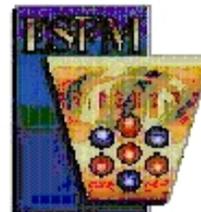




Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas



**“INVARIANCIA DE LA ECUACIÓN ESTACIONARIA
DE SCHRÖDINGER, OPERADORES ESCALERA
Y POTENCIALES ISOSPECTRALES “**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS**

**PRESENTA
CHRISTIAN PACHECO GARCÍA**

**DIRECTOR DE TESIS:
DR. JESUS GARCÍA RAVEL O**

MÉXICO, D.F.

DICIEMBRE 2006

Chapter 1

Índice

Índice	i
Agradecimientos	iii
Dedicatorias	iv
Capítulo 1	
1.1 Introducción	1
Capítulo 2	
2.1 Relación de una Ecuación Diferencial Lineal de Segundo Orden con una Ecuación de Riccati y una (tipo) Schrödinger	3
Capítulo 3	
3.1 Transformada tipo Darboux	5
Capítulo 4	
4.1 Método	8
Capítulo 5	
5.1 Aplicaciones	12
5.1.1 Ecuación de Hermite	12
5.1.2 Ecuación de Bessel.....	18
5.1.3 Otras Ecuaciones tipo Schrödinger	21
5.2 Potencial Central d - Dimensional	25
5.2.1. Problema Kepler - Coulomb	26

5.2.2 Oscilador Armónico	29
5.3 Otras Aplicaciones	33
Conclusiones	35
Apéndices	
A Ecuación de Hermite	36
B Ecuación de Bessel	41
C Potencial de Morse	43
D Problema Kepler - Coulomb 3-D.....	49
E Oscilador Armónico 3-D.....	58
Referencias	70

Chapter 2

Dedicatorias

Dedico la presente tesis a todas aquellas personas que en cierta forma han intervenido en el desenvolvimiento de mi vida académica y personal, ya que una buena persona se hace con sus triunfos y fracasos, claro que mi mayor filosofía en esta vida es tratar de evitar los segundos y si se presentan pues tratar de minimizarlos al máximo.

Mi idea de iniciar mis dedicatorias en forma general, es que por lo general se llegan a olvidar los nombres de personas por diversos motivos, los cuales han contribuido muy sustancialmente en tu persona y la verdad no soy la excepción.

En particular dedico la presente tesis a mis padres, familiares muy cercanos (abuelos, tíos, primos, etc.), mis profesores de la ESFM - IPN, y amigos; por sus valiosas enseñanzas en lo que se refiere a mi vida académica y personal.

Chapter 3

Agradecimientos

Mi agradecimiento es infinito para todas aquellas personas que han intervenido en el desarrollo de mi vida académica y personal, ya que creo que sin la mezcla de estos valiosos ingredientes que en lo personal son todos estos nombres de personas que por fortuna he tenido el gusto por conocer, nunca hubiera tomado el camino en el cual ahora felizmente me encuentro.

En particular quiero dar mis agradecimientos a mis padres, hermanos, abuelos, tíos, primos, a mi asesor de tesis y profesor al Dr. Jesús García Ravelo, a mis sinodales al Dr. Alfonso Queijeiro Fontana, Dr. Jaime Avendaño López, Dr. Arturo Zúñiga Segundo, Dr. José Juan Peña Gil por el tiempo y sus valiosas observaciones para que este proyecto que ha sido muy importante en lo personal se haya concretado satisfactoriamente, a mis profesores de la ESFM - IPN por todas las herramientas que me han dado para poder concretar este proyecto, a Juan Manuel Bernal Heredia y Belén Cortes Pérez por su valioso apoyo y enseñanzas durante el desarrollo de mis estudios superiores, y a todas aquellas personas, que por mi mala memoria no recuerdo en este momento sus nombres, sin ser menos importantes que los mencionados mil gracias.

Nuevamente mi infinito agradecimiento a esta lista de grandes personas, solo me resta decirles lo siguiente espero algún día y de alguna forma pagarles todo lo que han hecho por mi, dicen que en la vida existen eventos que realmente te marcan en el rumbo de tu vida y que jamás los olvidas, les aseguro que este es uno de esos eventos.

Finalmente agradezco al Proyecto CGPI-IPN 20050593.

Chapter 4

Capítulo 1

4.1 Introducción

En general, un problema exactamente soluble en Mecánica Cuántica puede ser tratado con métodos de factorización, los cuales involucran operadores escalera de primer orden [1,2,3,4] ó de orden superior en el contexto de la Mecánica Cuántica Supersimétrica (SUSYQM) de orden superior [5]. El estudio del método de factorización ha sido relacionado con el teorema de Darboux [6,7] y la teoría de la SUSYQM estándar. Además, la introducción de una generalización de los operadores escalera ha permitido la construcción de una clase completa de potenciales isospectrales [8-13].

Demostraremos que la ecuación estacionaria de Schrödinger es invariante bajo la transformación $\psi \rightarrow (d/dx + W)\psi$, con $W(x)$ una función arbitraria, pero bajo ciertas hipótesis, satisfaciendo una ecuación de Riccati. Nuestro propósito es mostrar como esta invariancia puede ser usada para encontrar los operadores escalera de funciones especiales y cuánticas, así como los potenciales isospectrales de varios problemas.

En algunos ejemplos, obtenemos resultados que fueron publicados en diferentes artículos; en otros, obtenemos nuevos resultados. De hecho nuestro enfoque está basado en una transformada tipo Darboux, la cual nos proporciona la invariancia de la ecuación estacionaria de Schrödinger.

La estructura de la presente tesis es: En el Capítulo 2 presentamos la relación entre una

ecuación de diferencial de segundo orden y sus correspondientes ecuaciones de Riccati y (tipo) Schrödinger. En el Capítulo 3 demostramos la invariancia de la Ecuación Estacionaria de Schrödinger bajo cierta transformación y su relación con el Teorema de Darboux. En el Capítulo 4 desarrollamos nuestro método. En el Capítulo 5 damos algunas aplicaciones de dicho método. Finalmente establecemos nuestras conclusiones. Además se presentan una serie de apéndices en los cuales se obtienen explícitamente las eigenfunciones de cada problema en base a los operadores escalera obtenidos en el Capítulo 5.

Chapter 5

Capítulo 2

5.1 Relación de una Ecuación Diferencial Lineal de segundo orden con una Ecuación de Riccati y una (tipo) Schrödinger.

Consideremos la Ecuación Diferencial Lineal de segundo orden:

$$f''(x) + P(x)f'(x) + Q(x)f(x) = 0, \quad (1)$$

donde $f'(\xi) \equiv \frac{d}{d\xi}f(\xi)$, con $P(x)$ y $Q(x)$ funciones analíticas arbitrarias en el intervalo bajo consideración.

En general, la Ec.(1) puede ser transformada en una ecuación de Riccati bajo el cambio de variable $f(x) \equiv e^{v(x)}$,

$$w^2(x) + w'(x) = -P(x)w(x) - Q(x), \quad \text{con } w(x) \equiv v'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad (2)$$

Donde esta es la bien conocida relación entre una **ecuación diferencial lineal de segundo orden y una ecuación no-lineal de Riccati** [14].

Por otro lado, con el siguiente cambio de variable

$$f(x) = z(x) \exp \left[-\frac{1}{2} \int^x P(t) dt \right], \quad (3)$$

siempre podemos transformar la Ec.(1) como:

$$z''(x) + [Q(x) - \frac{1}{2}P'(x) - \frac{1}{4}P^2(x)]z(x) = 0, \quad (4)$$

donde esta ecuación determina la relación entre una **ecuación diferencial lineal de segundo orden y una ecuación (tipo) Schrödinger** [15].

Un importante ejemplo de la Ec.(4) es la ecuación estacionaria de Schrödinger, la cual corresponde a una ecuación de eigenvalores en una sola variable,

$$\psi_n^{(i)''}(x) - 2u(x, i)\psi_n^{(i)}(x) = -2\lambda_n\psi_n^{(i)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, g_n \quad (5)$$

aquí $\hbar = m = 1$ y g_n es el grado de degeneración del eigenvalor λ_n .

Aplicando el resultado expresado en la Ec.(2), a la Ec.(5), obtenemos la ecuación asociada de Riccati para dicha ecuación:

$$w^2(x) + w'(x) = 2(u(x) - \lambda_n), \quad (6)$$

con

$$w(x) = \frac{\psi_n^{(i)'}(x)}{\psi_n^{(i)}(x)} \equiv \frac{d \ln \psi_n^{(i)}(x)}{dx}. \quad (7)$$

Por lo que la Ec.(5) puede ser escrita como

$$\psi_n^{(i)''}(x) - (w^2(x) + w'(x))\psi_n^{(i)}(x) = 0, \quad (8)$$

de donde podemos ver a $\psi_n^{(i)}(x)$ como un eigenestado del Hamiltoniano con potencial $w^2(x) + w'(x)$, y con eigenvalor asociado igual a 0.

En la siguiente sección mostraremos como las Ecs.(5) y (6) están conectadas, cuando una transformada de Darboux estándar es aplicada a la Ec.(5).

Chapter 6

Capítulo 3

6.1 Transformada tipo Darboux

Definimos una transformada tipo Darboux de la solución de la Ec.(5) $\psi_n^{(i)}(x)$ como:

$$\varphi(x) \equiv \left(\frac{d}{dx} - W(x) \right) \psi_n^{(i)}(x), \quad (9)$$

donde $W(x)$ es una función arbitraria, que convenientemente será elegida. Además, $W(x)$ no esta conectada *a priori* con alguna eigenfunción de la Ec.(5), como sucede en una transformada de Darboux común [6].

Para aplicar la Ec.(9) a la Ec.(5) calculemos:

$$\varphi'(x) \equiv \frac{d}{dx} \left(\psi_n^{(i)'}(x) - W(x)\psi_n^{(i)}(x) \right) = \psi_n^{(i)''}(x) - W'(x)\psi_n^{(i)}(x) - W(x)\psi_n^{(i)'}(x) \quad (10)$$

y

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= \psi_n^{(i)'''}(x) - W''(x)\psi_n^{(i)}(x) - W'(x)\psi_n^{(i)'}(x) - W'(x)\psi_n^{(i)'}(x) - W(x)\psi_n^{(i)''}(x) \\ &= \psi_n^{(i)'''}(x) - W(x)\psi_n^{(i)''}(x) - 2W'(x)\psi_n^{(i)'}(x) - W''(x)\psi_n^{(i)}(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Como $\psi_n^{(i)}(x)$ es una solución de la Ec.(5)

$$\psi_n^{(i)''}(x) = 2[u(x) - \lambda_n]\psi_n^{(i)}(x) \quad (12)$$

y

$$\psi_n^{(i)'''}(x) = 2[u(x) - \lambda_n]\psi_n^{(i)'}(x) + 2u'(x)\psi_n^{(i)}(x). \quad (13)$$

Sustituyendo las Ecs.(12) y (13) en la Ec.(11), obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= 2[u(x) - \lambda_n]\psi_n^{(i)'}(x) + 2u'(x)\psi_n^{(i)}(x) \\ &\quad - 2W(x)[u(x) - \lambda_n]\psi_n^{(i)}(x) - 2W'(x)\psi_n^{(i)'}(x) - W''(x)\psi_n^{(i)}(x), \\ &= -2\lambda_n(\psi_n^{(i)'}(x) - W(x)\psi_n^{(i)}(x)) + 2u(x)(\psi_n^{(i)'}(x) - W(x)\psi_n^{(i)}(x)) \\ &\quad + 2u'(x)\psi_n^{(i)}(x) - 2W'(x)\psi_n^{(i)'}(x) - W''(x)\psi_n^{(i)}(x), \\ &= 2(u(x) - \lambda_n)\varphi(x) + 2u'(x)\psi_n^{(i)}(x) - 2W'(x)\psi_n^{(i)'}(x) - W''(x)\psi_n^{(i)}(x), \end{aligned} \quad (14)$$

donde hemos usado la Ec.(9). Arreglando la anterior ecuación como

$$\begin{aligned} \varphi''(x) - 2u(x)\varphi(x) &= -2\lambda_n\varphi(x) - 2W'(x)\psi_n^{(i)'}(x) - W''(x)\psi_n^{(i)}(x) + 2u'(x)\psi_n^{(i)}(x), \\ &= -2\lambda_n\varphi(x) - 2W'(x)(\psi_n^{(i)'}(x) - W(x)\psi_n^{(i)}(x)) \\ &\quad - 2W'(x)W(x)\psi_n^{(i)}(x) - W''(x)\psi_n^{(i)}(x) + 2u'(x)\psi_n^{(i)}(x), \\ &= -2\lambda_n\varphi(x) - 2W'(x)\varphi(x) - 2W'(x)W(x)\psi_n^{(i)}(x) - W''(x)\psi_n^{(i)}(x) + 2u'(x)\psi_n^{(i)}(x), \end{aligned} \quad (15)$$

ó equivalentemente:

$$\varphi''(x) - 2(u(x) - W'(x))\varphi(x) = -2\lambda_n\varphi(x) - (2W'(x)W(x) + W''(x) - 2u'(x))\psi_n^{(i)}(x), \quad (16)$$

$$\varphi''(x) - 2(u(x) - W'(x))\varphi(x) = -2\lambda_n\varphi(x) - \psi_n^{(i)}(x)\frac{d}{dx}(W^2(x) + W'(x) - 2u(x)). \quad (17)$$

Con esta ecuación observamos que eligiendo $W(x)$ de modo que

$$W^2(x) + W'(x) - 2u(x) = k \equiv cte, \quad (18)$$

ó equivalentemente, cuando $W(x)$ coincide con

$$W(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln W'(x) + \frac{u'(x)}{W'(x)}, \quad (19)$$

entonces la Ec.(17) es también una **ecuación (tipo) Schrödinger** y la función $\varphi(x)$ en la Ec.(9) es una solución de la ecuación de Schrödinger para el nuevo potencial $u(x) - W'(x)$ la cual puede ser escrita como ($V_1(x) \equiv W^2(x) - W'(x)$)

$$\varphi''(x) - V_1(x)\varphi(x) = -2\left(\lambda_n + \frac{k}{2}\right)\varphi(x), \quad (20)$$

y la Ec.(5) como

$$\psi_n^{(i)''}(x) - V_2(x)\psi_n^{(i)}(x) = -2\left(\lambda_n + \frac{k}{2}\right)\psi_n^{(i)}(x). \quad (21)$$

donde $V_2(x) \equiv W^2(x) + W'(x)$.

Chapter 7

Capítulo 4

7.1 Método

Con el resultado expresado por la Ec.(17) un procedimiento poco práctico consistiría en proponer algún valor arbitrario para la constante k y resolver directamente la ecuación de Riccati Ec.(18), ya que esta solución definirá una transformada tipo Darboux bajo la cual se garantiza la invariancia de la ecuación estacionaria de Schrödinger.

Alternativamente, podemos proponer algunas funciones de prueba para la función $W'(x)$ que aparece en el lado izquierdo de la Ec.(17) y que cambian el potencial $u(x)$ y / o eigenvalor λ_n en esta ecuación de una forma preestablecida.

Por supuesto, que toda buena función de prueba $W'(x)$, debe satisfacer la condición dada por la Ec.(18) ó (19) donde la constante k obtenida estará asociada con la correspondiente función de prueba $W'(x)$.

A continuación proponemos un método que consiste en:

Primero, la ecuación diferencial de segundo orden Ec.(1) es transformada en una ecuación tipo Schrödinger Ec.(5) como fue descrito en el Capítulo 2.

Segundo, para un potencial $u(x, i)$ dado en la Ec.(5), definimos los parámetros α y β los cuales son identificados como los cambios que sufren el eigenvalor λ_n y / o potencial $u(x)$ respectivamente en la Ec.(17) y por ser determinados, podemos intentar con las funciones $W'(x)$ siguientes:

i) $W'(x) = \lambda_{n+\alpha} - \lambda_n$. Si esta función satisface la condición de la Ec.(18) entonces de

acuerdo con la Ec.(17) tenemos que $\varphi(x)$ es una eigenfunción con eigenvalor $\lambda_{n+\alpha}$ y podemos identificarla con $\psi_{n+\alpha}^{(i)}(x)$ (ver subsección 5.1.1). De lo cual, el operador $(\frac{d}{dx} - W(x))$ en la Ec.(9) corresponde a un operador escalera de la eigenfunción $\psi_n^{(i)}(x)$ actuando en n con paso α .

ii) $W'(x) = u(x, i) - u(x, i + \beta)$. Si $W'(x)$ satisface la condición de la Ec.(18), el potencial $u(x, i)$ en la Ec.(5) cambia a $u(x, i + \beta)$, pero esto no modifica el eigenvalor λ_n , entonces $\varphi(x)$ en la Ec.(17) es identificada con $\psi_n^{(i+\beta)}(x)$ (ver sección 5.2 y subsecciones 5.1.2, 5.2.1). Por lo cual el operador en la Ec.(9) corresponde a un operador escalera de la eigenfunción $\psi_n^{(i)}$ actuando en i con paso β .

iii) $W'(x) = u(x, i) - u(x, i + \beta) + \lambda_{n+\alpha} - \lambda_n$. Si esta función de prueba satisface la condición de la Ec.(18), nosotros obtenemos la combinación de los casos i) y ii), y $\varphi(x)$ en la Ec.(17) es identificada con $\psi_{n+\alpha}^{(i+\beta)}(x)$ (ver subsección 5.2.2). De modo que el operador en la Ec.(9) corresponde a un operador escalera de la eigenfunción $\psi_n^{(i)}(x)$ actuando en n e i con pasos α y β respectivamente.

Finalmente, solamente consideramos todas aquellas funciones de prueba para $W'(x)$ que satisfagan la condición de la Ec.(18), donde la constante k ha sido encontrada y la integral de la función de prueba $W'(x)$ es una solución particular de la ecuación de Riccati. Como sabemos no existe un método general para resolver la ecuación de Riccati. Sin embargo, cuando se tiene una solución particular de esta ecuación, como es nuestro caso ($W(x)$), entonces se escribe la solución general $W_g(x)$ como $W(x) + \phi(x)$, con $\phi(x)$ una función por determinar. Luego, esta es sustituida en la ecuación de Riccati, resultando una ecuación de Bernoulli para $\phi(x)$ como se demuestra en [15]; $\phi'(x) + \phi^2(x) + 2W(x)\phi(x) = 0$. Con $W_g(x)$ así determinada, se construye la correspondiente función $\varphi_g(x)$ de la Ec.(9), la cual es automáticamente solución de la ecuación estacionaria de Schrödinger Ec.(17) para el nuevo potencial $u(x) - W_g'(x)$ y asociada al eigenvalor λ_n . Con este potencial se obtiene un Hamiltoniano, que tiene un espectro idéntico al Hamiltoniano inicial, pero con diferentes eigenfunciones.

Notamos que la función de prueba iii) es el caso más general y es una condición suficiente para la **invariancia de forma** de los potenciales $V_{1,2}(x)$ en las Ecs.(20) y (21), la cual es una condición de integrabilidad [24]. En efecto, sustituyendo la función de prueba $W'(x) = u(x, i) - u(x, i + \beta) + \lambda_{n+\alpha} - \lambda_n$ en la Ec.(18)

$$V_2(x, i) \equiv W^2(x) + W'(x) = 2u(x, i) + k, \quad (22)$$

entonces

$$\begin{aligned} V_1(x, i) &\equiv W^2(x) - W'(x) = (-W'(x) + 2u(x, i) + k) - W'(x) \\ &= -2W'(x) + 2u(x, i) + k \\ &= -2[u(x, i) - u(x, i + \beta) + \lambda_{n+\alpha} - \lambda_n] + 2u(x, i) + k \\ &= 2u(x, i + \beta) - 2\lambda_{n+\alpha} + 2\lambda_n + k. \end{aligned} \quad (23)$$

Comparando estas ecuaciones, obtenemos la siguiente relación:

$$V_2(x, i) = V_1(x, f(i)) + R(i), \quad (24)$$

donde los parametros i y $f(i)$ están relacionados el uno al otro por $f(i) = i - \beta$,

$$R(i) \equiv k(i) - k(i - \beta) + 2\lambda_{n+\alpha} - 2\lambda_n \quad (25)$$

donde hemos supuesto que en general $k = k(i)$.

Antes de que apliquemos el procedimiento anterior descrito en algunos ejemplos, queremos demostrar como la transformación en la Ec.(9), para un caso particular, se reduce a una transformada de Darboux común [6]. De hecho, por comparación de la Ec.(18) con la Ec.(6), nosotros tenemos que $w(x)$ en la Ec.(7) satisface directamente la Ec.(18). Entonces cuando escogemos:

$$W_m(x) \equiv \frac{\psi_m^{(j)'}(x)}{\psi_m^{(j)}(x)}, \quad (26)$$

tenemos que la correspondiente constante k es el eigenvalor asociado a $\psi_m^{(j)}(x)$, *i.e.*

$$k \equiv -2\lambda_m. \quad (27)$$

La función en la Ec.(9) toma la forma ($m \neq n$)

$$\varphi_{mn}(x) \equiv \left(\frac{d}{dx} - W_m(x) \right) \psi_n^{(i)}(x) = \frac{\begin{vmatrix} \psi_m^{(j)}(x) & \psi_m^{(j)'}(x) \\ \psi_n^{(i)}(x) & \psi_n^{(i)'}(x) \end{vmatrix}}{\psi_m^{(j)}(x)}, \quad (28)$$

y de acuerdo con la Ec.(20) esta es eigenfunción del Hamiltoniano con potencial $W_m^2(x) - W_m'(x)$

$$\varphi_{mn}''(x) - (W_m^2(x) - W_m'(x)) \varphi_{mn}(x) = -2(\lambda_n - \lambda_m) \varphi_{mn}(x). \quad (29)$$

Chapter 8

Capítulo 5

8.1 Aplicaciones

Aquí presentamos algunas aplicaciones simples del método descrito en el Capítulo 4.

8.1.1 Ecuación de Hermite

Consideremos la ecuación diferencial de Hermite [15]:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0. \quad (30)$$

Sustituyendo (Ec.(3))

$$H_n(x) \equiv \psi_n(x) \exp \left[-\frac{1}{2} \int^x P(t) dt \right] = \psi_n(x) \exp \left[-\frac{1}{2} \int^x -2t dt \right] = \psi_n(x) e^{x^2/2}, \quad (31)$$

en la Ec.(30) tenemos:

$$\psi_n''(x) + (2n + 1 - x^2)\psi_n(x) = 0. \quad (32)$$

Donde la Ec.(32) coincide con la ecuación del oscilador armónico cuántico 1 - Dimensional, con energía $2E_n \equiv 2n + 1$ [16], *i.e.*

$$\psi_n''(x) - x^2\psi_n(x) = -2E_n\psi_n(x), \quad (33)$$

donde la masa m y la frecuencia angular ω del oscilador armónico son igual a 1. Así mismo, por comparación con la Ec.(5) tenemos:

$$2u(x) \equiv x^2, \quad 2\lambda_n = 2E_n, \quad g_n = 1. \quad (34)$$

En este caso, podemos escoger que $\varphi(x)$ la transformación de $\psi_n(x)$ dada en la Ec.(9) corresponda a $\psi_{n+\alpha}(x)$, donde α es algún entero por determinar. Para lo cual escogemos

$$W'(x) = E_{n+\alpha} - E_n, \quad (35)$$

con lo que la Ec.(17) puede ser escrita, excepto por el segundo término del lado derecho, como:

$$\varphi''(x) - x^2\varphi(x) = -2E_{n+\alpha}\varphi(x) \quad (36)$$

donde esto es válido si la condición de la Ec.(18)

$$W^2(x) = -W'(x) + 2u(x) + k = E_n - E_{n+\alpha} + x^2 + k, \quad (37)$$

es satisfecha para k una constante. Para determinar si k es efectivamente una constante asociada a la $W'(x)$ dada en la Ec.(35), integramos esta ecuación y la elevamos al cuadrado por lo cual obtenemos

$$W^2(x) = (E_{n+\alpha} - E_n)^2 x^2 + 2(E_{n+\alpha} - E_n)xC + C^2, \quad (38)$$

donde C es una constante arbitraria de integración. Por comparación de las Ecs.(37) y (38) encontramos:

$$(E_{n+\alpha} - E_n) = \pm 1, \quad C = 0 \quad y \quad k = \mp 1, \quad (39)$$

donde la solución de la ecuación en diferencias finitas es

$$E_n = \pm \frac{n}{\alpha} + E_0. \quad (40)$$

Comparando la definición del espectro de energías del oscilador armónico 1 - Dimensional, $E_n = n + 1/2$ con la Ec.(40), tenemos que $\alpha = \pm 1$ y $E_0 = 1/2$.

Debido a que el paso α resulta ser ± 1 reescribiendo las ecuaciones con $W \rightarrow W_{\pm}$, $E_{n+\alpha} \rightarrow E_{n\pm 1}$, $\varphi \rightarrow \varphi_{\pm}$, $k \rightarrow k_{\pm}$, y $C \rightarrow C_{\pm}$ considerando ambas posibilidades.

Así, obtenemos por las Ecs.(35) y (39) que

$$W_{\pm}' = (E_{n\pm 1} - E_n) = \pm 1 \quad o \quad W_{\pm}(x) = \pm x, \quad (41)$$

por lo que la función de prueba $W_{\pm}'(x)$ de la Ec.(35) satisface la Ec.(18) para una constante $k_{\pm} = \pm 1$. Por consiguiente, de la Ec.(36) decimos que la función $\varphi_{\pm}(x)$ cumple la ecuación

$$\varphi_{\pm}''(x) - x^2\varphi_{\pm}(x) = -2E_{n\pm 1}\varphi_{\pm}(x), \quad (42)$$

y definida por la Ec.(9), la cual debe ser identificada con $\psi_{n\pm 1}(x)$,

$$\varphi_{\pm}(x) \equiv \left(\frac{d}{dx} \mp x \right) \psi_n(x) \sim \psi_{n\pm 1}(x), \quad (43)$$

donde el operador en esta ecuación es el bien conocido operador escalera para el oscilador armónico 1 - dimensional [16]. De hecho, se confirma el espectro de energía, con este enfoque, ya que los operadores escalera mueven el número cuántico n solamente una unidad.

Con los operadores escalera para $\psi_n(x)$ y la Ec.(31) obtenemos los polinomios de Hermite $H_n(x)$

$$\varphi_{\pm}(x) \equiv e^{-x^2/2} \left(\frac{d}{dx} - x \mp x \right) H_n(x) \sim e^{-x^2/2} H_{n\pm 1}(x), \quad (44)$$

donde los operadores escalera de las funciones de Hermite [15] pueden ser identificados.

Retomando la Ec.(37) y escribiendo ($k_{\pm} = \pm 1$)

$$W_{\pm}^2(x) + W_{\pm}'(x) = x^2 \pm 1. \quad (45)$$

Antes de obtener la solución general $W_{\pm g}(x)$ de esta ecuación, queremos encontrar lo siguiente. Primero, la Ec.(45) puede ser reescrita como

$$W_{\pm}^2(x) + W_{\pm}'(x) = -W_{+}(x)W_{-}(x) \pm 1, \quad (46)$$

notemos que $W(x) \equiv W_{+}(x) + W_{-}(x)$ satisface la ecuación de Riccati

$$W^2(x) + W'(x) = 0. \quad (47)$$

En efecto $W(x)$ es la solución trivial de la Ec.(47). Por otro lado si resolvemos la ecuación

$$\left(\frac{d}{dx} - W_{\pm}(x) \right) \psi_{n_{\pm}}(x) = 0, \quad (48)$$

notemos que $\psi_{n_{\pm}}(x)$ es también solución de la Ec.(32) para $n = n_{\pm} = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}$. Entonces por la Ec.(48)

$$W_{\pm}(x) = \frac{d}{dx} \ln \psi_{n_{\pm}}(x), \quad (49)$$

y si $W(x) = 0$, podemos concluir que $\psi_0(x)\psi_{-1}(x) = cte$. Es decir, ya que $\psi_0(x)$ es cuadrado integrable entonces $\psi_{-1}(x)$ no puede ser cuadrado integrable.

Segundo, las funciones $W_{+}(x)$ y $W_{-}(x)$ están conectadas con el potencial SUSY del oscilador armónico supersimétrico, $W_{SUSY}(x)$, que es un buen ejemplo de la teoría SUSY para el modelo de Witten [17]. De hecho, podemos identificar que $W_{SUSY}(x) = W_{+}(x) = -W_{-}(x)$ y que la función residuo en la Ec.(25) es $R_{\pm} = \pm 2$.

Regresamos a encontrar la solución general $W_{\pm g}(x)$ para la Ec.(45) y procediendo formalmente, definimos

$$\tilde{W}_{\pm}(x) = W_{\pm}(x) + F_{\pm}(x) = \pm x + F_{\pm}(x), \quad (50)$$

donde $F_{\pm}(x)$ es una función a ser determinada, calculando

$$\tilde{W}_{\pm}^2(x) + \tilde{W}_{\pm}'(x) = x^2 \pm 2xF_{\pm}(x) + F_{\pm}^2(x) \pm 1 + F_{\pm}'(x), \quad (51)$$

entonces $\tilde{W}_{\pm}(x)$ satisface la Ec.(18) donde $F(x)$ es tal que

$$F_{\pm}^2(x) + F'_{\pm}(x) \pm 2xF_{\pm}(x) = cte_{\pm}. \quad (52)$$

Para el caso F_- en la ecuación anterior, podemos identificar la ecuación asociada de Riccati de la ecuación de Hermite. De hecho, haciendo $H_n(x) = e^{v(x)}$ en la Ec.(30) transformamos a esta en la ecuación de Riccati

$$w^2(x) + w'(x) - 2xw(x) = -2n, \quad (53)$$

donde

$$w(x) \equiv v'(x) = \frac{d \ln H_n(x)}{dx} = \frac{H'_n(x)}{H_n(x)}. \quad (54)$$

Comparando las Ecs.(52) y (53) deducimos que: $F_-(x) \equiv w(x)$ para $cte_- = -2n$ y por la Ec.(50)

$$\tilde{W}_-(x) = -x + \frac{H'_n(x)}{H_n(x)} \sim -x + \frac{H_{n-1}(x)}{H_n(x)}, \quad (55)$$

donde en la pasada expresión tuvimos que usar el caso F_- de la Ec.(44).

Subsecuentemente $W_+(x)$ ($cte_+ = 0$) es una solución particular de la Ec.(45), y la solución general es:

$$W_{+g}(x) = x + F_+(x), \quad (56)$$

donde

$$F_+(x) = \frac{e^{-x^2}}{\gamma_+ + \int^x e^{-y^2} dy}, \quad (57)$$

y γ_+ es una constante de integración. Ya que $\tilde{W}_-(x)$ ($cte_- = -2n$) satisface la condición de la Ec.(18) ($k = k_- + cte_- = -(2n + 1)$), podemos escribir

$$W_{-g}(x) = -x + \frac{H'_n(x)}{H_n(x)} + \phi_-(x), \quad (58)$$

donde

$$\phi_-(x) = \frac{e^{2 \int^x (t-w(t)) dt}}{\gamma_- + \int^x e^{2 \int^s (t-w(t)) dt} ds}, \quad (59)$$

γ_- es otra constante de integración y $w(t)$ está dada por la Ec.(54)

Para el caso particular $w = 0$ ($n = 0$), podemos escribir las Ecs.(56) y (58) como

$$\begin{aligned} W_{\pm g}(x) &= \pm x + \frac{e^{\mp x^2}}{\gamma_{\pm} + \int e^{\mp y^2} dy} \\ &= \frac{d}{dx} \ln \left[\psi_o^{\mp 1} \left(\gamma_{\pm} + \int \psi_o^{\pm 1} dy \right) \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Entonces las funciones de la Ec.(9) corresponden a

$$\varphi_{\pm g}(x) \equiv \left(\frac{d}{dx} - W_{\pm g} \right) \psi_n^{(i)}(x), \quad (61)$$

que directamente son soluciones de la ecuación de Schrödinger

$$\varphi_{\pm g}''(x) - 2[u(x) - W_{\pm g}'(x)]\varphi_{\pm g}(x) = -2E_n\varphi_{\pm g}(x), \quad (62)$$

con el nuevo potencial

$$\begin{aligned} u(x) - W_{\pm g}'(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{d}{dx} \left(\pm x + \frac{e^{\mp x^2}}{\gamma_{\pm} + \int e^{\mp y^2} dy} \right) \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{d^2}{dx^2} \ln \left[\psi_o^{\mp 1} \left(\gamma_{\pm} + \int \psi_o^{\pm 1} dy \right) \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Equivalentemente por la Ec.(62) obtenemos que $\varphi_{\pm g}(x)$ es solución de la ecuación de Schrödinger, Ec.(5) con potencial

$$\begin{aligned}
u(x) &\rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{\mp x^2}}{x \left(\gamma_{\pm} + \int e^{\mp y^2} dy \right)} \right) \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\gamma_{\pm} + \int \psi_o^{\pm 1} dy \right), \tag{64}
\end{aligned}$$

y asociada con el eigenvalor $\lambda_n \rightarrow E_{n\pm 1}$. Ambos casos corresponden a nuevos potenciales en el espectro del oscilador. El caso "arriba" esta de acuerdo con los resultados reportados previamente en [8,17], pero aquí y en [19] se han obtenido ambos casos simultáneamente, aunque en [19] siguiendo un método diferente.

8.1.2 Ecuación de Bessel.

Para la ecuación diferencial de Bessel [15]

$$J_n''(x) + \frac{1}{x} J_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) J_n(x) = 0. \tag{65}$$

Hacemos la transformación

$$J_n(x) \equiv \mathbf{v}_n(x) \exp \left[-\frac{1}{2} \int^x P(t) dt \right] = \mathbf{v}_n(x) \exp \left[-\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} \right] = \mathbf{v}_n(x) x^{-1/2}, \tag{66}$$

resultando la ecuación (tipo) Schrödinger

$$\mathbf{v}_n'' + \left(1 - \frac{n^2 - 1/4}{x^2} \right) \mathbf{v}_n = 0. \tag{67}$$

Comparando esta con la Ec.(5), podemos identificar

$$2u(x) \equiv \frac{1}{x^2} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right), \quad 2\lambda = 1, \quad \psi_n(x) \equiv \mathbf{v}_n(x), \quad (i \equiv n), \tag{68}$$

Por la Ec.(67) podemos proponer que la transformación $\varphi(x)$ dada en la Ec.(9) corresponde a $\mathbf{v}_{n+\beta}$. Para esto escogemos

$$2W'(x) = -\frac{\beta(\beta + 2n)}{x^2}, \quad (69)$$

y la Ec.(17) puede ser escrita, excepto para el segundo término en el lado derecho, como

$$\varphi''(x) - 2(u(x) - W'(x))\varphi(x) = -\varphi(x), \quad (70)$$

o explícitamente

$$\varphi''(x) - \frac{1}{x^2} \left((n + \beta)^2 - \frac{1}{4} \right) \varphi(x) = -\varphi(x), \quad (71)$$

que es válida si la condición de la Ec.(18)

$$W^2(x) = -W'(x) + 2u(x) + k = \frac{1}{x^2} \left(n^2 + \frac{\beta(\beta + 2n)}{2} - \frac{1}{4} \right) + k, \quad (72)$$

es satisfecha para alguna constante k . Para determinar si k efectivamente es una constante, integramos la Ec.(69) obteniendo

$$W(x) = \frac{\beta(\beta + 2n)}{2x} + C, \quad (73)$$

donde C es una constante de integración. Comparando esta ecuación con el lado derecho de la Ec.(19)

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln W'(x) + \frac{u'(x)}{W'(x)} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{2(n^2 - 1/4)}{\beta(\beta + 2n)} \right), \quad (74)$$

encontramos que $C = 0$, que a su vez implica $k = 0$. Encontramos también

$$\frac{\beta(\beta \pm 2n)}{2} = 1 + \frac{2(n^2 - 1/4)}{\beta(\beta \pm 2n)}, \quad (75)$$

que tiene como solución $\beta = \pm 1$. Por lo que el paso β resulta ser ± 1 , debemos escribir en las ecuaciones anteriores $W \rightarrow W_{\pm}$, $\varphi \rightarrow \varphi_{\pm}$, $k \rightarrow k_{\pm}$, y $C \rightarrow C_{\pm}$ para considerar los 2 casos.

Entonces de acuerdo a la Ec.(73) tenemos los casos

$$W_{\pm}(x) = \pm \frac{(\pm 1 + 2n)}{2x}, \quad (76)$$

que nos permiten conseguir las funciones $\varphi_{\pm}(x)$ a través de la Ec.(9). De la Ec.(71) vemos que la función $\varphi_{\pm}(x)$ satisface

$$\varphi_{\pm}''(x) - \frac{1}{x^2} \left((n \pm 1)^2 - \frac{1}{4} \right) \varphi_{\pm}(x) = -\varphi_{\pm}(x), \quad (77)$$

y debe ser identificada con $\mathbf{v}_{n\pm 1}(x)$,

$$\varphi_{\pm}(x) \equiv \left(\frac{d}{dx} - W_{\pm}(x) \right) \mathbf{v}_n(x) \sim \mathbf{v}_{n\pm 1}(x), \quad (78)$$

o equivalentemente, usando la Ec.(66) podemos escribir

$$\varphi_{\pm}(x) \equiv x^{1/2} \left(\frac{d}{dx} \mp \frac{n}{x} \right) J_n(x) \sim J_{n\pm 1}(x), \quad (79)$$

donde los operadores en esta ecuación son los operadores escalera de las funciones de Bessel [15].

Por otro lado de la Ec.(72)

$$W_{\pm}^2(x) + W_{\pm}'(x) = \frac{1}{x^2} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right), \quad (80)$$

o equivalentemente

$$W_{\pm}^2(x) + W_{\pm}'(x) = -W_-(x)W_+(x), \quad (81)$$

deducimos que $W(x) \equiv W_+(x) + W_-(x)$ es una solución no trivial de la ecuación de Riccati

$$W^2(x) + W'(x) = 0. \quad (82)$$

Además notamos que la función residuo en la Ec. (25) es $R_{\pm} = 0$. Regresando a la Ec.(80) tenemos que la solución general es

$$\begin{aligned}
W_{\pm g}(x) &= \pm \frac{n \pm 1/2}{x} + \frac{2n}{2n\gamma_{\pm}x^{2n\pm 1} \mp x} \\
&= \frac{d}{dx} \ln \left[x^{\pm n + \frac{1}{2}} (2n\gamma_{\pm}x^{2n\pm 1} \mp x) \right].
\end{aligned} \tag{83}$$

Entonces, la correspondientes funciones definidas en la Ec.(9) son

$$\varphi_{\pm g}(x) \equiv \left(\frac{d}{dx} - W_{\pm g}(x) \right) \mathfrak{v}_n(x), \tag{84}$$

estas son directamente soluciones de la ecuación (tipo) Shrödinger

$$\varphi_{\pm g}''(x) - 2[u(x) - W_{\pm g}'(x)]\varphi_{\pm g}(x) = -\varphi_{\pm g}(x), \tag{85}$$

con potencial

$$\begin{aligned}
u(x) - W_{\pm g}'(x) &= \frac{1}{2x^2} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{d}{dx} \left(\pm \frac{n \pm 1/2}{x} + \frac{2n}{2n\gamma_{\pm}x^{2n\pm 1} \mp x} \right) \\
&= \frac{1}{2x^2} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{d^2}{dx^2} \ln \left[x^{\pm n + \frac{1}{2}} (2n\gamma_{\pm}x^{2n\pm 1} \mp x) \right].
\end{aligned} \tag{86}$$

Equivalentemente para la Ec.(85), obtenemos que $\varphi_{\pm g}$ es solución de la ecuación (tipo) Schrödinger con potencial

$$\begin{aligned}
u(x) &\rightarrow \frac{1}{x^2} \left((n \pm 1)^2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{2n}{2n\gamma_{\pm}x^{2n\pm 1} \mp x} \right) \\
&= \frac{1}{x^2} \left((n \pm 1)^2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{d^2}{dx^2} \ln \left[(2n\gamma_{\pm}x^{2n\pm 1} \mp x) \right].
\end{aligned} \tag{87}$$

que esta conectado con lo previamente publicado en [18].

8.1.3 Otras Ecuaciones tipo Schrödinger

Consideremos la ecuación (tipo) Schrödinger siguiente

$$\psi_n^{(s)''}(x) + \left((s + \frac{1}{2})e^x - \frac{1}{4}e^{2x} \right) \psi_n^{(s)}(x) = n^2 \psi_n^{(s)}(x), \quad s = 1, 2, \dots, g_n. \quad (88)$$

que está conectada en [3] con la ecuación diferencial de Morse original ($l = 0$) y con otro discutido por Witteraker y Watson en [20].

De nuevo, comparando con la Ec.(5) podemos definir

$$2u(x; s) \equiv - \left((s + \frac{1}{2})e^x - \frac{1}{4}e^{2x} \right), \quad 2\lambda_n = -n^2 \quad (i \equiv s). \quad (89)$$

Para identificar la función $\varphi(x)$ con la función $\psi_n^{(s+\beta)}(x)$ escogemos

$$W'(x) = \beta e^x / 2, \quad (90)$$

y, excepto para el segundo término en el lado derecho, la Ec.(17) puede ser escrita como

$$\varphi''(x) - 2(u(x) - W'(x)) \varphi(x) = n^2 \varphi(x), \quad (91)$$

o explícitamente

$$\varphi''(x) + \left((s + \beta + \frac{1}{2})e^x - \frac{1}{4}e^{2x} \right) \varphi(x) = n^2 \varphi(x), \quad (92)$$

esto es correcto si la condición de la Ec.(18)

$$W^2(x) = -W'(x) + 2u + k = -e^x (s + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}e^{2x} + k, \quad (93)$$

se cumple para k una constante. De hecho, integrando la Ec.(90) tenemos

$$W(x) = \beta \frac{e^x}{2} + C, \quad (94)$$

donde C es una constante de integración, que puede evaluarse después de comparar esta ecuación con el lado derecho de la Ec.(19) y esta al mismo tiempo se da por

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln W_{\pm}'(x) + \frac{u'(x)}{W_{\pm}'(x)} = -\frac{1}{2} - \frac{s + 1/2}{\beta} + \frac{e^x}{2\beta}. \quad (95)$$

Encontramos que $C = -(\frac{s}{\beta} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\beta})$, qué a su vez por la Ec.(93), $k = C^2$, y

$$\beta^2 = 1, \quad (96)$$

deducimos que $\beta = \pm 1$. Por lo que el paso de β resulta ser ± 1 , debemos escribir en las ecuaciones anteriores $W \rightarrow W_{\pm}$, $\varphi \rightarrow \varphi_{\pm}$, $k \rightarrow k_{\pm}$, y $C \rightarrow C_{\pm}$ para considerar ambos casos. Así podemos escribir la Ec.(94) como

$$W_{\pm}(x; s) = \pm \frac{e^x}{2} + C_{\pm}, \quad (97)$$

donde $C_{\pm} = -(\pm s + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2})$.

Una vez más nos permite afirmar que

$$\varphi_{\pm}(x) \equiv \left(\frac{d}{dx} \pm (s \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \mp \frac{e^x}{2} \right) \psi_n^{(s)} \sim \psi_n^{(s \pm 1)}. \quad (98)$$

Los operadores en la Ec.(98) son los operadores escalera del problema [3].

Como k_{\pm} es una constante y ha sido obtenida, podemos regresar a la Ec.(93) y escribir

$$W_{\pm}^2(x) + W_{\pm}'(x) = - \left((s + \frac{1}{2})e^x - \frac{1}{4}e^{2x} \right) + (s \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2})^2, \quad (99)$$

o

$$W_{\pm}^2(x) + W_{\pm}'(x) = -W_-(x)W_+(x) \pm (s \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2}), \quad (100)$$

lo cual implica que $W(x) \equiv W_+(x) + W_-(x)$ satisface la ecuación de Riccati

$$W^2(x) + W'(x) = 1. \quad (101)$$

De hecho $W(x) = -1$ es una solución no trivial de esta ecuación. Por consiguiente la función $\psi_n^{(s \pm)}$ es tal que

$$\left(\frac{d}{dx} - W_{\pm}(x) \right) \psi_n^{(s \pm)}(x) = 0, \quad (102)$$

satisface también la Ec.(88) para $s = s_{\pm} = n - \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}$ podemos deducir la siguiente relación

$$W_{\pm}(x) = \frac{d}{dx} \ln \psi_{s_{\pm}}(x). \quad (103)$$

Sustituyendo esto en $W(x) = -1$, deducimos que $\psi_n^{(s_+)}(x)\psi_n^{(s_-)}(x) = 1$.

También podemos verificar que la función $W_-(x; s) (\equiv -W_+(x; s - 1))$ en la Ec.(97) corresponde a el potencial SUSY del problema. Y podemos observar que la función residuo en la Ec.(25) es $R_{\pm}(s) = \pm(2s + 1)$.

Procediendo formalmente, escribimos la solución general de la Ec.(99) como

$$\begin{aligned} W_{\pm g}(x) &= \mp(s \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \pm \frac{e^x}{2} + \frac{e^{\pm 2(s \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2})x \mp \exp .x}}{\gamma_{\pm} + \int_x^{\infty} (e^{\pm 2(s \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2})t \mp \exp .t}) dt} \\ &= \frac{d}{dx} \ln \left[\begin{pmatrix} \psi_o \\ \tilde{\psi}_o \end{pmatrix} \left(\gamma_{\pm} + \frac{1}{2} \int_x^{\infty} \begin{pmatrix} \psi_o^{-1}(\frac{t}{2}) \\ \tilde{\psi}_o^{-1}(\frac{t}{2}) \end{pmatrix} dt \right) \right], \end{aligned} \quad (104)$$

entonces las funciones de la Ec.(9) son

$$\varphi_{\pm g}(x) \equiv \left(\frac{d}{dx} - W_{\pm g}(x) \right) \psi_n^{(s)}(x), \quad (105)$$

que directamente son soluciones de la ecuación (tipo) Shrödinger

$$\varphi_{\pm g}''(x) - 2[u(x) - W_{\pm g}'(x)]\varphi_{\pm g}(x) = n^2\varphi_{\pm g}(x), \quad (106)$$

con potencial

$$\begin{aligned}
u(x) - W'_{\pm g}(x) &= -\frac{1}{2} \left((s + \frac{1}{2})e^x - \frac{1}{4}e^{2x} \right) \\
&\quad - \frac{d}{dx} \left(\pm \frac{e^x}{2} + \frac{e^{\pm 2(s \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2})x \mp \exp .x}}{\gamma_{\pm} + \int (e^{\pm 2(s \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2})t \mp \exp .t}) dt} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left((s + \frac{1}{2})e^x - \frac{1}{4}e^{2x} \right) \\
&\quad - \frac{d^2}{dx^2} \ln \left[\left(\begin{array}{c} \psi_o \\ \tilde{\psi}_o \end{array} \right) \left(\gamma_{\pm} + \frac{1}{2} \int \left(\begin{array}{c} \psi_o^{-1} \left(\frac{t}{2} \right) \\ \tilde{\psi}_o^{-1} \left(\frac{t}{2} \right) \end{array} \right) dt \right) \right]. \quad (107)
\end{aligned}$$

Equivalentemente arreglando la Ec.(106), obtenemos que $\varphi_{\pm g}$ es solución de la ecuación (tipo) Schrödinger con potencial

$$\begin{aligned}
u(x) &\rightarrow -\frac{1}{2} \left((s \pm 1 + \frac{1}{2})e^x - \frac{1}{4}e^{2x} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{\pm 2(s \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2})x \mp \exp .x}}{\gamma_{\pm} + \int (e^{\pm 2(s \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2})t \mp \exp .t}) dt} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left((s \pm 1 + \frac{1}{2})e^x - \frac{1}{4}e^{2x} \right) - \frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\gamma_{\pm} + \frac{1}{2} \int \left(\begin{array}{c} \psi_o^{-1} \left(\frac{t}{2} \right) \\ \tilde{\psi}_o^{-1} \left(\frac{t}{2} \right) \end{array} \right) dt \right), \quad (108)
\end{aligned}$$

que esta conectado con lo obtenido en [19] usando un método diferente.

8.2 Potencial Central d - Dimensional

Para el potencial $V(r)$, escribimos la ecuación de Shrödinger reducida correspondiente directamente [20-22] ($L \equiv l + \frac{1}{2}(d-1)$)

$$R_n^{(L)}{}''(r) - 2 \left(V(r) + \frac{L[L-1]}{2r^2} \right) R_n^{(L)}(r) = -2E_n R_n^{(L)}(r). \quad (109)$$

Nuestro procedimiento da, para la función $u(r)$ y eigenvalor λ_n , las expresiones

$$u(r; L) = V(r) + \frac{L[L-1]}{2r^2}, \quad \lambda_n \equiv E_n \quad (i \equiv L). \quad (110)$$

Podemos deducir que $\varphi_{\pm}(x)$ corresponde a una transformada tipo Darboux para $R_n^{(L\pm 1)}(r)$ (*a priori* proponemos que el cambio en el el potencial $u(x, i)$ en la Ec.(5) a $u(x, i + \beta)$ sea $\beta = \pm 1$), si este es el caso, entonces la función $W'(r)$ debe ser para $f'(r)$ una función por determinar escrita como

$$W_{\pm}'(r) = \mp \frac{[L \pm 1/2 - 1/2]}{r^2} + f_{\pm}'(r), \quad (111)$$

llevandola a la Ec.(17), excepto para el segundo término del lado derecho, como

$$\varphi_{\pm}''(r) - 2 \left(V(r) + \frac{L[L-1]}{2r^2} - W_{\pm}'(r) \right) \varphi_{\pm}(r) = -2E_n \varphi_{\pm}(r), \quad (112)$$

o explícitamente

$$\varphi_{\pm}''(r) - 2 \left(V(r) + \frac{[(l \pm 1) + \frac{1}{2}(d-1)][(l \pm 1) + \frac{1}{2}(d-1) - 1]}{2r^2} - f_{\pm}'(r) \right) \varphi_{\pm}(r) = -2E_n \varphi_{\pm}(r). \quad (113)$$

Claro, nuestra afirmación es correcta solamente si $W'(r)$ satisface

$$W_{\pm}^2(r) = 2u(r) - W_{\pm}'(r) + k_{\pm} = 2V(r) + \frac{1}{r^2}[L \pm 1/2 - 1/2]^2 - f_{\pm}'(r) + k_{\pm}, \quad (114)$$

para k_{\pm} constante. Para determinar si k_{\pm} es efectivamente constante para nuestra elección de $W_{\pm}'(r)$, integrando la Ec.(111) y elevándola al cuadrado tenemos

$$W_{\pm}(r; L) = \pm \frac{[L \pm 1/2 - 1/2]}{r} + f_{\pm}(r) + C_{\pm}, \quad (115)$$

$$W_{\pm}^2(r) = \frac{[L \pm 1/2 - 1/2]^2}{r^2} + (f_{\pm}(r) + C_{\pm})^2 \pm 2 \frac{[L \pm 1/2 - 1/2]}{r} (f_{\pm}(r) + C_{\pm}), \quad (116)$$

donde C_{\pm} es una constante de integración. Comparando las Ecs.(114) y (116) obtenemos

$$2V(r) - f'_{\pm}(r) + k_{\pm} = f_{\pm}^2(r) + 2f_{\pm}(r)C_{\pm} \pm 2\frac{[L \pm 1/2 - 1/2]}{r} (f_{\pm}(r) + C_{\pm}) + C_{\pm}^2. \quad (117)$$

Analizando los siguientes casos

5.2.1 Problema Kepler-Coulomb

$$V(r) = -\frac{A}{r}. \quad (118)$$

Obtenemos de la Ec.(117) que

$$-\frac{2A}{r} + k_{\pm} = f'_{\pm} + f_{\pm}^2 + 2f_{\pm}C_{\pm} \pm 2\frac{[L \pm 1/2 - 1/2]}{r} (f_{\pm} + C_{\pm}) + C_{\pm}^2, \quad (119)$$

y por simple inspección tenemos

$$f_{\pm} = cte., \quad k_{\pm} = f_{\pm}^2 + 2f_{\pm}C_{\pm} + C_{\pm}^2 = (f_{\pm} + C_{\pm})^2, \quad y \quad f_{\pm} + C_{\pm} = \mp \frac{A}{L \pm 1/2 - 1/2}. \quad (120)$$

Ya que efectivamente k_{\pm} es constante, la transformación $\varphi_{\pm}(r)$ en la Ec.(112) debe ser identificada con $R_n^{(L \pm 1)}(r)$. Sustituyendo las Ecs.(120) y (115) en la Ec.(9) tenemos

$$\varphi_{\pm}(r) \equiv \left(\frac{d}{dr} \mp \frac{L \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{r} \pm \frac{A}{L \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \right) R_n^{(L)} \sim R_n^{(L \pm 1)}, \quad (121)$$

donde estos son los bien conocidos operadores escalera del sistema [21-23].

Sin embargo, la función $W_-(r; L) \equiv -W_+(r; L - 1)$ es el potencial SUSY del problema Kepler-Coulomb, $W_{SUSY}(r)$, y este resultado es un buen ejemplo de la teoría SUSY para el modelo de Witten [24]. De hecho, podemos fácilmente identificar que $W_{SUSY}(r) = W_-(r; L + 2)$ y que la correspondiente función residuo para este sistema, de acuerdo con la Ec.(25) es $R_{\pm}(L) = \pm A^2(L^{-2} - (L - 1)^{-2})$.

Como k_{\pm} es una constante y fue obtenida, podemos regresar a la Ec.(114) y escribir

$$W_{\pm}^2(r) + W_{\pm}'(r) = -2\frac{A}{r} + \frac{L[L-1]}{r^2} + \frac{A^2}{(L \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2}, \quad (122)$$

que formalmente admite la solución general

$$\begin{aligned} W_{\pm g}(r) &= \pm \frac{(L \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{2})}{r} \mp \frac{A}{(L \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{2})} \\ &\quad + \frac{r^{\pm 2(L \pm 1/2 - 1/2)} e^{\mp 2Ar/(L \pm 1/2 - 1/2)}}{\gamma_{\pm} + \int_r^{\infty} t^{\mp 2(L \pm 1/2 - 1/2)} e^{\pm 2At/(L \pm 1/2 - 1/2)} dt} \\ &= \frac{d}{dr} \ln \left[\begin{pmatrix} \psi_o \\ \tilde{\psi}_o \end{pmatrix} \left(\gamma_{\pm} + \int \begin{pmatrix} \psi_o^{-2}(t) \\ \tilde{\psi}_o^{-2}(t) \end{pmatrix} dt \right) \right], \end{aligned} \quad (123)$$

entonces las funciones de la Ec.(9) son

$$\varphi_{\pm g}(r) \equiv \left(\frac{d}{dr} - W_{\pm g} \right) R_n^{(l)}, \quad (124)$$

estas son directamente soluciones de la ecuación de Schrödinger

$$\varphi_{\pm g}''(r) - 2[u(r) - W_{\pm g}'(r)]\varphi_{\pm g}(r) = -2E_n\varphi_{\pm g}(r), \quad (125)$$

con el nuevo potencial

$$\begin{aligned} u(r) - W_{\pm g}'(r) &= -\frac{A}{r} + \frac{L[L-1]}{2r^2} \\ &\quad - \frac{d}{dr} \left(\begin{pmatrix} (L \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{2})}{r} + \frac{r^{\pm 2(L \pm 1/2 - 1/2)} e^{\mp 2Ar/(L \pm 1/2 - 1/2)}}{\gamma_{\pm} + \int_r^{\infty} t^{\mp 2(L \pm 1/2 - 1/2)} e^{\pm 2At/(L \pm 1/2 - 1/2)} dt} \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{A}{r} + \frac{L[L-1]}{2r^2} - \frac{d^2}{dr^2} \ln \left[\begin{pmatrix} \psi_o \\ \tilde{\psi}_o \end{pmatrix} \left(\gamma_{\pm} + \int \begin{pmatrix} \psi_o^{-2}(t) \\ \tilde{\psi}_o^{-2}(t) \end{pmatrix} dt \right) \right], \end{aligned} \quad (126)$$

Equivalentemente arreglando la Ec.(125), obtenemos que $\varphi_{\pm g}(r)$ es solución de la ecuación

de Schrödinger con potencial

$$\begin{aligned}
u(r) &\rightarrow -\frac{A}{r} + \frac{(L \pm 1)(L \pm 1 - 1)}{2r^2} \\
&\quad - \frac{d}{dr} \left(\frac{r^{\pm 2(L \pm 1/2 - 1/2)} e^{\mp 2Ar/(L \pm 1/2 - 1/2)}}{\gamma_{\pm} + \int^r t^{\mp 2(L \pm 1/2 - 1/2)} e^{\pm 2At/(L \pm 1/2 - 1/2)} dt} \right) \\
&= -\frac{A}{r} + \frac{(L \pm 1)(L \pm 1 - 1)}{2r^2} - \frac{d^2}{dr^2} \ln \left[\left(\gamma_{\pm} + \int^r \begin{pmatrix} \psi_o^{-2}(t) \\ \tilde{\psi}_o^{-2}(t) \end{pmatrix} dt \right) \right], \quad (127)
\end{aligned}$$

y asociado con el eigenvalor E_n . A propósito, la función anterior esta conectada con las publicadas en [23].

5.2.2 Oscilador Armónico

$$V(r) = r^2/2. \quad (128)$$

Obtenemos de la Ec.(117) que

$$r^2 - f_+'(r) + k_+ = f_+^2(r) + 2f_+(r)C_+ + 2\frac{L}{r} (f_+(r) + C_+) + C_+^2, \quad (129)$$

$$r^2 - f_-'(r) + k_- = f_-^2(r) + 2f_-(r)C_- - 2\frac{L-1}{r} (f_-(r) + C_-) + C_-^2, \quad (130)$$

de nuevo por simple inspección tenemos

$$f_+^2(r) = r^2; \quad f_{+\pm}(r) = \pm r, \quad k_{+\pm} \mp 1 = \pm 2L, \quad (131)$$

$$f_-^2(r) = r^2; \quad f_{-\pm}(r) = \pm r, \quad k_{-\pm} \mp 1 = \mp 2(L-1), \quad (132)$$

por lo que las correspondientes constantes de integración $C_{+\pm}$ y $C_{-\pm}$, deben ser cero. De la Ec.(113) tenemos

$$\varphi''_{+\pm}(r) - 2 \left(\frac{r^2}{2} + \frac{L(L+1)}{2r^2} \mp 1 \right) \varphi_{+\pm}(r) = -2E_n \varphi_{+\pm}(r), \quad (133)$$

$$\varphi''_{-\pm}(r) - 2 \left(\frac{r^2}{2} + \frac{(L-1)(L-2)}{2r^2} \mp 1 \right) \varphi_{-\pm}(r) = -2E_n \varphi_{-\pm}(r), \quad (134)$$

o equivalentemente

$$\varphi''_{+\pm}(r) - 2 \left(\frac{r^2}{2} + \frac{L(L+1)}{2r^2} \right) \varphi_{+\pm}(r) = -2E_{n\pm 1} \varphi_{+\pm}(r), \quad (135)$$

$$\varphi''_{-\pm}(r) - 2 \left(\frac{r^2}{2} + \frac{(L-1)(L-2)}{2r^2} \right) \varphi_{-\pm}(r) = -2E_{n\pm 1} \varphi_{-\pm}(r), \quad (136)$$

donde tenemos que escribir $E_{n\pm 1} = E_n \pm 1$. Dado que $k_{+\pm}$ ($k_{-\pm}$) es efectivamente constante, la transformación $\varphi_{+\pm}(r)$ ($\varphi_{-\pm}(r)$) en la Ec.(135) (Ec.(136)) debe ser identificada con $R_{n\pm 1}^{(L+1)}(r)$ ($R_{n\pm 1}^{(L-1)}(r)$). Así encontramos

$$\varphi_{++}(r) \equiv \left(\frac{d}{dr} - \frac{L}{r} - r \right) R_n^{(L)}(r) \sim R_{n+1}^{(L+1)}(r), \quad (137)$$

$$\varphi_{+-}(r) \equiv \left(\frac{d}{dr} - \frac{L}{r} + r \right) R_n^{(L)}(r) \sim R_{n-1}^{(L+1)}(r), \quad (138)$$

$$\varphi_{-+}(r) \equiv \left(\frac{d}{dr} + \frac{[L-1]}{r} - r \right) R_n^{(L)}(r) \sim R_{n+1}^{(L-1)}(r), \quad (139)$$

$$\varphi_{--}(r) \equiv \left(\frac{d}{dr} + \frac{[L-1]}{r} + r \right) R_n^{(L)}(r) \sim R_{n-1}^{(L-1)}(r), \quad (140)$$

que son los bien conocidos operadores escalera del sistema [20-22]. (Ver Apéndice).

Como $k_{+\pm}$ y $k_{-\pm}$ son constantes y han sido obtenidas, podemos regresar a la Ec.(114) y escribir

$$W_{+\pm}^2(r) + W'_{+\pm}(r) = r^2 + \frac{L[L-1]}{r^2} \pm 2L \pm 1, \quad (141)$$

$$W_{-\pm}^2(r) + W'_{-\pm}(r) = r^2 + \frac{L[L-1]}{r^2} \mp 2(L-1) \pm 1, \quad (142)$$

donde podemos deducir que

$$W^2(r) + W'(r) = 0, \quad (143)$$

para $W(r) = W_{++}(r) - W_{--}(r)$ y $W(r) = W_{+-}(r) + W_{-+}(r)$.

De hecho $W(r) = r^{-1}$ es una solución no trivial de la Ec.(143). Por lo que la solución de la ecuación

$$\left(\frac{d}{dx} - W_{\pm\mp}(r) \right) R_n^{(L_{\pm\mp})}(r) = 0, \quad (144)$$

satisface la correspondiente Ec.(109) para $L_{+-} = 0, 1, 2, \dots$ con $L_{-+} = L_{+-} + 1$ podemos deducir la relación

$$W_{\pm\mp}(r) = \frac{d}{dr} \ln R_n^{(L_{\pm\mp})}(r). \quad (145)$$

Sustituyendo en la Ec.(145) $W(x) = r^{-1}$, deducimos que $R_n^{(L_{+-})} R_n^{(L_{-+})} = r$.

Además podemos decir que las funciones $W_{-+}(r; L)$ ($\equiv -W_{+-}(r; L - 1)$) y $W_{--}(r; L)$ ($\equiv -W_{++}(r; L - 1)$) son los potenciales SUSY del sistema. En particular podemos identificar que lo publicado en [24] es $W_{SUSY}(r) = W_{-+}(r; L + 2)$ y usando la Ec.(25) la correspondiente función residuo es $R_{+\pm} = \pm 4$ ($R_{-\pm} = \pm 4$).

Formalmente, las Ecs.(141) y (142) admiten la solución general

$$\begin{aligned} W_{+\pm g}(r) &= \frac{L}{r} \pm r + \frac{r^{-2L} e^{\mp r^2}}{\gamma_{+\pm} + \int t^{-2L} e^{\mp t^2} dt} \\ &= \frac{d}{dr} \ln \left[\begin{pmatrix} \psi_o \\ \tilde{\psi}_o \end{pmatrix} \left(\gamma_{+\pm} + \frac{1}{2} \int^r \begin{pmatrix} \psi_o^{-1}(\frac{t}{2}) \\ \tilde{\psi}_o^{-1}(\frac{t}{2}) \end{pmatrix} dt \right) \right], \end{aligned} \quad (146)$$

$$\begin{aligned}
W_{-\pm g}(r) &= -\frac{L-1}{r} \pm r + \frac{r^{2(L-1)} e^{\mp r^2}}{\gamma_{-\pm} + \int_r t^{2(L-1)} e^{\mp t^2} dt} \\
&= \frac{d}{dr} \ln \left[\left(\begin{array}{c} \psi_o \\ \tilde{\psi}_o \end{array} \right) \left(\gamma_{-\pm} + \frac{1}{2} \int_r \left(\begin{array}{c} \psi_o^{-1} \left(\frac{t}{2} \right) \\ \tilde{\psi}_o^{-1} \left(\frac{t}{2} \right) \end{array} \right) dt \right) \right], \quad (147)
\end{aligned}$$

entonces las funciones de la Ec.(9) son

$$\varphi_{+\pm g}(r) \equiv \left(\frac{d}{dr} - W_{+\pm g}(r) \right) R_n^{(l)}(r), \quad (148)$$

$$\varphi_{-\pm g}(r) \equiv \left(\frac{d}{dr} - W_{-\pm g}(r) \right) R_n^{(l)}(r), \quad (149)$$

las cuales son soluciones de las correspondientes ecuaciones de Schrödinger

$$\varphi_{+\pm g}''(r) - 2[u(r) - W_{+\pm g}'(r)]\varphi_{+\pm g}(r) = -2E_{n\pm 1}\varphi_{+\pm g}(r), \quad (150)$$

$$\varphi_{-\pm g}''(r) - 2[u(r) - W_{-\pm g}'(r)]\varphi_{-\pm g}(r) = -2E_{n\pm 1}\varphi_{-\pm g}(r), \quad (151)$$

con los nuevos potenciales

$$\begin{aligned}
u(r) - W_{+\pm g}'(r) &= \frac{r^2}{2} + \frac{L[L-1]}{2r^2} - \frac{d}{dr} \left(\frac{L}{r} \pm r + \frac{r^{-2L} e^{\mp r^2}}{\gamma_{+\pm} + \int_r t^{-2L} e^{\mp t^2} dt} \right) \\
&= \frac{r^2}{2} + \frac{L[L-1]}{2r^2} - \frac{d^2}{dr^2} \ln \left[\left(\begin{array}{c} \psi_o \\ \tilde{\psi}_o \end{array} \right) \left(\gamma_{+\pm} + \frac{1}{2} \int_r \left(\begin{array}{c} \psi_o^{-1} \left(\frac{t}{2} \right) \\ \tilde{\psi}_o^{-1} \left(\frac{t}{2} \right) \end{array} \right) dt \right) \right] \quad (152)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(r) - W_{-\pm g}'(r) &= \frac{r^2}{2} + \frac{L[L-1]}{2r^2} - \frac{d}{dr} \left(-\frac{L-1}{r} \pm r + \frac{r^{2(L-1)} e^{\mp r^2}}{\gamma_{-\pm} + \int_r t^{2(L-1)} e^{\mp t^2} dt} \right) \\
&= \frac{r^2}{2} + \frac{L[L-1]}{2r^2} - \frac{d^2}{dr^2} \ln \left[\left(\begin{array}{c} \psi_o \\ \tilde{\psi}_o \end{array} \right) \left(\gamma_{-\pm} + \frac{1}{2} \int_r \left(\begin{array}{c} \psi_o^{-1} \left(\frac{t}{2} \right) \\ \tilde{\psi}_o^{-1} \left(\frac{t}{2} \right) \end{array} \right) dt \right) \right] \quad (153)
\end{aligned}$$

Equivalentemente arreglando las Ecs.(150) y (151), obtenemos que $\varphi_{+\pm g}$ y $\varphi_{-\pm g}$ son soluciones de la ecuación de Schrödinger Ec.(5) con los potenciales

$$\begin{aligned}
u(r) &\rightarrow \frac{r^2}{2} + \frac{[L+1]L}{2r^2} - \frac{d}{dr} \left(\pm r + \frac{r^{-2L} e^{\mp r^2}}{\gamma_{+\pm} + \int t^{-2L} e^{\mp t^2} dt} \right) \\
&= \frac{r^2}{2} + \frac{[L+1]L}{2r^2} - \frac{d^2}{dr^2} \ln \left[\exp\left(\pm \frac{r^2}{2}\right) \left(\gamma_{+\pm} + \frac{1}{2} \int \left(\begin{array}{c} \psi_o^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) \\ \tilde{\psi}_o^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) \end{array} \right) dt \right) \right], \quad (154)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(r) &\rightarrow \frac{r^2}{2} + \frac{[L-1][L-2]}{2r^2} - \frac{d}{dr} \left(\pm r + \frac{r^{2(L-1)} e^{\mp r^2}}{\gamma_{-\pm} + \int t^{2(L-1)} e^{\mp t^2} dt} \right) \\
&= \frac{r^2}{2} + \frac{[L-1][L-2]}{2r^2} - \frac{d^2}{dr^2} \ln \left[\exp\left(\pm \frac{r^2}{2}\right) \left(\gamma_{-\pm} + \frac{1}{2} \int \left(\begin{array}{c} \psi_o^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) \\ \tilde{\psi}_o^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) \end{array} \right) dt \right) \right] \quad (155)
\end{aligned}$$

y asociada con el eigenvalor $E_{n\pm 1}$. Por lo que formalmente obtuvimos 4 potenciales que tiene el espectro del oscilador armonico d-dimensional como lo publicado en [23].

8.3 Otras Aplicaciones

Podemos escribir la ecuación diferencial de Bessel en forma más general [25] como

$$J_n''(x) + \frac{1}{x} J_n'(x) + \left(1 - \frac{N(n)}{x^2}\right) J_n(x) = 0, \quad (156)$$

donde buscamos determinar la función $N(n)$ donde $J_n(x)$ es una función de Bessel. Por el cambio de variable

$$J_n(x) = v_n x^{-1/2}, \quad (157)$$

obtenemos similarmente de la Ec.(67)

$$\mathbf{v}_n''(x) - \frac{1}{x^2} \left(N(n) - \frac{1}{4} \right) \mathbf{v}_n(x) = -\mathbf{v}_n(x). \quad (158)$$

Comparando con la Ec.(5) identificamos que

$$2u(x) \equiv \frac{1}{x^2} \left(N(n) - \frac{1}{4} \right), \quad 2\lambda_n = 1. \quad (159)$$

Por la Ec.(158) proponemos que la transformación $\varphi_{\pm}(x)$ dada en la Ec.(9) corresponde a $\mathbf{v}_{n\pm 1}$. Para este propósito escogemos

$$2W_{\pm}'(x) = \frac{1}{x^2} [N(n) - N(n \pm 1)], \quad (160)$$

entonces por integración

$$W_{\pm}(x) = \frac{-1}{2x} [N(n) - N(n \pm 1)] + C_{\pm}, \quad (161)$$

y comparando con el lado derecho de la Ec.(19)

$$-\frac{W''(x)}{2W'(x)} + \frac{u'(x)}{W'(x)} = -\frac{1}{x} \frac{N(n) + N(n \pm 1) - \frac{1}{2}}{[N(n) - N(n \pm 1)]}, \quad (162)$$

obtenemos la ecuación de diferencias finitas

$$1 = 2N(n) + 2N(n \pm 1) - [N(n) - N(n \pm 1)]^2, \quad (163)$$

con

$$C_{\pm} = 0, \quad (164)$$

y solución [26]

$$N(n) = \left(n + \sqrt{N(0)} \right)^2, \quad (165)$$

donde esta es la función más general para la Ec.(156) con $J_n(x)$ como solución. Note que para $N(0) = 1$ en la Ec.(158), la Ec.(77) es obtenida.

Chapter 9

Conclusiones.

Demostremos que la ecuación estacionaria de Schrödinger es invariante bajo una transformación especial la cual está relacionada con cierta ecuación de Riccati, donde no es necesario saber *a priori* su relación con la derivada logarítmica de la eigenfunción de esta ecuación. Con este resultado propusimos un método simple para obtener simultáneamente operadores escalera, recobrar potenciales isospectrales y en algunos casos obtener formalmente nuevos potenciales isospectrales (como en las subsecciones 5.1.2 y 5.1.3 y en las subsecciones 5.2.1 y 5.2.2) todo en una forma unificada. El método muestra claramente que para algunas funciones $W(x)$, satisfaciendo la condición de la Ec.(18) con k una constante arbitraria, la Ec.(9) nos da un operador escalera y también su potencial isoespectral $u(x) - W_g'(x)$ asociado.

Chapter 10

Apéndice A

Ecuación de Hermite

En este apéndice construimos utilizando los operadores escalera encontrados en la Ec.(43), las eigenfunciones del oscilador armónico unidimensional, así como los polinomios de Hermite. Para ello iniciamos determinando la función $\psi_{\eta_{\mp}}$ tal que su transformada tipo Darboux sea nula, *i.e.*

$$\varphi_{\mp} \equiv \left(\frac{d}{dx} \pm x \right) \psi_{\eta_{\mp}} = 0,$$

para resolver esta ecuación diferencial de primer orden, escribimos

$$\psi'_{\eta_{\mp}} = \mp x \psi_{\eta_{\mp}},$$

de donde

$$\psi_{\eta_{\mp}} = e^{\mp x^2/2}. \tag{A1}$$

Además si $\psi_{\eta_{\mp}}$ satisficiera la ecuación de Schrödinger (Ec.(33))

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2 \right) \psi_{\eta_{\mp}} = -2E_{\eta_{\mp}} \psi_{\eta_{\mp}}, \tag{A2}$$

podríamos obtener los correspondientes eigenvalores asociados a $\psi_{\eta_{\mp}}$. En efecto, como

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right) e^{\mp x^2/2} &= \frac{d}{dx}(\mp x e^{\mp x^2/2}) - x^2 e^{\mp x^2/2} \\
&= \mp e^{\mp x^2/2} + x^2 e^{-x^2/2} - x^2 e^{-x^2/2} \\
&= \mp e^{\mp x^2/2} \\
&\equiv \mp \psi_{\eta_{\mp}},
\end{aligned} \tag{A3}$$

y comparando las Ec's.(A2) y (A3) obtenemos

$$2E_{\eta_{\mp}} = \pm 1 \quad \text{ó} \quad E_{\eta_{\mp}} = \pm 1/2. \tag{A4}$$

El primer caso implica

$$E_{\eta_-} = 1/2 \equiv E_0; \quad \eta_- = 0 \quad y \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{A5}$$

y el segundo caso

$$E_{\eta_+} = -1/2 = \eta_+ + 1/2; \quad \eta_+ = -1 \quad y \quad n = -1, -2, \dots \tag{A6}$$

Entonces ψ_{η_+} (ψ_{η_-}) es una eigenfunción cuadrado no integrable (integrable) cuyo eigenvalor asociado E_{η_+} (E_{η_-}) es $-\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$), por lo que se identifica en la Fig.(1) por el ket $|-1\rangle$ ($|0\rangle$).

Naturalmente, de la función $\psi_{\eta_{\mp}}$ otra eigenfunción puede ser deducida utilizando nuevamente los operadores escalera de la Ec.(43)

$$\begin{aligned}
\psi_{\eta_{\mp} \pm 1} &= \left(\frac{d}{dx} \mp x\right) \psi_{\eta_{\mp}} = \left(\frac{d}{dx} \mp x\right) e^{\mp x^2/2} = \mp x e^{\mp x^2/2} \mp x e^{\mp x^2/2} \\
&= \mp 2x e^{\mp x^2/2},
\end{aligned} \tag{A7}$$

donde $\psi_{\eta_{\mp}-1}$ ($\psi_{\eta_{\mp}+1}$) es una eigenfunción cuadrado no integrable (integrable) identificada en la

Fig.(1) por el ket $|-2\rangle$ ($|1\rangle$).

$$\begin{aligned}\psi_{\eta_{\mp}\pm 2} &= \left(\frac{d}{dx} \mp x\right)(\mp 2xe^{\mp x^2/2}) = 2(\mp e^{\mp x^2/2} + x^2e^{\mp x^2/2} + x^2e^{\mp x^2/2}) \\ &= (\mp 2 + 4x^2)e^{\mp x^2/2},\end{aligned}\tag{A8}$$

donde $\psi_{\eta_{\mp}-2}(\psi_{\eta_{\mp}+2})$ es una eigenfunción cuadrado no integrable (integrable) identificada en la Fig.(1) por el ket $|-3\rangle$ ($|2\rangle$).

La aplicación sucesiva de estos operadores permite obtener las demás eigenfunciones del problema del oscilador armónico unidimensional.

Asimismo notamos de la Ec.(31) que los polinomios de Hermite asociados a las eigenfunciones obtenidas en las Ecs.(A1), (A7) y (A8) son respectivamente

$$H_{\eta_{\mp}}(x) = e^{x^2/2}\psi_{\eta_{\mp}}(x) = e^{x^2/2}e^{\mp x^2/2} = \begin{cases} 1 \\ e^{x^2} \end{cases},\tag{A9}$$

$$H_{\eta_{\mp}\pm 1}(x) = e^{x^2/2}\psi_{\eta_{\mp}\pm 1}(x) = e^{x^2/2}(\mp 2)x e^{\mp x^2/2} = \mp 2x \begin{cases} 1 \\ e^{x^2} \end{cases},\tag{A10}$$

$$H_{\eta_{\mp}\pm 2}(x) = e^{x^2/2}\psi_{\eta_{\mp}\pm 2}(x) = e^{x^2/2}(\mp 2 + 4x^2)e^{\mp x^2/2} = (\mp 2 + 4x^2) \begin{cases} 1 \\ e^{x^2} \end{cases}, \text{ etc.}\tag{A11}$$

El caso $H_{\eta_{-}=0}$ corresponde al primer polinomio de Hermite el cual satisface la ecuación diferencial de Hermite:

$$H''_{\eta_{-}} - 2xH'_{\eta_{-}} + 2\eta_{-}H_{\eta_{-}} = 0.\tag{A12}$$

El caso $H_{\eta_{+}=-1}$, que no es un polinomio de Hermite, satisface una ecuación del tipo Hermite en efecto,

$$\begin{aligned}H''_{-1} - 2xH'_{-1} + 2(-1)H_{-1} &= (2xe^{x^2})' - 2x2xe^{x^2} - 2e^{x^2} \\ &= 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 2x2xe^{x^2} - 2e^{x^2} = 0,\end{aligned}\tag{A13}$$

y para H_{η_+-1}

$$\begin{aligned}
H''_{-2} - 2xH'_{-2} + 2(-2)H_{-2} &= [2xe^{x^2}]'' - 2x[2xe^{x^2}]' - 4(2xe^{x^2}) \\
&= [2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}]' - 2x(2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}) - 8xe^{x^2} \\
&= [4x + 8x + 8x^3 - 4x - 8x^3 - 8x]e^{x^2} = 0 \quad (\text{A14})
\end{aligned}$$

Análogamente para H_{η_+-2} tenemos que satisface una ecuación del tipo de Hermite, ya que

$$\begin{aligned}
H''_{-3} - 2xH'_{-3} + 2(-3)H_{-3} &= [(2 + 4x^2)e^{x^2}]'' - 2x[(2 + 4x^2)e^{x^2}]' - 6(2 + 4x^2)e^{x^2} \\
&= [(12x + 8x^3)e^{x^2}]' - 2x[8x + 4x + 8x^3]e^{x^2} - 6(2 + 4x^2)e^{x^2} \\
&= [(12 + 24x^2) + 2(12x^2 + 8x^4) - 48x^2 - 16x^4 - 12]e^{x^2} \\
&= 0 \quad (\text{A15})
\end{aligned}$$

Naturalmente, la mecánica cuántica necesita considera las soluciones de la Ec.(33) con $n = 0, 1, 2, \dots$, pero formalmente las soluciones de la ecuación diferencial de Hermite incluyen los casos $n = -1, -2, \dots$, tal que $H_n e^{-x^2/2}$ no es cuadrado integrable. En efecto, las soluciones de la ecuación diferencial de Hermite forman dos subconjuntos de funciones, el conjunto de funciones

$$A = \left\{ H_n : H_n e^{-x^2/2} \in L^2; \text{ i.e. } n = 0, 1, 2, \dots \right\} = \{1, -2x, 4x^2 - 2, \dots\},$$

y el conjunto de funciones

$$B = \left\{ H_n : H_n e^{x^2/2} \notin L^2; \text{ i.e. } n = -1, -2, \dots \right\} = \left\{ e^{x^2}, 2xe^{x^2}, (4x^2 - 2)e^{x^2}, \dots \right\}.$$

Notamos que por la Ec.(A1) no hay operadores que conecten ambos conjuntos. Sin embargo los operadores escalera de creación y aniquilación son los mismos para ambos subconjuntos. Por esta razón en el contexto de la mecánica cuántica supersimétrica [27] el superpotencial del

problema definido como $\psi'_{\eta_{\mp}} / \psi_{\eta_{\mp}}$ coincide con la función $W(x)$ de la Ec.(41), es decir

$$W_{\pm} = \mp x = \frac{\psi'_{\eta_{\mp}}}{\psi_{\eta_{\mp}}} = \frac{\mp x e^{\mp x^2/2}}{e^{\mp x^2/2}}, \quad (\text{A16})$$

aun cuando $\psi_{\eta_{+}=-1} = e^{x^2/2}$ no es el estado base.

En la Fig.(1) representamos las eigenfunciones obtenidas anteriormente con los operadores escalera, donde las eigenfunciones de color azul representan las eigenfunciones cuadrado integrables, mientras que las eigenfunciones de color naranja representan las eigenfunciones cuadrado no integrables.

Oscilador armónico 1-D

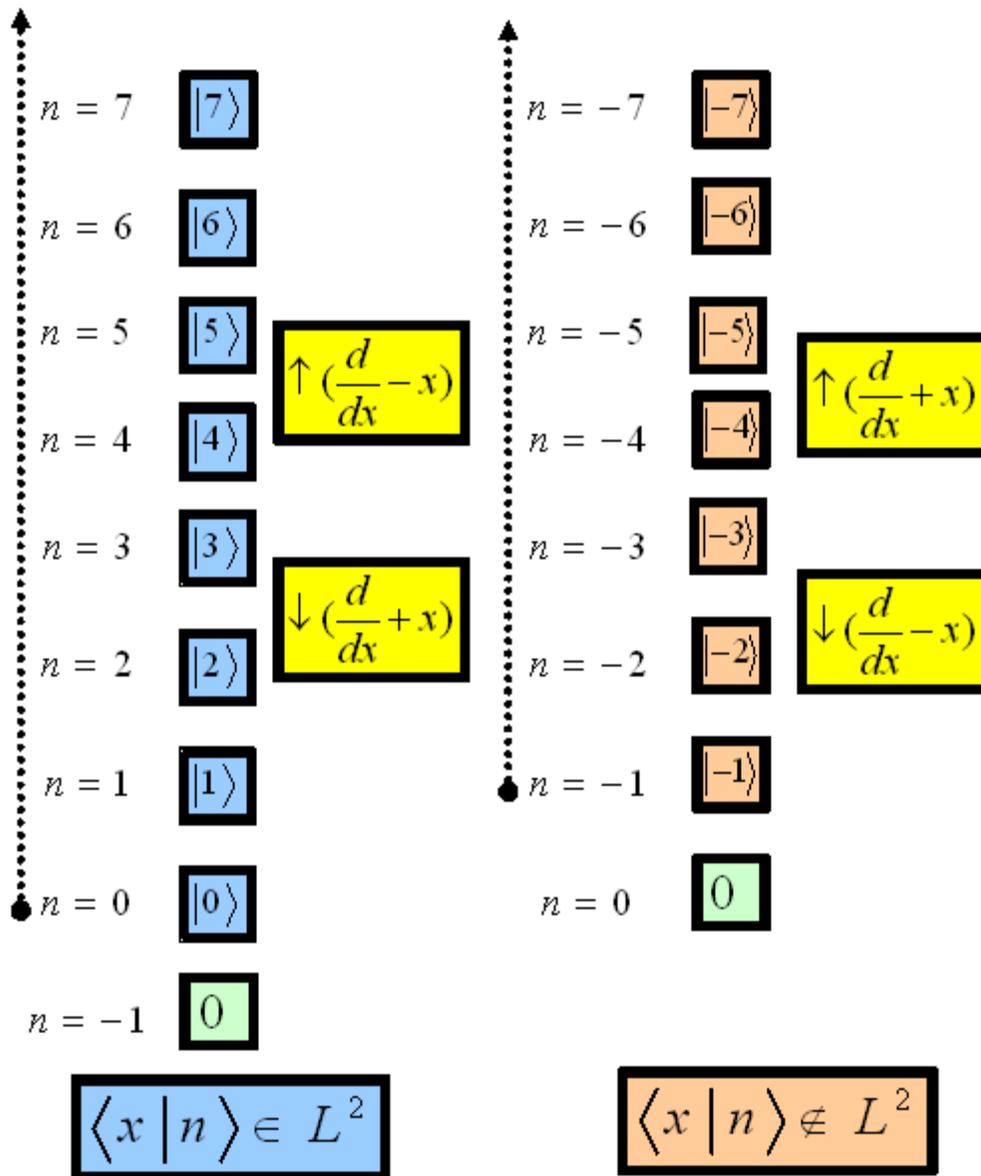


Fig.(1)

Chapter 11

Apéndice B

Ecuación de Bessel

Análogamente al desarrollo hecho en el apéndice A, iniciamos proponiendo una función $\psi_{\eta_{\pm}}$ tal que su transformada tipo Darboux Ec.(76) sea nula, *i.e.*

$$\varphi_{\pm} \equiv \left(\frac{d}{dx} \mp \frac{(\pm 1 + 2n)}{2x} \right) \psi_{\eta_{\pm}} = 0,$$

para resolver esta ecuación diferencial de primer orden, escribimos

$$\psi'_{\eta_{\pm}} = \pm \left(\frac{(\pm 1 + 2n)}{2x} \right) \psi_{\eta_{\pm}},$$

de donde

$$\psi_{\eta_{\pm}} = x^{\frac{1}{2} \pm n}. \quad (\text{B1})$$

Además si $\psi_{\eta_{\pm}}$ satisficiera la ecuación de Schrödinger (Ec.(67))

$$\psi''_{\eta_{\pm}} + \left(1 - \frac{n^2 - 1/4}{x^2} \right) \psi_{\eta_{\pm}} = 0. \quad (\text{B2})$$

podríamos obtener los correspondientes eigenvalores asociados a $\psi_{\eta_{\mp}}$. Pero en este caso $\psi_{\eta_{\mp}}$ no

satisface la ecuación de Schrödinger, es decir,

$$\begin{aligned}
\psi''_{\eta\pm} + \left(1 - \frac{n^2 - 1/4}{x^2}\right) \psi_{\eta\pm} &= \left(\frac{1}{2} \pm n\right) \left(-\frac{1}{2} \pm n\right) x^{-\frac{3}{2} \pm n} + \left(x^2 - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\right) x^{-\frac{3}{2} \pm n} \\
&= \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) + x^2 - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) = x^2 \neq 0
\end{aligned} \tag{B3}$$

En consecuencia la función $\psi_{\eta\pm}$ no satisface la ecuación tipo Schrödinger, por lo cual no existe una función $\psi_{\eta\pm}$ tal que su transformada de Darboux generalizada sea nula para la Ecuación de Bessel y en consecuencia no se puede proceder como en el Apéndice A.

Chapter 12

Apéndice C

Potencial de Morse

Como en los anteriores apéndices realizamos la construcción de las eigenfunciones del potencial de Morse utilizando los operadores escalera de la Ec.(98). Para ello partimos de la función $\psi_{n\pm}^{(s)}$ tal que su transformada tipo Darboux sea nula, *i.e.*

$$\varphi_{\pm} \equiv \left(\frac{d}{dx} \pm \left(s + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \mp \frac{e^x}{2} \right) \psi_{n\pm}^{(s)} = 0,$$

para resolver esta ecuación diferencial de primer orden, escribimos

$$\psi_{n\pm}^{(s)'} = \mp \left(s + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \pm \frac{e^x}{2} \psi_{n\pm}^{(s)}$$

de donde

$$\psi_{n\pm}^{(s)} = e^{\left[\pm \frac{e^x}{2} \mp \left(s + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) x \right]} \quad (\text{C1})$$

Además si $\psi_{n\pm}^{(s)}$ satisficiera la ecuación de Schrödinger (Ec.(88))

$$\psi_{n\pm}^{(s)''}(x) + \left(\left(s + \frac{1}{2} \right) e^x - \frac{1}{4} e^{2x} \right) \psi_{n\pm}^{(s)}(x) = n_{\pm}^2 \psi_{n\pm}^{(s)}(x).$$

En efecto, se tiene

$$\begin{aligned}
& \psi_{n_{\pm}}^{(s)''}(x) + \left((s + \frac{1}{2})e^x - \frac{1}{4}e^{2x} \right) \psi_{n_{\pm}}^{(s)}(x) = \\
& = \left[\pm \frac{e^x}{2} + \left(\pm \frac{e^x}{2} \mp \left(s + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \right)^2 + \left((s + \frac{1}{2})e^x - \frac{1}{4}e^{2x} \right) \right] \psi_{n_{\pm}}^{(s)} \\
& = \left[\pm \frac{e^x}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + \left(s + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{e^x}{2} \left(s + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \left(s + \frac{1}{2} \right) e^x - \frac{1}{4}e^{2x} \right] \\
& = \left(s + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right)^2 = n_{\pm}^2 = -2\lambda_{n_{\pm}}.
\end{aligned}$$

Por lo cual de lo anterior podemos concluir

$$-2\lambda_{n_{\pm}} = \left(s + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right)^2. \quad (C2)$$

Claramente se obtiene que la Ec.(C1) si satisface la ecuación de Schrödinger, en consecuencia si hay una eigenfunción $\psi_{n_{\pm}}^{(s)}$ tal que su transformada tipo Darboux sea nula. Entonces a partir de $\psi_{n_{\pm}}^{(s)} = e^{\left[\pm \frac{e^x}{2} \mp \left(s + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) x \right]}$ se pueden construir las demás eigenfunciones del problema.

Tomando $s = 1$ en la Ec.(C1) tenemos

$$\psi_{n_{\pm}}^{(1)} = e^{\left[\pm \frac{e^x}{2} \mp \left(1 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) x \right]} = e^{\left[\pm \frac{e^x}{2} \mp \left(\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \right) x \right]} = \begin{cases} e^{\left[\frac{e^x}{2} - 2x \right]} \\ e^{-\left[\frac{e^x}{2} - x \right]} \end{cases}, \quad (C3)$$

cuyo correspondiente eigenvalor de acuerdo a la Ec.(C2) es

$$\lambda_{n_{\pm}} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right)^2 = \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Entonces $\psi_{n_+}^{(1)}$ ($\psi_{n_-}^{(1)}$) es una eigenfunción cuadrado no integrable (integrable) cuyo eigenvalor asociado λ_{n_+} (λ_{n_-}) es -2 ($-\frac{1}{2}$), por lo que se identifica en la Fig.(2) (Fig.(3)) por el ket $|-2, 1\rangle$ ($|\frac{1}{2}, 1\rangle$).

Por lo cual aplicando los operadores de creación y aniquilación obtenidos en la Ec.(98) a las

eigenfunciones de la Ec.(C3) obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \pm \left(\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \mp \frac{e^x}{2} \right) \psi_{n_{\pm}}^{(1)} &= \begin{cases} 0 \\ (e^x - 3) e^{\left[\frac{e^x}{2} - 2x \right]} \end{cases}, \\ \left(\frac{d}{dx} \pm \left(\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \mp \frac{e^x}{2} \right) \psi_{n_{\mp}}^{(1)} &= \begin{cases} -(e^x - 3) e^{-\left[\frac{e^x}{2} - x \right]} \\ 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (\text{C4})$$

donde $(e^x - 3) e^{\left[\frac{e^x}{2} - 2x \right]}$ $(-(e^x - 3) e^{-\left[\frac{e^x}{2} - x \right]})$ es una eigenfunción cuadrado no integrable (integrable) la cual está identificada en la Fig.(2) (Fig.(3)) por el ket $|-2, 0\rangle$ $(|-\frac{1}{2}, 2\rangle)$.

La aplicación sucesiva de estos operadores permite obtener las demás eigenfunciones cuyos eigenvalores asociados son los mismos, es decir, $\lambda_{n_{\pm}}$ ($\lambda_{n_{\mp}}$) es -2 $(-\frac{1}{2})$.

Tomando $s = 2$ en la Ec.(C1) tenemos

$$\psi_{n_{\pm}}^{(2)} = e^{\left[\pm \frac{e^x}{2} \mp (2 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2})x \right]} = e^{\left[\pm \frac{e^x}{2} \mp (\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2})x \right]} = \begin{cases} e^{\left[\frac{e^x}{2} - 3x \right]} \\ e^{-\left[\frac{e^x}{2} - 2x \right]} \end{cases}, \quad (\text{C5})$$

cuyo correspondiente eigenvalor de acuerdo a la Ec.(C2) es

$$\lambda_{n_{\pm}} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right)^2 = \begin{cases} -\frac{9}{2} \\ -2 \end{cases}.$$

Entonces $\psi_{n_{\pm}}^{(2)}$ ($\psi_{n_{\mp}}^{(2)}$) es una eigenfunción cuadrado no integrable (integrable) cuyo eigenvalor asociado $\lambda_{n_{\pm}}$ ($\lambda_{n_{\mp}}$) es $-\frac{9}{2}$ (-2) , por lo que se identifica en la Fig.(2) (Fig.(3)) por el ket $|\frac{9}{2}, 2\rangle$ $(|-2, 2\rangle)$.

Y por lo cual si aplicamos los operadores escalera obtenidos en la Ec.(98) a las eigenfunciones de la Ec.(C5) obtenemos las siguientes eigenfunciones, es decir,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \pm \left(\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \mp \frac{e^x}{2} \right) \psi_{n_{\pm}}^{(2)} &= \begin{cases} 0 \\ (e^x - 5) e^{\left[\frac{e^x}{2} - 3x \right]} \end{cases}, \\ \left(\frac{d}{dx} \pm \left(\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \mp \frac{e^x}{2} \right) \psi_{n_{\mp}}^{(2)} &= \begin{cases} -(e^x - 5) e^{-\left[\frac{e^x}{2} - 2x \right]} \\ 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (\text{C6})$$

donde $(e^x - 5) e^{\left[\frac{e^x}{2} - 3x\right]}$ $(-(e^x - 5) e^{-\left[\frac{e^x}{2} - 2x\right]})$ es una eigenfunción cuadrado no integrable (integrable) la cual está identificada en la Fig.(2) (Fig.(3)) por el ket $\left|-\frac{9}{2}, 1\right\rangle$ $(|-2, 3\rangle)$.

La aplicación sucesiva de estos operadores permite obtener las demás eigenfunciones cuyos eigenvalores asociados son los mismos, es decir, λ_{n_+} (λ_{n_-}) es $-\frac{9}{2}$ (-2) .

Tomando $s = 3$ en la Ec.(C1) tenemos

$$\psi_{n_{\pm}}^{(3)} = e^{\left[\pm \frac{e^x}{2} \mp (3 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2})x\right]} = e^{\left[\pm \frac{e^x}{2} \mp (\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2})x\right]} = \begin{cases} e^{\left[\frac{e^x}{2} - 4x\right]} \\ e^{-\left[\frac{e^x}{2} - 3x\right]} \end{cases}, \quad (\text{C7})$$

cuyo correspondiente eigenvalor de acuerdo a la Ec.(C2) es

$$\lambda_{n_{\pm}} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)^2 = \begin{cases} -8 \\ -\frac{9}{2} \end{cases}.$$

Entonces $\psi_{n_+}^{(3)}$ $(\psi_{n_-}^{(3)})$ es una eigenfunción cuadrado no integrable (integrable) cuyo eigenvalor asociado λ_{n_+} (λ_{n_-}) es -8 $(-\frac{9}{2})$, por lo que se identifica en la Fig.(2) (Fig.(3)) por el ket $|-8, 3\rangle$ $(|-\frac{9}{2}, 3\rangle)$.

Nuevamente si aplicamos los operadores escalera obtenidos en la Ec.(98) a las eigenfunciones de la Ec.(C7) obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \pm \left(\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}\right) \mp \frac{e^x}{2}\right) \psi_{n_+}^{(3)} &= \begin{cases} 0 \\ (e^x - 7) e^{\left[\frac{e^x}{2} - 4x\right]} \end{cases}, \\ \left(\frac{d}{dx} \pm \left(\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}\right) \mp \frac{e^x}{2}\right) \psi_{n_-}^{(3)} &= \begin{cases} -(e^x - 7) e^{-\left[\frac{e^x}{2} - 3x\right]} \\ 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (\text{C8})$$

donde $(e^x - 7) e^{\left[\frac{e^x}{2} - 4x\right]}$ $(-(e^x - 7) e^{-\left[\frac{e^x}{2} - 3x\right]})$ es una eigenfunción cuadrado no integrable (integrable) la cual está identificada en la Fig.(2) (Fig.(3)) por el ket $|-8, 2\rangle$ $(|-\frac{9}{2}, 4\rangle)$.

La aplicación sucesiva de estos operadores permite obtener las demás eigenfunciones cuyos eigenvalores asociados son los mismos, es decir, λ_{n_+} (λ_{n_-}) es -8 $(-\frac{9}{2})$.

En las Figs.(2) y (3) representamos las eigenfunciones obtenidas anteriormente, en donde las eigenfunciones de color azul representan las eigenfunciones cuadrado integrables y las eigen-

funciones de color naranja representan las eigenfunciones cuadrado no integrables.

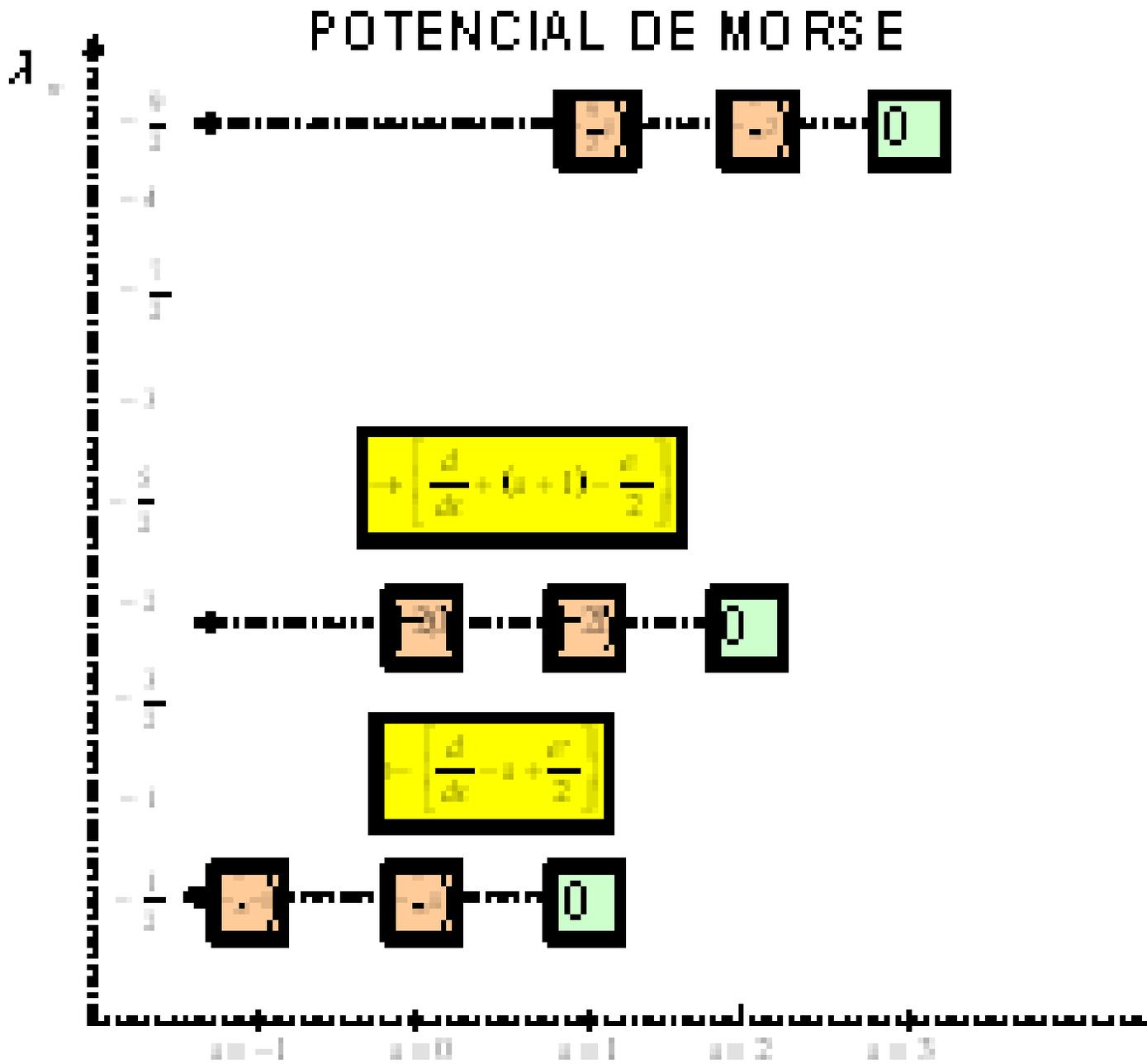


Fig.(2)

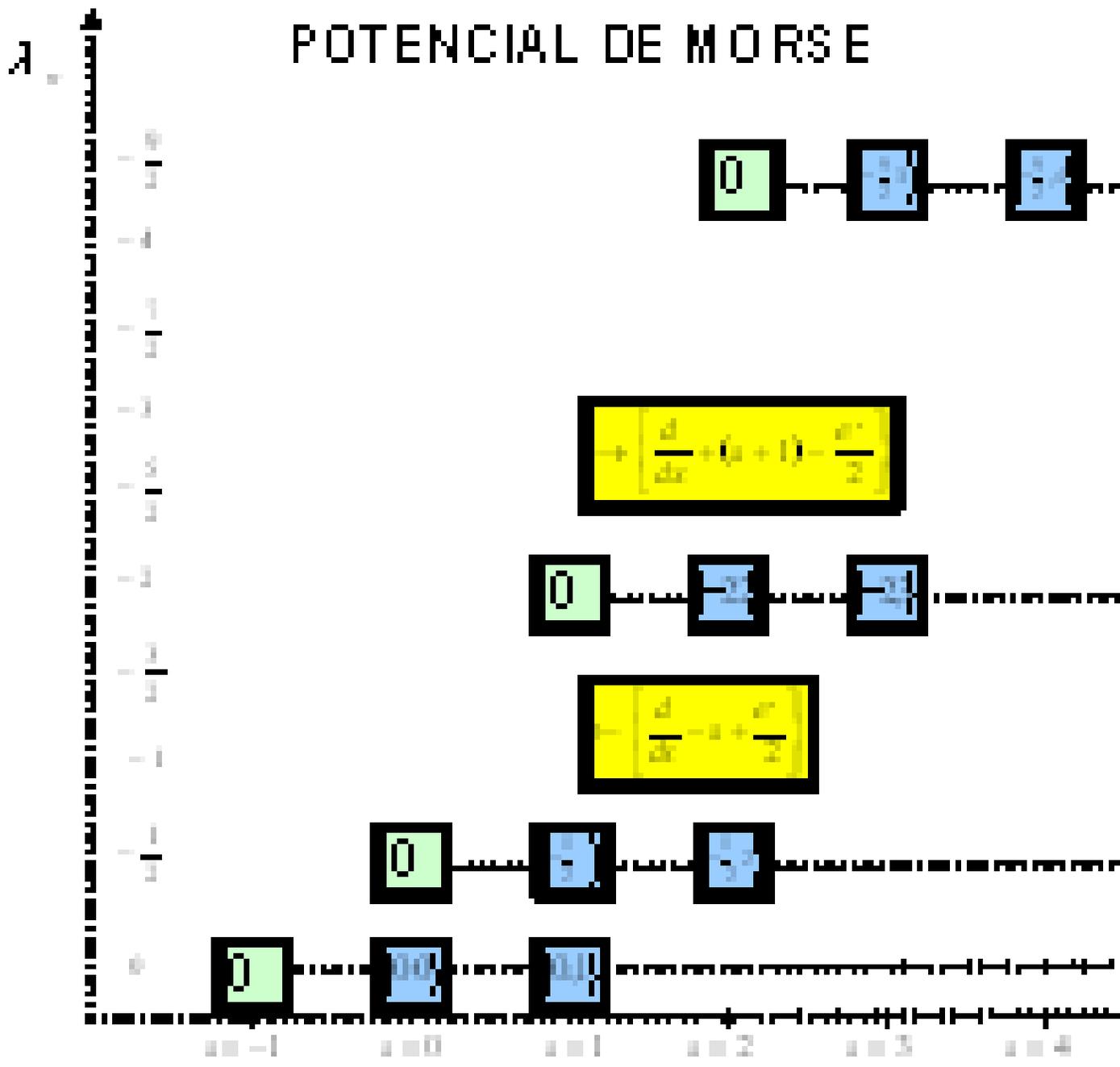


Fig.(3)

Chapter 13

Apéndice D

Problema Kepler - Coulomb 3-D

En este apéndice construimos nuevamente en base a los operadores escalera obtenidos en la Ec.(121), las eigenfunciones radiales del problema Kepler - Coulomb 3-D. Partiendo de la función $u_n^{(\lambda_{\pm})}$ tal que esta su transformada tipo Darboux sea nula, obtenemos

$$\varphi_+ = \left(\frac{d}{dr} - \frac{\lambda_+ + 1}{r} + \frac{A}{\lambda_+ + 1} \right) u_n^{(\lambda_+)} = 0, \quad u_n^{(\lambda_+)} = K_+ r^{\lambda_+ + 1} e^{[-Ar/(\lambda_+ + 1)]}, \quad (\text{D1})$$

$$\varphi_- = \left(\frac{d}{dr} + \frac{\lambda_-}{r} - \frac{A}{\lambda_-} \right) u_n^{(\lambda_-)} = 0, \quad u_n^{(\lambda_-)} = K_- r^{-\lambda_-} e^{[Ar/\lambda_-]}. \quad (\text{D2})$$

Además si las Ecs.(D1) y (D2) satisficiera la ecuación de Schrödinger (Ec.(109))

$$u_n^{(\lambda_{\pm})''} - 2 \left(-\frac{A}{r} + \frac{\lambda_{\pm}(\lambda_{\pm} + 1)}{2r^2} \right) u_n^{(\lambda_{\pm})} = -2E_n u_n^{(\lambda_{\pm})}. \quad (\text{D3})$$

podríamos obtener los correspondientes eigenvalores asociados a $u_n^{(\lambda_{\pm})}$. En efecto, como

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{d^2}{dr^2} - 2 \left(-\frac{A}{r} + \frac{\lambda_+(\lambda_+ + 1)}{2r^2} \right) \right] u_n^{(\lambda_+)} \\
&= \left[\frac{d^2}{dr^2} - 2 \left(-\frac{A}{r} + \frac{\lambda_+(\lambda_+ + 1)}{2r^2} \right) \right] K_+ r^{\lambda_+ + 1} e^{-Ar/(\lambda_+ + 1)} \\
&= K_+ \frac{d}{dr} \left\{ \left[(\lambda_+ + 1)r^{\lambda_+} - \frac{A}{\lambda_+ + 1} r^{\lambda_+ + 1} \right] e^{-Ar/(\lambda_+ + 1)} \right\} \\
&\quad - 2 \left(-\frac{A}{r} + \frac{\lambda_+(\lambda_+ + 1)}{2r^2} \right) K_+ r^{\lambda_+ + 1} e^{-Ar/(\lambda_+ + 1)} \\
&= \left\{ \begin{aligned} & [\lambda_+(\lambda_+ + 1)r^{\lambda_+ - 1} - Ar^{\lambda_+}] + \\ & \left[(\lambda_+ + 1)r^{\lambda_+} - \frac{A}{\lambda_+ + 1} r^{\lambda_+ + 1} \right] \left[-\frac{A}{\lambda_+ + 1} \right] \end{aligned} \right\} K_+ e^{-Ar/(\lambda_+ + 1)} \\
&\quad - 2 \left(-\frac{A}{r} + \frac{\lambda_+(\lambda_+ + 1)}{2r^2} \right) K_+ r^{\lambda_+ + 1} e^{-Ar/(\lambda_+ + 1)} \\
&= \left\{ \begin{aligned} & \frac{\lambda_+(\lambda_+ + 1)}{r^2} - \frac{A}{r} - \frac{A}{r} + \\ & \frac{A^2}{(\lambda_+ + 1)^2} + 2\frac{A}{r} - \frac{\lambda_+(\lambda_+ + 1)}{r^2} \end{aligned} \right\} K_+ r^{\lambda_+ + 1} e^{-Ar/(\lambda_+ + 1)} \\
&= \frac{A^2}{(\lambda_+ + 1)^2} u_n^{(\lambda_+)} \equiv -2E_n u_n^{(\lambda_+)} \tag{D4}
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{d^2}{dr^2} - 2 \left(-\frac{A}{r} + \frac{\lambda_-(\lambda_- + 1)}{2r^2} \right) \right] u_n^{(\lambda_-)} \\
&= \left[\frac{d^2}{dr^2} - 2 \left(-\frac{A}{r} + \frac{\lambda_-(\lambda_- + 1)}{2r^2} \right) \right] K_- r^{-\lambda_-} e^{Ar/\lambda_-} \\
&= K_- \frac{d}{dr} \left\{ \left[-\lambda_- r^{-(\lambda_- + 1)} + \frac{A}{\lambda_-} r^{-\lambda_-} \right] e^{Ar/\lambda_-} \right\} \\
&\quad - 2 \left(-\frac{A}{r} + \frac{\lambda_-(\lambda_- + 1)}{2r^2} \right) K_- r^{-\lambda_-} e^{Ar/\lambda_-} \\
&= \left\{ \begin{aligned} & [\lambda_-(\lambda_- + 1)r^{-(\lambda_- + 2)} - Ar^{-(\lambda_- + 1)}] + \\ & \left[-\lambda_- r^{-(\lambda_- + 1)} + \frac{A}{\lambda_-} r^{-\lambda_-} \right] \frac{A}{\lambda_-} \end{aligned} \right\} K_- e^{Ar/\lambda_-} \\
&\quad - 2 \left(-\frac{A}{r} + \frac{\lambda_-(\lambda_- + 1)}{2r^2} \right) K_- r^{-\lambda_-} e^{Ar/\lambda_-} \\
&= \left\{ \frac{\lambda_-(\lambda_- + 1)}{r^2} - \frac{A}{r} - \frac{A}{r} + \frac{A^2}{\lambda_-^2} + 2\frac{A}{r} - \frac{\lambda_-(\lambda_- + 1)}{r^2} \right\} K_- r^{-\lambda_-} e^{Ar/\lambda_-} \\
&= \frac{A^2}{\lambda_-^2} u_n^{(\lambda_-)} \equiv -2E_n u_n^{(\lambda_-)}. \tag{D5}
\end{aligned}$$

Entonces se tiene de las Ecs.(D4) y (D5) ($n = \lambda_+ + 1$)

$$2E_n = -\frac{A^2}{(\lambda_+ + 1)^2} = -\frac{A^2}{\lambda_-^2}, \quad \lambda_- = \lambda_+ + 1. \quad (\text{D6})$$

Tomando $\lambda_+ = 0$ en la Ec.(D1) ($2E_{n=1} = -A^2$) obtenemos

$$u_{n=1}^{(\lambda_+=0)} = K_0 r e^{[-Ar]}. \quad (\text{D7})$$

donde $u_{n=1}^{(\lambda_+=0)}$ es una eigenfunción cuadrado integrable identificada en la Fig.(4) por el ket $|1, 0\rangle$.

Tenemos que no hay un operador tal que $u_{n=1}^{(\lambda_+=0)} \sim u_{n=1}^{(\lambda_+=-1)}$. Y además de la Ec.(D1) se cumple con $\lambda_+ = 0$ lo siguiente

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} + \frac{A}{1} \right) u_1^0 = 0. \quad (\text{D8})$$

Tomando $\lambda_- = 1$ en la Ec.(D2) obtenemos

$$u_{n=1}^{(\lambda_-=1)} = K_1 r^{-1} e^{[Ar]}, \quad (\text{D9})$$

donde $u_{n=1}^{(\lambda_-=1)}$ es una eigenfunción cuadrado no integrable identificada en la Fig.(4) por el ket $|1, 1\rangle$.

Por lo cual aplicando los operadores de creación y aniquilación obtenidos en la Ec.(121) a la eigenfunción de la Ec.(D9) obtenemos

$$u_{n=1}^{(l=\lambda_-+1)} = \left(\frac{d}{dr} - \frac{\lambda_- + 1}{r} + \frac{A}{\lambda_- + 1} \right) u_n^{(\lambda_-)}, \quad (\text{D10})$$

ó explícitamente

$$\begin{aligned} u_{n=1}^{(l=2)} &= \left(\frac{d}{dr} - \frac{2}{r} + \frac{A}{2} \right) K_1 r^{-1} e^{[Ar]} \\ &= \left(-\frac{1}{r} + A \right) K_1 r^{-1} e^{[Ar]} + \left(-\frac{2}{r} + \frac{A}{2} \right) K_1 r^{-1} e^{[Ar]} \\ &= \left(-\frac{1}{r} + A - \frac{2}{r} + \frac{A}{2} \right) u_1^1 = 3 \left(\frac{A}{2} - \frac{1}{r} \right) u_1^1 \end{aligned} \quad (\text{D11})$$

donde $u_{n=1}^{(l=2)}$ es una eigenfunción cuadrado no integrable identificada en la Fig.(4) por el ket $|1, 2\rangle$.

En efecto verifiquemos que la Ec.(D11) satisface la ecuación de Schrödinger, es decir, calculemos

$$\begin{aligned}
u_1^{2'} &= 3 \left(\frac{A}{2} - \frac{1}{r} \right)' u_1^1 + 3 \left(\frac{A}{2} - \frac{1}{r} \right) u_1^{1'} = \frac{3}{r^2} u_1^1 + 3 \left(\frac{A}{2} - \frac{1}{r} \right) \left(-\frac{1}{r} + A \right) u_1^1 \\
&= 3 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{A}{2r} + \frac{A^2}{2} + \frac{1}{r^2} - \frac{A}{r} \right) u_1^1 = \left(\frac{1}{r^2} - \frac{A}{2r} + \frac{A^2}{2} + \frac{1}{r^2} - \frac{A}{r} \right) 3u_1^1 \\
&= 3 \left(\frac{2}{r^2} - \frac{3A}{2r} + \frac{A^2}{2} \right) u_1^1.
\end{aligned} \tag{D12}$$

y además

$$\begin{aligned}
u_1^{2''} &= 3 \left(\frac{2}{r^2} - \frac{3A}{2r} + \frac{A^2}{2} \right)' u_1^1 + 3 \left(\frac{2}{r^2} - \frac{3A}{2r} + \frac{A^2}{2} \right) u_1^{1'} \\
&= 3 \left(-\frac{4}{r^3} + \frac{3A}{2r^2} \right) u_1^1 + 3 \left(\frac{2}{r^2} - \frac{3A}{2r} + \frac{A^2}{2} \right) \left(-\frac{1}{r} + A \right) u_1^1 \\
&= 3 \left(-\frac{4}{r^3} + \frac{3A}{2r^2} - \frac{2}{r^3} + \frac{2A}{r^2} + \frac{3A}{2r^2} - \frac{3A^2}{2r} - \frac{A^2}{2r} + \frac{A^3}{2} \right) u_1^1 \\
&= 3 \left(-\frac{6}{r^3} + 5\frac{A}{r^2} - 2\frac{A^2}{r} + \frac{A^3}{2} \right) u_1^1.
\end{aligned} \tag{D13}$$

Entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
u_1^{2''} - 2 \left(-\frac{A}{r} + \frac{2(2+1)}{2r^2} \right) u_1^2 &= 3 \left(-\frac{6}{r^3} + 5\frac{A}{r^2} - 2\frac{A^2}{r} + \frac{A^3}{2} \right) u_1^1 \\
&\quad - 2 \left(-\frac{A}{r} + \frac{6}{2r^2} \right) 3 \left(\frac{A}{2} - \frac{1}{r} \right) u_1^1 \\
&= 3 \left(-\frac{6}{r^3} + 5\frac{A}{r^2} - 2\frac{A^2}{r} + \frac{A^3}{2} + \frac{A^2}{r} - \frac{2A}{r^2} - \frac{3A}{r^2} + \frac{6}{r^3} \right) u_1^1 \\
&= 3 \left(-\frac{A^2}{r} + \frac{A^3}{2} \right) u_1^1 = A^2 3 \left(\frac{A}{2} - \frac{1}{r} \right) u_1^1 \\
&= A^2 u_1^2 \equiv -2E_1 u_1^2.
\end{aligned} \tag{D14}$$

donde por la Ec.(D14) se verifica que efectivamente la Ec.(D11) satisface la ecuación de Schrödinger.

Aplicación el operador escalera de creación sobre la eigenfunción u_1^2 , obtenemos

$$u_1^3 = \left(\frac{d}{dr} - \frac{3}{r} + \frac{A}{3} \right) u_1^2, \quad (\text{D15})$$

donde u_1^3 es una eigenfunción cuadrado no integrable identificada en la Fig.(4) por el ket $|1, 3\rangle$.

La aplicación sucesiva de estos operadores permite obtener las demás eigenfunciones con el mismo eigenvalor asociado, es decir, $2E_{n=1} = -A^2$.

Tomando $\lambda_+ = 1$ en la Ec.(D1) ($2E_{n=2} = -A^2/4$) obtenemos

$$u_{n=2}^{(\lambda_+=1)} = K_1 r^2 e^{[-Ar/2]}. \quad (\text{D16})$$

donde $u_{n=2}^{(\lambda_+=1)}$ es una eigenfunción cuadrado integrable identificada en la Fig.(4) por el ket $|2, 1\rangle$.

De la Ec.(D1) se verifica directamente con $\lambda_+ = 1$ lo siguiente

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{2}{r} + \frac{A}{2} \right) u_2^1 = 0. \quad (\text{D17})$$

Por lo cual aplicando los operadores escalera obtenidos en la Ec.(121) a la eigenfunción de la Ec.(D16) obtenemos

$$\begin{aligned} u_2^0 &= \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} - \frac{A}{1} \right) u_2^1 = K_1 \left(2r - \frac{r^2 A}{2} \right) e^{[-Ar/2]} + \left(\frac{1}{r} - A \right) u_2^1 \\ &= \left(\frac{2}{r} - \frac{A}{2} \right) K_1 r^2 e^{[-Ar/2]} + \left(\frac{1}{r} - A \right) u_2^1 \\ &= \left(\frac{3}{r} - \frac{A}{2} - A \right) u_2^1 = 3 \left(\frac{1}{r} - \frac{A}{2} \right) u_2^1 \end{aligned} \quad (\text{D18})$$

donde u_2^0 es una eigenfunción cuadrado integrable identificada en la Fig.(4) por el ket $|2, 0\rangle$.

En efecto verificamos que la Ec.(D18) cumple la ecuación de Schrödinger, es decir,

$$\begin{aligned}
u_2^{0'} &= 3 \left(\frac{1}{r} - \frac{A}{2} \right)' u_2^1 + 3 \left(\frac{1}{r} - \frac{A}{2} \right) u_2^{1'} \\
&= -\frac{3}{r^2} u_2^1 + 3 \left(\frac{1}{r} - \frac{A}{2} \right) \left(\frac{2}{r} - \frac{A}{2} \right) u_2^1 \\
&= 3 \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^2} - \frac{A}{2r} - \frac{A}{r} + \frac{A^2}{4} \right) u_2^1 \\
&= 3 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{3A}{2r} + \frac{A^2}{4} \right) u_2^1
\end{aligned} \tag{D19}$$

y además

$$\begin{aligned}
u_2^{0''} &= 3 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{3A}{2r} + \frac{A^2}{4} \right)' u_2^1 + 3 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{3A}{2r} + \frac{A^2}{4} \right) u_2^{1'} \\
&= 3 \left(-\frac{2}{r^3} + \frac{3A}{2r^2} \right) u_2^1 + 3 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{3A}{2r} + \frac{A^2}{4} \right) \left(\frac{2}{r} - \frac{A}{2} \right) u_2^1 \\
&= 3 \left(-\frac{2}{r^3} + \frac{3A}{2r^2} + \frac{2}{r^3} - \frac{A}{2r^2} - \frac{3A}{r^2} + \frac{3A^2}{4r} + \frac{A^2}{2r} - \frac{A^3}{8} \right) u_2^1 \\
&= 3 \left(-\frac{2A}{r^2} + \frac{5A^2}{4r} - \frac{A^3}{8} \right) u_2^1
\end{aligned} \tag{D20}$$

Entonces se obtiene

$$\begin{aligned}
u_2^{0''} - 2 \left(-\frac{A}{r} \right) u_2^0 &= 3 \left(-\frac{2A}{r^2} + \frac{5A^2}{4r} - \frac{A^3}{8} \right) u_2^1 + 2 \frac{A}{r} 3 \left(\frac{1}{r} - \frac{A}{2} \right) u_2^1 \\
&= 3 \left(-\frac{2A}{r^2} + \frac{5A^2}{4r} - \frac{A^3}{8} + \frac{2A}{r^2} - \frac{A^2}{r} \right) u_2^1 \\
&= 3 \left(\frac{A^2}{4r} - \frac{A^3}{8} \right) u_2^1 \\
&= 3 \frac{A^2}{4} \left(\frac{1}{r} - \frac{A}{2} \right) u_2^1 = \frac{A^2}{4} u_2^0 \equiv -2E_2 u_2^0
\end{aligned} \tag{D21}$$

donde por la Ec.(D21) se verifica que efectivamente la Ec.(D18) satisface la ecuación de Schrödinger.

La aplicación sucesiva de estos operadores permite obtener las demás eigenfunciones con el mismo eigenvalor asociado, es decir, $2E_{n=2} = -A^2/4$. Naturalmente no hay un operador tal que $u_{n=2}^{(\lambda_+=0)} \sim u_{n=2}^{(\lambda_+=-1)}$.

Tomando $\lambda_- = 2$ en la Ec.(D2) obtenemos

$$u_{n=2}^{(2)} = K_2 r^{-2} e^{[Ar/2]} \quad (\text{D22})$$

donde $u_{n=2}^{(2)}$ es una eigenfunción cuadrado no integrable identificada en la Fig.(4) por el ket $|2, 2\rangle$.

Aplicando los operadores escalera obtenidos en la Ec.(121) a la eigenfunción de la Ec.(D22) obtenemos

$$u_{n=2}^{(l=\lambda_-+1)} = \left(\frac{d}{dr} - \frac{\lambda_- + 1}{r} + \frac{A}{\lambda_- + 1} \right) u_n^{(\lambda_-)}, \quad (\text{D23})$$

ó explícitamente

$$\begin{aligned} u_{n=2}^{(l=3)} &= \left(\frac{d}{dr} - \frac{3}{r} + \frac{A}{3} \right) K_2 r^{-2} e^{[Ar/2]} \\ &= \left(-\frac{2}{r^3} + \frac{A}{2r^2} \right) K_2 e^{[Ar/2]} + \left(\frac{A}{3} - \frac{3}{r} \right) u_2^2 \\ &= \left(\frac{A}{2} - \frac{2}{r} + \frac{A}{3} - \frac{3}{r} \right) u_2^2 = 5 \left(\frac{A}{6} - \frac{1}{r} \right) u_2^2 \end{aligned} \quad (\text{D24})$$

donde $u_{n=2}^{(l=3)}$ es una eigenfunción cuadrado no integrable identificada en la Fig.(4) por el ket $|2, 3\rangle$.

En efecto verificamos que la Ec.(D24) satisface la ecuación de Schrödinger, es decir,

$$\begin{aligned} u_2^{3'} &= 5 \left(\frac{A}{6} - \frac{1}{r} \right)' u_2^2 + 5 \left(\frac{A}{6} - \frac{1}{r} \right) u_2^{2'} \\ &= \frac{5}{r^2} u_2^2 + 5 \left(\frac{A}{6} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{A}{2} - \frac{2}{r} \right) u_2^2 \\ &= 5 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{A^2}{12} - \frac{A}{3r} - \frac{A}{2r} + \frac{2}{r^2} \right) u_2^2 \\ &= 5 \left(\frac{3}{r^2} - \frac{5A}{6r} + \frac{A^2}{12} \right) u_2^2 \end{aligned} \quad (\text{D25})$$

y además

$$\begin{aligned}
u_2^{3''} &= 5 \left(\frac{3}{r^2} - \frac{5A}{6r} + \frac{A^2}{12} \right)' u_2^2 + 5 \left(\frac{3}{r^2} - \frac{5A}{6r} + \frac{A^2}{12} \right) u_2^{2'} \\
&= 5 \left(-\frac{6}{r^3} + \frac{5A}{6r^2} \right) u_2^2 + 5 \left(\frac{3}{r^2} - \frac{5A}{6r} + \frac{A^2}{12} \right) \left(\frac{A}{2} - \frac{2}{r} \right) u_2^2 \\
&= 5 \left(-\frac{6}{r^3} + \frac{5A}{6r^2} + \frac{3A}{2r^2} - \frac{6}{r^3} - \frac{5A^2}{12r} + \frac{5A}{3r^2} + \frac{A^3}{24} - \frac{A^2}{6r} \right) u_2^2 \\
&= 5 \left(-\frac{12}{r^3} + \frac{4A}{r^2} - \frac{7A^2}{12r} + \frac{A^3}{24} \right) u_2^2
\end{aligned} \tag{D26}$$

Entonces se obtiene

$$\begin{aligned}
u_2^{3''} - 2 \left(-\frac{A}{r} + \frac{3(3+1)}{2r^2} \right) u_2^3 &= 5 \left(-\frac{12}{r^3} + \frac{4A}{r^2} - \frac{7A^2}{12r} + \frac{A^3}{24} \right) u_2^2 \\
&\quad - 2 \left(-\frac{A}{r} + \frac{6}{r^2} \right) 5 \left(\frac{A}{6} - \frac{1}{r} \right) u_2^2 \\
&= 5 \left(-\frac{12}{r^3} + \frac{4A}{r^2} - \frac{7A^2}{12r} + \frac{A^3}{24} + \frac{A^2}{3r} - \frac{2A}{r^2} - \frac{2A}{r^2} + \frac{12}{r^3} \right) u_2^2 \\
&= 5 \left(\frac{A^3}{24} - \frac{A^2}{4r} \right) u_2^2 = \frac{A^2}{4} 5 \left(\frac{A}{6} - \frac{1}{r} \right) u_2^2 \\
&= \frac{A^2}{4} u_2^3 \equiv -2E_2 u_2^3.
\end{aligned} \tag{D27}$$

donde de la Ec.(D27) se verifica que efectivamente la Ec.(D24) satisface la ecuación de Schrödinger.

La aplicación sucesiva de estos operadores permite obtener las demás eigenfunciones con el mismo eigenvalor asociado, es decir, $2E_{n=2} = -A^2/4$.

En la Fig.(4) representamos las eigenfunciones obtenidas anteriormente mediante la aplicación directa de los operadores escalera, donde las eigenfunciones de color azul representan eigenfunciones cuadrado integrables, mientras que las eigenfunciones de color naranja representan eigenfunciones cuadrado no integrables.

Problema Coulomb – Kepler 3 - D

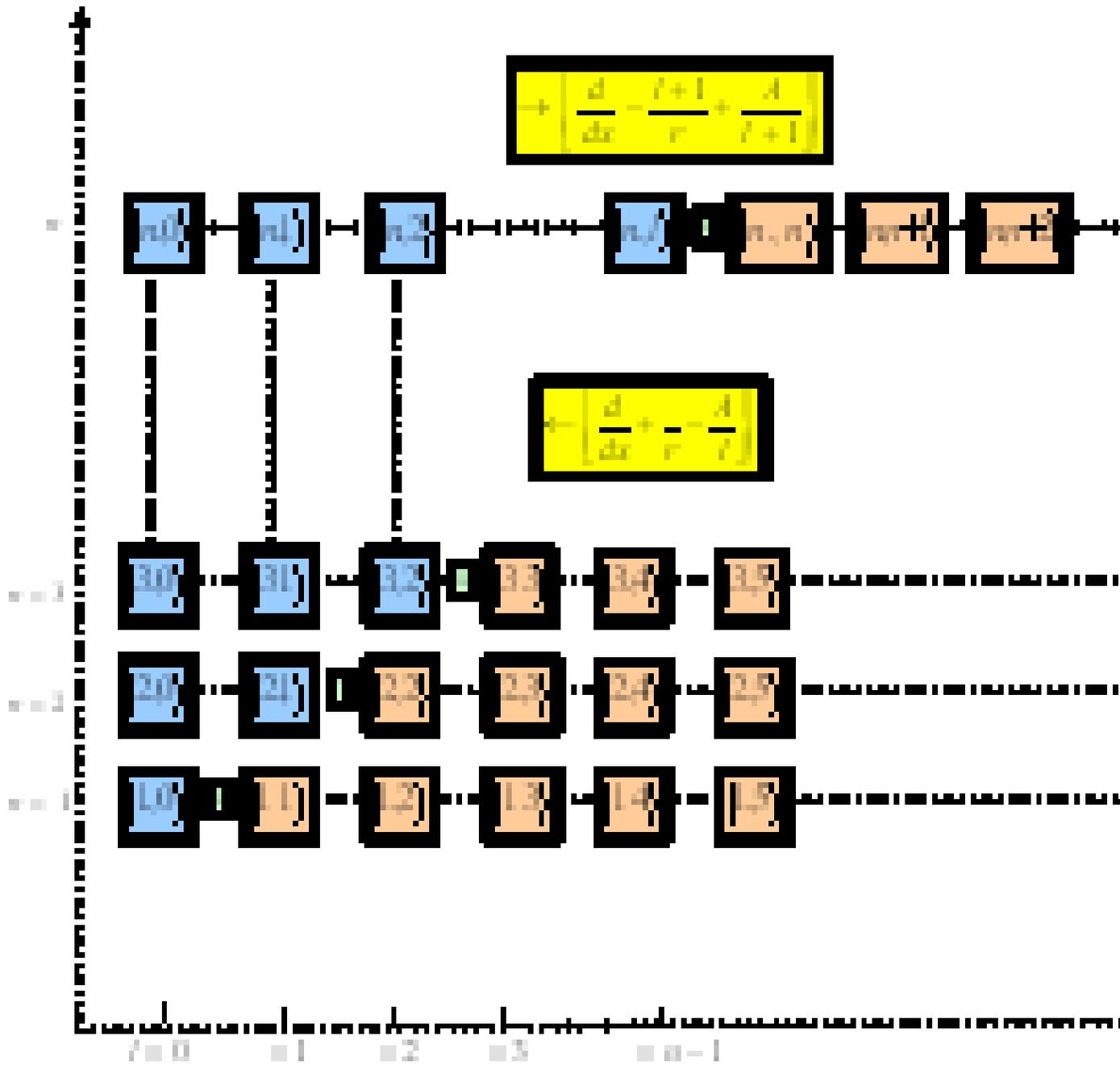


Fig.(4)

Chapter 14

Apéndice E

Oscilador Amónico 3-D

En este apéndice se realiza nuevamente la construcción de las eigenfunciones pero en este caso para el problema del oscilador armónico 3-D en base a la utilización sucesiva de los operadores escalera obtenidos en las Ecs.(137) y (138). Para este caso los operadores escalera obtenidos fueron cuatro, por lo que se pueden obtener en principio, cuatro eigenfunciones tal que sus transformada tipo Darboux sean nulas. Partiendo de la función $R_n^{(L)}(r)$ tal que esta su transformada tipo Darboux sea nula, *i.e.*

$$\varphi_{+\pm}(r) \equiv \left(\frac{d}{dr} - \frac{L}{r} \mp r \right) R_n^{(L)}(r) = 0,$$

para resolver esta ecuación diferencial de primer orden, escribimos

$$R_n^{(L)'}(r) = \left(\frac{L}{r} \pm r \right) R_n^{(L)}(r),$$

de lo cual se tiene

$$R_n^{(L)}(r) = r^L e^{\pm \frac{r^2}{2}}. \quad (\text{E1})$$

Donde en la Ec.(E1) se obtienen 2 eigenfunciones cuya transformada tipo Darboux son nulas.

Además si las $R_n^{(L)}(r)$ satisficieran la ecuación de Schrödinger (Ec.(109))

$$R_n^{(L)''}(r) - 2 \left(\frac{r^2}{2} + \frac{L[L-1]}{2r^2} \right) R_n^{(L)}(r) = -2E_n R_n^{(L)}(r).$$

En efecto, se tiene

$$\begin{aligned}
R_n^{(L)''}(r) - 2 \left(\frac{r^2}{2} + \frac{L[L-1]}{2r^2} \right) R_n^{(L)}(r) &= [L(L-1)r^{L-2} \pm (2L+1)r^L + r^{L+2}] e^{\pm \frac{r^2}{2}} \\
&\quad - 2 \left(\frac{r^2}{2} + \frac{L[L-1]}{2r^2} \right) r^L e^{\pm \frac{r^2}{2}} \\
&= [L(L-1)r^{-2} \pm (2L+1) + r^2] - r^2 - \frac{L[L-1]}{r^2} \\
&= \pm (2L+1) \\
&= -2E_n
\end{aligned}$$

por lo cual concluimos de lo anterior

$$E_n = \mp \left(L + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{E2})$$

de donde se concluye que las $R_n^{(L)}(r)$ en efecto satisfacen la ecuación de Schrödinger.

Tomenos $d = 3$ en la ecuación $L = l + \frac{1}{2}(d-1)$ entonces obtenemos $L = l + 1$ y sustituyendo lo anterior en la Ec.(E1) se tiene

$$R_n^{(l+1)}(r) = r^{l+1} e^{\pm \frac{r^2}{2}} \quad (\text{E3})$$

cuyo correspondiente eigenvalor de acuerdo a la Ec.(E2) es

$$E_n = \mp \left(l + \frac{3}{2} \right) = \pm \left(n + \frac{3}{2} \right)$$

De la Ecuación anterior concluimos que $l = n$.

Consideremos el caso $l = 0$ entonces $n = 0$ por lo cual de la Ec.(E3) obtenemos

$$R_0^1(r) = r e^{\pm \frac{r^2}{2}} \quad (\text{E4})$$

cuyo correspondiente eigenvalor de acuerdo a la Ec.(E2) es

$$E_0 = \mp \frac{3}{2}$$

donde $re^{-\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado integrable la cual esta identificada en la Fig.(5) por la notación espectroscópica $1s$, y además $re^{\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado no integrable la cual no tiene representación en la Fig.(5) ya que su representación es en una figura identica a la Fig.(5) pero en lugar de aparecer en la figura $1s$ se sustituye $re^{\frac{r^2}{2}}$.

Por lo cual aplicando los operadores de creación y aniquilación obtenidos en las Ecs.(137) y (138) a las eigenfunciones de la Ec.(E4) obtenemos

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{0+1}{r} \mp r\right) R_0^1(r) = \begin{cases} -2r^2 e^{\pm \frac{r^2}{2}} \\ 0 \end{cases} \quad (\text{E5})$$

donde $-2r^2 e^{-\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado integrable identificada en la Fig.(5) por la notación espectroscópica $1p$, mientras $-2r^2 e^{\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado no integrable y como ya se aclara anteriormente la representación de dicha eigenfunción es sustituir la eigenfunción $1p$ por $-2r^2 e^{\frac{r^2}{2}}$ en la Fig.(5).

La aplicación sucesiva de estos operadores permite obtener las demás eigenfunciones del problema del oscilador armónico 3 - D.

Tomando $l = 1$ tenemos que $n = 1$ y por la Ec.(E3) obtenemos

$$R_1^2(r) = r^2 e^{\pm \frac{r^2}{2}} \quad (\text{E6})$$

cuyo correspondiente eigenvalor de acuerdo a la Ec.(E2) es

$$E_0 = \mp \frac{5}{2}$$

donde $r^2 e^{-\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado integrable identificada en la Fig.(5) por la notación espectroscópica $1p$, mientras que $r^2 e^{\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado no integrable cuya representación en la Fig.(5) es sustituirla en lugar de la eigenfunción $1p$.

Y por lo cual aplicando los operadores escalera obtenidos en las Ecs.(137) y (138) a las

eigenfunciones de la Ec.(E6) obtenemos

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{1+1}{r} \mp r\right) R_1^2(r) = \begin{cases} 4r^3 e^{\pm \frac{r^2}{2}} \\ 0 \end{cases} \quad (\text{E7})$$

donde $4r^3 e^{-\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado integrable identificada en la Fig.(5) por la notación espectroscópica $1d$, mientras que $4r^3 e^{\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado no integrable cuya representación en la Fig.(5) se encuentra al sustituirla por la eigenfunción $1d$.

La aplicación sucesiva de estos operadores permite obtener las demás eigenfunciones del problema del oscilador armónico 3- D.

Para $l = 2$ se tiene $n = 2$ y por la Ec.(E3) se obtiene

$$R_2^3(r) = r^3 e^{\pm \frac{r^2}{2}} \quad (\text{E8})$$

cuyo correspondiente eigenvalor de acuerdo a la Ec.(E2) es

$$E_0 = \mp \frac{7}{2}$$

donde $r^3 e^{-\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado integrable identificada en la Fig.(5) por la notación espectroscópica $1d$, mientras $r^3 e^{\pm \frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado no integrable cuya representación en la Fig.(5) se encuentra al sustituirla en lugar de la eigenfunción $1d$.

Aplicando los operadores escalera obtenidos en las Ecs.(137) y (138) a las eigenfunciones de la Ec.(E8) obtenemos

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{1+1}{r} \mp r\right) R_2^3(r) = \begin{cases} -8r^4 e^{\pm \frac{r^2}{2}} \\ 0 \end{cases} \quad (\text{E9})$$

donde $-8r^4 e^{\pm \frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado integrable identificada en la Fig.(5) por la notación espectroscópica $1f$, mientras que $4r^3 e^{\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado no integrable cuya representación en la Fig.(5) se encuentra al sustituirla por la eigenfunción $1f$.

La aplicación sucesiva de estos operadores permite obtener las demás eigenfunciones del problema del oscilador armónico 3- D.

En la Fig.(5) representamos las eigenfunciones que se obtuvieron mediante la aplicación sucesiva de los operadores escalera, donde las eigenfunciones de color azul representan las eigenfunciones cuadrado integrables y las eigenfunciones de color naranja representan las eigenfunciones cuadrado no integrables.

OSCILADOR ARMÓNICO 3-D

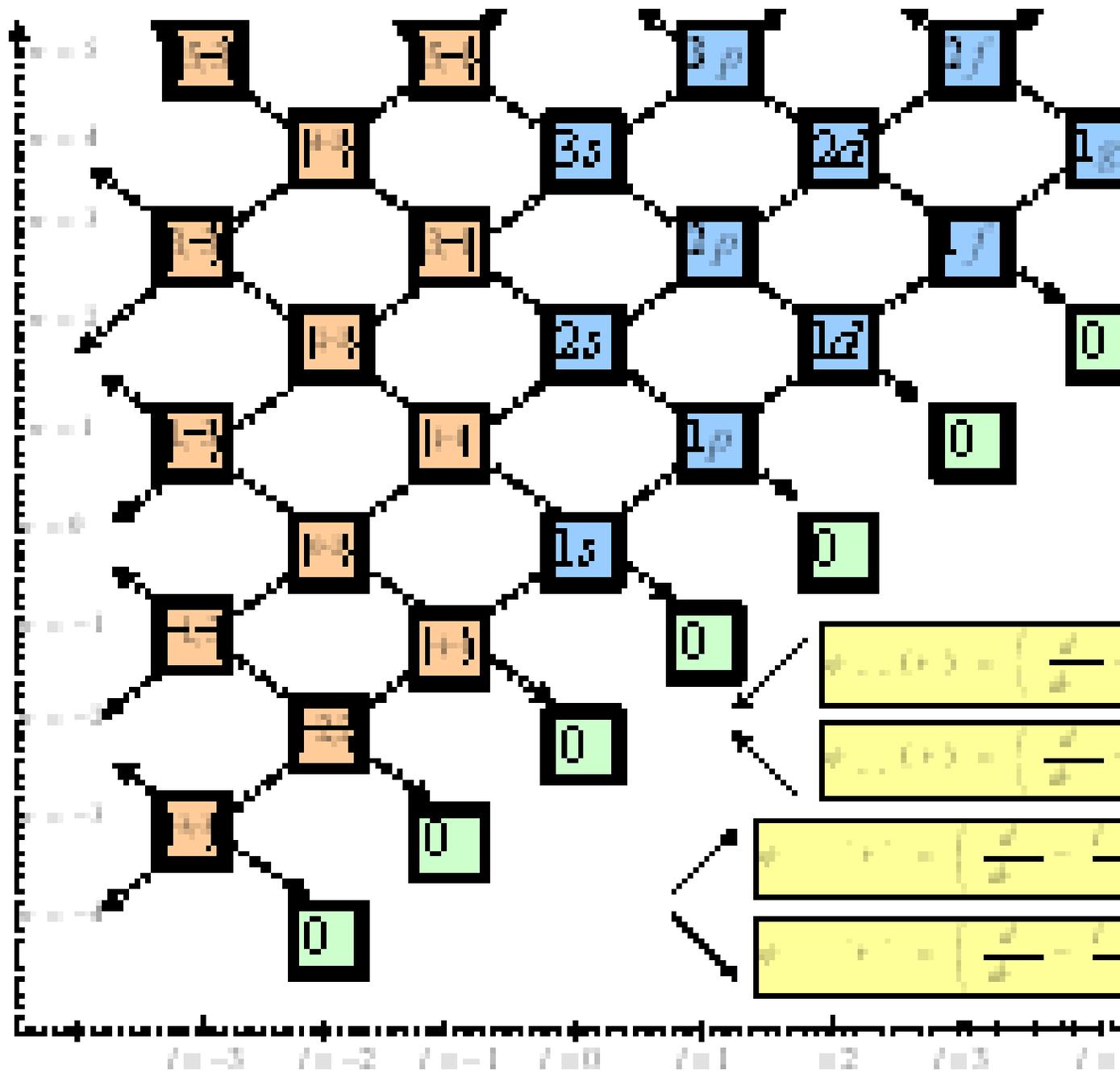


Fig.(5)

Por lo cual ahora realicemos lo mismo pero ahora para los otros dos operadores escalera obtenidos en las Ecs.(139) y (140), partiendo de la función $R_n^{(L)}(r)$ tal que esta su transformada tipo Darboux sea nula, *i.e.*

$$\begin{aligned}\varphi_{-\pm}(r) &\equiv \left(\frac{d}{dr} + \frac{L-1}{r} \mp r \right) R_n^{(L)}(r) = 0 \\ R_n^{(L)}(r) &= r^{-(L-1)} e^{\pm \frac{r^2}{2}}\end{aligned}\tag{E10}$$

donde en la Ec.(E10) se han obtenido las dos faltantes eigenfunciones cuya transformada tipo Darboux es nula.

Además si las $R_n^{(L)}(r)$ satisficieran la ecuación de Schrödinger (Ec.(109))

$$R_n^{(L)''}(r) - 2 \left(\frac{r^2}{2} + \frac{L[L-1]}{2r^2} \right) R_n^{(L)}(r) = -2E_n R_n^{(L)}(r)$$

En efecto, se tiene

$$\begin{aligned}R_n^{(L)''}(r) - 2 \left(\frac{r^2}{2} + \frac{L[L-1]}{2r^2} \right) R_n^{(L)}(r) &= [L(L-1)r^{-2} \pm (L-1+L-2) + r^2] r^{-(L-1)} e^{\pm \frac{r^2}{2}} \\ &\quad - 2 \left(\frac{r^2}{2} + \frac{L[L-1]}{2r^2} \right) r^{-(L-1)} e^{\pm \frac{r^2}{2}} \\ &= [L(L-1)r^{-2} \pm (2L-3) + r^2] - r^2 - \frac{L[L-1]}{r^2} \\ &= \pm (2L-3) \\ &= -2E_n\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye

$$E_n = \mp \left(L - \frac{3}{2} \right)\tag{E11}$$

donde se concluye que las $R_n^{(L)}(r)$ en efecto satisfacen la ecuación de Schrödinger.

Tomemos $d = 3$ en la ecuación $L = l + \frac{1}{2}(d-1)$ entonces obtenemos $L = l + 1$ y sustituyendo lo anterior en la Ec.(E10) se tiene

$$R_n^{(l+1)}(r) = r^{-l} e^{\pm \frac{r^2}{2}}\tag{E12}$$

cuyo correspondiente eigenvalor de acuerdo a la Ec.(E2) es

$$E_n = \mp \left(l + 1 - \frac{3}{2} \right) = \mp \left(l - \frac{1}{2} \right) = \pm \left(n + \frac{3}{2} \right) \quad (\text{E13})$$

De la Ecuación anterior se concluye que $l = -(n + 1)$. Consideremos el caso $l = -1$ entonces $n = 0$ por lo cual de la Ec.(E12) obtenemos

$$R_0^0(r) = r e^{\pm \frac{r^2}{2}} \quad (\text{E14})$$

cuyo correspondiente eigenvalor de acuerdo a la Ec.(E13) es

$$E_0 = \pm \frac{3}{2}$$

donde $r e^{-\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado integrable la cual esta identificada en la Fig.(6) por la notación espectroscópica $1s$, y además $r e^{\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado no integrable la cual su representación en Fig.(6) se encuentra al sustituirla por la eigenfunción $1s$.

Por lo cual aplicando los operadores de creación y aniquilación obtenidos en las Ecs.(137) y (138) a las eigenfunciones de la Ec.(E13) obtenemos

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{(-1)}{r} \mp r \right) R_0^0(r) = \begin{cases} -2r^2 e^{\pm \frac{r^2}{2}} \\ 0 \end{cases} \quad (\text{E15})$$

donde $-2r^2 e^{-\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado integrable identificada en la Fig.(6) por la notación espectroscópica $1p$, mientras $-2r^2 e^{\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado no integrable y como ya se aclara anteriormente la representación de dicha eigenfunción es sustituir la eigenfunción $1p$ por $-2r^2 e^{\frac{r^2}{2}}$ en la Fig.(6).

La aplicación sucesiva de estos operadores permite obtener las demás eigenfunciones.

Para $l = 0$ entonces $n = -1$ y por la Ec.(12) se obtiene

$$R_{-1}^1(r) = e^{\pm \frac{r^2}{2}} \quad (\text{E16})$$

cuyo correspondiente eigenvalor de acuerdo a la Ec.(E13) es

$$E_{-1} = \pm \frac{1}{2}$$

donde $e^{-\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado integrable la cual esta identificada en la Fig.(6) por el ket $|-1, -1\rangle$, y además $e^{\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado no integrable la cual su representación en Fig.(6) se encuentra al sustituirla por la eigenfunción $|-1, -1\rangle$.

Y por lo cual aplicando los operadores escalera obtenidos en las Ecs.(137) y (138) a las eigenfunciones de la Ec.(E15) obtenemos

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{(0)}{r} \mp r \right) R_{-1}^1(r) = \begin{cases} -2re^{\pm \frac{r^2}{2}} \\ 0 \end{cases} \quad (\text{E17})$$

donde $-2re^{-\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado integrable la cual esta identificada en la Fig.(6) por la notación espectroscópica $1s$, y además $-2re^{-\frac{r^2}{2}}$ es una eigenfunción cuadrado no integrable la cual su representación en Fig.(6) se encuentra al sustituirla por la eigenfunción $1s$.

La aplicación sucesiva de estos operadores permite obtener las demás eigenfunciones del problema del oscilador armónico 3-D.

En la Fig.(6) representamos las eigenfunciones obtenidas de la aplicación sucesiva de los operadores escalera (Ecs.(139) y (140)), donde las eigenfunciones de color azul representan las eigenfunciones cuadrado integrables y las eigenfunciones de color naranja representan las eigenfunciones cuadrado no integrables.

OSCILADOR ARMÓNICO 3-D

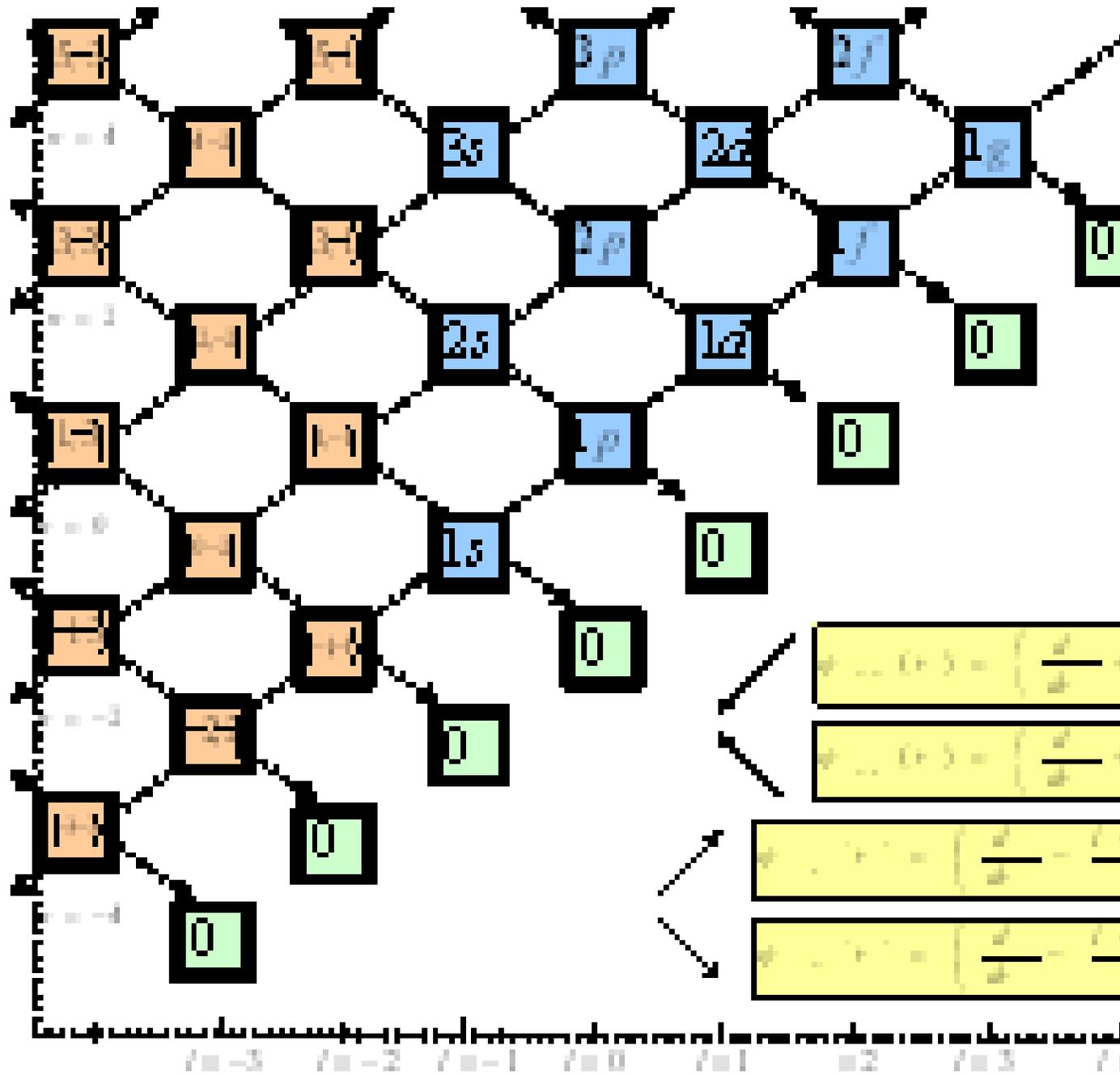


Fig.(6)

Finalmente superponiendo las graficas obtenidas por los cuatro operadores escalera, es decir, las eigenfunciones representadas en las Figs.(5) y (6), se observa que los huecos en las Figs.(5) y (6) se rellenan, esto se observa claramente en la Fig.(7).

OSCILADOR ARMÓNICO 3-D

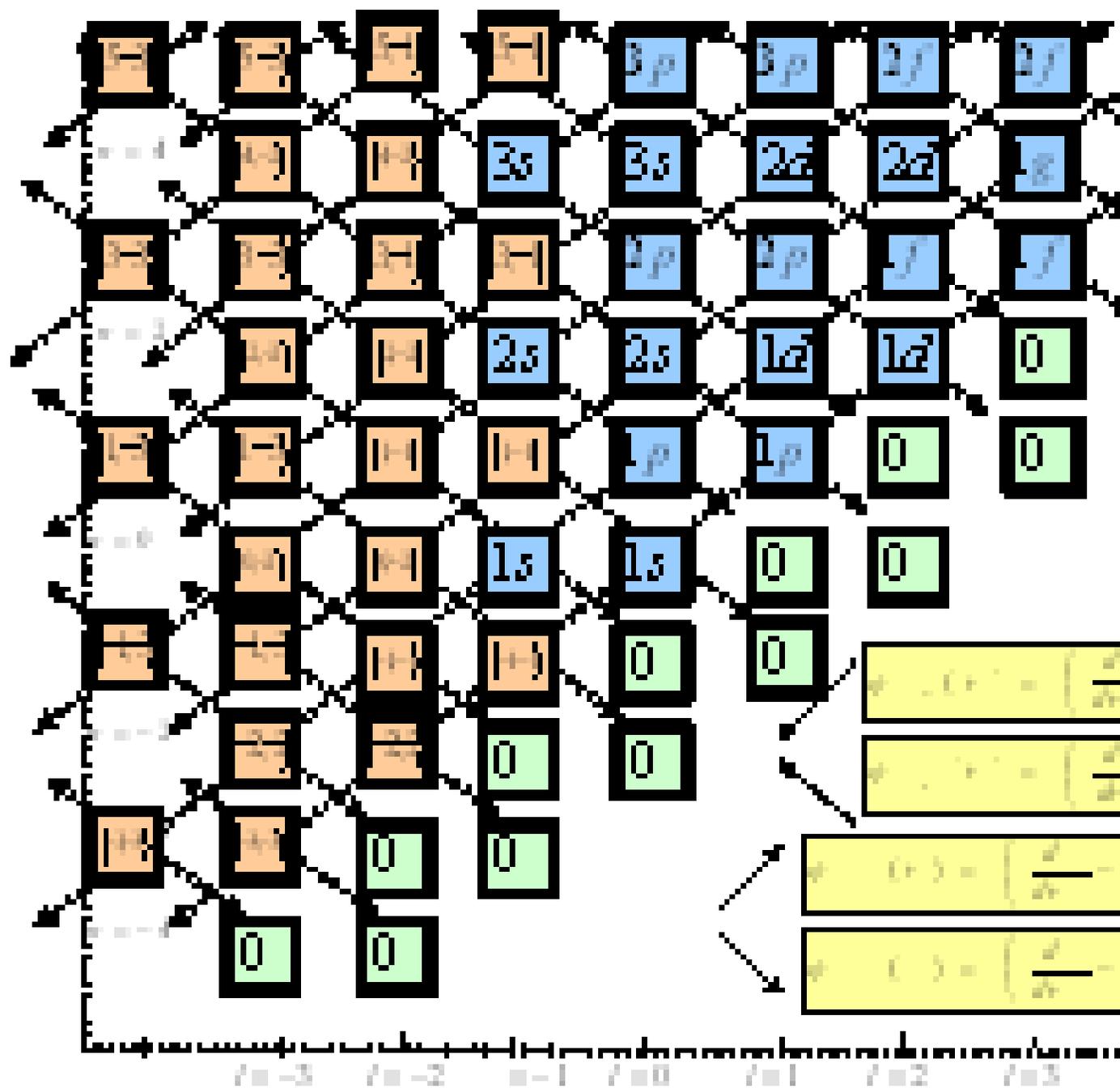


Fig.(7)

Chapter 15

Referencias

- [1] P A M Dirac *The Principles of Quantum Mechanics*, 2nd edn, Oxford: Clarendon 1935
- [2] E Schrödinger Proc. Roy. Irish Acad. A 46 (1940) 183
- [3] L Infeld, E Hull, Rev Mod Phys **23**, 21 (1951) 21-68
- [4] E Witten, Nucl. Phys. B 188 (1981) 513
- [5] A A Andrianov, M V Ioffe and V Spiridonov, Phys. Lett. 174A (1993) 273
- [6] G Darboux, Compt. Rend. Acad. Sc. (Paris) 94, 1456 (1882)
- [7] A A Andrianov, N V Borisov and M V Ioffe Theor. Math. Phys. 61 (1984) 1078-88
- [8] B Mielnik J. Math. Phys. **25**, No.12 (1984) 3387-89
- [9] P Roy et. al. Z. Phys. C (1986) 31: 111
- [10] F Cooper et. al. Phys. Rep. **251** (1995) 267-385
- [11] M A Jafarizadeh et. al. Ann.Phys.(N Y) **262** (1998) 260-76
- [12] J Morales et. al. Theor. Chem. Acc. (2000) 104-179
- [13] B Bagchi et. al. J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) L161-L167
- [14] J F Cariñena et. al. Int. J. Mod. Phys. A, Vol.13, No.28 (1998) 4913-4929
- [15] G B Arfken et. al. *Mathematical Methods for Physicists* Academic Press., Inc.1995
- [16] Cohen-Tannoudji C, et al. 1977 *Quantum Mechanics* (New York:Wiley)
- [17] G Junker *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics* Springer, 1996.
- [18] M A Reyes et. al. Rev. Mex. Fis. **49**, No. 4 (2003) 358-363
- [19] J Morales et. al. Theor Chem Acc (2003) 110 403-409
- [20] E T Whittaker et. al. *Modern Analysis* (Cambridge University Press, London,1946)

4th ed.

- [21] V Alan Kostelecky et al Phys. Rev. D 32, No.10 (1985) 2627-2633
- [22] R E Moss Am. J. Phys. **55**, No. 5, (1987) 397-401
- [23] N A Alves et. al. J. Phys. A: Math. Gen. **21** (1988) 3215-3225
- [24] R Bijker et.al *Latin-American School of Physics XXXV ELAF; Supersymmetries in Physics and its Applications* Mexico City, Mexico 19-30 July 2004
- [25] E Piña Rev. Mex. Fis. **41**, No. 6 (1995) 913-924
- [26] Ch. Jordan, *Calculus of Finite Differences*, Chelsea, New York (1965)
- [27] B K Bagchi et. al. *Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics* Chapman & Hall / CRC, 2001.