

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

**ESCUELA SUPERIOR DE FISICA Y
MATEMATICAS**

**Decaimiento Raro del Muon
Con un Modelo de Simetría Horizontal**

ALUMNO: RODRIGUEZ PUEBLA ALDO A.

ASESOR DE TESIS: Dr. JOSÉ M. RIVERA REBOLLEDO

ESFM-IPN

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	3
CAPÍTULO 1	
<i>Invarianza de Norma</i>	5
<i>Rompimiento Espontáneo de Simetría</i>	8
<i>Rompimiento Espontáneo de Simetría Local SU(2)</i>	10
<i>Interacciones Electrodébiles</i>	11
CAPÍTULO 2	
<i>La Simetría $U(1)_X$</i>	19
CAPÍTULO 3	
<i>Cambio de Sabor en el Modelo Estándar</i>	27
<i>Cambio de Sabor en la Simetría $U(1)_X$</i>	32
CAPÍTULO 4	
<i>Decaimiento del Muon</i>	33
<i>Decaimiento Raro del Muon</i>	39
CAPÍTULO 5	
<i>La Aplicación de la Simetría $U(1)_X$</i>	44
CONCLUSIONES	53
BIBLIOGRAFÍA	53
APÉNDICE A	
<i>Matrices de Pauli y Gama</i>	54
APÉNDICE B	
<i>Decaimientos y reglas de Feynman</i>	56
APÉNDICE C	
<i>Ecuaciones de movimiento</i>	57

INTRODUCCIÓN

En partículas elementales las masas de las partículas; fermiones y bosones, son generados al implementar un mecanismo llamado “Rompimiento Espontáneo de Simetría” (SSB). Las masas de los fermiones conocidos, quarks y leptones, son generados al romperse espontáneamente el grupo de simetría electrodébil $U(1)_Q$ de la “Electrodinámica Cuántica” (QED). En física de partículas elementales existe el llamado Modelo Estándar (SM) que ha tenido un enorme éxito para describir cualitativamente y cuantitativamente la gran mayoría de los resultados experimentales encontrados ahora. Desde un punto de vista técnico el SM implementa el SSB en el grupo de simetría electrodébil con la introducción de un doblete de Escalares Fundamentales. Este mecanismo implica la existencia de una partícula escalar neutra física que se le llama “Boson de Higgs”, el cual se le sigue buscando pero hasta ahora no se le ha encontrado.

Aunque el SM ha tenido un éxito muy grande existen decaimientos en la naturaleza que no pueden ser explicados por este modelo y nuevos modelos tienen que ser introducidos. Entre esos decaimientos se encuentra el decaimiento raro del muon, el cual está dado por $\mu \rightarrow e^- + e^+ + e^-$. La posible explicación de este decaimiento se encuentra en la introducción de una nueva simetría del tipo horizontal ($U(1)_X$) [1].

En el Primer Capítulo se introducen los conceptos de Invarianza de Norma por medio de una lagrangiana para una partícula libre de espín $\frac{1}{2}$. Después de haber introducido estos conceptos encontré que era prudente hacer una revisión de los rompimientos de simetría para diferentes grupos de simetrías. El primer grupo es del tipo $U(1)$ seguido por uno del tipo $SU(2)$, de tal modo que todos los resultados obtenidos de los rompimientos de simetrías se utilizan para finalmente concluir el capítulo con el estudio de las Interacciones Débiles.

El Segundo Capítulo es un bosquejo de cómo debe ser la Simetría $U(1)_X$ y bajo que suposiciones es válida la introducción de esta nueva simetría. En este capítulo se introducen 12 nuevos escalares, donde solo uno de ellos participa en el rompimiento de la simetría $U(1)_X$. También se obtienen las matrices de masa para los campos escalares con carga $2/3$, $4/3$ y -1 así como las matrices de masa para los quarks d a un lazo y a dos lazos.

El Tercer Capítulo trata el cambio de sabor en el SM y el cambio de sabor en el modelo extendido. El Cuarto Capítulo se realizan los cálculos del decaimiento preferido por el muon, también llamado el decaimiento total del muon, y el decaimiento raro del muon donde se supondrá que existe un escalar neutro masivo que ayudará al cambio de sabor a un nivel de árbol en el decaimiento.

El Quinto y último Capítulo es la aplicación de todos los cuatro Capítulos anteriores en especial del segundo y cuarto. En este capítulo se pretende encontrar una cota para las constantes de acoplamiento que acompañan al escalar neutro. La suposición más fuerte que

se hace para encontrar la cota a las constantes de acoplamiento es que a la escala a la cual se piensa que la simetría espontánea de $U(1)_X$ se rompe es de algunos TeV [1].

En las conclusiones se puede encontrar el supremo en la cota para las constantes de acoplamiento. También encontré prudente introducir un apéndice con algunas formulas o cálculos que he utilizado en el desarrollo de la tesis pero no he mencionado su origen.

CAPÍTULO 1

INVARIANZA DE NORMA

Antes de entrar al estudio de la invarianza de norma, se introducirán conceptos básicos de simetrías y de grupos.

SIMETRÍAS:

Fue en 1917 cuando se publicó [2,3] uno de los teoremas más importantes no solo para el modelo Estándar sino para la física en general. Emmy Noether demostró que:

Existen simetrías si y solo si existen leyes de conservación

La idea de simetría no es nueva y su entendimiento no es muy complicado, la idea general consiste en encontrar un conjunto de operaciones que podrían formar un grupo que deje invariante al sistema.

GRUPO:

Un conjunto G es un grupo si se cumple:

Una correspondencia (u operación) que asocia a cada par de elementos x, y de G , un elemento xy de G tal que

- $x(yz) = (xy)z$ para todo x, y, z en G (asociatividad);
- existe un elemento e en G tal que $ex = xe = x$ para todo x de G ;
- a cada elemento x de G le corresponde un elemento x^{-1} en G tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$

Es importante notar que en general, los elementos de un grupo no conmutan ($xy \neq yx$), aquellos que no cumplan esta propiedad se dicen que son *Abelianos*

En la física de las partículas elementales se utilizan entre otros 4 grupos de matrices y son clasificados como sigue:

1. El grupo $U(n)$ son matrices $n \times n$ tales que $U^\dagger U = I$ (grupo unitario)
2. El grupo $SU(n)$ son matrices $n \times n$ unitarias con determinante 1
3. El grupo $O(n)$ son matrices $n \times n$ tales que $U^T U = I$ (grupo ortogonal)
4. El grupo $SO(n)$ son matrices $n \times n$ ortogonales con determinante 1

$SO(n)$ puede ser pensado como el grupo de todas las rotaciones en el espacio de n dimensiones, si $n = 3$ las rotaciones serán en el espacio de 3 dimensiones aunque resulta que la estructura del grupo $SU(2)$ es muy parecida a la de $SO(3)$.

Una implicación del concepto de simetría y de grupo es:

Un conjunto de operaciones simétricas en un sistema debe ser un grupo.

Todas aquellas cantidades que tienen sentido físico y que son invariantes respecto a una transformación, a esa invarianza, es llamada invarianza de norma. Todas las transformaciones de norma pueden ser separadas en dos grandes grupos: transformaciones de norma globales y locales.

Un ejemplo de una transformación global, que implica la conservación de la carga según el teorema de Noether, se presenta cuando la invarianza de una lagrangiana ocurre bajo las transformaciones del tipo

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = e^{i\alpha Q} \psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\alpha Q},\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde Q es la carga del campo ψ , y α es un número arbitrario independiente del espacio-tiempo. El grupo al cual esta transformación pertenece es la $U(1)$. Ya que el parámetro α es independiente del espacio-tiempo, la transformación es llamada global.

Supongamos dos campos Ψ_1 y Ψ_2 de espín- $1/2$ y masa m_1 y m_2 con una lagrangiana de partículas libres en ausencia de interacciones

$$\mathfrak{S} = [i\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_1 - m_1 \bar{\Psi}_1 \Psi_1] + [i\bar{\Psi}_2 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_2 - m_2 \bar{\Psi}_2 \Psi_2].\tag{1.2}$$

Si se introduce el espinor de cuatro componentes

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix},\tag{1.3}$$

el espinor adjunto es

$$\bar{\Psi} = (\bar{\Psi}_1 \quad \bar{\Psi}_2),\tag{1.4}$$

y la lagrangiana (1.2) queda como

$$\mathfrak{S} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \bar{\psi}M\psi, \quad (1.5)$$

donde M es la matriz de masa

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

De ahora en adelante se trabajará con la lagrangiana (1.5) teniendo en cuenta que las dos masas son iguales entonces $M = mI$, donde I es la matriz identidad. Consideremos la transformación

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow U\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}U^\dagger, \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde U es cualquier matriz unitaria 2x2, por lo que la combinación $\bar{\psi}\psi$ es invariante. Ya que cualquier número complejo con módulo unitario puede ser escrito como $e^{i\theta}$ (θ un número real) la matriz U puede ser expresada como el producto

$$U = e^{i\theta} e^{i\sigma \cdot \mathbf{a}}, \quad (1.8)$$

donde σ son las matrices de Pauli y los a_i son parámetros. Una transformación global perteneciente al grupo $SU(2)$ es

$$\psi \rightarrow e^{i\sigma \cdot \mathbf{a}}\psi. \quad (1.9)$$

Para que la transformación sea local los parámetros de \mathbf{a} deberán ser funciones de x_μ . Definiremos una nueva variable, como

$$\lambda(x) \equiv -\frac{\mathbf{a}(x)}{q}, \quad (1.10)$$

donde q es una constante. Por lo tanto, identificaremos a la transformación local $SU(2)$ como

$$\psi \rightarrow S\psi, \quad \text{donde } S \equiv e^{-iq\sigma \cdot \lambda(x)} \quad (1.11)$$

La actual Lagrangiana (1.5) no es invariante bajo esta transformación ya que un término extra aparecerá en la derivada ($\partial_\mu\psi \rightarrow (\partial_\mu S)\psi + S\partial_\mu\psi$), si se introduce la siguiente derivada covariante ese término extra puede ser eliminado

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iq\sigma \cdot \mathbf{A}_\mu, \quad (1.12)$$

donde \mathbf{A}_μ es un potencial vectorial. La regla de transformación para \mathbf{A}_μ estará dada por

$$\mathbf{A}'_{\mu} \rightarrow \mathbf{A}_{\mu} + \partial_{\mu} \lambda + 2q(\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{A}_{\mu}), \quad (1.13)$$

entonces la lagrangiana (1.5) resultante es:

$$\mathfrak{S} = i\bar{\psi}D\psi - M\bar{\psi}\psi = [i\bar{\psi}\partial\psi - M\bar{\psi}\psi] - (q\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\boldsymbol{\sigma}\psi) \cdot \mathbf{A}_{\mu}, \quad (1.14)$$

(con $D = \boldsymbol{\gamma}^{\mu}D_{\mu}$ y $\partial = \boldsymbol{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}$) la cual es invariante bajo las transformaciones de la ecs. (1.11) y (1.12). Un nuevo problema surge ya que se han tenido que introducir los campos sin masa $\mathbf{A}^{\mu} = (A_1^{\mu}, A_2^{\mu}, A_3^{\mu})$, que requiere su propia lagrangiana libre \mathfrak{S}_A que deberá ser adicionada a la lagrangiana (1.14)

$$\mathfrak{S}_A = -\frac{1}{16\pi} \mathbf{F}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} \quad (1.15)$$

donde

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu}\mathbf{A}^{\nu} - \partial^{\nu}\mathbf{A}^{\mu} - 2q(\mathbf{A}^{\mu} \times \mathbf{A}^{\nu}) \quad (1.16)$$

que cumple la transformación de norma local

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} \rightarrow \mathbf{F}^{\mu\nu} + 2q(\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{F}^{\mu\nu}) \quad (1.17)$$

Note que las ecs. (1.15)-(1.17) aseguran la invarianza de \mathfrak{S}_A . Finalmente, la lagrangiana de Yang-Mills tiene la forma

$$\mathfrak{S} = [i\bar{\psi}\partial\psi - M\bar{\psi}\psi] - \frac{1}{16\pi} \mathbf{F}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} - (q\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\boldsymbol{\sigma}\psi) \cdot \mathbf{A}_{\mu}. \quad (1.18)$$

Esto es una lagrangiana de dos masas iguales en interacción con tres campos de norma vectoriales sin masa.

ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE SIMETRÍA

Las transformaciones que locamente dejan a la lagrangiana invariante nos permiten determinar los acoplamientos (interacciones) de las partículas con los campos, más aún nos permiten encontrar los términos de masa para los campos.

A continuación la siguiente lagrangiana para un campo escalar ϕ servirá para explicar el método a seguir para calcular las masas de los bosones intermediarios de las fuerzas electrodébiles W^\pm y Z^0 [2,4].

Sea

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}(\partial_\nu \phi)(\partial^\nu \phi) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4, \quad (1.19)$$

μ y λ son constantes reales. El segundo término del miembro podría pensarse como un término de masa del campo ϕ y el tercero como una interacción, pero un detalle más minucioso nos llevaría a una masa imaginaria ya que la lagrangiana para un campo escalar (espín-0) de masa m es

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (1.20)$$

Para encontrar el término de masa del campo ϕ en la ec. (1.19) debemos tener en mente que las reglas de Feynman son perturbaciones en el estado base o vacío, para encontrar este vacío debemos hallar la configuración de mínima energía para el campo. En la elección de este estado reelegimos la energía potencial como

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4, \quad (1.21)$$

El mínimo para esta función resulta ser $\phi = \pm \mu / \lambda$. Como las energías en estos dos estados son iguales se dice que el estado está degenerado. El siguiente paso será añadir una constante a la función $V(\phi)$ la cual dejará a las ecuaciones de movimiento sin cambio, para desplazar a la función y obteniendo el nuevo mínimo cuando la función $V(\phi) = 0$.

La nueva expresión para $V(\phi)$ es:

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda^2(\phi^2 - \eta^2)^2, \quad (1.22)$$

donde

$$\eta = \frac{\mu}{\lambda}. \quad (1.23)$$

Cabe mencionar que la ecuación (1.22) tiene simetría, si $\phi \rightarrow -\phi$ el signo de V no cambia, pero no así en el estado base ya que $\phi = \eta$. Si el campo ϕ se escribe de la forma

$$\phi = \eta + \zeta(x), \quad (1.24)$$

donde ζ es una excitación del campo (lo que muy pronto tomará sentido ya que el término de masa será obtenido debido a esta excitación) con respecto al estado base η . Al hacer esta sustitución, la nueva lagrangiana pierde toda simetría, así la ecuación 1.19 obtiene la siguiente forma

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \zeta)(\partial^\mu \zeta) - \lambda^2 \eta^2 \zeta^2 - \lambda^2 \eta \zeta^3 - \frac{1}{4} \lambda^2 \zeta^4. \quad (1.25)$$

La comparación con la lagrangiana para un campo escalar, ec. (1.20), permite identificar el término de masa que se encuentra en el segundo término

$$m = \sqrt{2} \lambda \eta, \quad (1.26)$$

y los otros dos términos como auto-interacciones del campo.

ROMPIMIENTO DE SIMETRÍA LOCAL $SU(2)$

Sea la siguiente lagrangiana

$$\mathfrak{S} = (D_\mu \varphi)(D^\mu \varphi)^* - \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\|\varphi\|^2 - \frac{1}{2} \eta^2 \right)^2 - \frac{1}{4} \mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{G}^{\mu\nu}, \quad (1.27)$$

donde el campo φ tiene la siguiente forma

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

y

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig_w}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}_\mu, \quad (1.29)$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - ig_w [W_\mu W_\nu - W_\nu W_\mu]. \quad (1.30)$$

En esta nueva lagrangiana el estado base se encuentra en $\varphi = \frac{\eta}{\sqrt{2}}$. Si se escoge φ como

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \zeta(x) \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

\mathfrak{S} toma la forma

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \zeta)(\partial^\mu \zeta)^* + \frac{1}{8} g_W^2 \left\| \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \zeta \end{pmatrix} \right\|^2 - \frac{1}{8} \lambda^2 \zeta^2 (2\eta + \zeta)^2 - \frac{1}{4} \mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{G}^{\mu\nu}. \quad (1.32)$$

A partir de la matrices de Pauli definimos

$$\sigma_- = \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

junto con las siguientes cantidades

$$W^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^1 \pm iW_\mu^2, \quad (1.34)$$

el segundo término del miembro derecho de la ec. (1.32) adquiere la siguiente representación

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} = \sigma_+ W_- + \sigma_- W_+ + \sigma_3 W_3. \quad (1.35)$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{8} g_W^2 \left\| \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \zeta \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{8} g_W^2 (W_3^2 + 2W_- W_+) (\eta + \zeta)^2. \quad (1.36)$$

de donde los campos W_- , W_+ y W_3 tienen masa igual a $\frac{1}{2} g_W \eta$.

INTERACCIONES ELECTRODÉBILES

El modelo estándar está basado en una simetría local $G_M = SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ [2,3,4]. Donde $SU(2)_L$ se refiere al isospín débil y el subíndice L solo es para recordar que solo actúa sobre estados izquierdos. $U(1)_Y$ se refiere a la hipercarga débil, el subíndice Y es precisamente la hipercarga débil de la ecuación de Gell-Mann-Nishijima.

En la simetría local G_M existen cuatro campos de norma donde dos de ellos son cargados y dos son neutros. Para $SU(2)_L$, el cual es un grupo no-abeliano, se denotaran los tres campos correspondientes por $\mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3)$, mientras que el campo para la simetría $U(1)_Y$ será denotado por B .

Por simplicidad, los siguientes cálculos se harán considerando al electrón y a su respectivo neutrino, el resto de los fermiones serán introducidos al final de la discusión. Cabe resaltar que al momento de introducir todos los fermiones dentro de este aparato, el acoplamiento de los campos de norma para corrientes vectoriales y axiales, la conservación de las corrientes no puede ser violada. Debido a esto en la Lagrangiana de G_M se incluyen fermiones carentes de masa con componentes independientes, izquierdo (L) y derecho (R)

$$\psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)\psi \quad (1.37).$$

Se puede observar que la matriz $(1 \pm \gamma^5)$ ha sido absorbida por el espinor de la partícula. El siguiente paso es introducir un doblete izquierdo

$$\chi = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

mientras que ν_R y e_R son singuletes. De esta manera el doblete de los fermiones izquierdos tienen oportunidad de emitir bosones W^\pm (Fig. 1)

En los procesos electro-débiles siempre hay un cambio de sabor cuando el mediador es W^\pm , por el contrario cuando el mediador involucrado es el bosón Z^0 según se observa en la figura 1.1, donde l es un leptón, q y q' un quark, ν_l neutrino del leptón y f un fermión.

Lo que sigue a continuación es introducir el doblete de campos escalares

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (1.39).$$

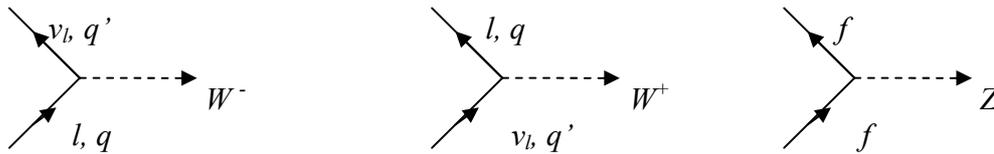


Fig. 1.1 Vértices fundamentales para las fuerzas débiles

Al tener un valor de expectación diferente a cero en el vacío el campo $(\phi^0 + \phi^{*0})/\sqrt{2}$, le asignará valores a las masas de los bosones W^\pm y Z^0 y al electrón. A este rompimiento de simetría a también se le conoce como el mecanismo de Higgs, de hecho en este mecanismo se predice la existencia de otra partícula que es un bosón escalar y es mejor conocido como el bosón de Higgs (ζ). Se piensa que el bosón de Higgs es lo demasiado masivo para que en los aceleradores actuales pueda ser detectada.

Antes de pasar a los cálculos para la masa de estos bosones, primero se revisará la lagrangiana para estos campos.

La expresión completa para la lagrangiana es [4]

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4} \mathbf{G}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{G}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\chi} D\chi + i\bar{e}_R D e_R + i\bar{\nu}_R D \nu_R + \|D_\mu \phi\|^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\|\phi\|^2 - \frac{1}{2} \eta^2 \right)^2 - f_e (\bar{\chi} e_R \phi + \bar{e}_R \chi \phi^*) - f_\nu (\bar{\chi} \nu_R \phi + \bar{\nu}_R \chi \phi^*) \quad (1.40).$$

El que está lagrangiana tenga términos en común con la lagrangiana (1.27) no es una coincidencia ya que en realidad hemos estado trabando con está lagrangiana en las dos secciones anteriores solo que no hemos considerado las interacciones del campo con los fermiones ni las interacciones entre los fermiones. Para entender mejor la lagrangiana empezaremos por aclarar la notación y el significado de cada término.

La derivada covariante es

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - \frac{ig_W}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}_\mu - \frac{ig'}{2} Y B_\mu, \quad (1.41)$$

y consiste en un isotriplete ($\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}_\mu$) débil de bosones vectoriales intermediarios \mathbf{W} con una constante g_W de acoplamiento y un isosingulete con un bosón vectorial intermediario B con una constante de acoplamiento $g'/2$. Los valores para Y son mostrados en la tabla 1.1. El segundo término siempre será cero para el caso de campos isoescalares con $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$, correspondiendo a ν_R y e_R .

La intensidad de los campos de norma es

Partícula	Y
ν_L, e_L	-1
e_R	-2
ν_R	0
ϕ^+, ϕ^0	1

Tabla 1.1

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - ig_W [W_\mu W_\nu - W_\nu W_\mu], \quad (1.42)$$

y

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (1.43)$$

Para describir el movimiento libre de los fermiones y su interacción con el campo de norma se utiliza el término

$$i\bar{\chi}\mathcal{D}\chi. \quad (1.44)$$

Para los fermiones derechos sus movimientos libres están dados por

$$i\bar{e}_R \mathcal{D}e_R \text{ y } i\bar{\nu}_R \mathcal{D}\nu_R. \quad (1.45)$$

El sexto término de la ec. (1.40)

$$\|D_\mu \varphi\|^2 = (D_\mu \varphi)^* (D^\mu \varphi), \quad (1.46)$$

describe el movimiento libre del campo escalar y su interacción con los campos de norma \mathbf{W}_μ y B_μ .

Para que el séptimo término de la lagrangiana de la ec. (1.40) pueda darle masa a los bosones, el campo φ tendrá que adquirir un valor de expectación en el vacío de $\eta / 2^{1/2}$.

Los términos

$$-f_e (\bar{\chi} e_R \varphi + \bar{e}_R \chi \varphi^*) - f_\nu (\bar{\chi} \nu_R \varphi + \bar{\nu}_R \chi \varphi_c^*)$$

es la interacción de los fermiones debido al campo escalar y estos adquieren masa cuando el valor de expectación en el vacío del campo escalar es diferente de cero. Por último, el campo φ_c que ha aparecido es la carga conjugada del isoespino φ ,

$$\varphi_c = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}^0 \\ -\varphi^- \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

El al igual que la lagrangiana (1.27) escogemos a φ como

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \zeta(x) \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

con η una constante y ζ un campo escalar real. Este nuevo vacío tendrá excitaciones por medio del campo $\zeta(x)$ los cuales serán mesones escalares masivos con masa $\lambda\eta$. Las otras tres componentes del campo ϕ son como componentes longitudinales de los bosones masivos W^\pm y Z .

Ahora que se han identificado los términos de la lagrangiana haremos romper su simetría y así darle sentido sus términos. Finalmente obtendremos las masas de los bosones W 's y Z . Para ver cómo aparecen las masas de estos bosones en el modelo primero debemos sustituir la ec. (1.48) en la expresión (1.41), es decir.

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= \left(\partial_\mu - \frac{ig_W}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}_\mu - \frac{ig'}{2} YB_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ (\eta + \zeta)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{2} i (g_W W_{3\mu} - g' B_\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} - \frac{ig}{2} W_\mu^- \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

Así el sexto término de (1.40) $\|D_\mu \phi\|^2$ arroja el término de masa de los bosones intermedarios

$$\frac{1}{8} \eta^2 (g_W W_{3\mu} - g' B_\mu)^2 + \frac{1}{4} \eta^2 g^2 W_\mu^- W_\mu^+, \quad (1.50)$$

donde

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^1 \pm i W_\mu^2, \quad (1.51).$$

Si se define la siguiente cantidad

$$\bar{g} = \sqrt{g_W^2 + g'^2}, \quad (1.52a)$$

entonces se cumplen las siguientes identidades [4]

$$g_W / \bar{g} = \cos \theta_W, \quad g' / \bar{g} = \sin \theta_W, \quad \tan \theta_W = \frac{g'}{g_W}, \quad (1.52b)$$

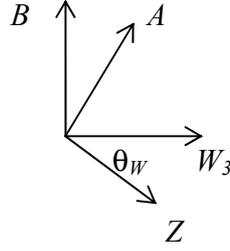


Fig. 1.2

donde θ_W es el llamado ángulo de Weinberg. El siguiente paso es introducir los campos ortogonales del bosón Z y el fotón A , que son el resultado de la rotación de los campos B y W_3 (Fig. 1.2), dados por

$$\begin{aligned} A_\mu &= B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^3 \sin \theta_W, \\ Z_\mu &= -B_\mu \sin \theta_W + W_\mu^3 \cos \theta_W. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Con todo esto, si se utilizan las ecs. (1.51) – (1.53) en la ec. (1.50), los términos de masa pueden ser escritos como

$$\frac{\bar{g}^2 \eta^2}{8} Z^2 + \frac{1}{4} g^2 \eta^2 \|W_\mu\|^2. \quad (1.54)$$

De esta última ecuación podemos hacer una comparación con la expresión estándar para los términos de masa en la Lagrangiana,

$$\frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu, \quad m_W^2 W^\mu W_\mu^*, \quad (1.55)$$

obteniendo los siguientes valores para las masas de los bosones intermedarios

$$m_Z = \frac{1}{2} \bar{g} \eta, \quad m_W = \frac{1}{2} g \eta, \quad \frac{m_W}{m_Z} = \cos \theta_W. \quad (1.56)$$

Con estos resultados es apropiado introducir los fermiones restantes que se conocen hasta ahora en el modelo Estándar. Primero hay que decir que las notaciones que se han usado para el electrón y su neutrino son válidas para el muón y su neutrino. El siguiente paso es hacerlos interactuar del mismo modo que lo hacen el electrón y su neutrino, es decir, en la Lagrangiana ec. (1.40) debemos agregar los términos relacionados con el doblete $(\nu_{\mu L}, \mu_L)$ y los singuletes $\nu_{\mu R}$ y μ_R . Lo mismo se tiene que hacer para la partícula τ .

De manera similar los quarks forman isodoubletes izquierdos y los isosinguletes derechos, aunque existen diferencias ya que el valor de la hipercarga de los quarks difiere de los leptones (en el sentido que los quarks tienen un hipercarga con un valor fraccional,

mientras que los leptones tienen una hipercarga con un valor entero) y además se tienen que introducir los ángulos de Cabibbo.

Los cuatro primeros quarks forman dos isodobletes

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \quad (1.57)$$

donde

$$\begin{aligned} d' &= d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \\ s' &= -d \sin \theta_C + s \cos \theta_C \end{aligned} \quad (1.58)$$

con θ_C el ángulo de Cabibbo. Estos quarks izquierdos han sido escogidos de esta manera ya que los bosones W interactúan con los estados rotados, ec. (1.57), de la misma manera que lo hace con los leptones $\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$, por lo que la ec. (1.57) queda como sigue si la ec. (1.58) es sustituida

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -d \sin \theta_C + s \cos \theta_C \end{pmatrix}. \quad (1.59)$$

De aquí podemos inferir que el cambio de sabor $d \rightarrow u + W^-$ trae un factor $\cos \theta_C$, y el cambio de sabor $s \rightarrow u + W^-$ trae un factor $\sin \theta_C$, y así se sigue con los demás términos.

Las corrientes neutras conservan el sabor de los quarks. Para los términos de masa de los quarks d y s , debemos tomar en cuenta la interacción de los bosones de Higgs con d' y s' , los cuales

$$\frac{1}{\sqrt{2}} f_{d'} (\bar{d}'_L d'_R + \bar{d}'_R d'_L) (\eta + \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_{d'} \bar{d}' d' (\eta + \zeta), \quad (1.60)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} f_{s'} (\bar{s}'_L s'_R + \bar{s}'_R s'_L) (\eta + \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_{s'} \bar{s}' s' (\eta + \zeta), \quad (1.61)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} f_{s'd'} (\bar{s}'_L d'_R + \bar{s}'_R d'_L + \bar{d}'_L s'_R + \bar{d}'_R s'_L) (\eta + \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_{s'd'} (\bar{s}' d' + \bar{d}' s') (\eta + \zeta). \quad (1.62)$$

La rotación por el ángulo de Cabibbo transforma la suma de las ecs. (1.60)-(1.62)

$$\sqrt{\frac{1}{2}} [f_{d'} \bar{d}' d' + f_{s'} \bar{s}' s' + f_{s'd'} (\bar{s}' d' + \bar{d}' s')] \eta, \quad (1.63)$$

a la forma diagonal

$$m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s, \quad (1.64)$$

donde m_d y m_s son las masas de los quarks d y s . Sustituyendo la ec. (1.58) en (1.63) y comparando con la ec. (1.64) se obtiene

$$m_d = \sqrt{\frac{1}{2}} (f_{d'} \cos^2 \theta_C + f_{s'} \sin^2 \theta_C - 2f_{s'd'} \cos \theta_C \sin \theta_C) \eta, \quad (1.65)$$

$$m_s = \sqrt{\frac{1}{2}} (f_{d'} \sin^2 \theta_C + f_{s'} \cos^2 \theta_C + 2f_{s'd'} \cos \theta_C \sin \theta_C) \eta \quad (1.66).$$

Para la parte leptónica de la Lagrangiana (1.40) en general se considera el siguiente término

$$f_l (\bar{\chi}_l l_R \phi + \bar{l}_R \chi_l \phi^*), \quad (1.67)$$

donde l es cualquier leptón: e , μ o τ , y χ_l es un doblete. Sustituyendo la ec. (1.48) en la ec. (1.67) obtenemos

$$\sqrt{\frac{1}{2}} f_l (\bar{l}_L l_R + \bar{l}_R l_L) (\eta + \zeta) = \sqrt{\frac{1}{2}} f_l \bar{l} l (\eta + \zeta), \quad (1.68)$$

donde el primer término le da a l su masa la cual resulta ser

$$m_l = f_l \frac{\eta}{\sqrt{2}}. \quad (1.69)$$

Finalmente observe que si $m_{\nu_e} = m_{\nu_\mu} = m_{\nu_\tau} = 0$ entonces $f_{\nu_e} = f_{\nu_\mu} = f_{\nu_\tau} = 0$.

CAPÍTULO 2

LA SIMETRÍA $U(1)_X$

Hasta ahora se han asumido tres familias de fermiones, los cuales bajo el grupo de norma del Modelo Estándar (G_{SM}) adquieren valores de masas que no pueden ser explicados. Por eso una nueva simetría local de tipo horizontal ($U(1)_X$) [1] tiene que ser introducida. Esta nueva simetría asume que solo la tercera familia de fermiones se vuelve masiva a nivel de árbol (ver Tabla 2.1), mientras que para los fermiones ligeros su masa se produce radiativamente. Se consideraran partículas escalares que darán masa a los fermiones ligeros por medio de procesos de cambios de sabor.

Ya que el grupo de norma del Modelo Estándar sigue siendo válido, toda la teoría del expuesta el capítulo anterior continúa satisfaciéndose. Para evitar las extrañezas los valores de la carga horizontal X han sido asignados de tal modo que eso no ocurra. Para que el número de parámetros sea el menos posible, los valores de la carga horizontal X deben cumplir con la condición de no tener traza [1], esto es:

$$X(f_i) = 0, \pm \delta_{f_i}, \quad (2.1)$$

donde i es el índice de familia, con la restricción “dobletes independientes de los singuletes”[1]

$$\delta_q^2 - 2\delta_u^2 + \delta_d^2 = \delta_l^2 - \delta_e^2. \quad (2.2)$$

Una solución de la ecuación (2.2) que garantiza que los quarks y los leptones en la tercera familia adquieren su masa a nivel árbol, está dada por [1]

$$\delta_l = \delta_q = \Delta \neq \delta_u = \delta_d = \delta_e = \delta, \quad (2.3)$$

Para evitar cambio de sabor a nivel árbol de las corrientes neutras, no se permite la mezcla entre el bosón Z del Modelo Estándar y su contraparte horizontal, de este modo el escalar de Higgs debe tener una carga horizontal cero.

Las masas de la primera y segunda familia son generadas por nuevas representaciones irreducibles de campos escalares debido a que los bosones de norma de $G = G_{SM} \otimes U(1)_X$ [1]

<i>Sector</i>	<i>Familia</i> 1	<i>Familia</i> 2	<i>Familia</i> 3
q	Δ	$-\Delta$	0
u	δ	$-\delta$	0
d	δ	$-\delta$	0
l	Δ	$-\Delta$	0
e	δ	$-\delta$	0

Tabla 2.1

	<i>Clase I</i>		<i>Clase II</i>						<i>Clase I</i>		<i>Clase II</i>	
	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}	ϕ_{11}	ϕ_{12}
X	0	$-\delta$	0	Δ	0	δ	0	δ	Δ	0	δ	0
Y	1	0	$-2/3$	$-2/3$	$4/3$	$4/3$	$-8/3$	$-8/3$	2	2	4	4
T	$1/2$	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
C	1	1	6	6	6	6	6	6	1	1	1	1

Tabla 2.2

permite transiciones entre diferentes familias. La tercera familia será neutra bajo la nueva simetría $U(1)_X$ (Tabla 2.1). Estos nuevos escalares son divididos en dos clases. La clase I son escalares que tienen valor de expectación en el vacío, mientras que los de la Clase II no tienen valor de expectación en el vacío con cuatro representaciones irreducibles para la clase I y ocho para la clase II. Los números cuánticos para los nuevos escalares son mostrados en la Tabla 2.2 [1].

Los acoplamientos de Yukawa pueden dividirse en los acoplamientos D (acoplamientos de Dirac) y los acoplamientos M (acoplamientos de Majorana), es decir [1]:

$$\mathfrak{S}_Y = \mathfrak{S}_{YD} + \mathfrak{S}_{YM}, \quad (2.4)$$

donde

$$\mathfrak{S}_{YD} = Y^u \bar{q}_{L3} \tilde{\phi}_1 u_{R3} + Y^d \bar{q}_{L3} \tilde{\phi}_1 d_{R3} + Y^\tau \bar{l}_{L3} \tilde{\phi}_1 \tau_R + h.c., \quad (2.5)$$

y

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{YM} = & Y_Q \left[q_{1L}^{\alpha T} C \phi_{3\{\alpha\beta\}} q_{2L}^\beta + q_{3L}^{\alpha T} C \phi_{3\{\alpha\beta\}} q_{3L}^\beta + q_{2L}^{\alpha T} C \phi_{4\{\alpha\beta\}} q_{3L}^\beta + d_{2R}^T C \phi_5 d_{1R} \right. \\
& + d_{3R}^T C \phi_5 d_{3R} + d_{3R}^T C \phi_6 d_{2R} + u_{2R}^T C \phi_7 u_{1R} + u_{3R}^T C \phi_7 u_{3R} + u_{3R}^T C \phi_8 u_{2R} \left. \right] \\
& + Y_l \left[l_{2L}^{\alpha T} C \phi_{9\{\alpha\beta\}} l_{3L}^\beta + l_{1L}^{\alpha T} C \phi_{10\{\alpha\beta\}} l_{2L}^\beta + l_{3L}^{\alpha T} C \phi_{10\{\alpha\beta\}} l_{3L}^\beta + \mu_R^T C \phi_{11} \tau_R \right. \\
& \left. + e_R^T C \phi_{12} \mu_R + \tau_R^T C \phi_{12} \tau_R \right] + h.c.
\end{aligned} \quad (2.6)$$

con $\tilde{\phi} = i\sigma_2 \phi^*$, $\bar{q}, \bar{l} = (q^t, l^t) \gamma^0$ y Y^i para $i = u, d, \tau$, son constantes de acoplamiento.

Aquí C es la representación de la matriz de conjugación de carga y α y β son índices de isospín débil. Las constantes Y_Q y Y_l en la ecuación (2.6), son constantes de acoplamiento de Yukawa que se refieren para los quarks y los leptones respectivamente.

Las representaciones de $\phi_{3\{\alpha\beta\}}$ y $\phi_{9\{\alpha\beta\}}$ son [1]

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} \phi^{-4/3} & \phi^{-1/3} \\ \phi^{-1/3} & \phi^{2/3} \end{pmatrix} \quad y \quad \phi_9 = \begin{pmatrix} \phi^0 & \phi^+ \\ \phi^+ & \phi^{++} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

donde los superíndices denotan la carga eléctrica del campo. Estas representaciones son las mismas para ϕ_4 y ϕ_{10} .

El siguiente potencial es el más general de dimensión ≤ 4 y que respeta la simetría $U(1)_X$ [1]

$$\begin{aligned}
-V(\phi_i) = & \sum_i \mu_i^2 \|\phi_i\|^2 + \sum_{i,j} \lambda_{ij} \|\phi_i\|^2 \|\phi_j\|^2 + \eta_{31} \phi_1^* \phi_3^* \phi_3 \phi_1 + \tilde{\eta}_{31} \tilde{\phi}_1^* \phi_3^* \phi_3 \tilde{\phi}_1 + \eta_{41} \phi_1^* \phi_4^* \phi_4 \phi_1 \\
& + \tilde{\eta}_{41} \tilde{\phi}_1^* \phi_4^* \phi_4 \tilde{\phi}_1 \\
& + \kappa_{91} \phi_1^* \phi_9^* \phi_9 \phi_1 + \tilde{\kappa}_{91} \tilde{\phi}_1^* \phi_9^* \phi_9 \tilde{\phi}_1 + \kappa_{101} \phi_1^* \phi_{10}^* \phi_{10} \phi_1 + \tilde{\kappa}_{101} \tilde{\phi}_1^* \phi_{10}^* \phi_{10} \tilde{\phi}_1 \\
& + \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j \neq 1,2}} \eta_{ij} \|\phi_i^* \phi_j\|^2, \quad (2.8) \\
& + \rho_1 \phi_5^* \phi_6 \phi_2 + \rho_2 \phi_7^* \phi_8 \phi_2 + \lambda_1 \phi_5^* \phi_{3\{\alpha\beta\}} \tilde{\phi}_1^\beta + \lambda_2 \phi_7^* \tilde{\phi}_1^\alpha \phi_{3\{\alpha\beta\}} \tilde{\phi}_1^\beta + \lambda_3 Tr(\phi_3^* \phi_4) \phi_2^2 + \\
& \lambda_2 \phi_5 \phi_6 \phi_7 \phi_2 \\
& + \lambda_5 \phi_5 \phi_6^* \phi_7^* \phi_8 + y_l \phi_{12}^* \phi_{11} \phi_2 + \zeta_1 \phi_{12}^* \phi_1^\alpha \phi_{10\{\alpha\beta\}} \phi_1^\beta \\
& + Y_r Tr(\phi_{10}^* \phi_9) \phi_2^2 + \varepsilon_1 \phi_5 \phi_6^* \phi_{12}^* \phi_{11} + \varepsilon_2 \phi_7^* \phi_8 \phi_{12} \phi_{11}^* + h.c.
\end{aligned}$$

La inavrianza de norma para este potencial necesita que la siguiente relación se cumpla

$$\Delta = 2\delta, \quad (2.9)$$

Los valores de expectación en el vacío para los campos escalares de clase I son [1]

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{pmatrix}, & \langle \phi_2 \rangle &= \mathbf{v}_2 \\ \langle \phi_9 \rangle &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_9 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{y } \langle \phi_{10} \rangle &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mientras que $\langle \phi_2 \rangle$ rompe la simetría de $U(1)_X$, $\langle \phi_1 \rangle$ rompe la simetría electrodébil. Los otros dos valores de expectación para el campo ϕ_9 y ϕ_{10} se supondrán muy pequeños permitiendo la producción del tipo Majorana para la matriz de masa del neutrino. El esquema para el rompimiento de simetría queda como sigue

$$G_{SM} \otimes U(1)_X \xrightarrow{\langle \phi_2 \rangle} G_{SM} \xrightarrow{\langle \phi_1 \rangle} SU(3)_C \otimes U(1)_Q, \quad (2.11)$$

Después del rompimiento de simetría se obtienen las siguientes matrices de masas:

Campo escalar con carga 2/3 ($\phi_4, \phi_3, \phi_5, \phi_6$)

$$M_{2/3}^2 = \begin{pmatrix} s_4^2 & \lambda_3^* \mathbf{v}_2^2 & 0 & 0 \\ \lambda_3^* \mathbf{v}_2^2 & s_3^2 & \frac{\lambda_1^* \mathbf{v}_1^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1^* \mathbf{v}_1^2}{2} & u_5^2 & \rho_1 \mathbf{v}_2 \\ 0 & 0 & \rho_1^* \mathbf{v}_2 & u_6^2 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Campo escalar con carga 4/3 ($\phi_4, \phi_3, \phi_7, \phi_8$)

$$M_{4/3}^2 = \begin{pmatrix} t_4^2 & \lambda_3^* \mathbf{v}_2^2 & 0 & 0 \\ \lambda_3^* \mathbf{v}_2^2 & t_3^2 & \frac{\lambda_1^* \mathbf{v}_1^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1^* \mathbf{v}_1^2}{2} & t_7^2 & \rho_2 \mathbf{v}_2 \\ 0 & 0 & \rho_2^* \mathbf{v}_2 & t_8^2 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

donde

$$t_i^2 = \mu_i^2 + \lambda_{i1} \mathbf{v}_i^2 + \lambda_{i2} \mathbf{v}_2^2 \text{ y } s_i^2 = t_i^2 + \eta_{i1} \mathbf{v}_i^2, \quad (2.14)$$

Campo escalar con carga -1 ($\phi_9, \phi_{10}, \phi_{12}, \phi_{11}$)

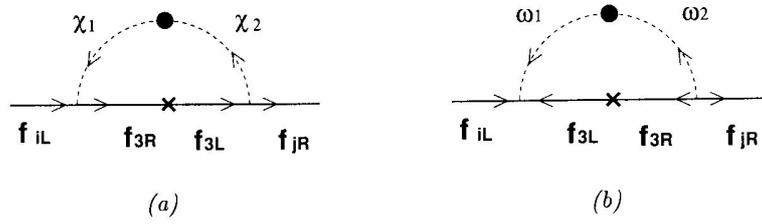


Fig. 2.1 Diagrama para la contribución de masa en las familias ligeras de fermiones, *a*) acoplamiento del tipo *D* o de Dirac, *b*) acoplamiento del tipo *M* o Majorana.

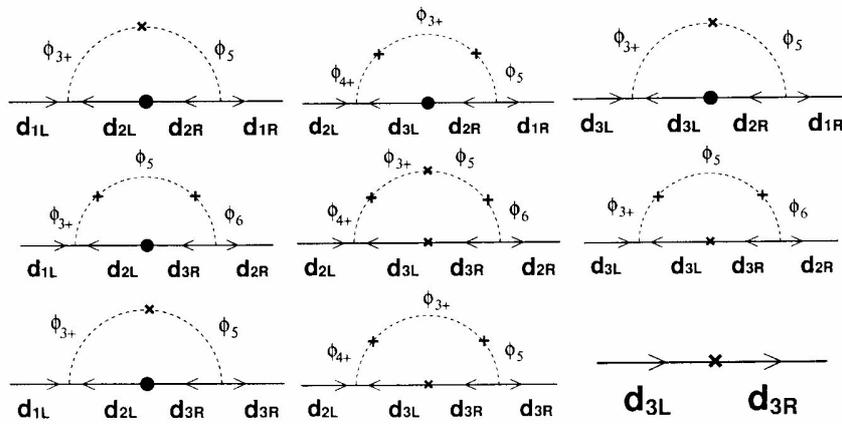


Fig. 2.2 Elementos de matriz de masa para los quarks *d*

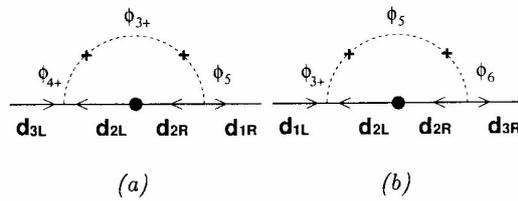


Fig. 2.3 Contribuciones a los elementos de matriz *a*) (1,3) y *b*) (3,1)

$$M_{-1}^2 = \begin{pmatrix} m_9^2 & r_1^* \mathbf{v}_2^2 & 0 & 0 \\ r_1 \mathbf{v}_2^2 & m_{10}^2 & \frac{\zeta_1^* \mathbf{v}_1^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\zeta_1 \mathbf{v}_1^2}{2} & m_{12}^2 & y_1 \mathbf{v}_2 \\ 0 & 0 & y_1^* \mathbf{v}_2 & m_{11}^2 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

La contribución a la masa puede ser de dos tipos, ambos son mostrados en la figura 2.1 a continuación. El primer diagrama es la contribución de masa por un acoplamiento del tipo de Dirac, mientras que el segundo es del tipo de Majorana. En la figura 2.2 a continuación se muestran todos los diagramas para la matriz de masa para los quarks d (con carga $-1/3$), que es similar para cualquier otro sector (carga $2/3$ y -1). En los diagramas para la matriz de masa, la cruz significa mezcla a nivel árbol y el círculo negro mezcla a un lazo. Es importante decir que existen otras contribuciones a los elementos de matriz $(1,3)$ y $(3,1)$ como se puede ver de las lagrangianas (2.5) (2.6), lo que corresponde al diagrama de la figura 2.3(a) y 2.3(b) la figura a continuación respectivamente.

Explicítamente las contribuciones a un lazo para los diagramas de la figura 2.2 para los términos de matriz de masa $\bar{d}_{iR} d_{jL} \Sigma_{ij}^{(1)} + h.c.$ quedan como sigue:

$$\Sigma_{22}^{(1)} = 3m_b^{(0)} \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \sum_k U_{1k} U_{4k} f(M_k, m_b^{(0)}), \quad (2.16)$$

$$\Sigma_{23}^{(1)} = 3m_b^{(0)} \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \sum_k U_{2k} U_{4k} f(M_k, m_b^{(0)}), \quad (2.17)$$

$$\Sigma_{32}^{(1)} = 3m_b^{(0)} \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \sum_k U_{1k} U_{3k} f(M_k, m_b^{(0)}), \quad (2.18)$$

donde $m_b^{(0)}$ es la contribución a nivel árbol de la masa del quark b , 3 es un factor de color. U_{ij} es una matriz ortogonal la cual diagonaliza a la matriz de masa de los escalares con carga $2/3$ (ec. 2.12), esto es,

$$(\phi_4, \phi_3, \phi_5, \phi_6)^T = U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T, \quad (2.19)$$

los valores de α_i son los eigencampos (de los campos escalare con carga $2/3$) con eigenvalores M_i . y se ha definido la siguiente función en las ecs. (2.16)-(2.18)

$$f(M, m) \equiv \frac{1}{M^2 - m^2} \left[M^2 \ln \frac{M^2}{m^2} \right], \quad (2.20)$$

Finalmente la matriz de masa a un lazo es

$$M_d^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{22}^{(1)} & \Sigma_{23}^{(1)} \\ 0 & \Sigma_{32}^{(1)} & m_b^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Para dos lazos se obtienen los siguientes términos de la matriz de masa

$$\Sigma_{11}^{(2)} = 3 \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \sum_{k,i} m_i^{(1)} (V_{dL}^{(1)})_{2i} (V_{dR}^{(1)})_{2i} U_{2k} U_{3k} f(M_k, m_i^{(1)}), \quad (2.22)$$

$$\Sigma_{12}^{(2)} = 3 \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \sum_{k,i} m_i^{(1)} (V_{dL}^{(1)})_{3i} (V_{dR}^{(1)})_{2i} U_{1k} U_{3k} f(M_k, m_i^{(1)}), \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{13}^{(2)} &= 3 \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \sum_{k,i} m_i^{(1)} (V_{dL}^{(1)})_{3i} (V_{dR}^{(1)})_{2i} U_{2k} U_{3k} f(M_k, m_i^{(1)}) \\ &\quad + 3 \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \sum_{k,i} m_i^{(1)} (V_{dL}^{(1)})_{2i} (V_{dR}^{(1)})_{2i} U_{1k} U_{3k} f(M_k, m_i^{(1)}), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\Sigma_{21}^{(2)} = 3 \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \sum_{k,i} m_i^{(1)} (V_{dL}^{(1)})_{2i} (V_{dR}^{(1)})_{3i} U_{2k} U_{4k} f(M_k, m_i^{(1)}), \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{31}^{(2)} &= 3 \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \sum_{k,i} m_i^{(1)} (V_{dL}^{(1)})_{2i} (V_{dR}^{(1)})_{3i} U_{2k} U_{3k} f(M_k, m_i^{(1)}) \\ &\quad + 3 \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \sum_{k,i} m_i^{(1)} (V_{dL}^{(1)})_{2i} (V_{dR}^{(1)})_{2i} U_{2k} U_{3k} f(M_k, m_i^{(1)}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

el índice i va de 2 a 3 y el índice k va de 1 a 4, las matrices unitarias que diagonalizan la ec. (2.21) son $V_{dL}^{(1)}$ y $V_{dR}^{(1)}$ siendo $m_i^{(1)}$ sus eigenvalores. Así, la matriz de masa a dos lazos para los quarks d es

$$M_d^{(2)} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{(2)} & \Sigma_{12}^{(2)} & \Sigma_{13}^{(2)} \\ \Sigma_{21}^{(2)} & m_2^{(1)} & 0 \\ \Sigma_{31}^{(2)} & 0 & m_3^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

En general, todos los resultados obtenidos previamente son validos para los fermiones en los sectores con carga $4/3$ y -1 .

Por último, la matriz de CKM podrá escribirse como [1]

$$V_{CKM} = \left(V_{uL}^{(2)} V_{uL}^{(1)} \right)^* V_{dL}^{(2)} V_{dL}^{(1)}, \quad (2.28)$$

donde las matrices para u , como es de esperarse, son las matrices análogas para d .

CAPÍTULO 3

CAMBIO DE SABOR EN EL SM

En el modelo estándar no todos los bosones de norma tienen la capacidad de cambiar el sabor a los fermiones, es decir, si se considera un vértice fundamental como el de la figura 3.1 la emisión de un bosón cargado le ha cambiado el sabor al leptón (electrón) y este ha sido cambiado por su respectivo neutrino (del electrón). En general si se toma al grupo de norma $G_{SM} = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, los bosones cargados W^\pm tienen la virtud de cambiar el sabor mientras que los bosones neutros Z^0 y el fotón no la poseen.

Por simplicidad, tomemos en cuenta el acoplamiento del electrón y su respectivo neutrino emitiendo un W^- (ver Fig. 3.1). La contribución a la amplitud M en las reglas de Feynman de este vértice es

$$j_\mu^- = \bar{\nu} \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) e, \quad (3.1)$$

y es fácil ver que

$$\gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) = \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right), \quad (3.2)$$

de tal modo que la contribución de (3.1) a la amplitud toma la forma

$$j_\mu^- = \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L, \quad (3.3)$$

Esta cantidad es una “corriente débil” que sólo acopla a fermiones izquierdos. Si se establece un análogo con la corriente de QED [ver ecuación (1.18)], que se escribe como:

$$j_\mu^{em} = -\bar{e} \gamma_\mu e, \quad (3.4)$$

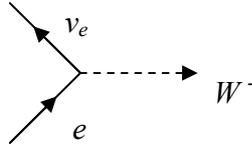


Fig. 3.1. Vértice fundamental

y notando que la el electrón se puede escribir como

$$e = \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) e + \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) e = e_L + e_R \quad y \quad \bar{e} = \bar{e}_L + \bar{e}_R,$$

al sustituir en la ecuación (3.4)

$$j_\mu^{em} = -(\bar{e}_L \gamma_\mu e_L + \bar{e}_R \gamma_\mu e_R), \quad (3.5)$$

El término -1 en las ecs. (3.4) y (3.5) es debido a la carga negativa del electrón (ver de nuevo la ec. (1.18) donde q es la carga de la partícula, en este caso el electrón). Hasta ahora hemos llegado a dos corrientes, una del tipo débil y la otra electromagnética, donde la primera sólo acopla fermiones derechos y la segunda puede acoplar a ambos.

En el primer capítulo se introdujo el doblete derecho de fermiones, ec. (1.38), la cual será de mucha ayuda para los cálculos siguientes. Utilizando las matrices σ^\pm definidas como un combinación lineal de las matrices de Pauli, es decir,

$$\sigma^\pm = \frac{\sigma_1 \pm i\sigma_2}{2}, \quad (3.6)$$

explícitamente

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

la ecuación (3.3) tomará la forma de

$$j_\mu^- = \bar{\chi} \gamma_\mu \sigma^+ \chi \quad (3.8).$$

Si ahora consideramos el proceso $\nu_e \rightarrow e + W^+$, la corriente es

$$j_\mu^+ = \bar{\chi} \gamma_\mu \sigma^- \chi \quad (3.9).$$

Para la tercera matriz de Pauli es posible construir una tercera corriente en analogía de las corrientes (3.8) y (3.9)

$$2j_\mu^3 = \bar{\chi}\gamma_\mu\sigma^3\chi = \bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L - \bar{e}_L\gamma_\mu e_L, \quad (3.10)$$

donde

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

Aquí podría surgir una confusión en (3.10) y pensarse que es la corriente para el bosón débil neutro, pero no es así. Para la construcción de la buscada corriente neutra, primero introduciremos la ecuación de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = I^3 + \frac{Y}{2}, \quad (3.12)$$

donde I^3 es la tercera componente del isoespín, por lo que las construcciones de corrientes para la carga eléctrica y para el isoespín nos lleva a la construcción de una corriente para la hipercarga, la cual resulta ser

$$j_\mu^Y = 2j_\mu^{em} - 2j_\mu^3, \quad (3.13)$$

Al sustituir en (3.13) la ecuación (3.10) y la ecuación (3.5), el lado derecho de esta última expresión tomara el valor de

$$j_\mu^Y = -2\bar{e}_R\gamma_\mu e_R - \bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L - \bar{e}_L\gamma_\mu e_L \quad (3.14).$$

Hasta el momento se han construido tres corrientes para el isoespín débil y una corriente por la hipercarga débil. Ambos conceptos pueden ser extendidos de manera muy sencilla para el caso de los fermiones restantes, quedando:

$$\mathbf{j}_\mu = \frac{1}{2}\bar{l}_L\gamma_\mu\boldsymbol{\sigma}l_L + \frac{1}{2}\bar{q}_L\gamma_\mu\boldsymbol{\sigma}q_L, \quad j_\mu^Y = 2j_\mu^{em} - 2j_\mu^3, \quad (3.15)$$

donde en general la corriente electromagnética ahora se escribe como

$$j_\mu^{em} = \sum_i Q_i (\bar{\chi}_{iL}\gamma_\mu\chi_{iL} + \bar{\chi}_{iR}\gamma_\mu\chi_{iR}), \quad (3.16)$$

y la suma es sobre las partículas en el doblete de todos los fermiones; Q_i es la carga de la partícula.

Ahora regresemos a la Lagrangiana del capítulo 1 que corresponde a la ecuación (1.40) y la derivada covariante que corresponde a la ecuación (1.41). Si ignoramos los términos que no describan el movimiento libre de los fermiones y su interacción con el campo de norma en

la Lagrangiana, mientras que en la derivada covariante despreciamos el término de la derivada común y utilizamos las ecs. (3.13) – (3.15), se obtiene el siguiente termino

$$-i \left[g_W \mathbf{j}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu + \frac{g'}{2} j_\mu^Y B^\mu \right], \quad (3.17)$$

Desarrollando el producto punto y utilizando las corrientes cargadas $j_\mu^\pm = j_\mu^1 \pm i j_\mu^2$, se obtiene

$$\mathbf{j}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} j_\mu^+ W^{\mu+} + \frac{1}{\sqrt{2}} j_\mu^- W^{\mu-} + j_\mu^3 W^{\mu3}, \quad (3.18)$$

con

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{W_\mu^1 \mp i W_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (3.19).$$

Así, las constantes de acoplamiento aparecen de manera natural. Por ejemplo: en el proceso que inicialmente estábamos considerando, acoplamiento del electrón y su neutrino emitiendo un W^- (Fig. 3.1), la corriente débil está dada por $j_\mu^- = \bar{\nu}_\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) e$, que con (3.17) y (3.18) da

$$\frac{-ig_W}{\sqrt{2}} j_\mu^- W^{\mu-} = -\frac{ig_W}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}_\mu (1 - \gamma^5) e] W^{\mu-}, \quad (3.20)$$

por lo tanto la constante de acoplamiento es

$$-\frac{ig_W}{2\sqrt{2}} (1 - \gamma^5) \quad (3.21).$$

De igual modo se procede con la corriente positiva. Para la parte neutral debemos tomar en cuenta los campos ortogonales del boson Z y el fotón A ;

$$\begin{aligned} A_\mu &= B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^3 \sin \theta_W \\ Z_\mu &= -B_\mu \sin \theta_W + W_\mu^3 \cos \theta_W \end{aligned} \quad (3.22)$$

con lo que la interacción neutral se expresa como

$$-i \left[g_W j_\mu^3 W^{\mu 3} + \frac{g'}{2} j_\mu^Y B^\mu \right] = -i \left\{ \left[g_W \sin \theta_W j_\mu^3 + \frac{g'}{2} \cos \theta_W j_\mu^Y \right] A^\mu + \left[g_W \sin \theta_W j_\mu^3 + \frac{g'}{2} \cos \theta_W j_\mu^Y \right] Z^\mu \right\}, \quad (3.23)$$

ya que el acoplamiento electromagnético es

$$-i g_e j_\mu^{em} A^\mu, \quad (3.24)$$

por (3.13) y de (3.23) se obtiene que

$$g_e = g' \cos \theta_W = g_W \sin \theta_W, \quad (3.25)$$

De este modo se justifican las identidades en el capítulo 1 ec. (1.52). Para el boson Z° por las ecs. (3.13), (3.23) y (3.25) se llega a

$$-g_Z (j_\mu^3 - \sin^2 \theta_W j_\mu^{em}) Z^\mu \quad \text{talque} \quad g_Z = \frac{g_e}{\sin \theta_W \cos \theta_W}, \quad (3.26)$$

De aquí se puede obtener el acoplamiento débil neutral, por ejemplo para el proceso $\nu_e \rightarrow \nu_e + Z^\circ$ es exclusivo para j_μ^3 , ya que $2j_\mu^3 = \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \bar{e}_L \gamma_\mu e_L$; entonces

$$-i \frac{g_Z}{2} (\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L) Z^\mu = -\frac{i g_Z}{2} \left[\bar{\nu} \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \nu \right] Z^\mu, \quad (3.27)$$

por lo que si consideramos el acoplamiento como $c_V^\nu - c_A^\nu \gamma^5$, ambos tendrán un valor de $c_V^\nu = c_A^\nu = 1/2$. Finalmente puede ser construida la Tabla 1.

Tabla 1

f	c_V	c_A
ν_e, μ, τ	$1/2$	$1/2$
e, μ, τ	$-1/2 + 2 \sin \theta_W$	$-1/2$
u, c, t	$1/2 - 4/3 \sin^2 \theta_W$	$1/2$
d, s, b	$-1/2 + 2/3 \sin^2 \theta_W$	$-1/2$

CAMBIO DE SABOR EN LA SIMETRÍA $U(1)_X$

En las interacciones de Yukawa del tipo Majorana es en donde ocurren los cambios de sabores, y la Lagrangiana es:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_{YM} = & Y_Q [q_{1L}^{\alpha T} C\phi_{3\{\alpha\beta\}} q_{2L}^\beta + q_{3L}^{\alpha T} C\phi_{3\{\alpha\beta\}} q_{3L}^\beta + q_{2L}^{\alpha T} C\phi_{4\{\alpha\beta\}} q_{3L}^\beta + d_{2R}^T C\phi_5 d_{1R} \\
 & + d_{3R}^T C\phi_5 d_{3R} + d_{3R}^T C\phi_6 d_{2R} + u_{2R}^T C\phi_7 u_{1R} + u_{3R}^T C\phi_7 u_{3R} + u_{3R}^T C\phi_8 u_{2R}] , \quad (3.28) \\
 & + Y_l [l_{2L}^{\alpha T} C\phi_{9\{\alpha\beta\}} l_{3L}^\beta + l_{1L}^{\alpha T} C\phi_{10\{\alpha\beta\}} l_{2L}^\beta + l_{3L}^{\alpha T} C\phi_{10\{\alpha\beta\}} l_{3L}^\beta + \mu_R^T C\phi_{11} \tau_R \\
 & + e_R^T C\phi_{12} \mu_R + \tau_R^T C\phi_{12} \tau_R] + h.c.
 \end{aligned}$$

Así este modelo permite decaimientos raros a un lazo, como por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 \mu & \rightarrow e + \gamma \\
 \tau & \rightarrow \mu + \gamma \\
 \tau & \rightarrow e + \gamma
 \end{aligned}$$

y a un nivel árbol

$$\begin{aligned}
 \tau & \rightarrow e + e + \mu \\
 \tau & \rightarrow \mu + \mu + e \\
 \tau & \rightarrow \mu + \mu + \mu \\
 \tau & \rightarrow e + e + e \\
 \mu & \rightarrow e + e + e
 \end{aligned}$$

En este trabajo analizaremos el decaimiento $\mu \rightarrow e + e + e$.

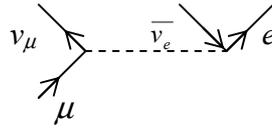
CAPÍTULO 4

DECAIMIENTO DEL MÚON

El decaimiento preferido por el múon es:

$$\mu \rightarrow e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

y su diagrama de Feynman es:



Al aplicar las reglas de Feynman se obtiene la amplitud de:

$$\begin{aligned} -iM &= \left[\bar{u}(3) \left(-\frac{ig_W}{2\sqrt{2}} \right) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(1) \right] \frac{ig_{\mu\nu}}{(M_W c)^2} \left[\bar{u}(4) \left(-\frac{ig_W}{2\sqrt{2}} \right) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(2) \right] \\ &= -i \frac{g_W^2}{8(M_W c)^2} \left[\bar{u}(3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(1) \right] \left[\bar{u}(4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(2) \right] \end{aligned}$$

es decir

$$M = \frac{g_W^2}{8(M_W c)^2} \left[\bar{u}(3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(1) \right] \left[\bar{u}(4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(2) \right] \quad (4.1)$$

donde los índices 1, 2, 3 y 4 se refieren al múon, neutrino del electrón, neutrino del múon y el electrón respectivamente.

Realizando la suma de las amplitudes sobre todos los espines, es decir, utilizando el Teorema de Casimir, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{todos espines}} |M|^2 &= \left(\frac{g_w^2}{8(M_w c)^2} \right)^2 \sum_{\text{todos espines}} [\bar{u}(3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(1)] [\bar{u}(4)\gamma_\mu(1-\gamma^5)u(2)] \\
&\quad \times [\bar{u}(3)\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(1)]^* [\bar{u}(4)\gamma_\nu(1-\gamma^5)u(2)]^* \\
&= \left(\frac{g_w^2}{8(M_w c)^2} \right)^2 Tr[\gamma^\mu(1-\gamma^5)(p_1 + m_\mu c)\gamma^\nu(1-\gamma^5)p_3] \\
&\quad \times Tr[\gamma_\mu(1-\gamma^5)p_2\gamma_\nu(1-\gamma^5)(p_4 + m_e c)]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Para la primera traza tenemos

$$\begin{aligned}
&Tr[\gamma^\mu(1-\gamma^5)(p_1 + m_\mu c)\gamma^\nu(1-\gamma^5)p_3] \\
&= Tr[(\gamma^\mu p_1 - \gamma^\mu \gamma^5 p_1 + \gamma^\mu m_\mu c - \gamma^\mu \gamma^5 m_\mu c)(\gamma^\nu p_3 - \gamma^\nu \gamma^5 p_3)] \\
&= Tr[\gamma^\mu p_1 \gamma^\nu p_3 - \gamma^\mu p_1 \gamma^\nu \gamma^5 p_3 - \gamma^\mu \gamma^5 p_1 \gamma^\nu p_3 + \gamma^\mu \gamma^5 p_1 \gamma^\nu \gamma^5 p_3 \\
&\quad + \gamma^\mu \gamma^\nu p_3 m_\mu c - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 p_3 m_\mu c - \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu p_3 m_\mu c + \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5 p_3 m_\mu c] \\
&= (p_1)_\lambda (p_3)_\sigma [Tr(\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\sigma) + Tr(\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\sigma) - Tr(\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\sigma) + Tr(\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\sigma)] \\
&\quad + (p_3)_\sigma m_\mu c [Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma) - Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\sigma) - Tr(\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\sigma) + Tr(\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\sigma)]
\end{aligned}$$

Pero la traza del producto de un número impar de matrices gama es cero y por las propiedades de las trazas el resultado anterior se reduce a:

$$\begin{aligned}
&(p_1)_\lambda (p_3)_\sigma [8(g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\lambda\nu}) - 4i\epsilon^{\sigma\mu\lambda\nu} - 4i\epsilon^{\lambda\nu\sigma\mu}] \\
&= 8[p_1^\mu p_3^\nu + p_3^\mu p_1^\nu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_3) - i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{1\lambda} p_{3\sigma}]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

De manera análoga, la traza 2 es:

$$8[p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} - g_{\mu\nu} (p_2 \cdot p_4) - i\epsilon_{\mu\nu\kappa\tau} p_2^\kappa p_4^\tau], \tag{4.4}$$

Sustituyendo ecs. (4.3) y (4.4) en (4.2) nos da

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{todos espines}} |M|^2 &= \left(\frac{g_W}{M_W c} \right)^4 \left[p_1^\mu p_3^\nu + p_3^\mu p_1^\nu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_3) - i \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{1\lambda} p_{3\sigma} \right] \\
&\quad \times \left[p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} - g_{\mu\nu} (p_2 \cdot p_4) - i \epsilon_{\mu\nu\kappa\tau} p_2^\kappa p_4^\tau \right] \\
&= \left(\frac{g_W}{M_W c} \right)^4 \left[(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - i \epsilon_{\mu\nu\kappa\tau} p_1^\mu p_3^\nu p_2^\kappa p_4^\tau \right. \\
&\quad + (p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - i \epsilon_{\mu\nu\kappa\tau} p_3^\mu p_1^\nu p_2^\kappa p_4^\tau \\
&\quad - (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + 4(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + i \epsilon_{\mu\nu\kappa\tau} g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_3) p_2^\kappa p_4^\tau \\
&\quad - i \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{1\lambda} p_{3\sigma} p_{2\mu} p_{4\nu} - i \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{1\lambda} p_{3\sigma} p_{2\nu} p_{4\mu} + i \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{1\lambda} p_{3\sigma} g_{\mu\nu} (p_2 \cdot p_4) \\
&\quad \left. - \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon_{\mu\nu\kappa\tau} p_{1\lambda} p_{3\sigma} p_2^\kappa p_4^\tau \right] \\
&= \left(\frac{g_W}{M_W c} \right)^4 \left[2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 2(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) - \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon_{\mu\nu\kappa\tau} p_{1\lambda} p_{3\sigma} p_2^\kappa p_4^\tau \right] \\
&= \left(\frac{g_W}{M_W c} \right)^4 \left[2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 2(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) + 2(\delta_\kappa^\lambda \delta_\tau^\sigma - \delta_\tau^\lambda \delta_\kappa^\sigma) p_{1\lambda} p_{3\sigma} p_2^\kappa p_4^\tau \right]
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\sum_{\text{todos espines}} |M|^2 = 4 \left(\frac{g_W}{M_W c} \right)^4 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) \quad (4.5)$$

Debido a que el neutrino tiene un solo estado de espín se obtiene que el promedio de la amplitud es

$$\langle |M|^2 \rangle = 2 \left(\frac{g_W}{M_W c} \right)^4 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4), \quad (4.6)$$

En el sistema de reposo del mión, i.e., $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$, se tiene

$$p_1 \cdot p_2 = m_\mu E_2, \quad (4.7)$$

Por otro lado por la conservación del cuadrímomento ($p_1 = p_2 + p_3 + p_4$)

$$\begin{aligned}
(p_3 + p_4)^2 &= p_3^2 + p_4^2 + 2p_3 \cdot p_4 = m_e^2 c^2 + 2p_3 \cdot p_4 \\
&= (p_1 - p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 = m_\mu^2 c^2 - 2p_1 \cdot p_2,
\end{aligned}$$

y despejando $p_3 \cdot p_4$

$$p_3 \cdot p_4 = \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{2} c^2 - m_\mu E_2, \quad (4.8)$$

Sustituyendo las ecs. (4.7) y (4.8) en la ec. (4.6) y tomando en cuenta que la masa del electrón puede ser despreciada con respecto a la del múon, resulta

$$\langle |M|^2 \rangle = \left(\frac{g_W}{M_W c} \right)^4 m_\mu^2 E_2 (m_\mu c^2 - 2E_2) \quad (4.9).$$

Haciendo uso de la Regla de Oro de Fermi para el decaimiento de una partícula en 3 partículas, la razón del decaimiento es:

$$d\Gamma = \frac{\langle |M|^2 \rangle}{2\hbar m_\mu} \left(\frac{cd^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right) \left(\frac{cd^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \left(\frac{cd^3\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \quad (4.10)$$

ya que los neutrinos no tienen masa y se está despreciando la del electrón. La función delta se puede separar de la siguiente forma

$$\delta\left(m_\mu c - \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c} - \frac{E_4}{c}\right) \delta^3(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4), \quad (4.11)$$

tal que la integral para \mathbf{p}_3 es

$$d\Gamma = \frac{\langle |M|^2 \rangle c^3}{16(2\pi)^5 \hbar m_\mu} \frac{(d^3\mathbf{p}_2)(d^3\mathbf{p}_3)(d^3\mathbf{p}_4)}{E_2 E_3 E_4} \delta\left(m_\mu c - \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c} - \frac{E_4}{c}\right) \delta^3(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4),$$

$$d\Gamma = \frac{\langle |M|^2 \rangle c^3}{16(2\pi)^5 \hbar m_\mu} \frac{(d^3\mathbf{p}_2)(d^3\mathbf{p}_4)}{E_2 E_3 E_4} \delta\left(m_\mu c - \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c} - \frac{E_4}{c}\right), \quad (4.12)$$

donde

$$E_3 = |\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4|c \quad (4.13).$$

Para realizar la integral sobre \mathbf{p}_2 , se tomará fijo a \mathbf{p}_4 , por lo que

$$\left(\frac{E_3}{c}\right)^2 = |\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4|^2 = \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_4^2 + 2\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_4 = (E_2^2 + E_4^2 + 2E_2 E_4 \cos\theta)c^{-2}, \quad (4.14)$$

y

$$d^3 \mathbf{p}_2 = |\mathbf{p}_2|^2 d|\mathbf{p}_2| \sin \theta d\theta d\phi = \left(\frac{E_2}{c} \right)^2 \frac{dE_2}{c} \sin \theta d\theta d\phi, \quad (4.15)$$

La integración en θ no es fácil, pero se puede simplificar con el siguiente cambio de variable

$$\chi \equiv \frac{\sqrt{E_2^2 + E_4^2 + 2E_2E_4 \cos \theta}}{c} = \frac{E_3}{c}, \quad (4.16)$$

$$d\chi = -\frac{E_2E_4 \sin \theta d\theta}{c\sqrt{E_2^2 + E_4^2 + 2E_2E_4 \cos \theta}} = -\frac{E_2E_4 \sin \theta d\theta}{cE_3}, \quad (4.17)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{E_3} \delta \left(m_\mu c - \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c} - \frac{E_4}{c} \right) &= \int_{\chi_-}^{\chi_+} \frac{c d\chi}{E_4E_2} \delta \left(m_\mu c - \frac{E_2}{c} - \chi - \frac{E_4}{c} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{c}{E_4E_2} & \text{si } \chi_- < \left(m_\mu c - \frac{E_2}{c} - \frac{E_4}{c} \right) < \chi_+, \\ 0 & \text{fuera de este rango} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde

$$\chi_\pm \equiv \frac{1}{c} \sqrt{E_2^2 + E_4^2 \pm 2E_2E_4} = \frac{1}{c} |E_2 \pm E_4|,$$

por lo tanto la desigualdad en la ec. (4.18) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} |E_2 - E_4| &< (m_\mu c^2 - E_2 - E_4) < |E_2 + E_4| = \\ \frac{1}{2} (|E_2 - E_4| + E_2 + E_4) &< \frac{1}{2} (m_\mu c^2 - E_2 - E_4 + E_2 + E_4) < E_2 + E_4 + E_2 + E_4 \\ \frac{1}{2} (|E_2 - E_4| + E_2 + E_4) &< \frac{1}{2} m_\mu c^2 < E_2 + E_4, \end{aligned}$$

De la ultima desigualdad se obtienen las siguientes

$$\begin{cases} E_2 < \frac{1}{2} m_\mu c^2 \\ E_4 < \frac{1}{2} m_\mu c^2 \\ E_2 + E_4 < \frac{1}{2} m_\mu c^2 \end{cases}, \quad (4.19)$$

que determinan los límites en las integrales de E_2 y E_4 ; la primera desigualdad se encuentra en el intervalo de $[\frac{1}{2} m_\mu c^2 - E_4, \frac{1}{2} m_\mu c^2]$ y la segunda en el intervalo $[0, \frac{1}{2} m_\mu c^2]$. Al sustituir las ecs. (4.15) y la ec. (4.18) en la integral de razón de decaimiento [ec. (4.12)], se tiene

$$d\Gamma = \frac{\langle |M|^2 \rangle c}{(4\pi)^4 \hbar m_\mu} dE_2 \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{E_4^2}, \quad (4.20)$$

Sustituyendo aquí la ec. (4.9) e integrando E_2 , obtenemos:

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \left(\frac{g_W}{4\pi M_W c} \right)^4 \frac{m_\mu c d^3 \mathbf{p}_4}{\hbar E_4^2} \int_{1/2 m_\mu c^2 - E_4}^{1/2 m_\mu c^2} E_2 (m_\mu c^2 - 2E_2) dE_2 \\ &= \left(\frac{g_W}{4\pi M_W c} \right)^4 \frac{m_\mu c d^3 \mathbf{p}_4}{\hbar E_4^2} \left(\frac{E_2^2 m_\mu c^2}{2} - \frac{2}{3} E_2^3 \right)_{1/2 m_\mu c^2 - E_4}^{1/2 m_\mu c^2} \\ &= \left(\frac{g_W}{4\pi M_W c} \right)^4 \frac{m_\mu c}{\hbar} \left(\frac{m_\mu c^2}{2} - \frac{2}{3} E_4 \right) d^3 \mathbf{p}_4, \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde como en ec. (4.15), encontramos:

$$d^3 \mathbf{p}_4 = \left(\frac{E_4}{c} \right)^2 \frac{dE_4}{c} \sin \theta d\theta d\phi, \quad (4.22)$$

La integración en la parte angular es 4π y la energía a evaluar es la del electrón, que de aquí en adelante solo se denotará por E y entonces

$$\begin{aligned}\Gamma_{total} &= \left(\frac{g_w}{M_W c}\right)^4 \frac{m_\mu^2}{2\hbar(4\pi)^3} \int_0^{1/2 m_\mu c^2} E^2 \left(1 - \frac{4E}{3m_\mu c^2}\right) dE \\ &= \left(\frac{m_\mu g_w}{M_W}\right)^4 \frac{m_\mu c^2}{12\hbar(8\pi)^3},\end{aligned}\quad (4.23a)$$

Por lo tanto el tiempo de vida del múon es

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{total}} = \left(\frac{M_W}{m_\mu g_w}\right)^4 \frac{12\hbar(8\pi)^3}{m_\mu c^2}, \quad (4.23b)$$

Finalmente, expresando el tiempo de vida del múon en términos de la constante de acoplamiento de Fermi, resulta

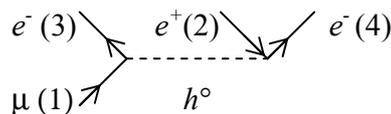
$$\tau = \frac{192\pi^3 \hbar^7}{G_F^2 m_\mu^5 c^4} \quad \text{donde} \quad G_F \equiv \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{g_w}{M_W c^2}\right)^2 (\hbar c)^3 \quad (4.24).$$

DECAIMIENTO RARO DEL MÚON

Sea el siguiente decaimiento raro del múon.

$$\mu \rightarrow e^- + e^+ + e^-$$

cuyo diagrama de Feynman es:



Con h^0 un escalar neutro de masa M ($\gg M_W$), l_{11} y l_{12} son constantes de acoplamiento arbitrarias para el cambio de positrón-electrón y múon-electrón respectivamente.

Aplicando las reglas de Feynman, la amplitud es:

$$M_1 = \frac{l_{12}l_{11}}{4(Mc)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu (1 \pm \gamma^5) u(1)] [\bar{u}(4)\gamma_\mu (1 \pm \gamma^5) u(2)] \quad (4.25)$$

Si la partícula con momento p_3 es intercambiada con la de p_4 , se encuentra

$$M_2 = \frac{l_{12}l_{11}}{4(Mc)^2} [\bar{u}(4)\gamma^\mu (1 \pm \gamma^5) u(1)] [\bar{u}(3)\gamma_\mu (1 \pm \gamma^5) u(2)] \quad (4.26)$$

La existencia de dos partículas idénticas durante el decaimiento nos lleva a considerar la amplitud total como

$$M_t = M_1 - M_2 \quad (4.27)$$

Utilizando las ecs. (4.25) y (4.26) para multiplicar a la ec. (4.27) por su conjugado se obtiene

$$\begin{aligned} M_t M_t^* &= \left(\frac{l_{12}l_{11}}{4(Mc)^2} \right)^2 \left\{ [\bar{u}(3)\gamma^\mu (1 \pm \gamma^5) u(1)] [\bar{u}(4)\gamma_\mu (1 \pm \gamma^5) u(2)] \right. \\ &\quad \left. - [\bar{u}(3)\gamma^\mu (1 \pm \gamma^5) u(1)] [\bar{u}(4)\gamma_\mu (1 \pm \gamma^5) u(2)] \right\} \quad (4.28) \\ &\times \left\{ [\bar{u}(2)\gamma_\nu (1 \pm \gamma^5) u(4)] [\bar{u}(1)\gamma^\nu (1 \pm \gamma^5) u(3)] - [\bar{u}(2)\gamma_\nu (1 \pm \gamma^5) u(3)] [\bar{u}(1)\gamma^\nu (1 \pm \gamma^5) u(4)] \right\}^* \end{aligned}$$

Al sumar sobre todos los espines y como los neutrinos tienen un solo estado de espín, se encuentra:

$$\langle |M_t|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |M_t|^2 \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(l_{12}l_{11})^2}{32(Mc)^4} \sum_{\text{todos espines}} \left\{ [\bar{u}(3)\gamma^\mu (1 \pm \gamma^5) u(1)] [\bar{u}(4)\gamma_\mu (1 \pm \gamma^5) u(2)] \right. \\ &\quad \times [\bar{u}(1)\gamma^\nu (1 \pm \gamma^5) u(3)] [\bar{u}(2)\gamma_\nu (1 \pm \gamma^5) u(4)] \\ &\quad - [\bar{u}(4)\gamma^\mu (1 \pm \gamma^5) u(1)] [\bar{u}(3)\gamma_\mu (1 \pm \gamma^5) u(2)] [\bar{u}(1)\gamma^\nu (1 \pm \gamma^5) u(3)] [\bar{u}(2)\gamma_\nu (1 \pm \gamma^5) u(4)] \quad (4.30) \\ &\quad - [\bar{u}(3)\gamma^\mu (1 \pm \gamma^5) u(1)] [\bar{u}(4)\gamma_\mu (1 \pm \gamma^5) u(2)] [\bar{u}(1)\gamma^\nu (1 \pm \gamma^5) u(4)] [\bar{u}(2)\gamma_\nu (1 \pm \gamma^5) u(3)] \\ &\quad \left. + [\bar{u}(4)\gamma^\mu (1 \pm \gamma^5) u(1)] [\bar{u}(3)\gamma_\mu (1 \pm \gamma^5) u(2)] [\bar{u}(1)\gamma^\nu (1 \pm \gamma^5) u(4)] [\bar{u}(2)\gamma_\nu (1 \pm \gamma^5) u(3)] \right\} \end{aligned}$$

Los términos primero y cuarto son muy parecidos a los de la ecuación (4.2), los cuales resultan ser

$$\begin{aligned}
& \sum_{\text{todos espines}} [\bar{u}(3)\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)u(2)][\bar{u}(1)\gamma^\nu(1\pm\gamma^5)u(3)][\bar{u}(2)\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)u(4)] \\
&= \text{Tr}[\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_1+m_\mu c)\gamma^\nu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_3+m_e c)] \\
&\quad \times \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_2+m_e c)(1\pm\gamma^5)\not{p}_2\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_4+m_e c)] \quad (4.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\text{todos espines}} [\bar{u}(4)\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)u(1)][\bar{u}(3)\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)u(2)][\bar{u}(1)\gamma^\nu(1\pm\gamma^5)u(4)][\bar{u}(2)\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)u(3)] \\
&= \text{Tr}[\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_1+m_\mu c)\gamma^\nu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_4+m_e c)] \\
&\quad \times \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_2+m_e c)(1\pm\gamma^5)\not{p}_2\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_3+m_e c)] \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Para el segundo y tercer termino de (4.30), basta con calcular alguno de los dos y hacer el cambio $3 \rightarrow 4$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\text{todo espines}} [\bar{u}(4)\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)u(1)][\bar{u}(1)\gamma^\nu(1\pm\gamma^5)u(3)][\bar{u}(3)\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)u(2)][\bar{u}(2)\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)u(4)] \\
&= \sum_{s_3, s_4} \{ \bar{u}(4)\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_1+m_1 c)\gamma^\nu(1\pm\gamma^5)u(3) \} \{ \bar{u}(3)\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_2+m_2 c)\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)u(4) \}
\end{aligned}$$

Con el cambio de variable

$$Q_1^{\mu\nu} = \gamma^\mu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_1+m_1 c)\gamma^\nu(1\pm\gamma^5), \quad Q_{2\mu\nu} = \gamma_\mu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_2+m_2 c)\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{s_3, s_4} \{ \bar{u}(4)\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_1+m_1 c)\gamma^\nu(1\pm\gamma^5)u(3) \} \{ \bar{u}(3)\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_2+m_2 c)\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)u(4) \} \\
&= \sum_{s_3, s_4} [\bar{u}(4)Q_1^{\mu\nu}u(3)][\bar{u}(3)Q_{2\mu\nu}u(4)] = \text{Tr}[Q_1^{\mu\nu}(\not{p}_3+m_3 c)Q_{2\mu\nu}(\not{p}_4+m_4 c)] \\
&= \text{Tr}[\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_1+m_1 c)\gamma^\nu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_3+m_3 c)\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_2+m_2 c)\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)(\not{p}_4+m_4 c)] \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Después de la evaluación de las cuatro trazas [ecs. (4.31), (4.32) y (4.33), donde la cuarta traza resulta de cambiar $3 \rightarrow 4$ en la ec. (4.33)] y sustituyendo en (4.30), resulta:

$$\begin{aligned}
\langle |M_t|^2 \rangle &= \frac{(I_{12}I_{11})^2}{2 \cdot 16(Mc)^4} [2 \cdot 16^2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - 2 \cdot 16 \{ -2 \cdot 16(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 16(p_1 \cdot p_2)m_3 m_4 c^2 \}] \\
&= \frac{16(I_{12}I_{11})^2}{(Mc)^4} [3(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_2)m_3 m_4 c^2] \quad (4.34)
\end{aligned}$$

El primer término de (4.34) tiene la misma forma que para el caso del decaimiento del múon, por lo que aquí se tomará al múon en reposo, tal que

$$p_1 \cdot p_2 = m_\mu E_2 \quad \text{y} \quad p_3 \cdot p_4 = \frac{(m_\mu^2 - m_e^2)c^2}{2} - m_\mu E_2 \quad (4.35)$$

De aquí en adelante se despreciará la masa del electrón; con esto el primer término de la ec. (4.34) es

$$\langle |M|^2 \rangle_{1er} = \frac{24l_{12}^2 l_{11}^2}{M^4 c^4} m_\mu^2 E_2 (m_\mu c^2 - 2E_2) \quad (4.36)$$

Este cálculo es muy parecido al decaimiento normal del múon, por lo que se omiten algunos pasos. Por la Regla de Oro escribimos:

$$d\Gamma_{1er} = \frac{\langle |M|^2 \rangle_{1er}}{2\hbar m_\mu} \left(\frac{cd^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right) \left(\frac{cd^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \left(\frac{cd^3 \mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \quad (4.37)$$

y de aquí

$$\Gamma_{1er} = \int_0^{1/2m_\mu c^2} \left(\frac{24l_{12}^2 l_{11}^2}{(4\pi)^3 M^4 c^4} \right) \frac{m_\mu^2}{2\hbar} E^2 \left(1 - \frac{4E}{3m_\mu c^2} \right) dE \quad (4.38)$$

donde $E = E_4$. Integrando la ecuación (4.38) se obtiene

$$\Gamma_{1er} = \frac{24m_\mu^4}{M^4} (l_{12} l_{11})^2 \frac{m_\mu c^2}{12\hbar (8\pi)^3} \quad (4.39)$$

El segundo termino de (4.34) y por (4.35), resulta:

$$\langle |M|^2 \rangle_{2do} = \frac{16l_{12}^2 l_{11}^2}{M^4 c^4} m_3 m_4 c^2 m_\mu E_2 \quad (4.40)$$

Como las masas de las partículas 3 y 4 son los del electrón, y de nuevo utilizando la Regla de Oro para un decaimiento de uno a tres cuerpos, se llega a [ver ec. (4.21)]

$$d\Gamma_{2do} = \frac{16l_{12}^2 l_{11}^2}{M^4 c^4} \frac{m_\mu m_e^2 c^3}{(4\pi)^4 \hbar E_4^2 m_\mu} d^3 \mathbf{p}_4 \int_{1/2m_\mu c^2 - E_4}^{1/2m_\mu c^2} E_2 dE_2 \quad (4.41)$$

Integrando aquí con $E = E_4$

$$\Gamma_{2do} = \frac{16l_{12}^2 l_{11}^2}{M^4 c^4} \frac{m_e^2}{(4\pi)^3 \hbar} \int_0^{1/2m_\mu c^2} \left(\frac{m_\mu c^2 E}{2} - \frac{E^2}{2} \right) dE \quad (4.42)$$

o bien

$$\Gamma_{2do} = \frac{m_\mu^4}{M^4} (l_{12}l_{11})^2 \frac{m_\mu c^2}{12\hbar(8\pi)^3} \left(160 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \right) \quad (4.43)$$

Finalmente la rapidez del decaimiento raro del mión es

$$\Gamma_{raro} = \Gamma_{1er} - \Gamma_{2do} = \frac{8m_\mu^4}{M^4} (l_{12}l_{11})^2 \frac{m_\mu c^2}{12\hbar(8\pi)^3} \left(3 - 20 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \right) \quad (4.44)$$

CAPÍTULO 5

LA APLICACIÓN DE LA SIMETRÍA $U(1)_X$

En este capítulo se aplicará la simetría horizontal $U(1)_X$ para obtener una cota en las constantes de acoplamiento del decaimiento raro del muón, el cual fue analizado en el capítulo anterior. En el capítulo 2 la teoría ha sido expuesta para el caso de los quarks, y la extensión para los fermiones de carga -1 es sencilla (de hecho las ecuaciones son las mismas). La ecuación (2.15) del capítulo es la matriz cuadrada de masa para campo escalar con carga -1 ($\phi_9, \phi_{10}, \phi_{12}, \phi_{11}$)

$$M_{-1}^2 = \begin{pmatrix} m_9^2 & r_1^* v_2^2 & 0 & 0 \\ r_1 v_2^2 & m_{10}^2 & \frac{\zeta_1^* v_1^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\zeta_1 v_1^2}{2} & m_{12}^2 & y_1 v_2 \\ 0 & 0 & y_1^* v_2 & m_{11}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

para tener un menor número de parámetros libres escribamos la matriz anterior de la siguiente forma

$$M_{-1}^2 = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & c & 0 \\ 0 & c & a & d \\ 0 & 0 & d & a \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

ya que queremos encontrar las masas de los escalares, necesitamos diagonalizar la matriz (5.2). En este proceso se puede encontrar que los eigenvalores son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a + \sqrt{\chi_+} \\ \lambda_2 &= a - \sqrt{\chi_+} \\ \lambda_3 &= a + \sqrt{\chi_-} \\ \lambda_4 &= a - \sqrt{\chi_-} \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde

$$\chi_{\pm} = \frac{\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 4\eta}}{2}, \quad (5.4)$$

es la solución a la ecuación

$$\chi^2 + \zeta\chi + \eta = 0, \quad (5.5)$$

con

$$b^2 + c^2 + d^2 = \zeta, \quad \eta = b^2 d^2, \quad (5.6)$$

Con los eigenvalores (5.3) se encuentra que la matriz ortogonal que diagonaliza a la ec. (5.2) es

$$U = \sqrt{\frac{\chi_+ - d^2}{2(\chi_+ - \chi_-)}} \begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{\chi_+}} & -\frac{b}{\sqrt{\chi_+}} & \frac{b(\chi_- - d^2)}{cd\sqrt{\chi_-}} & -\frac{b(\chi_- - d^2)}{cd\sqrt{\chi_-}} \\ 1 & 1 & \frac{\chi_- - d^2}{cd} & \frac{\chi_- - d^2}{cd} \\ \frac{c\sqrt{\chi_+}}{\chi_+ - d^2} & -\frac{c\sqrt{\chi_+}}{\chi_+ - d^2} & \frac{cd}{\sqrt{\chi_-}} & -\frac{cd}{\sqrt{\chi_-}} \\ \frac{cd}{\chi_+ - d^2} & \frac{cd}{\chi_+ - d^2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.7).$$

Las contribuciones a la matriz de masa, a un lazo, vienen dados por la ec. (2.21), esto es,

$$M_e^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{22}^{(1)} & \Sigma_{23}^{(1)} \\ 0 & \Sigma_{32}^{(1)} & m_{\tau}^0 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

donde explícitamente los terminos de la matriz son

$$\Sigma_{22}^{(1)} = m_{\tau}^{(0)} \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \sum_k U_{1k} U_{4k} f(M_k, m_{\tau}^{(0)}), \quad (5.9)$$

$$\Sigma_{23}^{(1)} = m_{\tau}^{(0)} \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \sum_k U_{2k} U_{4k} f(M_k, m_{\tau}^{(0)}), \quad (5.10)$$

$$\Sigma_{32}^{(1)} = m_{\tau}^{(0)} \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \sum_k U_{1k} U_{3k} f(M_k, m_{\tau}^{(0)}) \quad (5.11).$$

La siguiente función que ya había sido definida, $f(M_k, m_\tau^{(0)})$, contribuye solo de manera logarítmica bajo la aproximación $M_k^2 \gg m_\tau^{(0)2}$, es decir,

$$f(M_k, m_\tau^{(0)}) = \ln \frac{M_k^2}{m_\tau^{(0)2}}, \quad (5.12)$$

con esto las sumatorias quedan como

$$\Sigma_{22}^{(1)} = m_\tau^{(0)} \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \left[U_{11}U_{41} \ln \frac{M_1^2}{m_\tau^{(0)2}} + U_{12}U_{42} \ln \frac{M_2^2}{m_\tau^{(0)2}} + U_{13}U_{43} \ln \frac{M_3^2}{m_\tau^{(0)2}} + U_{14}U_{44} \ln \frac{M_4^2}{m_\tau^{(0)2}} \right]$$

$$\Sigma_{23}^{(1)} = m_\tau^{(0)} \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \left[U_{21}U_{41} \ln \frac{M_1^2}{m_\tau^{(0)2}} + U_{22}U_{42} \ln \frac{M_2^2}{m_\tau^{(0)2}} + U_{23}U_{43} \ln \frac{M_3^2}{m_\tau^{(0)2}} + U_{24}U_{44} \ln \frac{M_4^2}{m_\tau^{(0)2}} \right]$$

$$\Sigma_{32}^{(1)} = m_\tau^{(0)} \frac{Y_I^2}{16\pi^2} \left[U_{11}U_{31} \ln \frac{M_1^2}{m_\tau^{(0)2}} + U_{12}U_{32} \ln \frac{M_2^2}{m_\tau^{(0)2}} + U_{13}U_{33} \ln \frac{M_3^2}{m_\tau^{(0)2}} + U_{14}U_{34} \ln \frac{M_4^2}{m_\tau^{(0)2}} \right]$$

ya que cada $M_k^2 = \lambda_k$, el k -ésimo eigenvalor de la matriz de masa de los escalares con carga -1 (ec.(5.2)), la expresión (5.12) ahora adquiere la siguiente forma

$$f(\lambda_k, m_\tau^{(0)}) = \ln \frac{\lambda_k}{m_\tau^{(0)2}}, \quad (5.13)$$

donde cada eigenvalor es

$$\begin{aligned} \lambda_k &= a + \gamma_k \quad \text{tal que} \quad \gamma_k = (-1)^k \sqrt{\chi_\mp} \\ k = 1,2 &\Rightarrow \chi_- \quad \text{y} \quad k = 3,4 \Rightarrow \chi_+ \end{aligned} \quad (5.14)$$

en este momento se puede hacer una segunda aproximación donde cada $a \gg \gamma_k$, y la ec. (5.13) se puede aproximar a un tercer orden como

$$f(\lambda_k, m_\tau^{(0)}) = \ln \frac{\lambda_k}{m_\tau^{(0)2}} = \ln \frac{a}{m_\tau^{(0)2}} + \ln \left(1 + \frac{\gamma_k}{a} \right) \approx \ln \frac{a}{m_\tau^{(0)2}} + \frac{\gamma_k}{a} - \frac{\gamma_k^2}{2a^2} + \frac{\gamma_k^3}{3a^3}, \quad (5.15)$$

con todo esto las ecs. (5.9) - (5.11) bajo una aproximación de tercer orden son

$$\Sigma_{22}^{(1)} = m_{\tau}^{(0)} \frac{Y_l^2}{48\pi^2} \frac{cbd}{a^3}, \quad (5.16)$$

$$\Sigma_{23}^{(1)} = -m_{\tau}^{(0)} \frac{Y_l^2}{32\pi^2} \frac{cd}{a^2}, \quad (5.17)$$

$$\Sigma_{32}^{(1)} = -m_{\tau}^{(0)} \frac{Y_l^2}{32\pi^2} \frac{cb}{a^2} \quad (5.18).$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (5.8) la contribución de masas a un lazo es

$$M_e^{(1)} = m_{\tau}^{(0)} \frac{Y_l^2}{16\pi^2} \frac{cbd}{a^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{a}{2b} \\ 0 & -\frac{a}{2d} & \frac{16\pi^2}{Y_l^2} \frac{cbd}{a^3} \end{pmatrix} \quad (5.19).$$

Para la diagonalización de esta matriz que contribuye con la matriz de masa a un lazo, debe tener la forma de $M_D = V_R^{(1)T} M_e^{(1)} V_L^{(1)}$. Para un calculo mas practico se puede tomar en cuenta las siguientes operaciones

$$M_D^T M_D = V_L^{(1)T} M_e^{(1)T} M_e^{(1)} V_L^{(1)}, \quad (5.20)$$

$$M_D M_D^T = V_R^{(1)T} M_e^{(1)} M_e^{(1)T} V_R^{(1)}, \quad (5.21)$$

estas ecuaciones son posibles por que las matrices $V_R^{(1)}$ y $V_L^{(1)}$ son ortogonales. De la ecuación (5.20) es permisible encontrar la forma de la matriz $V_L^{(1)}$ y como se puede observar tan solo hay que diagonalizar la matriz $M_e^{(1)T} M_e^{(1)}$. Del mismo modo para la obtención de la matriz $V_R^{(1)}$ solo hay que diagonalizar la matriz $M_e^{(1)} M_e^{(1)T}$ (ec. (5.21)). Para comenzar con el proceso de diagonalización, de la ecuación (5.19) se toma el siguiente producto (ver ec. (5.8))

$$M_e^{(1)T} M_e^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N^2}{9} + \frac{a^2 N^2}{4b^2} & -\frac{aN^2}{6d} - \frac{8a^4 N^2 \pi^2}{b^2 cd Y^2} \\ 0 & -\frac{aN^2}{6d} - \frac{8a^4 N^2 \pi^2}{b^2 cd Y^2} & \frac{a^2 N^2}{4d^2} - \frac{256a^6 N^2 \pi^4}{b^2 c^2 d^2 Y^4} \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

donde

$$N = m_{\tau}^{(0)} \frac{Y_l^2}{16\pi^2} \frac{cbd}{a^3}, \quad (5.22)$$

Los eigenvalores son

$$\begin{aligned} \lambda_1^L &= 0 \\ \lambda_2^L &= \frac{96^2 a^8 \pi^4 m_{\tau}^{(0)2} + a^2 c^2 m_{\tau}^{(0)2} Y^4 [4b^2 d^2 + 9a^2 (b^2 + d^2)]}{2^{11} 3^2 a^8 \pi^4} \\ &\quad - \frac{\sqrt{a^4 m_{\tau}^{(0)4} [-6^2 a^4 b^2 c^2 d^2 Y_l^4 (18^2 a \pi^2 - 3cY^2)^2 + (96^2 a^6 \pi^4 + c^2 Y^4 [4b^2 d^2 + 9a^2 (b^2 + d^2)])]}}{2^{11} 3^2 a^8 \pi^4} \\ \lambda_3^L &= \frac{96^2 a^8 \pi^4 m_{\tau}^{(0)2} + a^2 c^2 m_{\tau}^{(0)2} Y^4 [4b^2 d^2 + 9a^2 (b^2 + d^2)]}{2^{11} 3^2 a^8 \pi^4} \\ &\quad + \frac{\sqrt{a^4 m_{\tau}^{(0)4} [-6^2 a^4 b^2 c^2 d^2 Y_l^4 (18^2 a \pi^2 - 3cY^2)^2 + (96^2 a^6 \pi^4 + c^2 Y^4 [4b^2 d^2 + 9a^2 (b^2 + d^2)])]}}{2^{11} 3^2 a^8 \pi^4} \end{aligned} \quad (5.23)$$

si se definen las siguientes cantidades

$$\alpha_2^L = 1 + \frac{36b^4 c^2 d^2 Y^4 \left[\lambda_2^L - \frac{N^2}{36b^2} (4b^2 + 9a^2) \right]^2}{a^2 N^4 (48a^3 \pi^2 + b^2 c Y^2)^2}, \quad (5.24)$$

$$\alpha_3^L = 1 + \frac{36b^4 c^2 d^2 Y^4 \left[\lambda_3^L - \frac{N^2}{36b^2} (4b^2 + 9a^2) \right]^2}{a^2 N^4 (48a^3 \pi^2 + b^2 c Y^2)^2}, \quad (5.25)$$

entonces la matriz ortogonal $V_L^{(1)}$ es

$$V_L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\alpha_3^L - 1}}{\alpha_3^L} & \frac{\sqrt{\alpha_2^L - 1}}{\alpha_2^L} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_3^L}} & \frac{1}{\sqrt{\alpha_2^L}} \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

Hasta ahora ya se encontró la expresión para la matriz ortogonal $V_L^{(1)}$, el siguiente paso será encontrar la expresión para matriz ortogonal $V_R^{(1)}$, como en el caso anterior consideremos la siguiente multiplicación $M_e^{(1)}M_e^{(1)T}$

$$M_e^{(1)}M_e^{(1)T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N^2}{9} + \frac{a^2N^2}{4b^2} & -\frac{aN^2}{6b} - \frac{8a^4N^2\pi^2}{d^2cbY^2} \\ 0 & -\frac{aN^2}{6b} - \frac{8a^4N^2\pi^2}{d^2cbY^2} & -\frac{a^2N^2}{4b^2} - \frac{256a^6N^2\pi^4}{b^2c^2d^2Y^4} \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

Los eigenvalores son

$$\begin{aligned} \lambda_1^R &= 0 \\ \lambda_2^R &= \frac{96^2 a^8 \pi^4 m_\tau^{(0)2} + a^2 c^2 m_\tau^{(0)2} Y^4 [4b^2 d^2 + 9a^2 (b^2 + d^2)]}{2^{11} 3^2 a^8 \pi^4} \\ &\quad - \frac{\sqrt{a^4 m_\tau^{(0)4} [-6^2 a^4 b^2 c^2 d^2 Y_l^4 (18^2 a \pi^2 - 3cY^2)^2 + (96^2 a^6 \pi^4 + c^2 Y^4 [4b^2 d^2 + 9a^2 (b^2 + d^2)])]}}{2^{11} 3^2 a^8 \pi^4} \\ \lambda_3^R &= \frac{96^2 a^8 \pi^4 m_\tau^{(0)2} + a^2 c^2 m_\tau^{(0)2} Y^4 [4b^2 d^2 + 9a^2 (b^2 + d^2)]}{2^{11} 3^2 a^8 \pi^4} \\ &\quad + \frac{\sqrt{a^4 m_\tau^{(0)4} [-6^2 a^4 b^2 c^2 d^2 Y_l^4 (18^2 a \pi^2 - 3cY^2)^2 + (96^2 a^6 \pi^4 + c^2 Y^4 [4b^2 d^2 + 9a^2 (b^2 + d^2)])]}}{2^{11} 3^2 a^8 \pi^4} \end{aligned} \quad (5.28)$$

si se definen las siguientes cantidades

$$\alpha_2^R = 1 + \frac{36b^2 c^2 d^4 Y^4 \left[\lambda_2^R - \frac{N^2}{36d^2} (4d^2 + 9a^2) \right]^2}{a^2 N^4 (48a^3 \pi^2 + b^2 c Y^2)^2}, \quad (5.29)$$

$$\alpha_3^R = 1 + \frac{36b^2 c^2 d^4 Y^4 \left[\lambda_3^R - \frac{N^2}{36d^2} (4d^2 + 9a^2) \right]^2}{a^2 N^4 (48a^3 \pi^2 + b^2 c Y^2)^2}, \quad (5.30)$$

la matriz ortogonal $V_R^{(1)}$ es

$$V_R^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\alpha_3^R - 1}}{\alpha_3^R} & \frac{\sqrt{\alpha_2^R - 1}}{\alpha_2^R} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_3^R}} & \frac{1}{\sqrt{\alpha_2^R}} \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

Las matrices (5.21) y (5.27) resultan tener los mismos eigenvalores (ecs. (5.23) y (5.28)), de ahí que

$$\begin{aligned} \lambda_1^L &= \lambda_1^R = m_1^{(1)} \\ \lambda_2^L &= \lambda_2^R = m_2^{(1)} \\ \lambda_3^L &= \lambda_3^R = m_3^{(1)} \end{aligned} \quad (5.32).$$

Para un análisis más sencillo es fácil ver que las matrices $V_L^{(1)}$ y $V_R^{(1)}$ se pueden describir como

$$V_L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad V_R^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

por lo tanto

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{\alpha_3^L - 1}}{\alpha_3^L} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2^L}}, \quad \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{\alpha_3^L}} = \frac{\sqrt{\alpha_2^L - 1}}{\alpha_2^L} \quad (5.34)$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{\alpha_3^R - 1}}{\alpha_3^R} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2^R}}, \quad \sin \beta = -\frac{1}{\sqrt{\alpha_3^R}} = \frac{\sqrt{\alpha_2^R - 1}}{\alpha_2^R} \quad (5.35).$$

Lo que a continuación sigue es considerar la matriz de masa para contribuciones a dos lazos la cual es

$$M_e^{(2)} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{(2)} & \Sigma_{12}^{(2)} & \Sigma_{13}^{(2)} \\ \Sigma_{21}^{(2)} & m_2^{(1)} & 0 \\ \Sigma_{31}^{(2)} & 0 & m_3^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

los elementos de matriz a la contribución de masa a dos lazos son

$$\Sigma_{11}^{(2)} = \frac{Y_l^2}{16\pi^2} \sum_{k,i} m_i^{(1)} (V_L^{(1)})_{2i} (V_R^{(1)})_{2i} U_{2k} U_{3k} f(M_k, m_i^{(1)}), \quad (5.37)$$

$$\Sigma_{12}^{(2)} = \frac{Y_l^2}{16\pi^2} \sum_{k,i} m_i^{(1)} (V_L^{(1)})_{3i} (V_R^{(1)})_{2i} U_{1k} U_{3k} f(M_k, m_i^{(1)}), \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{13}^{(2)} = & \frac{Y_l^2}{16\pi^2} \sum_{k,i} m_i^{(1)} (V_L^{(1)})_{3i} (V_R^{(1)})_{2i} U_{2k} U_{3k} f(M_k, m_i^{(1)}) \\ & + \frac{Y_l^2}{16\pi^2} \sum_{k,i} m_i^{(1)} (V_L^{(1)})_{2i} (V_R^{(1)})_{2i} U_{1k} U_{3k} f(M_k, m_i^{(1)}), \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\Sigma_{21}^{(2)} = \frac{Y_l^2}{16\pi^2} \sum_{k,i} m_i^{(1)} (V_L^{(1)})_{2i} (V_R^{(1)})_{3i} U_{2k} U_{4k} f(M_k, m_i^{(1)}), \quad (5.40)$$

sustituyendo los valores obtenidos en los cálculos anteriores se obtienen los siguientes resultados

$$\Sigma_{11}^{(2)} = \frac{Y_l^2 c (b^2 + c^2 + d^2)}{48\pi^2 a^3} C(\theta, \beta), \quad (5.41)$$

$$\Sigma_{12}^{(2)} = \frac{Y_l^2 bc}{32\pi^2 a^2} S_1(\theta, \beta), \quad (5.42)$$

$$\Sigma_{13}^{(2)} = -\frac{2(b^2 + c^2 + d^2)}{3ab} \Sigma_{12}^{(2)} - \frac{3ab}{2(b^2 + c^2 + d^2)} \Sigma_{11}^{(2)}, \quad (5.43)$$

$$\Sigma_{21}^{(2)} = -\frac{Y_l^2 cd}{32\pi^2 a^2} S_2(\theta, \beta), \quad (5.44)$$

$$\Sigma_{31}^{(2)} = -\frac{2(b^2 + c^2 + d^2)}{3ad} \Sigma_{21}^{(2)} - \frac{3ad}{2(b^2 + c^2 + d^2)} \Sigma_{11}^{(2)}, \quad (5.45)$$

donde

$$\begin{aligned} C(\theta, \beta) &= m_2^{(1)} \cos \theta \cos \beta + m_3^{(1)} \sin \theta \sin \beta \\ S_1(\theta, \beta) &= m_3^{(1)} \cos \theta \sin \beta - m_2^{(1)} \cos \beta \sin \theta \\ S_2(\theta, \beta) &= m_3^{(1)} \cos \beta \sin \theta - m_2^{(1)} \cos \theta \sin \beta \end{aligned} \quad (5.46).$$

Ya que el objetivo es buscar una cota para las constantes de acoplamiento de este decaimiento y tomando en cuenta que la matriz CKM se escribe como el producto de las

matrices unitarias izquierdas que diagonalizan a las matrices que contribuyen a un lazo y a dos lazos (ec. (2.28)), y aproximamos la matriz de CKM a la unidad entonces la matriz que diagonaliza a la ec. (5.36) se puede aproximar a lo siguiente

$$V_L^{(2)} \approx V_R^{(2)} \approx \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & 1 & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

con está matriz ya estamos en la disposición de construir la matriz izquierda para los leptones, es decir,

$$V_L = V_L^{(1)} V_L^{(2)},$$

explícitamente esta matriz es

$$V_L = \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} \cos \theta + l_{13} \sin \theta & \cos \theta + l_{23} \sin \theta & l_{23} \cos \theta + \sin \theta \\ l_{12} \sin \theta + l_{13} \cos \theta & l_{23} \cos \theta - \sin \theta & \cos \theta - l_{23} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (5.48).$$

En el capítulo anterior se hizo el cálculo para el decaimiento raro [ver ec. (4.44)], de ahí se sigue que $l_{11} = 1$, por lo que la razón del decaimiento raro del muón entre la razón del decaimiento total es

$$B(\mu \rightarrow e^- + e^+ + e^-) = \frac{\Gamma_{raro}}{\Gamma_{total}} \approx 24 \frac{l_{12}^2}{M^4} \frac{M_W^4}{g_W^4} < 10^{-12}, \quad (5.49)$$

utilizando que $M_W = 82 \text{ GeV} / c^2$ y $g_W = 0.66$

$$\frac{l_{12}^2}{M^4} < 10^{-22} \left(\frac{c^2}{\text{GeV}} \right)^4, \quad (5.50)$$

a la escala a la cual se piensa que la simetría espontánea de $U(1)_X$ se rompe es de algunos TeV [1], por lo que $M \approx$ algunos TeV / c^2 , esto trae como consecuencia que los elementos de la matriz (47) pueda ser acotada y

$$l_{12} < 10^{-5}, \quad (5.51)$$

entonces

$$V_L^{(2)} \approx V_R^{(2)} \approx \begin{pmatrix} 1 & 10^{-5} & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 1 & 10^{-10} \\ 10^{-5} & 10^{-10} & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.52)$$

CONCLUSIONES

En el modelo estándar el decaimiento $\mu \rightarrow e^- + e^+ + e^-$ no está permitido por lo que una nueva simetría ha tenido que ser introducida. Esta nueva simetría es del tipo horizontal y ha sido llamada $U(1)_X$. Con esto se ha podido construir las matrices de masas que contribuyen a uno y a dos lazos considerando cuatro parámetros libres (a , b , c y d) y encontrar sus eigenvalores. También se obtuvo la matriz izquierda de leptones (ec. (5.48)) con la cual se encontró una cota para la constante de acoplamiento en el decaimiento raro que resulto ser $l_{12} < 10^{-5}$ si se piensa que la masa del boson escalar es de algunos TeV / c^2 , el cual era el objetivo final de la tesis.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Gordon K. (1987), *Modern elementary Particle Physics*, Addison-Wesley Publishing Company.
- [2] Griffiths D. (1987), *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley and Sons, Inc.
- [3] Okun L. B. (1982), *Leptons and Quark*, North-Holland.
- [4] A. Hernández-Galeana, W. A. Ponce and A. Zepeda, *Zeitschrift Fur Physik C*, Vol 55 (3), (1992) 423-434
- [5] E. Garcia, A. Hernández-Galeana, D. Jaramillo, W. A. Ponce and A. Zepeda, *Revista Mexicana de Física* Vol. 48(1), (2002) 32, hep-ph/0006093; E. Garcia, A. Hernández-Galeana, A. Vargas and A. Zepeda, hep-ph/0203249

APÉNDICE A

Matrices de Pauli y Gama

Las matrices de Pauli son Hermitianas, unitarias y no tienen traza son:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

la multiplicación de dos matrices de Pauli da por resultado

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{A.2})$$

En particular su conmutador y su anticonmutador respectivamente es

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{A.3})$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \sigma_k, \quad (\text{A.4})$$

Las cuatro matrices de Dirac, unitarias y sin traza son:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

una quinta matriz es introducida

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\text{A.6})$$

Si se introduce la métrica

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu}, & a\mathbf{b} + \mathbf{b}a &= 2a \cdot b, \\
\gamma_\mu \gamma^\mu &= 4, & \gamma_\mu a\gamma^\mu &= -2a, \\
\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu &= -2\gamma^\nu, & \gamma_\mu a\mathbf{b}\gamma^\mu &= 4a \cdot b, \\
\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu &= 4g^{\nu\lambda}, & \gamma_\mu a\mathbf{b}c\gamma^\mu &= -2c\mathbf{b}a, \\
\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu, & &
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Para las trazas tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
Tr(1) &= 4, \\
Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu}, \quad Tr(a\mathbf{b}) = 4a \cdot b, \\
Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}), \\
Tr(a\mathbf{b}c\mathbf{d}) &= 4(a \cdot b c \cdot d - a \cdot c b \cdot d + a \cdot d c \cdot b)
\end{aligned} \tag{A.9}$$

También es importante mencionar que el producto de un número impar de matrices gama es cero. De ahí se siguen las siguientes relaciones con la matriz γ^5 (hay que recordar que está es el producto de un número par de gamas)

$$\begin{aligned}
Tr(\gamma^5) &= 0, \\
Tr(\gamma^5 \gamma^\mu) &= 0, & Tr(\gamma^5 a\mathbf{b}) &= 0 \\
Tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) &= 0, & Tr(\gamma^5 a\mathbf{b}c\mathbf{d}) &= 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} a_\mu b_\nu c_\lambda d_\sigma \\
Tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda) &= 0, \\
Tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma) &= 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma},
\end{aligned} \tag{A.10}$$

donde

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \begin{cases} -1 & \text{si } \mu\nu\lambda\sigma \text{ son permutaciones pares de } 0123 \\ +1 & \text{si } \mu\nu\lambda\sigma \text{ son permutaciones impares de } 0123, \\ 0 & \text{si dos índices se repiten} \end{cases} \tag{A.11}$$

y cumple que

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon_{\mu\nu\kappa\tau} = -2(\delta_\kappa^\lambda \delta_\tau^\sigma - \delta_\tau^\lambda \delta_\kappa^\sigma), \tag{A.12}$$

APÉNDICE B

Decaimientos y Reglas de Feynman

Si una partícula decaía en n partículas, es decir,

$$1 \rightarrow 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

la razón de decaimiento es:

$$d\Gamma = \frac{|M|^2 S}{2\hbar m_1} \left\{ \left[\frac{c d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right] \left[\frac{c d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right] \dots \left[\frac{c d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right] \right\} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n) \quad (\text{B.1})$$

donde

$p_i = \left(\frac{E_i}{c}, \mathbf{p}_i \right)$ 4-momento de la i -ésima partícula. Mientras que la que va a decaer está en reposo, $p_1 = (m_1 c, 0)$.

$S = \frac{1}{j!}$ para cada grupo de j partículas idénticas en el estado final.

Para calcular la amplitud se necesitan Las reglas de Feynman (para interacciones electrodébiles), las cuales son:

Lo primero a considerar es el espín de la partícula, y en los diagramas de Feynman se le asigna a cada partícula un 4-momento p_i y su correspondiente espín s_i . Las líneas externas contribuyen con un factor de

Espín	contribución
0	nada
$\frac{1}{2}$	Partícula entrante: u Antipartícula entrante: \bar{v} Partícula saliente: \bar{u} Antipartícula saliente: v
1	Entrando: ϵ^μ Saliendo: $\epsilon^{\mu*}$

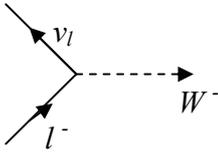
Los propagadores contribuyen con:

$$\text{Espín 0: } \frac{i}{q^2 - (mc)^2} \quad (\text{B.2})$$

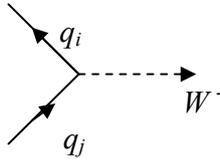
$$\text{Espín } \frac{1}{2}: \frac{i(q + mc)}{q^2 - (mc)^2} \quad (\text{B.3})$$

$$\text{Espín 1: } \begin{cases} \text{Sin Masa: } \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \\ \text{Masivos: } \frac{-i[g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / (mc)^2]}{q^2 - (mc)^2} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

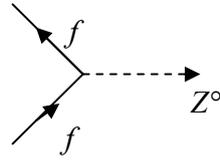
Los vértices contribuyen con un factor de:



$$\frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$$



$$\frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) U_{ij}$$



$$\frac{-ig_Z}{2} \gamma^\mu (c_V^f - c_A^f \gamma^5)$$

Aquí l es un leptón, ν_l es su correspondiente neutrino, q_i ($i = u, c, o t$) y q_j ($j = d, s, o b$) son quarks, U es la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa y f un fermión.

f	c_V	c_A
ν_e, μ, τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e, μ, τ	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W$	$-\frac{1}{2}$
u, c, t	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	$\frac{1}{2}$
d, s, b	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$	$-\frac{1}{2}$

APÉNDICE C

Ecuaciones de Movimiento

Lagrangiana de Klein-Gordon para un campo con espín-0 (campo escalar) y masa m

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \quad (\text{C.1})$$

aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\nu \partial^\nu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (\text{C.2})$$

La lagrangiana de Dirac para un espinor, partícula de espín- $1/2$, con masa m

$$\mathfrak{S} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \quad (\text{C.3})$$

aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (\text{C.4})$$

Lagrangiana de Proca para un campo con espín-1 (campo vectorial) y masa m

$$\mathfrak{S} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{8\pi} A^\nu A_\nu \quad (\text{C.5})$$

donde

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (\text{C.6})$$

y la ecuación del campo es:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \quad (\text{C.7})$$

Nótese que si $m = 0$ se recuperan las ecuaciones de Maxwell del Electromagnetismo para el vacío.

$$\mathfrak{S} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{c} J^\nu A_\nu \quad (\text{C.8})$$

aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^{\nu} \quad (\text{C.9})$$