

# Cobertura por el método de Monte-Carlo

Araceli Ramírez López.

*A mis padres.*

# Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento es para la Dra. Patricia Saavedra Barrera por toda su confianza, apoyo y enseñanzas durante la realización de este trabajo.

A mis sinodales M en C. Victor Hugo Ibarra Mercado, Dr. Adrián Alcántar Torres, M. en C. Francisco Ramírez Reyes y al Dr. Roberto Segundo Acosta Abreu por su tiempo y dedicación en la revisión de mi trabajo así como en sus imprescindibles comentarios para mejorarlo.

A mis amigos Alejandro, Ana Maria, Cristina, Damaris, Didier, Janet, Juanita y Marcelo por brindarme su confianza, apoyo y amistad.

Al IPN.

Gracias.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>1. Valuación y cobertura de una opción</b>	<b>11</b>
1.1. Marco teórico . . . . .	11
1.2. Modelo de Black-Scholes . . . . .	13
1.3. Valuación . . . . .	16
1.4. Construcción del portafolio de cobertura . . . . .	19
1.5. Griegas de una opción . . . . .	21
<b>2. Cobertura por Monte-Carlo</b>	<b>26</b>
2.1. Método de Monte-Carlo . . . . .	26
2.1.1. Aplicación del método de Monte-Carlo en la valuación de opciones.	29
2.2. Método de diferencias finitas . . . . .	30
2.2.1. Estimador por diferencias hacia adelante . . . . .	31
2.2.2. Estimador por diferencias centradas . . . . .	34
2.2.3. Cálculo de la delta de una opción por diferencias finitas . . . . .	37
2.3. Método de perturbación infinitesimal . . . . .	46
2.3.1. Cálculo de la delta de una opción por el método de perturbación infinitesimal . . . . .	48
2.3.2. Cálculo de las griegas de una opción por el método de perturbación infinitesimal . . . . .	52
<b>3. Aplicación del método de Monte-Carlo a opciones exóticas</b>	<b>60</b>
3.1. Valuación y cobertura de una opción asiática . . . . .	60
3.1.1. Estimación de la cobertura. . . . .	66
3.1.2. Cálculo de la vega de una opción asiática. . . . .	70

3.2. Valuación y cobertura de una opción lookback . . . . .	73
3.2.1. Delta de una opción lookback . . . . .	76
<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>79</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

# Índice de cuadros

2.1. Resultados del estimador de delta, $\widehat{\Delta}_{F_I}(n, h)$ . . . . .	40
2.2. Resultados del estimador de delta, $\widehat{\Delta}_{F_D}(n, h)$ . . . . .	41
2.3. Resultados del estimador de delta, $\widehat{\Delta}_{C_I}(n, h)$ . . . . .	42
2.4. Resultados del estimador de delta, $\widehat{\Delta}_{C_D}(n, h)$ . . . . .	43
2.5. Resultados del estimador de $\Delta$ por el método de perturbación infinitesimal combinado con Monte-Carlo. . . . .	51
2.6. Resultados del estimador de $\nu$ por el método de perturbación infinitesimal combinado con Monte-Carlo. . . . .	54
2.7. Resultados del estimador de $\rho$ por el método de perturbación infinitesimal combinado con Monte-Carlo. . . . .	56
2.8. Resultados del estimador de $\Theta$ por el método de perturbación infinitesimal combinado con Monte-Carlo. . . . .	58
3.1. Estimación del precio de un call asiático. . . . .	65
3.2. Estimación de la $\Delta$ de un call asiático por el método de perturbación infi- nitesimal combinado con Monte-Carlo. . . . .	69
3.3. Estimación de la $\nu$ de un call asiático por el método de perturbación infi- nitesimal combinado con Monte-Carlo. . . . .	72
3.4. Estimación del precio de una opción de compra lookback. . . . .	75
3.5. Estimación de la $\Delta$ de un call lookback por el método de perturbación infinitesimal combinado con Monte-Carlo. . . . .	78

# Introducción

Ante una evidente necesidad de controlar el riesgo debido a fluctuaciones en el precio de productos agroindustriales (commodities), a mediados del siglo XVIII comenzó a desarrollarse el mercado de derivados, pero es, en los últimos 30 años que ha tenido una aceptación considerable. Los derivados como su nombre indica son productos que dependen del comportamiento de otro producto llamado subyacente. La idea básica de un derivado financiero es comprar un seguro que cubra los activos con riesgo en el mercado; es decir, encontrar participantes en el mercado que acepten compartir los riesgos y beneficios futuros. Entre los principales instrumentos derivados financieros se encuentran futuros, opciones, opciones sobre futuros, warrants y swaps. Como subyacentes más utilizados para la emisión de éstos tenemos acciones de empresas, canastas de acciones, índices accionarios, tasas de interés y divisas.

En el caso de las opciones; éstos son contratos que otorgan a su poseedor el derecho más no la obligación de comprar o vender el activo subyacente a un precio determinado, llamado precio de ejercicio, en una fecha futura determinada de antemano, llamada fecha de vencimiento. Las opciones se caracterizan según sean opciones de compra o de venta, por su función de pago y por la forma en que pueden ejercerse. Así, una opción de compra se llama call mientras que una opción de venta se llama put.

Por otro lado, la función de pago de una opción, comúnmente denotada como  $h$ , representa el valor de la opción en la fecha de vencimiento; es decir, la ganancia que obtiene quien adquiere la opción. De esta manera,  $h$  es una función que depende del precio del activo subyacente  $S$ , en la fecha de vencimiento  $T$  o bien de la trayectoria que sigue el precio del activo subyacente. De acuerdo a su función de pago, las opciones se clasifican en opción vainilla y opción exótica; la función de pago de la primera depende del valor del activo subyacente en la fecha de vencimiento mientras que en la segunda, la función de pago

depende de la trayectoria que sigue el precio del activo subyacente.

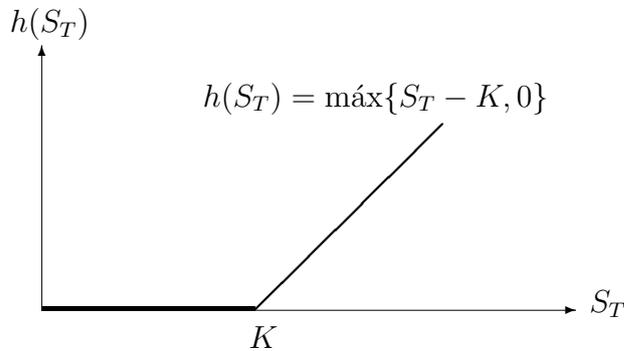
Son opciones tipo vainilla, el call estándar con función de pago

$$h(S_T) = \max\{S_T - K, 0\}$$

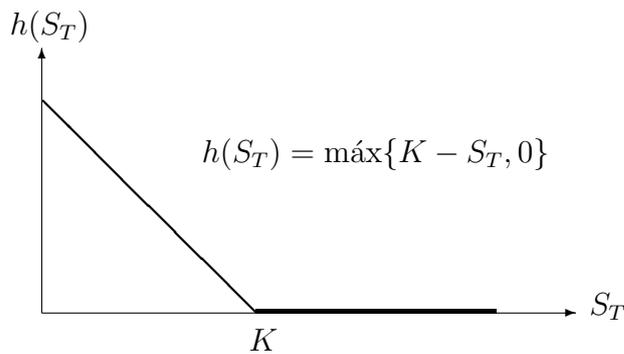
y el put estándar con función de pago

$$h(S_T) = \max\{K - S_T, 0\}$$

donde  $K$  es el precio de ejercicio y  $S_T$  el precio del subyacente en la fecha de vencimiento  $T$ . La gráfica de la función de pago de un call y put estándar se muestran a continuación:



Gráfica de la función de pago de un call estándar.



Gráfica de la función de pago de un put estándar.

Entre las opciones exóticas encontramos principalmente: la opción asiática, lookback, digital y barrera. En el caso de la opción asiática, ésta asume dos variantes; opción asiática con precio medio del subyacente y opción asiática con precio de ejercicio medio. Las primeras son aquellas cuyo valor final depende de la media aritmética o geométrica de los precios

del subyacente y tiene como función de pago para el call a

$$h(\bar{S}) = \text{máx}\{\bar{S} - K, 0\}$$

y para el put a

$$h(\bar{S}) = \text{máx}\{K - \bar{S}, 0\}$$

donde,  $\bar{S}$  es la media aritmética o geométrica de los precios del subyacente y  $K$ , el precio de ejercicio es fijo. Por otro lado, las opciones asiáticas con precio de ejercicio medio; son aquellas que como su nombre lo indica el precio de ejercicio se obtiene con la media aritmética o geométrica de los precios del subyacente y tiene como función de pago para el call a

$$h(\bar{S}) = \text{máx}\{S_T - \bar{S}, 0\}$$

y para el put a

$$h(\bar{S}) = \text{máx}\{\bar{S} - S_T, 0\}$$

donde,  $S_T$  es el precio final del activo subyacente.

Una opción de compra lookback permite a su propietario comprar el activo subyacente al mínimo precio alcanzado por el subyacente durante la vida de la opción y tiene la siguiente función de pago discreta

$$h(S_{\text{mín}}) = \text{máx}\{S_T - S_{\text{mín}}, 0\},$$

donde  $S_{\text{mín}} = \text{mín}\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ .

De forma similar, una opción de venta lookback otorga el derecho a su propietario de vender el activo subyacente al máximo precio alcanzado durante la vida de la opción y su función de pago discreta es

$$h(S_{\text{máx}}) = \text{máx}\{S_{\text{máx}} - S_T, 0\},$$

con  $S_{\text{máx}} = \text{máx}\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ .

Una opción de compra digital es aquella que no paga nada si en la fecha de vencimiento  $T$ , el precio del subyacente termina por debajo del precio de ejercicio, la función de pago de esta opción se define como

$$h(S_T) = \mathbf{1}\{S_T > K\}$$

donde

$$\mathbf{1}\{S_T > K\} = \begin{cases} 1 & \text{Si } S_T > K \\ 0 & \text{Si } S_T \leq K \end{cases} .$$

En el caso de una opción de venta digital, sucede que el dueño de la opción recibe una suma de dinero si el precio del subyacente en la fecha de vencimiento de la opción se encuentra por debajo del precio de ejercicio, en caso contrario no sucede ningún pago; la función de pago para un put digital es

$$h(S_T) = \mathbf{1}\{S_T < K\}$$

con

$$\mathbf{1}\{S_T < K\} = \begin{cases} 1 & \text{Si } S_T < K \\ 0 & \text{Si } S_T \geq K \end{cases} .$$

Por último, las opciones barrera, son opciones en las que los beneficios dependen de si el precio del activo subyacente alcanza cierto nivel durante un período de tiempo. Existen básicamente 2 tipos de opciones barrera; opción con barrera de salida y opción con barrera de entrada, la primera deja de existir cuando el precio del subyacente alcanza determinado nivel, mientras que una opción barrera de entrada existe a partir del momento en que el subyacente alcanza cierto nivel. Así, un ejemplo de una opción de compra barrera de salida, con barrera  $C$  y precio de ejercicio  $K$ , tiene función de pago

$$h(S_T) = \begin{cases} \max\{S_T - K, 0\} & \text{Si } S_t < C \text{ para todo } t \leq T \\ 0 & \text{Caso contrario} \end{cases} .$$

Esto quiere decir, que el dueño de la opción obtiene después de la fecha de vencimiento el pago de un call estándar con precio de ejercicio  $K$ , si el precio del subyacente no rebasa nunca, durante la vida de la opción, la barrera  $C$ . De manera similar se define la función de pago de la opción barrera de entrada. Las opciones barrera pueden considerar tanto cotas superiores como inferiores.

Entre las opciones que se distinguen por la forma en que se ejercen están las europeas que pueden ejercerse únicamente en la fecha de vencimiento, las americanas que pueden ejercerse en cualquier tiempo mientras la opción esté vigente y la opción bermuda que tiene un número finito de tiempos de ejercicio.

El poseedor de una opción tiene el derecho a elegir si ejerce o no la opción, esto le garantiza que el valor de su opción en la fecha de ejercicio no será negativo. Así, para tener

este derecho en el futuro se requiere de un pago en el presente, pago al que llamaremos prima. Sin embargo, debido a la incertidumbre sobre la cantidad de dinero a recibir en el futuro, no es tan fácil determinar la cantidad de esta prima inicial o valor inicial de la opción  $V_0$ . Debido a que las opciones se comercializan en el mercado secundario también es importante conocer su valor  $V_t$  para  $t \in [0, T]$ . La idea generalmente aceptada para determinar el precio de una opción, es el principio de la réplica que establece que dos bienes que devuelven exactamente los mismos flujos de pago, deben tener los mismos precios en todo momento en el tiempo. Esta idea se lleva a la práctica para las opciones al construir un portafolio de inversión formado por una cierta cantidad de unidades del activo subyacente, conocida como  $\Delta$  (delta) de una opción y otra cantidad en un título sin riesgo, de manera tal que, el valor del portafolio al vencimiento sea exactamente el valor de la opción al vencimiento.

A la estrategia de inversión que reproduce el valor de la opción al vencimiento se le llama cobertura y su existencia no sólo es una justificación del precio de la opción sino que también es de suma importancia en la práctica. Esto es, porque el vendedor de la opción no debe esperar pacíficamente hasta el momento del vencimiento; por el contrario, debe cubrirse del riesgo debido a la fluctuación del precio del subyacente; de no hacerlo, estaría expuesto a grandes pérdidas. Por lo tanto, la cantidad de dinero que el vendedor de la opción invierte para su cobertura será un precio equitativo para la opción. Otro aspecto importante del principio de réplica es que de esta forma se evita que una persona obtenga beneficios ilimitados sin correr riesgo alguno, comunmente conocido como *arbitraje*, a través de la venta o compra de opciones.

Actualmente, bajo ciertas hipótesis se cuenta con modelos matemáticos que permiten calcular el valor exacto de algunas opciones. Un modelo conocido es el de Black-Scholes que permite el cálculo del valor exacto de opciones europeas y de algunas exóticas. Así mismo brinda una forma de establecer una estrategia de cobertura. Sin embargo, para otro tipo de opciones exóticas como la asiática, la opción barrera y la opción lookback no es posible o es muy difícil calcular su valor exacto. Aún más difícil es establecer la estrategia de cobertura para este tipo de opciones.

Una forma de abordar el problema anterior es a partir del método de Monte-Carlo. El método de Monte-Carlo se basa en el hecho de que un buen estimador, (esto por la Ley

de los Grandes Números) de la esperanza de una variable aleatoria con distribución  $F$  se obtiene a partir de calcular la media de una muestra finita de variables aleatorias, independientes y con distribución  $F$ . Como ya sabemos, el valor esperado de una variable aleatoria continua está definido por una integral; la idea del método de Monte-Carlo es utilizar la media muestral para estimar integrales. Más adelante veremos que el valor de una opción se reduce a calcular la esperanza de la función de pago descontada de la opción, por lo que se utiliza el método de Monte-Carlo para estimar esta esperanza. Por otro lado, existe un conjunto al que llamaremos *griegas* de una opción, las cuales son derivadas del valor de la opción con respecto a parámetros tales como el precio del subyacente  $S$ , la volatilidad del subyacente  $\sigma$ , la tasa de interés  $r$  y el tiempo  $t$ . En particular, la delta de una opción es una de las griegas más importantes por su utilidad en la cobertura de opciones.

El problema principal es justamente, cómo estimar con suficiente precisión y en el menor tiempo posible las griegas de una opción, cuando no es posible determinarlas de manera exacta.

Algunos de los métodos para estimar las griegas de una opción son: el método de diferencias finitas y el método *pathwise derivative* o análisis de perturbación infinitesimal.

El objetivo de este trabajo es:

- Comprender el modelo continuo de valuación y cobertura de opciones europeas.
- Analizar las características de los estimadores de algunas griegas de una opción europea que genera el método de diferencias finitas y el método de perturbación infinitesimal.
- Aplicar el método de Monte-Carlo al cálculo de la cobertura y de algunas griegas de una opción asiática y de otras opciones exóticas.

En el Capítulo 1 se aborda el problema de la valuación y cobertura de una opción en el caso continuo, también se analiza el modelo de Black-Scholes y se obtienen las fórmulas para calcular el valor exacto de una opción europea.

En el Capítulo 2 se introduce el método de diferencias finitas, así como el método de perturbación infinitesimal y se presentan resultados numéricos de los estimadores de la delta de una opción europea que se obtuvieron al aplicar cada uno de los métodos anteriores.

---

En el Capítulo 3 se presenta la aplicación del método de Monte-Carlo para el cálculo de la cobertura y de algunas griegas de algunas opciones exóticas. Por último, en las conclusiones se muestra que el método de Monte-Carlo combinado con el método de perturbación infinitesimal nos permite generar para varias opciones exóticas buenos estimadores de sus griegas.

# Capítulo 1

## Valuación y cobertura de una opción

En este capítulo se aborda el problema de la valuación y cobertura de una opción en el caso continuo. Primero, se define un marco teórico sobre las características del mercado en el cual se emite la opción. Luego, se analiza el modelo Black-Scholes. Por último, se calcula de manera teórica el valor de una opción europea, su cobertura, y las griegas de la misma.

### 1.1. Marco teórico.

Los supuestos bajo los cuales se realiza la valuación son:

- Tenemos un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .
- Es una opción con fecha de vencimiento  $T$ .
- El mercado consiste de dos activos: uno con riesgo y otro sin riesgo.
- No hay costos de transacción al negociar el subyacente o la opción.
- Se puede hacer venta al descubierto.
- Se puede comprar o vender fracciones de los activos.
- Los activos se negocian en tiempo continuo.
- El tipo de interés libre de riesgo  $r$  es conocido y constante.

- Los inversionistas pueden prestar o pedir prestado al mismo tipo de interés libre de riesgo.
- Se define al proceso estocástico  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  como un movimiento browniano estándar si satisface las siguientes condiciones:

1.  $B_0 = 0$ .
2. Para cualquier conjunto de puntos  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , los incrementos

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

son estocásticamente independientes.

3. Para cualquier par de tiempos  $t$  y  $s$  con  $0 \leq s < t$ ,  $B_t - B_s$  se distribuye como una normal con media 0 y varianza  $t - s$ .
- El precio del activo con riesgo o subyacente, al tiempo  $t$  que denotaremos como  $S_t$ , satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t) \quad (1.1)$$

donde  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes y  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano estándar. O bien

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t S_s \sigma dB_s \quad (1.2)$$

donde la primer integral es una integral de Riemann y la segunda, es una integral estocástica (ver [7], pág. 136). La ecuación diferencial estocástica (1.1) tiene como solución exacta:

$$S_t = S_0 e^{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t} \quad t \geq 0 \quad (1.3)$$

donde  $S_0$  es el precio inicial del activo con riesgo,  $\mu$  es una constante que representa la tendencia a crecer y  $\sigma$  se denomina la volatilidad del precio del activo (ver [7], pág. 139). El proceso (1.3) es llamado movimiento geométrico browniano y tiene una distribución log-normal (ver [9], pág. 39).

- Existe un activo libre de riesgo, con  $S_t^0$  su precio en el tiempo  $t$ , el cual satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$dS_t^0 = r S_t^0 dt \quad (1.4)$$

cuya solución es:

$$S_t^0 = S_0^0 e^{rt} \quad (1.5)$$

donde  $S_0^0 = 1$  es su valor inicial y  $r \geq 0$  es una constante.

- $\mathcal{F}_t$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{B_s\}_{0 \leq s \leq t}$  con  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar. La  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  contiene la información relevante disponible de los precios de los activos hasta el tiempo  $t$ .
- La familia creciente de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  es una filtración en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

## 1.2. Modelo de Black-Scholes

Para comprender el modelo de Black-Scholes consideraremos las siguientes definiciones: Una *estrategia de inversión* es un proceso estocástico

$$\Phi = \{\Phi_t\}_{0 \leq t \leq T} = \{(\Phi_t^0, \Phi_t^1), 0 \leq t \leq T\} \quad (1.6)$$

tal que  $\Phi_t = (\Phi_t^0, \Phi_t^1)$  sólo depende de los precios de los activos hasta el tiempo  $t$ , para cada  $t \in [0, T]$ .

La componente  $\Phi_t^0$  representa las unidades invertidas en el activo financiero sin riesgo al tiempo  $t$ , mientras que la componente  $\Phi_t^1$  representa la cantidad de unidades del activo con riesgo de que disponemos al tiempo  $t$ .

A la pareja  $(\Phi_t^0, \Phi_t^1)$  se le denomina portafolio al tiempo  $t$ . En esta situación el valor del portafolio en cada instante  $t$  es:

$$V_t(\Phi) = \Phi_t^0 S_t^0 + \Phi_t^1 S_t. \quad (1.7)$$

Diremos que la estrategia  $\Phi$  es *autofinanciada* si su valor es un proceso de Ito con diferencial

$$dV_t(\Phi) = \Phi_t^0 dS_t^0 + \Phi_t^1 dS_t \quad (1.8)$$

esto significa, que el incremento del valor del portafolio sólo depende de los incrementos de los precios de los activos.

A partir de aquí se definen el precio actualizado de los activos y del valor del portafolio. El precio actualizado del activo sin riesgo, que denotamos como  $\tilde{S}_t^0$  es:

$$\tilde{S}_t^0 = e^{-rt} S_t^0. \quad (1.9)$$

Para el activo con riesgo tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t &= e^{-rt} S_t \\ &= S_0 e^{(\mu-r)t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

El valor actualizado del portafolio es

$$\tilde{V}_t(\Phi) = e^{-rt} V_t(\Phi) = \Phi_t^0 + \Phi_t^1 \tilde{S}_t \quad (1.11)$$

donde

$$d\tilde{V}_t(\Phi) = -re^{-rt} V_t(\Phi) dt + e^{-rt} dV_t(\Phi). \quad (1.12)$$

Suponiendo que la estrategia es autofinanciable

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(\Phi) &= -r e^{-rt} (\Phi_t^0 S_t^0 + \Phi_t^1 S_t) dt + e^{-rt} (\Phi_t^0 dS_t^0 + \Phi_t^1 dS_t) \\ &= \Phi_t^1 (-r e^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t) \\ &= \Phi_t^1 d\tilde{S}_t, \end{aligned} \quad (1.13)$$

el cambio en el valor actualizado del portafolio sólo depende del cambio en el precio actualizado del activo con riesgo.

**Definición 1.2.1.** *Un proceso estocástico  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  diremos que es una martingala respecto de una familia creciente de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ , si cumple las propiedades siguientes:*

1.  $M_t$  es medible respecto de  $\mathcal{F}_t$ , para todo  $t \geq 0$ .
2.  $E[|M_t|] < \infty$  para todo  $t \geq 0$ .
3.  $E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ , si  $s \leq t$ .

**Definición 1.2.2.** *En un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , una medida de probabilidad  $Q$  en el espacio  $(\Omega, \mathcal{F})$  es absolutamente continua con respecto a  $P$  si  $P(A) = 0 \implies Q(A) = 0$ , para todo  $A \in \mathcal{F}$ .*

*Las probabilidades  $P$  y  $Q$  son equivalentes si cada una es absolutamente continua con respecto a la otra.*

**Teorema de Girsanov 1.2.1.** *En un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , con  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar y  $\mathcal{F}_t$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{B_s\}_{0 \leq s \leq t}$  se cumple lo siguiente:*

1. *Existe una medida de probabilidad  $P^*$ , que es equivalente a  $P$ , bajo la cual el proceso estocástico  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  con  $W_t = B_t + \lambda t$  y  $\lambda$  una constante, es un movimiento browniano estándar.*
2. *El proceso estocástico  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  con  $M_t = e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$  es una martingala con respecto a la medida de probabilidad  $P^*$ .*

**Definición 1.2.3.** *Se llama oportunidad de arbitraje a una estrategia de inversión  $\Phi$  autofinanciada que representa la posibilidad de obtener recursos al final de un período de tiempo sin entregar nada a cambio. La estrategia  $\Phi$  verifica:*

1.  $V_0(\Phi) = 0$ .
2.  $P(V_T(\Phi) \geq 0) = 1$ .
3.  $P(V_T(\Phi) > 0) > 0$ .

*Cuando no es posible definir una estrategia de inversión con tales características, se dice que hay ausencia de oportunidad de arbitraje.*

Para el modelo Black-Scholes, consideramos el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y a  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar bajo la medida de probabilidad  $P$ . Así mismo, sea

$$W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t. \quad (1.14)$$

Por el teorema de Girsanov, existe una probabilidad  $P^*$  que es equivalente a  $P$ , bajo la cual, el proceso  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano estándar.

Por otro lado, considerando el precio actualizado del activo con riesgo sabemos que:

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t)$$

y de (1.14) tenemos

$$\sigma dW_t = (\mu - r)dt + \sigma dB_t.$$

Por lo tanto, los precios actualizados satisfacen la siguiente ecuación:

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t \quad (1.15)$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_t &= \tilde{S}_0 + \int_0^t \sigma \tilde{S}_t dW_t \\ &= \tilde{S}_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t}.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Por el teorema de Girsanov el proceso (1.16) es una martingala, así en el modelo Black-Scholes los precios actualizados son martingala bajo la medida de probabilidad  $P^*$ . Por otra parte, en un mercado hay ausencia de oportunidad de arbitraje si existe una probabilidad  $P^*$  equivalente a  $P$ , bajo la cual los precios actualizados son martingala, (ver [1]). Esto nos lleva a decir que en el modelo Black-Scholes hay ausencia de oportunidad de arbitraje.

### 1.3. Valuación

Para determinar el valor de una opción mediante el modelo Black-Scholes es preciso tomar en consideración algunas características de la función de pago de la opción.

La función de pago de una opción que denotamos como  $h$ , es una variable aleatoria que como ya se sabe, representa el valor de la opción en la fecha de vencimiento.

**Definición 1.3.1.** Una estrategia  $\Phi = \{(\Phi_t^0, \Phi_t^1), 0 \leq t \leq T\}$  es admisible bajo la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  si es autofinanciable y el valor del portafolio actualizado correspondiente es positivo; es decir, si  $\tilde{V}_t = \phi_t^0 + \phi_t^1 \tilde{S}_t$  es positivo.

Una variable aleatoria  $h$  es simulable o replicable si existe una estrategia de inversión  $\Phi$ , que es admisible bajo la filtración y el valor del portafolio  $V_t$  en la fecha de vencimiento es igual al valor de la opción; es decir, si  $V_T(\Phi) = h$ .

**Teorema 1.3.1.** En el modelo Black-Scholes, para toda opción con función de pago  $h$ ; una variable aleatoria simulable, el valor del portafolio que replica el valor de la opción es

$$V_t = E^*[e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t], \quad t \in [0, T]\tag{1.17}$$

donde,  $E^*[X|\mathcal{F}_t]$  denota la esperanza condicional de la variable aleatoria  $X$ , dado  $\mathcal{F}_t$ , bajo la medida de probabilidad  $P^*$ , (Demostración en [4], pág. 68 o [7], pág. 182).

De acuerdo al teorema (1.3.1), para conocer el valor de la opción y del portafolio al tiempo  $t$  es necesario calcular la esperanza condicional de la función de pago de la opción descontada a la tasa  $r$ , dada la información de los precios hasta el tiempo  $t$ , bajo la medida de probabilidad  $P^*$ .

Si deseamos conocer el valor exacto de una opción de compra o de una opción de venta es necesario desarrollar la expresión (1.17) como sigue:

Consideremos una opción con fecha de ejercicio  $T$  y sea  $t \leq T$ . De la relación (1.16) sabemos que

$$\begin{aligned}\tilde{S}_T &= \tilde{S}_0 e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} \\ &= \tilde{S}_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t} e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \\ &= \tilde{S}_t e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad (1.18) por  $e^{rT}$  y utilizando el hecho que  $S_t = \tilde{S}_t e^{rt}$  tenemos

$$S_T = S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}.\tag{1.19}$$

Sea  $F(t, S_t)$  el valor de una opción cuando el precio del activo subyacente es  $S_t$  en el tiempo  $t$ , para  $0 \leq t \leq T$ . En particular, un call estándar europeo con función de pago  $h(S_T) = \max\{S_T - K, 0\}$ , la cual denotaremos como  $h(S_T) = (S_T - K)_+$ , tiene el siguiente valor

$$\begin{aligned}F(t, S_t) &= E^*[e^{-r(T-t)}h(S_T)|\mathcal{F}_t] \\ &= E^*[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+|\mathcal{F}_t].\end{aligned}\tag{1.20}$$

Utilizando la expresión (1.19) en (1.20), tenemos

$$F(t, S_t) = E^*[e^{-r(T-t)}(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K)_+|\mathcal{F}_t].\tag{1.21}$$

Como  $(W_T - W_t)$  bajo la medida de probabilidad  $P^*$ , es independiente de  $\mathcal{F}_t$  (ver [7], pág. 183 o [4], pág. 69), la expresión (1.21) se reduce a calcular

$$F(t, S_t) = E^*[e^{-r(T-t)}(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K)_+].\tag{1.22}$$

Por el teorema de Girsanov, sabemos que  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano estándar, bajo la nueva medida de probabilidad  $P^*$ ; además por las propiedades de movimiento

browniano estándar (ver pag. 12),  $W_T - W_t$  es una variable aleatoria que se distribuye como una normal con media cero y varianza  $T - t$ ; por lo tanto, podemos calcular a  $F(t, S_t)$  como sigue

$$F(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} (S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma z \sqrt{T-t}} - K)_+ \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \quad (1.23)$$

donde  $Z$  es una variable aleatoria que se distribuye como una normal estándar (que denotaremos como  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ) y la expresión  $(X)_+$  significa tomar el máximo entre  $X$  y cero. Por último, simplificamos la expresión (1.23), como sigue

$$\begin{aligned} F(t, S_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (S_t e^{\frac{-\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma z \sqrt{T-t}} - K e^{-r(T-t)})_+ \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= \int_{-d_2}^{\infty} (S_t e^{\frac{-\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma z \sqrt{T-t}} - K e^{-r(T-t)}) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= \int_{-d_2}^{\infty} S_t e^{\frac{-\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma z \sqrt{T-t}} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz - \int_{-d_2}^{\infty} K e^{-r(T-t)} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= S_t \mathbf{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2) \end{aligned} \quad (1.24)$$

con

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}, \quad (1.25)$$

y

$$\mathbf{N}(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (1.26)$$

De forma similar, un put estándar europeo con función de pago  $h(S_T) = \max\{K - S_T, 0\}$ , que denotaremos como  $h(S_T) = (K - S_T)_+$ , tiene el siguiente precio

$$\begin{aligned} F(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} (K - S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma z \sqrt{T-t}})_+ \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{-d_2} K e^{-r(T-t)} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz - \int_{-\infty}^{-d_2} (S_t e^{\frac{-\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma z \sqrt{T-t}}) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(-d_2) - S_t \mathbf{N}(-d_1). \end{aligned} \quad (1.27)$$

**Observaciones :**

- ▷ La forma que se emplea para valuar las opciones es conocido como el *principio de valuación neutral al riesgo*, donde  $P^*$  es la probabilidad de riesgo neutro. Este principio establece que podemos suponer que el mundo es neutral al riesgo cuando valuamos opciones; es decir, que las preferencias sobre el riesgo de los inversionistas no influye sobre el precio de la opción.
- ▷ De acuerdo a la ecuación (1.17), el precio de la opción es su beneficio bruto esperado en el mundo neutral al riesgo descontado al tipo de interés libre de riesgo ( $r$ ).
- ▷ La volatilidad ( $\sigma$ ) del activo subyacente es una medida de la incertidumbre sobre los rendimientos del activo subyacente y se puede estimar calculando la desviación estándar de datos históricos del rendimiento del activo subyacente.

## 1.4. Construcción del portafolio de cobertura

Se desea determinar un portafolio combinado de  $\Phi_t^1$  unidades del activo subyacente y una cantidad  $\Phi_t^0$  de dinero que replique, en todo momento, el valor de una opción europea. De esta manera, deseamos determinar  $\Phi_t^1$  y  $\Phi_t^0$  tales que

$$V_t(\Phi) = \Phi_t^0 S_t^0 + \Phi_t^1 S_t = F(t, S_t); \quad t \in [0, T] \quad (1.28)$$

también se supone que en la fecha de vencimiento

$$\Phi_T^0 S_T^0 + \Phi_T^1 S_T = \max\{S_T - K, 0\} \quad (1.29)$$

sin importar la trayectoria que tome al activo subyacente.

**Lema de Ito 1.4.1.** *Consideremos la ecuación diferencial estocástica*

$$dS_t = a(t, S_t)dt + b(t, S_t)dB_t \quad (1.30)$$

donde  $a(t, S_t)$  y  $b(t, S_t)$  son funciones conocidas y  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar.

También consideremos una función  $y = f(t, S_t)$ , con segundas derivadas parciales continuas, la diferencial de  $y = f(t, S_t)$  se calcula de la siguiente manera:

Se considera la expansión en serie de Taylor de  $y = f(t, S_t)$  hasta términos de segundo orden:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t} (dS_t)(dt) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right) \quad (1.31)$$

Sustituyendo (1.30) en (1.31) tenemos

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} [a(t, S_t)dt + b(t, S_t)dB_t] \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} [a^2(t, S_t)(dt)^2 + 2a(t, S_t)b(t, S_t)(dt)(dB_t) + b^2(t, S_t)(dB_t)^2] \right. \\ &\left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t} [a(t, S_t)(dt)^2 + b(t, S_t)(dB_t)(dt)] + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right) \end{aligned}$$

Las reglas básicas de diferenciación estocástica establecen que  $(dt)^2 = 0$ ,  $(dt)(dB_t) = 0$  y  $(dB_t)^2 = dt$ , (ver [9], pág. 68) por lo tanto

$$dy = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t} a(t, S_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} b^2(t, S_t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} b(t, S_t) dB_t \quad (1.32)$$

El resultado (1.32) es conocido como el lema de Ito en su forma diferencial.

Suponiendo que el valor de la opción  $F(t, S_t)$ , tiene segundas derivadas parciales continuas, y recordando que  $dS_t = S_t (r dt + \sigma dW_t)$ , podemos aplicar el lema de Ito para calcular la diferencial de  $F(t, S_t)$ ,

$$dF(t, x) = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \sigma^2 (S_t)^2 \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} dW_t. \quad (1.33)$$

Por otro lado, como  $V_t(\Phi)$  es autofinanciable, satisface

$$\begin{aligned} dV_t(\Phi) &= \Phi_t^0 dS_t^0 + \Phi_t^1 dS_t \\ &= \Phi_t^0 r S_t^0 dt + \Phi_t^1 S_t r dt + \Phi_t^1 S_t \sigma dW_t \\ &= r (\Phi_t^0 dS_t^0 + \Phi_t^1 dS_t) dt + \Phi_t^1 S_t \sigma dW_t \\ &= r F dt + \Phi_t^1 S_t \sigma dW_t. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Si se igualan los coeficientes de (1.33) y (1.34) en  $dW_t$ , se obtiene

$$\Phi_t^1 = \frac{\partial F}{\partial S_t} \quad (1.35)$$

que representa la cantidad de unidades necesarias del activo subyacente para replicar el valor de la opción. También puede interpretarse como la sensibilidad en el precio de la opción con respecto al cambio en el precio del activo subyacente.

Al despejar  $\Phi_t^0$  de (1.28) se sigue que

$$\Phi_t^0 = \frac{F(t, S_t) - \Phi_t^1 S_t}{S_t^0}. \quad (1.36)$$

Por lo tanto (1.35) y (1.36) determinan las cantidades de los activos que conforman el portafolio de cobertura.

De la misma manera, al igualarse los coeficientes de (1.33) y (1.34) en  $dt$  se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial t} + r S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \sigma^2 (S_t)^2 = r F \quad (1.37)$$

que es la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes (ver [9], pág. 225), que tiene como condición final, el valor del portafolio replicante y autofinanciable en la fecha de vencimiento,

$$F(T, S_t) = \text{máx}\{S_t - K, 0\}. \quad (1.38)$$

## 1.5. Griegas de una opción

Las variables relevantes del modelo Black-Scholes que determinan el precio de una opción son; el precio del subyacente  $S_t$ , el tiempo transcurrido en la vida de la opción  $t$ , la volatilidad del activo subyacente  $\sigma$ , el precio de ejercicio  $K$ , la tasa libre de riesgo  $r$  y la fecha de vencimiento  $T$ . Las razones de cambio del precio de la opción, ya sea de compra o venta, con respecto a algunas de las variables relevantes del modelo Black-Scholes se conocen como *griegas* de una opción.

Las griegas de una opción de compra europea cuyo precio denotaremos como (ver (1.24))

$$C(S_t, t, r, \sigma, T, K) = S_t \mathbf{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2),$$

son las siguientes:

- La razón de cambio entre el precio de una opción de compra y el precio del activo subyacente se conoce como *delta*, la cual se denota por

$$\Delta_c = \frac{\partial C}{\partial S_t}$$

y se calcula como:

$$\begin{aligned} \Delta_c &= \frac{\partial}{\partial S_t} \{S_t \mathbf{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2)\} \\ &= \mathbf{N}(d_1) + S_t \mathbf{N}'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S_t} - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S_t} \\ &= \mathbf{N}(d_1) (S_t \mathbf{N}'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}'(d_2)) \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{T-t}} \\ &= \mathbf{N}(d_1). \end{aligned} \tag{1.39}$$

con  $d_1$  y  $d_2$  como en (1.25),  $\mathbf{N}(d)$  como en (1.26) y  $\mathbf{N}'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

- La sensibilidad de la delta de la opción de compra con respecto al precio del activo subyacente se conoce como *gamma* y se denota por

$$\Gamma_c = \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2},$$

la cual se calcula como:

$$\begin{aligned} \Gamma_c &= \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} \{S_t \mathbf{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2)\} \\ &= \frac{\partial}{\partial S_t} \mathbf{N}(d_1) \\ &= \frac{\mathbf{N}'(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

- La tasa de variación del valor de la opción de compra con respecto al paso del tiempo con todo lo demás invariable se conoce como *theta* de una opción y se denota por

$$\Theta_c = \frac{\partial C}{\partial t}$$

y se calcula mediante

$$\begin{aligned} \Theta_c &= \frac{\partial}{\partial t} \{S_t \mathbf{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2)\} \\ &= S_t \mathbf{N}'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial t} - K r e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2) - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial t} \\ &= -\frac{S_t \sigma \mathbf{N}'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - K r e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2). \end{aligned} \tag{1.41}$$

- La razón de cambio del precio de una opción con respecto a la tasa de interés, se denota por

$$\rho_c = \frac{\partial C}{\partial r}$$

y está dada por

$$\begin{aligned} \rho_c &= \frac{\partial}{\partial r} \{S_t \mathbf{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2)\} \\ &= S_t \mathbf{N}'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} + K (T-t) e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2) - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r} \\ &= K (T-t) e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2) + (S_t \mathbf{N}'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}'(d_2)) \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} \\ &= K (T-t) e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2). \end{aligned} \quad (1.42)$$

- Por último, la variación del valor de la opción europea con respecto a la volatilidad del activo subyacente, se denota por

$$\nu_c = \frac{\partial C}{\partial \sigma},$$

se lee la *vega* de la opción y se calcula como

$$\begin{aligned} \nu_c &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \{S_t \mathbf{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2)\} \\ &= S_t \mathbf{N}'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\ &= S_t \mathbf{N}'(d_1) \sqrt{T-t} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Las griegas de una opción de venta europea cuyo precio denotaremos como (ver (1.27))

$$P(S_t, t, \sigma, r, T, K) = K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(-d_2) - S_t \mathbf{N}(-d_1),$$

son; delta  $\Delta_p$ , gamma  $\Gamma_p$ , rho  $\rho_p$ , theta  $\Theta_p$  y vega  $\nu_p$ , donde el subíndice  $p$  denota que son las griegas de una opción de venta y están dadas por

$$\Delta_p = \mathbf{N}(d_1) - 1.$$

$$\Gamma_p = \frac{\mathbf{N}'(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}.$$

$$\rho_p = -K (T-t) e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(-d_2)$$

$$\Theta_p = -\frac{S_t \sigma \mathbf{N}'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + K r e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(-d_2).$$

$$\nu_p = S_t \mathbf{N}'(d_1) \sqrt{T-t}.$$

donde  $d_1$  y  $d_2$  se definieron en (1.25),  $\mathbf{N}(d)$  se muestra en (1.26) y  $\mathbf{N}'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

**Ejemplo 1.1.** Consideremos una opción de compra europea con los siguientes datos: Precio del activo subyacente  $S_0 = 19.08$ , precio de ejercicio  $K = 19.5$ , volatilidad igual al 17.25% anual, la tasa libre de riesgo es del 7% anual y la opción expira en 1.5 meses.

De acuerdo a (1.24), el valor de la opción en el tiempo  $t$  es

$$C(S_t, t, r, \sigma, T, K) = S_t \mathbf{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2)$$

con

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

así;

$$d_1 = \frac{\ln(19.08/19.5) + (0.07 + \frac{0.1725^2}{2})(0.125)}{0.1725 \sqrt{0.125}} = -0.18305308$$

$$d_2 = -0.18305308 - 0.1725 \sqrt{0.125} = -0.24404104$$

$$\begin{aligned} C(19.08, 0, 0.07, 0.1725, 0.125, 19.5) &= 19.08 (0.42737819) - 19.5 e^{-0.07(0.125)} (0.40359956) \\ &= 0.35274816 \end{aligned}$$

El valor de la opción es 0.35274816, para calcular la cobertura tenemos

$$\Phi_t^1 = \Delta_c = 0.42737819$$

$$\begin{aligned} \Phi_t^0 &= \frac{C - \Phi_t^1 S_t}{S_t^0} \\ &= \frac{0.35274816 - (0.42737819)(19.08)}{e^{0.07(0.125)}} \\ &= -7.7336611 \end{aligned}$$

El portafolio que replica el valor de la opción está formada por 0.42737819 unidades del activo subyacente y un préstamo de 7.7336611. Así quien emite la opción, debe cubrirse del riesgo a través de un préstamo de 7.7336611 y comprando 0.42737819 unidades de activo subyacente, ésta es la estrategia de cobertura inicial, la cual se debe ajustar continuamente de acuerdo a los movimientos del precio del subyacente.

El valor de las griegas para esta opción en  $t = 0$ , se obtienen enseguida

$$\begin{aligned}\Delta_c &= \mathbf{N}(d_1) \\ &= 0.42737819\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_c &= \frac{\mathbf{N}'(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2}}{(19.08)(0.1725)\sqrt{0.125}} \\ &= 0.33714081\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_c &= K(T-t)e^{-r(T-t)}\mathbf{N}(d_2) \\ &= (19.5)(0.125)(0.40359956)e^{-0.07(0.125)} \\ &= 0.97520335\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_c &= -\frac{S_t \sigma \mathbf{N}'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - K r e^{-r(T-t)}\mathbf{N}(d_2) \\ &= \frac{(19.08)(0.1725)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2}}{2\sqrt{0.125}} - (19.5)(0.07)(0.40359956)e^{-0.07(0.125)} \\ &= -2.3721790\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu_c &= S_t \mathbf{N}'(d_1)\sqrt{T-t} \\ &= (19.08)\sqrt{0.125}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} \\ &= 2.6464712\end{aligned}$$

# Capítulo 2

## Cobertura por Monte-Carlo

En este capítulo se tratan las características del estimador de una esperanza dado por el método de Monte-Carlo y se desarrollan métodos para estimar sensibilidades de esperanzas. En particular, se sabe que el valor de una opción se reduce al cálculo del valor esperado de la función de pago de la opción descontada y que las griegas miden la sensibilidad del precio de la opción con respecto al cambio en parámetros como el precio del subyacente, el tiempo  $t$ , la tasa de interés  $r$  y la volatilidad del subyacente  $\sigma$ , por lo que los métodos desarrollados en este capítulo van enfocados al cálculo de estas sensibilidades. Nuestro particular interés en el caso de las opciones es establecer una estrategia de cobertura; para esto es necesario conocer la  $\Delta$  de la opción; sin embargo, como ya se sabe para algunos tipos de opciones no es posible calcular el valor exacto de la cobertura, por lo que se espera que los métodos desarrollados en este capítulo sean una alternativa para estimarla. Los métodos para estimar la sensibilidad de una esperanza que se tratan en este capítulo son: el método de diferencias finitas y el método de perturbación infinitesimal.

### 2.1. Método de Monte-Carlo

Un *estimador* es una aproximación al valor de un parámetro de interés que se calcula a partir de la información que contiene una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Algunas características de un estimador son las siguientes:

- Si  $\hat{\alpha}$  es un estimador del parámetro  $\alpha$ , entonces  $\hat{\alpha}$  es un estimador *insesgado* si el valor esperado del estimador es igual al parámetro de interés; es decir, si  $E[\hat{\alpha}] = \alpha$ .

De lo contrario, se dice que  $\hat{\alpha}$  es *sesgado*.

- El *sesgo* de un estimador  $\hat{\alpha}$ , que denotaremos como  $\text{sesgo}[\hat{\alpha}]$ , está determinado por

$$\text{sesgo}[\hat{\alpha}] = E[\hat{\alpha}] - \alpha. \quad (2.1)$$

Es claro que un estimador insesgado tiene sesgo igual a cero.

- El error cuadrático medio de un estimador  $\hat{\alpha}$ , que denotaremos como  $MSE$ , es el valor esperado de el cuadrado de la distancia entre el estimador  $\hat{\alpha}$  y el parámetro  $\alpha$ ; es decir,

$$MSE[\hat{\alpha}] = E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2]. \quad (2.2)$$

El error cuadrático medio de un estimador, es una función de su varianza y de su sesgo. Si  $Var[\hat{\alpha}]$  denota la varianza del estimador  $\hat{\alpha}$  entonces, podemos escribir que:

$$MSE[\hat{\alpha}] = Var[\hat{\alpha}] + (\text{sesgo}[\hat{\alpha}])^2. \quad (2.3)$$

Por lo general, se buscan estimadores que sean insesgados y que la varianza del mismo sea lo más pequeña posible; es decir, que tengan el error cuadrático medio lo más pequeño posible.

El método de Monte-Carlo se basa en el hecho de que un estimador del valor esperado de una variable aleatoria con distribución  $F$  se obtiene a partir del promedio de los valores que toman variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución  $F$ . Matemáticamente se precisa esta idea a través de la ley de los grandes números.

**Ley fuerte de los grandes números 2.1.1.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad y sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con*

$$\mu = E[X_i] < \infty.$$

*Entonces se cumple que*

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) = \mu\right\}\right) = 1.$$

La Ley de los grandes números indica que para una variable aleatoria  $X$  con distribución  $F$  y una muestra de variables aleatorias de tamaño  $n$ , independientes e idénticamente distribuidas con distribución  $F$ , se cumple que

$$E[ X ] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

con  $n$  finita y lo suficientemente grande. Es decir, la media muestral es aproximadamente el valor esperado de la variable aleatoria  $X$ .

En general para una función  $G(x)$  continua con  $X$  una variable aleatoria con distribución  $F$ . Se cumple que

$$E[ G(x) ] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G(X_i)$$

donde las  $X_i$  son variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas con distribución  $F$ . De aquí en adelante se denotara a

$$\bar{G}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G(X_i)$$

El estimador  $\bar{G}(X)$  es insesgado ya que

$$\begin{aligned} E[ \bar{G}(X) ] &= E \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G(X_i) \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[ G(X_i) ] \\ &= E[ G(X) ] \end{aligned}$$

y la varianza es:

$$Var[ \bar{G}(X) ] = Var \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G(X_i) \right],$$

como la varianza de una suma de variables aleatorias independientes es la suma de las varianzas (ver [6], pág. 255 ), tenemos

$$\begin{aligned} Var[ \bar{G}(X) ] &= \sum_{i=1}^n Var \left[ \frac{1}{n} G(X_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} Var[ G(X_i) ] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[ G(X_i) ] \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

donde  $\sigma^2 = \text{Var}[G(X)]$ .

Por lo tanto, el error cuadrático medio de  $\bar{G}(X)$  es:

$$MSE[\bar{G}(X)] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Cuando  $\text{Var}[G(X)] = \sigma^2$  es desconocida, podemos estimarla por medio del siguiente estimador insesgado:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (G(X_i) - \bar{G}(X))^2.$$

Por último, por el Teorema del límite central, para un valor de  $n$  lo suficientemente grande,  $\bar{G}(X)$  se distribuye como una normal con media  $E[\bar{G}(X)]$  y varianza  $\sigma^2/n$ .

Por lo que podemos construir un intervalo de confianza al 95 % como sigue:

$$\left[ \bar{G}(X) + \frac{c \hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{G}(X) - \frac{c \hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$$

con  $c \approx 1.96$  y  $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$ .

El intervalo está en función de  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ; esto quiere decir, que para aumentar la exactitud del estimador por diez veces, será necesario aumentar por 100 veces el tamaño de la muestra. Sin embargo, el tiempo requerido para el cálculo se incrementará.

### 2.1.1. Aplicación del método de Monte-Carlo en la valuación de opciones.

Como ya se mencionó el valor de una opción es la esperanza condicional de la función de pago de la opción descontada; es decir,

$$V_t = E^*[e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t].$$

donde  $E^*[X|\mathcal{F}_t]$  denota la esperanza condicional de la variable aleatoria  $X$ , dado  $\mathcal{F}_t$ , bajo la medida de probabilidad  $P^*$ , conocida como la probabilidad de riesgo neutro (ver Capítulo 1).

En particular, una opción europea con fecha de vencimiento  $T$ , la tasa libre de riesgo  $r$  y con función de pago igual a  $h(S_T) = (S_T - K)_+$ , tendrá un precio igual a (ver (1.22))

$$V_0 = E^*[e^{-rT}(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T} + \sigma(W_T - W_0) - K)_+]. \quad (2.4)$$

Por otro lado, el método de Monte-Carlo permite estimar la esperanza de una variable aleatoria, así cuando no es posible calcular de forma exacta el valor de una opción, éste puede ser estimado mediante el método de Monte-Carlo.

Por el método de Monte-Carlo un estimador del valor de una opción de compra europea es

$$\widehat{V}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-rT} (S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y_i \sqrt{T}} - K)_+ \quad (2.5)$$

con las  $y_i$  variables aleatorias independientes y distribuidas como una normal estándar.

A continuación se presentan los resultados numéricos obtenidos de estimar el precio de un call europeo con los siguientes datos: Precio del activo subyacente  $S_0 = 19.08$ , precio de ejercicio  $K = 19.5$ , volatilidad igual al 17.25 % anual, la tasa libre de riesgo es del 7 % anual y la opción expira en 1.5 meses.

n	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud
1000	0.314628417	0.353298400	0.391968383	0.077339965
10000	0.342591393	0.354711029	0.366830665	0.024239272
100000	0.351385528	0.355230707	0.359075887	0.007690359
1000000	0.352102509	0.353317061	0.354531612	0.002429103

Estimación por Monte-Carlo para diferentes valores de  $n$  del precio de un call europeo cuyo valor teórico a 8 dígitos es 0.35274816.

## 2.2. Método de diferencias finitas

Consideremos una variable aleatoria  $Y(\theta)$  que depende del parámetro  $\theta$  y consideremos

$$\alpha(\theta) = E[Y(\theta)], \quad (2.6)$$

nuestro interés es estimar la sensibilidad de  $E[Y(\theta)]$  con respecto a cambios en el valor de  $\theta$ , por lo que necesitamos establecer un mecanismo para estimar la derivada de  $\alpha$  con respecto a  $\theta$ , la cual denotaremos como  $\alpha'(\theta)$ ; siendo

$$\alpha'(\theta) = \frac{d}{d\theta} E[Y(\theta)].$$

El método de diferencias finitas estima a  $\alpha'(\theta)$  a través de la aproximación de  $\frac{d}{d\theta}E[Y(\theta)]$  por medio de un cociente que involucra la estimación de  $E[Y(\theta)]$  para dos o más valores de  $\theta$ .

Las características de estos estimadores dependen de si utilizamos diferencias finitas hacia adelante o centradas y de cómo se realiza la simulación. Son estas características las que se analizan a continuación.

### 2.2.1. Estimador por diferencias hacia adelante

El método de diferencias finitas hacia adelante involucra la estimación de  $E[Y(\theta)]$  y de  $E[Y(\theta + h)]$  para alguna  $h > 0$ . Como ya se sabe, por el método de Monte-Carlo un estimador insesgado de  $E[Y(\theta)]$  es:

$$\bar{Y}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(\theta) \quad (2.7)$$

donde  $Y_1(\theta), Y_2(\theta), \dots, Y_n(\theta)$  son una muestra aleatoria de tamaño  $n$ , independiente e idénticamente distribuida y  $\bar{Y}_n(\theta)$  representa la media muestral de una muestra de tamaño  $n$ . Así mismo, un estimador insesgado de  $E[Y(\theta + h)]$  es

$$\bar{Y}_n(\theta + h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(\theta + h) \quad (2.8)$$

con las  $Y_i(\theta + h)$  independientes e idénticamente distribuidas.

De esta manera, el estimador de  $\alpha'(\theta)$  por el método diferencias finitas hacia adelante combinado con Monte-Carlo, que denotaremos como  $\hat{\Delta}_F(n, h)$ , se define como sigue (ver [2], pág 378)

$$\hat{\Delta}_F(n, h) = \frac{\bar{Y}_n(\theta + h) - \bar{Y}_n(\theta)}{h} \quad (2.9)$$

el cual tiene esperanza

$$E[\hat{\Delta}_F(n, h)] = h^{-1}[\alpha(\theta + h) - \alpha(\theta)]. \quad (2.10)$$

Por otro lado, si  $\alpha$  es dos veces diferenciable en  $\theta$ ,

$$\alpha(\theta + h) = \alpha(\theta) + \alpha'(\theta)h + \frac{1}{2}\alpha''(\theta)h^2 + o(h^3). \quad (2.11)$$

Por definición,  $o(h^n)$  satisface que  $\frac{o(h^n)}{h^n}$  tiende a una constante cuando  $h \rightarrow 0$ . Así mismo, de (2.11) tenemos

$$\alpha'(\theta) = \frac{\alpha(\theta + h)}{h} - \frac{\alpha(\theta)}{h} - \frac{1}{2}\alpha''(\theta)h - o(h^2). \quad (2.12)$$

De (2.10) y (2.12), el sesgo de  $\widehat{\Delta}_F$  está dado por

$$\begin{aligned} \text{sesgo} [\widehat{\Delta}_F(n, h)] &= E[\widehat{\Delta}_F - \alpha'(\theta)] \\ &= \frac{1}{2}\alpha''(\theta)h + o(h^2) \end{aligned} \quad (2.13)$$

y la varianza de  $\widehat{\Delta}_F$  es:

$$Var[\widehat{\Delta}_F(n, h)] = h^{-2}Var[\bar{Y}_n(\theta + h) - \bar{Y}_n(\theta)]. \quad (2.14)$$

Si se considera que las parejas  $(Y_i(\theta), Y_i(\theta + h))$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$  son independientes e idénticamente distribuidas, de (2.14) se tiene que

$$\begin{aligned} Var[\widehat{\Delta}_F(n, h)] &= \frac{1}{nh^2}Var[Y(\theta + h) - Y(\theta)] \\ &= \frac{1}{nh^2} \left\{ Var[Y(\theta + h)] - 2Cov[Y(\theta + h), Y(\theta)] + Var[Y(\theta)] \right\} \end{aligned}$$

donde  $Cov[X, Z]$  denota la covarianza de  $X$  y  $Z$ .

La varianza de  $\widehat{\Delta}_F$  depende de la forma en que se realiza la simulación de  $Y(\theta)$  y de  $Y(\theta + h)$ , por lo que se definen los siguientes estimadores:

$\widehat{\Delta}_{F_I}$ : Denota el estimador de diferencias finitas hacia adelante cuando la simulación de  $Y(\theta)$  es independiente de  $Y(\theta + h)$ . El subíndice  $I$  denota simulación independiente.

$\widehat{\Delta}_{F_D}$ : Es el estimador de diferencias finitas hacia adelante que usa números aleatorios comunes en la simulación de  $Y(\theta)$  y de  $Y(\theta + h)$ ; es decir, números generados de la misma secuencia  $U_1, U_2, \dots, U_n$  de variables aleatorias uniformemente distribuidas; por otro lado, también es necesario que  $Y(\theta)$  cumpla con algunas propiedades mencionadas más adelante. El subíndice  $D$  denota simulación con números aleatorios comunes.

Con respecto al estimador  $\widehat{\Delta}_{F_I}$ , como la simulación de  $Y(\theta)$  es independiente de  $Y(\theta + h)$ ,

la covarianza entre ellas es cero, por lo que se puede decir que la varianza de este estimador es:

$$\text{Var}[\widehat{\Delta}_{F_I}(n, h)] \approx \frac{2\text{Var}[Y(\theta)]}{nh^2}. \quad (2.15)$$

Donde se utiliza el hecho de que  $\text{Var}[Y(\theta + h)] \approx \text{Var}[Y(\theta)]$ .

Sea  $2\text{Var}[Y(\theta)] = \sigma_{F_I}^2$ , entonces

$$\text{Var}[\widehat{\Delta}_{F_I}(n, h)] \approx \frac{\sigma_{F_I}^2}{nh^2}. \quad (2.16)$$

Así, el error cuadrático medio de  $\widehat{\Delta}_{F_I}(n, h)$  es:

$$\text{MSE}[\widehat{\Delta}_{F_I}(n, h)] \approx \frac{1}{4}(\alpha''(\theta))^2 h^2 + \frac{\sigma_{F_I}^2}{nh^2} \quad (2.17)$$

éste depende tanto de  $h$  como de  $n$ , (el tamaño de muestra).

En el caso del estimador  $\widehat{\Delta}_{F_D}$ , sólo es posible calcularlo cuando no sólo usamos números aleatorios comunes en la simulación de  $Y(\theta)$  y  $Y(\theta + h)$ , sino que también para (casi) todos los números aleatorios utilizados el siguiente límite existe con probabilidad 1 (ver el Teorema 2.3.1, pág. 47)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h} \quad (2.18)$$

y  $Y(\theta)$  es continua.

De esta manera, la varianza del estimador  $\widehat{\Delta}_{F_D}$  es

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{\Delta}_{F_D}(n, h)] &= \frac{1}{nh^2} \text{Var}[Y(\theta + h) - Y(\theta)] \\ &= \frac{h^2}{nh^2} \text{Var}\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h}\right] \\ &= \frac{\text{Var}[Y'(\theta)]}{n}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Sea  $\sigma_{F_D}^2 = \text{Var}[Y'(\theta)]$ , entonces

$$\text{Var}[\widehat{\Delta}_{F_D}(n, h)] = \frac{\sigma_{F_D}^2}{n}. \quad (2.20)$$

Por lo tanto, el error cuadrático medio de  $\widehat{\Delta}_{F_D}$  es

$$\text{MSE}[\widehat{\Delta}_{F_D}(n, h)] \approx \frac{1}{4}(\alpha''(\theta))^2 h^2 + \frac{\sigma_{F_D}^2}{n} \quad (2.21)$$

donde sólo el sesgo del estimador depende del valor de  $h$ .

### 2.2.2. Estimador por diferencias centradas

El estimador por diferencias centradas que denotaremos como  $\widehat{\Delta}_C$  involucra la estimación de  $E[Y(\theta + h)]$  y de  $E[Y(\theta - h)]$  para  $h > 0$ . Para esto, consideremos el siguiente estimador insesgado de  $E[Y(\theta + h)]$ :

$$\bar{Y}_n(\theta + h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(\theta + h) \quad (2.22)$$

donde las  $Y_i(\theta + h)$  son una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida. De igual manera, un estimador insesgado de  $E[Y(\theta - h)]$  es:

$$\bar{Y}_n(\theta - h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(\theta - h) \quad (2.23)$$

con las  $Y_i(\theta - h)$  independientes e idénticamente distribuidas.

De esta manera, el estimador de  $\alpha'(\theta)$  por diferencias centradas combinado con Monte-Carlo se define como (ver [2], pág. 379):

$$\widehat{\Delta}_C(n, h) = \frac{\bar{Y}_n(\theta + h) - \bar{Y}_n(\theta - h)}{2h} \quad (2.24)$$

el cual tiene esperanza:

$$E[\widehat{\Delta}_C(n, h)] = \frac{[\alpha(\theta + h) - \alpha(\theta - h)]}{2h}.$$

Si  $\alpha$  es dos veces diferenciable en una vecindad de  $\theta$ , el sesgo de  $\widehat{\Delta}_C$  es

$$\text{sesgo}[\widehat{\Delta}_C(n, h)] = E[\widehat{\Delta}_C - \alpha'(\theta)] = \frac{[\alpha(\theta + h) - \alpha(\theta - h)]}{2h} - \alpha'(\theta) = o(h^2)$$

el cual es claramente de menor orden que el sesgo de  $\widehat{\Delta}_F$ ; aún mas, si  $\alpha$  es dos veces diferenciable en  $\theta$  podemos escribir el sesgo de  $\widehat{\Delta}_C$  como

$$\text{sesgo}[\widehat{\Delta}_C(n, h)] = \frac{1}{6}\alpha^{(3)}(\theta)h^2 + o(h^3) \quad (2.25)$$

donde,  $\alpha^{(n)}$  denota la n-ésima derivada de  $\alpha$  con respecto a  $\theta$ .

Otra característica de  $\widehat{\Delta}_C$  es que tiene la siguiente varianza

$$\text{Var}[\widehat{\Delta}_C(n, h)] = \frac{\text{Var}[\overline{Y}_n(\theta + h) - \overline{Y}_n(\theta - h)]}{4h^2}. \quad (2.26)$$

Si las parejas  $(Y_i(\theta + h), Y_i(\theta - h))$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  son independientes e idénticamente distribuidas, de (2.26) tenemos que

$$\text{Var}[\widehat{\Delta}_C(n, h)] = \frac{1}{4nh^2} \text{Var}[Y(\theta + h) - Y(\theta - h)]. \quad (2.27)$$

Al igual que en el caso del estimador por diferencias hacia adelante, la varianza de  $\widehat{\Delta}_C$  depende de cómo se realiza la simulación, por lo que también se definen los siguientes estimadores:

$\widehat{\Delta}_{C_I}$ : Denota el estimador de diferencias centradas cuando la simulación de  $Y(\theta + h)$  es independiente de  $Y(\theta - h)$ .

$\widehat{\Delta}_{C_D}$ : Es el estimador de diferencias centradas que utiliza números aleatorios comunes en la simulación de  $Y(\theta + h)$  y de  $Y(\theta - h)$ ; además  $Y(\theta)$  cumple con las propiedades que se mencionaron para el estimador  $\widehat{\Delta}_{F_D}$  (ver pág. 33).

Para el estimador  $\widehat{\Delta}_{C_I}$ , al realizar la simulación de  $Y(\theta + h)$  independientemente de  $Y(\theta - h)$ , tenemos que la varianza de  $\widehat{\Delta}_{C_I}$  es

$$\text{Var}[\widehat{\Delta}_{C_I}(n, h)] \approx \frac{2\text{Var}[Y(\theta)]}{4nh^2}. \quad (2.28)$$

Donde se utiliza el hecho de que  $\text{Var}[Y(\theta + h)] \approx \text{Var}[Y(\theta)]$  y que  $\text{Var}[Y(\theta - h)] \approx \text{Var}[Y(\theta)]$ .

Sea  $\sigma_{C_I}^2 = \frac{\text{Var}[Y(\theta)]}{2}$ , de manera que

$$\text{Var}[\widehat{\Delta}_{C_I}(n, h)] \approx \frac{\sigma_{C_I}^2}{nh^2}. \quad (2.29)$$

De las expresiones (2.25) y (2.29), se obtiene que el error cuadrático medio de  $\widehat{\Delta}_{C_I}$  es;

$$\text{MSE}[\widehat{\Delta}_{C_I}(n, h)] \approx \frac{1}{36}(\alpha^{(3)}(\theta))^2 h^4 + \frac{\sigma_{C_I}^2}{nh^2} \quad (2.30)$$

donde, el error cuadrático medio del estimador  $\widehat{\Delta}_{C_I}(n, h)$  es menor que el error cuadrático medio de  $\widehat{\Delta}_{F_I}(n, h)$ .

El último estimador a considerar es  $\widehat{\Delta}_{C_D}$ ; este estimador depende de la existencia del siguiente límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta - h)}{2h} \quad (2.31)$$

y también se requiere que  $Y(\theta)$  sea continua.

Partiendo del hecho de que el límite (2.31) existe, podemos calcular la varianza del estimador  $\widehat{\Delta}_{C_D}$  como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{\Delta}_{C_D}(n, h)] &= \frac{1}{4nh^2} \text{Var}[Y(\theta + h) - Y(\theta - h)] \\ &= \frac{h^2}{nh^2} \text{Var}\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta - h)}{2h}\right] \\ &= \frac{\text{Var}[Y'(\theta)]}{n} \end{aligned} \quad (2.32)$$

haciendo  $\sigma_{C_D}^2 = \text{Var}[Y'(\theta)]$ , tenemos

$$\text{Var}[\widehat{\Delta}_{C_D}(n, h)] = \frac{\sigma_{C_D}^2}{n} \quad (2.33)$$

en consecuencia,

$$\text{MSE}[\widehat{\Delta}_{C_D}(n, h)] \approx \frac{1}{36}(\alpha^{(3)}(\theta))^2 h^4 + \frac{\sigma_{C_D}^2}{n} \quad (2.34)$$

donde, el sesgo depende de  $h$ , pero no la varianza.

Todos los estimadores que se han mencionado son asintóticamente insesgados; es decir, si se hace  $h$  tender a 0, el sesgo también lo hace.

De las características de los estimadores mencionados, se observa que la precisión de los mismos, depende de los valores de  $n$  y  $h$ . Al observar el error cuadrático medio de los estimadores es claro que a un mayor tamaño de muestra; es decir, a un valor mayor de  $n$  el error cuadrático medio disminuye y la precisión de los estimadores mejora. Sin embargo, al utilizar los estimadores  $\widehat{\Delta}_{F_I}$  y  $\widehat{\Delta}_{C_I}$ , no es tan fácil determinar el valor de  $h$ , esto se debe a que si bien un valor muy pequeño de  $h$  reduce el sesgo del estimador, este mismo valor incrementa la varianza del estimador. Por otro lado, si quisiéramos encontrar el valor óptimo de  $h$  que minimice el error cuadrático medio, este valor estaría en términos de constantes como  $\sigma_{F_I}^2$ ,  $\sigma_{C_I}^2$  y del valor de  $\alpha''$  o  $\alpha^{(3)}$ . Es éste uno de los inconvenientes que presentan los estimadores por diferencias finitas. Sólo al utilizar los estimadores  $\widehat{\Delta}_{F_D}$  y  $\widehat{\Delta}_{C_D}$  se tiene la seguridad de poder tomar  $h$  tan pequeña como sea posible; ya que sólo el sesgo de estos estimadores depende del valor de  $h$ ; sin embargo, presentan el inconveniente

de ser aplicables sólo cuando  $Y(\theta)$  es continua. Estos estimadores son asintóticamente insesgados y su  $MSE \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$  y  $n \rightarrow \infty$ . Más adelante se verá el efecto de variar el valor de  $h$  y  $n$  en la precisión de los estimadores.

### 2.2.3. Cálculo de la delta de una opción por diferencias finitas

En este apartado se presenta un ejemplo del cálculo de la  $\Delta$  de una opción europea por el método de diferencias finitas, específicamente el ejemplo abordado en el Capítulo 1, para el cual se obtuvo un valor exacto, esto nos permitirá comparar la eficiencia de los estimadores por diferencias finitas.

Para el caso de las opciones y de acuerdo a la notación desarrollada en la sección 2.2;  $Y(\theta)$  será la función de pago de la opción descontada,  $\alpha(\theta)$  es la esperanza de la función de pago de la opción descontada; es decir, es el precio de la opción, por lo que a partir de aquí utilizaremos  $V(\theta)$  en lugar de  $\alpha(\theta)$ . Por otro lado,  $\theta$  puede ser cualquiera de los parámetros que están involucrados en el valor de la opción. Así  $\theta$  puede ser el precio del activo subyacente, por consiguiente  $V'(\theta)$  sería la  $\Delta$  de la opción y  $V''(\theta)$  sería la  $\Gamma$  de la opción. De manera similar  $\theta$  puede ser la volatilidad  $\sigma$ , la tasa de interés  $r$  o el tiempo  $t$ .

De acuerdo al Capítulo 1 el valor de la opción de compra europea con función de pago  $h(S_T) = \max\{S_T - K, 0\}$ , es de la forma (ver 1.22)

$$V_0 = E^* [ e^{-rT} (S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y \sqrt{T}} - K)_+ ]$$

con  $y$  una variable aleatoria normal estándar.

Por otro lado, de acuerdo a la notación del método de diferencias finitas,

$$\begin{aligned} Y(S_T) &= e^{-rT} h(S_T) \\ &= e^{-rT} (S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y \sqrt{T}} - K)_+ \end{aligned}$$

y el parámetro  $\theta = S_0$ , por consiguiente la derivada del precio de la opción con respecto al precio del subyacente  $V'_0(S_0)$  es la  $\Delta$  de la opción.

De lo anterior, el primer estimador de la  $\Delta$  de la opción por diferencias finitas hacia adelante con  $Y(S_0 + h)$  y  $Y(S_0)$  simulados independientemente es

$$\widehat{\Delta}_{FI}(n, h) = \frac{\bar{Y}_n(S_0 + h) - \bar{Y}_n(S_0)}{h}$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{Y}_n(S_0 + h) &= \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(S_0 + h) \\ &= \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=1}^n ((S_0 + h)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma y_i \sqrt{T}} - K)_+\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\bar{Y}_n(S_0) &= \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(S_0) \\ &= \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=1}^n (S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma z_i \sqrt{T}} - K)_+\end{aligned}$$

con  $z_i$  y  $y_i$  variables aleatorias normales estándar e independientes.

Como en este caso, la función de pago descontada  $Y(S_T)$  es continua, podemos calcular el segundo estimador de diferencias hacia adelante utilizando números aleatorios comunes como sigue:

$$\hat{\Delta}_{FD}(n, h) = \frac{\bar{Y}_n(S_0 + h) - \bar{Y}_n(S_0)}{h}$$

con

$$\bar{Y}_n(S_0 + h) = \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=1}^n ((S_0 + h)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma y_i \sqrt{T}} - K)_+$$

y

$$\bar{Y}_n(S_0) = \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=1}^n (S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma y_i \sqrt{T}} - K)_+.$$

Observemos que la sucesión de variables aleatorias  $y_1, y_2, \dots, y_n$  es la misma en  $\bar{Y}_n(S_0 + h)$  y  $\bar{Y}_n(S_0)$ .

El otro estimador es el de diferencias finitas centradas con  $Y(S_0 - h)$  y  $Y(S_0 + h)$  simulados independientemente

$$\hat{\Delta}_{CI}(n, h) = \frac{\bar{Y}_n(S_0 + h) - \bar{Y}_n(S_0 - h)}{2h}$$

donde

$$\bar{Y}_n(S_0 + h) = \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=1}^n ((S_0 + h)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma y_i \sqrt{T}} - K)_+$$

y

$$\bar{Y}_n(S_0 - h) = \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=1}^n ((S_0 - h)e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma z_i \sqrt{T}} - K)_+$$

con  $y_i$  y  $z_i$  variables aleatorias normales estándar e independientes.

El último estimador se obtiene al aplicar diferencias centradas utilizando números aleatorios comunes y tomando en cuenta que la función de pago descontada de la opción  $Y(S_T)$  es continua:

$$\hat{\Delta}_{CD}(n, h) = \frac{\bar{Y}_n(S_0 + h) - \bar{Y}_n(S_0 - h)}{2h}$$

donde  $\bar{Y}_n(S_0 + h)$  y  $\bar{Y}_n(S_0 - h)$  se definen como en el estimador anterior, pero en este caso la sucesión de variables  $z_i$  es la misma que  $y_i$ .

**Ejemplo 2.2.1.** *Consideremos una opción de compra europea con los siguientes datos: Precio del activo subyacente  $S_0 = 19.08$ , precio de ejercicio  $K = 19.5$ , volatilidad igual al 17.25 % anual, la tasa libre de riesgo es del 7 % anual y la opción expira en 1.5 meses.*

A continuación se presentan los resultados numéricos que se obtuvieron al estimar la  $\Delta$  de ésta opción europea a través de los estimadores de diferencias finitas utilizando diferentes valores de  $h$ . De acuerdo a cada uno de los cuadros; en la primer columna se dan los valores de  $h$  que se utilizaron para calcular  $Y(S_0 + h)$  y  $Y(S_0 - h)$ ; en la segunda columna se muestra  $n$  que representa el número de trayectorias de  $Y(S_0)$ ,  $Y(S_0 + h)$  y  $Y(S_0 - h)$  que se realizaron para calcular  $\bar{Y}_n(S_0)$ ,  $\bar{Y}_n(S_0 + h)$  y  $\bar{Y}_n(S_0 - h)$ , respectivamente. Se construyó un intervalo de confianza al 95 % por lo que en la tercer columna se muestra el límite inferior del intervalo, en la cuarta columna se encuentra el valor del estimador para un valor de  $h$  y  $n$ ; así en la quinta columna tenemos el límite superior del intervalo. La longitud del intervalo se muestra en la sexta columna y en la última columna tenemos el tiempo utilizado por la computadora al calcular la estimación de delta dados un valor de  $n$  y  $h$ . Los resultados fueron obtenidos empleando Matlab 6.5, en una computadora PC con procesador Pentium IV de 1.60 GHz.

Cuadro 2.1: Resultados del estimador de delta,  $\widehat{\Delta}_{F_I}(n, h)$ 

h	n	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
0.01	$10^3$	-2.80987424	2.34360439	7.49708303	10.3069570	0.11
	$10^4$	-1.67269985	0.04935070	1.77140126	3.44410112	1.09
	$10^5$	0.18879031	0.73383894	1.27888757	1.09009725	11.1
	$10^6$	0.24360245	0.41598930	0.58837615	0.34477369	109
0.03	$10^3$	-1.07004343	0.66774017	2.40552378	3.47556722	0.11
	$10^4$	0.18701513	0.75524811	1.32348109	1.13646595	1.09
	$10^5$	0.24514849	0.42856546	0.61198244	0.36683394	13.2
	$10^6$	0.35307337	0.41077147	0.46846956	0.11539618	109
0.04	$10^3$	-0.74617280	0.62761848	2.00140977	2.74758258	0.11
	$10^4$	0.21856356	0.65225508	1.08594659	0.86738300	1.09
	$10^5$	0.26700576	0.40442125	0.54183673	0.27483097	10.8
	$10^6$	0.41677709	0.45165719	0.48653730	0.06976021	118
0.05	$10^3$	-0.42057298	0.61185039	1.64427377	2.06484675	0.11
	$10^4$	0.07830745	0.43096167	0.78361589	0.70530843	1.20
	$10^5$	0.31368069	0.42363610	0.53359150	0.21991080	11.1
	$10^6$	0.40637044	0.43551621	0.46466198	0.05829154	110
$h^* =$ 0.057	$10^3$	-0.50187815	0.48253163	1.46694141	1.96881957	0.11
	$10^4$	0.22678292	0.53110669	0.83543047	0.60864755	1.03
	$10^5$	0.41874069	0.51561959	0.61249848	0.19375778	10.8
	$10^6$	0.40481248	0.43544421	0.46607593	0.06126345	111
0.06	$10^3$	-0.51852957	0.41477578	1.34808113	1.86661070	0.11
	$10^4$	0.24574883	0.53546282	0.82517681	0.57942797	1.10
	$10^5$	0.35378950	0.44593555	0.53808160	0.18429209	13.6
	$10^6$	0.38751013	0.41661604	0.44572195	0.05821182	117
0.1	$10^3$	-0.29869447	0.25345394	0.80560236	1.10429684	0.11
	$10^4$	0.46061688	0.63859656	0.81657624	0.35595935	1.09
	$10^5$	0.43051203	0.48652284	0.54253365	0.11202161	11.1
	$10^6$	0.42628280	0.44400770	0.46173261	0.03544980	115
0.3	$10^3$	0.37897171	0.43784365	0.49671560	0.11774389	0.16
	$10^4$	0.44144289	0.50420743	0.56697197	0.12552907	1.04
	$10^5$	0.46723626	0.48707006	0.50690387	0.03966761	10.4
	$10^6$	0.47428052	0.48054659	0.48681266	0.01253213	107

Estimación de la  $\Delta$  de una opción mediante el método de diferencias finitas hacia adelante, con simulación independiente, de una call estándar con características:  $S_0 = 19.08$ ,  $K = 19.5$ ,  $\sigma = 17.25\%$ ,  $r = 7\%$  y  $T = 1.5$  meses. El valor teórico de la  $\Delta$  a 8 dígitos es 0.42737819

Cuadro 2.2: Resultados del estimador de delta,  $\widehat{\Delta}_{FD}(n, h)$ 

h	n	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
$10^{-8}$	$10^3$	0.38828264	0.42044553	0.45260842	0.06432577	0.11
	$10^4$	0.41103119	0.42120360	0.43137602	0.02034483	1.10
	$10^5$	0.42388900	0.42711156	0.43033411	0.00644511	10.7
	$10^6$	0.42617998	0.42719918	0.42821838	0.00203839	109
$10^{-6}$	$10^3$	0.39351577	0.42575250	0.457989236	0.06447346	0.15
	$10^4$	0.41536441	0.42554998	0.43573555	0.02037114	1.10
	$10^5$	0.42347362	0.42669588	0.42991815	0.00644452	10.5
	$10^6$	0.42600202	0.42702122	0.42804042	0.00203839	109
$2(10^{-5})$	$10^3$	0.39646728	0.42871987	0.46097246	0.06450517	0.11
	$10^4$	0.41854298	0.42874861	0.43895423	0.02041125	1.14
	$10^5$	0.42345065	0.42667349	0.42989634	0.00644569	11.2
	$10^6$	0.42638700	0.42740642	0.42842584	0.00203883	114
$10^{-4}$	$10^3$	0.38666125	0.41876292	0.45086460	0.06420334	0.10
	$10^4$	0.41635082	0.42653463	0.43671845	0.02036763	1.10
	$10^5$	0.42178089	0.42500124	0.42822160	0.00644070	11.0
	$10^6$	0.42633195	0.42735117	0.42837039	0.00203844	111
$10^{-3}$	$10^3$	0.38599534	0.41811989	0.45024444	0.06424910	0.11
	$10^4$	0.41831542	0.42851386	0.43871229	0.02039686	1.10
	$10^5$	0.42421944	0.42744235	0.43066526	0.00644581	10.7
	$10^6$	0.42640430	0.42742349	0.42844267	0.00203837	108
0.01	$10^3$	0.41281615	0.44523238	0.47764861	0.06483245	0.11
	$10^4$	0.42162393	0.43182284	0.44202175	0.02039781	1.10
	$10^5$	0.42673192	0.42995426	0.43317660	0.00644467	11.0
	$10^6$	0.42830244	0.42932119	0.43033994	0.00203750	110
0.1	$10^3$	0.43920707	0.47145465	0.50370224	0.06449516	0.11
	$10^4$	0.43474250	0.44488239	0.45502228	0.02027977	1.04
	$10^5$	0.44045903	0.44366088	0.44686274	0.00640371	10.7
	$10^6$	0.44299402	0.44400685	0.44501967	0.00202564	118

Estimación de la  $\Delta$  de una opción mediante el método de diferencias finitas hacia adelante, usando números aleatorios comunes en la simulación, de una call estándar con características:  $S_0 = 19.08$ ,  $K = 19.5$ ,  $\sigma = 17.25\%$ ,  $r = 7\%$  y  $T = 1.5$  meses. El valor teórico de la  $\Delta$  a 8 dígitos es 0.42737819

Cuadro 2.3: Resultados del estimador de delta,  $\widehat{\Delta}_{C_I}(n, h)$ 

h	n	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
0.001	$10^3$	-20.2508235	6.89957893	34.0499814	54.3008050	0.10
	$10^4$	-5.23763420	3.38359615	12.0048265	17.2424608	1.21
	$10^5$	-1.81273782	0.90679720	3.62633223	5.43907000	12.1
	$10^6$	-0.29587585	0.56285929	1.42159443	1.71747028	115
0.01	$10^3$	-0.29635037	2.39703300	5.09041647	5.38676684	0.11
	$10^4$	0.16473540	1.02524408	1.88575270	1.72101735	1.20
	$10^5$	0.17447668	0.44469420	0.71491173	0.54043504	12.8
	$10^6$	0.30842273	0.39437071	0.48031868	0.17189594	120
0.1	$10^3$	-0.00382913	0.27848534	0.56079982	0.56462895	0.16
	$10^4$	0.39680480	0.48346852	0.57013223	0.17332742	1.20
	$10^5$	0.37837672	0.40552391	0.43267110	0.05429437	13.1
	$10^6$	0.41183674	0.42043572	0.42903470	0.01719795	122
0.2	$10^3$	0.30974792	0.43904567	0.56834341	0.25859548	0.10
	$10^4$	0.37061559	0.41375235	0.45688910	0.08627350	1.20
	$10^5$	0.41439108	0.42813135	0.44187162	0.02748054	13.0
	$10^6$	0.42289442	0.42722271	0.43155099	0.00865657	121
0.3	$10^3$	0.33605727	0.42621710	0.51637692	0.18031964	0.15
	$10^4$	0.40263700	0.43185837	0.46107975	0.05844275	1.20
	$10^5$	0.41477822	0.42400165	0.43322508	0.01844686	12.0
	$10^6$	0.42598744	0.42890069	0.43181393	0.00582648	121
$h^* =$ 0.497	$10^3$	0.35116070	0.40697269	0.46278467	0.11162396	0.11
	$10^4$	0.41112484	0.42937537	0.44762590	0.03650106	1.15
	$10^5$	0.42444948	0.43013831	0.43582715	0.01137766	11.5
	$10^6$	0.42818486	0.42998889	0.43179293	0.00360806	119
0.5	$10^3$	0.39039975	0.44970149	0.50900322	0.11860346	0.10
	$10^4$	0.41558005	0.43374379	0.45190753	0.03632747	1.20
	$10^5$	0.42490962	0.43061690	0.43632419	0.01141457	12.4
	$10^6$	0.42627198	0.42806637	0.42986076	0.00358877	121
0.8	$10^3$	0.34109442	0.37812266	0.41515090	0.07405648	0.10
	$10^4$	0.41292359	0.42481461	0.43670563	0.02378203	1.20
	$10^5$	0.42683453	0.43060937	0.43438421	0.00754967	13.6
	$10^6$	0.43007948	0.43126871	0.43245794	0.00237846	123

Estimación de la  $\Delta$  de una opción mediante el método de diferencias centradas, con simulación independiente, de una call estándar con características:  $S_0 = 19.08$ ,  $K = 19.5$ ,  $\sigma = 17.25\%$ ,  $r = 7\%$  y  $T = 1.5$  meses. El valor teórico de la  $\Delta$  a 8 dígitos es 0.42737819

Cuadro 2.4: Resultados del estimador de delta,  $\widehat{\Delta}_{CD}(n, h)$ 

	n	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg))
10 <sup>-5</sup>	10 <sup>3</sup>	0.38902956	0.42125812	0.45348667	0.06445711	0.10
	10 <sup>4</sup>	0.41169894	0.42187488	0.43205082	0.02035187	1.09
	10 <sup>5</sup>	0.42396810	0.42719159	0.43041507	0.00644696	14.2
	10 <sup>6</sup>	0.42508023	0.42609903	0.42711783	0.00203759	122
10 <sup>-4</sup>	10 <sup>3</sup>	0.38847278	0.42065901	0.45284524	0.06437245	0.16
	10 <sup>4</sup>	0.41553402	0.42572865	0.43592328	0.02038926	1.20
	10 <sup>5</sup>	0.42503669	0.42826034	0.43148398	0.00644728	11.0
	10 <sup>6</sup>	0.42701897	0.42803854	0.42905812	0.00203915	113
0.001	10 <sup>3</sup>	0.40143072	0.43379978	0.46616884	0.06473811	0.15
	10 <sup>4</sup>	0.41341078	0.42358415	0.43375752	0.02034673	1.10
	10 <sup>5</sup>	0.42220576	0.42542638	0.42864700	0.00644123	11.7
	10 <sup>6</sup>	0.42582985	0.42684874	0.42786763	0.00203778	122
0.006	10 <sup>3</sup>	0.41819264	0.45055059	0.48290854	0.06471589	0.10
	10 <sup>4</sup>	0.41664955	0.42682479	0.43700003	0.02035048	1.20
	10 <sup>5</sup>	0.42483928	0.42805936	0.43127945	0.00644017	11.8
	10 <sup>6</sup>	0.42586641	0.42688414	0.42790188	0.00203546	120
0.01	10 <sup>3</sup>	0.39888459	0.43107465	0.46326471	0.06438012	0.10
	10 <sup>4</sup>	0.41351237	0.42367346	0.43383454	0.02032217	1.20
	10 <sup>5</sup>	0.42419678	0.42741411	0.43063144	0.00643465	11.5
	10 <sup>6</sup>	0.42688540	0.42790278	0.42892016	0.00203476	120
0.1	10 <sup>3</sup>	0.37869949	0.41016720	0.44163490	0.06293541	0.17
	10 <sup>4</sup>	0.41663909	0.42660484	0.43657060	0.01993151	1.10
	10 <sup>5</sup>	0.42305245	0.42620599	0.42935954	0.00630708	11.9
	10 <sup>6</sup>	0.42588517	0.42688251	0.42787985	0.00199467	119
0.5	10 <sup>3</sup>	0.41451066	0.44341049	0.47231032	0.05779965	0.1
	10 <sup>4</sup>	0.41544702	0.42451289	0.43357875	0.01813172	1.03
	10 <sup>5</sup>	0.42620475	0.42907308	0.43194141	0.00573666	10.8
	10 <sup>6</sup>	0.42875001	0.42965725	0.43056449	0.00181447	117

Estimación de la  $\Delta$  de una opción mediante el método de diferencias centradas, usando números aleatorios comunes en la simulación, de una call estándar con características:  $S_0 = 19.08$ ,  $K = 19.5$ ,  $\sigma = 17.25\%$ ,  $r = 7\%$  y  $T = 1.5$  meses. El valor teórico de la  $\Delta$  a 8 dígitos es 0.42737819

**Observaciones:**

En los cuadros se presentan las estimaciones de  $\Delta$  para algunos valores de  $h$ ; sin embargo, no es posible asegurar que alguno de estos valores sea el valor óptimo de  $h$  que minimiza el error cuadrático medio.

En el Cuadro 2.1 se muestran los resultados del estimador  $\widehat{\Delta}_{F_I}$ ; tal como se esperaba, puede observarse que al incrementar el valor de  $h$ , la longitud del intervalo de confianza disminuye debido a que disminuye la varianza del estimador  $\widehat{\Delta}_{F_I}$ . De igual manera, la longitud del intervalo disminuye al incrementar el valor de  $n$ . Por el contrario, el sesgo del estimador aumenta cuando  $h$  incrementa su valor; de hecho el intervalo de confianza donde  $h = 0.3$  ni siquiera contiene al parámetro de interés debido al sesgo del estimador.

De acuerdo a esto, sería bueno encontrar un valor de  $h$  para establecer un equilibrio entre el sesgo y la varianza del estimador; para esto, en el cuadro se observa la notación  $h^*$ , el significado de este valor es que para tener una mejor estimación de  $\Delta$  se tomaron algunos valores de  $h$  y sus respectivos errores en la estimación; es decir, se tomaron  $(h_i, \varepsilon_i)$  para  $i = 1, 2, 3$ ; con los cuales se realiza la interpolación de una parábola y se obtiene el valor óptimo  $h^*$  que minimiza el error. Si bien, no es posible afirmar que este valor sea el valor óptimo real de  $h$ , si nos proporciona una buena aproximación a  $\Delta$  como puede observarse en el cuadro.

En el Cuadro 2.2 se presentan los resultados numéricos del estimador  $\widehat{\Delta}_{F_D}$ . Los resultados muestran que la longitud del intervalo de confianza prácticamente se mantiene constante ante los cambios en el valor de  $h$ ; es decir, se observa que la longitud del intervalo de confianza sólo disminuye ante el aumento del valor de  $n$ . Por otro lado, valores grandes de  $h$  nos conducen a incrementos en el sesgo del estimador, de hecho puede observarse que con  $h = 0.1$  el intervalo ya no contiene al valor exacto de la  $\Delta$  de la opción.

Los resultados numéricos de calcular el estimador  $\widehat{\Delta}_{C_I}$  se pueden observar en el Cuadro 2.3; donde, su comportamiento es parecido al del estimador  $\widehat{\Delta}_{F_I}$ . El utilizar valores pequeños de  $h$  nos conduce a incrementar considerablemente la varianza del estimador y valores grandes de  $h$  producen sesgo en el estimador; el sesgo es evidente cuando usamos  $h = 0.8$  y  $n = 10^6$ . En esta ocasión,  $h^*$  tiene el mismo significado que el Cuadro 2.1. Resulta evidente que el estimador  $\widehat{\Delta}_{C_I}$  presenta una menor varianza que  $\widehat{\Delta}_{F_I}$  para un mismo valor de  $h$  y  $n$ .

Por último, en el Cuadro 2.4 se muestran los resultados numéricos del estimador  $\widehat{\Delta}_{C_D}$ . La varianza del estimador se mantiene casi constante al variar los valores de  $h$  como en el estimador  $\widehat{\Delta}_{F_D}$ ; sin embargo, utilizar valores grandes de  $h$  no es conveniente, ya que como se observa en el cuadro correspondiente, para  $h = 0.5$  y  $n = 10^6$  obtenemos un intervalo de confianza que no contiene el valor de la  $\Delta$  de la opción. La varianza del estimador  $\widehat{\Delta}_{C_D}$  es menor que la del estimador  $\widehat{\Delta}_{F_D}$ .

En general, los estimadores de diferencias centradas tiene una menor varianza que los estimadores de diferencias hacia adelante; por otro lado, los estimadores donde se utilizan numeros aleatorios comunes ( $\widehat{\Delta}_{C_D}$  y  $\widehat{\Delta}_{F_D}$ ) no presentan sesgo considerable si utilizamos  $h$  suficientemente pequeña y esto no afecta la varianza ya que esta se mantiene casi constante ante los cambios en el valor de  $h$ . En cuanto al tiempo necesario para calcular los estimadores, es mayor el tiempo que se emplea en calcular el estimador por diferencias centradas que los estimadores por diferencias hacia adelante.

Existe una forma de estimar el valor de  $h$  (ver [3], pág. 139) y es la siguiente:

Para el valor de la opcion  $V$ , podemos aproximar a  $\Gamma$  por diferencias centradas como sigue

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S_0^2} \approx \frac{V(S_0 + h) - 2V(S_0) + V(S_0 - h)}{h^2} \quad (2.35)$$

luego, haciendo la expansión de Taylor de  $V$

$$V(S_0 + h) \approx V + V'h + \frac{1}{2}V''h^2 + \frac{1}{6}V^{(3)}h^3 + \frac{1}{24}V^{(4)}h^4 + o(h^5) + \varepsilon V$$

donde  $V^{(n)}$  representa la  $n$ -ésima derivada de  $V$  con respecto a  $S_0$  y el último término representa el error numérico inevitable. Sustituyendo esta expresión en (2.35) tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma} &= \frac{V''h^2 + \frac{1}{12}V^{(4)}h^4 + \varepsilon V}{h^2} + \varepsilon_2 V'' \\ &= V'' + \frac{1}{12}V^{(4)}h^2 + \frac{\varepsilon V}{h^2} + \varepsilon_2 V'' \end{aligned} \quad (2.36)$$

el último término representa el error introducido al efectuar las operaciones en (2.35). Es evidente en la ecuación (2.36) que para un valor grande de  $h$ , el término  $\frac{1}{12}V^{(4)}h^2$  incrementa el error de nuestro estimador de  $\Gamma$ ; por otro lado, para un valor muy pequeño de  $h$  el error numérico de redondeo  $\frac{\varepsilon V}{h^2}$  aumentará. Así, lo ideal es que estos términos sean iguales

$$\frac{1}{12}V^{(4)}h^2 = \frac{\varepsilon V}{h^2}$$

es decir,

$$h = \sqrt[4]{12 \frac{V}{V^{(4)}}} \varepsilon.$$

En la práctica, no se tiene la suficiente información para evaluar esta expresión; pero asumiendo que todos los términos en la expansión de Taylor tienen igual magnitud; es decir,  $o(V) \approx o(V^{(4)} S_0^4)$ , esto nos lleva a

$$h \approx \sqrt[4]{\varepsilon} S_0 \quad (2.37)$$

donde  $\varepsilon$  representa la precisión con la que se trabaja; en Matlab este valor es del orden de  $10^{-15}$ . Este procedimiento brinda una forma de establecer un valor para  $h$ , el cual sólo es posible utilizar cuando usamos números aleatorios comunes en la simulación de  $Y(S_0 + h)$  y  $Y(S_0 - h)$ . Al aplicar este procedimiento en nuestro ejemplo, se obtuvo un valor de  $h = 0.00002$  en el caso del estimador  $\widehat{\Delta}_{FD}$  y un valor de  $h = 0.006$  para el estimador  $\widehat{\Delta}_{CD}$ , el resultado de los estimadores para estos valores se pueden observar en los cuadros (2.2) y (2.4).

### 2.3. Método de perturbación infinitesimal

Una alternativa al método de diferencias finitas es el método de perturbación infinitesimal, del cual hablaremos a continuación.

Consideremos una colección de variables aleatorias  $\{Y(\theta), \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$  definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y recordemos que  $V(\theta) = E[Y(\theta)]$ . Tomando  $\omega \in \Omega$  y considerando al mapeo  $\theta \mapsto Y(\theta, \omega)$  como una función aleatoria, podemos interpretar a  $Y'(\theta, \omega)$  como la derivada de la función aleatoria con respecto a  $\theta$  con  $\omega$  fija. Por otro lado; si asumimos que con probabilidad 1,  $Y'(\theta)$  existe y se define como

$$Y'(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h}. \quad (2.38)$$

entonces, este estimador tiene esperanza  $E[Y'(\theta)]$ , el cual es un estimador insesgado de  $V'(\theta)$  si

$$\begin{aligned} E[Y'(\theta)] &= E\left[\frac{d}{d\theta} Y(\theta)\right] \\ &= \frac{d}{d\theta} E[Y(\theta)] \\ &= V'(\theta) \end{aligned}$$

es decir, sólo si podemos justificar el cambiar el orden en que se efectúan las operaciones de diferenciación y cálculo de una integral. La posible falla en el intercambio de estas operaciones es un problema tanto teórico como práctico; por eso, es importante establecer condiciones para justificar (2.39).

Algunas condiciones suficientes que son más fáciles de verificar en la práctica se mencionan en el siguiente teorema. (Para su demostración ver [2], pág. 393).

**Teorema 2.3.1.** *Consideremos a  $Y$  como una función de un vector aleatorio  $\mathbf{X}(\theta) = (X_1(\theta), \dots, X_m(\theta))$  que denota la trayectoria del subyacente, el cual a su vez es función del parámetro  $\theta$ ; siendo  $Y(\theta) = f(X_1(\theta), \dots, X_m(\theta))$  para alguna función  $f: \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ .*

*Para las opciones, la forma de  $f$  depende de la función de pago de la opción.*

*Las condiciones siguientes son suficientes para asegurar que  $Y'(\theta)$  es un estimador insesgado de  $V'(\theta)$ .*

1. *Para cada  $\theta \in \Theta$ ,  $X'_i(\theta) = \frac{d}{d\theta} X_i(\theta)$  existe con probabilidad 1.*
2. *Si  $D_f$  denota el conjunto de puntos en los cuales  $f$  es diferenciable entonces,  $P(\mathbf{X}(\theta) \in D_f) = 1$  para todo  $\theta \in \Theta$ .*
3. *Si existe una constante  $K_f$  tal que, para toda  $x, y \in \mathbb{R}^m$ ,*

$$|f(x) - f(y)| \leq K_f \|x - y\|$$

*es decir,  $f$  es Lipschitz.*

4. *Si existen variables aleatorias  $K_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  tales que para toda  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ ,*  
 $|X_i(\theta_2) - X_i(\theta_1)| \leq K_i |\theta_2 - \theta_1|$  *y*  $E[K_i] < \infty$ .

Del Teorema 2.3.1, las condiciones 1 y 2 implican que  $Y'(\theta)$  existe con probabilidad 1 y está dada por

$$Y'(\theta) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial X_i}(\mathbf{X}(\theta)) X'_i(\theta). \quad (2.39)$$

Las condiciones 3 y 4 implican que  $Y$  es Lipschitz; es decir,

$$|Y(\theta_2) - Y(\theta_1)| \leq K_Y |\theta_2 - \theta_1| \quad (2.40)$$

con  $K_Y = K_f \sum_{i=1}^m K_i$  y  $E[K_Y] < \infty$ .

De la condición 3, la discontinuidad en  $Y$  es el principal obstáculo para aplicar el método de perturbación infinitesimal. El método se aplica por lo general cuando  $Y$  es continua en el parámetro de interés, y aunque esto no es una garantía, es una guía razonable en la mayoría de los casos prácticos.

### 2.3.1. Cálculo de la delta de una opción por el método de perturbación infinitesimal

Consideremos una opción con  $Y$ , su función de pago descontada, para la que se cumplen las condiciones bajo las cuales se puede aplicar el método de perturbación infinitesimal. Por otro lado, sea  $V$  el valor de la opción, con  $V = E^*[Y(\theta)]$  por lo que

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} E^*[Y(\theta)],$$

bajo las condiciones del método de perturbación infinitesimal

$$\frac{dV}{d\theta} = E^*\left[\frac{d}{d\theta}Y(\theta)\right].$$

Por el método de Monte-Carlo un estimador de  $\frac{dV}{d\theta}$  que denotaremos como  $\widehat{\frac{dV}{d\theta}}$  es

$$\widehat{\frac{dV}{d\theta}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{d}{d\theta} Y_i(\theta) \quad (2.41)$$

donde  $\theta$  es igual al precio del activo subyacente cuando se pretende determinar el valor de la  $\Delta$  de la opción; o bien  $\theta$  igual algún otro parámetro de la opción siempre y cuando se cumplan las condiciones bajo las cuales se aplica el método de perturbación infinitesimal para ese parámetro.

Un ejemplo en el que se satisfacen las condiciones bajo las cuales se aplica el método de perturbación infinitesimal consiste en calcular el valor de la  $\Delta$  de un call europeo, donde la función de pago descontada  $Y$  correspondiente es,

$$Y(S_T) = e^{-rT} \max\{S_T - K, 0\}$$

que denotaremos como

$$Y(S_T) = e^{-rT} (S_T - K)_+$$

donde

$$S_T = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y \sqrt{T}}$$

con  $r, \sigma, T, K$  definidos como antes y  $y$  una variable aleatoria normal estándar. Derivando  $Y$  con respecto a  $S_0$  tenemos

$$\frac{dY}{dS_0} = \frac{dY}{dS_T} \frac{dS_T}{dS_0}. \quad (2.42)$$

En el primer factor

$$\begin{aligned} \frac{d}{dS_T} \max\{S_T - K, 0\} &= \begin{cases} 1 & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{si } S_T < K \end{cases} \\ &= \mathbf{1}\{S_T > K\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

la derivada falla para  $S_T = K$  pero como este evento tiene probabilidad 0 de ocurrir,  $Y$  es diferenciable casi seguramente con respecto a  $S_T$ , por lo que

$$\frac{dY}{dS_T} = e^{-rT} \mathbf{1}\{S_T > K\}. \quad (2.44)$$

Para el segundo factor

$$\frac{dS_T}{dS_0} = e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y \sqrt{T}} = \frac{S_T}{S_0}. \quad (2.45)$$

Por lo tanto,

$$\frac{dY}{dS_0} = e^{-rT} \mathbf{1}\{S_T > K\} \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \quad (2.46)$$

donde  $\frac{dY}{dS_0}$  es un estimador insesgado de  $\Delta$ ; es decir

$$\Delta = E \left[ e^{-rT} \mathbf{1}\{S_T > K\} \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \right]. \quad (2.47)$$

Si estimamos esta esperanza por Monte-Carlo, obtenemos el estimador  $\hat{\Delta}_M$  igual a

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_M &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[ e^{-rT} \mathbf{1}\{S_{T_i} > K\} \left( \frac{S_{T_i}}{S_0} \right) \right] \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[ e^{-rT} \mathbf{1}\{S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y_i \sqrt{T}} > K\} \left( e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y_i \sqrt{T}} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

con  $y_i$  una variable aleatoria normal estándar y  $M$  el número de trayectorias generadas para calcular el estimador.

Entre las características del estimador  $\widehat{\Delta}_M$ , tenemos que tiene esperanza:

$$\begin{aligned} E[\widehat{\Delta}_M] &= E\left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{dY_i}{dS_0}\right] \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E\left[\frac{dY_i}{dS_0}\right] \\ &= \Delta \end{aligned}$$

por lo que  $\widehat{\Delta}_M$  es un estimador insesgado de  $\Delta$ .

Por otro lado, tiene el siguiente error cuadrático medio,

$$\begin{aligned} MSE[\widehat{\Delta}_M] &= Var[\widehat{\Delta}_M] \\ &= Var\left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{dY_i}{dS_0}\right] \\ &= \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M Var\left[\frac{dY_i}{dS_0}\right] \\ &= \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M Var\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y_i(S_0 + h) - Y_i(S_0)}{h}\right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Si las parejas  $(Y_i(S_0 + h), Y_i(S_0))$  para  $i = 1, 2, \dots, M$  son independientes y considerando que podemos intercambiar el orden en que se efectúan el cálculo de la esperanza y límite de  $\frac{Y(S_0+h)-Y(S_0)}{h}$ , tenemos

$$\begin{aligned} MSE[\widehat{\Delta}_M] &= \frac{1}{M^2} \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^M Var\left[\frac{Y_i(S_0 + h) - Y_i(S_0)}{h}\right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{Mh^2} Var[Y(S_0 + h) - Y(S_0)]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Por otro lado, como  $Y$  es Lipschitz (ver teorema 2.3.1), de la ecuación 2.40 tenemos,

$$\begin{aligned} Var[Y(S_0 + h) - Y(S_0)] &\leq Var[|Y(S_0 + h) - Y(S_0)|] \\ &\leq Var[K_Y h] \\ &= K_Y^2 h^2. \end{aligned} \quad (2.51)$$

De (2.50) y (2.51) se concluye que

$$MSE[\widehat{\Delta}_M] \approx \frac{1}{M}. \quad (2.52)$$

**Ejemplo 2.3.1.** Consideremos un call europeo con los siguientes datos: Precio del activo subyacente  $S_0 = 19.08$ , precio de ejercicio  $K = 19.5$ , volatilidad igual al 17.25 % anual, la tasa libre de riesgo es del 7 % anual, con fecha de vencimiento  $T = 1.5, 3$  y 6 meses.

De acuerdo al Cuadro 2.5 se presenta la siguiente información: En la primer columna se encuentra el número de trayectorias generadas para calcular el estimador  $\hat{\Delta}_M$ ; en la segunda columna se tiene el límite inferior de un intervalo de confianza al 95 %. En la tercera columna se encuentra el valor del estimador  $\hat{\Delta}_M$  y en la cuarta columna se presenta el límite superior del intervalo cuya longitud se puede observar en la quinta columna. Finalmente, en la última columna se encuentra el tiempo de cómputo aproximado para calcular el estimador dado un valor de  $M$ .

Cuadro 2.5: Resultados del estimador de  $\Delta$  por el método de perturbación infinitesimal combinado con Monte-Carlo.

1.5 meses					
M	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo (seg)
1000	0.39142292	0.42363021	0.45583749	0.06441456	0.06
10000	0.41155147	0.42171690	0.43188233	0.02033085	0.49
100000	0.42697940	0.43020721	0.43343502	0.00645561	4.77
1000000	0.42655594	0.42757534	0.42859475	0.00203881	50.15
3 meses					
M	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo (seg)
1000	0.46580055	0.49907972	0.53235889	0.06655833	0.049
10000	0.48215472	0.49265868	0.50316264	0.02100791	0.49
100000	0.49033990	0.49366550	0.49699123	0.00665132	4.84
1000000	0.49604819	0.49710056	0.49815293	0.00210473	49.76
6 meses					
M	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo (seg)
1000	0.53178470	0.56592214	0.60005957	0.06827486	0.05
10000	0.55557095	0.56633800	0.57710504	0.02153409	0.49
100000	0.56351155	0.56691752	0.57032349	0.00681194	4.94
1000000	0.56615536	0.56723263	0.56830990	0.00215454	49.1

Estimación por medio de el método de perturbación infinitesimal de la  $\Delta$  de un call estándar con características:  $S_0 = 19.08$ ,  $K = 19.5$ ,  $\sigma = 17.25\%$ ,  $r = 7\%$  y  $T = 1.5, 3$  y 6 meses. El valor teórico de la  $\Delta$  a 8 dígitos es 0.42737819, 0.49743630 y 0.56726720, respectivamente.

**Comentarios:**

Con base en los resultados obtenidos en el Cuadro 2.5, se puede decir que el estimador  $\widehat{\Delta}_M$  es mejor con respecto a los estimadores  $\widehat{\Delta}_{F_I}$  y  $\widehat{\Delta}_{C_I}$ , ya que como puede observarse, la longitud del intervalo de confianza del estimador  $\widehat{\Delta}_M$  es menor que la de los estimadores de diferencias finitas e incluso cuando en los estimadores  $\widehat{\Delta}_{F_I}$  y  $\widehat{\Delta}_{C_I}$  se utilizan valores grandes de  $h$  lo cual reduce la varianza; la longitud del intervalo sigue siendo mayor que la de  $\widehat{\Delta}_M$ , aunado con el sesgo que esto implica.

Con respecto a los estimadores  $\widehat{\Delta}_{F_D}$  y  $\widehat{\Delta}_{C_D}$  que involucran la simulación con números aleatorios comunes, se puede ver que la varianza de estos con respecto al estimador  $\widehat{\Delta}_M$  es casi del mismo orden ya que sus intervalos de confianza tienen prácticamente la misma longitud, sin embargo para valores grandes de  $h$ , los estimadores de diferencias finitas presentan sesgo, lo cual es una ventaja del estimador  $\widehat{\Delta}_M$  por ser insesgado.

Una clara desventaja que presenta el utilizar los estimadores por diferencias finitas, es que el tiempo necesario para calcular los estimadores es prácticamente el doble del tiempo requerido por el estimador del método de perturbación infinitesimal.

### 2.3.2. Cálculo de las griegas de una opción por el método de perturbación infinitesimal

Si bien una de las griegas más importantes de una opción es la  $\Delta$ , es importante ver el alcance del método de perturbación infinitesimal en el cálculo de  $\nu$ ,  $\rho$  y  $\Theta$ ; es por eso que en este apartado se utiliza el método de perturbación infinitesimal y de Monte-Carlo para calcular estimadores insesgados de estas griegas.

#### Cálculo de la $\nu$ de una opción europea

Como ya sabemos,  $\nu$  es la tasa de variación del valor de la opción con respecto a la volatilidad del activo subyacente; es decir,

$$\nu = \frac{dV}{d\sigma}, \quad (2.53)$$

bajo la notación que desarrollamos para el método de perturbación infinitesimal, el parámetro  $\theta$  ahora es igual a  $\sigma$ . Se pretende estimar la  $\nu$  de un call europeo, por lo que consideramos la siguiente función de pago:

$$Y(S_T) = e^{-rT} (S_T - K)_+ \quad (2.54)$$

donde

$$S_T = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y \sqrt{T}}$$

con  $y, r, \sigma, T, K$  ya definidos.

El primer paso es calcular la derivada de  $Y$  con respecto a  $\sigma$  como sigue:

$$\frac{dY}{d\sigma} = \frac{dY}{dS_T} \frac{dS_T}{d\sigma} \quad (2.55)$$

donde el primer factor es

$$\frac{d}{dS_T} \max\{S_T - K, 0\} = \begin{cases} 1 & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{si } S_T < K \end{cases} \quad (2.56)$$

y aunque la derivada falla para  $S_T = K$ , sabemos que este evento ocurre con probabilidad 0. Por lo tanto,

$$\frac{dY}{dS_T} = e^{-rT} \mathbf{1}\{S_T > K\}, \quad (2.57)$$

donde

$$\mathbf{1}\{S_T > K\} = \begin{cases} 1 & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{si } S_T < K \end{cases} \quad (2.58)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{dS_T}{d\sigma} &= S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y \sqrt{T}} (-\sigma T + y\sqrt{T}) \\ &= S_T (-\sigma T + y\sqrt{T}). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Por lo tanto,

$$\frac{dY}{d\sigma} = e^{-rT} \mathbf{1}\{S_T > K\} S_T (-\sigma T + y\sqrt{T}). \quad (2.60)$$

De esta manera,  $\frac{dY}{d\sigma}$  es un estimador insesgado de  $\nu$ ; por lo que

$$\nu = E \left[ e^{-rT} \mathbf{1}\{S_T > K\} S_T (-\sigma T + y\sqrt{T}) \right]. \quad (2.61)$$

Por Monte-Carlo podemos obtener un estimador de esta esperanza, el cual es igual a

$$\hat{\nu}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[ e^{-rT} \mathbf{1}\{S_{T_i} > K\} S_{T_i} (-\sigma T + y_i \sqrt{T}) \right] \quad (2.62)$$

con  $S_{T_i} = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y_i \sqrt{T}}$ ,  $y_i$  una variable aleatoria normal estándar y  $M$  el número de trayectorias.

Las características de este estimador son las mismas que las del estimador de  $\Delta$ .

Como ejemplo práctico, consideremos la opción del Ejemplo 2.3.1, para la cual se calculó un intervalo de confianza al 95 % para diferentes valores de  $M$  y cuyos resultados numéricos se muestran en el Cuadro 2.6.

Cuadro 2.6: Resultados del estimador de  $\nu$  por el método de perturbación infinitesimal combinado con Monte-Carlo.

1.5 meses					
M	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo (seg)
1000	2.60661150	2.89077157	3.17493164	0.56832014	0.06
10000	2.59820459	2.68175936	2.76531413	0.16710954	0.54
100000	2.62450813	2.65083911	2.67717009	0.05266196	5.61
1000000	2.63278431	2.64111982	2.64945532	0.01667100	58.27
3 meses					
M	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo (seg)
1000	3.39800830	3.78073533	4.16346234	0.76545401	0.11
10000	3.69639261	3.81992089	3.94344917	0.24705656	0.549
100000	3.76981478	3.80820399	3.84659320	0.07677842	5.32
1000000	3.78932091	3.80140698	3.81349304	0.02417212	52.89
6 meses					
M	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo (seg)
1000	4.70144012	5.27178400	5.84212788	1.14068776	0.049
10000	5.13223639	5.31218766	5.49213892	0.35990253	0.549
100000	5.25012672	5.30671232	5.36329793	0.11317121	5.32
1000000	5.28016476	5.29806947	5.31597418	0.03580941	53.879

Estimación por medio de el método de perturbación infinitesimal de la  $\nu$  de un call estándar con características:  $S_0 = 19.08$ ,  $K = 19.5$ ,  $\sigma = 17.25\%$ ,  $r = 7\%$  y  $T = 1.5$ , 3 y 6 meses. El valor teórico de  $\nu$  a 8 dígitos es 2.6464712, 3.8058308 y 5.3056741, respectivamente.

### Cálculo de $\rho$ de una opción europea

Otra de las griegas es  $\rho$ , la cual se define como la tasa de variación del valor de la opción con respecto al tipo de interés:

$$\rho = \frac{dV}{dr}, \quad (2.63)$$

en esta ocasión, el parámetro  $\theta$  es igual a la tasa de interés  $r$ . Vamos a estimar el valor de  $\rho$  para un call estándar que tiene la función de pago (2.54), por lo que es necesario calcular la derivada de  $Y$  con respecto a  $r$

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dr} &= -Te^{-rT}(S_T - K)_+ + e^{-rT} \frac{d}{dr}(S_T - K)_+ \\ &= -Te^{-rT}(S_T - K)_+ + e^{-rT} \mathbf{1}\{S_T > K\} S_T T \\ &= Te^{-rT} \left( \mathbf{1}\{S_T > K\} S_T - (S_T - K)_+ \right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde  $\mathbf{1}\{S_T > K\}$  se define como en (2.58).

Como  $\frac{dY}{dr}$  es un estimador insesgado de  $\rho$ , cumple lo siguiente

$$\rho = E \left[ Te^{-rT} \left( \mathbf{1}\{S_T > K\} S_T - (S_T - K)_+ \right) \right]. \quad (2.65)$$

Por otro lado, sabemos estimar esta esperanza con el método de Monte-Carlo,  $\hat{\rho}_M$  denota el estimador de  $\rho$  usando  $M$  trayectorias y tiene la siguiente forma:

$$\hat{\rho}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[ Te^{-rT} \left( \mathbf{1}\{S_{T_i} > K\} S_{T_i} - (S_{T_i} - K)_+ \right) \right] \quad (2.66)$$

con  $S_{T_i} = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y_i \sqrt{T}}$  y  $y_i$  una variable aleatoria normal estándar.

Como ejemplo también consideramos el call estándar cuyos datos se mencionan en el Ejemplo 2.3.1. En el Cuadro 2.7 se presentan intervalos de confianza al 95% del estimador  $\hat{\rho}_M$  para diferentes valores de  $M$ .

Cuadro 2.7: Resultados del estimador de  $\rho$  por el método de perturbación infinitesimal combinado con Monte-Carlo.

1.5 meses					
M	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo (seg)
1000	0.89548716	0.96892223	1.04235729	0.14687012	0.04
10000	0.97122710	0.99453463	1.01784217	0.04661507	0.49
100000	0.96698809	0.97433466	0.98168123	0.01469313	5.22
1000000	0.97233030	0.97465361	0.97697691	0.00464660	52.4
3 meses					
M	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo (seg)
1000	2.01742898	2.16527420	2.31311942	0.29569044	0.059
10000	2.19889635	2.24575341	2.29261048	0.09371413	0.5
100000	2.20397786	2.21878330	2.23358874	0.02961087	5.32
1000000	2.21096894	2.21565035	2.22033177	0.00936282	52.13
6 meses					
M	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo (seg)
1000	4.50962221	4.80147293	5.09332364	0.58370143	0.05
10000	4.77516063	4.86737550	4.95959036	0.18442972	0.49
100000	4.87324661	4.90239801	4.93154940	0.05830278	5.21
1000000	4.87495139	4.88417124	4.89339109	0.01843970	51.94

Estimación por medio del método de perturbación infinitesimal de  $\rho$  de un call estándar con características:  $S_0 = 19.08$ ,  $K = 19.5$ ,  $\sigma = 17.25\%$ ,  $r = 7\%$  y  $T = 1.5, 3$  y  $6$  meses. El valor teórico de  $\rho$  a 8 dígitos es  $0.97520335$ ,  $2.2183536$  y  $4.8854587$ , respectivamente.

### Cálculo de la $\Theta$ de una opción europea

La última griega que calcularemos es  $\Theta$  que se define como la tasa de variación del valor de la opción con respecto al tiempo.

$$\Theta = \frac{dV}{dt} \quad (2.67)$$

Consideraremos un call estándar con función de pago descontada igual a (2.54).

El primer paso es calcular la derivada de  $Y$  con respecto a  $t$

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dt} &= re^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ + e^{-r(T-t)} \frac{d}{dt}(S_T - K)_+ \\
&= re^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ + e^{-r(T-t)} \frac{d}{dS_T}(S_T - K)_+ \frac{dS_T}{dt} \\
&= re^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ + e^{-r(T-t)} \mathbf{1}\{S_T > K\} S_T \left( -r + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma y}{2\sqrt{T-t}} \right) \\
&= e^{-r(T-t)} \left[ r(S_T - K)_+ + \mathbf{1}\{S_T > K\} S_T \left( -r + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma y}{2\sqrt{T-t}} \right) \right]. \quad (2.68)
\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{1}\{S_T > K\}$  se define como en (2.58).

Para  $t = 0$ , tenemos

$$\frac{dY}{dt} = e^{-rT} \left[ r(S_T - K)_+ + \mathbf{1}\{S_T > K\} S_T \left( -r + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma y}{2\sqrt{T}} \right) \right] \quad (2.69)$$

donde,  $\frac{dY}{dt}$  es un estimador insesgado de  $\Theta$ ; así que

$$\Theta = E \left[ e^{-rT} \left( r(S_T - K)_+ + \mathbf{1}\{S_T > K\} S_T \left( -r + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma y}{2\sqrt{T}} \right) \right) \right]. \quad (2.70)$$

Con el método de Monte-Carlo podemos estimar a (2.70),

$$\hat{\Theta}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e^{-rT} \left( r[S_{T_i} - K]_+ + \mathbf{1}\{S_{T_i} > K\} S_{T_i} \left( -r + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma y_i}{2\sqrt{T}} \right) \right) \quad (2.71)$$

con  $S_{T_i} = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y_i \sqrt{T}}$ ,  $y_i$  una variable aleatoria normal estándar y  $M$  el número de trayectorias generadas para calcular el estimador.

En el Cuadro 2.8 se muestran resultados numéricos de el estimador  $\hat{\Theta}_M$ , para una opción con datos ya mencionados en el Ejemplo 2.3.1.

Cuadro 2.8: Resultados del estimador de  $\Theta$  por el método de perturbación infinitesimal combinado con Monte-Carlo.

1.5 meses					
M	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo (seg)
1000	-2.45392174	-2.24604815	-2.03817456	0.41574717	0.04
10000	-2.42429029	-2.35581261	-2.28733493	0.13695535	0.55
100000	-2.40191200	-2.38034114	-2.35877028	0.04314171	5.38
1000000	-2.38269234	-2.37589484	-2.36909734	0.01359500	56.06
3 meses					
M	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo (seg)
1000	-2.06958346	-1.90469497	-1.73980648	0.32977698	0.06
10000	-1.98980352	-1.93785642	-1.88590932	0.10389420	0.55
100000	-1.94813599	-1.93190848	-1.91568096	0.03245503	5.6
1000000	-1.94141423	-1.93627747	-1.93114071	0.01027351	55.53
6 meses					
M	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo (seg)
1000	-1.71155679	-1.58653497	-1.46151315	0.25004363	0.059
10000	-1.62341801	-1.58391709	-1.54441618	0.07900182	0.55
100000	-1.61100020	-1.59850205	-1.58600390	0.02499630	5.38
1000000	-1.60445904	-1.60050020	-1.59654136	0.00791768	55.36

Estimación por medio del método de perturbación infinitesimal de  $\Theta$  de un call estándar con características:  $S_0 = 19.08$ ,  $K = 19.5$ ,  $\sigma = 17.25\%$ ,  $r = 7\%$  y  $T = 1.5$ , 3 y 6 meses. El valor teórico de  $\Theta$  a 8 dígitos es -2.3721790, -1.9341506 y -1.5991930, respectivamente.

### Gamma ( $\Gamma$ )

Otra griega es gamma; sin embargo, como ya se mencionó uno de los obstáculos que presenta el método de perturbación infinitesimal es la discontinuidad en la función de pago, siendo éste uno de los inconvenientes por los cuales no es posible estimar  $\Gamma$ , ya que

sería necesario aplicar el método de perturbación infinitesimal a la siguiente función

$$Y(S_T) = e^{-rT} \mathbf{1}\{S_T > K\} \frac{S_T}{S_0} \quad (2.72)$$

la cual aunque es diferenciable excepto para  $S_T = K$ , lo cual implicaría que  $Y$  es diferenciable con probabilidad 1, la función no cumple con la propiedad 3 del Teorema 2.3.1 para poder aplicar el método de perturbación infinitesimal; es decir,  $Y$  no es Lipschitz.

Este es un ejemplo en el cual  $Y$  es diferenciable con probabilidad 1, pero no es posible intercambiar el orden de las operaciones de diferenciación y cálculo de la integral.

# Capítulo 3

## Aplicación del método de Monte-Carlo a opciones exóticas

En este capítulo se calcula la valuación y cobertura de opciones exóticas; específicamente de una opción asiática y una lookback. Como ya se sabe, la prima y  $\Delta$  de estas opciones depende de la trayectoria del subyacente y no pueden calcularse en forma exacta. Así, se pretende estimar el valor de la opción y de la  $\Delta$  por medio del método de Monte-Carlo a partir de simular diferentes trayectorias posibles del subyacente. Para estimar la  $\Delta$  de la opción se utiliza el método de perturbación infinitesimal, visto en el Capítulo 2.

### 3.1. Valuación y cobertura de una opción asiática

Una de las opciones exóticas más populares es la opción asiática, cuya principal característica es que se trata de un contrato sobre el valor promedio del subyacente. Su utilidad se debe a que al depender del valor promedio del subyacente a lo largo de la duración del contrato, es menos manipulable, a diferencia de la opción vainilla, que por depender del precio del subyacente en la fecha de vencimiento puede presentar cambios repentinos en el precio de la opción. Existe una variedad de opciones asiáticas que se pueden clasificar como sigue:

- Opciones asiáticas tipo europeo o euroasiática, que sólo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento u opciones asiáticas tipo americano que pueden ejercerse en cualquier instante antes de la expiración de la opción.

- El valor promedio del subyacente puede calcularse de acuerdo a la media aritmética o geométrica, siendo la primera la más utilizada. Sin embargo, para el caso de la media geométrica existen formulas cerradas para el modelo de Black-Scholes mientras que para la aritmética no la hay. El cálculo de la media se hace sobre la base de los precios diarios de cierre del subyacente y el plazo comúnmente abarca desde la emisión de la opción hasta su fecha de vencimiento; pero no existe inconveniente en fijar determinado período de observación. Si el promedio es aritmético, éste tiene la forma:

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \quad (3.1)$$

y si es geométrico,

$$A = e^{\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_t) dt} \quad (3.2)$$

con  $T$ , la fecha de vencimiento de la opción y  $S_t$  el precio del subyacente en el tiempo  $t$ .

- Las opciones asiáticas pueden asumir dos variantes, opciones asiáticas con precio medio del subyacente u opciones asiáticas con precio de ejercicio promedio.

De esta manera, si consideramos una opción euroasiática; ésta puede tener alguna de las siguientes formas:

- Call con precio medio del subyacente, con función de pago:  $h(A) = (A - K)_+$
- Put con precio medio del subyacente, con función de pago:  $h(A) = (K - A)_+$
- Call con precio de ejercicio promedio, con función de pago:  $h(A) = (S_T - A)_+$
- Put con precio de ejercicio promedio, con función de pago:  $h(A) = (A - S_T)_+$

Para calcular el precio de una opción de compra euroasiática con función de pago

$$h(A) = \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \quad (3.3)$$

se considera un mercado que satisface las condiciones del modelo Black-Scholes (ver Capítulo 1), por lo que existe una medida de probabilidad  $P^*$  conocida como la probabilidad de riesgo neutro, bajo la cual el precio del activo subyacente satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.4)$$

con solución

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \quad (3.5)$$

donde  $S_0$  es el precio inicial del activo subyacente,  $r$  la tasa libre de riesgo,  $\sigma$  la volatilidad,  $T$  la fecha de vencimiento y  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar.

De acuerdo al modelo de Black-Scholes el valor de la opción al tiempo  $t$  está dado por:

$$F_t = e^{-r(T-t)} E^* \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (3.6)$$

donde,  $E^*[X|\mathcal{F}_t]$  denota la esperanza condicional de la variable aleatoria  $X$ , dado  $\mathcal{F}_t$ , bajo la medida de probabilidad  $P^*$ .

Por otro lado, si se divide el intervalo  $[0, T]$  en  $n$  subintervalos, de tal forma que  $h = \frac{T}{n}$  determine los tiempos  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n$  con  $t_i = ih$  y se considera (3.5), se obtiene la relación

$$S_{t_2} = S_{t_1} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_2 - t_1) + (W_{t_2} - W_{t_1})\sigma}. \quad (3.7)$$

En particular para  $t = 0$  nos interesa calcular

$$F_0 = e^{-rT} E^* \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \middle| \mathcal{F}_0 \right]. \quad (3.8)$$

lo cual de acuerdo a [8], se reduce a calcular

$$F_0 = e^{-rT} E^* \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \right]. \quad (3.9)$$

Sin embargo, para  $\{S_t\}_{t \geq 0}$ , un movimiento browniano geométrico, el promedio aritmético  $\frac{1}{T} \int_0^T S_u du$  no se distribuye lognormal a diferencia del promedio geométrico; por eso es necesario aproximar la integral.

Para aproximar el precio de una opción euroasiática por el método de Monte-Carlo; primero es necesario aproximar

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_u du \quad (3.10)$$

para lo cual, podemos utilizar dos enfoques.

El primer esquema es aproximar a (3.10) mediante sumas de Riemann, como sigue

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_u du \approx \frac{h}{T} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} \quad (3.11)$$

una vez realizado esto, de acuerdo al método de Monte-Carlo un estimador de  $F_0$ , es

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{0,M} &= \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left( \frac{h}{T} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} - K \right)_+ \\ &= \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left( \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} - K \right)_+.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Así,  $\widehat{F}_{0,M}$  es el estimador del precio de una opción de compra euroasiática usando  $M$  trayectorias del precio del subyacente y observando para cada trayectoria  $n$  veces el precio del subyacente.

Un segundo esquema se obtiene al aproximar a (3.10) mediante el Método del Trapecio como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_0^T S_u du &= \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} S_u du \\ &\approx \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [S_{t_i} + S_{t_{i+1}}].\end{aligned}\quad (3.13)$$

De la ecuación (3.7) y (3.13) tenemos

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_u du \approx \frac{h}{2T} \sum_{i=0}^{n-1} \{S_{t_i} [1 + e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)h + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma}]\}.\quad (3.14)$$

Desarrollando el término  $e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)h + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma}$  en serie de Taylor

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_0^T S_u du &\approx \frac{h}{2T} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} \left\{ 2 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 h^2 + 2\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)h(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma \right. \\ &\quad \left. \left. + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \sigma^2 + \dots \right] \right\}\end{aligned}$$

Si se utiliza  $n$  lo suficientemente grande para que  $h$  sea pequeña, se conservan los términos de orden a lo más  $h$  y considerando que con la variación cuadrática de  $\frac{1}{2}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma$  se cancela a  $-\frac{1}{2}\sigma^2 h$ , obtenemos:

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_u du \approx \frac{h}{2T} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} [2 + rh + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma].\quad (3.15)$$

Así, por Monte-Carlo, el estimador de  $F_0$  de acuerdo al segundo esquema es

$$\widehat{F}_{0,M} = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left( \frac{h}{2T} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} (2 + rh + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma) - K \right)_+ . \quad (3.16)$$

Considerando que  $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$  se distribuye como una normal con media 0 y varianza  $h$ , tenemos:

$$\widehat{F}_{0,M} = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left[ \frac{h}{2T} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} (2 + rh + y_{i+1} \sqrt{h} \sigma) - K \right]_+ , \quad (3.17)$$

con  $y_i$  una variable aleatoria normal estándar.

Es importante observar que  $\widehat{F}_{0,M}$ , ya no es un estimador insesgado a consecuencia de haber estimado el promedio aritmético en la función de pago. Pero, si es posible afirmar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2T} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} [2 + rh + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma] = \frac{1}{T} \int_0^T S_u du. \quad (3.18)$$

Es decir,

$$E \left[ \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2T} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} (2 + rh + y_{i+1} \sqrt{h} \sigma) - K \right)_+ \right] = F_0. \quad (3.19)$$

El tratamiento de la opción de venta es parecido o bien puede calcularse por medio de la paridad put-call para opciones asiáticas (ver [10], pág. 273)

$$\begin{aligned} e^{-rT} E^* \left[ \left( K - \frac{1}{T} \int_0^T S_u du \right)_+ \right] &= e^{-rT} E^* \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \right] \\ &- e^{-rT} E^* \left[ \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

**Ejemplo 3.1.** En el Cuadro 3.1 se presenta la estimación del valor de un call asiático usando la expresión (3.17) con los siguientes datos: Precio inicial  $S_0 = 100$ , precio de ejercicio  $K = 100$ , tasa libre de riesgo  $r = 0.10$ , volatilidad anual igual a  $\sigma = 0.2$  y con fecha de expiración en 3 meses, 6 meses y 1 año.

Presentamos la aproximación del valor de una opción de compra euroasiática, simulando  $M$  trayectorias y tomando  $n$  subintervalos del intervalo  $[0, T]$ ; así mismo se presentan el límite inferior y superior de un intervalo de confianza al 95 % del valor de la opción y la respectiva longitud del intervalo.

Cuadro 3.1: Estimación del precio de un call asiático.  
3 meses

M	n	Lím. inf	Aproximación	Lím.sup	Longitud	Tiempo(seg)
	50	2.72350217	2.95953295	3.19556374	0.47206157	0.305
1000	100	2.46291863	2.68728682	2.91165500	0.44873637	0.975
	50	2.79668979	2.90230986	3.00792994	0.21124014	2.015
5000	100	2.80666500	2.91439887	3.02213274	0.21546774	4.112
	50	2.79158880	2.86627208	2.94095536	0.14936655	4.033
10000	100	2.84336340	2.91855575	2.99374809	0.15038469	9.778
	50	2.85988573	2.89382583	2.92776593	0.06788019	20.066
50000	100	2.89773692	2.93183639	2.96593586	0.06819894	48.889
	50	2.87867228	2.90242448	2.92617669	0.04750440	49.512
100000	100	2.90541400	2.92957461	2.95373522	0.04832121	99.015

6 meses

M	n	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
	50	4.31511940	4.67633595	5.03755249	0.72243309	0.521
1000	100	4.25685675	4.61372120	4.97058566	0.71372890	1.06
	50	4.32013925	4.47937343	4.63860761	0.31846836	2.522
5000	100	4.41533091	4.57545301	4.73557512	0.32024420	4.854
	50	4.34954233	4.46066581	4.57178929	0.22224695	4.475
10000	100	4.37732965	4.48929784	4.60126603	0.22393638	10.526
	50	4.46608328	4.51659812	4.56711296	0.10102967	21.256
50000	100	4.43137423	4.48151874	4.53166326	0.10028903	50.632
	50	4.45325464	4.48886997	4.52448531	0.07123066	49.908
100000	100	4.45070416	4.48630352	4.52190288	0.07119872	101.651

1 año

M	n	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
	50	6.85253798	7.37994174	7.90734549	1.05480750	0.39
1000	100	6.29442910	6.78298610	7.27154309	0.97711399	1.054
	50	6.66168865	6.89519310	7.12869770	0.46700907	1.789
5000	100	6.82350419	7.06188503	7.30026587	0.47676168	4.115
	50	7.03466448	7.20415371	7.37364293	0.33897845	3.999
10000	100	7.05527916	7.22588957	7.39649998	0.34122082	9.999
	50	6.97220897	7.04711512	7.12202128	0.14981231	19.854
50000	100	6.96613670	7.04112453	7.11611236	0.14997565	49.782
	50	6.97150205	7.02399112	7.07648018	0.10497812	50.152
100000	100	6.98074003	7.03369631	7.08665260	0.10591256	99.138

Precio del call asiático con características: Precio inicial  $S_0 = 100$ , precio de ejercicio  $K = 100$ , tasa libre de riesgo  $r = 0.10$ , volatilidad anual igual a  $\sigma = 0.2$  y con fecha de expiración en 3 meses, 6 meses y 1 año.

### 3.1.1. Estimación de la cobertura.

Para determinar la cobertura de una opción de compra euroasiática, es necesario como ya sabemos, determinar el valor de la  $\Delta$  de la opción; por lo que a continuación se desarrolla como estimar este parámetro utilizando el método de perturbación infinitesimal en combinación con el método de Monte-Carlo.

Tomando en cuenta la notación que desarrollamos en el Capítulo 2 para el método de perturbación infinitesimal tenemos que  $Y$ , la función de pago descontada está dada por

$$Y(A) = e^{-rT} \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+, \quad (3.21)$$

donde  $A$  es el promedio aritmético.

Se pretende estimar

$$\Delta = \frac{dF}{dS_0} = \frac{d}{dS_0} E[Y] = E \left[ \frac{d}{dS_0} Y \right]. \quad (3.22)$$

Para esto, sea  $\bar{S} \approx \frac{1}{T} \int_0^T S_u du$  y

$$Y(\bar{S}) = e^{-rT} (\bar{S} - K)_+, \quad (3.23)$$

donde  $\bar{S}$  está dado según el esquema de Riemann (3.11) o del Trapecio (3.15).

Derivando  $Y$  con respecto a  $S_0$ , tenemos

$$\frac{dY}{dS_0} = \frac{dY}{d\bar{S}} \frac{d\bar{S}}{dS_0} \quad (3.24)$$

para el primer factor

$$\frac{d}{d\bar{S}} \max\{\bar{S} - K, 0\} = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{S} > K \\ 0 & \text{si } \bar{S} < K \end{cases}, \quad (3.25)$$

sea

$$\mathbf{1}\{\bar{S} > K\} = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{S} > K \\ 0 & \text{si } \bar{S} < K \end{cases} \quad (3.26)$$

por lo tanto,

$$\frac{dY}{d\bar{S}} = e^{-rT} \mathbf{1}\{\bar{S} > K\}. \quad (3.27)$$

Para el segundo término, y de acuerdo al esquema desarrollado en base al Método del Trapecio, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{S}}{dS_0} &= \frac{d}{dS_0} \left( \frac{h}{2T} \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} (2 + rh + y_{i+1} \sqrt{h} \sigma) \right) \\
&= \frac{h}{2T} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{dS_{t_i}}{dS_0} (2 + rh + y_{i+1} \sqrt{h} \sigma) \\
&= \frac{h}{2T} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S_{t_i}}{S_0} (2 + rh + y_{i+1} \sqrt{h} \sigma) \\
&= \frac{\bar{S}}{S_0}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

con  $y_i$  una variable aleatoria normal estándar.

Por lo tanto, la derivada de  $Y$  con respecto a  $S_0$  es

$$\frac{d}{dS_0} Y = e^{-rT} \mathbf{1}\{\bar{S} > K\} \frac{\bar{S}}{S_0}. \tag{3.29}$$

Por último, de acuerdo al método de Monte-Carlo un estimador de  $\Delta$  es:

$$\hat{\Delta}_M = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left( \mathbf{1}\{\bar{S}_j > K\} \frac{\bar{S}_j}{S_0} \right). \tag{3.30}$$

Éste es el estimador de  $\Delta$  simulando  $M$  trayectorias y usando el esquema desarrollado en (3.15).

Si se utilizara el esquema de sumas de Riemann, se obtendría la misma expresión que en (3.30), con la excepción de que al calcular a  $\bar{S}$  se debe emplear la expresión (3.11).

Es importante considerar que al igual que el estimador  $\hat{F}_{0,M}$ , el estimador  $\hat{\Delta}_M$  ya no es insesgado a consecuencia de la aproximación de  $\frac{1}{T} \int_0^T S_u du$ , pero, si es posible establecer lo siguiente

$$E \left[ \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left( \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{1}\{\bar{S}_j > K\} \frac{\bar{S}_j}{S_0} \right) \right] = \Delta \tag{3.31}$$

es decir, el estimador  $\Delta_M$  es insesgado siempre y cuando sea posible calcular de forma exacta el valor de la integral  $\frac{1}{T} \int_0^T S_u du$ . De esta manera, cuanto más exacto sea el cálculo del promedio aritmético más seguro se estará de que el estimador  $\Delta_M$  es una buena aproximación.

El error que se comete al estimar la sensibilidad del precio de las opciones asiáticas con el método de perturbación infinitesimal combinado con Monte-Carlo depende de la aproximación de la integral y del hecho de usar Monte-Carlo. Para estimar el sesgo se usa la siguiente estimación de error

$$\sqrt{E \left[ \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - Y_T^{e,n} \right]^2} = \frac{\sigma}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

La varianza va a depender de  $n$ , número de subdivisiones de la integral y  $M$  el número de trayectorias. El orden del error que se introduce para  $MSE$  es  $\frac{C}{n^2}$ . La estimación del error aparece en el artículo [5].

En el Cuadro 3.2 se presentan los resultados obtenidos de estimar la delta de un call asiático utilizando la expresión (3.30) y con los siguientes datos: Precio inicial  $S_0 = 100$ , precio de ejercicio  $K = 100$ , tasa libre de riesgo  $r = 0.10$ , volatilidad anual igual a  $\sigma = 0.2$  y con fecha de expiración en 3 meses, 6 meses y 1 año.

Cuadro 3.2: Estimación de la  $\Delta$  de un call asiático por el método de perturbación infinitesimal combinado con Monte-Carlo.

3 meses						
M	n	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
	50	0.54423253	0.57587395	0.60751537	0.06328284	0.5
1000	100	0.53113264	0.56280961	0.59448659	0.06335395	0.99
	50	0.56549084	0.57961855	0.59374626	0.02825542	1.8
5000	100	0.57814684	0.59223391	0.60632098	0.02817414	4.01
	50	0.57654796	0.58651925	0.59649053	0.01994257	3.99
10000	100	0.57529849	0.58527940	0.59526032	0.01996182	9.999
	50	0.58115072	0.58561198	0.59007323	0.00892250	19.99
50000	100	0.57890783	0.58337321	0.58783859	0.00893075	48.985
	50	0.58542498	0.58857688	0.59172878	0.00630379	49.055
100000	100	0.58532553	0.58847738	0.59162924	0.00630370	97.258
6 meses						
M	n	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
	50	0.56752630	0.59892278	0.63031926	0.06279296	0.4
1000	100	0.60967421	0.64056933	0.67146445	0.06179024	1.009
	50	0.60772223	0.62170082	0.63567941	0.02795717	1.988
5000	100	0.60102381	0.61504770	0.62907158	0.02804777	4.001
	50	0.60515333	0.61503725	0.62492116	0.01976782	3.998
10000	100	0.61184357	0.62170078	0.63155799	0.01971441	10.001
	50	0.61370270	0.61811902	0.62253534	0.00883264	19.215
50000	100	0.61433277	0.61875210	0.62317142	0.00883864	48.215
	50	0.61080068	0.61392996	0.61705924	0.00625855	49.052
100000	100	0.61327756	0.61640501	0.61953246	0.00625490	97.21
1 año						
M	n	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
	50	0.62470089	0.655120969	0.68554104	0.06084014	0.52
1000	100	0.61508962	0.64570165	0.67631368	0.06122405	0.888
	50	0.63231452	0.64596958	0.65962465	0.02731013	2.001
5000	100	0.64139812	0.65495708	0.66851604	0.02711791	4.213
	50	0.63757800	0.64722348	0.65686896	0.01929096	3.998
10000	100	0.64397024	0.65359108	0.66321192	0.01924168	9.899
	50	0.64530805	0.64961336	0.65391866	0.00861060	20.015
50000	100	0.64961323	0.65390918	0.65820513	0.00859189	47.785
	50	0.64763332	0.65067558	0.65371784	0.00608452	50.526
100000	100	0.64558567	0.64863133	0.65167698	0.00609131	98.287

Cálculo de la  $\Delta$  de un call asiático con características: Precio inicial  $S_0 = 100$ , precio de ejercicio  $K = 100$ , tasa libre de riesgo  $r = 0.10$ , volatilidad anual igual a  $\sigma = 0.2$  y con fecha de expiración en 3 meses, 6 meses y 1 año.

### 3.1.2. Cálculo de la vega de una opción asiática.

El método de perturbación infinitesimal no sólo es útil para calcular la  $\Delta$  de la opción asiática sino que también permite determinar el valor de otras griegas; como muestra de ello a continuación se calcula la  $\nu$  de un call asiático.

Se pretende estimar

$$\nu = \frac{dF}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma} E[Y] = E\left[\frac{d}{d\sigma} Y\right]. \quad (3.32)$$

Para esto, se considera  $\bar{S} \approx \frac{1}{T} \int_0^T S_u du$  y

$$Y(\bar{S}) = e^{-rT} (\bar{S} - K)_+ \quad (3.33)$$

con  $\bar{S}$  calculado conforme al esquema de Riemann (3.11) o del Trapecio (3.15).

Derivando  $Y$  con respecto a  $\sigma$ , tenemos

$$\frac{dY}{d\sigma} = \frac{dY}{d\bar{S}} \frac{d\bar{S}}{d\sigma}. \quad (3.34)$$

El primer factor es igual a

$$\frac{d}{d\bar{S}} \max(0, \bar{S} - K) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{S} > K \\ 0 & \text{si } \bar{S} < K \end{cases} \quad (3.35)$$

por lo que

$$\frac{dY}{d\bar{S}} = e^{-rT} \mathbf{1}\{\bar{S} > K\}, \quad (3.36)$$

con

$$\mathbf{1}\{\bar{S} > K\} = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{S} > K \\ 0 & \text{si } \bar{S} < K \end{cases}. \quad (3.37)$$

Para el segundo factor, tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [S_{t_i} + S_{t_{i+1}}] \\ &= \frac{h}{2T} \left\{ S_0 + \sum_{i=1}^{n-1} 2S_{t_i} + S_n \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Derivando a  $\bar{S}$  con respecto a  $\sigma$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{S}}{d\sigma} &= \frac{h}{2T} \frac{d}{d\sigma} \left\{ S_0 + \sum_{i=1}^{n-1} 2S_{t_i} + S_n \right\} \\ &= \frac{h}{2T} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} 2 \frac{dS_{t_i}}{d\sigma} + \frac{dS_n}{d\sigma} \right],\end{aligned}\quad (3.39)$$

se observa que  $\sigma$  afecta explícitamente a  $S_{t_i}$  e implícitamente a través de la dependencia de  $S_{t_{i-1}}$  con  $\sigma$ . De esta manera, la derivada de  $S_{t_i}$  con respecto a  $\sigma$  es

$$\frac{dS_{t_i}}{d\sigma} = \frac{dS_{t_{i-1}}}{d\sigma} \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} + S_{t_i} [-\sigma(t_i - t_{i-1}) + \sqrt{t_i - t_{i-1}} y_i] \quad (3.40)$$

con  $y_i$  una variable aleatoria normal estándar.

Considerando que  $\frac{dS_0}{d\sigma} = 0$ , la ecuación (3.40) se puede escribir como

$$\frac{dS_{t_i}}{d\sigma} = S_{t_i} \left[ -\sigma t_i + \sum_{j=1}^i \sqrt{t_i - t_{j-1}} y_j \right] \quad (3.41)$$

o bien

$$\frac{dS_{t_i}}{d\sigma} = S_{t_i} \left[ \ln\left(\frac{S_{t_i}}{S_0}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_i \right]. \quad (3.42)$$

Por lo tanto, la derivada de  $Y$  con respecto a  $\sigma$  es,

$$\frac{dY}{d\sigma} = \frac{e^{-rT}h}{2T} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} 2 \frac{dS_{t_i}}{d\sigma} + \frac{dS_n}{d\sigma} \right] \mathbf{1}\{\bar{S} > K\} \quad (3.43)$$

con  $\frac{dS_{t_i}}{d\sigma}$  definido en la ecuación (3.42). Por Monte-Carlo un estimador de la  $\nu$  de un call asiático es

$$\hat{\nu}_M = e^{-rT} \sum_{j=1}^M \left\{ \frac{h}{2T} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} 2 \frac{dS_{t_i}}{d\sigma} + \frac{dS_n}{d\sigma} \right] \mathbf{1}\{\bar{S} > K\} \right\}. \quad (3.44)$$

En el Cuadro 3.3 se presenta la estimación de la  $\nu$  de un call asiático con características ya mencionadas en el Ejemplo 3.1.

Cuadro 3.3: Estimación de la  $\nu$  de un call asiático por el método de perturbación infinitesimal combinado con Monte-Carlo.

3 meses						
M	n	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
	50	10.5391149	11.8369261	13.1347374	2.59562246	0.71
1000	100	9.22260605	10.3317929	11.4409798	2.21837378	1.3
	50	10.4748646	11.0312318	11.5875990	1.11273443	3.46
5000	100	10.2329785	10.7544648	11.2759511	1.04297261	6.09
	50	10.1387982	10.5180434	10.8972886	0.75849044	6.8
10000	100	10.7496539	11.1220277	11.4944014	0.74474753	11.03
	50	10.6863155	10.8584554	11.0305953	0.34427974	30.7
50000	100	10.7825751	10.9483475	11.1141199	0.33154473	62.82
	50	10.6093937	10.7301117	10.8508298	0.24143611	64.04
100000	100	10.8025564	10.9200093	11.0374621	0.23490575	113.91
6 meses						
M	n	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
	50	12.9313722	14.7087076	16.4860431	3.55467085	0.7
1000	100	11.9414658	13.6023880	15.2633103	3.32184448	1.3
	50	13.7157563	14.4860047	15.2562532	1.54049688	3.32
5000	100	13.6097245	14.3497369	15.0897493	1.48002472	6.1
	50	14.3396785	14.9017216	15.4637647	1.12408620	6.7
10000	100	14.5554179	15.0964550	15.6374920	1.08207415	12.16
	50	14.3766426	14.6251881	14.8737335	0.49709088	30.18
50000	100	14.6879456	14.9313315	15.1747175	0.48677198	63.9
	50	14.3918677	14.5675825	14.7432974	0.35142978	63.7
100000	100	14.5082410	14.6781036	14.8479663	0.33972525	107.84
1 año						
M	n	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
	50	16.6944554	19.1717474	21.6490395	4.95458408	0.73
1000	100	18.1574031	20.6947575	23.2321119	5.07470876	1.13
	50	19.2002957	20.3462742	21.4922526	2.29195690	3.1
5000	100	17.0883188	18.1740789	19.2598390	2.17152017	6.01
	50	18.7558183	19.5531420	20.3504656	1.59464730	5.98
10000	100	19.1899343	19.9895731	20.7892119	1.59927761	12.053
	50	19.3139190	19.6694993	20.0250796	0.71116066	30.01
50000	100	19.2856252	19.6396419	19.9936586	0.70803340	60.32
	50	19.1516354	19.4002054	19.6487754	0.49714006	61.12
100000	100	19.2736591	19.5240827	19.7745063	0.50084713	108.12

Cálculo de la  $\nu$  de un call asiático con características: Precio inicial  $S_0 = 100$ , precio de ejercicio  $K = 100$ , tasa libre de riesgo  $r = 0.10$ , volatilidad anual igual a  $\sigma = 0.2$  y con fecha de expiración en 3 meses, 6 meses y 1 año.

### 3.2. Valuación y cobertura de una opción lookback

Otro tipo de opción exótica, es la opción lookback que al igual que la opción asiática, tiene una función de pago que depende de la trayectoria del subyacente y que se caracteriza por ser función del valor mínimo o máximo alcanzado por el precio del subyacente durante la vida de la opción. Los dos tipos básicos de opción lookback son: opción lookback con precio de ejercicio flotante y opción lookback con precio de ejercicio fijo.

La función de pago de un call lookback con precio de ejercicio flotante es la diferencia entre el mínimo precio del subyacente  $S_{\min}$ , alcanzado durante la vida de la opción y el precio final del subyacente  $S_T$ . Es decir,

$$h(S_{\min})_{float} = (S_T - S_{\min}). \quad (3.45)$$

De manera similar, la función de pago de un put lookback con precio de ejercicio flotante, es la diferencia entre el máximo precio del subyacente  $S_{\max}$ , alcanzado durante la vida de la opción y el precio final del subyacente  $S_T$ . Así,

$$h(S_{\max})_{float} = (S_{\max} - S_T). \quad (3.46)$$

Por otro lado, la función de pago de la opción lookback con precio de ejercicio fijo, es similar a la función de pago de las opciones estándar con precio de ejercicio  $K$ , con la excepción de que el precio final del subyacente  $S_T$ , es remplazado por el máximo o mínimo precio alcanzado por el subyacente durante la vida de la opción. De esta manera, la función de pago para un call es,

$$h(S_{\max})_{fixed} = (S_{\max} - K)_+ \quad (3.47)$$

y para un put

$$h(S_{\min})_{fixed} = (K - S_{\min})_+. \quad (3.48)$$

Se pretende calcular el precio y cobertura de la opción lookback con precio de ejercicio flotante que tienen como función de pago a (3.45) y (3.46), el tratamiento del otro tipo de opción lookback es similar. Para esto, se considera el modelo Black-Scholes (ver Capítulo 1), donde el precio del subyacente satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.49)$$

con solución

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \quad (3.50)$$

donde  $S_0$  es el precio inicial del subyacente,  $r$  la tasa libre de riesgo,  $\sigma$  la volatilidad,  $T$  la fecha de vencimiento y  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar (ver Capítulo 1).

Así el valor de un call lookback con precio de ejercicio flotante al tiempo  $t$  está dado por:

$$C_t = e^{-r(T-t)} E^* [S_T - S_{\min} | \mathcal{F}_t], \quad (3.51)$$

donde,  $E^*[X | \mathcal{F}_t]$  denota la esperanza condicional de la variable aleatoria  $X$ , dado  $\mathcal{F}_t$ , bajo la medida de probabilidad  $P^*$ , conocida como la probabilidad de riesgo neutro.

Por otro lado, para un put lookback con precio de ejercicio flotante tenemos

$$P_t = e^{-r(T-t)} E^* [S_{\max} - S_T | \mathcal{F}_t]. \quad (3.52)$$

Podemos valorar estas opciones mediante el método de Monte-Carlo, a partir de simular el precio final del activo subyacente  $S_T$  y el máximo  $S_{\max}$  o mínimo  $S_{\min}$  precio del subyacente alcanzado en el intervalo de tiempo  $[0, T]$ . Para esto, es necesario dividir el intervalo  $[0, T]$  en  $n$  subintervalos de longitud  $h = \frac{T}{N}$ , lo que determina los tiempos  $t_0, t_1, \dots, t_n$ . Así, para aproximar a  $S_{\max}$  podemos usar,

$$\widehat{S}_{\max} = \max\{S_{t_0}, S_{t_1}, \dots, S_{t_{n-1}}, S_T\}$$

y para aproximar a  $S_{\min}$  usamos,

$$\widehat{S}_{\min} = \min\{S_{t_0}, S_{t_1}, \dots, S_{t_{n-1}}, S_T\} \quad (3.53)$$

donde,  $S_{t_i} = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t_i + y_i \sqrt{t_i} \sigma}$ ,  $0 \leq t_i \leq T$  y  $y_i$  es una variable aleatoria normal estándar.

De acuerdo al método de Monte-Carlo el estimador del valor inicial de un call lookback, usando  $M$  trayectorias del precio del subyacente es

$$C_0 = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{i=1}^M [S_T - \widehat{S}_{\min}]. \quad (3.54)$$

De la misma manera, una estimación del valor inicial de un put lookback, es

$$P_0 = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{i=1}^M [\widehat{S}_{\max} - S_T]. \quad (3.55)$$

**Ejemplo 3.2.1.** *En el Cuadro 3.4 se presenta los resultados obtenidos de estimar el valor inicial de un call lookback con precio de ejercicio flotante y cuyos datos son: Precio inicial  $S_0 = 80$ , tasa libre de riesgo  $r = 0.05$ , volatilidad anual igual a  $\sigma = 0.25$  y con fechas de expiración en 3 meses, 6 meses y 1 año.*

Cuadro 3.4: Estimación del precio de una opción de compra lookback.  
3 meses

M	N	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
	100	7.27074654	7.65756723	8.04438792	0.77364138	0.56
1000	200	7.52018361	7.92022229	8.32026097	0.80007736	1.15
	100	7.75034511	7.93864266	8.12694021	0.37659510	2.56
5000	200	7.80105596	7.98300705	8.16495814	0.36390218	4.6
	100	7.82266952	7.94928556	8.07590160	0.25323208	4.58
10000	200	7.99849630	8.12917892	8.25986145	0.26136506	11.59
	100	7.97488370	8.03280106	8.09071842	0.11583471	23.07
50000	200	8.01809392	8.07675948	8.13542503	0.11733111	49.85
	100	8.00714555	8.04830924	8.08947293	0.08232737	50.014
100000	200	8.06038758	8.10162669	8.14286570	0.08247820	99.56

6 meses

M	N	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
	100	10.6129011	11.2374525	11.8620030	1.24910279	0.46
1000	200	10.6122099	11.2267430	11.8412766	1.22906670	1.02
	100	10.8219958	11.0889984	11.3560009	0.53400505	2.58
5000	200	10.9805418	11.2466256	11.5127094	0.53216754	4.11
	100	11.0386397	11.2319459	11.4252521	0.38661241	3.99
10000	200	11.1865247	11.3772370	11.5679493	0.38142458	10.5
	100	11.2962894	11.3825979	11.4689065	0.17261703	19.97
50000	200	11.3108456	11.3964780	11.4821110	0.17126543	49.85
	100	11.2965460	11.3570020	11.4174579	0.12091191	49.97
100000	200	11.4531443	11.5141780	11.5752117	0.12206738	101.1

1 año

M	N	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
	100	14.6572996	15.4809970	16.3046940	1.64739476	0.47
1000	200	15.0716822	15.9535732	16.8354643	1.76378203	0.898
	100	15.3453584	15.7549775	16.1645967	0.81923830	2.6
5000	200	15.7315756	16.1345549	16.5375342	0.80595865	4.11
	100	15.9892844	16.2828716	16.5764587	0.58717433	4.13
10000	200	16.0285777	16.3125878	16.5965978	0.56802009	10.21
	100	16.1869053	16.3160814	16.4452500	0.25835216	18.967
50000	200	16.2699612	16.3997469	16.5295325	0.25957124	49.695
	100	16.2819084	16.3727242	16.4635399	0.18163149	50.265
100000	200	16.3446444	16.4357872	16.5269300	0.18228554	97.55

Precio de un call lookback con características: Precio inicial  $S_0 = 80$ , tasa libre de riesgo  $r = 0.05$ , volatilidad anual igual a  $\sigma = 0.25$  y con fecha de expiración en 3 meses, 6 meses y 1 año.

### 3.2.1. Delta de una opción lookback

La función de pago de una opción lookback, es una función para la cual es posible aplicar el método de perturbación infinitesimal para el cálculo de la  $\Delta$  de la opción, lo cual se realiza a continuación.

Por la notación que se ha venido desarrollando, la función de pago descontada de un call lookback es

$$Y = e^{-rT} [S_T - \widehat{S}_{\min}]. \quad (3.56)$$

Y de acuerdo al método de perturbación infinitesimal, la  $\Delta$  de una call lookback que denotaremos como  $\Delta_C$  es

$$\Delta_C = \frac{dC}{dS_0} = \frac{d}{dS_0} E[Y] = E \left[ \frac{d}{dS_0} Y \right]. \quad (3.57)$$

Por lo que al derivar  $Y$  con respecto a  $S_0$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dS_0} &= \frac{d}{dS_0} e^{-rT} [S_T - \widehat{S}_{\min}] \\ &= e^{-rT} \left[ \frac{d}{dS_0} S_T - \frac{d}{dS_0} \widehat{S}_{\min} \right] \\ &= e^{-rT} \left[ \frac{S_T}{S_0} - \frac{\widehat{S}_{\min}}{S_0} \right] \\ &= \frac{Y}{S_0}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Utilizando el método de Monte-Carlo, el estimador de  $\Delta$  de un call lookback, generando  $M$  trayectorias del subyacente, es

$$\widehat{\Delta}_C = \frac{e^{-rT}}{MS_0} \sum_{i=1}^M [S_T - \widehat{S}_{\min}]. \quad (3.59)$$

La deducción del estimador de la  $\Delta$  de un put lookback que denotaremos como  $\widehat{\Delta}_P$  es similar y se obtiene la siguiente expresión:

$$\widehat{\Delta}_P = \frac{e^{-rT}}{MS_0} \sum_{i=1}^M [\widehat{S}_{\max} - S_T]. \quad (3.60)$$

Los estimadores  $\widehat{\Delta}_C$  y  $\widehat{\Delta}_P$  no son insesgados en tanto que  $S_{\min}$  y  $S_{\max}$  se están estimando en cada trayectoria. Lo que puede observarse es que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \widehat{S}_{\min} = S_{\min} \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \widehat{S}_{\max} = S_{\max}$$

por lo que entre mayor sea la exactitud de  $\widehat{S}_{\max}$  y  $\widehat{S}_{\min}$  más seguro se estará de que los estimadores  $\widehat{\Delta}_C$  y  $\widehat{\Delta}_P$  son una buena aproximación.

En el Cuadro 3.5 se muestran los resultados de estimar la  $\Delta$  de un call lookback con características ya mencionadas en el Ejemplo 3.2.1.

Cuadro 3.5: Estimación de la  $\Delta$  de un call lookback por el método de perturbación infinitesimal combinado con Monte-Carlo.

3 meses						
M	N	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
	100	0.08361147	0.09140364	0.09919582	0.01558435	0.5
1000	200	0.08892916	0.09720572	0.10548229	0.01655313	0.97
	100	0.08750415	0.09090792	0.09431170	0.00680754	2.2
5000	200	0.08863730	0.09213947	0.09564165	0.00700434	4.01
	100	0.08829480	0.09070077	0.09310674	0.00481194	3.9
10000	200	0.08821091	0.09065862	0.09310633	0.00489542	10.099
	100	0.08964230	0.09072980	0.09181730	0.00217499	19.79
50000	200	0.08932073	0.09040399	0.09148725	0.00216651	49.985
	100	0.09061937	0.09139278	0.09216620	0.00154682	49.095
100000	200	0.08980747	0.09057582	0.09134416	0.00153669	98.2058
6 meses						
M	N	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
	100	0.12294837	0.13475174	0.14655510	0.02360672	0.39
1000	200	0.12821394	0.14016095	0.15210795	0.02389400	1.1
	100	0.13193928	0.13726032	0.14258137	0.01064208	1.78
5000	200	0.13672067	0.14219060	0.14766053	0.01093986	4.01
	100	0.13701245	0.14081379	0.14461513	0.00760268	3.99
10000	200	0.13440635	0.13816987	0.14193340	0.00752704	10
	100	0.13760971	0.13929484	0.14097996	0.00337025	19.915
50000	200	0.13882957	0.14053202	0.14223447	0.00340489	49.315
	100	0.13821403	0.13941060	0.14060716	0.00239312	49.702
100000	200	0.13906493	0.14026254	0.14146014	0.00239520	97.81
1 año						
M	N	Lím. inf	Aproximación	Lím. sup	Longitud	Tiempo(seg)
	100	0.17760487	0.19483490	0.21206493	0.03446006	0.62
1000	200	0.18539374	0.20255014	0.21970653	0.03431279	0.99
	100	0.19604100	0.20396177	0.21188254	0.01584154	1.998
5000	200	0.19949723	0.20751306	0.21552889	0.01603166	4.065
	100	0.19877835	0.20440143	0.21002452	0.01124616	4.115
10000	200	0.19918403	0.20490378	0.21062354	0.01143950	10.099
	100	0.19764005	0.20013601	0.20263197	0.00499192	20
50000	200	0.19895145	0.20145547	0.20395949	0.00500804	49.66
	100	0.20004129	0.20181049	0.20357970	0.00353841	50.22
100000	200	0.20075765	0.20252954	0.20430144	0.00354379	97.39

Estimación de la  $\Delta$  de un call lookback con características: Precio inicial  $S_0 = 80$ , tasa libre de riesgo  $r = 0.05$ , volatilidad anual igual a  $\sigma = 0.25$  y con fecha de expiración en 3 meses, 6 meses y 1 año.

# Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se muestra como el método de Monte-Carlo puede ser aplicado a la valuación y cobertura de opciones, específicamente el caso de la opción asiática y lookback. La rapidez de convergencia del método de Monte-Carlo depende del número de trayectorias que se generan para calcular la media muestral, así como de la varianza de la función. Entre mayor sea el número de trayectorias que se generan, mayor será la precisión del resultado. Sin embargo, una desventaja del método de Monte-Carlo es la lentitud con que converge.

Por otro lado, la evidencia teórica y numérica obtenida en el capítulo dos indica que el método de perturbación infinitesimal, cuando es aplicable, da mejores estimadores de la sensibilidad de esperanzas que los del método de diferencias finitas. Comparando el método de perturbación infinitesimal con el método de diferencias finitas, el primero genera estimadores insesgados a diferencia del segundo método y además requiere menor tiempo computacional ya que estima directamente la derivada.

Sin embargo, el método de perturbación infinitesimal requiere intercambiar el orden de diferenciación e integración lo cual sólo es posible bajo las condiciones que se mencionaron en el apartado 2.3 o bajo continuidad en la función de pago de la opción en la mayoría de los casos. Éste es el inconveniente por el cual no es posible aplicar el método a opciones como la digital y barrera y también no permite estimar la gamma de ninguna opción.

El problema de discontinuidad en la función de pago de las opciones no es posible solucionarlo utilizando el método de diferencias finitas, ya que si bien es fácil de implementar, cuando el método de perturbación infinitesimal es inaplicable, el método de diferencias finitas tiene un considerable error cuadrático medio. El error cuadrático medio en el método de diferencias finitas se debe a que al utilizar pequeños incrementos en el valor del parámetro con respecto al cual se estima la sensibilidad del valor de la opción, se produce un considerable incremento en la varianza y por el contrario, utilizar grandes incrementos

en el parámetro produce sesgo en el estimador.

Si bien los estimadores del método de perturbación infinitesimal son insesgados, este insesgamiento se puede ver afectado cuando la función de pago de la opción depende de otra estimación como en el caso de la opción asiática que depende de la estimación del promedio aritmético y de la opción lookback que depende de los estimadores del precio máximo o mínimo del subyacente, por lo que el insesgamiento del estimador dado por el método de perturbación infinitesimal queda condicionado a la exactitud con que se estiman estos valores en la función de pago de la opción.

Como trabajo a futuro tenemos calcular la gamma de las opciones donde no fue posible utilizar el método de perturbación infinitesimal tal cual, ya sea primero suavizando la función de pago de la opción y de esta manera luego aplicar el método de perturbación infinitesimal o utilizando otro método conocido como razón de verosimilitud. Así como incorporar técnicas de reducción de varianza que permitan mejorar la rapidez con que converge el método de Monte-Carlo.

# Bibliografía

- [1] Fernández Begoña y Saavedra Patricia. *Introducción a las Finanzas Matemáticas: Modelos en Tiempo Discreto*. Notas del XVIII Foro Nacional de Estadística. 2003.
- [2] Glasserman Paul. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Stochastic modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag. 2004.
- [3] Jäckel Peter. *Monte Carlo Methods in Finance*. John Wiley y Sonss. 2002.
- [4] Lamberton Damien y Lapeyre Bernard. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman y Hall. 2000.
- [5] Lapeyre Bernard y Teman, E. *Competitive Monte-Carlo Methods for the pricing of Asian Options*. Journal of Computational Finance. Vol 5. Num 1. 2001.
- [6] Mendenhall William. *Estadística matemática con aplicaciones*. Thomson. 2002.
- [7] Mikosch Thomas. *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. World Scientific. 2000.
- [8] Saavedra Patricia y Ibarra Víctor Hugo. *El método Monte-Carlo y su aplicación a finanzas*. Notas de XVI Escuela Nacional de Análisis Numérico y Optimización. Tlaxcala. 2006.
- [9] Venegas Francisco. *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Thomson. 2006.
- [10] Wilmott Paul. *Paul Wilmott in Quantitative Finance*. John Wiley y Sonss. 2001.