A105-00133-1

El concepto de infinito matemático en los estudiantes

Ramón Sebastián Salat Figols
Escuela Superior de Física y Matemáticasdel IPN.
rsalat@esfm.ipn.mx

Eje temático: Métodos de aprendizaje. Análisis del proceso de aprendizaje.

El objetivo de este trabajo es conocer las concepciones del infinito matemático de los estudiantes del primer semestre de la Licenciatura en Física y Matemáticas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas. Se aplicó un cuestionario al principio del curso de Cálculo I de la licenciatura y se analizan los resultados. Se observa que las concepciones del estudiante del infinito son confusas y aún, en ocasiones, contradictorias.

Palabras clave: infinito, cálculo.

Introducción.

Una de las dificultades importantes en el aprendizaje del Cálculo está relacionada con el concepto el infinito (Hitt). De hecho un primer curso de Cálculo en escuelas de ciencias, actualmente, presupone la aceptación del concepto de infinito al estilo de George Cantor. Pero, ¿qué tan lejos están las concepciones del estudiante de este concepto? Esa es la pregunta que se tratará de responder en una primera aproximación.
Este trabajo es una primera parte de un proyecto más amplio cuyo propósito es estudiar la relación entre la concepción acerca del infinito de estudiante con su aprovechamiento escolar en Cálculo.

Metodología.

Se aplicó un cuestionario de ocho preguntas a los estudiantes de Cálculo I de la Licenciatura en Física y Matemáticas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas. Se clasificaron las respuestas para cada reactivo y se caracterizaron los diferentes tipos de contradicciones manifestadas. Con estos elementos se analizaron las respuestas de los estudiantes.

Análisis de datos y discusión de resultados.

El cuestionario aplicado fue el siguiente:

Nombre____

1. Escriba la expresión decimal que corresponde a $\frac{1}{3}$.________________

2. ¿Qué otra representación puede darse al número 0.9999....? (Los puntos suspensivos indican que el dígito 9 se repiten en una cantidad mayor que cualquier número).________________________

3. Si $x = 0.999\ldots$, $10x = 9.999\ldots$. La parte decimal de 10x, ¿tiene la misma cantidad de nueves que la parte decimal de x, o tiene más, o tiene menos?____

4. Considere los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de la figura.

A__________B

C______________________________D

¿$\overline{CD}$ Tiene más, igual o menos puntos que $\overline{AB}$?

____

5. ¿Hay igual cantidad de enteros positivos que de enteros positivos pares, o más, o menos?

____

6. La afirmación "el todo es mayor que cualquiera de sus partes", ¿es siempre verdadera?

______¿porqué?____

7. ¿Es cierta la igualdad 0.999......=1? (los puntos suspensivos indican que el dígito 9 se repiten en una cantidad mayor que cualquier número)____

8. ¿Es cierta la igualdad $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots = 1$?____

La pregunta 1 solamente es para detectar si los estudiantes tienen presente que los racionales tienen una representación decimal infinita o solamente conciben una aproximación.
La 2, la 7 y la 8 están relacionadas. En la 2 se pretende conocer si son capaces de indicar por sí mismos si la expresión decimal 0.999… corresponde a 1. La 7, pretende detectar si ellos no aceptan la igualdad de ambas representaciones. La 7, pretende detectar si aceptan que una suma infinita pueda tener como resultado un número real.
La 4, la 5 y la 6, tratan de detectar hasta qué punto y en diferentes contextos, los alumnos aceptan que el todo puede tener la misma cantidad de elementos que una parte cuando se trata de conjuntos infinitos.
Las respuestas se clasificaron del siguiente modo:

Pregunta 1.

a	cifras correctas con puntos suspensivos.
b	cifras correctas sin puntos suspensivos.
e1	cifras incorrectas con puntos suspensivos.
e2	cifras incorrectas sin puntos suspensivos.

Pregunta 2.

a	1; respuesta correcta.
b	$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots$.
c	0.99.
e	error.

Pregunta 3.

a	igual cantidad.
b	tiene más.
c	no contestó.

Pregunta 4.

a	igual cantidad.
b	mayor cantidad.

Pregunta 5.

a	igual.
b	igual en el infinito.
c	más.
x	no contestó.

Pregunta 6.

a no.
b sí.
x no contestó.

Pregunta 7.

a sí.
b no.
x no contestó.

Pregunta 8.

a sí.
b no.
x no contestó.

Las caracterizaciones de las posibles contradicciones son las siguientes:

Respuestas fuertemente incompatibles:
A1 2a con 7b y 7x
A2 2a con 8b y 8x
Respuestas incompatibles:
B1 7a con 8b, 8x
B2 8a con 7b, 7x
Respuestas lógicamente incompatibles:
C1 4a con 6b y 6x
C2 4a con 5b, 5c y 5x

La matriz de resultados es la siguiente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	b	e	a	b	x	b	b	b	
2	a	a	a	b	a	a	b	b	A1,A2
3	a	b	a	b	c	x	x	x	
4	a	e	a	b	a	b	b	b	
5	b	e	x	b	x	a	b	b	
6	a	a	a	b	a	b	a	a	
7	e	b	b	a	a	b	x	a	C1
8	a	e	a	a	x	a	a	a	C2
9	e	b	b	a	c	a	b	b	C2
10	a	b	a	a	a	a	a	a	
11	a	b	a	a	a	b	a	a	C1
12	a	a	a	a	a	b	a	a	C1
13	b	b	a	a	a	b	a	a	C1
14	a	x	b	a	a	b	b	b	C1
15	a	e	a	b	c	b	b	b	
16	a	e	a	b	c	b	b	b	
17	a	b	a	x	a	b	a	a	
18	a	e	a	a	a	b	a	a	C1
19	a	e	a	b	a	b	b	b	
20	a	e	b	x	x	b	b	b	
21	a	b	a	b	a	a	b	b	
22	a	b	a	b	b	b	a	a	
23	a	e	a	a	b	a	b	b	C2
24	a	e	a	b	b	a	b	a	
25	a	b	a	b	a	b	a	a	
26	a	e	x	a	a	b	b	b	C1
27	a	b	a	a	a	b	b	a	B2,C1
28	a	e	a	a	b	b	b	b	C1,C2
29	a	a	a	b	b	b	a	a	
30	a	e	a	a	b	b	b	b	C1,C2
31	a	e	a	a	b	b	b	a	C1,C2
	26	4	25	15	16	8	11	15	
	3	11	4	14	7	22	18	15	
					4				
	2	15							
		1	2	2	4	1	2	1	

En esta matriz, las filas representan estudiantes y las columnas reactivos; las entradas corresponden a los tipos de respuestas dadas. En la columna de la derecha están las contradicciones encontradas y en las últimas seis filas están las frecuencias absolutas de los diferentes tipos de respuesta para cada reactivo.
Solamente 4 de los 31 estudiantes escribieron 1 como otra expresión para 0.999…
Sin embargo, una de las respuestas correctas puede invalidarse porque en el caso 3, la respuesta a 2 fue a y a 7 fue b. En la pregunta 2, agregó la palabra redondeamos y en la 7, es una aproximación.
Algunos de ellos consideraron que la igualdad solamente es una aproximación y que la diferencia entre ellas es infinitesimal.
Solamente 8 de los 31 contestaron que no siempre es válida la afirmación de que el todo es mayor que una parte.
Poco menos de la mitad, 11 de 31, contestaron que la igualdad 0.999...=1 es verdadera. 15 de 31, contestaron que la igualdad $\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\ldots=1$ es válida.
Excepto para las preguntas 1 y 3, los porcentajes de respuestas correctas son inferiores al 50%.
Las respuestas fuertemente incompatibles solamente se dieron en un estudiante (2), al igual que las incompatibles. Las contradicciones lógicamente incompatibles, se dieron en 14 de los 31 estudiantes; esto es razonable porque para percibir tales contradicciones es necesario hacer deducciones a partir de algunas premisas para obtener otras. Por ejemplo, si en la pregunta cuatro contestaron que los dos segmentos tienen la misma cantidad de puntos, entonces en la pregunta seis tenían que aceptar que no siempre el todo es mayor que alguna de sus partes.

Conclusiones.

De los resultados se desprende que las concepciones del infinito que tienen los estudiantes a los que se aplicó el cuestionario, manifiestan incongruencias; muy pocos aceptan que 0.999… sea igual a 1; aproximadamente, solamente la mitad aceptan que el todo pueda tener la misma cantidad de elementos que una de sus partes. Una posible interpretación del último resultado mencionado es que la intuición de los estudiantes está ligada al mundo material y en éste, solamente hay conjuntos finitos. Aceptar que el todo pueda tener una misma cantidad de elementos que alguna de sus partes solamente puede concebirse en una creación intelectual, como lo es la del infinito.
Si estas concepciones del estudiante no van cambiando a lo largo del curso de cálculo, es previsible que los estudiantes tengan dificultades de carácter epistemológico.
Por otro lado, sorprende el hecho de que en varias investigaciones sobre el tema se hace referencia solamente al infinito de Cantor, pero s excluyen otras posibilidades que resulta de construir otra estructura numérica donde no valga la propiedad arquimediana.

Referencias.

Garbin, S (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años al infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Relime, Vol. 8, Num. 2. México.

Hitt, F. El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo: Infinito potencial versus infinito real. www. matedu.cinvestav.mx/~matedul/investigación/artículos pdf/ Hitt.pdf. Descargado el 1 de marzo de 2009.

Ímaz, C (2001). ¿Qué pasa con el infinito? Avance y Perspectiva. Vol. 20. México: CINVESTAV.

Kim, D; Sfard, A; Ferrini-Mundy, J (2005). Student's Colloquial and Mathematical Discourses on Infinity and Limit. Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 201-208. Melbourne: PME.