastava S. M., *A Course on Borel Sets*

New York, Springer–Verlag, New York Inc., 1998.

[24] Tkachenko Mikhail, et al *Grupos Topológicos*

México, Universidad Autónoma Metropolitana, 1997.

Índice alfabético