



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
UNIDAD ZACATENCO**

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN



**APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS Y
PARTÍCULAS A CORRIENTES LITORALES**

TESIS

**Que para obtener el grado de:
MAESTRO EN CIENCIAS EN HIDRÁULICA**

Presenta

Jorge Armando Laurel Castillo

Director interno

Dr. Sergio Cruz León

Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura Unidad Zacatenco

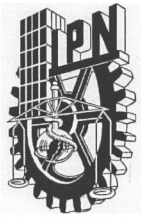
Director externo

Dr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra

Universidad Politécnica de Cataluña

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería

México, D.F., Mayo de 2008



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. Siendo las 18:00 horas del día 14 del mes de Marzo del 2008 Se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada Por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.A.- U.Z. Para examinar la tesis de grado titulada "APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS Y PARTÍCULAS A CORRIENTES LITORALES"

Presentada por el alumno:

LAUREL

CASTILLO

JORGE ARMANDO

Apellido paterno

materno

nombre(s)

Con registro:

B	0	4	1	3	7	1
---	---	---	---	---	---	---

Aspirante al grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN HIDRÁULICA.

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA
Director de Tesis Interno


DR. SÉRGIO CRUZ LEÓN

Director de Tesis Externo


DR. EUGENIO OÑATE IBÁÑEZ DE NAVARRA


DR. MIGUEL ÁNGEL VERGARA SÁNCHEZ

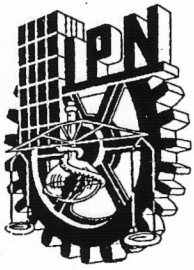

M. EN C. JAIMÉ ROBERTO RUIZ Y ZURVIA FLORES


DR. ESTEBAN FLORES MÉNDEZ

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO


DR. HÉCTOR AURELIANO SÁNCHEZ SÁNCHEZ.





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D.F., el día 7 del mes de Mayo del año 2008, el (la) que suscribe Jorge Armando Laurel Castillo alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Hidráulica con número de registro B041371, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería de Arquitectura U.Z., manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra y Dr. Sergio Cruz León y cede los derechos del trabajo intitulado “Aplicación del Método de Elementos Finitos y Partículas a Corrientes Litorales”, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o directorer del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección armando.laurel.c@gmail.com, onate@cimne.upc.es ó scruzl@ipn.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Jorge Armando Laurel Castillo

*A mis padres,
Pascual y Yolanda.*

Agradecimientos

Al **Instituto Politécnico Nacional**, *alma mater*.

A la **Coordinación de Vinculación del Instituto Politécnico Nacional** por la beca otorgada a través del programa de *Movilidad Académica Internacional*.

Al **Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)** por brindarme un espacio y las facilidades para realizar este trabajo.

Al **Dr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra**, director del CIMNE, por la dirección de esta tesis, su enseñanza y por todo el apoyo proporcionado durante el desarrollo de la misma.

Al **Dr. Sergio Cruz León**, por la dirección de esta tesis, su enseñanza y por todo el apoyo proporcionado durante el desarrollo de la misma.

Al **Dr. Miguel Ángel Vergara Sánchez**, por sus valiosas observaciones en este trabajo de tesis, y por todo el apoyo y conocimiento brindado desde siempre.

A los miembros de la comisión revisora: **M. en C. Jaime Roberto Ruiz y Zurvia Flores, Dr. Esteban Flores Méndez y Dr. Norberto Domínguez Ramírez**, por sus valiosas observaciones, comentarios y sugerencias a este trabajo de tesis.

A la **Dra. María del Rocío Soto Flores**, por todo su apoyo y orientación durante el periodo cubierto por la beca de Movilidad Académica Internacional.

A **Miguel Ángel Celigueta Jordana**, por todo su apoyo, por enseñarme a utilizar el software disponible y ayudarme a resolver problemas con el mismo, y por sus comentarios tan acertados a este trabajo de tesis.

A mis compañeros y amigos de la maestría en la ESIA: **Sandra, Carlos, Felipe, Susana, Abigail, Miguel**; y del CIMNE: **Josep Maria, Roberto, Tinne, Pavel, Kevin**; por generar un agradable ambiente de trabajo.

A todos aquellos que directa o indirectamente colaboraron con el desarrollo de este trabajo.

Resumen

En esta tesis se muestra la aplicación del Método de Elementos Finitos y Partículas (PFEM), para representar la hidrodinámica en la zona de rompientes. El PFEM es aplicado a la formulación lagrangiana de las ecuaciones Reynolds-Navier-Stokes (RANS) utilizando el modelo de turbulencia de Smagorinsky.

Las simulaciones numéricas en 2DV y 3D, incluyen la simulación de los diversos tipos de rompiente del oleaje, la propagación del oleaje desde aguas profundas hasta aguas poco profundas, generado con teorías lineal (Airy) y no lineal (Cnoidal) del oleaje. Las simulaciones también incluyen la reflexión del oleaje y se calculan los perfiles de velocidad de las corrientes de resaca.

Los resultados son comparados contra soluciones teóricas y mediciones experimentales, mostrando el gran potencial que tienen los métodos lagrangianos como herramienta para determinar la hidrodinámica costera, el transporte de sedimentos y la morfología costera a corto plazo. El PFEM puede extenderse a cualquier problema de interacción fluido-estructura.

Abstract

This thesis develop an application of the Particle Finite Element Method (PFEM) to the surf-zone hydrodynamics. This PFEM is applied to a lagrangian formulation of the Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) equations with the Smagorinski turbulence model as closure.

Numerical simulations are done in 2DV and 3D which include simulations of diverse types of breaking waves, wave propagation from deep water to shallow water, waves are generated with linear (Airy) and non linear (Cnoidal) wave theories. This simulations also include wave reflection and undertow profiles.

Numerical results are compared with theoretical solutions and experimental measurements, showing a great potential that lagrangian methods have as a tool to calculate coastal hydrodynamics, sediment transport and short-term coastal morphology. This type of PFEM can be extended to any problem of fluid-structure interaction.

Glosario de términos

Batimetría	Relacionada a la medición de las profundidades en el mar y el océano.
Costa	Área de la plataforma continental en la que los procesos morfodinámicos vienen determinados por la dinámica marina.
Corriente	Desplazamiento de una masa de agua, determinada por dos características: dirección y velocidad.
Litoral	Área marina donde el sedimento se mueve activamente por causa del oleaje.
Malla	Red de nodos conectados de manera predefinida
Partícula de Fluido	Volumen de fluido más grande que el de una molécula, pero lo suficientemente pequeño para actuar como un punto que sigue con exactitud el movimiento del fluido.
Playa	Acumulación de sedimento no consolidado que se sitúa entre el alcance máximo del oleaje en pleamar y la profundidad en la que los sedimentos dejan de moverse a causa del oleaje.
Turbulencia	Estado del flujo de un fluido, en el cual las velocidades instantáneas presentan irregularidades y fluctuaciones aparentemente azarosas.

Nomenclatura

Letras latinas

- C_s constante de Smagorinsky
- d_c distancia entre los centros de las esferas c_1 y c_2 [m]
- E energía del oleaje
- f_b fricción del fondo
- f_s fricción debida a la línea de costa
- F_i $i=1,2,3$ suma de fuerzas con respecto a los ejes x_1, x_2, x_3 [N]
- g_i $i=1,2,3$ aceleración la de gravedad en las direcciones x_1, x_2, x_3 [m/s^2]
- h profundidad o tirante de agua [m]
- h_m distancia media entre las partículas o nodos [m]
- H altura de ola [m]
- l número de nodo
- L longitud de ola [m]
- L_0 longitud de ola en aguas profundas [m]
- I_r número de Irribarren
- M masa de un cuerpo [kg]
- N_i función de forma del nodo i
- n número de nodos del elemento
- p presión [N/m^2]
- P cantidad de movimiento [kg m/s]
- q número de elemento
- r_m promedio del los radios de las esferas r_1 y r_2
- R_{ij} tensor de esfuerzo radial
- s_i valor del área (longitud en 2D) de la cara de una celda de Voronoi para el nodo i
- S_{ij} tensor de velocidades de deformación [1/s]
- T periodo del oleaje [s]

T_p intervalo de tiempo en el que se toma el promedio de una cantidad [s]

u_i $i=1,2,3$ es la velocidad instantánea en los ejes x_1, x_2, x_3 [m/s]

\bar{u}_i $i=1,2,3$ velocidad media en los ejes x_1, x_2, x_3 [m/s]

u_i' $i=1,2,3$ fluctuación de la velocidad en los ejes x_1, x_2, x_3 [m/s]

u_i^* predicción de la velocidad en un paso intermedio de tiempo [m/s]

V volumen del fluido [m^3]

x_i $i=1,2,3$ los ejes coordenados x_1, x_2, x_3

Letras griegas

α factor que multiplica a los radios de las esferas de voronoi

β ángulo que forma la playa con la horizontal

δ un parámetro que define la proximidad

δS disipación del esfuerzo radial

Δt es un incremento de tiempo ó $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ [s]

γ parámetro que toma valor de cero o uno, definiendo un paso fraccionado de primer o segundo orden respectivamente

η elevación de la superficie libre del agua [m]

$\langle \eta \rangle$ ascenso y descenso del nivel medio del mar [m]

μ viscosidad dinámica del fluido [Pa s]

ν viscosidad cinemática del fluido (m^2/s)

ν_T viscosidad turbulenta [m^2/s]

θ ángulo que forma el frente de ola con el eje principal de propagación

ρ densidad del fluido [kg/m^3]

τ_{ij} tensor de esfuerzos cortantes [N/m^2]

$\langle \tau_b \rangle_i$ esfuerzo cortante en el fondo [N/m^2]

Siglas y acrónimos

CIMNE	Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
CIMEC	Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería
COMET	<i>Cooperative Program for Operational Metereology, Education and Training</i>
PETSC	<i>Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation</i>

INDICE

Dedicatoria	i
Agradecimientos	ii
Resumen	iii
Abstract	iv
Glosario	v
Nomenclatura	vi
Índice	ix
Lista de figuras	xi
Lista de tablas	xiv
Introducción	xv
Justificación	xvii
Objetivos	xviii

Capítulo 1. Hidrodinámica Costera

1.1 Introducción	2
1.2 Ecuaciones generales de flujo	3
1.1.1 Ecuación de conservación de masa	4
1.1.2 Ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento	6
1.1.3 Modelación de la turbulencia. Ecuaciones promediadas de Reynolds-Navier-Stokes (RANS)	8
1.3 Rompimiento de las olas en aguas poco profundas	11
1.4 Corrientes litorales	14
1.4.1 Corrientes a lo largo de la línea de costa	16
1.4.2 Corrientes de retorno (rip currents)	18
1.4.3 Corrientes de resaca (undertow)	21
1.4.4 Modelación numérica	23

Capítulo 2. El método de elementos finitos por partículas (PFEM)

2.1 Introducción	31
2.2 Teselación Delaunay Extendida (EDT)	31
2.3 Método Alpha-shape	37
2.4 El método de elementos finitos libre de malla (MFEM)	38
2.5 El método de elementos finitos por partículas (PFEM) para la solución de las RANS y la interacción fluido estructura	42
2.5.1 Estabilización de la condición de incompresibilidad. Método del Cálculo Finito (FIC).	54

Capítulo 3. Pruebas y resultados

3.1 Introducción	60
------------------	----

3.2 Propagación de oleaje sobre canales de fondo plano	60
3.2.1 Reflexión en estructuras verticales	63
3.3 Rompiente del oleaje	65
3.4 Corrientes litorales	77
Capítulo 4. Conclusiones y recomendaciones	
4.1 Conclusiones	98
4.2 Recomendaciones	100
4.3 Futuras líneas de investigación	100
REFERENCIAS	101

Lista de figuras

Capítulo 1	página.
Figura 1.1 Definición esquemática de la zona cercana a la costa	2
Figura 1.2 Representación gráfica de los métodos euleriano(volumen de control) y lagrangiano(volumen material)	4
Figura 1.3 Tipos de perfiles de rompientes	13
Figura 1.4 Sistemas de corrientes litorales	15
Figura 1.5 Perfil teórico de la corriente a lo largo de la costa	17
Figura 1.6 Zonas de alto y bajo descenso	19
Figura 1.7 Corriente de retorno en una barra litoral	19
Figura 1.8 Corriente de retorno en zona con pendiente suave	20
Figura 1.9 Perfil teórico de la corriente de resaca	22
Figura 1.10 Zona erosionada durante los temporales de los meses de diciembre del 2006 y enero 2007 en las Playa Bogatell en Barcelona, España.	23
Capítulo 2	
Figura 2.1 Diagrama de Voronoi, circunferencias vacías y triangulación delaunay para una nube de nodos en 2D	32
Figura 2.2 Posibilidades de discretización al interior de una circunferencia cuyo centro equidista a cuatro nodos	32
Figura 2.3 Inserción de once puntos a una teselación inicial mediante el algoritmo de Bowyer-Watson	34
Figura 2.4 Formación de slivers por la partición Delaunay, , a la izquierda todos los tetraedros posibles, y a la derecha los slivers aislados	36
Figura 2.5 Formación de un poliedro esférico y asignación de la esfera media	36
Figura 2.6 Formación de un poliedro esférico y eliminación de slivers	36
Figura 2.7 Posibles fronteras en una nube de puntos	38
Figura 2.8 Elementos tipo para diferentes poliedros esféricos	39
Figura 2.9 Representación gráfica de los parámetros de la función de forma	40
Figura 2.10 Continuidad C_0 de la función de forma en 2D	48

2.11 Batidor plano para la generación de oleaje	49
---	----

Capítulo 3

Figura 3.1 Geometría de canal para propagación en aguas profundas	60
Figura 3.2 Propagación de oleaje en aguas profundas	62
Figura 3.3 Distribución vertical de la velocidad horizontal u_1	63
Figura 3.4 Geometría utilizada para el análisis de reflexión total	64
Figura 3.5 Reflexión del oleaje en estructuras de paramento vertical	64
Figura 3.6 Canal de oleaje con pendiente de playa igual a 0.25	66
Figura 3.7 Rompiente tipo zambullida $Ir = 1.25$	67
Figura 3.8 Rompiente tipo frontal $Ir = 1.94$	68
Figura 3.9 Canal de oleaje con pendiente de playa igual a 0.125	69
Figura 3.10 Rompiente tipo deslizante $Ir = 0.41$	70
Figura 3.11 Geometría del canal utilizado por Ting y Kirby (1994), (1995), (1996)	71
Figura 3.12 Distribución de nodos que representan los experimentos de Ting y Kirby (1994), (1995), (1996)	71
Figura 3.13 Posición del batidor plano para la generación de oleaje con las siguientes características $H = 0.128$ m, $T = 5.0$ s, $d = 0.4$ m mediante teoría Cnoidal	72
Figura 3.14 Posición del batidor plano para la generación de oleaje con las siguientes características $H = 0.125$ m, $T = 2.0$ s, $d = 0.4$ m mediante teoría Cnoidal	72
Figura 3.15 Rompiente tipo zambullida obtenida experimentalmente [Ting y Kirby (1994); Ting y Kirby (1995)]	73
Figura 3.16 Rompiente tipo zambullida obtenida mediante el PFEM	74
Figura 3.17 Rompiente tipo deslizante obtenida experimentalmente [Ting y Kirby (1994); Ting y Kirby (1995)]	75
Figura 3.18 Rompiente tipo zambullida obtenida mediante el PFEM	76
Figura 3.19 Variación espacial y temporal de la velocidad horizontal u_1 y de la superficie libre, y ubicación de las zonas de control; condiciones de oleaje de la figura 3.13	78

	página.
Figura 3.20 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = -1.5$ (figura 3.19)	79
Figura 3.21 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 7.795$ (figura 3.19)	79
Figura 3.22 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 8.345$ (figura 3.19)	80
Figura 3.23 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 8.795$ (figura 3.19)	80
Figura 3.24 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 9.295$ (figura 3.19)	80
Figura 3.25 Comparación de corrientes de resaca (undertow) medidas y calculadas; las condiciones de oleaje se muestran figura 3.13; la posición de las secciones de control se puede observar en la figura 3.19; rompiente tipo zambullida.	81
Figura 3.26 Variación espacial y temporal de la velocidad horizontal u_1 y de la superficie libre, y ubicación de las zonas de control; condiciones de oleaje de la figura 3.14	83
Figura 3.27 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = -1.5$ (figura 3.26)	84
Figura 3.28 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 6.665$ (figura 3.26)	84
Figura 3.29 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 7.275$ (figura 3.26)	84
Figura 3.30 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 7.885$ (figura 3.26)	85
Figura 3.31 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 8.495$ (figura 3.26)	85
Figura 3.32 Comparación de corrientes de resaca (undertow) medidas y calculadas; las condiciones de oleaje se muestran figura 3.14; la posición de las secciones de control se puede observar en la figura 3.26; rompiente tipo deslizante.	86
Figura 3.33 Dimensiones del tanque de oleaje utilizado para la simulación de corrientes bajo rompiente frontal, condiciones de oleaje de la figura 3.13.	88

	página.
Figura 3.34 Vista en perspectiva del canal de oleaje y la distribución de los nodos de cálculo, utilizados para la simulación en 3d de corrientes bajo rompiente frontal.	89
Figura 3.35 Variación espacial y temporal de la superficie y libre del agua y de la componente x de la velocidad u_1 bajo rompiente de tipo frontal.	90
Figura 3.36 Variación espacial y temporal de la superficie y libre del agua y de la componente x de la velocidad u_1 bajo rompiente de tipo frontal en los planos $z = 1.0$, $z = 2.5$ y $z = 4.0$	91
Figura 3.37 Dimensiones del tanque de oleaje utilizado para la simulación de corrientes bajo rompiente oscilante, condiciones de oleaje de la figura 3.12.	93
Figura 3.38 Vista en perspectiva del canal de oleaje y la distribución de los nodos de cálculo, utilizados para la simulación en 3d de corrientes bajo rompiente oscilante.	94
Figura 3.39 Variación espacial y temporal de la superficie y libre del agua y de la componente x de la velocidad u_1 bajo rompiente de tipo oscilante.	95
Figura 3.40 Variación espacial y temporal de la superficie y libre del agua y de la componente x de la velocidad u_1 bajo rompiente de tipo oscilante en los planos $z = 0.75$, $z = 2.25$ y $z = 3.75$	96

Listas de tablas

Capítulo 1	página.
Tabla 1.1 Tipo de rompiente en función de I_r	14

Introducción

El conocimiento detallado de las corrientes litorales es de gran importancia en el campo de la ingeniería marítima, ya que éstas son las que transportan el sedimento en la costa impactando directamente en la morfología de las mismas; la evaluación de la erosión, el transporte y la sedimentación sirve para determinar la vida útil de todas las obras de protección realizadas en la costa (e.g. espigón), así como para determinar si dicha obra puede beneficiar o perjudicar a una zona determinada. Las corrientes litorales también pueden transportar y mezclar nutrientes y contaminantes, y en algunas ocasiones son peligrosas para los bañistas, ya que los transportan hacia mar adentro. Para ubicar adecuadamente una estructura protección/estabilización de playas, determinar la posición y profundidad de una tubería que descarga agua con alta concentración de salinidad o temperatura, e incluso para determinar zonas de seguridad donde los bañistas puedan nadar, es necesario contar con una buena aproximación de la hidrodinámica costera y lo ideal es que ésta sea tridimensional. La zona de la costa que presenta la hidrodinámica más activa es la zona de rompientes, y ésta hidrodinámica además de conocerla mediante mediciones in situ, es posible reproducirla mediante simulaciones experimentales y numéricas.

Las simulaciones físicas y numéricas han sido una herramienta muy útil no sólo para pronosticar la hidrodinámica y el transporte de sedimentos o contaminantes bajo un escenario de proyecto, sino también como herramienta de diagnóstico que permite determinar las posibles causas que originaron el escenario de estudio. Primeramente, las simulaciones experimentales fueron preferidas a las numéricas, por la reducida capacidad de los equipos de cómputo, y por la necesidad de realizar muchas simplificaciones a las ecuaciones a resolver. Ahora, gracias a los avances tanto en la tecnología de la computación como en el desarrollo de los métodos numéricos, la simulación numérica ha ganado preferencia y se ha convertido en una herramienta indispensable para el diseño de las obras civiles

que se realizan en la costa, así como también para conocer el comportamiento hidrodinámico y morfodinámico en alguna zona de interés.

La zona de la costa con mayor dificultad de reproducir numéricamente su hidrodinámica es la zona de rompientes, y eso es de mucha importancia, ya que es la zona más activa en el transporte de sedimentos. Hasta estos días para fines de proyecto, es común representar la hidrodinámica costera mediante simulaciones bidimensionales y unidimensionales, y el efecto de la rompiente del oleaje se considera mediante ecuaciones que involucran coeficientes; sin embargo, por esas simplificaciones no es posible reproducir correctamente la distribución vertical de las velocidades, por lo que cada día se siguen desarrollando técnicas numéricas adecuadas para lograr una mejor representación. Reproducir numéricamente la hidrodinámica en la zona de rompientes no es una tarea fácil, ya que la superficie libre del agua se convierte en una frontera móvil, y si se decide simular el problema mediante un método tradicional o euleriano, aparece una ecuación adicional por resolver que en la mayoría de las veces conducirá a una representación ineficiente del fenómeno de la rompiente y sus efectos. Como alternativa a los métodos eulerianos existen los métodos lagrangianos, en los cuales la posición de la superficie libre del agua se obtiene por la naturaleza de la solución, por lo que no es necesario resolver una ecuación adicional, además de que es posible representar de una mejor manera las fuerzas de inercia; a este tipo de métodos se les denomina *métodos de partículas*.

En este trabajo se propone la aplicación de un método numérico reciente denominado *Método de elementos finitos y partículas* (PFEM), que se desarrolla en el CIMNE en colaboración con el CIMEC, para el análisis de la hidrodinámica costera. Para ello la tesis está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se explican las ecuaciones de conservación de masa, conservación de cantidad de movimiento, y se abordan dos modelos de

turbulencia comúnmente utilizados para la simulación de la hidrodinámica costera. También se describen las corrientes litorales y se mencionan algunas de sus características.

En el capítulo 2 se explica el Método de Elementos Finitos y Partículas (PFEM) y su implementación para resolver las ecuaciones de conservación de masa y conservación de cantidad de movimiento, así como también el planteamiento de la solución de la interacción fluido-estructura. También se abordan algunas ideas de los siguientes métodos: Teselación Delaunay Extendida (EDT), Método Alpha Shape, Método de Elementos Finitos Libre de Malla (MFEM) y Método del Cálculo Finito (FIC).

En el capítulo 3 se muestran algunas simulaciones numéricas de fenómenos tales como propagación de oleaje en aguas profundas, reflexión de oleaje en estructuras verticales, y los tipos de rompiente del oleaje y corrientes de resaca bajo diferentes condiciones de oleaje. Los resultados numéricos se comparan con soluciones teóricas y resultados experimentales. En todos los experimentos se consideró que los frentes de las olas son paralelos a la línea de costa.

En el capítulo 4 y último, se dan las conclusiones y recomendaciones, mencionando finalmente algunas líneas futuras de investigación.

Justificación

En la ingeniería marítima, siempre se siguen buscando mejores técnicas para representar los fenómenos físicos y su interacción con las obras de infraestructura ubicadas tanto en la costa como en mar adentro, y los efectos de esos fenómenos sobre alguna zona de la costa, pudiendo esa zona abarcar diferentes playas de algún destino turístico importante.

Cancún y Barcelona son dos destinos turísticos importantes en México y España respectivamente; el primero ha perdido gran parte de la fina y blanca arena de sus playas a causa de las corrientes inducidas por el oleaje huracanado, mientras que en el segundo cada invierno las playas pierden gran parte de la arena de sus playas, por lo que siempre es necesario aumentar el ancho de la playa mediante grandes cantidades de arena. Para pronosticar el comportamiento morfodinámico de playas ante diferentes condiciones de oleaje y en su caso estabilizarlas para reducir los altos costos en el relleno de las mismas, es necesario conocer la distribución vertical de la velocidad en las corrientes inducidas por el oleaje y su rompiente. Tradicionalmente, la hidrodinámica costera se ha caracterizado numéricamente como un campo estacionario de corrientes promediados en un periodo de oleaje, y la influencia de la rompiente es representada a través de coeficientes de disipación; sin embargo, considerar un campo estacionario en la zona de rompientes no es del todo correcto.

La simulación numérica de la hidrodinámica costera mediante métodos de partículas es una buena alternativa para obtener mejores aproximaciones, ya que este tipo de métodos lagrangianos pueden representar la rompiente del oleaje de una mejor manera que los métodos eulerianos. Además se ha demostrado que estos métodos son ideales para resolver problemas de interacción de fluido estructura [Oñate *et al* (2004); Idelsohn *et al* (2003b); Celigueta *et al* 2007], abriendo la posibilidad de simular no solo la morfodinámica de las playas y los efectos de la presencia de estructuras, sino también la estabilidad de las mismas.

Objetivos

El objetivo general de este trabajo es reproducir numéricamente la hidrodinámica costera mediante el PFEM, y verificar su capacidad de representar

adecuadamente el fenómeno de rompiente y sus efectos en la distribución vertical de las velocidades. Para ello se plantearon los siguientes objetivos particulares:

- Generar oleaje regular lineal y no lineal con diferentes alturas y periodos.
- Propagar oleaje en un fondo plano en aguas profundas.
- Generación de olas estacionarias por reflexión en estructuras verticales.
- Reproducir diferentes tipos de rompientes.
- Reproducir los perfiles de velocidad en la vertical de las corrientes de resaca.

CAPÍTULO 1

HIDRODINÁMICA COSTERA

1.1 Introducción

Cuando el oleaje abandona la zona de generación, presenta una disminución en su altura debido a la dispersión de su energía. Una vez abandonada dicha zona, antes de llegar a la costa, el oleaje puede sufrir una primera deformación en aguas profundas debido a la presencia de islas o cabos (*difracción*). Posteriormente, conforme va disminuyendo la profundidad y al alcanzar ésta un valor menor a la mitad de la longitud de la ola, denominada también región de aguas intermedias, el oleaje sufre cambios en su dirección, longitud y altura que variarán de acuerdo a la configuración batimétrica (*refracción*). Al entrar a la zona de aguas poco profundas, la propagación del oleaje sufre cambios por refracción, reflexión y difracción por la presencia de estructuras o montículos. Cuando entra en una zona con profundidad un poco mayor a la altura de ola, se genera una inestabilidad que provoca que las olas rompan [Vergara (2003)].

La zona cercana a la costa

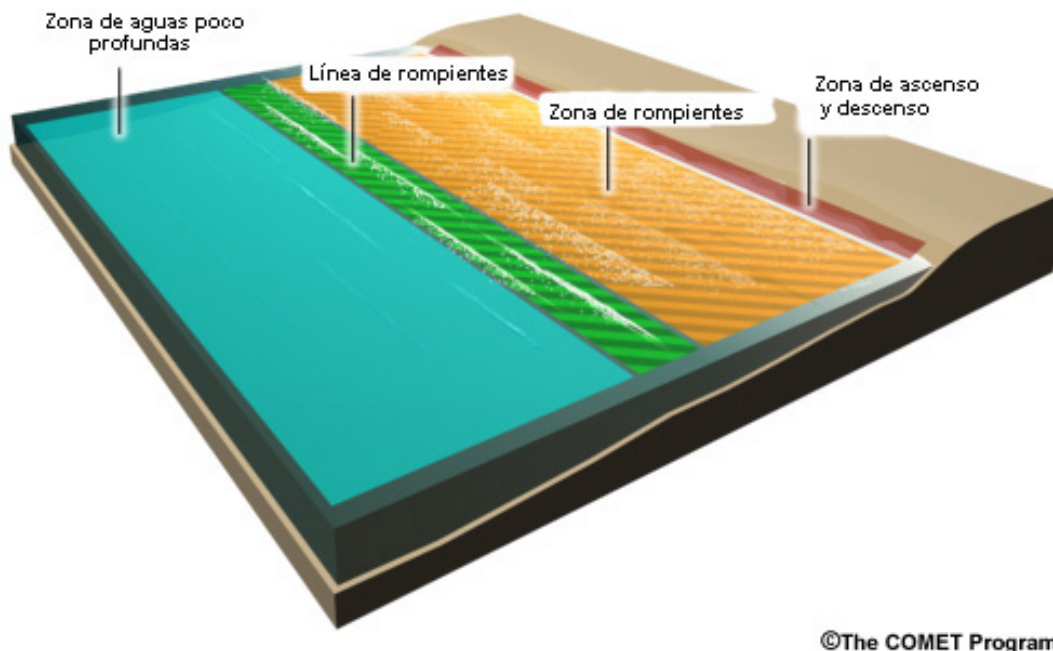


Figura 1.1 Definición esquemática de la zona cercana a la costa modificada de The COMET Program (2004)

La zona donde se tengan olas rompiendo se le denomina *zona de rompientes* (*surf-zone*). La variación del nivel medio del mar debido a las mareas, así como también la variación temporal de las características del oleaje, hacen que las dimensiones de la *zona de rompientes* cambie con el tiempo. Para fines de análisis de la hidrodinámica costera se acepta la definición de *zona cercana a la costa* (*nearshore*), que se define como la zona que es afectada directa o indirectamente por la rompiente del oleaje (figura 1.1), dentro de la misma existe una última zona denominada *zona de acenso y descenso* (*swash*) [Dally (2005)].

Fuera de la *zona de cercana a la costa* las ecuaciones de las teorías de oleaje pueden caracterizar la hidrodinámica con buena aproximación, pero en la *zona cercana a la costa* dichas ecuaciones dejan de ser válidas. Para caracterizar la hidrodinámica en dicha zona, se hace uso de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de conservación de masa, que son las ecuaciones generales que caracterizan los flujos a superficie libre [Battjes (1988)].

1.2 Ecuaciones generales de flujo

Existen dos caminos para observar el flujo de un fluido, el primero siguiendo un conjunto de partículas de fluido que se mueve por el flujo, denominado método lagrangiano, y el segundo determinando la velocidad del flujo desde una posición fija, denominado método euleriano (figura 1.2).

En este trabajo, se describen las ecuaciones de conservación de masa y de conservación de cantidad de movimiento en su forma lagrangiana, y una forma de resolverlas es mediante el *Método de Elementos Finitos por Partículas* (PFEM), mismo que se explicará en el capítulo siguiente.

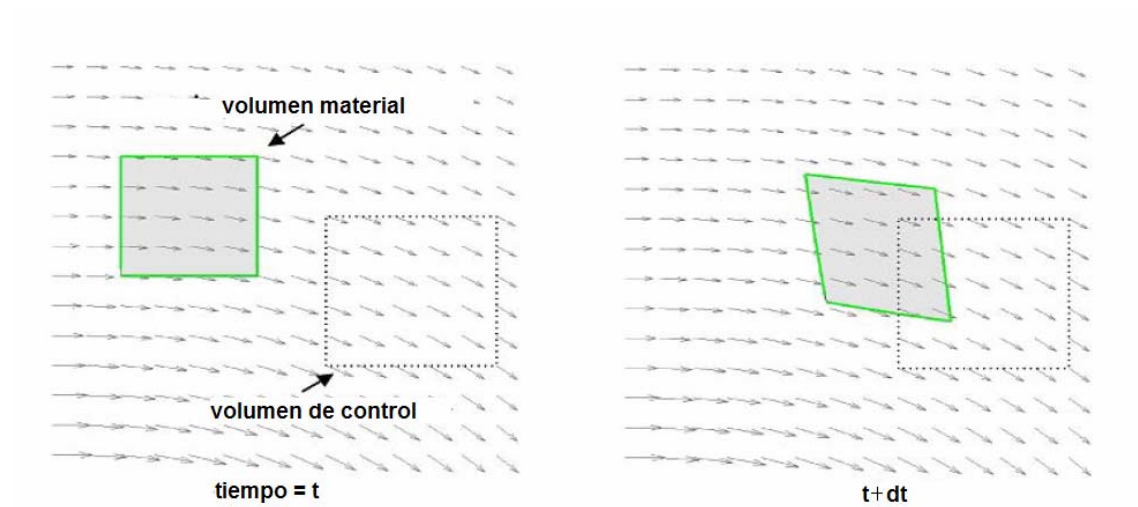


Figura 1.2 Representación gráfica de los métodos euleriano(volumen de control) y lagrangiano(volumen material) [Price (2006)]

1.1.1 Ecuación de conservación de masa

Considerando un volumen formado por un conjunto de partículas de fluido en movimiento con masa M dada por [Price (2006)]:

$$M = \iiint_{\text{material}} \rho dV \quad (1.1)$$

donde

ρ es la densidad del fluido [kg/m^3]

V es el volumen del fluido [m^3]

de acuerdo con la ley de la conservación de la masa, si no existe una variación en el número de partículas, es decir un incremento o disminución en el número de partículas del fluido o pérdida de las mismas en el volumen considerado después

de un tiempo t , la cantidad de masa permanece constante, y puede representarse como:

$$\frac{DM}{Dt} = 0 \quad (1.2)$$

misma que es válida para cualquier condición de flujo. Esta ecuación es muy clara conceptualmente, pero difícil de aplicar para predecir la densidad o la masa mediante cualquier método numérico tradicional. Utilizando el Teorema de Transporte de Reynolds, las ecuaciones 1.1 y 1.2 pueden escribirse de la siguiente manera [Price (2006)]:

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_{material} \rho dV = \iiint_{espacial} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dV = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.4)$$

donde

$u_i \quad i=1,2,3$ es la velocidad en los ejes x_1, x_2, x_3 [m/s]

$x_i \quad i=1,2,3$ los ejes x_1, x_2, x_3

La ecuación 1.4 es conocida como la ecuación de conservación de masa o ecuación de continuidad. De acuerdo con la ecuación, si $\frac{D\rho}{Dt} > 0$ en un punto del espacio, en consecuencia $\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} < 0$, y por lo tanto puede interpretarse como un aumento del volumen para la misma masa de fluido y una disminución en su densidad.

1.1.2 Ecuación de conservación la cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento del volumen de fluido representado por la ecuación 1.1, puede escribirse como:

$$P = \iiint_{material} \rho u_i dV \quad (1.5)$$

donde

P es la cantidad de movimiento [kg m/s]

$u_i \quad i=1,2,3$ las componentes de la velocidad con respecto a x_1, x_2, x_3 [m/s]

De acuerdo con la segunda ley de Newton, el cambio de la cantidad de movimiento del volumen del fluido es igual a la suma de fuerzas que actúan sobre él, esto se puede expresar como:

$$\frac{DP}{Dt} = \iiint_{material} F_i dV \quad (1.6)$$

$F_i \quad i=1,2,3$ es la suma de fuerzas con respecto a los ejes x_1, x_2, x_3 [N]

Aplicando el teorema del transporte de Reynolds al término del lado derecho de la ecuación 1.6, se obtiene:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{material} \rho u_i dV = \iiint_{espacial} \rho \frac{Du_i}{Dt} dV \quad (1.7)$$

El cambio en la cantidad de movimiento N del volumen del fluido depende del cambio de velocidad. La ecuación anterior se puede escribir como:

$$\iiint_{\text{espacial}} \rho \frac{Du_i}{Dt} dV = \iiint_{\text{espacial}} F_i dV \quad (1.8)$$

Sumando las fuerzas de presión, las fuerzas viscosas y las fuerzas gravitacionales en el volumen del fluido, y considerando que el fluido es newtoniano, se tiene como resultado las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales se escriben como:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \rho g_i \quad (1.9)$$

donde

μ es la viscosidad dinámica del fluido [Pa s]

g_i $i=1,2,3$ es la fuerza de gravedad en las direcciones x_1, x_2, x_3 [m/s²]

p es la presión [N/m²]

Las ecuaciones 1.4 y 1.9, son las ecuaciones base para resolver cualquier problema de flujo de fluidos. Si la ecuación 1.9 se divide entre la densidad, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + g_i \quad (1.10)$$

donde

ν es la viscosidad cinemática del fluido (m^2/s)

1.1.3 Modelación de la turbulencia. Ecuaciones promediadas de Reynolds-Navier-Stokes (RANS)

En la CFD, una forma estándar de representar la turbulencia es decomponiendo la velocidad instantánea en una media más una fluctuación, y esto se representa como:

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad (1.11)$$

donde

u_i es la velocidad instantánea

\bar{u}_i es la velocidad media

u_i' es una fluctuación de la velocidad

donde la velocidad promedio puede definirse como:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{T_p} \int_{t-T_p/2}^{t+T_p/2} u_i dt \quad (1.12)$$

donde

T_p es el intervalo de tiempo en el que se toma el promedio [s]

Sustituyendo la ecuación 1.11 en las ecuaciones 1.4 y 1.10, se obtienen las ecuaciones promediadas de Reynolds-Navier-Stokes y se expresan como:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} \quad (1.14)$$

El término $\bar{u}_i \bar{u}_j$ de la ecuación 1.14, multiplicado por la densidad ó $\rho \bar{u}_i \bar{u}_j$, es conocido como el tensor de esfuerzos de Reynolds. Este término introduce nuevas variables en las ecuaciones 1.13 y 1.14, por lo que debe completarse el sistema de ecuaciones mediante algún modelo de cerradura. Para completarse el sistema se utiliza la hipótesis de Boussinesq, en donde se introduce el concepto de viscosidad turbulenta (*eddy viscosity*), en donde los esfuerzos de Reynolds se calculan mediante la siguiente ecuación:

$$\bar{u}_i \bar{u}_j = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.15)$$

donde

ν_T es el coeficiente de viscosidad turbulenta [m²/s]

Sustituyendo la ecuación 1.15 en la ecuación 1.14, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_T) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + g_i \quad (1.16)$$

Existen muchas formas de determinar el valor de la viscosidad turbulenta, y las referencias para profundizar en este tema pueden encontrarse en Sánchez y Lemos (1990) y en Abbott y Basco (1989). Para la simulación de la hidrodinámica costera el modelo más utilizado es el modelo $\kappa - \varepsilon$ [Lin y Liu(1998); Zhao *et al* (2004); Sánchez y Lemos (1990); Hass y Svendsen (2000); Walstra *et al* (2000); Shi *et al* (2007)] y en la simulación mediante métodos de partículas se ha utilizado el modelo de Smagorinsky(1963) [Shao y Gotoh (2005); Dalrymple y Rogers(2006)].

En el método $\kappa - \varepsilon$ la viscosidad turbulenta viene dada por la siguiente ecuación [Abbott y Basco (1989)]:

$$v_T = C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \quad (1.17)$$

donde

κ es la energía cinética de la turbulencia

ε es la disipación de la energía cinética

C_μ es una constante

Los valores de κ y ε se determinan mediante las siguientes ecuaciones de transporte:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_T}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right) + v_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\kappa} v_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{\kappa} \quad (1.19)$$

Las constantes de las ecuaciones 1.17, 1.18 y 1.19 toman el siguiente valor [Abbott y Basco (1989)]:

$$C_{\mu} = 0.09$$

$$C_{1\varepsilon} = 1.44$$

$$C_{2\varepsilon} = 1.92$$

$$\sigma_{\kappa} = 1.00$$

$$\sigma_{\kappa} = 1.30$$

En el modelo de Smagorinsky la viscosidad turbulenta se determina mediante la siguiente ecuación [Abbott y Basco (1989)]:

$$\nu_T = (C_s h)^2 \Omega \quad (1.20)$$

donde

C_s es la constante de Smagorinsky igual a 0.12 [Dalrymple y Rogers(2006)]

h es la distancia media entre las partículas [m]

$$\Omega = (S_{ij} \cdot S_{ij})^{1/2}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.21)$$

S_{ij} es el tensor de velocidades de deformación

1.3 Rompimiento de las olas en aguas poco profundas

La rompiente es el límite de las transformaciones que sufren las olas al aproximarse a la costa. Esta transformación irreversible, puede considerarse como una transformación total virtual del movimiento organizado de las olas generadas por viento, en fenómenos de diferentes tipos y de diferentes escalas como son el

oleaje de baja frecuencia y corrientes medias. Éstas últimas se conocen con el nombre de corrientes litorales [Battjes (1988)].

Cuando las olas rompen se genera una fuerte turbulencia y se forman estructuras vorticosas, luego una parte de su energía es disipada y otra transforma como cantidad de movimiento, siendo éste factor muy importante en las corrientes litorales.

La rompiente del oleaje ha sido descrita en términos de propiedades generales relativamente simples de evaluar [GIOC (2000); Vergara (2003)]. Estas propiedades son usualmente promediadas en el tiempo, y están relacionadas con las características del oleaje, las escalas del flujo, la incidencia del oleaje y la pendiente del fondo. Con estas propiedades puede determinarse, por ejemplo, una profundidad de inicio de rompiente o puede predecirse el tipo de rompiente que va a presentarse para un oleaje determinado; información detallada puede encontrarse en Peregrine (1983), Battjes (1988), Sánchez y Lemos (1990), Vergara(2003) y Vergara(2006).

Galvin [Peregrine (1983)] fue el primero en proponer tipos de rompiente con base en las características de su movimiento, los cuales son zambullida (plunging), deslizante (spilling), frontal (collapsing) y oscilación (surging) (figura 1.3). En la rompiente de zambullida la cresta se convierte en un rollo y posteriormente impacta contra el valle de la ola originando un salpicón; este tipo de rompiente se presenta comúnmente en playas con pendiente alta. La rompiente por deslizamiento presenta un aparente de arrastre de espuma en la cresta, de ahí el nombre de “descrestamiento”. Este tipo de rompiente ocurre en playas con pendiente reducida. El tipo de rompiente frontal ocurre en playas de alta pendiente y alta reflexión, y su forma tiende a parecerse a la de zambullida pero no alcanza a formar el rollo. En la rompiente de oscilación el frente de la onda y la cresta permanecen relativamente lisos mostrando una pequeña producción de espumas [Vergara (2003)].

Los tipos de rompientes se relacionan con las características de oleaje y la pendiente del fondo mediante el número de Iribarren (tabla 1.1), cuya expresión es:

$$I_r = \frac{\tan \beta}{\sqrt{H/L_0}} \quad (1.22)$$

donde

I_r es el número de Iribarren

β es el ángulo que forma la playa con la horizontal

H altura de ola [m]

L_0 es la longitud de ola en aguas profundas [m]

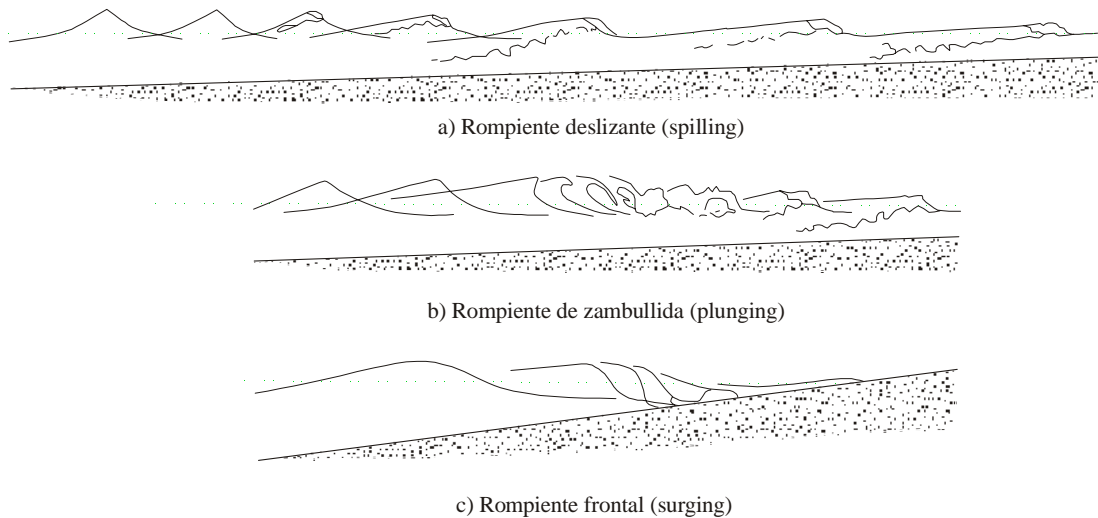


Figura 1.3 Tipos de perfiles de rompientes [Vergara (2003)]

Tipo de rompiente	I_r
Deslizante	$I_r < 0.4$
Zambullida	$0.4 < I_r < 1.4$
Zambullida/Frontal	$0.2 < I_r < 1.6$
Frontal/Oscilante	$1.6 < I_r < 3.1$
Oscilante	$3.1 < I_r$

Tabla 1.1 Tipo de rompiente en función de I_r
[Sánchez y Lemos (1990)]

1.4 Corrientes litorales

Uno de los mayores pasos en el estudio teórico de las corrientes litorales se debe al trabajo de Longuet-Higgins y Stewart, quienes introdujeron el concepto de *esfuerzo radial* [Peregrine (1998)], que hasta la fecha es usado en los modelos teóricos y numéricos de corrientes a lo largo de la costa y en corrientes de retorno [Stive y de Vriend (1987); Battjes (1988); Sánchez y Lemos (1990); Peregrine (1998); Walstra *et al* (2000); Park *et al* (2001); Rogers *et al* (2002); Svendsen *et al* (2002)]. La división en corrientes de retorno y corrientes a lo largo de la costa es meramente conceptual, ya que estos dos fenómenos pueden estar presentes al mismo tiempo dependiendo de las condiciones de oleaje y de la morfología costera (ver figura 1.4). Las ecuaciones base para modelar esta corrientes, son las ecuaciones de Navier-Stokes integradas en la vertical considerando el efecto del esfuerzo radial R_{ij} . El esfuerzo radial se define como el exceso de flujo de cantidad de movimiento debido al oleaje. Considerado una ola progresiva propagándose a un ángulo θ con respecto al eje x , estos esfuerzos pueden calcularse mediante la siguiente ecuación [Dean y Dalrymple (1984)]:

$$R_{xx} = E \left[n(\cos^2 \theta + 1) - \frac{1}{2} \right]$$

$$R_{yy} = E \left[n(\sin^2 \theta + 1) - \frac{1}{2} \right] \quad (1.23)$$

$$R_{yx} = R_{xy} = \frac{E}{2} n \sin 2\theta$$

θ es el ángulo que forma el frente de ola con el eje principal de propagación

donde

n es la celeridad de grupo dividida por la celeridad de la ola

E es la energía del oleaje, igual a

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (1.24)$$

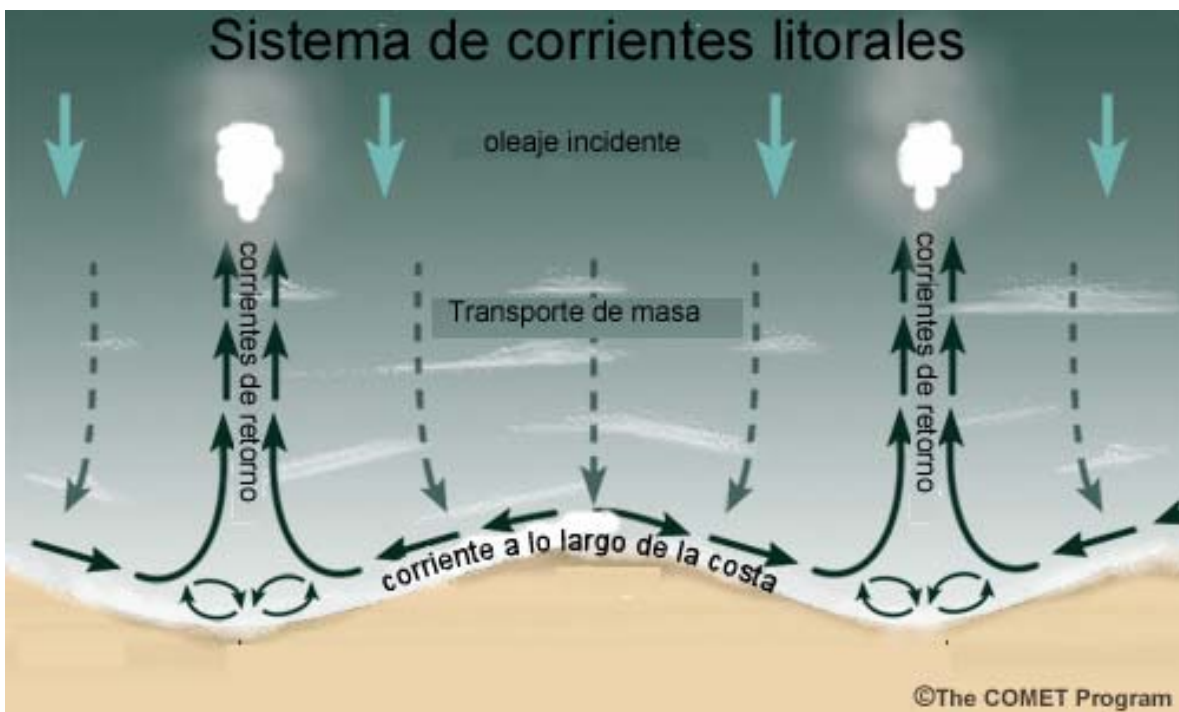


Figura 1.4 Sistemas de corrientes litorales modificada de The COMET Program (2004)

La ecuación de cantidad de movimiento bidimensional suele utilizarse en la modelación de las corrientes litorales, ésta se escribe en su forma euleriana como:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\langle \tau_b \rangle_i}{\rho h} + \frac{1}{\rho h} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x_j} (h \tau_{ij}) = 0 \quad (1.25)$$

donde

h es la profundidad

$\langle \tau_b \rangle_i$ es el esfuerzo cortante en el fondo

R_{ij} es el tensor del esfuerzo radial

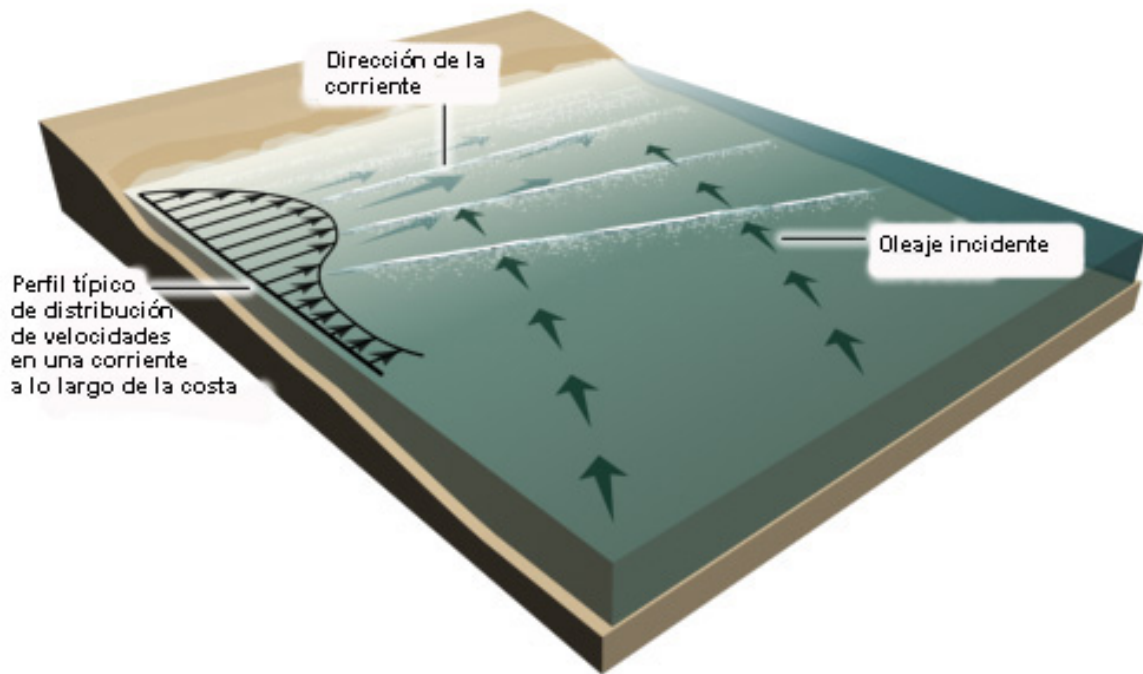
τ_{ij} es el tensor de esfuerzos cortantes, que puede incluir viscosidad turbulenta y los efectos de la distribución vertical de la velocidad

A la ecuación 1.15 se le suelen agregar otras cantidades, por ejemplo Svendsen *et al* (2002) consideran la velocidad orbital del oleaje. A continuación se describen algunas características de los diferentes tipos de corrientes litorales.

1.4.1 Corrientes a lo largo de la línea de costa

El flujo medio de agua a lo largo de la costa es denominado corriente a lo largo de la costa, y sus principales fuentes de cantidad de movimiento son el viento, el transporte de masa debido al oleaje y la cesión lateral de cantidad de movimiento debida al oleaje rompiente. Estas corrientes se generan cuando el frente del oleaje rompiente no es paralelo a la línea de costa, y sus velocidades máximas se dan cuando la línea de costa y el frente del oleaje rompiente forman un ángulo de 45°. El perfil de distribución de velocidades de estas corrientes se ve en la figura 1.5.

Corrientes a lo largo de la costa



©The COMET Program

Figura 1.5 Perfil teórico de la corriente a lo largo de la costa modificada de The COMET Program (2004)

Horikawa (1981) reporta que las corrientes a lo largo de la costa son el agente más importante en el transporte de sedimentos que se da a lo largo de la costa. Existe un gran número de modelos 1DH para describir de las corrientes a lo largo de la costa, y se basan en el siguiente balance [Sánchez y Lemos (1990)]:

$$\delta S + (f_s) + (f_b) = 0 \quad (1.26)$$

donde

δS es la disipación del esfuerzo radial

f_s es la fricción debida a la línea de costa

f_b es la fricción del fondo

En las soluciones 1DH, se asume una condición estacionaria, las ecuaciones relacionadas con el esfuerzo radial son las siguientes [Mei (1983)]:

$$-\frac{dS_{xy}}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\mu_r H \frac{dv}{dx} \right) - \langle \tau_b \rangle_y = 0 \quad (1.27)$$

donde

$\langle \tau_b \rangle_y$ es el esfuerzo cortante en el fondo en la dirección y

1.4.2 Corrientes de retorno (*rip currents*)

Cuando el oleaje rompiente es perpendicular (ó casi) a la línea de costa, existen diferencias en el nivel de ascenso del nivel medio del mar debido a la configuración batimétrica (ver figura 1.6), generándose gradientes de presión que inducen un flujo cuya dirección va de zonas de mayor ascenso a zonas de menor ascenso. Cuando las corrientes a lo largo de la costa convergen en un punto de ascenso menor, se genera una corriente de retorno hacia mar adentro (ver figura 1.4). Estas corrientes de retorno pueden presentarse como flujos a través de los canales de las barras litorales (figura 1.7), también pueden presentarse en zonas con pendiente suave (1/40) (figura 1.8) y en playas rítmicas (figura 1.4).

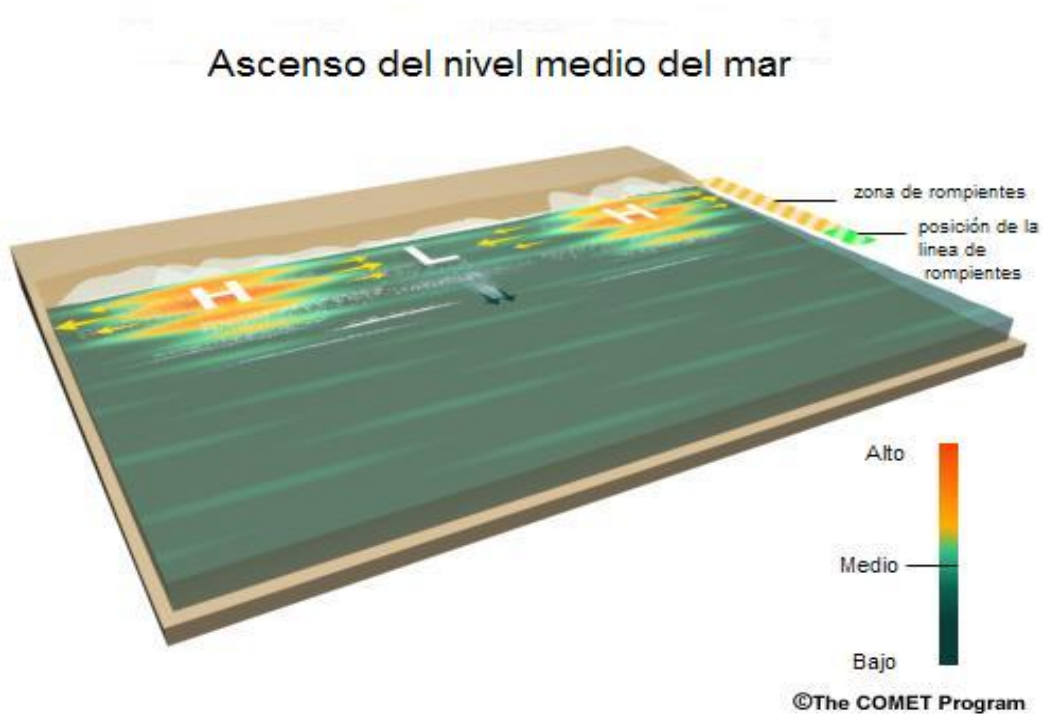


Figura 1.6 Zonas de alto y bajo descenso modificada de The COMET Program (2004)

Corriente de retorno en una barra litoral

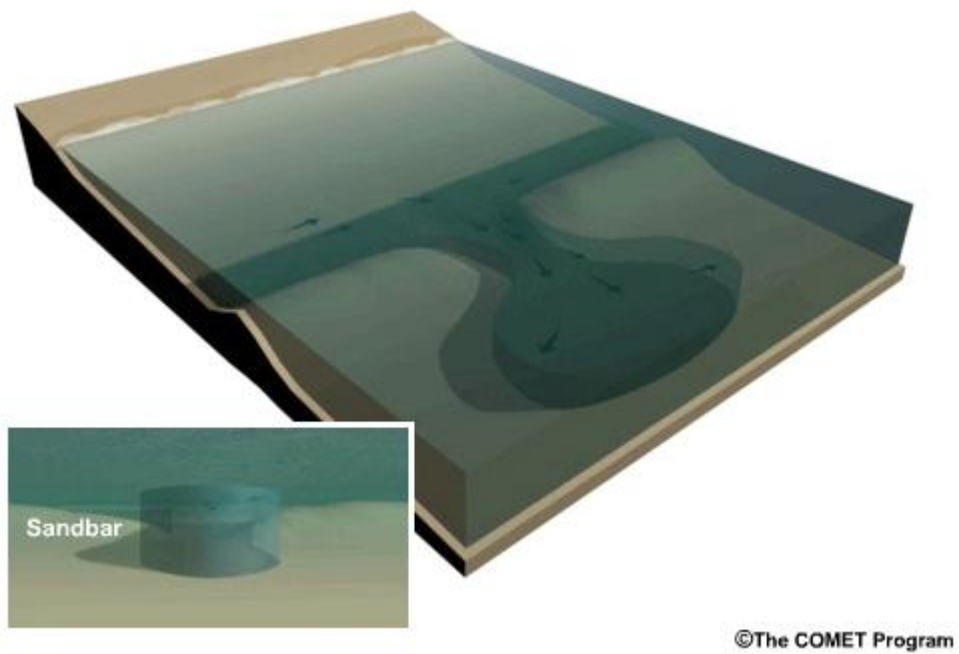
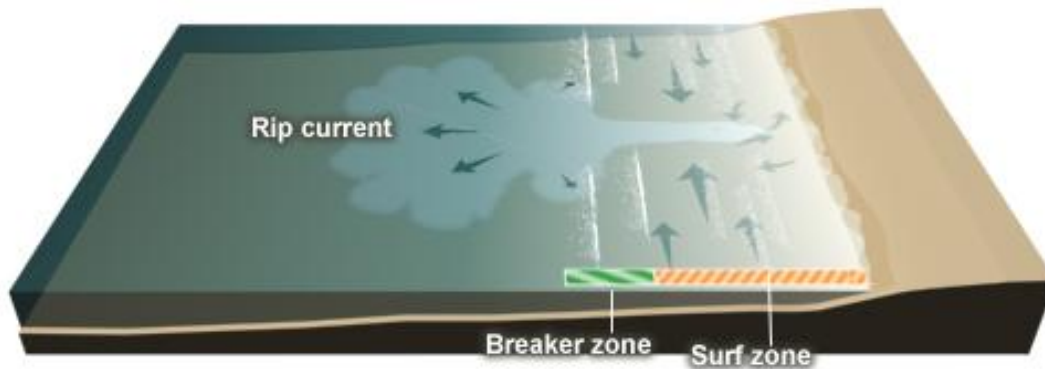


Figura 1.7 Corriente de retorno en una barra litoral modificada de The COMET Program (2004)

Corriente de retorno en una zona con pendiente suave



©The COMET Program

Figura 1.8 Corriente de retorno en zona con pendiente suave
modificada de The COMET Program (2004)

Las corrientes de retorno dependen de la rompiente del oleaje, así como también de las variaciones batimétricas. Por otra parte, Dalrymple(1975) ha demostrado que las corrientes de retorno también pueden formarse por la interacción de olas que se aproximan a la playa por diferentes direcciones. Dichas corrientes además de ser peligrosas para los bañistas, son un agente muy importante en la erosión de las playas y en la formación de barras litorales. Estas corrientes se presentan cerca de la superficie libre y llegan a alcanzar velocidades de hasta 1 m/s y son capaces de transportar al sedimento fuera de la línea de rompientes.

Las características temporales y espaciales de las corrientes de retorno han sido estudiadas mediante mediciones de campo [Shepard e Inman (1950); Smith y Largier (1995); Schmidt *et al* (2005)], mediciones en modelos experimentales

[Borthwick y Foote (2002); Svendsen *et al* (2000), y mediante la simulación numérica [Park *et al* (2001); Rogers *et al* (2002); Svendsen *et al* (2002)]. Información adicional respecto a estas corrientes puede encontrarse en Battjes(1988), Sánchez-Arcilla y Lemos (1990), Yu y Slinn (2003) y en Montoya(1996).

1.4.3 Corriente de resaca (*undertow*)

A diferencia de las corrientes a lo largo de la costa y las corrientes de retorno, las corrientes de resaca no son corrientes de circulación horizontal (2DH), sino vertical. Cuando el oleaje rompe, hace que se incremente el flujo hacia la línea de costa por encima del nivel de la cresta, y como consecuencia se produce un flujo hacia el mar por debajo de dicho nivel, a este flujo se le conoce como corriente de resaca. Un perfil teórico de este tipo de corriente se muestra en la figura 1.9.

La ecuación base para los modelos 1DV analíticos de la corriente de resaca es la siguiente [Mei (1983)]:

$$\frac{dS_{xx}}{dx} + \rho g (\langle \eta \rangle + h) \frac{d\langle \eta \rangle}{dx} + \langle \tau_b \rangle_x = 0 \quad (1.28)$$

donde

$\langle \eta \rangle$ es el ascenso y descenso del nivel medio del mar

$\langle \tau_b \rangle_x$ es el esfuerzo cortante en el fondo en la dirección x

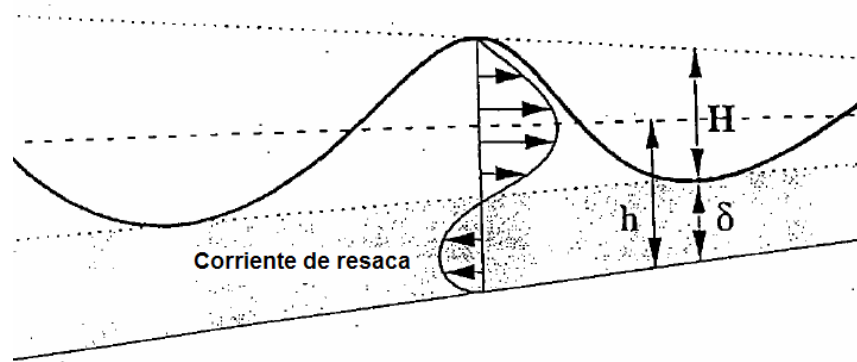


Figura 1.9 Perfil teórico de la corriente de resaca
modificado de GIOC(2000)

Una mejor representación de las corrientes de resaca suele hacerse promediando los valores de la velocidad durante un periodo de tiempo (ver ecuación 1.12) múltiplo entero del periodo de la ola, para ello dichas velocidades pueden obtenerse mediante solución numérica de las RANS en 2DV, que se escriben como:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_T) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + g_i \quad (1.29)$$

Uno de los problemas más importantes en el diseño de las playas es el conocimiento de la forma transversal del perfil. Cuando incide en la playa oleaje de gran intensidad la arena es transportada de la playa seca hacia la playa sumergida formando barras y cuando en la playa incide oleaje de baja intensidad la arena es transportada a la zona de la playa seca. En la figura 1.10 se muestra una zona erosionada durante un periodo de temporales en las playas de Barcelona. Existen resultados experimentales publicados de corrientes de resaca [Kennedy et al (1997); Ting y Kirby (1994); Ting y Kirby (1995); Ting y Kirby (1996)] que han sido comparados con modelos numéricos [Stive y de Vriend (1987); Walstra et al (2000); Zhao et al (2004)].



Figura 1.10 Zona erosionada durante los temporales de los meses de diciembre del 2006 y enero 2007 en las Playa Bogatell en Barcelona, España.

2.4.4 Modelación numérica

La forma más general de describir las corrientes litorales desde el punto de vista matemático, es utilizando las ecuaciones 1.13 y 1.16 en su forma tridimensional. Sin embargo, como se mencionó que las corrientes litorales suelen representarse mediante formulaciones bidimensionales (2DH y 2DV), las corrientes a largo de la costa y las corrientes de retorno mediante la ecuación 1.25 (2DH) y las de resaca mediante la ecuación 1.29 (2DV). Los métodos más utilizados para resolver numéricamente esas ecuaciones son el método de diferencias finitas [Abbott y Basco (1989)], el método de elementos finitos [Zienkiewicz y Taylor (2000), Hirsch (1988)] y el método de volumen finito [Eymard *et al* (1997), Hirsch (1988)].

Noda [Sánchez y Lemos (1990)] fue el primero en implementar un modelo 2DH para reproducir las corrientes litorales, aunque en esa modelación no se incluyó la

interacción entre el oleaje y las corrientes. Wind y Vreugdenhil (1986), presentaron un modelo que incluye un modelo de turbulencia de tipo $\kappa - \varepsilon$ para definir el valor de la viscosidad turbulenta (*eddy viscosity*), y las ecuaciones fueron resueltas en una malla en coordenadas curvilíneas utilizando un método de diferencias finitas de paso fraccionado. Yoo (1986) presentó un modelo general en 2DH en donde incluyó la interacción entre oleaje y corrientes, para ello además de resolver las ecuaciones de cantidad de movimiento utilizando un modelo de turbulencia algebraico (modelo de Battjes), resolvió las ecuaciones de energía y de refracción de oleaje considerando el valor de la velocidad media, éstas ecuaciones fueron resueltas por un método de diferencias explícito en una malla tipo *staggered*. Montoya(1996) presento la solución numérica de ecuaciones de cantidad de movimiento y refracción de oleaje resueltas con un método de diferencias finitas conocido como ADI (*Alternating Direction Implicit*). Recientemente, Park *et al* (2000) y Rogers *et al* (2002) resolvieron un conjunto de seis ecuaciones diferenciales parciales, entre las que se encuentran las ecuaciones de cantidad de movimiento (considerando el esfuerzo radial), una ecuación de transporte para el número de onda, la ecuación de la energía del oleaje y la ecuación de continuidad. La solución de estas ecuaciones es por medio de un método de volumen finito, los términos advectivos se calculan mediante un esquema tipo Riemann y el resto de los términos se calculan mediante esquema de segundo orden de tipo Godunov, sobre una malla adaptiva denominada *quadtree* [Cruz (1998)], la cual puede adaptarse tanto a las fronteras físicas como a las características del flujo.

Otra forma de simular las corrientes de retorno y a lo largo de la costa, es mediante las ecuaciones de Boussinesq, mismas que fueron utilizadas primeramente para estudios de agitación en puertos y propagación de oleaje en zonas costeras [Abbott *et al* (1978); Madsen y Sorensen (1992); Madsen *et al* (1997); Sorensen y Sorensen (2000)]. Ejemplos de utilización de las ecuaciones de Boussinesq para representar las corrientes de retorno pueden encontrarse en Chen *et al* (1999) y Kirby (2003), y para las corrientes a lo largo de la costa puede consultarse Li y Shibayama (2000) y Kirby (2003).

Para representar las corrientes litorales en forma 3D es común utilizar formulaciones quasi-3D, que consisten en combinar alguna aproximación 2DH con un modelo local 1DV; una descripción teórica de como funcionan de forma general este tipo de formulaciones puede encontrarse en Sánchez y Lemos (1990). Los primeros en utilizar una modelación quasi-tridimensional en la modelación de las corrientes litorales fueron Stive y de Vriend (1987), quienes parten de las ecuaciones RANS en su forma tridimensional convirtiéndolas en 2DH integradas en la vertical, para luego solucionarlas solucionadas mediante un método de elementos finitos (método de Galerkin) y una aproximación de tres capas. Sin embargo concluyen que la corriente de resaca (*undertow*) no fue caracterizada adecuadamente debido a que no se consideró el efecto del ascenso del oleaje y los gradientes de presión que ese fenómeno induce. Walstra *et al* (2000) resuelven las ecuaciones RANS tomando en cuenta un valor promedio de la superficie libre mediante un método denominado GLM (Generalised Lagrangian Mean theory), modificando ligeramente las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, utilizando además un modelo de turbulencia del tipo $\kappa - \varepsilon$. Dentro de las recomendaciones de este trabajo se encuentra la de considerar la variación vertical de las fuerzas inducidas por oleaje. Svendsen *et al* (2002) representan la velocidad instantánea como la suma de la velocidad orbital debida al oleaje, una fluctuación y la velocidad media, la interacción oleaje corrientes se hace a través de la solución de la ecuación de la pendiente suave [Kirby y Dalrymple (1994)]. También se utilizan diferentes modelos de turbulencia en la horizontal fuera y dentro de la zona de rompientes (e.g. modelo de Battjes en la zona de rompientes), un modelo de Smagorinsky(1963) para representar los efectos a una escala menor a la resolución de la malla. Las ecuaciones son resueltas por un método predicción-corrección en diferencias finitas, para la predicción se utiliza un método explícito de tercer orden denominado Adams-Bashforth y para el corrector un método de tercer orden denominado Adams-Moulton. Una modificación reciente al trabajo de Svendsen *et al* (2002), es presentada por Shi *et al* (2007),

donde resuelve las ecuaciones en una malla curvilínea utilizando un método de paso fraccionado.

En los trabajos anteriores, la viscosidad turbulenta se considera constante en la vertical, por lo que no siempre es posible reproducir correctamente los perfiles de velocidad. Por otra parte, la distribución de cantidad de movimiento debida al oleaje rompiente (e.g. rompiente en reversa) no siempre puede captarse.

Para la modelación 2DV y 3D se resuelven las RANS [Zhao *et al* (2004); Li y Liu (1998); Dalrymple y Rogers (2006)] y la superficie libre del agua se convierte en una frontera móvil. Las técnicas para determinar la posición de la superficie libre pueden dividirse en dos grandes grupos [García *et al* (2007)]: métodos de captura (eulerianos) y métodos de trazado (métodos lagrangianos).

El método más popular dentro de los métodos de captura es el método VOF (Volume of Fluid), en este método se resuelve una ecuación de transporte donde el valor del escalar F que se transporta representa el fluido, el aire y la superficie libre (interfase). Por ejemplo el valor escalar F puede tomar valores de $F = 1$ (fluido), $F = 0$ (aire) y $F = 0.5$ (superficie libre) [Wang *et al* (2003); Emarat *et al* (2000)]. Otros métodos existentes dentro de este grupo, son los métodos de tipo *level set* [Sethian y Smereka (2003); Garzon *et al* (2005)] y los métodos donde se transporta directamente la superficie libre [Guyenne *et al* (2000); Zienkiewicz y Taylor (2000)]. Estos métodos han sido utilizados principalmente para reproducir los diferentes tipos de rompientes del oleaje. Li y Liu (1998) resolvieron las RANS utilizando el método VOF, un modelo de turbulencia de tipo $\kappa - \varepsilon$, y un método de diferencias finitas, en ese trabajo se compararon los resultados contra mediciones experimentales [Ting y Kirby (1994); Ting y Kirby (1995); Ting y Kirby (1996)] obteniendo buenos resultados en los valores de la superficie libre, aunque no presentan comparaciones en perfiles de velocidad. Zhao *et al* (2004) resuelven también las RANS utilizando el método VOF, y proponen un modelo de turbulencia que trabaja a diferentes longitudes características ($k-l$), los resultados son

comparados con las mediciones experimentales de [Ting y Kirby (1994); Ting y Kirby (1995); Ting y Kirby (1996)] mostrando un buen grado de aproximación en posición de la superficie libre, así como también en los perfiles de velocidad de las corrientes de resaca. Todos estos métodos (incluyendo 2DH y quasi-3D) resuelven las ecuaciones en su forma euleriana.

En los métodos de trazado se resuelven las ecuaciones en su forma lagrangiana dando directamente la posición de la superficie libre sin necesidad de resolver alguna otra ecuación adicional, la solución se hace mediante métodos de partículas [Oñate *et al* (2004); Celigueta *et al* (2007)] o métodos libres de malla (meshless methods) [Idelsohn *et al* (2003); Del Pin (2003); Shao y Goto (2005)]. Es importante hacer notar que en la solución lagrangiana de las ecuaciones, todo método sin malla se considera método de partículas, pero no todo método de partículas es un método sin malla, ya que algunos métodos de partículas requieren de una malla para realizar la integración de las ecuaciones. Una aplicación reciente a la hidrodinámica costera mediante un método de este tipo fue hecha por Dalrymple y Rogers(2006), mostrando las grandes posibilidades del método SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) para representar la hidrodinámica en la zona de rompientes, así como también la interacción oleaje-estructura.

Los métodos sin malla pueden dividirse en dos grupos de acuerdo al método de minimización de la aproximación: métodos que se utilizan para resolver la ecuación diferencial en su forma original (métodos de colocación por puntos) y los que se utilizan para resolver la formulación débil de la ecuación (método de Galerkin) [Li y Liu (2002)].

Algunos métodos dentro del grupo de métodos de colocación puntual son el método SPH [Belytschko *et al* (1996)], el método de vórtices [Li y Liu (2002)], el método de puntos finitos [Oñate *et al* (1996)], el método de diferencias finitas generalizadas (GFDM) [Zienkiewicz y Taylor (2000)] y métodos de colocación de

funciones radiales [Pereyra *et al* (2007)]. En este tipo de métodos se necesitan funciones de interpolación de orden superior que satisfagan las derivadas en la ecuación diferencial, además de que presentan dificultades para introducir las condiciones de frontera y para tratar las interfaces entre diferentes materiales (fluidos).

Algunos métodos dentro del grupo de los métodos sin malla de tipo Galerkin son el método de los elementos difusos (DEM) [Fries y Matthies (2004)], Galerkin libre de elementos (EFGM) [Liu (2003)], el método del núcleo reproductor (RPKM) [Fries y Matthies (2004)], el método Petrov-Galerkin [Liu (2003)], el método de esferas finitas [De y Bathe (2000)].

En general los métodos sin malla tienen las siguientes debilidades [Idelsohn *et al* (2003)]:

1. En algunos casos es difícil introducir las condiciones de frontera.
2. En algunos métodos es difícil evaluar las derivadas de las funciones de forma.
3. A menudo se necesitan muchos puntos de integración para evaluar la formulación débil.
4. Las funciones de forma regularmente tienen continuidad de orden mayor a C^0 y por lo tanto decrece la convergencia de la aproximación y hace más difícil la introducción de discontinuidades como puede ser una distribución heterogénea de materiales.
5. Algunos métodos no funcionan para una distribución irregular de puntos, o necesitan una conectividad de nodos compleja para obtener resultados aproximados.
6. Algunos métodos necesitan n^α (n es el número de nodos) operaciones, con $\alpha \gg 1$ o necesitan un número indeterminado de operaciones para realizar el punto anterior.

Estas debilidades hacen que sea difícil implementar un método sin malla en 3D para flujos a superficie libre y flujos que interactúan con sólidos. Un método reciente conocido como el Método de Elementos Naturales (NEM) ha sido utilizado por Sukumar *et al* (2001) para acoplarlo con un método de elementos finitos, las funciones de forma se calculan con base en los vecinos naturales. Este método tiene la ventaja de que se pueden imponer fácilmente las condiciones de frontera, además de que pueden interpolarse los datos de los nodos mediante interpolantes no-Sibsonianos [Sukumar (2001)]. Idelsohn *et al* (2003) utilizan también interpolantes no-Sibsonianos para definir las funciones de forma en el método de elementos finitos libre de malla (MFEM), pero a diferencia de Sukumar *et al* (2001) que utiliza funciones con continuidad C^∞ , utilizan funciones con continuidad C^0 . Una de las ventajas del MFEM, es que la partición del dominio se hace a través de la Teselación Delaunay Extendida (EDT) [Calvo *et al* (2003)], evitando la formación de *slivers* una distribución arbitraria de puntos en 3D.

El método sin malla ideal aún no existe, por lo que hasta ahora se combinan las ideas de los métodos sin malla con métodos basados en malla (elementos finitos y volumen finito) denominados métodos de partículas. Un método de este tipo es el método de elementos finitos y partículas (PFEM) [Oñate *et al* (2004)] que es una formulación generalizada de elementos finitos desarrollada principalmente para resolver problemas en ingeniería civil. El PFEM ha sido implementado en 2DV y 3D, y ha sido utilizado para simular diferentes tipos de fenómenos, como erosión [Oñate *et al* (2006)], interacción fluido-estructura [Oñate *et al* (2004); Idelsohn *et al* (2003b); Celigueta *et al* 2007], y la propagación de una ola solitaria y su rompiente en 3D [Oñate *et al* (2004)].

En este trabajo se decidió utilizar el PFEM por las siguientes razones: la formulación lagrangiana permite representar la rompiente del oleaje y la formulación fluido estructura permite reproducir experimentos en canales de oleaje así como también representar el ascenso y descenso del agua sobre la playa.

CAPÍTULO 2

EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS Y PARTÍCULAS (PFEM)

2.1 Introducción

El Método de los Elementos Finitos y Partículas (PFEM) [Oñate *et al* (2004)] es un método de elementos finitos generalizado que permite resolver las ecuaciones de RANS en su forma lagrangiana (ecuaciones 1.13 y 1.16) en 2DV y 3D. El PFEM ha sido utilizado para simulación de problemas de interacción fluido-estructura, una de las ventajas de este método es que el dominio de cálculo admite grandes deformaciones, incluso la separación de flujo [Oñate *et al* (2004)]. El PFEM hace uso de un conjunto de técnicas numéricas, como son: Teselación Delaunay Extendida [Calvo *et al* (2003); Calvo (2005)], Método *Alpha-Shape* [Edelsbrunner y Mucke (1999)], y el Método de Elementos Finitos Libre de Malla [Idelsohn *et al* (2003a)]. Primeramente se describen éstas técnicas, cada una por separado, y posteriormente se aborda el PFEM para la solución de las ecuaciones RANS, y la interacción fluido-estructura.

2.2 Teselación Delaunay Extendida (EDT)

En el FEM, el dominio de cálculo es dividido en subdominios ó elementos, sobre los cuales se hace la integración de las ecuaciones. Dada una nube de nodos que represente el dominio de cálculo, la forma más común de discretizar es mediante los diagramas de Voronoi dando como resultado la Teselación Delaunay (DT).

El diagrama de Voronoi de un conjunto de nodos, es una partición del dominio en regiones (cerradas y convexas, ó infinitas), donde cada una de ellas está asociada a un nodo del dominio; los vértices de dichas regiones son más cercanos al nodo al que pertenece la región que a alguno otro [Calvo (2005)]. Si el conjunto de nodos se denomina como $\{P_i\}$, las regiones de Voronoi $\{V_i\}$ pueden definirse de la siguiente manera [Bugueda (2007)]:

$$\{V_i\} = \{p \in R^d : \|p - P_i\| < \|p - P_j\|, \forall i \neq j\} \quad (2.1)$$

donde

p es un vértice de la región de Voronoi

Las regiones de Voronoi son poliedros (polígonos en 2D) que contienen en su interior un nodo, y sus caras son mediatrices de los segmentos de recta que unen a los nodos. Si se posiciona el centro de una esfera (circunferencia en 2D) en un vértice, ésta puede hacerse crecer hasta alcanzar los puntos más cercanos, que serán al menos 4 puntos (3 puntos en 2D); a esta esfera se le denomina esfera vacía. Si se unen todos los puntos que tienen en común alguna cara de los poliedros de Voronoi da como resultado la teselación Delaunay (figura 2.1), donde el dominio está dividido por tetraedros (triángulos en 2D). Cabe mencionar que si equidistan mas de cuatro puntos (tres en 2D) al centro de una esfera, la discretización del dominio no es única (figura 2.2).

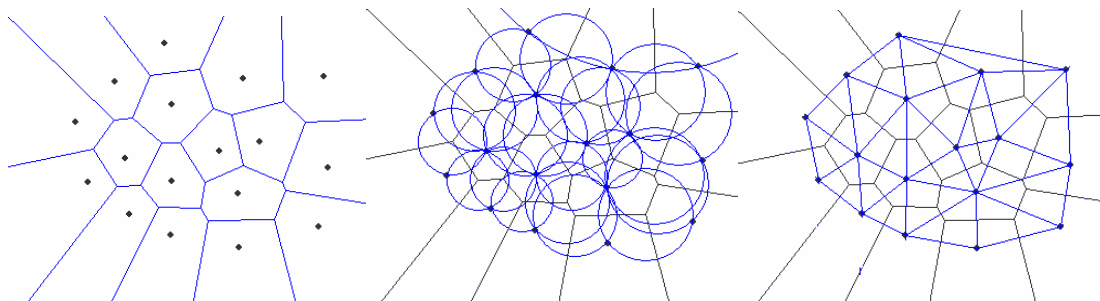


Figura 2.1 Diagrama de Voronoi, circunferencias vacías y Teselación Delaunay para una nube de nodos en 2D

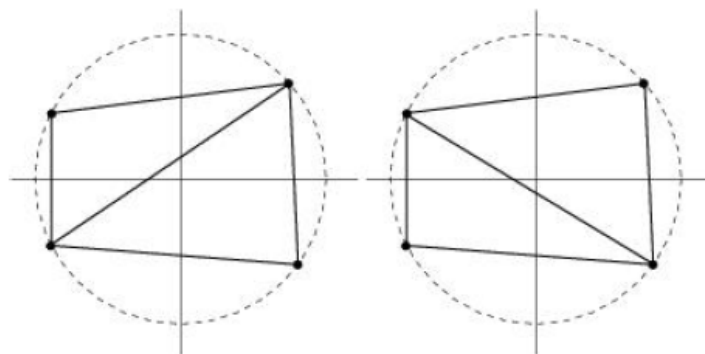


Figura 2.2 Posibilidades de discretización al interior de una circunferencia cuyo centro equidista a cuatro nodos [Del Pin (2003)]

Existen varios métodos para construir los diagramas de Voronoi y la teselación Delaunay (e.g. algoritmo Bowyer-Watson, algoritmo Lawson y algoritmo de Fortune), algunos métodos se describen en Bugueda (2007), Miller *et al* (2002), Cohen-Steiner *et al* (2004) y Zimmer (2005), por otra parte también existen *applets* en la Internet [Odgaard y Nielsen (2002); Chew(2005)] que muestran el procedimiento de construcción de los diagramas de Voronoi de manera interactiva. Un algoritmo eficiente y de fácil implementación es el algoritmo de Bowyer-Watson, cuyos pasos se enlistan a continuación:

1. Crear un tetraedro (triángulo en 2D) que contenga todos los nodos, formado por nodos virtuales.
2. Insertar un punto dentro de la teselación.
3. Determinar las esferas (circunferencias en 2D) que contengan al nuevo nodo, así como también los tetraedros asociados.
4. Eliminar las esferas y los tetraedros identificados en el paso 3, creando con ello una cavidad convexa.
5. Conectar el nuevo nodo con los nodos que forman la frontera de la cavidad.
6. Regresar al paso 1.

La figura 2.3 muestra el proceso de inserción de puntos mediante el algoritmo de Bowyer-Watson, iniciando con la nube de nodos que se desea triangular (figura 2.3a), seguida de la construcción de una triangulación inicial que contiene la nube de nodos (figura 2.3b) y la inserción de cada uno de los nodos modificando la triangulación (figuras 2.3d a 2.3n), finalizando con la eliminación de los nodos virtuales, así como también de las esferas vacías y triángulos asociados a ellos, quedando así la triangulación final (figura 2.3o) de la nube de puntos inicial (figura 2.3a).

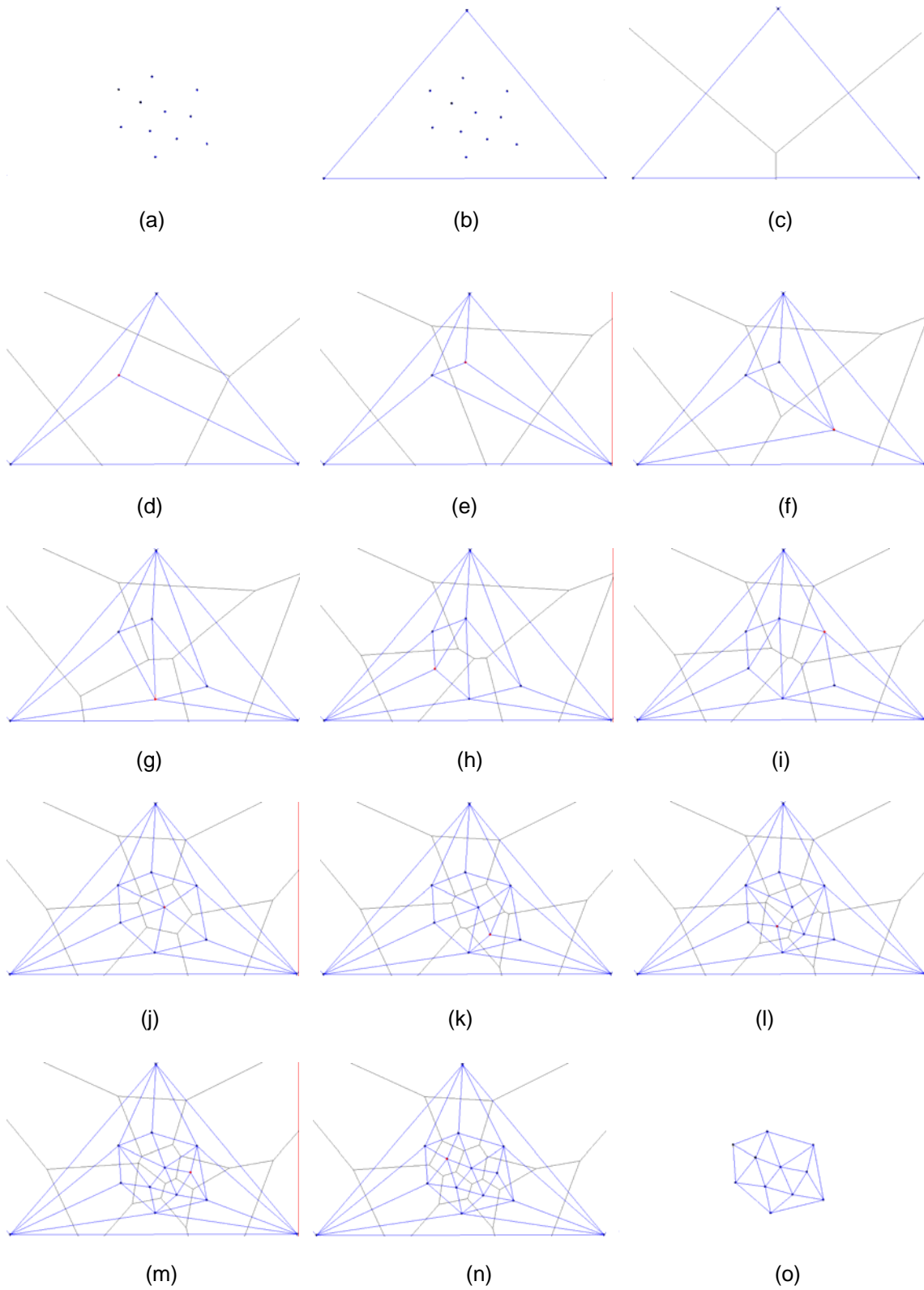


Figura 2.3 Inserción de once puntos a una teselación inicial mediante el algoritmo de Bowyer-Watson

La DT es una discretización estable en 2D, pero no conserva esta cualidad en 3D, ya que cuando en algunos casos es posible que se generen tetraedros aplastados o con volumen tendiente a cero (*slivers*), ver figura (2.4). Para conseguir una discretización única, evitando la formación de *slivers*, y la realización de operaciones de cosmética a la discretización, Calvo *et al* (2003) propusieron el concepto de Teselación Delaunay Extendida (EDT).

La EDT puede definirse como una discretización del dominio de un conjunto de nodos en poliedros de vértices aproximadamente coesféricos (figura 2.5). Para generar la EDT se parte de la DT, posteriormente se unen los poliedros que tengan esferas cercanas y finalmente se capturan dichos poliedros. Dos esferas son cercanas si se cumple:

$$d_c \leq \delta r_m \quad (2.2)$$

donde

$$d_c = \|c_2 - c_1\| \quad (2.3)$$

$$r_m = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \quad (2.4)$$

d_c es la distancia de los centros de las esferas c_1 y c_2

r_m es el promedio del los radios de las esferas r_1 y r_2

δ un parámetro que define la proximidad

En la figura 2.6 se muestra del lado izquierdo los tetraedros resultantes y *slivers* obtenidos mediante la DT, y a la derecha se muestra el poliedro único después de realizar la EDT (libre de *slivers*).

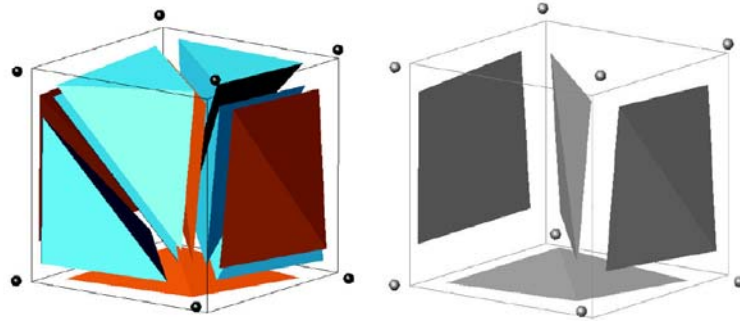


Figura 2.4 Formación de *slivers* luego de la teselación Delaunay. A la izquierda todos los tetraedros posibles, y a la derecha los *slivers* aislados [Del Pin (2003)]

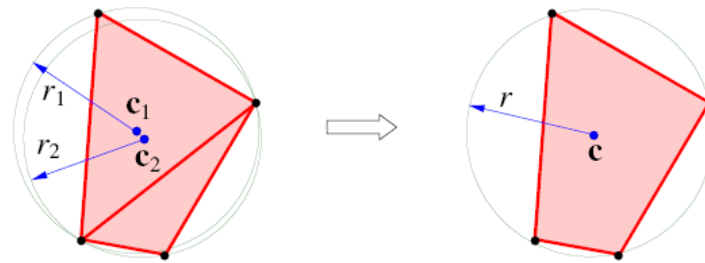


Figura 2.5 Formación de un poliedro esférico y asignación de la esfera media [Calvo (2005)]

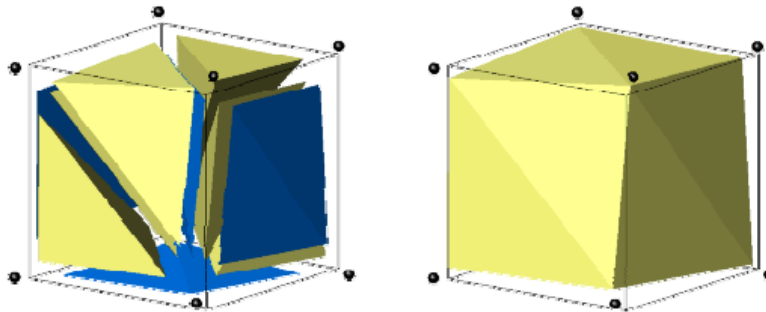


Figura 2.6 Formación de un poliedro esférico y eliminación de *slivers* [Del Pin (2003)]

2.3 Método Alpha-Shape

Dada una nube de puntos, la discretización del dominio para resolver las ecuaciones 1.12 y 1.15 puede realizarse mediante la EDT, pero surge el problema de determinar la frontera del dominio de cálculo ya que la forma de la superficie libre del fluido va cambiando con el tiempo.

Una forma de determinar la frontera es calculando el volumen de las celdas de Voronoi, donde las celdas en la frontera tendrán un volumen mayor a las celdas del interior. Un procedimiento más sencillo, es utilizar el método *Alpha-Shape* [Edelsbrunner y Mucke (1999)], que está basado en la Teselación Delaunay, y consiste en eliminar las esferas vacías (así como los poliedros asociados a ellas) que tengan un radio mayor a αh_m , siendo h_m el valor promedio de la separación entre los nodos que forman un mismo poliedro y α es un número real. Cabe señalar que para $\alpha < 1.0$ se formarían especies de burbujas virtuales, o dicho de otra forma, se eliminaría masa del fluido; tampoco tiene sentido utilizar un α mayor a la mitad de la distancia mínima entre los nodos del dominio y los nodos virtuales, ya que no se eliminaría ningún poliedro. Idelsohn *et al* (2003a) mencionan que el valor de α debe ser mayor a 1.0 pero cercano a él, considerando a h como el valor mínimo de la distancia entre dos nodos. Calvo (2005) recomienda un valor de $1.2 \leq \alpha \leq 1.4$, para un h tomado como el valor promedio de la distancia entre los nodos que forman un mismo poliedro.

En la figura 2.7 se muestra la aplicación de este criterio en un problema donde se llena un recipiente con agua: en la figura superior izquierda se observa la nube de puntos que representa al dominio; en la figura superior derecha la triangulación Delaunay para esa nube de puntos, y en las figuras inferiores se observan dos diferentes reconocimientos de frontera para dos valores de α .

La discretización obtenida después de aplicar el concepto de *Alpha-Shape* a la EDT no es sensible a pequeñas variaciones de α y δ [Idelsohn *et al* (2003a)].

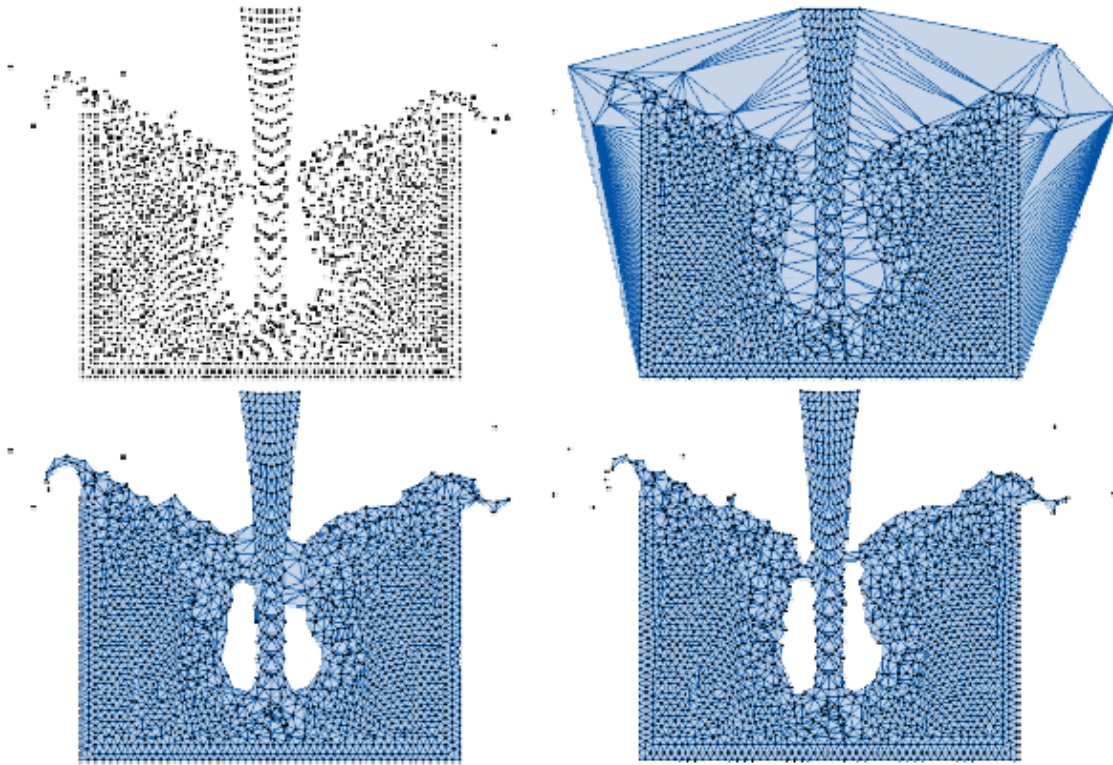


Figura 2.7 Posibles fronteras en una nube de puntos [Calvo (2005)]

2.4 Método de elementos finitos libre de malla (MFEM)

En el FEM estándar, las funciones de forma se definen sobre un elemento patrón ó elemento tipo (figura 2.8), y al momento de realizar la integración de las ecuaciones, las funciones de forma evaluadas en un punto en el interior del elemento tipo necesitan una función de transformación de coordenadas para representar al elemento del dominio [Zienkiewicks y Taylor (2000); Oñate y Zárata (2007)]. Para una discretización obtenida mediante la EDT, es imposible tener un elemento tipo para todos los poliedros esféricos que se puedan generar, sin embargo es posible utilizar las ideas de los métodos sin malla. En los métodos sin malla, las funciones de forma dependen únicamente de la posición de los nodos, pero es preferible que el método seleccionado permita la imposición de las condiciones de frontera de manera sencilla. Dos métodos que han demostrado

esta característica son el MFEM [Idelsohn *et al* (2003)] y el NEM [Sukumar *et al* (2001)]. Estos dos métodos construyen sus funciones de forma apoyándose en los diagramas de Voronoi; en el MFEM se utiliza una interpolación no-Sibsoniana y en el NEM interpolaciones Sibsoniana y no-Sibsoniana. La interpolación Sibsoniana da como resultado funciones de forma de continuidad C^∞ en el interior de los elementos, lo que complica el cálculo de las derivadas si se necesitan varios *puntos de Gauss* en la integración; por esa razón esta interpolación no se aborda en este trabajo, pero los detalles de la misma pueden encontrarse en Sukumar *et al* (2001) y Sukumar (2001).

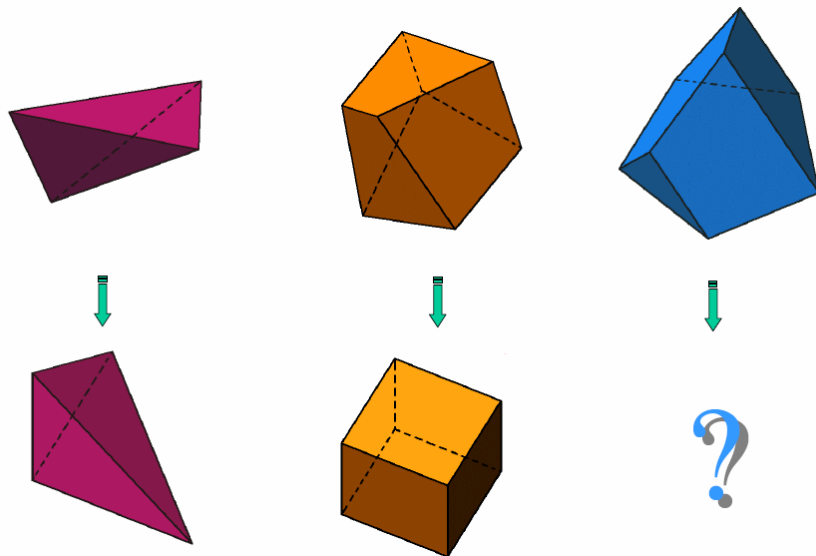


Figura 2.8 Elementos tipo para diferentes poliedros esféricos [Calvo (2005)]

Para el cálculo del valor de una variable en un punto en el espacio mediante las interpolaciones no-Sibsoniana (continuidad C^0), es necesario determinar los puntos (donde se conoce el valor de la variable) con los que se determinara ese valor; a estos se les denomina *vecinos naturales*. Para determinar los vecinos naturales de un punto, es necesario determinar las esferas vacías que pueden tenerlo dentro, los vecinos naturales de ese punto (nodo) son los nodos que forman las esferas. A diferencia del NEM, en el MFEM este tipo de interpolación ha sido implementada exitosamente en 3D para determinar las funciones de

forma; las funciones de forma en el MFEM pueden calcularse de la siguiente manera [Idelsohn *et al* (2003a)]:

Dado un conjunto de nodos $P = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ pertenecientes a uno de los poliedros obtenidos por la EDT, la función de forma $N_i(x)$ correspondiente al nodo i del poliedro y evaluada en el punto interno x vale (ver figura 2.9):

$$N_i(x) = \frac{\frac{s_i(x)}{h_i(x)}}{\sum_{j=1}^m \frac{s_j(x)}{h_j(x)}} \quad (2.5)$$

donde

$s_i(x)$ es el valor del área (longitud en 2D) de la cara de la celda de Voronoi correspondiente al nodo i , en un diagrama de Voronoi obtenido sobre $P \cup \{x\}$

$h_i(x)$ es la distancia entre x y el nodo n_i

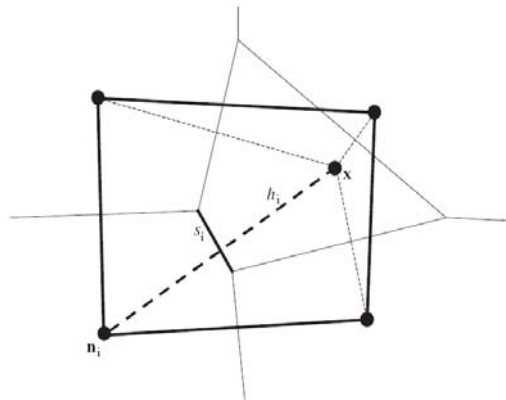


Figura 2.9 Representación gráfica de los parámetros de la función de forma

Esta interpolación tiene las siguientes propiedades [Idelsohn *et al* (2003a)]:

- 1) Su valor está comprendido entre 0 y 1.
- 2) En cualquier punto interior x , la suma de las funciones de forma de todos los nodos del elemento vale 1.
- 3) La función de forma evaluada en n_i (N_i) vale 1 y cero en todos los demás.
- 4) Se cumple que:
$$x = \sum_{i=1}^m N_i(x)n_i$$
- 5) En la superficie de un poliedro, las funciones de forma dependen sólo de los nodos que forman esa superficie.
- 6) En superficies triangulares de un poliedro (o todos los polígonos de frontera) las funciones de forma son lineales.
- 7) Si el poliedro es un tetraedro (triángulo en 2D), las funciones de forma son lineales.
- 8) Por la propiedad 5, las funciones de forma presentan continuidad C^0 entre poliedros vecinos (ver figura 2.10).
- 9) El cálculo de la función de forma y de sus derivadas es muy simple y rápido.

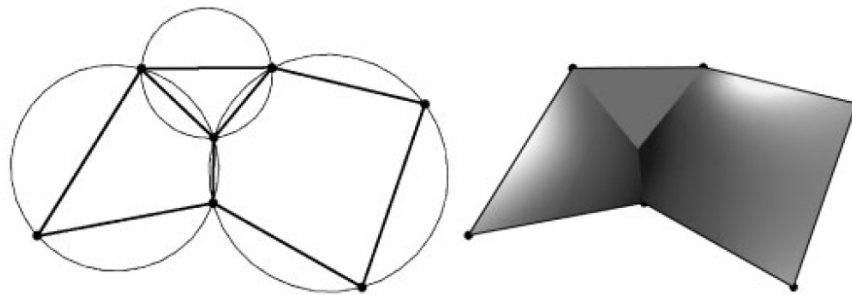


Figura 2.10 Continuidad C_0 de la función de forma en 2D

2.5 El método de elementos finitos por partículas (PFEM) para la solución de las RANS y la interacción fluido estructura

La solución de un problema de flujo mediante el PFEM, típicamente envuelve los siguientes pasos [Oñate *et al* (2004)]:

1. Generar una nube de puntos sobre el dominio de cálculo.
2. Identificar las fronteras externas de los sólidos y el fluido mediante el método *Alpha-Shape*.
3. Evaluar las funciones de forma en función de la distribución de los nodos; en este paso se hace uso del Método de Elementos Finitos libres de Malla (MFEM).
4. Solución de las ecuaciones lagrangianas acopladas del movimiento del sólido y del fluido. Calcular en cada paso de tiempo las velocidades, las presiones y los esfuerzos viscosos en el fluido, y los desplazamientos, esfuerzos y deformaciones en los sólidos.
5. Mover los nodos de la nube de puntos a una nueva posición.
6. Regresar al paso 2 y repetir el proceso de solución para en nuevo paso de tiempo.

El paso 1 puede hacerse mediante un software generador de mallas; Schneiders(2000) presenta una lista extensa tanto de software libre como comercial. En este trabajo se utilizó el programa GID [GiD (2004)] por contar con la licencia. Para el paso 2 y 3, los métodos utilizados se explicaron en los incisos 2.2 y 2.3 respectivamente. En el paso cuatro se describe en este inciso.

Para la solución temporal de las RANS (ecuaciones 1.13 y 1.16) y acoplarlo de manera adecuada con la interacción con alguna estructura, es necesario utilizar un método de paso fraccionado, este método consiste en separar las velocidades de la presión en la ecuación 1.16; para ello se considera que:

$$\frac{Du_i}{Dt} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^* + u_i^* - u_i^n}{\Delta t} \quad (2.6)$$

donde

Δt es un incremento de tiempo ó $\Delta t = t^{n+1} - t^n$

u_i^* es una variable auxiliar ó una predicción de velocidad

De la ecuación 2.6, la ecuación 1.15 puede dividirse en las dos siguientes:

$$u_i^* = \bar{u}_i^n - \gamma \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \Delta t (v + v_T) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i^{n+\theta}}{\partial x_j} \right) + \Delta t g_i \quad (2.7)$$

$$\bar{u}_i^{n+1} = u_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1} - \gamma p^n) \quad (2.8)$$

donde

γ es un parámetro cuyo valor de cero o uno, definiendo un paso fraccionado de primer o segundo orden respectivamente

θ es un parámetro que indica si la solución es explícita, implícita ó de Crank-Nicholson, $\theta = 0$, $\theta = 1$ y $\theta = 0.5$, respectivamente.

De la ecuación 1.12 y 2.8, puede obtenerse una ecuación de Poisson para la presión:

$$\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1} - \gamma p^n) = \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \quad (2.9)$$

Una vez definidas la forma de las ecuaciones a resolver (ecuaciones 2.7 a 2.9), se deben obtener las formulaciones débiles de dichas ecuaciones; integrando las

ecuaciones 2.7 a 2.9, y tomando en cuenta las funciones de forma N (obtenidas mediante el MFEM), se obtiene:

para u_i^*

$$\int_{\Omega} Nu_i^* d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} N(v + v_T) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i^{n+\theta}}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_{\Omega} N \bar{u}_i^n d\Omega - \gamma \Delta t \int_{\Omega} \frac{N}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} Ng_i d\Omega \quad (2.10)$$

para p^{n+1}

$$\Delta t \int_{\Omega} \frac{N}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1} - p^n) d\Omega = \int_{\Omega} N \frac{\partial}{\partial x_i} u_i^* d\Omega \quad (2.11)$$

para \bar{u}_i^{n+1}

$$\int_{\Omega} N \bar{u}_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} Nu_i^* d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \frac{N}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1} - p^n) d\Omega \quad (2.12)$$

Integrando por partes mediante el teorema de Green [Zienkiewicks y Taylor (2001)], el término de los esfuerzos cortantes en la ecuación 2.10 y el término de la presión en la ecuación 2.11, las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

para u_i^*

$$\int_{\Omega} Nu_i^* d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} (v + v_T) \frac{\partial N}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i^{n+\theta}}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_{\Omega} N \bar{u}_i^n d\Omega - \gamma \Delta t \int_{\Omega} \frac{N}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} Ng_i d\Omega + \int_{\Gamma} N \left[\frac{\partial \bar{u}_i^{n+\theta}}{\partial x_i} n_i \right]_{\Gamma_j} d\Gamma \quad (2.13)$$

para p^{n+1}

$$\Delta t \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \frac{\partial N}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1} - p^n) d\Omega + \int_{\Gamma} N \left[u_i^* + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (-p^{n+1} + p^n) \right] \Gamma_{\nu} n_i d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial x_i} u_i^* d\Omega \quad (2.14)$$

para \bar{u}_i^{n+1}

$$\int_{\Omega} N \bar{u}_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} N u_i^* d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \frac{N}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1} - p^n) d\Omega \quad (2.15)$$

Si se observa el término de frontera de la ecuación 2.14 y se compara con la ecuación 2.15, se puede escribir lo siguiente:

$$\int_{\Gamma} N \left[u_i^* + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (-p^{n+1} + p^n) \right] n_i d\Gamma = \int_{\Gamma} N [\bar{u}^{n+1}]_{\Gamma_{\nu}} n_i d\Gamma \quad (2.16)$$

Cabe mencionar que el valor \bar{u}_i^{n+1} de la ecuación 2.16 es un valor conocido. Considerando que el valor de las variables dentro de los elementos están dadas por:

$$\bar{u}_i^q = \sum_{l=1}^n N_l \bar{u}_i^l \quad (2.17)$$

$$p^q = \sum_{l=1}^n N_l p^l \quad (2.18)$$

donde

n es el número de nodos del elemento

l es el número de nodo

q es el número de elemento

y que las funciones de forma son las mismas que las funciones de peso (método de Galerkin), sustituyendo las ecuaciones 2.17 y 2.18 en las ecuaciones 2.14 a 2.16, se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones escritos en su forma matricial [Del Pin *et al* (2007)]:

$$Mu_i^* + \Delta t K \bar{u}_i^{n+\theta} = M \bar{u}_i^n - \gamma \Delta t G p^n + \Delta t F \quad (2.19)$$

$$\Delta t L p^{n+1} = B u_i^* + \gamma \Delta t L p^n - \bar{U} \quad (2.20)$$

$$\bar{M} \bar{u}_i^{n+\theta} = \bar{M} u_i^* - \Delta t G (p^{n+1} - \gamma p^n) \quad (2.21)$$

donde las matrices quedan definidas como:

$$M = \int_{\Omega} N_q N_l d\Omega \quad (2.22)$$

$$L = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial N_q}{\partial x_i} \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (2.23)$$

$$B = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_q}{\partial x_i} N_l \right) d\Omega \quad (2.24)$$

$$G = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho} N_q \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (2.25)$$

$$K = \int_{\Omega} \left((v + v_T) \frac{\partial N_q}{\partial x_i} \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (2.26)$$

$$F = \int_{\Omega} N_q f_i d\Omega \quad (2.27)$$

$$\bar{U} = \int_{\Gamma} N_q u_i^{n+1} n_i d\Gamma \quad (2.28)$$

$$\bar{M}_{ii} = \sum_{j=1}^n M_{ij} \quad (2.29)$$

El sistema de ecuaciones obtenido fue resuelto mediante el software especializado PETSC [Balay *et al* (2004)] y la viscosidad turbulenta ν_T se determinó mediante el modelo de Smagorinsky (ecuación 1.29). Una vez descritas las ecuaciones que representan el flujo, a continuación se describen las ecuaciones que representan el movimiento de los sólidos.

Aplicando la segunda ley de Newton, y considerando al sólido como cuerpo rígido, se pueden utilizar las siguientes ecuaciones [Del Pin *et al* (2007)]:

$$M \frac{Dv_i}{Dt} = F_i \quad (2.30)$$

$$I_i \frac{D\Omega_i}{Dt} + \epsilon_{ijk} e_i \Omega_j (I_k \Omega_k) = T_i \quad (2.31)$$

donde

v es la velocidad del sólido

M es la masa del cuerpo

I es el momento de inercia

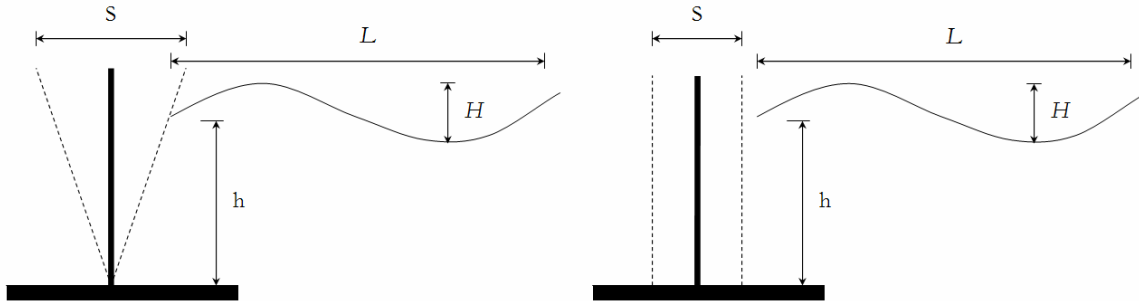
Ω es la velocidad angular con respecto al centro de gravedad

ϵ es el símbolo de permutación

e es una base ortogonal de vectores unitarios

Las ecuaciones 2.30 y 2.31, pueden ser resueltas mediante el algoritmo de Newmark [Zienkiewicz y Taylor (2000)]. En este trabajo, la generación del oleaje se hizo a través de batidor plano, considerándolo como un generador de tipo pistón para la generación de oleaje en aguas poco profundas, y como un generador articulado para la simulación de aguas profundas (ver figura 2.11); es importante señalar que las velocidades (que son la condición de frontera, ecuación 2.20) y la posición son conocidas durante todo el tiempo de simulación, por lo que no es necesario resolver las ecuaciones anteriores. Las ecuaciones del

movimiento del batidor plano articulado utilizadas en este trabajo se basan en la teoría lineal [Dean y Dalrymple (1984)], mientras que las del batidor plano de pistón se basan en la teoría Cnoidal [Zhang (2005)].



2.11 Batidor plano para la generación de oleaje
(izquierda batidor articulado; derecha batidor de pistón) [Vergara (1993)]

Apoyándose en la teoría lineal, Dean y Dalrymple(1984) caracterizan la posición del batidor plano mediante la siguiente ecuación:

$$X(t) = \frac{S(z)}{2} \sin(\sigma t) \quad (2.32)$$

donde

X es la posición del batidor en el tiempo t

$S(z)$ es una función que representa la variación del desplazamiento S (ver figura 2.11) del batidor con respecto a la profundidad z , para un batidor de pistón:

$$S(z) = S \text{ (permanece constante)} \quad (2.33)$$

y para un batidor articulado:

$$S(z) = S \left(1 + \frac{z}{h}\right) \quad (2.34)$$

h representa el tirante de agua

σ es la frecuencia del batidor

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \quad (2.35)$$

T es el periodo del movimiento del batidor (y del oleaje generado)

De las ecuaciones 2.24 y 2.25, la única incógnita que queda por definir es la magnitud del parámetro S , que desde luego está en función de las características de oleaje que se desea generar, para un batidor articulado dicha relación es la siguiente:

$$\frac{H}{S} = 4 \frac{\sinh(kh)}{kh} \frac{kh \sinh(kh) - \cosh(kh) + 1}{\sinh(2kh) + 2kh} \quad (2.36)$$

para un batidor de pistón:

$$\frac{H}{S} = \frac{2 \cosh(2kh) - 2}{\sinh(2kh) + 2kh} \quad (2.37)$$

donde

k es el número de la ola

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (2.38)$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (3.39)$$

L es la longitud de ola

Las ecuaciones 2.24 a 2.31 relacionan el movimiento del batidor en función de las características del oleaje que se desea generar. Es importante señalar que para determinado tirante de agua (h) existe una altura máxima posible de generar. Dicha relación está representada gráficamente en Vergara(1993).

Por otra parte, la velocidad del desplazamiento puede obtenerse derivando la ecuación 2.24, pero como se conoce la posición del siguiente paso de tiempo, es conveniente (como se verá al final del capítulo) calcular la velocidad mediante la siguiente ecuación:

$$v_b = \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} \quad (2.40)$$

dónde

v_b es la velocidad del batidor

Por otra parte, la ecuación de la posición del batidor de pistón expresada mediante la teoría Cnoidal se escribe como [Zhang (2005)]:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{c\eta(X(t),t)}{h + \eta(X(t),t)} \quad (2.41)$$

donde

h es el tirante de agua

η es la elevación de la superficie libre del agua

$$\eta = \eta_{\min} + Hcn^2(\theta, m) \quad (2.42)$$

$$\theta = 2K(m) \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) \quad (2.43)$$

η_{\min} es la elevación del valle de la ola

$$\eta_{\min} = H \left[\frac{1}{m} \left(1 - \frac{E(m)}{K(m)} \right) - 1 \right] \quad (2.44)$$

m es un parámetro elíptico $0 < m < 1$, si $m = 0$ el perfil de la ola es senoidal, si $m = 1$ corresponde a una ola solitaria

$cn(\theta, m)$ es el coseno elíptico Jacobiano

$$cn(\theta, m) = \sqrt{1 - sn^2(\theta, m)} \quad (2.45)$$

$$sn^{-1}(\theta, m) = F(\theta, m) \quad (2.46)$$

$F(\theta, m)$ es la integral elíptica incompleta de primera especie

$$F(\theta, m) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = \int_0^{\operatorname{sen} \theta} \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - m^2 w^2)}} \quad (2.47)$$

H es la altura de la ola

$K(m)$ es la integral elíptica completa de primera especie

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - m^2 w^2)}} \quad (2.48)$$

$E(m)$ es la integral elíptica completa de segunda especie

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \sqrt{(1 - w^2)(1 - m^2 w^2)} dw \quad (2.49)$$

c es la celeridad de la ola

$$c = \sqrt{gh \left[1 + \frac{H}{h} A(m) \right]} \quad (2.50)$$

$$A(m) = \frac{2}{m} - 1 - \frac{3E(m)}{mK(m)} \quad (2.51)$$

El valor del parámetro m , se obtiene con ayuda del número de Ursell U_r , que se expresa como:

$$U_r = \frac{HL^2}{h^3} = \frac{16}{3} mK^2(m) \quad (2.52)$$

donde

L es la longitud de la ola

$$L = T \sqrt{gh \left[1 + \frac{H}{h} A(m) \right]} \quad (2.53)$$

De la ecuación 2.29 puede escribirse:

$$v_b = \frac{dX(t)}{dt} = \frac{c\eta(X(t),t)}{h + \eta(X(t),t)} \quad (2.54)$$

En este trabajo, antes de iniciar la simulación, se conocía la posición del batidor durante el periodo de la ola, por lo que se utilizó la ecuación 2.40 para determinar las velocidades \bar{u}^{n+1} en el tiempo $t + \Delta t$. Conocidas las velocidades del sólido, se debe cumplir la siguiente condición en la interfase fluido-sólido:

$$u_i = v_i$$

donde

v_i es la velocidad del sólido

Por lo que se tienen dos subsistemas, F (fluido) y S (sólido), mismos que pueden expresarse como:

$$F(u_i^{n+1}, p^{n+1}, x_f^{n+1}, v_i^{n+1}, x_s^{n+1}) = 0 \quad (2.55)$$

$$S(v_i^{n+1}, x_s^{n+1}, u_i^{n+1}, p^{n+1}, x_f^{n+1}) = 0 \quad (2.56)$$

En las ecuaciones anteriores solo se busca el valor de las variables en el tiempo $n + 1$, estas dos ecuaciones pueden resolverse mediante el método de Gauss-Seidel, y se puede expresar como:

$$\left(u_{k+1}^{n+1}, p_{k+1}^{n+1}, x_{f,k+1}^{n+1}\right) = F\left(u_k^{n+1}, p_k^{n+1}, x_k^{n+1}, v_i^{n+1}, x_s^{n+1}\right) = 0 \quad (2.57)$$

$$\left(v_{k+1}^{n+1}, x_{s,k+1}^{n+1}\right) = S\left(v_k^{n+1}, x_{s,k}^{n+1}, u_i^{n+1}, p^{n+1}, x_f^{n+1}\right) = 0 \quad (2.58)$$

donde

k es el índice de la iteración

x_s^{n+1} es la posición del sólido (nodo) en el tiempo $t = t + \Delta t$

x_f^{n+1} es la posición del fluido (nodo) en el tiempo $t = t + \Delta t$

Para terminar con el proceso iterativo, basta que la diferencia entre velocidades \bar{u}^{n+1} y \bar{u}^n sea menor a cierta tolerancia. Finalmente, una vez determinado el valor de las velocidades, el paso cuatro de la solución de un problema de flujo mediante el PFEM, consiste en mover los nodos (del sólido y del fluido) mediante la siguiente ecuación:

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \bar{u}_i^{n+1} \Delta t \quad (2.59)$$

La ecuación anterior es la razón por la cual se eligió la forma de la ecuación 2.40, ya que garantiza que los nodos que conforman al batidor se muevan a la posición deseada. Por otra parte, es importante señalar que el Δt debe escogerse de tal forma que el batidor toque los extremos de la posición ó dicho de otra forma que el tiempo t pase por los múltiplos enteros del periodo ($t = nT$, siendo n un entero positivo).

2.5.1 Estabilización de la condición de incompresibilidad. Método del Cálculo Finito (FIC).

La solución mediante elementos finitos de las ecuaciones RANS requiere el uso de procedimientos de estabilización de las inestabilidades generadas por los términos advectivos (solo en su forma euleriana) y por la condición de incompresibilidad (discretización espacial). Las inestabilidades generadas por el cálculo de la condición de compresibilidad puede tratarse modificando las ecuaciones 1.13 y 1.16 mediante el FIC [Oñate y Manzan (1999); Idelsohn *et al* (2003b); Oñate *et al* (2004); Oñate *et al* (2006); Oñate *et al* (2006b); García *et al* (2007)]. El método FIC se basa en hacer balance de flujos en un dominio de fluido finito. Esto introduce términos adicionales en las ecuaciones clásicas que están en función de las dimensiones del dominio de balance.

La ecuaciones 1.13 y 1.16 expresadas mediante la formulación FIC [Oñate *et al* (2004)] son las siguientes:

$$r_d - \frac{1}{2} h_j \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad (2.60)$$

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} h_j \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.61)$$

donde

r_d representa el residuo de la ecuación de conservación de masa, o dicho de otra forma

$$r_d = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \quad (2.62)$$

Si el fluido es incompresible la ecuación anterior puede escribirse como:

$$r_d = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \quad (2.63)$$

r_{m_i} representa el residuo de la ecuación de cantidad de movimiento, o dicho de otra forma

$$r_{m_i} = \frac{D\bar{u}_i}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left((v + v_T) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - g_i \quad (2.64)$$

h_j es la longitud característica del elemento sobre el cual se hace el balance de las ecuaciones 2.6 y 2.7

Si los valores dx_i son infinitesimales, los valores de r_{m_i} y r_d en las ecuaciones son cero, por lo que las ecuaciones 2.63 y 2.64 equivalen a las ecuaciones 1.13 y 1.16 respectivamente. El término subrayado en la ecuación 2.60, puede representarse en función del residuo de la ecuación de cantidad de movimiento (r_{m_i}), de tal forma que la ecuación 2.60 puede escribirse como [Idelsohn *et al* (2003b); Oñate *et al* (2004)]:

$$r_d - \sum_{i=1}^{n_d} \tau_i \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.65)$$

donde

n_d es el número de dimensiones del problema, con $d = 1,2,3$

τ_i es un parámetro de especialización denominado *parámetro de tiempo intrínseco* e igual a

$$\tau_i = \frac{3h_i^2}{8\mu} \quad (2.66)$$

Otros valores equivalentes a la ecuación 2.12, han sido utilizados para estabilizar las ecuaciones NS y las ecuaciones de advección-difusión [Codina (2002); Zienkiewicz y Taylor (2000)]. Para simplificar el cálculo del residuo r_{m_i} , se puede escribir éste en función de las proyecciones del gradiente de presión π_i :

$$\pi_i = r_{m_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (2.67)$$

La sustitución de la ecuación 2.67 en la ecuación 2.65 introduce nuevas variables, por lo que se debe incrementar el número de ecuaciones a resolverse. Imponiendo nulo el residuo r_{m_i} sobre el dominio de análisis, se obtiene que:

$$\int_{\Omega} N_l \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \pi_i \right) d\Omega = 0 \quad (2.68)$$

donde

Ω es el dominio de cálculo

en una forma más compacta, el término π_i puede escribirse como:

$$\pi_i = N_l \Pi \quad (2.69)$$

donde Π representa el valor local de las tres componentes de la proyección del gradiente de presión, por lo que la ecuación 2.68 la representa un sistema de ecuaciones de la forma:

$$M\Pi + B^T p = 0 \quad (2.70)$$

Con esto, la ecuación 2.9 puede ahora modificarse para incluir los términos de estabilización, de tal forma que resulta lo siguiente:

$$\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1} - \gamma p^n) = \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} + \frac{\tau_i}{\Delta t} \frac{\partial r_i}{\partial x_i} \quad (2.71)$$

y la ecuación 2.11 puede escribirse como:

$$\Delta t \int_{\Omega} \frac{N}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1} - \gamma p^n) d\Omega = \int_{\Omega} N \frac{\partial}{\partial x_i} u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} N \frac{\tau_i}{\Delta t} \frac{\partial r_i^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega \quad (2.72)$$

Si se integra por partes la ecuación anterior y se toma en cuenta la ecuación 2.67, resulta la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & -\Delta t \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \frac{\partial N}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1} - \gamma p^n) d\Omega + \int_{\Gamma} N \left[u_i^* + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (-p^{n+1} + \gamma p^n) \right] \Gamma_{\nu} n_i d\Gamma = \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial x_i} u_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial x_i} \frac{\tau_i}{\Delta t} \left(\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \pi_i^{n+1} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} N \left[\frac{\tau_i}{\Delta t} \left(\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \pi_i^{n+1} \right) \right] \Gamma_{\nu} n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (2.73)$$

y expresada en forma matricial, finalmente se tiene:

$$\Delta t (L + L_{\tau}) p^{n+1} = B u_i^* + \gamma \Delta t L p^n - \bar{U} - B_i \Pi^n \quad (2.74)$$

donde

$$B_{\tau} = \int_{\Omega} \frac{\tau_i}{\Delta t} \left(\frac{\partial N_q^{n+1}}{\partial x_i} N_l^{n+1} \right) d\Omega \quad (2.75)$$

$$L_{\tau} = \int_{\Omega} \tau_i \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial N_q^{n+1}}{\partial x_i} \frac{\partial N_l^{n+1}}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (2.76)$$

Por lo que el nuevo sistema de ecuaciones a resolver, lo comprenden las ecuaciones 2.19, 2.21 y 2.74.

Hasta este punto se han explicado las bases teóricas de la hidrodinámica costera (capítulo 2) y el planteamiento de la solución de esas ecuaciones mediante el PFEM. En el capítulo siguiente se muestra la aplicación del PFEM.

CAPÍTULO 3

PRUEBAS Y RESULTADOS

3.1 Introducción

Antes de aplicar el PFEM a la simulación de la zona de rompientes, se muestra un caso de propagación en aguas profundas y un caso de reflexión en una estructura vertical, el primero para mostrar el efecto de la viscosidad numérica en zona de aguas profundas y su influencia en la altura de ola y distribución de velocidades en la vertical, y el segundo para mostrar que se pueden generar olas estacionarias bajo esta formulación. También se presentan algunos casos de oleaje rompiente, utilizando las teorías lineal y cnoidal para determinar el movimiento de los batidores planos y de pistón que generan el oleaje. Finalmente, se muestran la aplicación del PFEM para reproducir la hidrodinámica en la zona de rompientes en 2DV y 3D, y se hacen comparaciones con resultados obtenidos experimentalmente.

3.2 Propagación de oleaje sobre canales de fondo plano

En la figura 3.1 se muestra la geometría del canal de olas usado para la propagación de oleaje en aguas profundas, el canal tiene un tirante de agua de $d = 0.7$ m y el oleaje fue generado mediante un batidor plano articulado. Los parámetros del oleaje utilizados en las ecuaciones 2.32 a 2.39 fueron los siguientes:

$$H = 0.06 \text{ m}$$

$$T = 0.91 \text{ s}$$

$$L = 1.268 \text{ m}$$

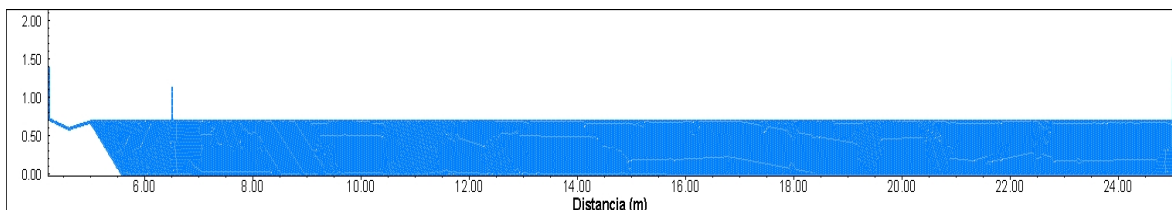


Figura 3.1 Geometría de canal para propagación en aguas profundas

La discretización del dominio de cálculo se hizo mediante 58154 nodos (113572 elementos) con separación media $h_m = 0.017$ m. Las figuras 3.2 muestran la propagación de oleaje con las características mencionadas anteriormente, a primera vista puede observarse que no existe pérdida en la altura de ola después de 22.4 s de simulación, y entrando en detalle, la variación máxima de altura de ola con respecto a la esperada es del 3% y la variación máxima entre dos longitudes de ola fue del 6%; estas pequeñas variaciones pueden deberse a que el batidor no siempre alcanza (por muy poco) los valores máximo y mínimo de su desplazamiento teórico ya que en esta simulación el incremento de tiempo Δt se tomó variable e igual a:

$$\Delta t = \max\left(0.0001, \min\left(\frac{h_{\min}}{u_{\max}}, \frac{h_{\min}}{c}\right)\right) \quad (3.1)$$

donde

c es la celeridad de la ola (m/s)

h_{\min} es la separación mínima entre los nodos

u_{\max} es la velocidad total máxima $\max(u_1, u_2)$

La figura 3.3 muestra la variación vertical de la velocidad horizontal a diferentes posiciones, obtenidos en el tiempo $t = 23.446$ s (ver figura 3.2f). Puede observarse que los resultados obtenidos se aproximan mucho a la solución teórica obtenida mediante la teoría lineal, cuya ecuación es [Vergara (2006)]:

$$u_1 = \frac{H}{2} \sigma e^{ky} \text{sen}(kx - \sigma t) \quad (3.2)$$

donde

$$\sigma \text{ es la frecuencia angular} \quad \sigma = \frac{2\pi}{T} \quad (3.3)$$

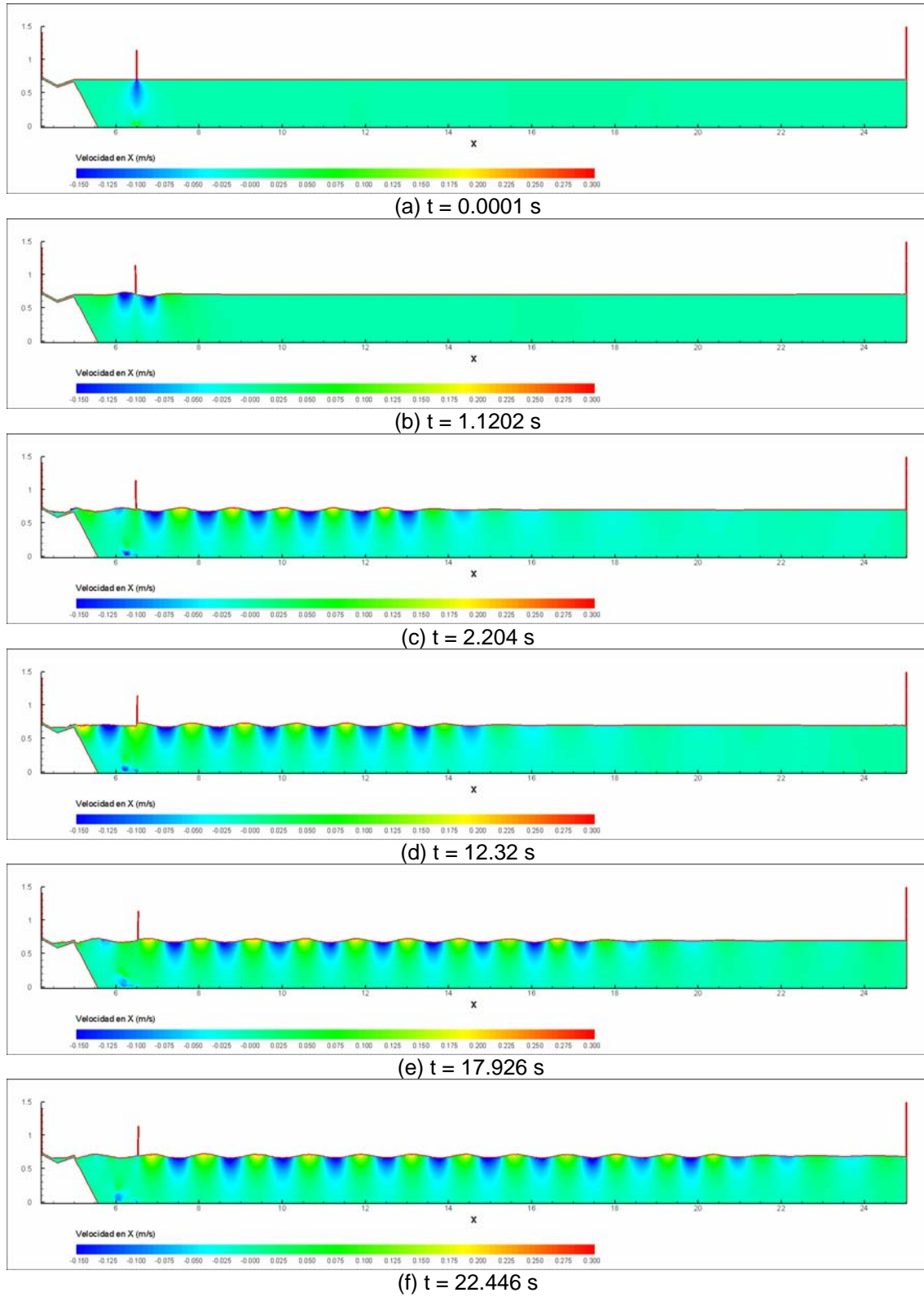


Figura 3.2 Propagación de oleaje en aguas profundas

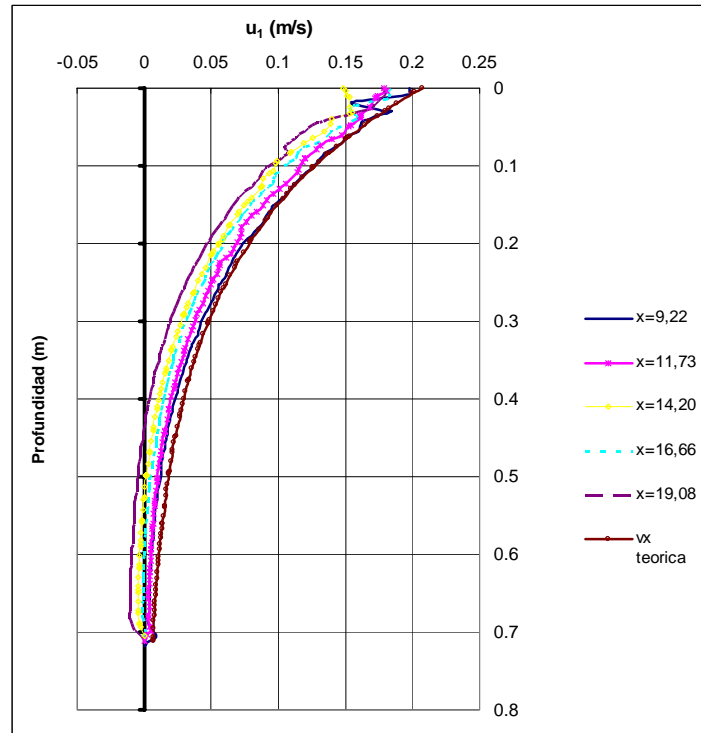


Figura 3.3 Distribución vertical de la velocidad horizontal u_1

En la figura 3.3 se observa que la magnitud de la velocidad disminuye conforme aumenta la distancia al batidor; sin embargo, hasta ese momento aún se sigue transmitiendo energía. Esta velocidad se regularizará si se aumenta el tiempo de simulación y la longitud del canal, además de seleccionar un Δt constante durante la simulación que garantice que el batidor alcance los valores máximos y mínimos de su desplazamiento teórico.

3.2.1 Reflexión en estructuras verticales

Cuando el oleaje entra en la zona cercana a la costa puede ser reflejado por las estructuras de protección o por la playa. La reflexión alcanza un valor máximo cuando las olas chocan con estructuras de paramento vertical, esto puede provocar la generación de olas estacionarias que llegan a alcanzar casi el doble de la altura con la que se cuentan. En la figura 3.4 se muestra la geometría

utilizada para la representación de la reflexión total, el canal tiene un tirante $d = 0.7$, el oleaje fue generado mediante un batidor plano articulado y las características de oleaje incidente fueron las siguientes:

$$H = 0.08 \text{ m}$$

$$T = 0.95 \text{ s}$$

$$L = 1.408 \text{ m}$$

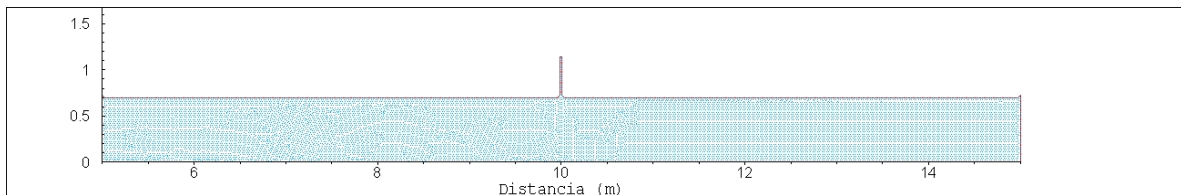
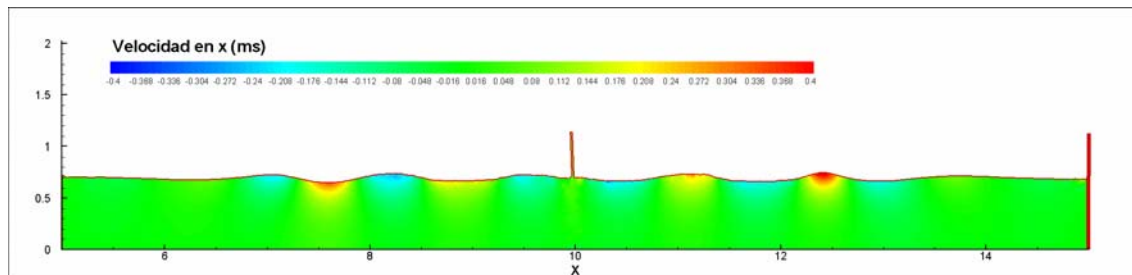
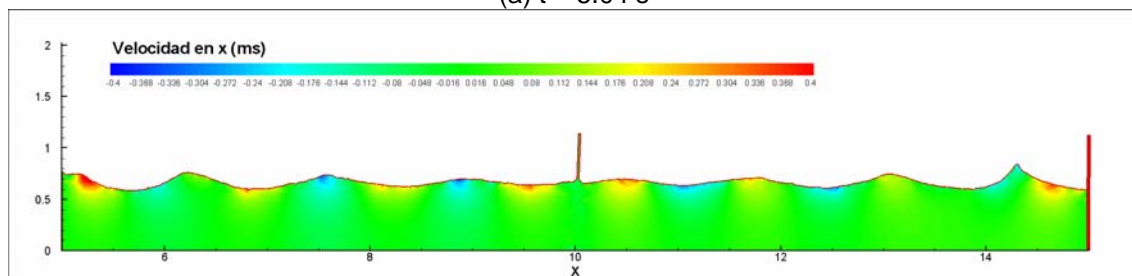


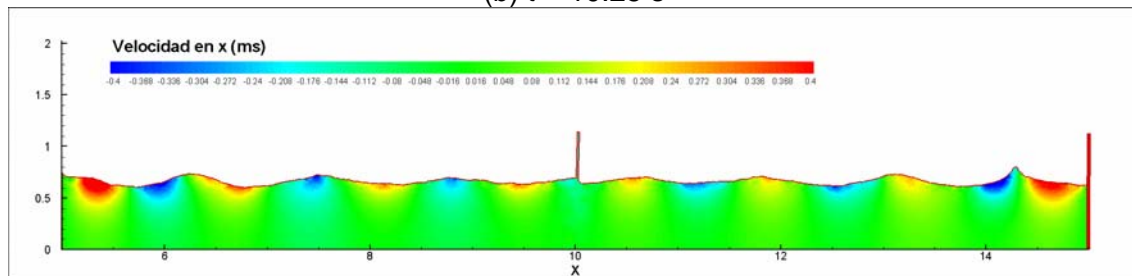
Figura 3.4 Geometría utilizada para el análisis de reflexión total



(a) $t = 5.04 \text{ s}$



(b) $t = 10.25 \text{ s}$



(c) $t = 10.33 \text{ s}$

Figura 3.5 Reflexión del oleaje en estructuras de paramento vertical

El dominio fue discretizado mediante 13697 nodos (26375 elementos), y el Δt se determinó mediante la ecuación 3.1. En las figuras 3.5 se muestra la propagación de oleaje sobre ambas direcciones del eje x, puede observarse que al reflejarse las olas con la pared vertical se producen olas aproximadamente estacionarias, y también se observa claramente un aumento en su altura.

En estas dos pruebas, se ha observado una respuesta eficiente de las técnicas numéricas utilizadas en el PFEM para reproducir la propagación de oleaje en aguas profundas, y la caracterización de la reflexión en estructuras de paramento vertical. En el siguiente inciso se mostrará la respuesta del método numérico para reproducir diferentes tipos de rompiente.

3.3 Rompiente del oleaje

Las simulaciones de este inciso se hicieron en dos partes: en la primera se eligieron condiciones de oleaje y pendientes de playa arbitrarias tomando como punto de partida el número de Irribarren (ecuación 2.10 y tabla 2.1); simulando las rompientes de tipo zambullida, frontal y deslizante, con una separación media de los nodos $h_m = 0.017$ m. En la segunda parte se utilizó la geometría del canal y las condiciones de oleaje utilizadas en los experimentos de Ting y Kirby (1994, 1995, 1996); simulando las rompientes de tipo zambullida y deslizante, con una separación media de los nodos $h_m = 0.016$ m.

La figura 3.6 muestra la geometría utilizada para la simulación de las rompientes de zambullida y frontal, donde la pendiente de la playa tiene un valor de $\tan \beta = 0.25$. Para ambos casos, la generación de oleaje se hizo a través de un batidor plano articulado, con un tirante de agua $d = 0.7$ en la zona de generación, y el dominio de cálculo fue discretizado mediante 18378 nodos (35801 elementos). Las características del oleaje generado son las siguientes:

para la rompiente de zambullida

$$H = 0.30 \text{ m}$$

$$T = 2.20 \text{ s}$$

$$L_0 = 7.55 \text{ m}$$

$$I_r = \frac{\tan \beta}{\sqrt{H/L_0}} = 1.25$$

y para la rompiente frontal

$$H = 0.125 \text{ m}$$

$$T = 2.20 \text{ s}$$

$$L_0 = 7.55 \text{ m}$$

$$I_r = \frac{\tan \beta}{\sqrt{H/L_0}} = 1.94$$

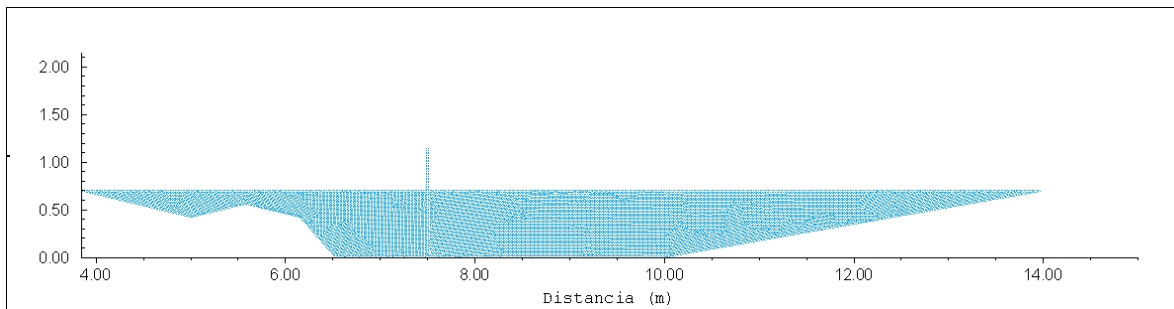
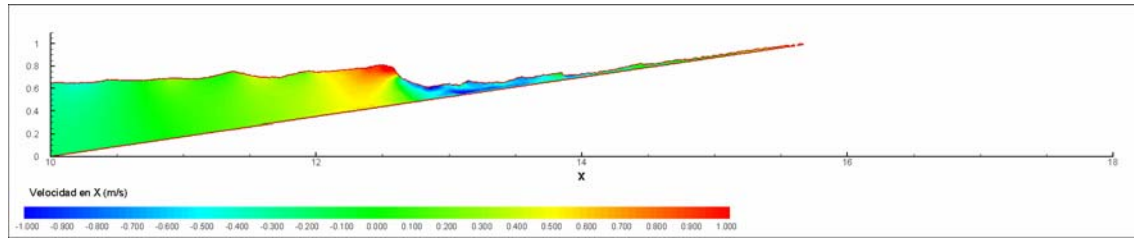
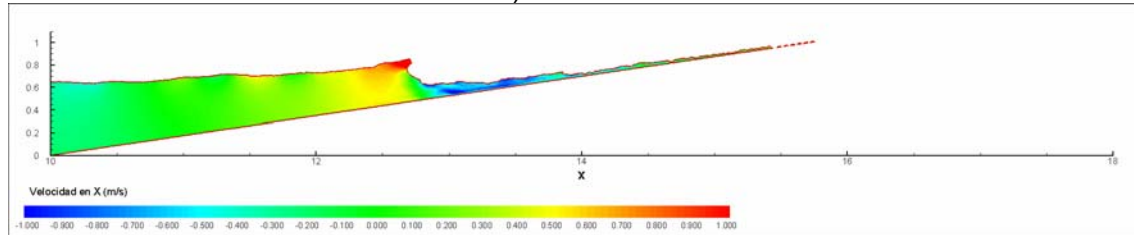


Figura 3.6 Canal de oleaje con pendiente de playa igual a 0.25

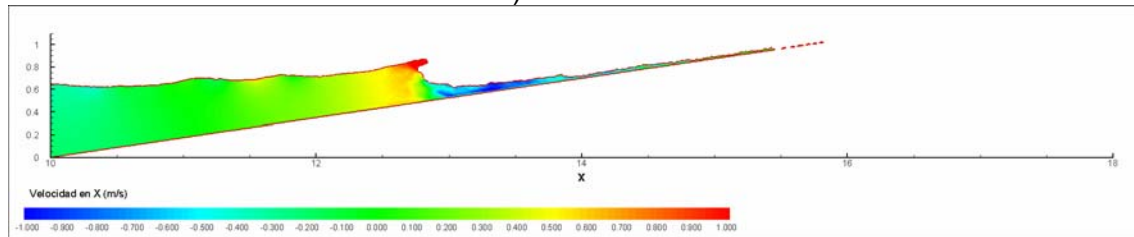
En las figuras 3.7 y 3.8 se muestran las formas de rompiente obtenidas mediante la transformación del oleaje mencionado anteriormente. Las ondulaciones que se muestran en la superficie libre se deben a la reflexión del oleaje en la playa y a que el Δt se calculo de acuerdo a la ecuación 3.1 y como en el caso de propagación de aguas profundas, el batidor no siempre toca el extremo de su desplazamiento total.



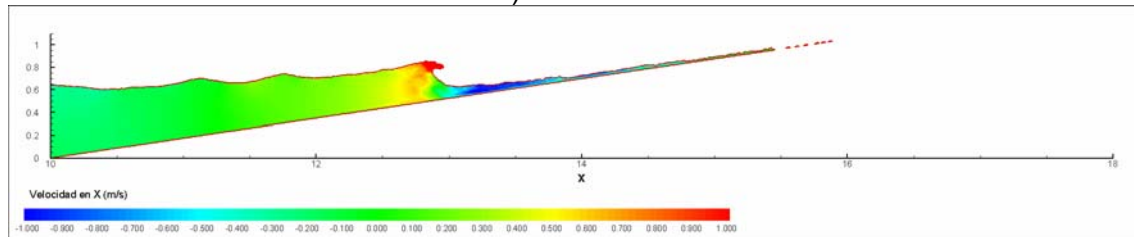
a) $t=9.522$ s



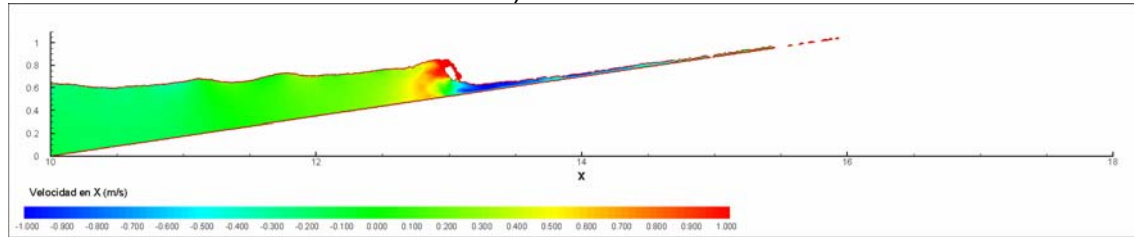
b) $t=9.600$ s



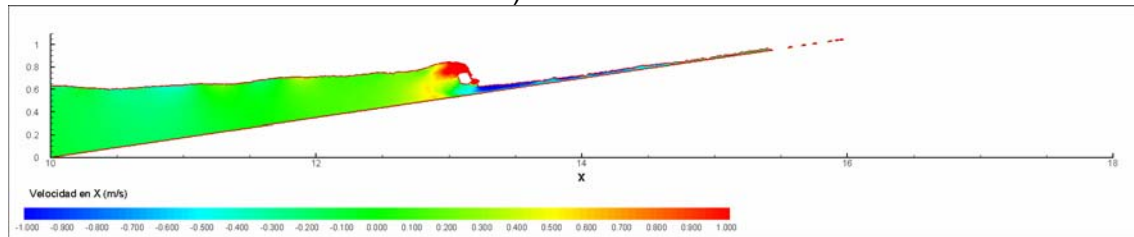
c) $t=9.682$ s



d) $t=9.764$ s

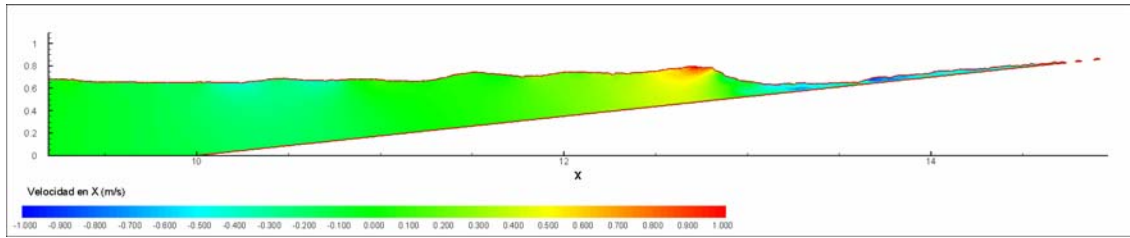


e) $t=9.844$ s

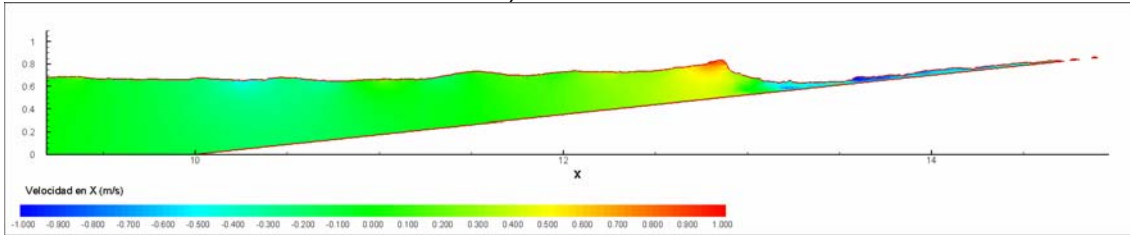


f) $t=9.921$ s

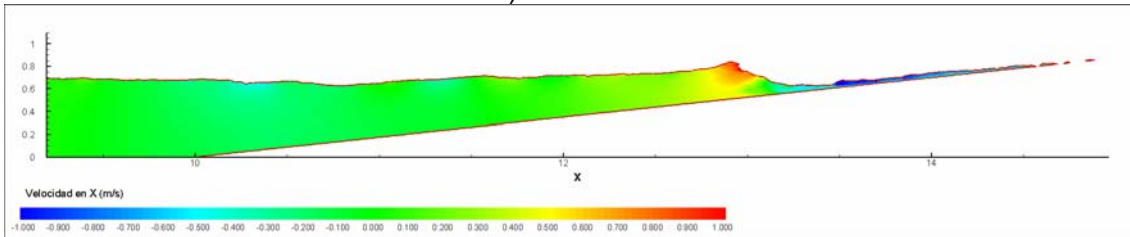
Figura 3.7 Rompiente tipo zambullida $Ir = 1.25$



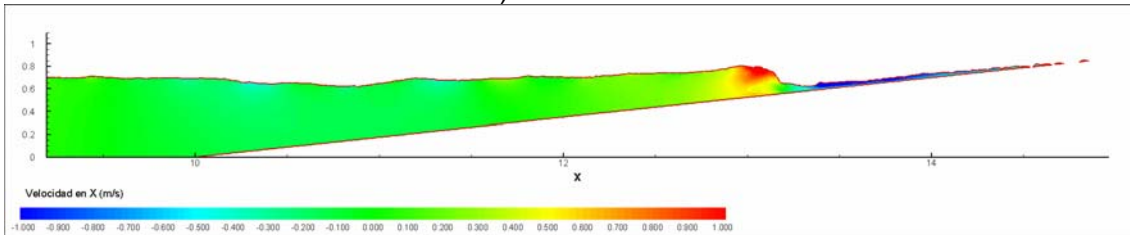
a) $t=9.845$ s



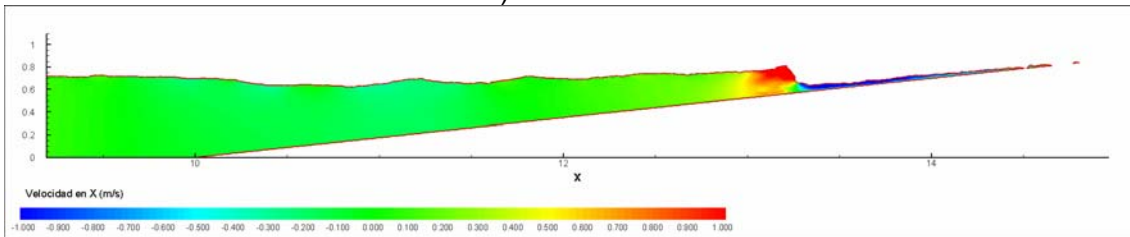
b) $t=9.928$ s



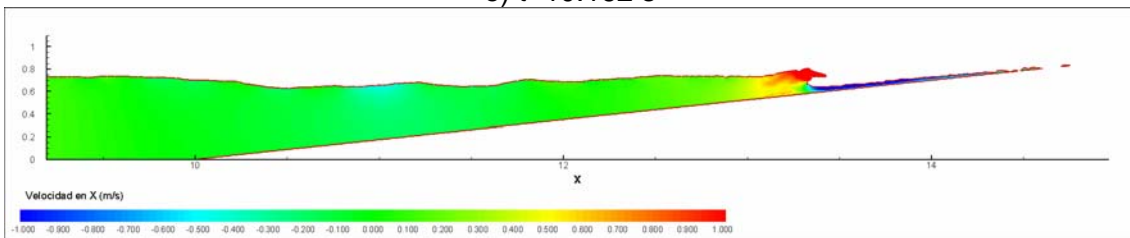
c) $t=10.005$ s



d) $t=10.083$ s



e) $t=10.162$ s



f) $t=10.245$ s

Figura 3.8 Rompiente tipo frontal $Ir = 1.94$

En la figura 3.9 se muestra la geometría utilizada para la simulación de la rompientes de tipo deslizante, donde la pendiente de la playa tiene un valor de $\tan \beta = 0.125$. La generación de oleaje se hizo a través de un batidor plano articulado, con un tirante de agua $d = 0.7$ m en la zona de generación, y el dominio de cálculo fue discretizado mediante 26279 nodos (50248 elementos). Las características del oleaje generado son las siguientes:

$$H = 0.12 \text{ m}$$

$$T = 0.91 \text{ s}$$

$$L_0 = 1.292 \text{ m}$$

$$I_r = \frac{\tan \beta}{\sqrt{H/L_0}} = 0.41$$

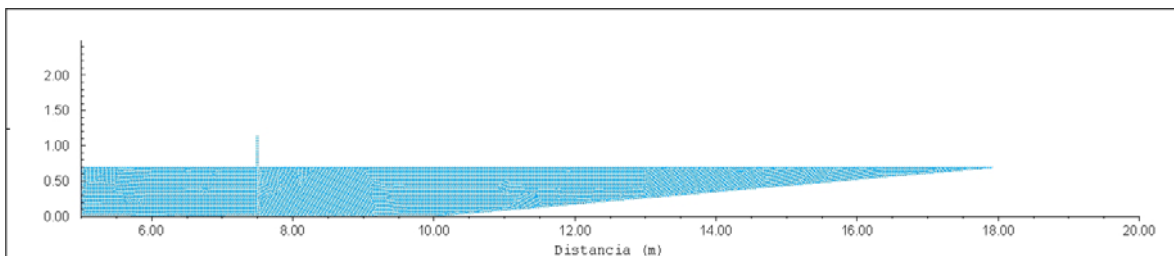
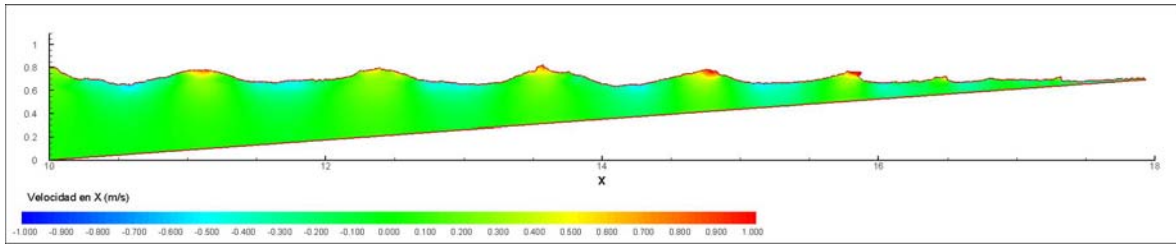


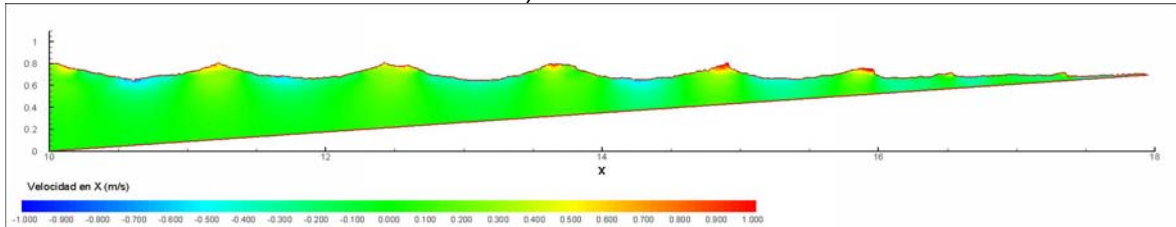
Figura 3.9 Canal de oleaje con pendiente de playa igual a 0.125

En las figuras 3.10 se observa la evolución de la rompiente de deslizamiento, e igualmente que en los casos anteriores, las uniformidades de la superficie libre se deben a la reflexión y a que el generador no siempre alcanza los valores de desplazamiento esperado.

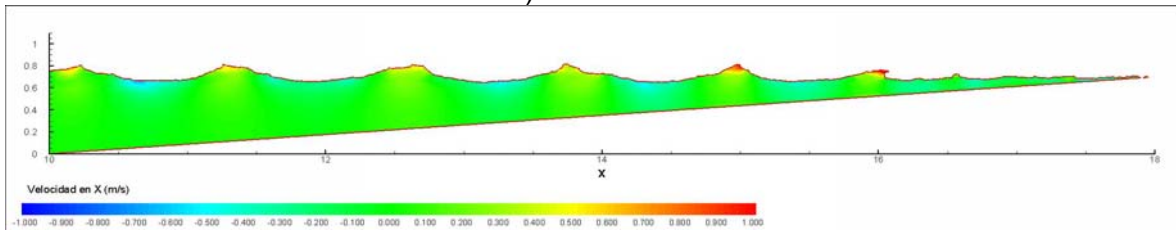
Hasta ahora, solo se han mostrado simulaciones donde la generación de oleaje se hace por medio de un batidor articulado y el movimiento del mismo es mediante la teoría lineal. A continuación, se presentan simulaciones donde la generación de oleaje es mediante un batidor de pistón, su movimiento lo rige la teoría cnoidal, y el Δt se escogió de tal forma que el generador pasar por los valores máximos y mínimos de su desplazamiento teórico.



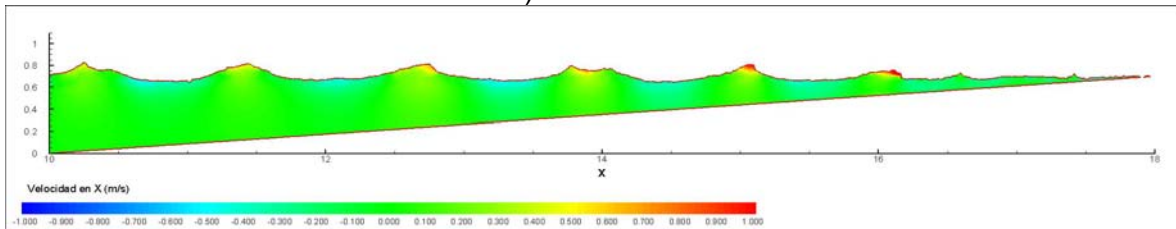
a) $t = 16.083$ s



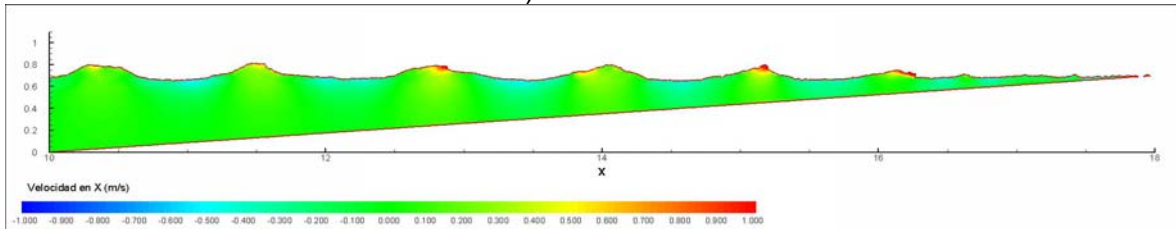
b) $t = 16.161$ s



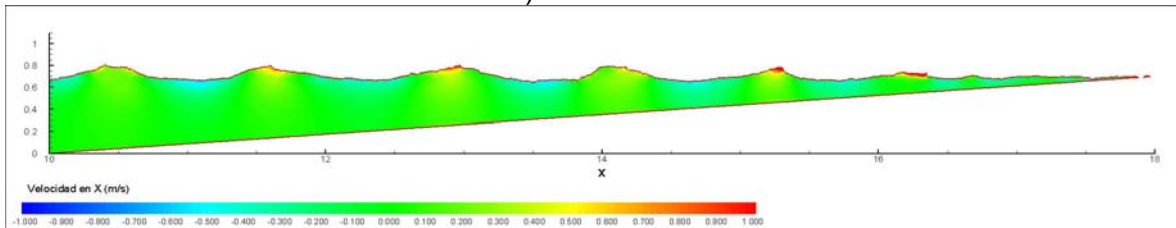
c) $t = 16.244$ s



d) $t = 16.320$ s



e) $t = 16.404$ s



f) $t = 16.485$ s

Figura 3.10 Rompiente tipo deslizante $Ir = 0.41$

En los ejemplos anteriores, las condiciones geométricas del canal y el oleaje generado fueron escogidas arbitrariamente, pero también es importante comparar las formas de rompiente bajo condiciones controladas; para ello, en este trabajo se reprodujeron numéricamente los experimentos de Ting y Kirby (1994, 1995, 1996). En dichos experimentos, se midieron velocidades horizontales y verticales, así como también la variación de la superficie libre en diferentes posiciones del canal para olas que se transformaban en rompiente tipo zambullida y deslizante. La figura 3.11 muestra la geometría del canal utilizado en los experimentos, en la cual se observa un tirante de agua de $d = 0.4$ m en la zona de generación, una pendiente de playa igual $\tan \beta = 1/35$ y un generador de oleaje de tipo pistón. Las características de oleaje (teoría cnoidal) que se utilizaron fueron las siguientes: $H = 0.128$ m y $T = 5.0$ s para la rompiente tipo zambullida; $H = 0.125$ m y $T = 2.0$ s para la rompiente tipo deslizante.

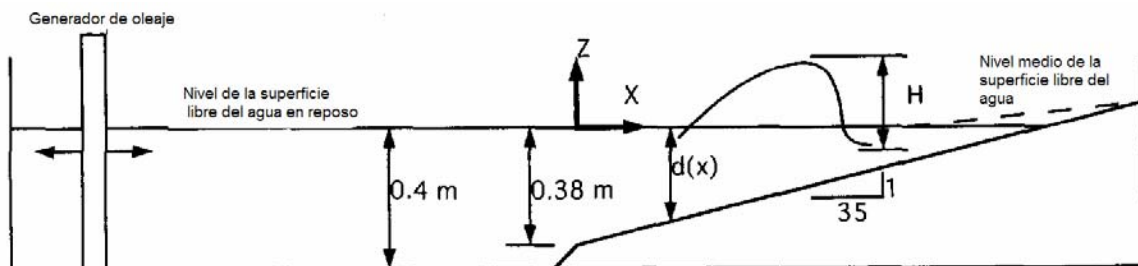


Figura 3.11 Geometría del canal utilizado por Ting y Kirby (1994), Ting y Kirby (1995), Ting y Kirby (1996)

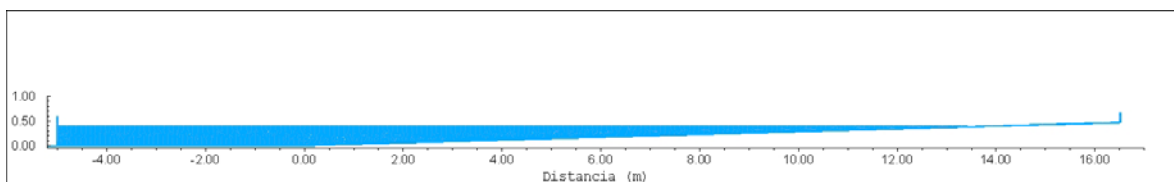


Figura 3.12 Distribución de nodos que representan los experimentos de Ting y Kirby (1994), Ting y Kirby (1995), Ting y Kirby (1996)

Para reproducir los experimentos, el dominio de cálculo fue discretizado mediante 37434 nodos (71048 elementos) con una separación media de $h_m = 0.016$ (ver figura 3.12), y el incremento de tiempo se tomó constante $\Delta t = 0.005$ s durante el tiempo de simulación. Nótese que este valor de Δt garantiza que el generador alcance los valores extremos de su desplazamiento. Como se mencionó en el capítulo anterior, antes de iniciar la simulación es posible conocer la posición del batidor para todo el tiempo de simulación. Las figuras 3.13 y 3.14 muestran el movimiento impuesto como condición de frontera para reproducir las rompientes de tipo zambullida y deslizante respectivamente.

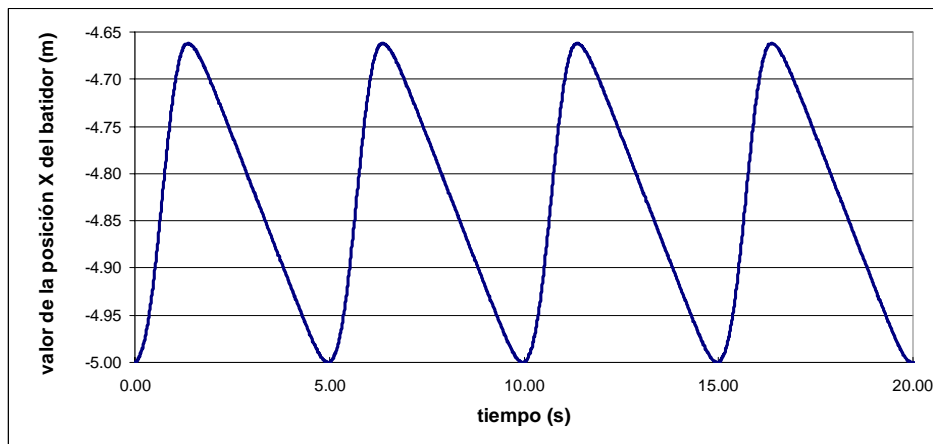


Figura 3.13 Posición del batidor plano para la generación de oleaje con las siguientes características $H = 0.128$ m, $T = 5.0$ s, $d = 0.4$ m mediante teoría Cnoidal

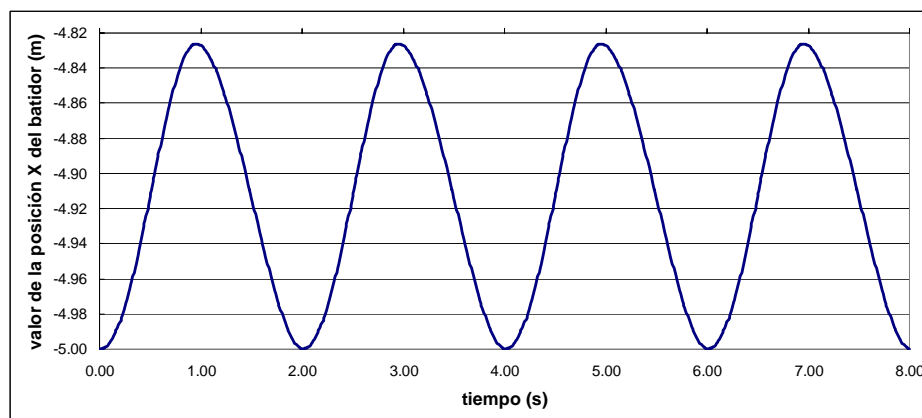


Figura 3.14 Posición del batidor plano para la generación de oleaje con las siguientes características $H = 0.125$ m, $T = 2.0$ s, $d = 0.4$ m mediante teoría Cnoidal

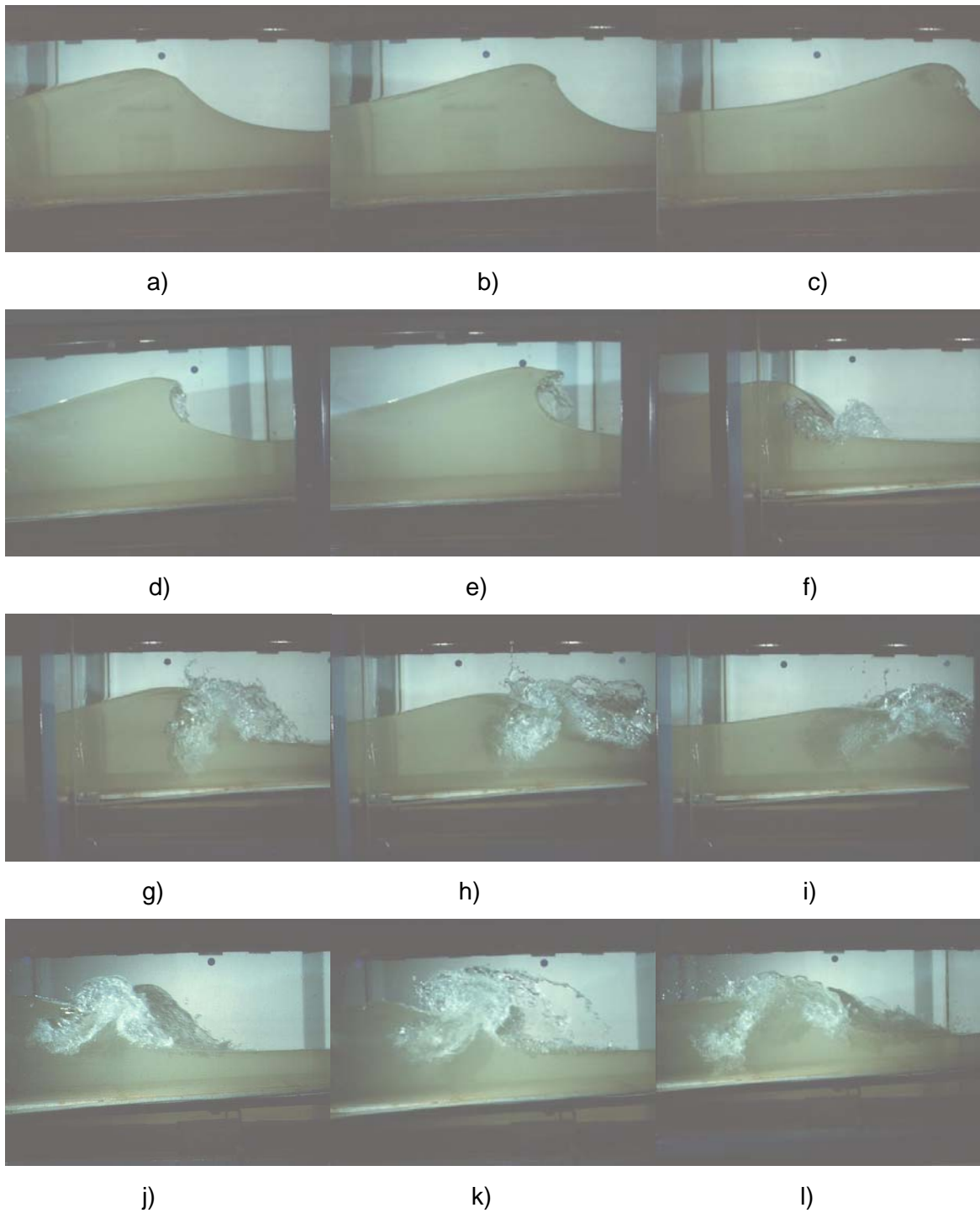


Figura 3.15 Rompiente tipo zambullida obtenida experimentalmente
[Ting y Kirby (1994); Ting y Kirby (1995)]

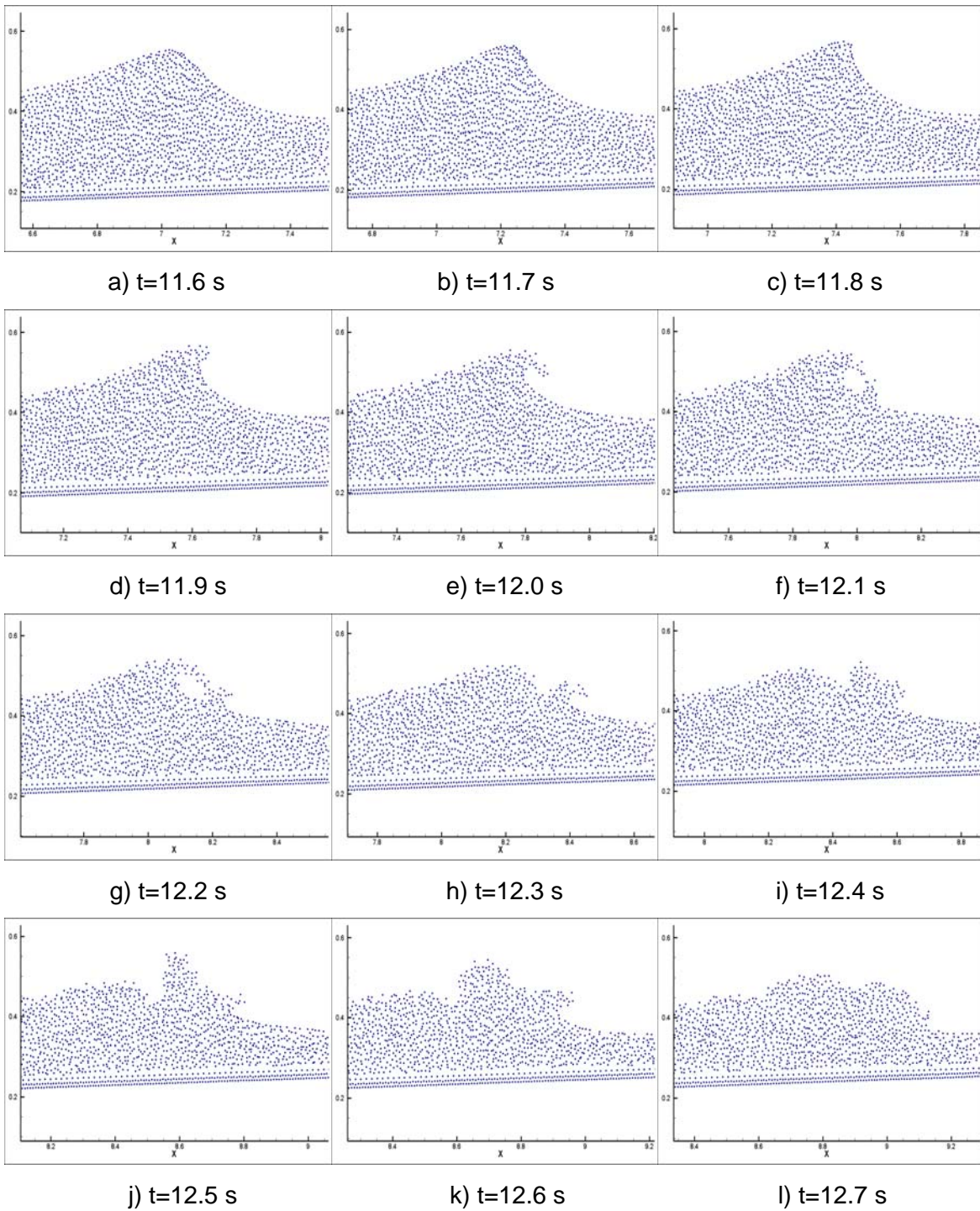


Figura 3.16 Rompiente tipo zambullida obtenida mediante el PFEM

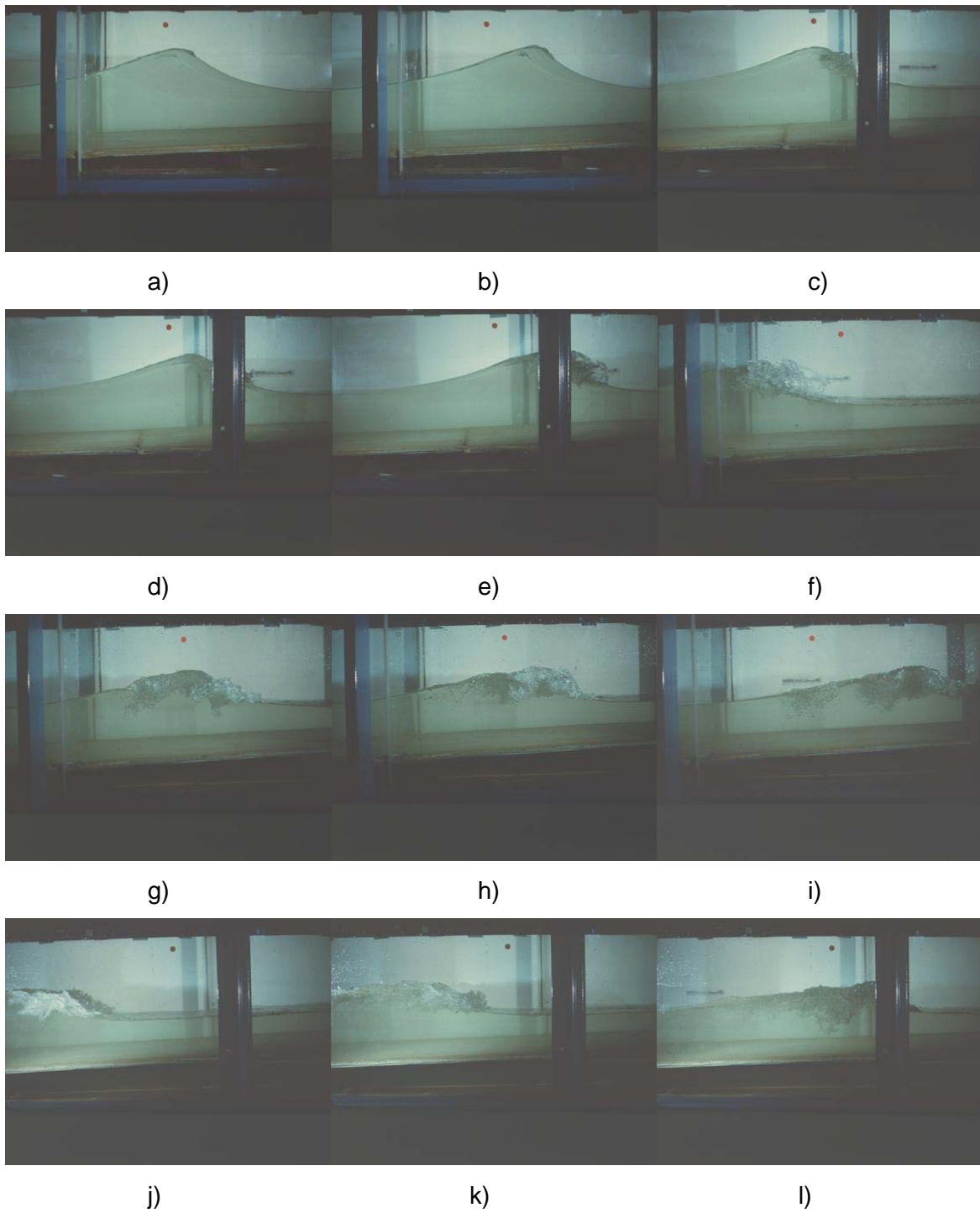


Figura 3.17 Rompiente tipo deslizante obtenida experimentalmente
[Ting y Kirby (1994); Ting y Kirby (1996)]

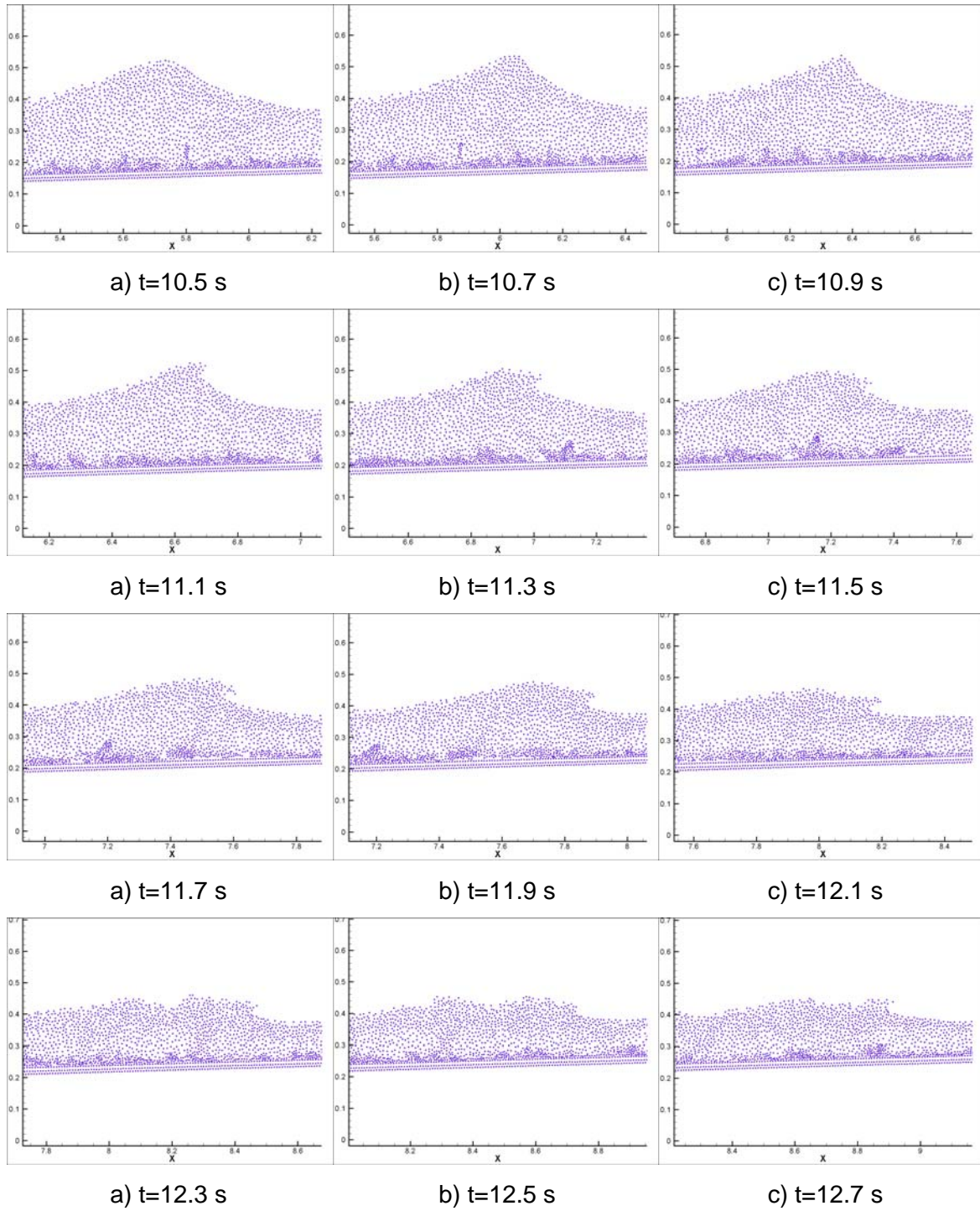


Figura 3.18 Rompiente tipo deslizante obtenida mediante el PFEM

En las figuras 3.15 y 3.17 se muestra la evolución de las rompientes de tipo zambullida y deslizante obtenidas experimentalmente por Ting y Kirby (1994), Ting y Kirby (1995) y Ting y Kirby (1996), y en las figuras 3.16 y 3.18 se muestra la evolución de dichas rompientes obtenidas mediante el PFEM, estas últimas pareciéndose a las primeras a pesar de la poca densidad de nodos en la zona graficada.

En este inciso se ha visto que el método numérico reproduce adecuadamente los tipos de rompiente bajo diversas geometrías y condiciones de oleaje; cabe mencionar que en este inciso sólo se analizó la forma geométrica de la rompiente, y en el siguiente inciso se analizan las variaciones de velocidad y de superficie libre.

3.4 Corrientes litorales

El primer caso que se aborda, es el de rompiente tipo zambullida [Ting y Kirby (1995)] y las condiciones de oleaje en la zona de generación se mostraron en la figura 3.12. En este caso se comparó el nivel de la superficie libre y los perfiles de velocidad medidos experimentalmente por Ting y Kirby (1995) contra los obtenidos en este trabajo mediante el PFEM. Para realizar dichas comparaciones se escogieron cinco secciones de control con posiciones $x = -1.5$, $x = 7.795$, $x = 8.345$, $x = 8.795$ y $x = 9.295$; en la primera de dichas secciones Ting y Kirby (1995) reportan mediciones del nivel de la superficie libre del agua η , mientras que en las cuatro restantes reportan tanto mediciones del nivel de la superficie libre del agua η como también de la componente horizontal de la velocidad u_1 . En la figura 3.19 se muestra la variación espacial y temporal de la posición de la superficie libre del agua η , así como también de la componente horizontal de la velocidad u_1 , calculadas mediante el PFEM, puede observarse en la figura que los valles son casi planos. Por otra parte, en esa figura también se muestran líneas

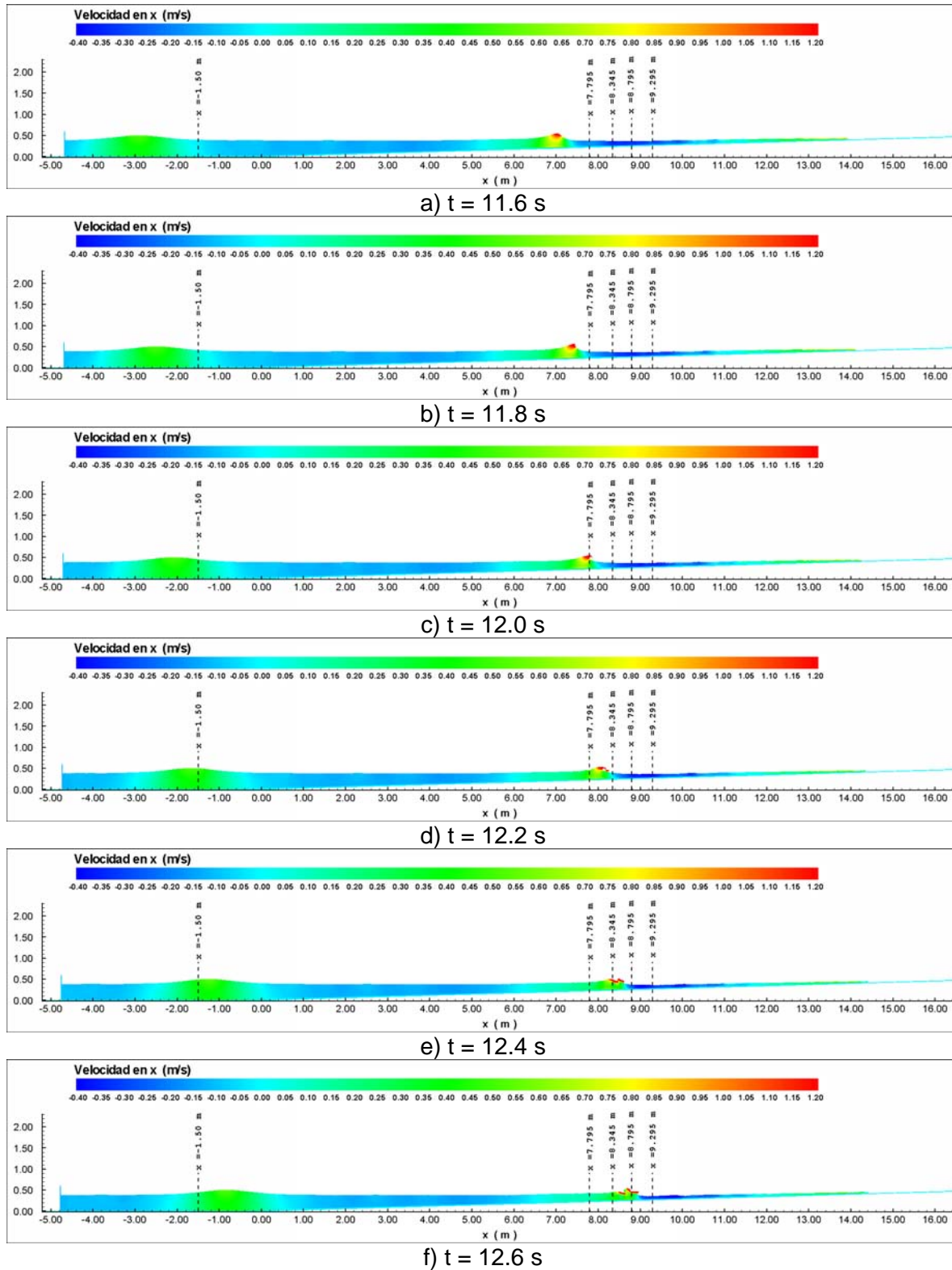


Figura 3.19 Variación espacial y temporal de la velocidad horizontal u_1 y de la superficie libre, y ubicación de las zonas de control; condiciones de oleaje de la figura 3.13

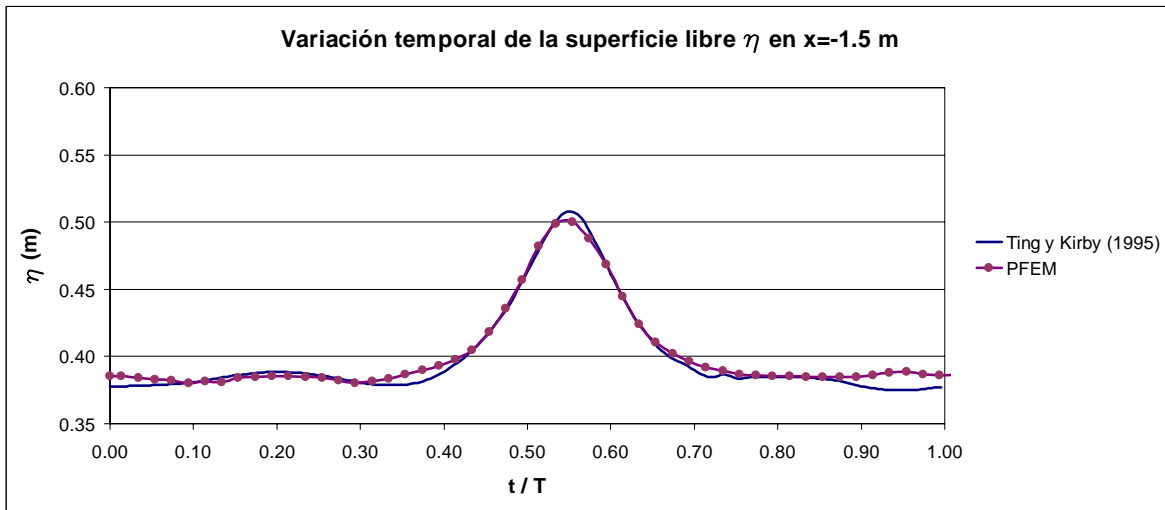


Figura 3.20 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = -1.5$ (figura 3.19)

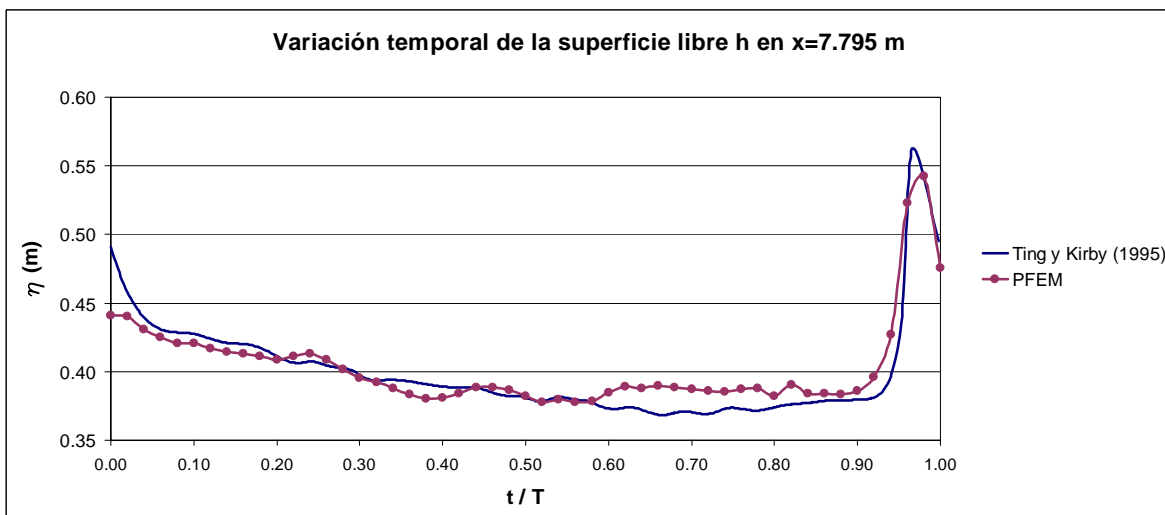


Figura 3.21 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 7.795$ (figura 3.19)

punteadas que indican la posición de las secciones de control de las que se tienen datos experimentales medidos, y en las cuales se extrajeron los datos calculados. En las figuras 3.20 a 3.24 se muestra la comparación entre los niveles de la superficie libre del agua medidos y calculados para las cinco secciones de control, mostrando un buen grado de aproximación. Es importante mencionar que los valores medidos que se muestran en las gráficas son un promedio temporal de los valores para una fase dada (ver ecuación 2.12), mientras que, respecto a los datos calculados únicamente se muestra el valor obtenido durante un periodo de tiempo. Puede observarse que en las figuras 3.22 a 3.24 se presentan oscilaciones del nivel de la superficie libre del agua, pero también puede

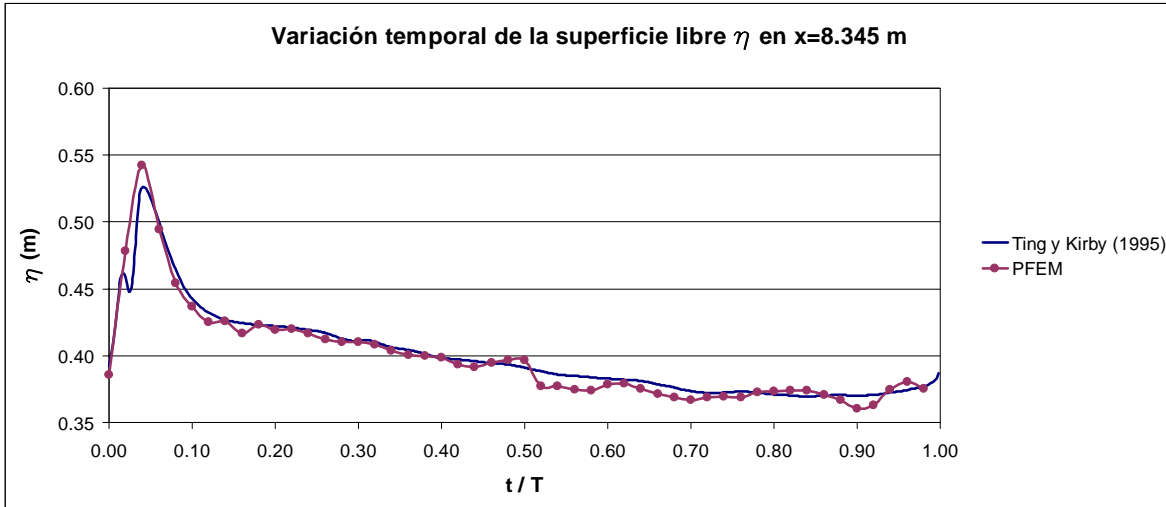


Figura 3.22 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 8.345$ (figura 3.19)

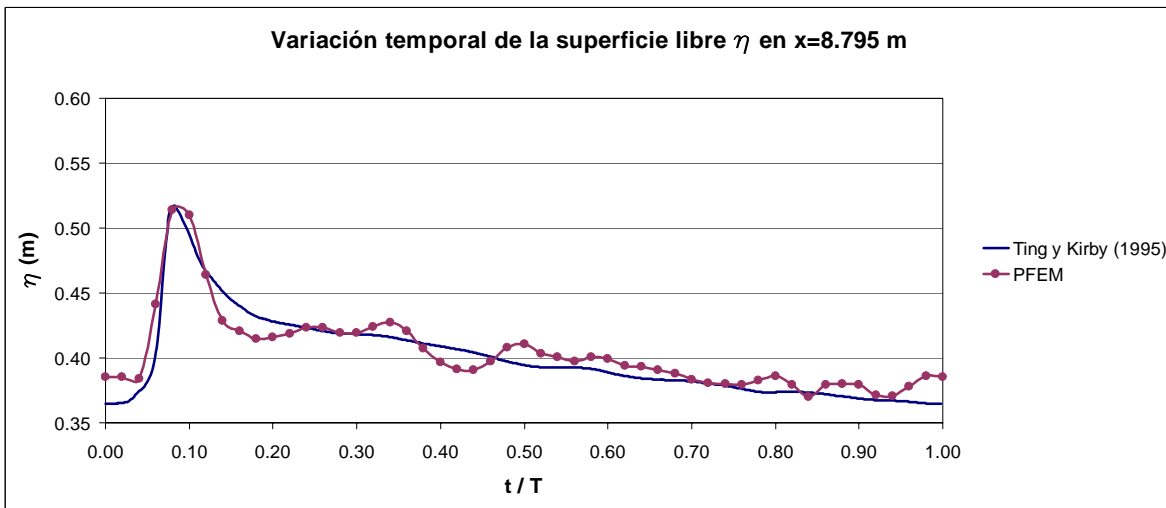


Figura 3.23 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 8.795$ (figura 3.19)

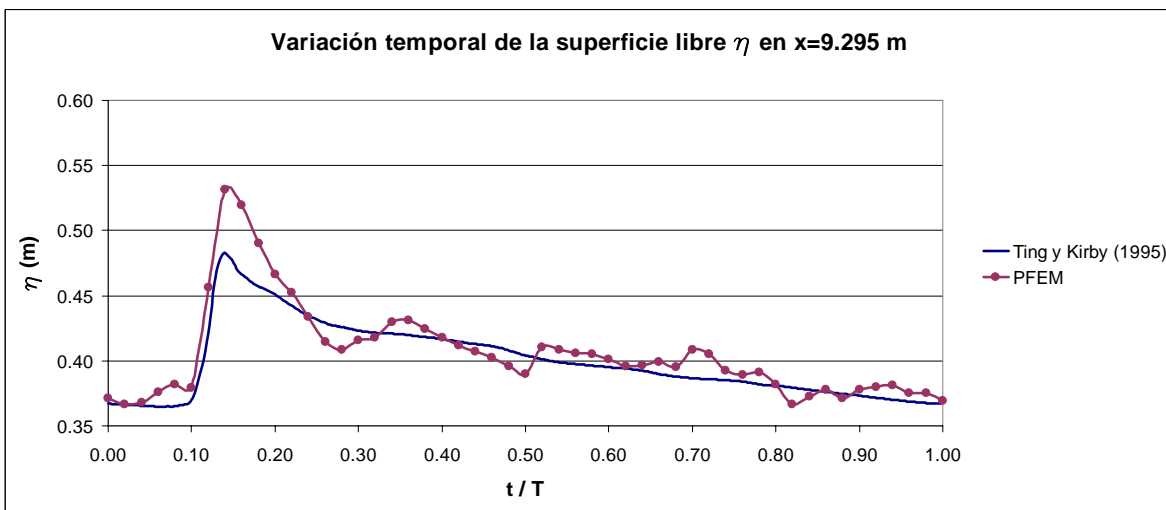


Figura 3.24 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 9.295$ (figura 3.19)

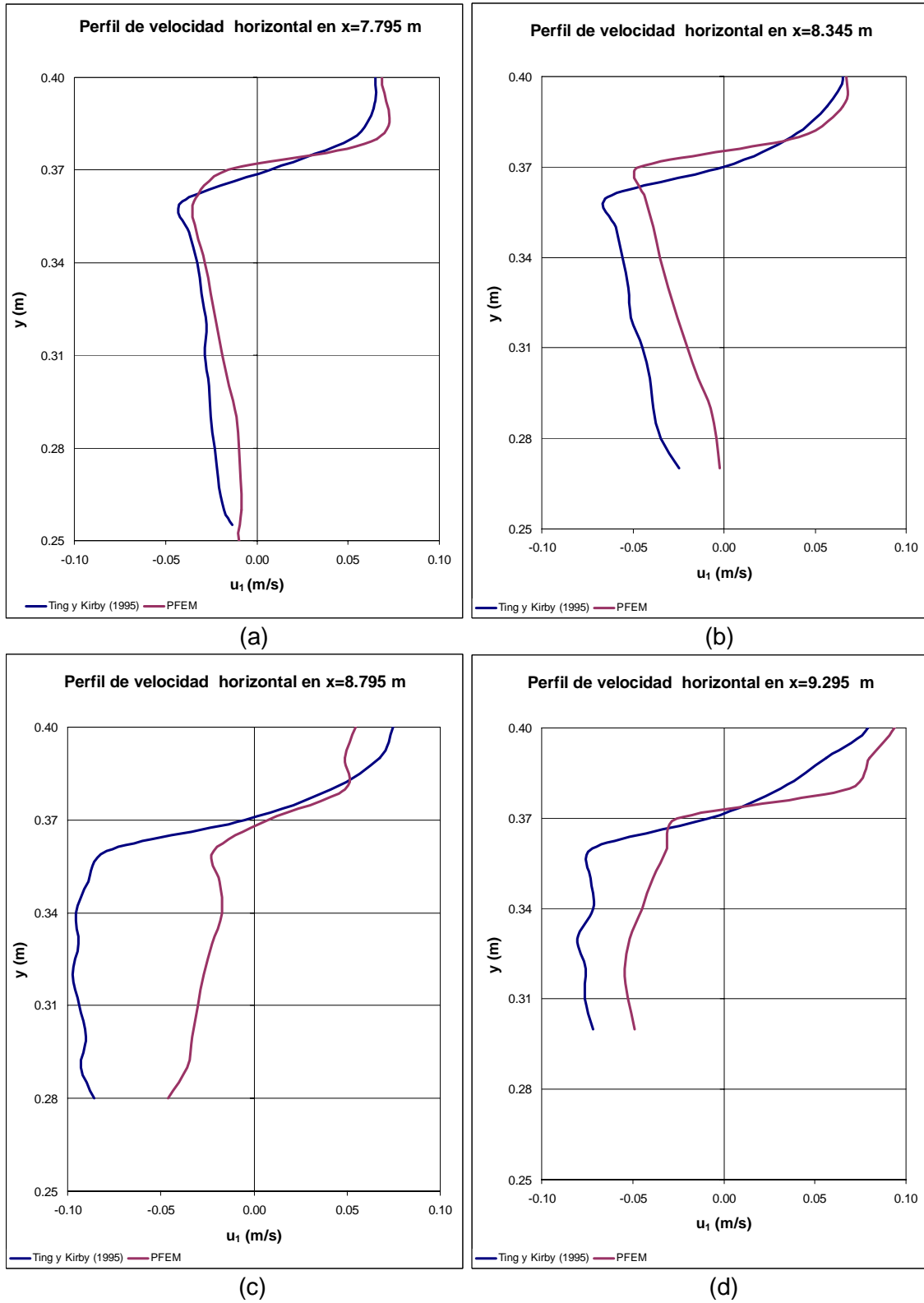


Figura 3.25 Comparación de corrientes de resaca (undertow) medidas y calculadas; las condiciones de oleaje se muestran figura 3.13; la posición de las secciones de control se puede observar en la figura 3.19; rompiente tipo zambullida.

observarse en la figura 3.19 que en esas tres secciones de control se desarrolla la rompiente.

Para hacer la comparación de las magnitudes de la componente horizontal de la velocidad, se calcularon las velocidades medias promediadas en periodo (ver ecuación 2.12) a diferentes puntos de profundidad, resultando así los perfiles de corriente de resaca. En la figura 3.25 se muestra la comparación entre los valores promediados de la medición y los valores promediados calculados. Puede observarse que cuando no se ha desarrollado totalmente la rompiente (figura 3.25a), los valores promediados son muy aproximados, sin embargo en las últimas tres estaciones los valores de la corriente de resaca están subestimados, aunque los puntos donde la velocidad cambia de positiva a negativa son muy cercanos y las curvaturas del perfil coinciden.

El segundo caso corresponde a la rompiente de tipo deslizante [Ting y Kirby (1996)] y las condiciones de oleaje en la zona de generación se muestran en la figura 3.13. De igual forma que en el caso anterior, se comparó el nivel de la superficie libre y los perfiles de velocidad medidos experimentalmente por Ting y Kirby (1996) contra los obtenidos en este trabajo mediante el PFEM, y las secciones de control se tomaron en $x = -1.5$, $x = 6.665$, $x = 7.275$, $x = 7.885$ y $x = 8.495$; en la primera de dichas secciones Ting y Kirby (1996) reportan mediciones del nivel de la superficie libre del agua η , mientras que en las cuatro restantes reportan tanto mediciones del nivel de la superficie libre del agua η como también de la componente horizontal de la velocidad u_1 . En la figura 3.26 se muestra la variación espacial y temporal de la posición de la superficie libre del agua η , así como también de la componente horizontal de la velocidad u_1 calculadas mediante el PFEM. Puede observarse en la figura que los valles son un poco más alargados que las crestas; en esa figura también se muestran líneas punteadas que indican la posición de las secciones de control.

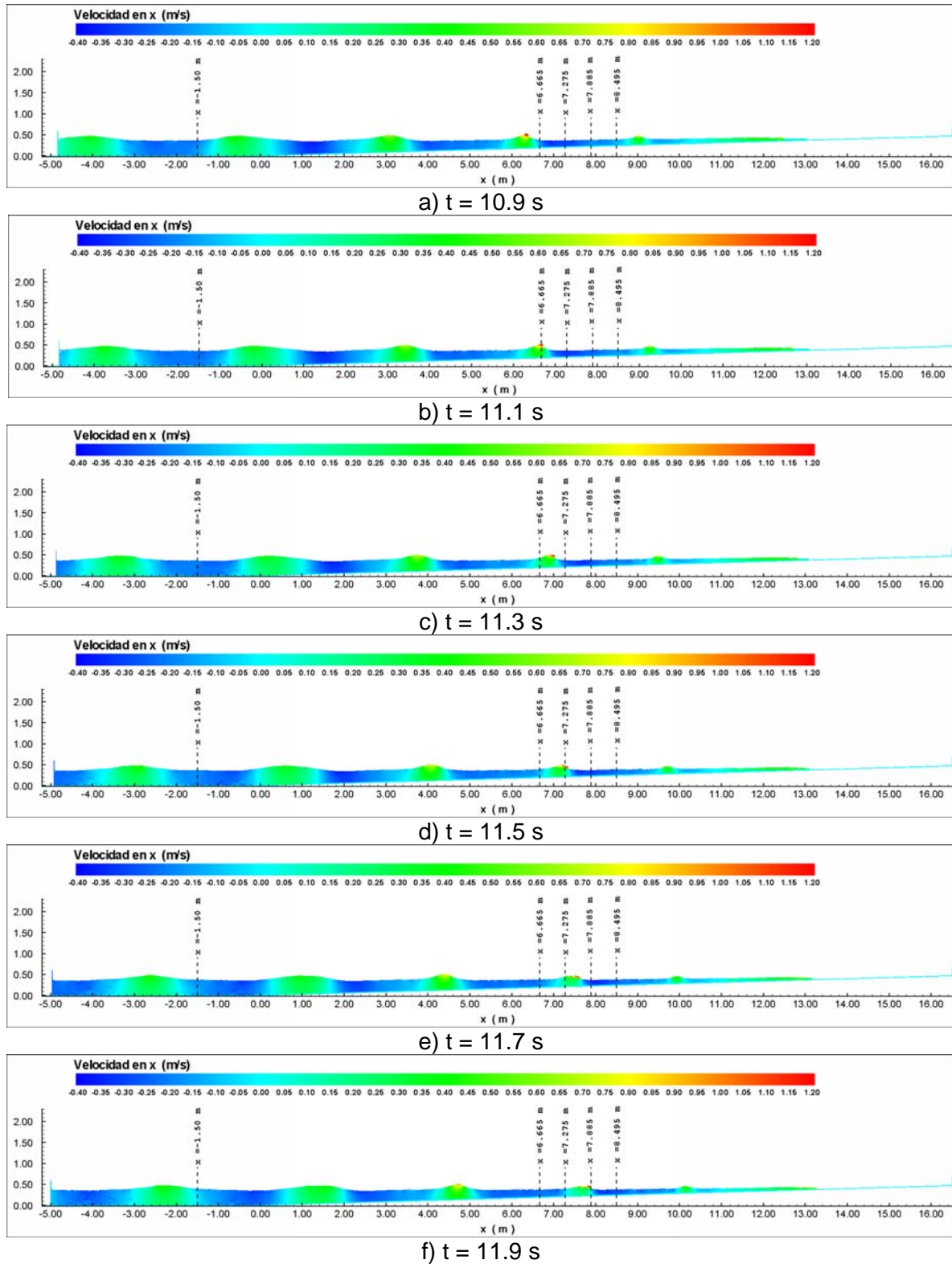


Figura 3.26 Variación espacial y temporal de la velocidad horizontal u_1 y de la superficie libre, y ubicación de las zonas de control; condiciones de oleaje de la figura 3.14

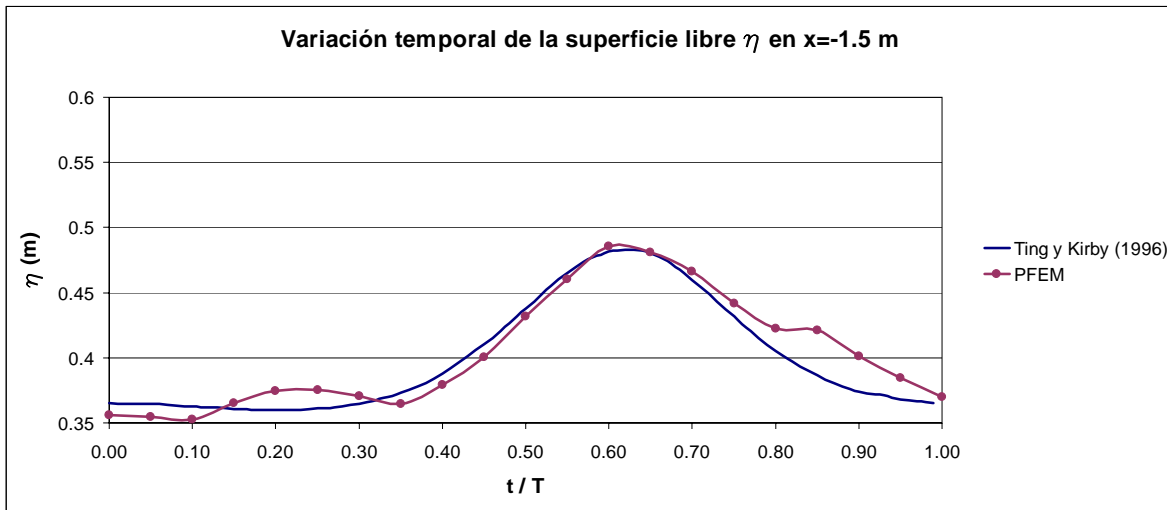


Figura 3.27 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = -1.5$ (figura 3.26)

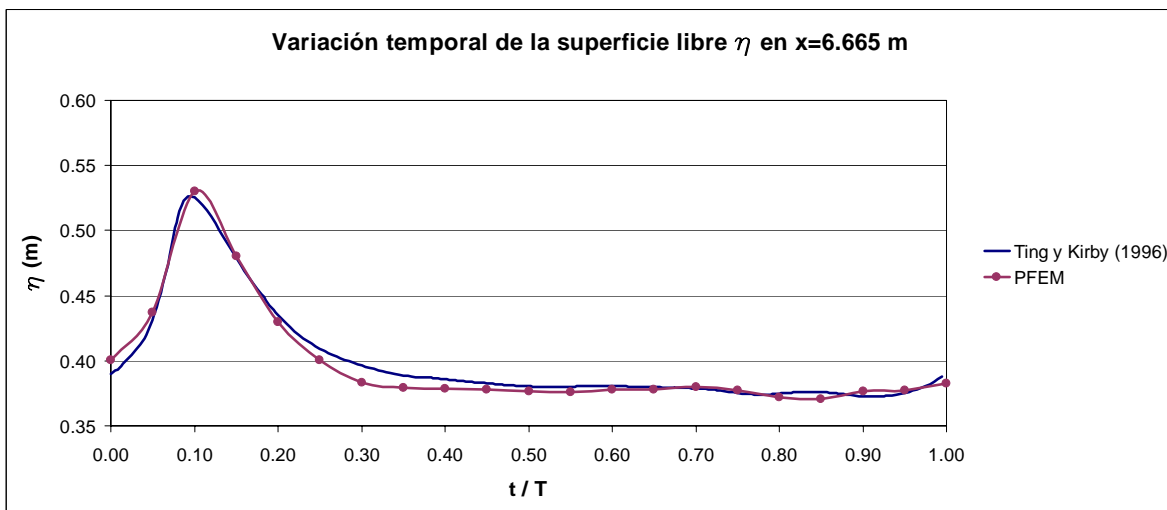


Figura 3.28 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 6.665$ (figura 3.26)

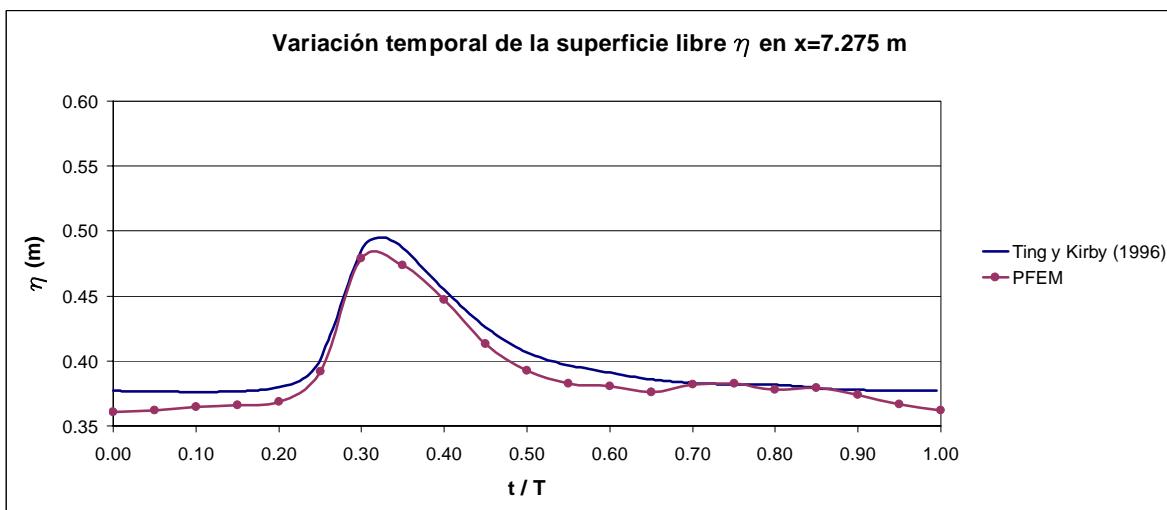


Figura 3.29 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 7.275$ (figura 3.26)

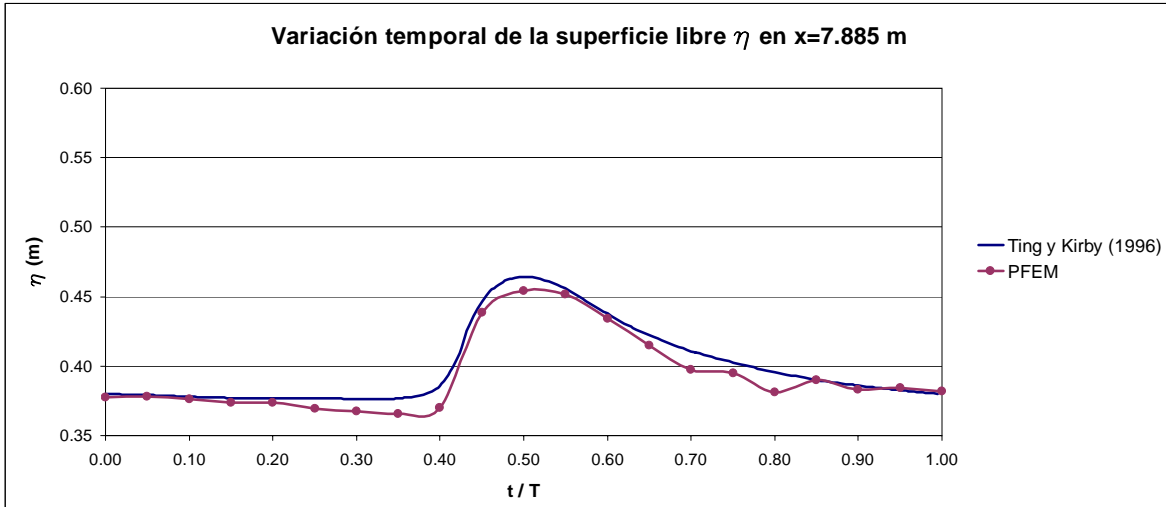


Figura 3.30 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 7.885$ (figura 3.26)

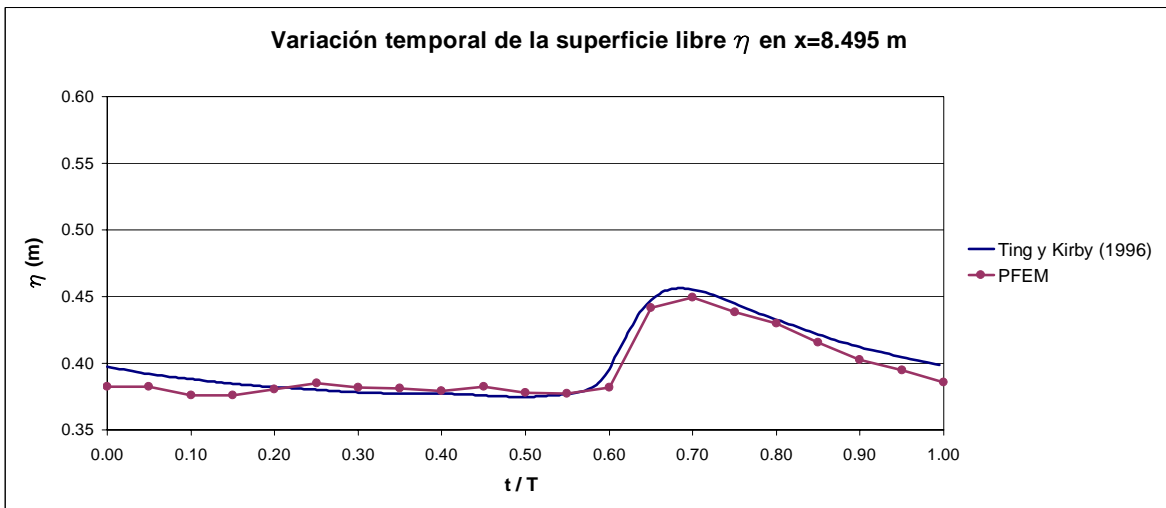


Figura 3.31 Comparación del nivel medido y calculado de la superficie libre $x = 8.495$ (figura 3.26)

En las figuras 3.27 a 3.31 se muestra la comparación entre los niveles de la superficie libre del agua medidos y calculados para las cinco secciones de control, mostrando un buen grado de aproximación, y a diferencia del caso anterior no se aprecian oscilaciones fuertes en el nivel de la superficie libre del agua. De igual forma que en el caso anterior los valores medidos que se muestran en las gráficas son un promedio temporal de los valores para una fase dada, mientras que los datos calculados únicamente se muestra el valor obtenido durante un periodo de tiempo.

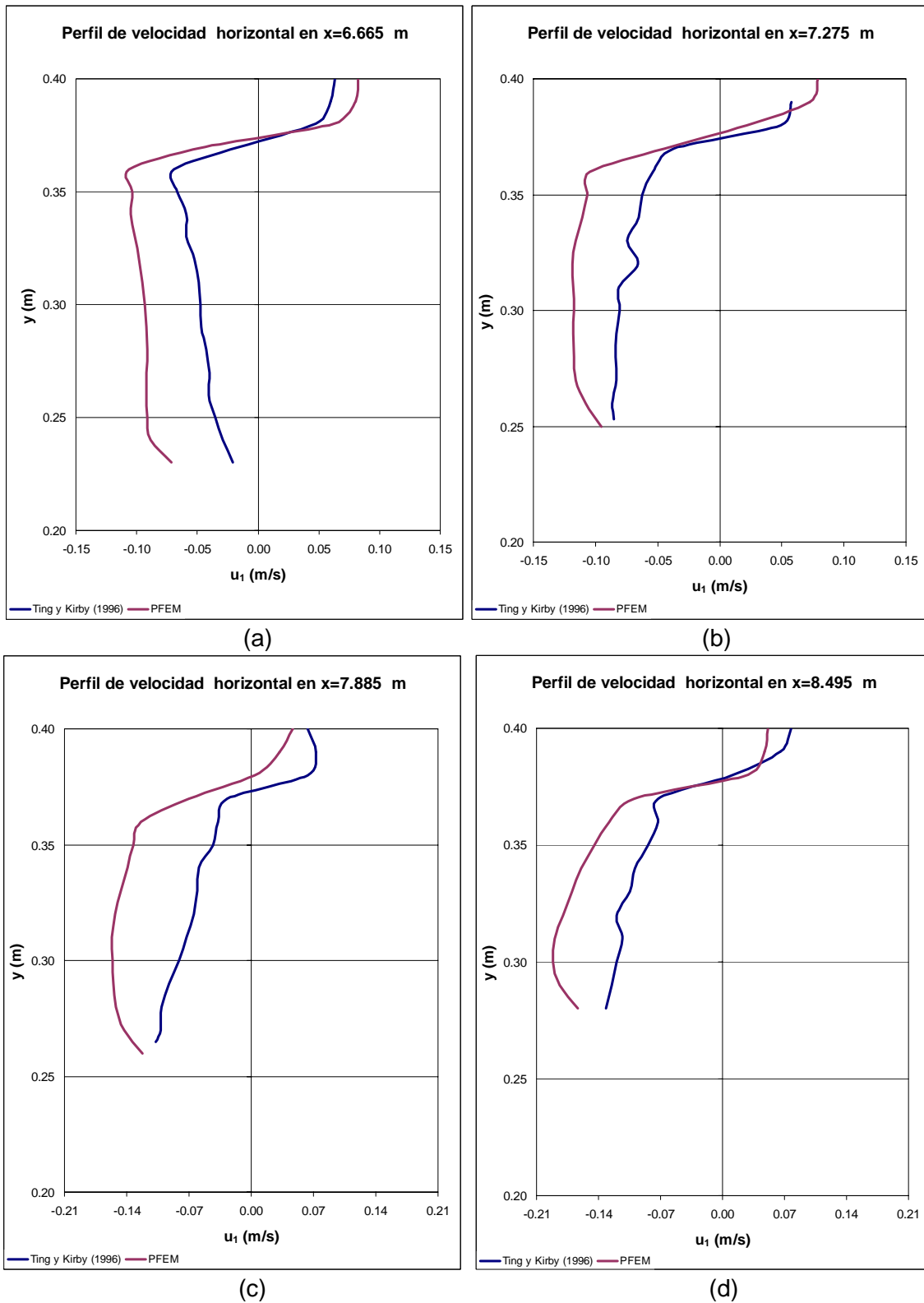


Figura 3.32 Comparación de corrientes de resaca (undertow) medidas y calculadas; las condiciones de oleaje se muestran figura 3.14; la posición de las secciones de control se puede observar en la figura 3.26; rompiente tipo deslizante.

En la figura 3.32 se muestra la comparación de los perfiles de velocidad horizontal medidos y calculados; de la misma manera que el caso anterior, los valores se promediaron utilizando la ecuación 2.12. Puede observarse en la figura, que los valores de la corriente de resaca promediados en un periodo están sobrestimados con respecto al promedio temporal medido, pero es importante señalar que los puntos donde la velocidad cambia de positiva a negativa son muy cercanos y las curvaturas del perfil coinciden.

El tercer caso corresponde a una simulación en 3D con una rompiente de tipo frontal, donde el oleaje fue generado mediante un batidor plano de pistón cuyo historial de desplazamiento se muestra en la figura 3.14, y el tirante de agua en la zona de generación es de $d = 0.4$ m. En la figura 3.33 se muestran las dimensiones del canal de oleaje utilizado, donde pueden observarse tres cambios de pendiente y un fondo no regular, aunque el canal es simétrico con respecto al plano $z = 2.5$, esto puede apreciarse mejor en las figuras 3.34a y 3.34b. El dominio de cálculo fue discretizado mediante 157963 nodos (919673 elementos), ver figura 3.34c, y el incremento de tiempo se tomó constante e igual a $\Delta t = 0.01$ s. En las figuras 3.35 y 3.36 se muestra la variación espacial y temporal de la posición de la superficie libre del agua η , así como también de la componente horizontal de la velocidad u_1 , calculadas mediante el PFEM; en la figura 3.35 se puede observar la magnitud de la velocidad u_1 sobre la superficie libre, mientras que en la figura 3.36 se observa la magnitud de esa velocidad pero sobre los planos $z = 1.0$, $z = 2.5$ y $z = 4.0$, también puede observarse en esas figuras el desarrollo de la rompiente frontal. En la figura 3.36e en el plano $z = 2.5$ se observa claramente un flujo en dirección contraria a la de propagación del oleaje, por lo que en esa zona existe un mayor transporte de agua hacia la zona de generación, o dicho de otra forma, la corriente de resaca es mayor al centro del canal. Es importante señalar, que en la interfase del sólido y la superficie libre se formaron algunos elementos falsos, por una irregularidad del método alpha-shape, así como también algunas burbujas dentro del fluido, la primera por la proximidad de los nodos, y la segunda por la separación de los mismos.

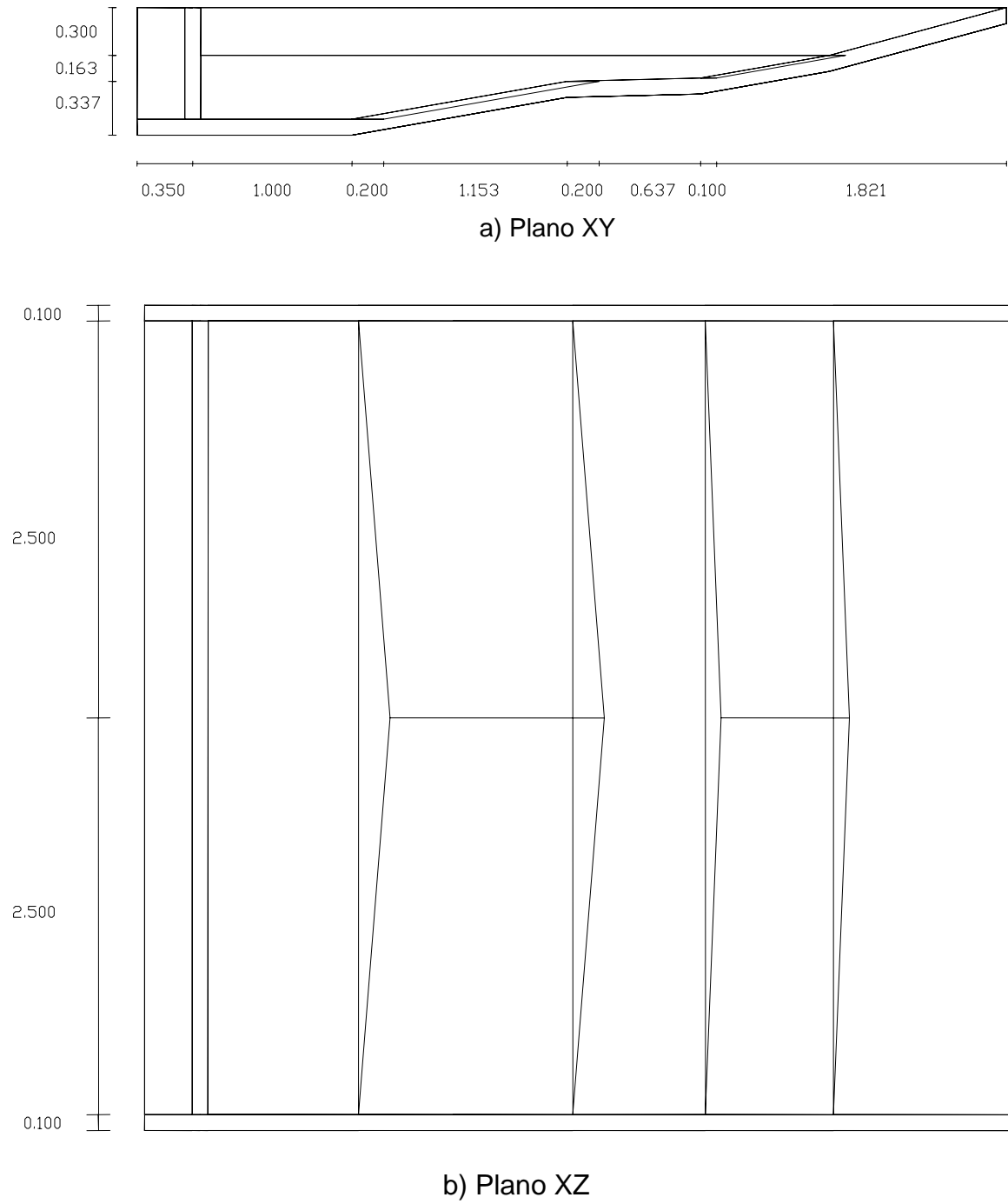
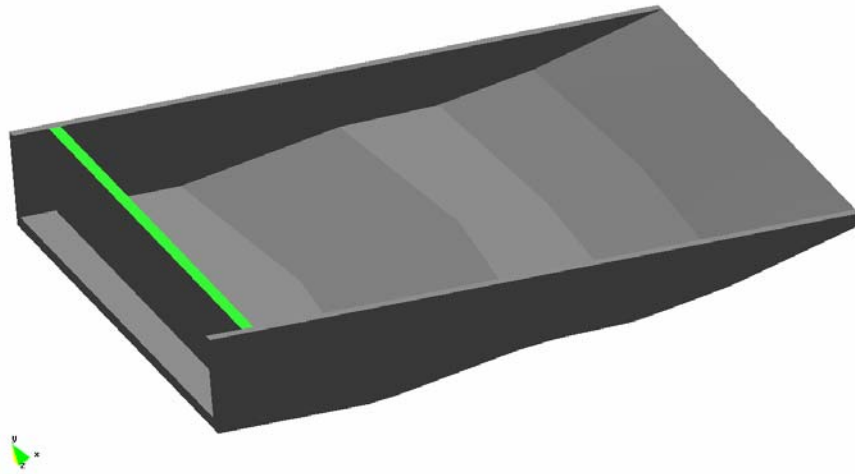
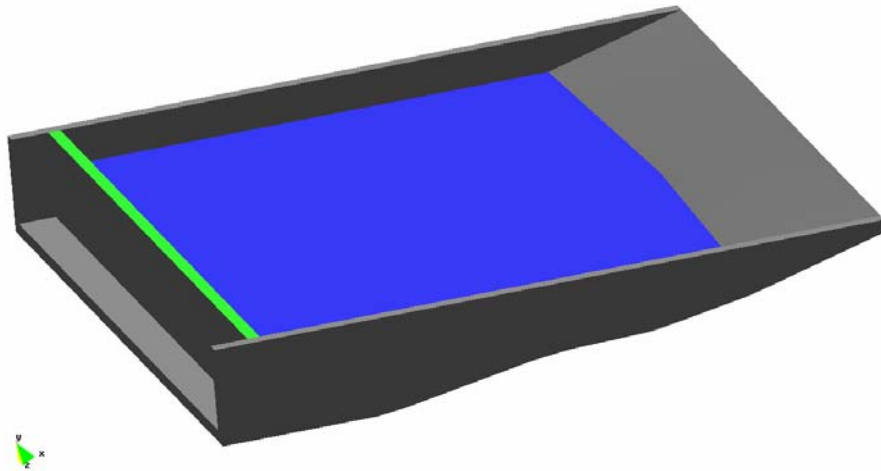


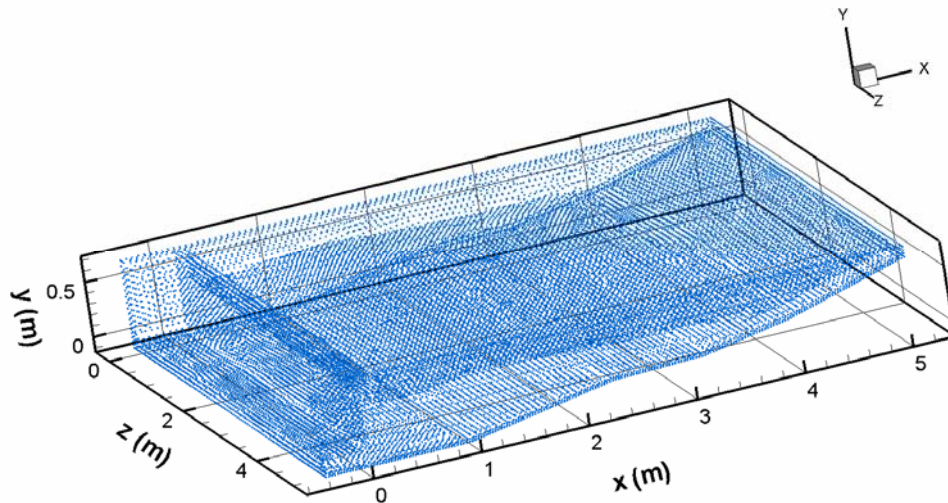
Figura 3.33 Dimensiones del tanque de oleaje utilizado para la simulación de corrientes bajo rompiente frontal, condiciones de oleaje de la figura 3.13.



a) Perspectiva sin agua



b) Perspectiva con agua



c) Distribución de los nodos de cálculo

Figura 3.34 Vista en perspectiva del tanque de oleaje y la distribución de los nodos de cálculo, utilizados para la simulación en 3d de corrientes bajo rompiente frontal.

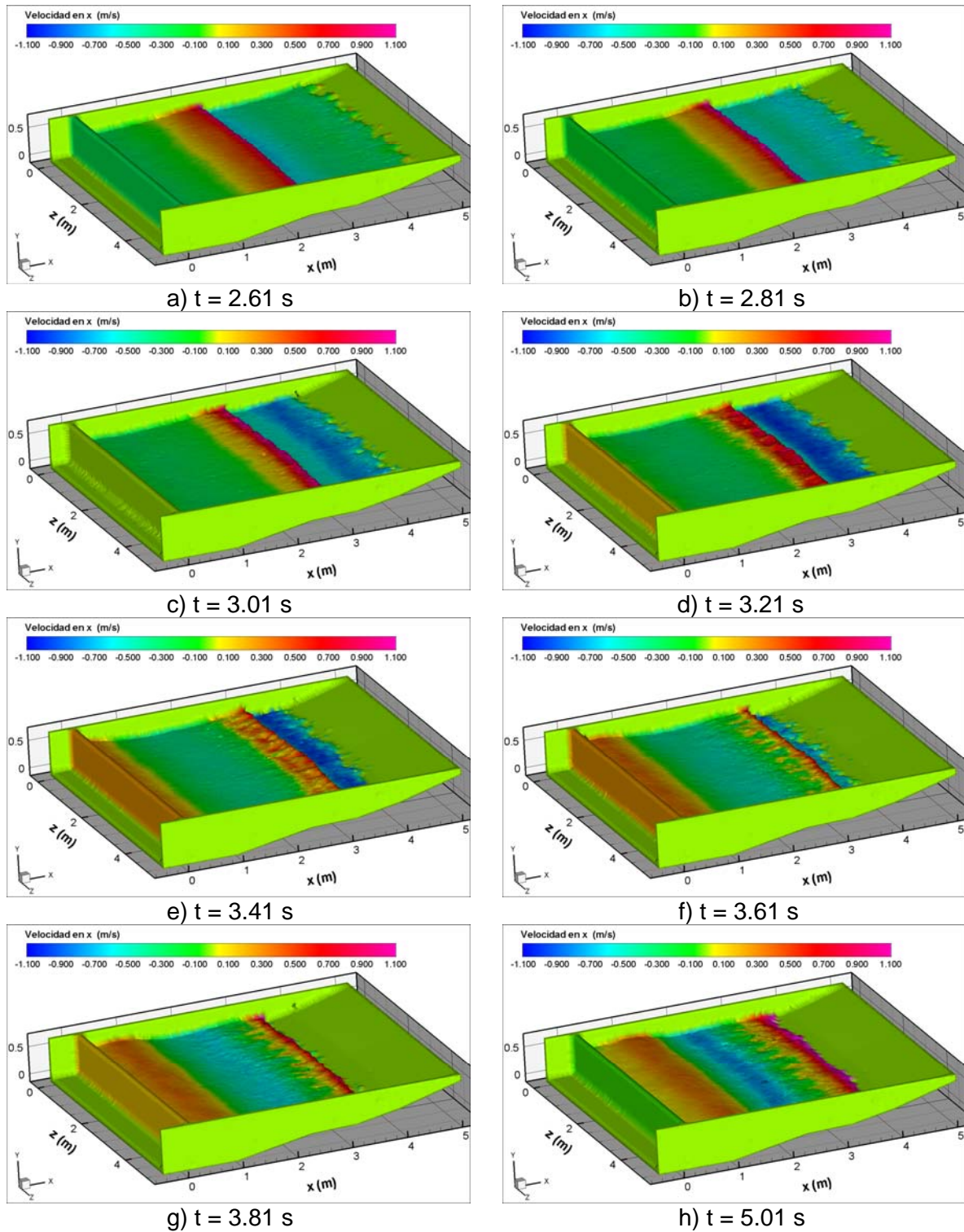


Figura 3.35 Variación espacial y temporal de la superficie libre del agua y de la componente x de la velocidad u_1 bajo rompiente de tipo frontal.

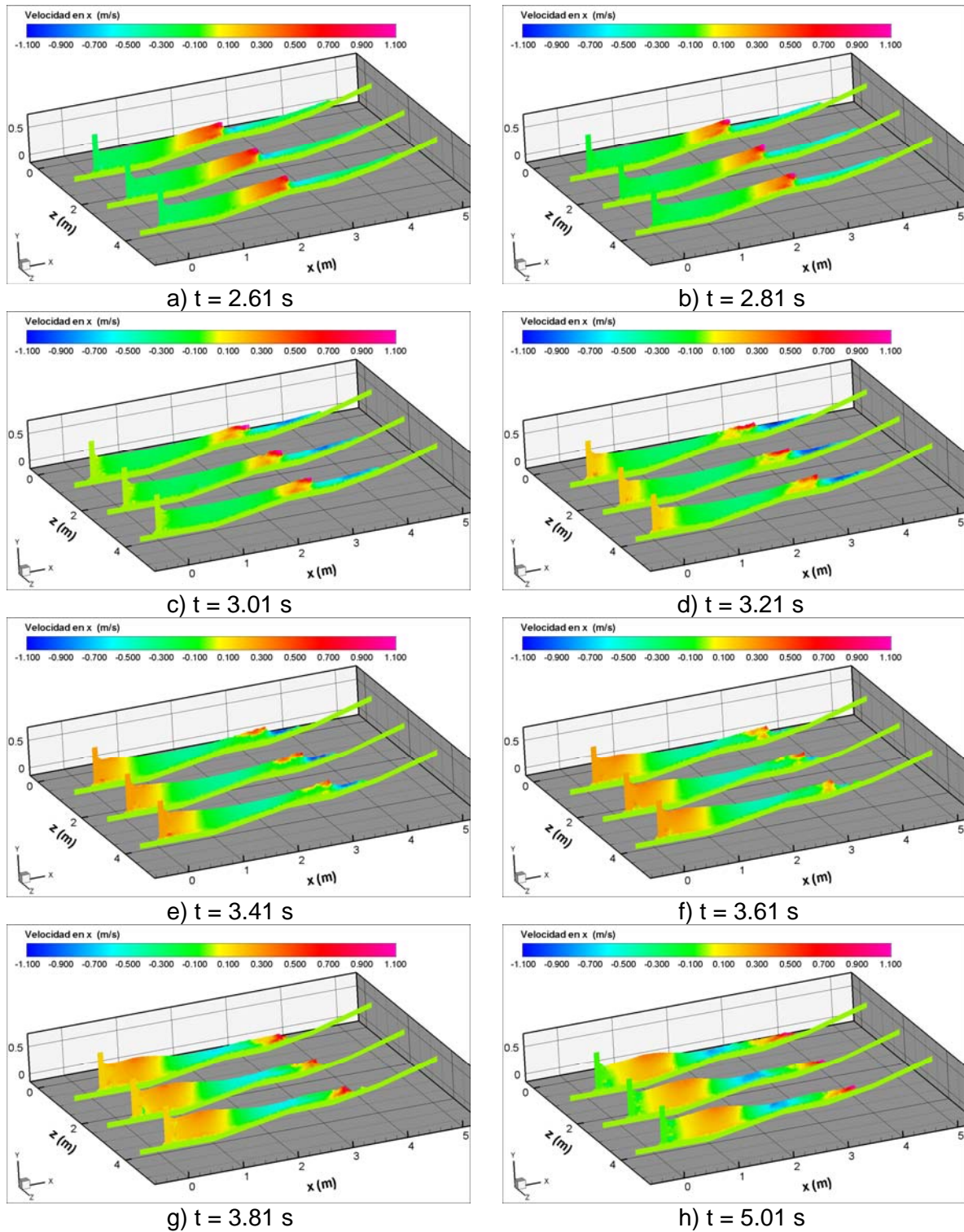


Figura 3.36 Variación espacial y temporal de la superficie libre del agua y de la componente x de la velocidad u_1 bajo rompiente de tipo frontal en los planos $z = 1.0$, $z = 2.5$ y $z = 4.0$

El cuarto caso, y último, corresponde a una simulación en 3D de la hidrodinámica con una rompiente de tipo frontal. El oleaje fue generado mediante un batidor plano de pistón cuyo historial de desplazamiento se muestra en la figura 3.13, y el tirante de agua en la zona de generación es de $d = 0.4$ m. En la figura 3.37 se muestran las dimensiones del canal de oleaje utilizado, donde pueden observarse dos cambios de pendiente, dos barras con longitud $l = 1.75$ m y entre ellas un pequeño canal con longitud de 1.5 m. Puede observarse que el canal es simétrico con respecto al plano $z = 2.5$; las figuras 3.38a y 3.38b muestran la imagen de la geometría del canal en 3D. El dominio de cálculo fue discretizado mediante 186210 nodos (1092677 elementos), ver figura 3.38c, y el incremento de tiempo se tomó constante e igual a $\Delta t = 0.01$ s. En la figuras 3.39 y 3.40 se muestra la variación espacial y temporal de la posición de la superficie libre del agua η , así como también de la componente horizontal de la velocidad u_1 , calculadas mediante el PFEM; en la figura 3.35 se puede observar la magnitud de la velocidad u_1 sobre la superficie libre, mientras que en la figura 3.36 se observa la magnitud de esa velocidad pero sobre los planos $z = 0.75$, $z = 2.25$ y $z = 3.75$, también puede observarse en esas figuras el desarrollo de la rompiente oscilante. En la figura 3.39, puede observarse que el ascenso del agua sobre la playa casi excede el límite del canal en la primera ola generada, y en la segunda se provocaría un desbordamiento, por otra parte en la figura 3.39h se ve un perfil de velocidad horizontal no uniforme presentando valores más altos en el centro del canal, antes de las barras según el sentido de propagación de oleaje, aunque en la figuras 3.40h se muestran velocidades máximas sobre las barras, lo que indica que si fueran de arena, para esas condiciones de oleaje tenderían a desaparecer. Como en el caso anterior, se formaron algunos elementos falsos en la interfase del sólido y la superficie libre, y burbujas dentro del fluido a causa de la separación de los nodos.

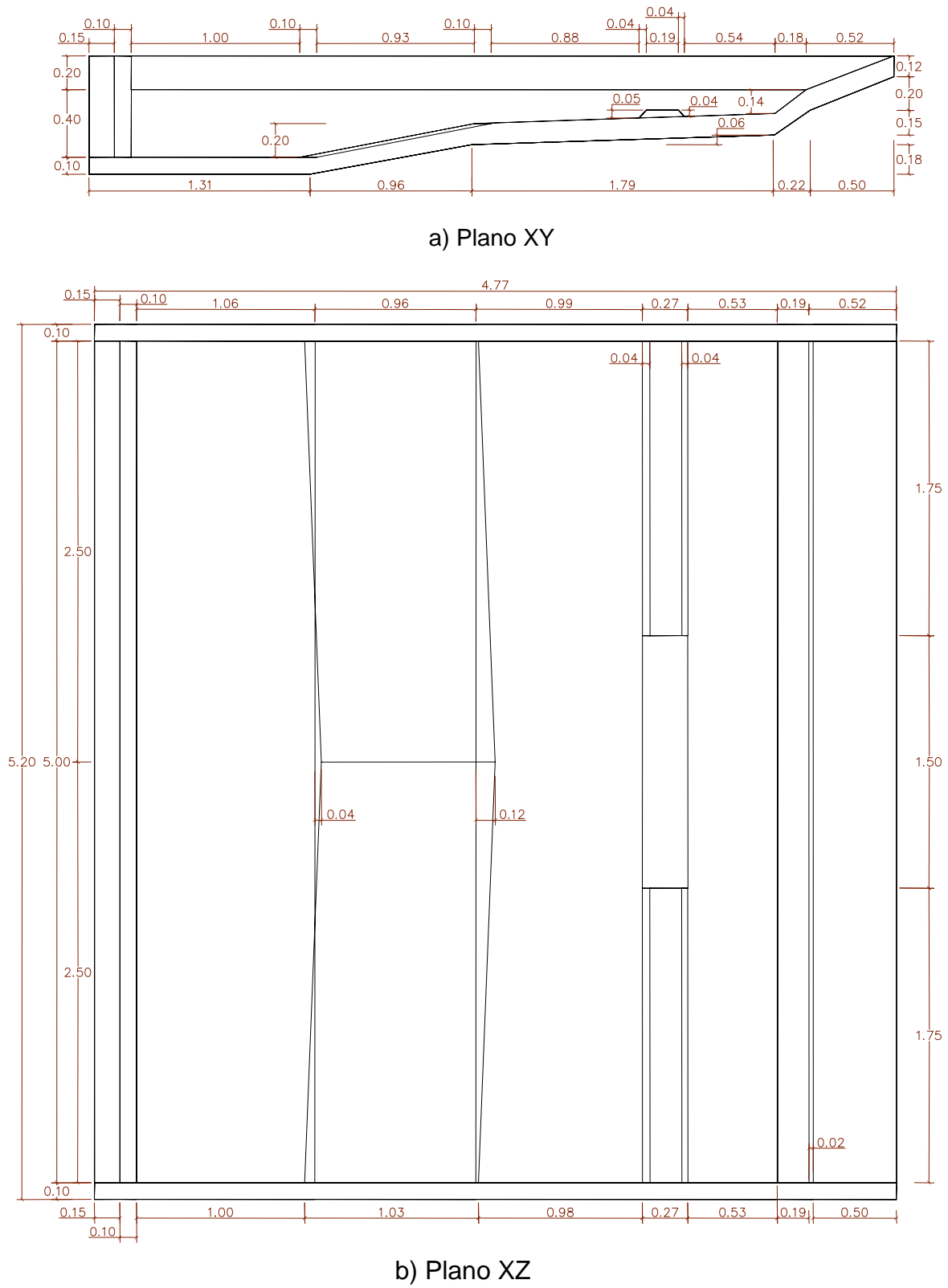
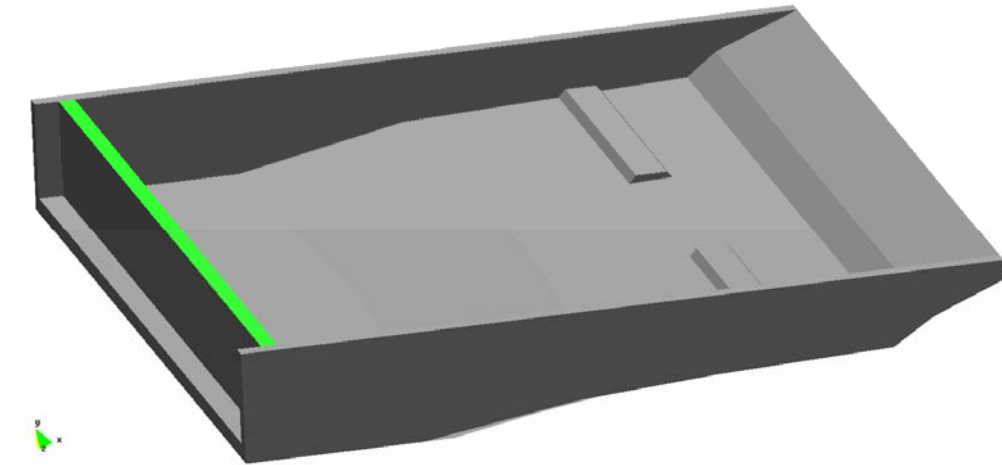
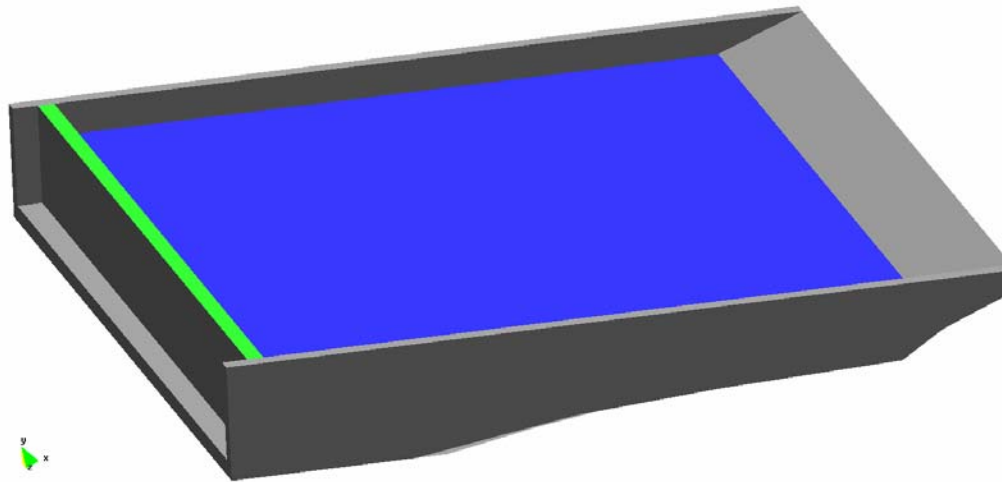


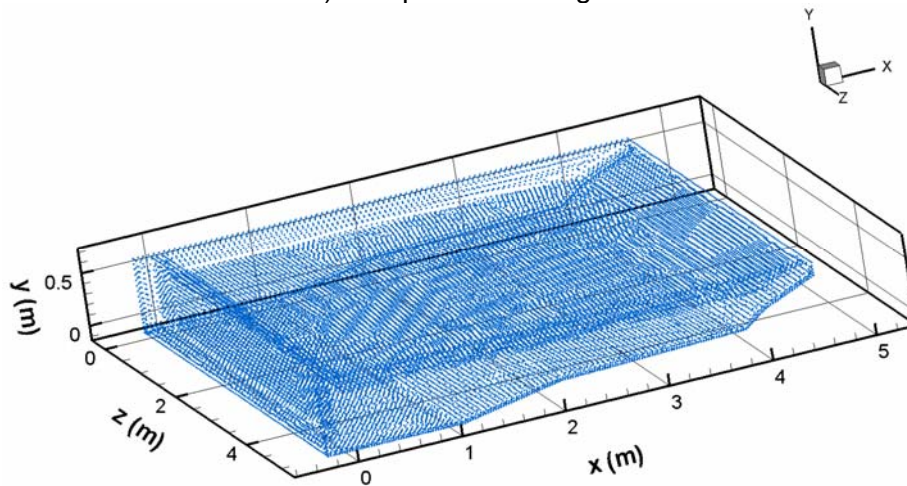
Figura 3.37 Dimensiones del tanque de oleaje utilizado para la simulación de corrientes bajo rompiente oscilante, condiciones de oleaje de la figura 3.12.



a) Perspectiva sin agua



b) Perspectiva con agua



c) Distribución de los nodos de cálculo

Figura 3.38 Vista en perspectiva del tanque de oleaje y la distribución de los nodos de cálculo, utilizados para la simulación en 3d de corrientes bajo rompiente oscilante.

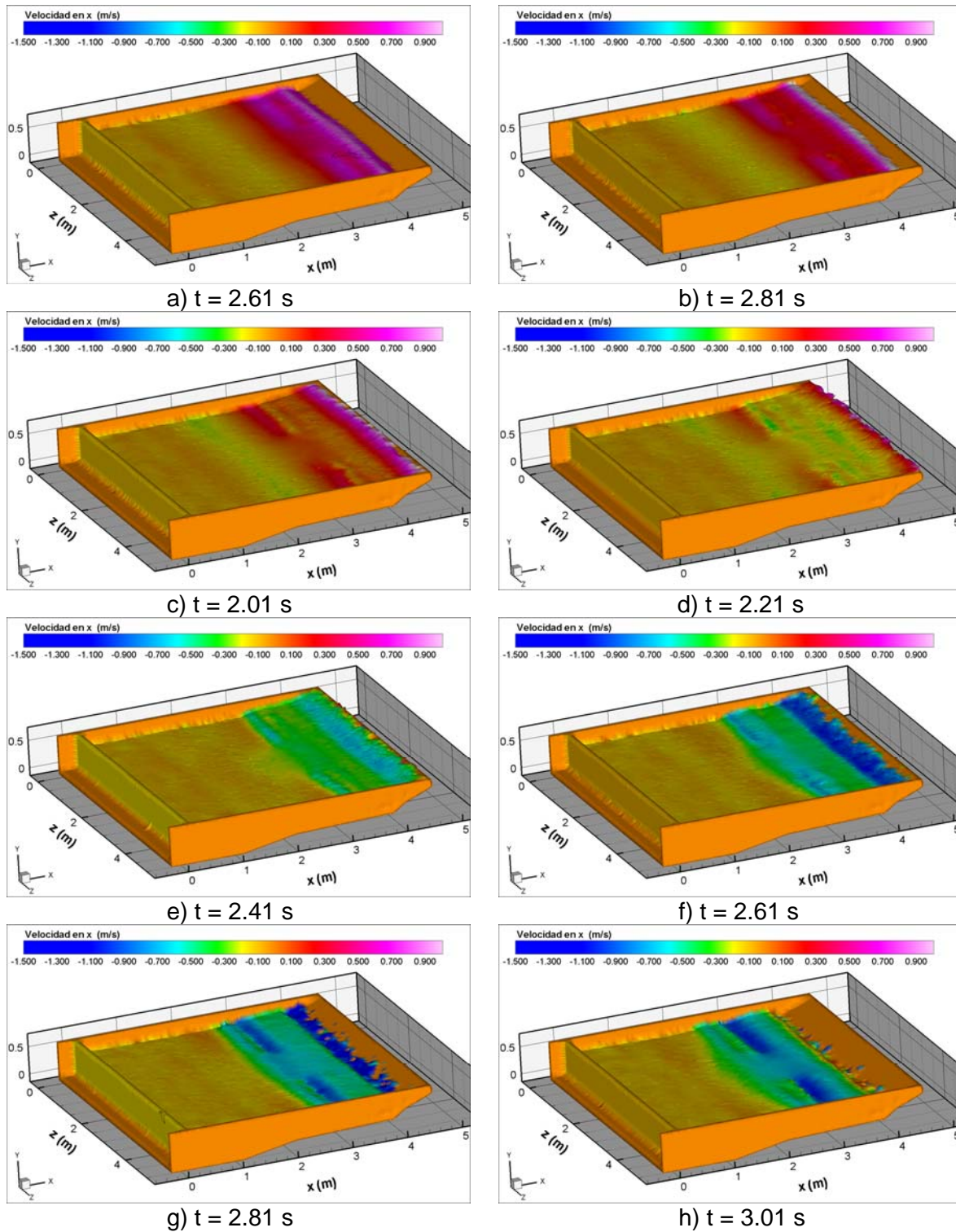


Figura 3.39 Variación espacial y temporal de la superficie libre del agua y de la componente x de la velocidad u_1 bajo rompiente de tipo oscilante.

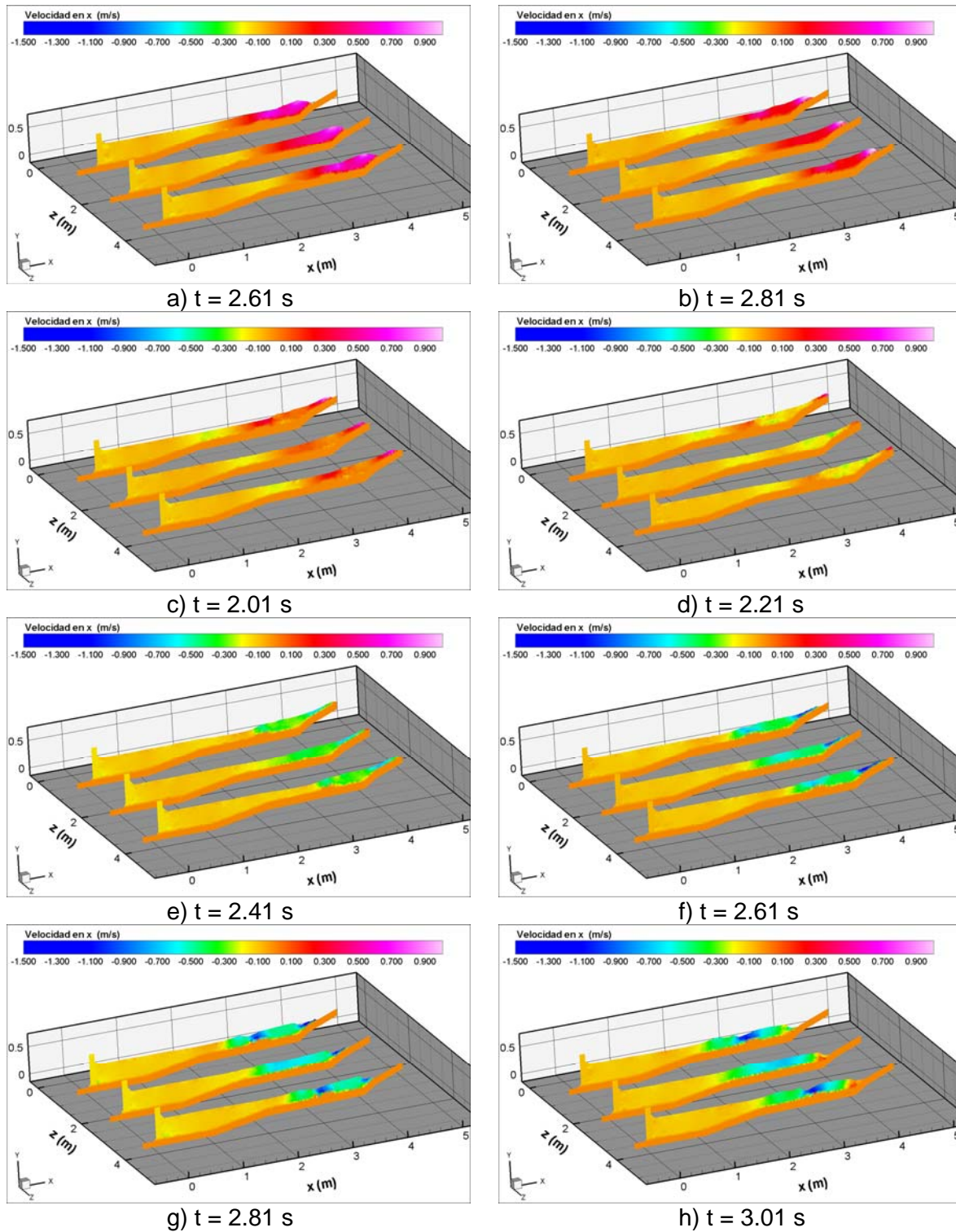


Figura 3.40 Variación espacial y temporal de la superficie libre del agua y de la componente x de la velocidad u_1 bajo rompiente de tipo oscilante en los planos $z = 0.75$, $z = 2.25$ y $z = 3.75$

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

4.1 Conclusiones

En este trabajo se ha demostrado que el método de elementos finitos y partículas (PFEM), y en general la solución lagrangiana de las ecuaciones en una formulación fluido estructura, pueden caracterizar de manera adecuada la hidrodinámica costera fuera y dentro de la zona de rompientes. Se ha demostrado, que puede generarse de manera adecuada oleaje lineal y no lineal con diferentes alturas y periodos, y hacer una buena propagación del mismo independientemente de la configuración del fondo.

La simulación de la propagación en aguas profundas del inciso 3.2, muestra una gran aproximación a la solución teórica, tanto en la variación en la vertical de la magnitud de la velocidad, como en la magnitud de la altura y longitud de ola. Por otra parte, también se ha demostrado que se pueden reproducir olas estacionarias por presencia de estructuras verticales.

Se ha demostrado también que el PFEM es capaz de reproducir los cuatro tipos de rompientes. En los incisos 3.3 y 3.4, se caracterizan de manera adecuada las rompientes de zambullida, deslizante, frontal y oscilante. En las simulaciones bajo geometrías y oleaje lineal arbitrarios existe correspondencia entre los valores del número de Iribarren y el tipo de rompiente. En condiciones controladas, existe gran semejanza al comparar la forma y el tipo de rompiente contra los experimentos de Ting y Kirby (1994, 1995, 1996), que demuestra que el método es capaz de reproducir la propagación y transformación del oleaje en aguas poco profundas.

Como se mencionó desde el inicio del trabajo, uno de los mayores retos en la simulación de la hidrodinámica costera es reproducir adecuadamente la zona de rompientes. En el inciso 3.4 se demuestran las ventajas que ofrecen los métodos lagrangianos, ya que existe una buena aproximación entre los valores promedio medidos experimentalmente con los calculados mediante PFEM. Las figuras 3.20

a 3.24 y 3.27 a 3.31 muestran que puede caracterizarse de manera adecuada la propagación del oleaje, su transformación y el ascenso del nivel medio del agua, ya que los valores calculados del nivel de la superficie libre corresponden con las mediciones experimentales. Por otra parte, las corrientes de resaca también están bien caracterizadas, ya que los valores calculados promediados de la velocidad horizontal a diferentes profundidades, promediados en un periodo de ola, se asemejan bastante con los valores medidos experimentalmente, correspondiendo tanto en los puntos de donde cambia de dirección la velocidad, como en la magnitud. Es importante señalar que la mayoría de las veces se utilizan perfiles de velocidad promedio como los mostrados en las figuras 3.25 y 3.32, y se mantienen constantes durante el tiempo de simulación para el análisis del transporte de sedimentos. Desde luego que es mejor utilizar una hidrodinámica que vaya cambiando con el tiempo como la de las figuras 3.19 y 3.26. Se ha demostrado que el PFEM, es buena opción para simular casos en 2DV.

Para las simulaciones 3D, se representan de manera adecuada las rompientes de tipo frontal y oscilante, así como también las corrientes de resaca. En los experimentos se observa que se generan elementos falsos (otros se eliminan) en la interfase de la superficie libre del agua con el sólido, esto debido a la implementación del método *Alpha-Shape*. Esto se puede solucionar si el dominio de cálculo se discretiza con una mayor cantidad de nodos.

Es importante señalar que no sería rentable utilizar el PFEM en 3D, hasta ahora, para simular la propagación de oleaje sobre en un área muy grande de la costa, o algunos casos de agitación en puertos, debido a que se requiere la utilización de supercomputadoras y se ha demostrado que los modelos de Boussinesq dan buenos resultados fuera de la zona de rompientes, aunque el PFEM se podría utilizar para calibrar los coeficientes de reflexión, porosidad y disipación que se requieren en esos modelos.

4.2 Recomendaciones

La alta densidad de nodos que se requiere en problemas 3D implica la utilización de supercomputadoras y programación en paralelo, por lo que es importante implementar un código que se adapte a las diferentes arquitecturas de computadoras; los procesos que consumen mas tiempo de computo son la solución de los sistemas de ecuaciones y el ensamble de las matrices de cálculo. Para aprovechar al máximo los recursos de cómputo, es recomendable utilizar diferentes densidades de nodos (e.g. alta densidad en la zona de rompiente y una densidad menor en las zonas de generación y propagación).

Por otra parte, el aire juega un papel sumamente importante en la rompiente (sobre todo en la de zambullida) por lo que debe de incluirse su efecto.

Finalmente, el método alpha-shape requiere alguna depuración en los casos de 3D, ya que como se menciono se generan burbujas y elementos falsos en la interfase de la superficie libre del agua y los sólidos.

4.3 Futuras líneas de investigación

Las líneas de investigación que pueden seguirse mediante el PFEM u otro método de partículas se enlistan a continuación:

1. Implementación de modelos de flujo multifásico aire-agua para caracterizar la zona de rompientes.
2. Estudio de la morfología costera bajo una formulación fluido estructura considerando nodos erosionables, así como la concentración de sedimentos y su sedimentación.
3. Probar diferentes modelos de turbulencia y evaluar la disipación de energía en la zona de rompientes.

REFERENCIAS

- Abbott, M. B., Petersen, H. M. and Skovgaard, O., (1978). "On the Numerical Modelling of Short Waves in Shallow Water". *J Hydr Res.*, 16, 173-204.
- Abbot, M. B., Basco, D. R (1989). "Computational Fluid Dynamics: An Introduction for Engineers", John Wiley & Sons.
- Balay, S., Buschelman, K., Eijkhout, V., Gropp, W., Kaushik, D., Knepley, G., McInnes, L.C., Smith, F., Zhang, H. (2004). "PETSC USER MANUAL". Argonne National Laboratory.
[disponible en <http://www-unix.mcs.anl.gov/petsc/petsc-as/>]
- Battjes, J. A. (1988). "Surf-zone dynamics". *Ann. Rev. Fluid Mech* 20, 257-93.
- Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl, P., (1996). "Meshless methods: An overview and recent developments" *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 139, 3–48.
- Borthwick, A.G.L. and Foote, Y.L.M. (2002). "Wave-induced nearshore currents at a tricusate beach in the UKCRF", *Proc. I.C.E., J. Water & Maritime Engineering*.
- Bugeda, G. (2007). "Técnicas de Pre y Postproceso gráfico". Apuntes del Master Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería. CIMNE, Barcelona.
- Calvo, N.A. (2005). "Generación de mallas tridimensionales por métodos duales". Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Litoral, Argentina.
- Calvo, N.A., Idelsohn, S.R., Oñate, E. (2003). "The Extended Delaunay Tessellation". *Engineering Computations* vol. 20 num 5/6.
- Celigueta, M.A., Oñate, E., Idelsohn, S.R. (2007). "Simulation of ship sinking situations with the Particle Finite Element Method". *International Conference on Computational Methods in Marine Engineering*. P. Bergan, J. García, E. Oñate, and T. Kvamsdal eds, CIMNE, Barcelona.
- Chen, Q., Dalrymple, A., Kirby, J. (1999). "Boussinesq modeling of a rip current system". *Journal of Geophysical Research*, Vol 104, No C9, 617-637.
- Chew, P. (2005). "The Delaunay Applet". Cornell University.
[disponible en <http://www.cs.cornell.edu/Info/People/chew/Delaunay.html>]
- Codina, R. (2002). "Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191, 4295–4321.
- Cohen-Steiner, D., Colin deVerdiere, E., Yvinec, M. (2004). "Conforming Delaunay triangulations in 3D". *Computational Geometry* vol. 28, Issues 2-3, 217-233.
- Cruz-León, S. (1998). "Numerical solution of the Shallow Water Equations on Quadtree Grids", D.Phil. Thesis, Oxford University, U.K.
- Dally, W. (2005). "Surf Zone Processes". *Encyclopedia of Coastal Science* 18, 929-935.
- Dalrymple, R.A. (1975). "A Mechanism for Rip Current Generation on an Open Coast". *Journal of Geophysical Research* 60, 24.

- Dalrymple, R.A., Rogers, B.D. (2006). "Numerical modeling of water waves with the SPH method". *Coastal Engineering* 53, 141– 147.
- De, S., Bathe, K.J.(2000). "The method of finite spheres". *Comput Mech.*, 25, 329-345.
- Dean, R.G., and Dalrymple, R.A., (1984). "Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists". Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Del Pin, F. (2003). "The Meshless Finite Element Method Applied to a Lagrangian Particle Formulation of Fluid Flows". Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Litoral, Argentina.
- Del Pin, F., Idelsohn, S.R., Oñate, E., Aubry, R. (2007). "The ALE/Lagrangian Particle Finite Element Method: A new approach to computation of free-surface flows and fluid-object interactions". *Computers & Fluids* 36,27-38.
- Edelsbrunner, H., Mucke, E.P. (1999). "Three dimensional alpha shapes". *ACM Trans. Graphics* 13, 43–72.
- Emarat, N., Christensen, E.D., Forehand, D.I.M, Mayer, S. (2000). "A Study of Plunging Breaker Mechanics by PIV and a Navier-Stokes Solver". In *Proc. 27th Coastal Eng. Conf.* 891-901.
- Eymard, R., Gallouet, T., Herbin, R. (1997). "Finite Volume Methods". *Handbook of Numerical Analysis*. P.G. Ciarlet, J.L. Lions eds, vol 7 pp 713-1020.
- Fries, T.P., Matthies, H.G. (2004). "Classification and Overview of Meshfree Methods". *Informatikbericht Nr. 2003-3*.
- García, J., Valls, A., Oñate, E. (2007). "An overlapping domain decomposition level set (ODDLS) method for simulation of free surface problems. *International Conference on Computational Methods in Marine Engineering*. P. Bergan, J. García, E. Oñate, and T. Kvamsdal eds, CIMNE, Barcelona.
- Garzon, M., Adalsteinsson, D., Gray, L., Sethian, J.A. (2005). "A coupled level set-boundary integral method for moving boundary simulations". *Interfaces and Free Boundaries* 7,1-16.
- GiD. (2004). The personal pre/postprocessor. CIMNE, Barcelona.
[disponible en www.gidhome.com]
- GIOC(2000). "Manuales de referencia del Sistema de Modelado Costero". Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de Costas, Universidad de Cantabria.
- Guyenne, P., Grilli, S.T., Dias, F. (2000). "Numerical modeling of fully nonlinear 3D overturning waves over arbitrary bottom". In *Proc. 27th Coastal Eng. Conf.* 417-440.
- Hass, K.A., Svendsen, I.A., Zhao, Q (2000). "3D Modeling of rip currents". In *Proc. 27th Coastal Eng. Conf.* 1113-1126.
- Hass, K.A., Svendsen, I.A. (2002). "Laboratory measurements of the vertical structure of rip currents". *Journal of Geophysical Research* vol. 107 no. C5, 3047.
- Hirsch, C., (1988). "Numerical computation of internal and external flows". , John Wiley & Sons.

- Horikawa, K., (1981). "Coastal Sediment Processes". *Ann. Rev. Fluid Mech* 13, 9-32.
- Idelsohn, S.R., Oñate, E., Calvo, N. and del Pin, F. (2003a). "The meshless finite element method". *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 58,6: 893–912.
- Idelsohn, S.R., Oñate, E. and Del Pin, F. (2003b). "A lagrangian meshless finite element method applied to fluid-structure interaction problems". *Computer and Structures*, 81: 655–671.
- Idelsohn, S.R., Calvo, N. and Oñate, E. (2003c). "Polyhedrization of an arbitrary point set". *Comput. Method Appl. Mech. Engng.*, 192 (22-24): 2649–2668.
- Kennedy, D., Rathbun, J.R., Cox, D.T., Edge, B.L. (1997). "Irregular Wave Transformation and Undertow for Coastal Structures in a Surf Zone". *Ocean Wave Measurement and Analysis*. ASCE.
- Kirby, J. T. (2003). "Boussinesq models and applications to nearshore wave propagation, surfzone processes and wave-induced currents", *Advances in Coastal Modeling*, V. C. Lakhan (ed), Elsevier, 1-41.
- Kirby, J. T. and Dalrymple, R. A. (1994). "Combined Refraction/Diffraction Model REF/DIF 1, Version 2.5. Documentation and User's Manual", Research Report, CACR, University of Delaware, DE, USA.
- Li, S., Shibayama, T. (2000). "Calculation of wave-induced longshore current in surf zone by using Boussinesq equations". In *Proc. 27th Coastal Eng. Conf.* 334-354.
- Li, S., Liu, W.K. (2002). "Meshfree and particle methods and their applications". *Appl. Mech. Rev.* vol. 55, no. 1. ASME
- Lin, P., Liu, P.L.-F., (1998). "A numerical study of breaking waves in the surf zone". *Journal of Fluid Mechanics* 359, 239– 264.
- Liu, G.R. (2003). "Mesh free methods, moving beyond the finite element method". CRC Press LLC
- Madsen, P A. and Sørensen, O. R. (1992). "A New Form of the Boussinesq Equations with Improved Linear Dispersion Characteristics, Part 2: A Slowly-varying Bathymetry". *Coastal Eng.*, 18, 183-204.
- Madsen, P.A., Sørensen, O.R. and Schäffer, H.A. (1997). "Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model. Part I: Model description and cross-shore motion of regular waves". *Coastal Eng.*, 32, 255-288.
- Madsen, P.A., Sørensen, O.R. and Schäffer, H.A. (1997). "Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model. Part II: Surf beat and swash zone oscillations for wave groups and irregular waves". *Coastal Eng.*, 32, 289-320.
- Mei, C.C. (1983). "The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves". Wiley-Interscience.
- Mei, C.C., Liu, P.L.-F (1993). "Surface waves and coastal dynamics". *Ann. Rev. Fluid Mech* 25, 215-40.

Miller, G.L., Pav, S.E., Walkington, N.J. (2002). "Fully incremental 3D Delaunay Refinement Mesh Generation". Proceedings 11th International Meshing Roundtable 75-86, Sandia National Laboratories,.

Montoya, J. (1996). "Efectos del esfuerzo radial del oleaje en la generación de corrientes litorales", Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional, México.

Odgaard, A., Nielsen, B.K. (2002). "A visual implementation of Fortune's Voronoi algorithm".
[disponible en <http://www.diku.dk/hjemmesider/studerende/duff/Fortune/>]

Oñate, E., Idelsohn, S.R., Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (1996). "A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow". Int. J. Num. Meth. Eng. 39, 3839-66.

Oñate, E., Manzán, M. (1999). "A GENERAL PROCEDURE FOR DERIVING STABILIZED SPACE-TIME FINITE ELEMENT METHODS FOR ADVETIVE-DIFFUSIVE PROBLEMS". Int. J. Numer. Meth. Fluids 31, 203-221.

Oñate, E., Idelsohn, S.R., Del Pin, F., Aubry, R. (2004). "The Particle Finite Element Method. An overview". International Journal of Computational Methods Vol. 1 No. 2, 267-307.

Oñate, E., Celigueta, M.A., Idelsohn S.R. (2006). "Modeling bed erosion in free surface flows by the particle finite element method". Acta Geotechnica 1:237-252.

Oñate, E., Valls, A., García, J. (2006b). "FIC/FEM formulation with matrix stabilizing terms for incompressible flows at low and high Reynolds numbers". Comp. Mech. 38:, 440-455.

Oñate, E., Zárate, F. (2007). "Teoría General del Método de los Elementos Finitos". Apuntes del Master Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería. CIMNE, Barcelona.

Park, K., Borthwick, A.G.L, Rogers, B. (2000). "Q-tree model of nearshore flows at multi-cusps". In Proc. 27th Coastal Eng. Conf. 3419-3430.

Peregrine, D.H. (1983). "Breaking waves on beaches". Ann. Rev. Fluid Mech 15, 149-78.

Peregrine, D.H. (1998). "Surf Zone Currents". Theoret. Comput. Fluid Dynamics 10, 295-309.

Pereyra, V., Scherer, G., González, P (2007). "Radial function collocation solution of partial differential equations in irregular domains". Int. J. Computing Science and Mathematics, Vol. 1, No. 1.

Price, J.F. (2006). "Lagrangian and Eulerian Representations of Fluid Flow: Kinematics and the Equations of Motion". Woods Hole Oceanographic Institution, Woods Hole, MA.

Rogers, B., Borthwick, A.G.L, Taylor, P.H. (2002). "Gudonov-type model of wave induced nearshore currents at a multicusped beach in the UKCRF". Int Coastal Eng.

- Rosenos E.D., (1998). "Guía para la elaboración de protocolos de investigación". Segunda Edición, Instituto Politécnico Nacional.
- Shao, S., Gotoh, H. (2005). "Turbulence particle model for tracking free surfaces". *Journal of Hydraulic Research* Vol 43, No 3, pp 276-289
- Sánchez, A., Lemos, C.M. (1990). "Surf-zone hydrodynamics". CIMNE, Barcelona.
- Schmidt, W.E., Guza, R.T., Slinn, D.N. (2005). "Surf zone currents over irregular bathymetry: Drifter observations and numerical simulations". *Journal of Geophysical Research* vol. 110, C12015.
- Schneiders, R. (2000). "Mesh Generation: Software". [disponible en <http://www-users.informatik.rwth-aachen.de/~roberts/software.html>]
- Sethian, J.A., Smereka, P. (2003). *Level Set Methods for Fluid Interfaces*. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 35,341–372.
- Shepard, F. P., Inman, D. L. (1950). "Nearshore water circulation related to bottom topography and wave refraction". *EOS Trans AGU* 31, 196-212.
- Shi, F., Kirby, J.T., Hanes, D.M. (2007). "An efficient mode-splitting method for a curvilinear nearshore circulation model". *Coastal Engineering* 54, 811-824.
- Smagorinsky, J., (1963). "General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic Experiment". *Monthly Weather Review* 91, 99– 164.
- Smith, J.A., Largier, J.L. (1995). "Observations of nearshore circulation: Rip currents". *Journal of Geophysical Research* vol.100 no. C6, 967-975.
- Sørensen, O.R. and Sørensen. L.S. (2000). "Boussinesq type modelling using unstructured finite element technique". In *Proc. 27th Coastal Eng. Conf.* 190-202.
- Stive, M.J.F. and de Vriend, H.J. (1987). "Quasi-3D Nearshore current modeling: wave-induced secondary current". *Coastal Hydrodynamics*, ASCE.
- Sukumar, N. (2001). "Sibson and non-Sibsonian interpolants for elliptic partial differential equations". In *Proceedings of the first MIT Conference on Fluid and Solid Mechanics*, vol. 2 1665-1667, Bathe K.J. (ed.) Elsevier Press.
- Sukumar, N., Moran, B., Semenov, Y., Belikov, V.V. (2001). "Natural neighbour Galerkin methods". *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 50,1-27.
- Svedsen, I.A., Hass, K.A., Zhao, Q (2000). "Analysys of rip currents systems". In *Proc. 27th Coastal Eng. Conf.* 1127-1139.
- Svedsen, I.A., Hass, K.A., Zhao, Q (2002). "Quasi-3d nearshore circulation model SHORECIRC". *Research Report, CACR, University of Delaware, DE, USA.*
- The COMET Program (2004). "Rip currents: Nearshore Fundamentals". [disponible en <https://www.meted.ucar.edu/>]
- Ting, F.C.K., Kirby, J.T., (1994). "Observation of undertow and turbulence in a laboratory surf zone". *Coastal Engineering* 24, 51– 80.

- Ting, F.C.K., Kirby, J.T., (1995). "Dynamics of surf-zone turbulence in a strong plunging breaker". *Coastal Engineering* 24, 177– 204.
- Ting, F.C.K., Kirby, J.T., (1996). "Dynamics of surf-zone turbulence in a spilling breaker". *Coastal Engineering* 27, 131– 160.
- Vergara, M.A. (1993). "Técnicas de modelación en hidráulica". Alfaomega-IPN, México.
- Vergara, M.A. (2003). "Transporte de sedimento en bermas de tormenta por rebase de oleaje". Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.
- Vergara, M.A. (2006). "Tópicos en procesos costeros". IPN, México.
- Walstra, D.J.R., Roelvink, J.A., Groeneweg, J. (2000). "Calculation of Wave-Driven Currents in a 3D Mean Flow Model". In *Proc. 27th Coastal Eng. Conf.* 1050-1063.
- Wang, J.P., Borthwick, A.G.L., Taylor, R.E. (2003). "Finite-volume type VOF method on dynamically adaptive quadtree grids". *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 00:1-22.
- Wind, H.G., Vreugdenhil (1986). "Rip current generation near structures". *J. Fluid Mech.* 171, pags 459-476
- Yoo, D. (1986), "Mathematical Modelling of Wave-Current Interacted Flow in Shallow Waters", Ph.D. Thesis, University of Manchester, U.K.
- Yu, J., Slinn, D.N. (2003). " Effects of wave-current interaction on rip currents". *Journal of Geophysical Research* vol. 108 no. C3,3088.
- Zhao, Q., Armfield, S., Tanimoto, K. (2004). "Numerical simulation of breaking waves by a multi-scale turbulence model". *Coastal Engineering* 51, 53– 80.
- Zhang, H. (2005). "A Deterministic Combination of Numerical and Physical Models for Coastal Waves". Ph.D. Thesis, Technical University of Denmark.
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (2000). "The finite element method". 5th Edition, 3 Volumes, Butterworth–Heinemann.
- Zimmer, H. (2005). "Voronoi and Delaunay Techniques".
[disponible en <http://www.henrikzimmer.com/>]