

# Instituto Politécnico Nacional

---

---

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA  
Y TECNOLOGÍA AVANZADA**

UNIDAD QUERÉTARO

POSGRADO EN TECNOLOGÍA AVANZADA

## **Diseño de una suspensión magnética para la determinación de densidad de líquidos**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRÍA EN TECNOLOGÍA AVANZADA**

PRESENTA

**Luz María Centeno González**

Director de Tesis:

**Dr. Eduardo Castillo Castañeda**



Querétaro, Qro. enero del 2012.



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*ACTA DE REVISIÓN DE TESIS*

En la Ciudad de Querétaro siendo las 17h00 horas del día 22 del mes de noviembre del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA para examinar la tesis titulada:

**Diseño de una Suspensión Magnética para la determinación de Densidad de Líquidos**

Presentada por el alumno:

Centeno González Luz María  
Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)

Con registro: 

B	0	9	1	6	5	4
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

Maestría

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director de tesis

Dr. Eduardo Castillo Castañeda

  
M. en C. Luis Omar Becerra Santiago  
Dr. Eduardo Morales Sánchez  
M. en C. Maximiano Francisco Ruiz Torres  
M. en C. Ignacio Hernández Gutiérrez

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

  
Dr. Jorge Huerta Ruelas



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

En la Ciudad de Querétaro el día 22 del mes noviembre del año 2011, el (la) que suscribe Luz María Centeno González alumno (a) del Programa de Maestría en Tecnología Avanzada con número de registro B091654 adscrito a CICATA – Unidad Querétaro IPN, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Eduardo Castillo Castañeda y cede los derechos del trabajo intitulado Diseño de una Suspensión Magnética para la Determinación de Densidad de Líquidos, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección CICATA –Unidad Querétaro, IPN, Cerro Blanco #141, Colinas del Cimatarío, C.P. 76090, Querétaro, Qro., México. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Luz María Centeno González

Nombre y firma



---

# **Diseño de una suspensión magnética para la determinación de densidad de líquidos**

Luz María Centeno González

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada  
Instituto Politécnico Nacional  
Querétaro, México.

---

## **Agradecimientos**

### ***IN MEMORIAM***

A mi madre y a Tita, por todo su amor y dedicación, las quiero.... siempre

Al Ing. Félix Pezet Sandoval, por su apoyo incondicional y cariño durante todos los años en que lo conocí.

---

---

## **Agradecimientos**

A CENAM, por el apoyo económico recibido y el tiempo que no laboré mediante SIDEPRO para mis estudios de posgrado.

A todos los profesores que me apoyaron, por sus consejos y paciencia.

Al Dr. Eduardo Castillo Castañeda por su dirección y consejos durante el desarrollo de este proyecto.

Al CONACYT por el apoyo económico durante el desarrollo de este proyecto.

Al Dr. Héctor O. Nava Jaimes y al Dr. Ignacio Hernández Gutiérrez por su apoyo incondicional en mi formación profesional.

A mi papá y mi hermana, por estar siempre que los necesito.

A mi familia: suegros, cuñadas, concuños y mis sobrinitos.....por todo su amor y apoyo incondicional.

A mis tías y primas, gracias por estar cerca de mí.

A mi esposo Gonzalo, por su amor, apoyo para que yo siga creciendo profesionalmente y por toda su paciencia.

A mis hijos por permitirme robarles de su tiempo para dedicárselo a estos estudios.

A Luis Omar Becerra y Luis Manuel Peña, por sus consejos y apoyo para el desarrollo de este proyecto.

A mis compañeros de la División de Masa y Densidad, por todo su apoyo y todas sus porras, Arturo Daued, Julio, Flor, Goyo, Carlos, Charly, Luis Javier, Luis Manuel Ramirez, Victor y José Luis.....Gracias!!!!.

A Alberto (fuingi) Rochin García, por el apoyo técnico para el desarrollo de este proyecto.

A Gregorio Alvarez Clara por su apoyo en diseño mecánico.

A los compañeros del CENAM que aportaron con ideas para la realización de este proyecto.

---

---

## ÍNDICE GENERAL

<b>CAPITULO I Introducción General .....</b>	<b>15</b>
1.1 Antecedentes.....	15
1.2 Objetivos .....	16
1.2.1 Objetivo General .....	16
1.2.2 Objetivos Específicos .....	17
1.3 Justificación .....	17
1.4 Estructura de la tesis .....	18
<b>CAPITULO 2 Estado del arte .....</b>	<b>19</b>
2.1 Sistemas de suspensión magnética.....	19
2.1.1 Propuestas de representación del sistema dinámico: .....	20
2.2 Sistemas de Medición de Densidad de Líquidos mediante una técnica de suspensión magnética.....	27
2.2.1 Sistema de medición de densidad de líquidos por suspensión magnética del Instituto Nacional de Mediciones de Australia .....	28
2.2.2 Sistema de medición de densidad de líquidos por suspensión magnética del Instituto Nacional de Metrología de Japón.....	29
2.2.3 Sistema de medición de densidad de líquidos por suspensión magnética del Instituto Nacional de Metrología Alemania .....	30
<b>CAPITULO 3 Marco Teórico.....</b>	<b>32</b>
3.1 La magnitud de densidad .....	32
3.2 Principios de metrología de densidad .....	32
3.2.1 El agua como patrón de densidad.....	32
3.2.2 Patrones sólidos de densidad.....	34
3.2.3 Métodos para medir densidad .....	35
3.2.4 Suspensión magnética en la determinación de densidad de líquidos .....	37
3.3 Elementos de la Teoría Electromagnética .....	40
3.4 Principios de Levitación.....	43
3.5 Representación matemática de sistemas .....	44
3.6 Control PID.....	46
3.6.4 Controlador PID.....	46
<b>CAPITULO 4 Diseño Banco de Prueba .....</b>	<b>47</b>
4.1 Requerimientos de estabilidad del sistema.....	47
4.2 Sensor de Posición.....	53

4.2.1 Características sensor PSD (Positional Sensor Detector) .....	54
4.2.2 Principio de Funcionamiento .....	54
4.2.3 Caracterización sensor de posición .....	55
4.3 Diseño bobina .....	57
4.4 Banco de prueba .....	60
<b>CAPITULO V Control de la Suspensión Magnética.....</b>	<b>61</b>
5.1 Identificación de sistemas .....	61
5.2 Respuesta del sistema de suspensión magnética .....	63
5.3 Desempeño del sistema de suspensión magnética .....	75
<b>CAPITULO 6 Conclusiones y Trabajo futuro .....</b>	<b>78</b>
6.1 Conclusiones.....	78
6.2 Productos de Investigación .....	80
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>
<b>ANEXO A</b>	<b>83</b>
<b>ANEXO B</b>	<b>85</b>
<b>ANEXO C</b>	<b>91</b>
<b>ANEXO D</b>	<b>93</b>
<b>ANEXO E</b>	<b>97</b>

### Lista de Figuras

Fig. 2.1 Sistema de suspensión magnética básico .....	20
Fig. 2.2 Representación eléctrica de la suspensión magnética.....	21
Fig. 2.3 Comportamiento Inductancia vs distancia del objeto a levitar del núcleo .....	21
Fig. 2.4 Sistema de medición por suspensión magnética por Bignell .....	28
Fig. 2.5 Acoplamiento Magnético sistema de medición por suspensión magnética por Kuramoto et. Al. ....	30
Fig. 2.6 Esquema general de balanza suspensión magnética PTB .....	31
Fig. 3.1 Patrones sólidos de densidad de Zerodur .....	35
Fig. 3.2 Sistema de Pesada Hidrostática del Patrón Nacional de Densidad .....	35
Fig. 3.3 Diagrama básico de empuje por fuerza magnética .....	37
Fig. 3.4 Diagrama básico de un sistema de una balanza de suspensión magnética.....	39
Fig. 3.5 Sistema de control de lazo cerrado .....	46
fig. 4.1 Resultados de simulación .....	49
fig 4.2 Análisis de sensibilidad variables de entrada .....	49

---

fig 4.3 Diagrama de fuentes de incertidumbre para la determinación de densidad de líquidos	50
Fig. 4.4 Sensor de posición de cuatro cuadrantes.....	54
Fig. 4.5 Montaje del sistema óptico .....	55
Fig. 4.6 Diagrama de conexión para sensor de cuatro cuadrantes .....	56
Fig. 4.7 Respuesta de sensor de cuatro cuadrantes.....	56
Fig. 4.9 Comportamiento del campo magnético variando I, z .....	59
Fig. 4.10 Fuerza magnética con respecto a una distancia.....	59
Fig. 4.11 Banco de prueba de la suspensión magnética .....	60
Fig. 5.1 Sistema en lazo abierto .....	63
Fig. 5.2 Arreglo del sensor óptico .....	64
Fig. 5.3 Esquema general de control en lazo cerrado.....	64
Fig. 5.4 Respuesta del sistema variando $K_p$ .....	65
Fig. 5.5 Respuesta del sistema con $K_p=3.6$ , $T_d=3.125e-5$ aprox. aumentando	65
Fig. 5.6 Respuesta del sistema con $K_p=3.8$ .....	65
Fig. 5.7 Respuesta del sistema de suspensión magnética controlado.....	66
Fig. 5.8 Ajuste de curva con mínimos cuadrados orden 2 .....	67
5.9 Diagrama a bloques de la función de transferencia del sistema de suspensión.....	68
5.10 Respuesta de la función de transferencia de una suspensión magnética .....	69
Fig. 5.11 Ajuste de curva con Toolbox de Identificación de Sistemas MatLab.....	71
5.12 Diagrama a bloques función de transferencia modelo continuo .....	72
5.13 Respuesta modelo continuo .....	73
Fig. 5.14 Diagrama a bloques del sistema de suspensión magnética a lazo cerrado .....	74
5.14 Gráfica de comparación de modelos .....	75
5.15 Desempeño del sistema de suspensión magnética .....	76
Fig. 6.1 Sistema de suspensión magnética .....	78
Fig. 6.2 Diseño de celda para medición de densidad de líquidos por suspensión magnética	79
Fig. 1 Sistema de suspensión magnética básico .....	99
Fig. 2 Diagrama básico de empuje por fuerza magnética.....	100

---

## Lista de Tablas

<i>Tabla 4.1 Valores medios de variables de entrada con incertidumbre</i> .....	48
<i>Tabla 4.2 Presupuesto de incertidumbre densidad de líquido</i> .....	51
<i>Tabla. 4.3 valores nominales para calcular fuerza magnética</i> .....	52
<i>Tabla 4.4 Presupuesto de incertidumbre para la fuerza magnética</i> .....	52
<i>Tabla 4.5 Factor R para los diferentes ajustes de curva</i> .....	57
<i>Tabla 5.1 Modelos paramétrico y su estructura</i> .....	62
<i>Tabla 1 Presupuesto de incertidumbre densidad de líquido</i> .....	102
<i>Tabla 2 Presupuesto de incertidumbre fuerza magnética</i> .....	103
<i>Tabla 3 Factor R para diferentes ajustes de curva</i> .....	108

---

## RESUMEN

La densidad es una magnitud derivada de las magnitudes de base: masa y longitud; está definida como masa por unidad de volumen y su unidad en el SI es el  $\text{kg/m}^3$ . Las últimas cinco décadas, dentro del ámbito de metrología primaria, se han desarrollado sistemas de suspensión magnética para la determinación de densidad de fluidos, permitiendo realizar investigaciones sobre las características físicas de líquidos y gases. El presente trabajo tiene como objetivo el diseño y construcción de un sistema de suspensión magnética que será utilizado en una balanza de suspensión magnética para la determinación de densidad de líquidos en los laboratorios de metrología de densidad dentro del CENAM.

En el marco del desarrollo del diseño de la suspensión magnética fue necesario primeramente investigar acerca de dichos sistemas teniendo como aplicación la determinación de densidad de líquidos mediante esta técnica. Se realizó también un estudio de sistemas de suspensión magnética y sus diferentes representaciones matemáticas para poder evaluar el impacto de la variabilidad de estabilidad con respecto a sus magnitudes de entrada. El estudio anterior aporta para la selección del sensor de posición, el cual es importante para la retroalimentación del control en la suspensión.

Se diseñó un control PID y se evaluó el sistema dinámico identificando la función de transferencia mediante mínimos cuadrados y otras técnicas, dando pauta a un trabajo a futuro para mejor conocimiento del mismo.

Se presentan los resultados de la estabilidad de la suspensión obtenida con un control PID, mostrando además el impacto en repetibilidad en masa ya que es importante no olvidar la aplicación que tendrá esta suspensión magnética, en donde la magnitud de entrada de mayor impacto es la repetibilidad del mismo.

---

## **ABSTRACT**

Density is a derived unit from the base units of mass and length, it is defined as the mass of a body per unit of volume and its unit in the International System of Units (SI) is  $\text{kg m}^{-3}$ . In the framework of primary metrology, several suspension magnetic systems, used for fluids density determination, have been developed in the last fifty years, allowing the research on physical properties of liquids and gases.

The aim of this work is to present the design and development of a magnetic suspension system to be used with a suspension magnetic balance for liquid density determination that will be implemented in the density metrology laboratories at CENAM.

For the design of the magnetic suspension, it was necessary to research and choose from different options of systems available by evaluating the impact of the variation on the stability of the suspension related to the variation on the electric current of the bobbin. This study leads to the best selection of the positioning sensor which is important for the feedback of the magnetic suspension control loop.

A PID control was designed and the dynamic system was also evaluated in order to obtain the transfer function by identification with least squares approach and some other techniques, with the purpose of a deeper and better knowledge of the system in future work.

Results on the stability of the suspension obtained by means of the PID control are shown as well as the impact on the repeatability in measurements of the mass, considering that this will be the main application of the magnetic suspension, where the most relevant input quantity is the repeatability of this system.



---

# CAPITULO I      Introducción General

---

## 1.1    Antecedentes

La densidad es una magnitud derivada de las magnitudes de base masa y longitud. Su unidad de acuerdo al sistema internacional es  $\text{kg m}^{-3}$ . La importancia de medir esta magnitud en el sector industrial es amplia, ya que puede ser determinante en la calidad del producto final, por ejemplo en: medicina, industria vinícola, azucarera, petrolera, refresquera, etc. La densidad ( $\rho$ ) de líquidos y gases se mide directamente a nivel industrial mediante instrumentos como: densímetros de inmersión, densímetros digitales, densitómetros de línea para flujo dinámico, picnómetros, etc. Sin embargo todos ellos deben tener trazabilidad a los patrones nacionales de densidad mediante su calibración con líquidos de referencia en densidad certificados. Estos líquidos de referencia se calibran con patrones sólidos de densidad utilizando métodos de alta exactitud para su caracterización.

Uno de los métodos de alta exactitud básicos para las mediciones de densidad de líquidos es por medio de la medición del empuje un fluido o método de pesada hidrostática basado en el principio de Arquímedes [L Becerra, 1998], con el cual se pueden obtener incertidumbres relativas en la densidad de líquidos de hasta  $2 \times 10^{-6}$ . Actualmente en el Centro Nacional de Metrología (CENAM) se emplea este método para dar trazabilidad al país en mediciones de densidad utilizando patrones sólidos de densidad, dos esferas de Zerodur de aproximadamente 1 kg de masa. Sin embargo existe la limitante que en el actual sistema de medición se puede utilizar solo en un intervalo corto de temperatura (de  $5^{\circ}\text{C}$  a  $60^{\circ}\text{C}$ ) a presión atmosférica. El sistema de pesada hidrostática tradicional utiliza una suspensión unida a un alambre que emerge a través de la superficie del líquido, lo cual para mediciones de alta exactitud puede representar una importante fuente de incertidumbre (dependiendo de la tensión superficial del líquido) o puede introducir una fuerte variabilidad al sistema dependiendo la temperatura a la que se esté calibrando el líquido (por la diferencia de temperatura entre el líquido en medición y el aire ambiente), para solucionar este problema se pueden utilizar fuerzas magnéticas

---

para suspender el sólido patrón conectado magnéticamente en lugar de mecánicamente [Bignell, 2006].

En las últimas décadas se han realizado muchos estudios en torno a la levitación magnética tanto en aplicaciones de la industria como en investigación además también, dentro de la metrología científica. En ésta última se han desarrollado diferentes trabajos para determinar la densidad de líquidos o gases utilizando un sistema de suspensión magnética teniendo que solucionar varios inconvenientes, como el hecho de que no es factible utilizar un patrón sólido de un material ferromagnético para ser suspendido, toda vez que es difícil su caracterización en volumen debido a su alto coeficiente de expansión volumétrica al someterlo a diferentes temperaturas introduce una fuente de incertidumbre nada despreciable [Kuramoto, 2004], por otro lado es deseable usar materiales lo mas inerte posible para evitar contaminar al liquido en medición (los materiales ferromagnéticos tienden a oxidarse).

La diferencia sustancial entre los sistemas de suspensión magnética hasta ahora estudiados en la mayoría de los trabajos de grado en el país es que se somete un cuerpo de material ferromagnético a un campo magnético generado por una bobina para hacerlo levitar y en este trabajo se presenta el diseño, la construcción y estudio en estabilidad de una levitación generada por el intercambio de campos magnéticos entre la bobina y un imán permanente, lo cual tiene como objetivo limitar la cantidad de trabajo o calor de la bobina esperando tener con esto una mayor estabilidad en la levitación de la suspensión sobre el eje z. Para mediciones de densidad esto último es muy importante, ya que en el presupuesto de incertidumbre la segunda contribución más importante es la desviación estándar de las mediciones [L Becerra, 1997], y en la suspensión magnética, esta componente estará determinada por la estabilidad sobre el eje z.

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo General**

Diseñar un sistema de suspensión magnética que será utilizado en un sistema de medición para la determinación de densidad de líquidos.

---

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- ✚ Diseño mecánico del tipo de suspensión magnético
- ✚ Diseño de electroimán para sostener una masa máxima  $m_s$  (masa del patrón sólido)
- ✚ Diseño del sistema de medición de posicionamiento
- ✚ Diseño de sistema de control para mantener estable la posición del patrón ( $m_s$ ) respecto a una referencia
- ✚ Construcción del sistema de suspensión magnética
- ✚ Estudio de la estabilidad del sistema

### 1.3 Justificación

Actualmente en los laboratorios de metrología de Densidad del Centro Nacional de Metrología (CENAM) se utiliza el método de pesada hidrostática para brindar los servicios de calibración de densidad de líquidos. Sin embargo, la determinación de densidad de líquidos se hace en un intervalo corto de temperatura (5°C a 60°C) y no se puede variar la presión de los mismos, sólo se hace la corrección correspondiente por el factor de compresibilidad. El contar con un sistema de suspensión magnética diseñado para usarlo dentro de un sistema de medición de densidad de líquidos permitirá iniciar con el estudio y caracterización de los materiales de referencia en densidad aportando su coeficiente de compresibilidad y de expansión térmico.

Además el desarrollo de este tipo de proyectos nos permite estar a la vanguardia en temas de investigación en metrología de densidad con países como Italia, Japón, Alemania, Inglaterra, etc., con quienes hemos realizado comparaciones en densidad de sólidos y líquidos.

---

## 1.4 Estructura de la tesis

En el capítulo 2 se presentan los trabajos más relevantes de sistemas de suspensión magnética desarrollados para la determinación de densidad de líquidos. Se analizan las características y los resultados obtenidos por cada uno de ellos.

En el capítulo 3 se conforma el marco teórico dividido en tres partes; la primera es una introducción a la metrología de densidad teniendo como objetivo establecer los principios de medición tanto del método de pesada hidrostática como de fuerzas magnéticas utilizadas para la determinación de densidad de líquidos. La segunda parte se refiere a los conocimientos necesarios de teoría electromagnética para comprender y posteriormente diseñar la parte electromagnética del sistema de suspensión (diseño de bobina) y en el tercer punto se presentan los tipos de control que pueden ser utilizados para una suspensión magnética.

El diseño a detalle de cada elemento de un sistema de suspensión magnética se presenta en el capítulo 4: diseño de la estructura, diseño del electroimán y diseño del sistema de posición (el cual será la retroalimentación para nuestro control).

Se deja un capítulo completo, capítulo 5, para el diseño del control, ya que se presenta el modelado matemático del sistema y análisis de estabilidad así como el diseño del controlador para obtener una suspensión lo suficientemente estable para ser utilizado en un sistema de medición de densidad de líquidos.

Por último es importante mencionar los trabajos futuros al respecto así como las conclusiones, lo cual se presenta en el capítulo 6.

---

## CAPITULO 2 Estado del arte

---

Los sistemas de suspensión magnética han sido ampliamente estudiados debido a las grandes ventajas que presenta al utilizarlo en sistemas mecánicos, además de aportar un estudio multidisciplinario en temas de educación (electromagnetismo, sistemas de posición, potencia y control). En ese capítulo en la primera parte se mencionan algunos trabajos, estudios y aplicaciones de suspensión magnética. En la segunda parte se presentan los proyectos desarrollados por países como Alemania, Japón y Australia, que en estos se desarrolla una aplicación particular de la suspensión magnética dedicada a sistemas de medición de densidad de líquidos utilizando ésta técnica.

### **2.1 Sistemas de suspensión magnética**

Desde el año de 625 a.C. que se descubrió la interacción de fuerzas entre dos cuerpos: un imán y un cuerpo ferromagnético, el hombre ha tenido gran curiosidad en estudiar este comportamiento. Desde Tales de Mileto, y pasando por grandes científicos como: Hans Christian Oesterd, André-Marie Ampère, Carl Friedrich Gauss, Michel Faraday hasta llegar a Maxwell, fueron dando forma al conocimiento sobre las fuerzas electromagnéticas.

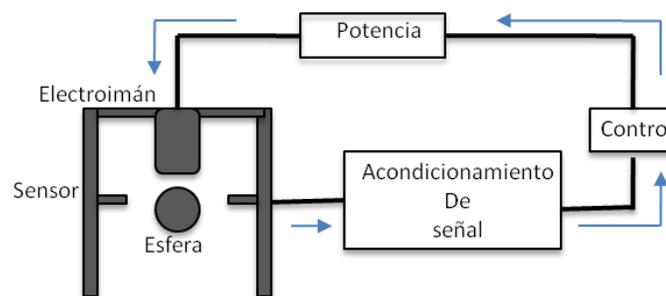
Uno de los fenómenos más estudiados en cuanto a la aplicación de fuerzas magnéticas es la suspensión magnética, la cual ayuda a reducir o eliminar la vibración, rozamiento o ruido de un sistema mecánico.

Una de las principales aplicaciones de la suspensión magnética son los MAGLEVs (MAGnetically LEvited Vehicles). Un vehículo de levitación magnética es aquel en el cual se utiliza el magnetismo para suspenderlo a pocos milímetros de una vía, el sistema cuenta con varias guías que evitan que el vehículo se desvíe a los lados, así como un sistema de propulsión. Países como Alemania y Japón cuentan con este tipo de transporte. Sin embargo, este tipo de sistemas de suspensión quedan en base experimental, ya que son sistemas muy costosos.

---

Otra aplicación de la suspensión magnética es en rodamientos magnéticos, ampliamente utilizados en motores eléctricos.

El sistema de suspensión magnética en sí, ha sido estudiado y desarrollado en trabajos como el presentado por **William G. Hurley** et al, **Wilfredo Ziehlmann**, et al o **Takeshi Mizuno** et al. En estos trabajos el común denominador es el tipo de sistema formado por: un electroimán, un cuerpo ferromagnético, el sistema de detección de posición y control de lazo cerrado, figura 2.1.



*Fig. 2.1 Sistema de suspensión magnética básico*

En una primera aproximación Hurley presenta una serie de ecuaciones para el diseño del electroimán en busca de un funcionamiento óptimo del sistema electromagnético; además, plantea la representación matemática del sistema dinámico, como punto de partida para proponer un tipo específico de control [Hurley, 1997]. Por otro lado Ziehlmann realiza el diseño e implementación de un levitador electromagnético con sensores de posición y velocidad, los cuales efectúan una acción correctiva en la corriente del electroimán para buscar una fuerza de atracción estable sobre un cuerpo ferromagnético móvil [Ziehlmann, 2000].

### 2.1.1 Propuestas de representación del sistema dinámico:

La representación eléctrica de la fig. 2.1 queda como:

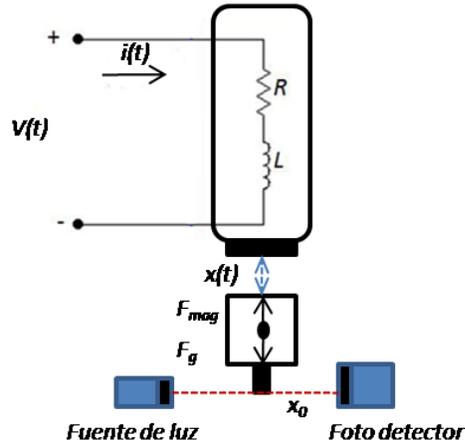


Fig. 2.2 Representación eléctrica de la suspensión magnética

1.- William G. Hurley et al, plantea el sistema en base al comportamiento de la inductancia en relación a la distancia del objeto a levitar. En base a la figura 1, obtuvieron experimentalmente la siguiente relación entre distancia-inductancia

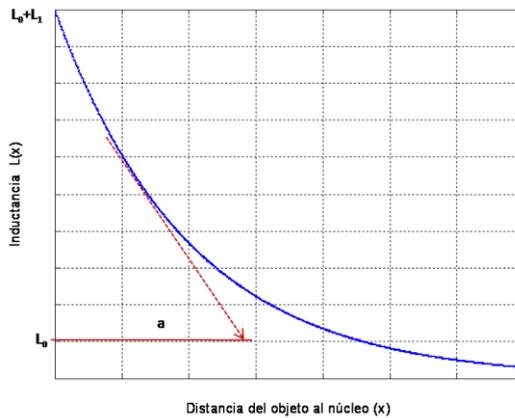


Fig. 2.3 Comportamiento Inductancia vs distancia del objeto a levitar del núcleo

Principios planteados:

1.- La inductancia de la bobina varía conforme a la posición del cuerpo en función de:

---

a)  $L_1$  es la inductancia cuando el cuerpo  $f$  se mueve ( $x=\infty$ )

b)  $L_0 + L_1$  es la inductancia cuando el cuerpo está en contacto con la bobina ( $x=0$ )

Una buena aproximación matemática del comportamiento anterior es:

$$L(x) = L_1 + L_0 e^{-x/a} \quad \text{ec. 2.1}$$

donde  $a$  es una constante de la distancia.

Por definición la energía almacenada en una bobina está dada por (Libro física):

$$W = \frac{Li^2}{2} \quad \text{ec. 2.2.}$$

Por lo que la energía magnética del sistema en función de una corriente  $i$  y una separación  $x$  puede estar definida por:

$$W(i, x) = \frac{1}{2} L(x) i^2 \quad \text{ec. 2.3}$$

La fuerza magnética que actúa sobre el cuerpo está definida por:

$$f = \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{L_0}{2a} i^2 e^{-x/a} \quad \text{ec. 2.4}$$

El equilibrio de esta fuerza estaría dado por el contrapeso de la masa (fuerza debida a la gravedad) en un punto  $x = d$ ,  $i = I$

$$Mg = \frac{L_0}{2a} e^{-d/a} I^2 = \frac{N^2 L_d I^2}{2a} \quad \text{ec. 2.5}$$

Donde  $N$  es el número de vueltas de la bobina,  $L_d$  es la inductancia incrementada a  $x=d$  y  $g$  es la gravedad. De aquí:

$$I = \sqrt{\frac{2Mg a}{N^2 L_d}} \quad \text{ec. 2.6}$$

Sistema dinámico

---

La fuerza sobre el cuerpo es:

$$f(i, x) = -\frac{1}{2a} L_0 e^{-x/a} i^2 \quad \text{ec. 2.7}$$

Considerando la perturbación sobre el equilibrio  $x=d$ ,  $i=i'$ :

$$\begin{aligned} x &= d + x' \\ i &= I + i' \\ f &= f + f' \end{aligned} \quad \text{ec. 2.8}$$

La serie de Taylor está definida como:

$$f(i, x) = f(I, d) + \frac{\partial f}{\partial x_{1,d}} x' + \frac{\partial f}{\partial i_{1,d}} i' \quad \text{ec. 2.9}$$

Sustituyendo:

$$f' = \frac{1}{2a^2} L_0 e^{-x/a} I^2 x' - \frac{1}{a} L_0 e^{-d/a} I i' \quad \text{ec. 2.10}$$

La fuerza mecánica en base a la 2ª. Ley de Newton es:

$$f_m = Mg + M \frac{d^2 x'}{dt^2} \quad \text{ec. 2.11}$$

Recordando:

$$Mg = \frac{L_0}{2a} e^{-d/a} I^2 = \frac{N^2 L_d I^2}{2a}$$

Y considerando que en equilibrio:

$$Mg = f(I, d)$$

Tomando la ecuación de incremento tenemos:

$$M \frac{d^2 x'}{dt^2} - \left( \frac{N^2 L_d I^2}{2a^2} x' + \frac{N^2 L_d I}{a} i' \right) = 0 \quad \text{ec. 2.11}$$

Aplicando la transformada de Laplace y colocando la salida (posición) con respecto a la entrada (corriente) nos queda:

$$\frac{X(s)}{I(s)} = \frac{-2g/I}{s^2 - w_n^2} \quad \text{ec. 2.12}$$

donde:

$$w_n = \sqrt{g/a} \quad \text{ec. 2.13}$$

La ecuación anterior representa la planta de transferencia que relaciona la corriente de la bobina con la posición del cuerpo a levantar.

2.- Retomando la fig. 2, el sistema dinámico de la suspensión magnética está descrito tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

- a) La fuerza magnética es proporcional al cuadrado de la corriente e inversamente proporcional a la distancia entre la esfera y el núcleo de la bobina. El equilibrio de fuerzas se obtiene:

$$M \frac{d^2h}{dt^2} = Mg - \frac{Ki^2}{h} \quad \text{ec. 2.14}$$

- b) el equilibrio en voltaje en el circuito se puede calcular, (leyes de Kirchoff):

$$V = L \frac{di}{dt} + Ri \quad \text{ec. 2.15}$$

Suponiendo que la corriente es tal que la esfera se mantiene estacionada en una distancia  $h_s$ . Ahora, podemos aplicar una derivada para conocer la desviación de  $h$  cuando  $i$  tiene una variación.

La fuerza correspondiente al punto estacionado puede ser modelado como:

$$M \frac{d^2h_s}{dt^2} = Mg - \frac{Ki^2}{h_s} = 0 \quad \text{ec. 2.16}$$

Calculando la diferencia entre la ec.2.14 y ec.2.15

$$\frac{d^2 \Delta h}{dt^2} = \frac{K i_s^2}{M h_s} - \frac{K i^2}{M h} \quad (4) \quad \text{ec. 2.16}$$

Linealizando hacia el lado derecho en un punto estacionario, obtenemos:

$$\frac{i^2}{h} = \frac{i_s^2}{h_s} + 2 \frac{i}{h} \Big|_{(i_s, h_s)} \Delta i - \frac{i^2}{h^2} \Big|_{(i_s, h_s)} \Delta h = \frac{i_s^2}{h_s} + 2 \frac{i_s}{h_s} \Delta i - \frac{i_s^2}{h_s^2} \Delta h \quad \text{ec. 2.17}$$

Sustituyendo en la ec 2.16

$$M \frac{d^2 \Delta h}{dt^2} = K \left[ \frac{i_s^2}{h_s} + \frac{2i_s}{h_s} \Delta i - \frac{i_s^2}{h_s^2} \Delta h - \frac{i_s^2}{h_s} \right] \quad \text{ec. 2.18}$$

Simplificando:

$$\frac{d^2 \Delta h}{dt^2} = \frac{K}{M} \frac{i_s^2}{h_s^2} \Delta h - 2 \frac{K}{M} \frac{i_s}{h_s} \Delta i \quad \text{ec. 2.19}$$

Ahora el voltaje en una variación a  $h_s$  sería:

$$V_s = L \frac{di_s}{dt} + R i_s \quad \text{ec. 2.20}$$

Sustrayendo de la ec. 2.15:

$$\Delta V = L \frac{d\Delta i}{dt} + R \Delta i \quad (8) \quad \text{ec. 2.21}$$

Buscando tener la representación en espacio de estado, se definen las siguientes variables:

$$x_1 = \Delta h$$

$$x_2 = \dot{\Delta h}$$

$$x_3 = \Delta i$$

$$u = \Delta V$$

De  $x_1$  y  $x_2$  obtenemos:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

Haciendo cambio de variables en la ec. 2.16:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{K}{M} \frac{i_s^2}{h_s^2} x_1 - 2 \frac{K}{M} \frac{i_s}{h_s} x_3 \quad \text{ec. 2.22}$$

Y de la ec. 2.21:

$$\frac{dx_3}{dt} = -\frac{R}{L} x_3 + \frac{1}{L} u \quad \text{ec. 2.23}$$

Y la representación completa del sistema de suspensión en espacio de estado quedaría:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{K}{M} \frac{i_s^2}{h_s^2} & 0 & -2 \frac{K}{M} \frac{i_s}{h_s} \\ 0 & 0 & \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \quad \text{ec. 2.24}$$

En los casos mencionados anteriormente se utiliza un controlador PID para el control de la posición.

Una variante al sistema anterior (fig. 2.1) es colocar un imán permanente [Kleinrahm, Wagner,1986] que interactúe con el electroimán, permitiendo disminuir la fuerza que necesita el electroimán para sostener un cuerpo, el cual, no necesariamente es ferromagnético. Esto permite disminuir la cantidad de energía del electroimán, la cual se refleja en el calor generado y por consiguiente en una menor variación en corriente del mismo. En este contexto Takeshi Mizuno analiza y propone una función de transferencia que representa el sistema dinámico de la suspensión magnética, con un control llamado de potencia cero. Este tipo de control tiene como objetivo que el electroimán consuma la menor potencia posible en la posición de equilibrio del objeto a levitar.

Este tipo de sistemas es ampliamente utilizado en el campo de la metrología de densidad.

---

## **2.2 Sistemas de Medición de Densidad de Líquidos mediante una técnica de suspensión magnética**

Como se mencionó anteriormente, una aplicación particular de un sistema de suspensión magnética es dentro de un sistema de medición para la determinación de densidad de líquidos, donde la fuerza magnética es la fuerza que permite mantener un cuerpo en flotación dentro de un líquido determinado. Esta fuerza se calcula: a) midiendo la corriente que pasa por la bobina en un punto de equilibrio, b) midiéndola directamente con una balanza digital. Esta fuerza se utiliza posteriormente en algún modelo matemático para obtener la densidad del líquido donde el cuerpo esté sumergido.

Comercialmente existen equipos de la marca Rubotherm para la determinación de densidad de gases y líquidos [Wagner,1994], sin embargo la incertidumbre relativa obtenida por estos equipos están en el orden de  $200 \times 10^{-6}$  [Klimeck, Wagner, 1998], lo cual es muy alto para un material de referencia en densidad.

En el ámbito de metrología científica varios países han desarrollado sus sistemas de medición por suspensión magnética para la determinación de densidad de líquidos. Aunque cada uno de ellos tiene el objetivo de determinar la densidad de líquidos o gases, tienen muchas particularidades y especificaciones propias para el uso intencionado de cada instituto nacional de metrología.

De varios trabajos de metrología científica, se seleccionaron los más actuales y, aunque tienen el mismo principio de funcionamiento (ver antecedentes técnicos), se desarrollaron de diferente manera. Se presentan tres trabajos, el primero del National Measurement Institute de Australia desarrollado por Noel Bignell, el segundo del National Metrology Institute of Japan, desarrollado por N Kuramoto, K Fuji y A Waseda, y el tercero del PTB de Alemania hecho por Henning Wolf et. Al.

## 2.2.1 Sistema de medición de densidad de líquidos por suspensión magnética del Instituto Nacional de Mediciones de Australia

En este trabajo Bignell [1982] describe un densímetro de suspensión magnética que utilizó para medir los cambios en la densidad del agua debido a gases disueltos. El objetivo principal de este trabajo fue obtener una corrección por gases disueltos a la densidad del agua determinada con la fórmula de Tanaka [Tanaka, 2001].

Las características principales de este sistema son:

- El patrón sólido utilizado es hecho de pyrex de aproximadamente 130 ml, hueco, en la parte inferior tiene colocado mercurio y un imán permanente, en la parte superior tiene una “bombilla” de color negro que sirve para ser utilizada como referencia en el sistema de posición.
- Fuera de la probeta de medición se encuentra la bobina con un diámetro  $2a$  y a una altura  $z$  entre el imán permanente y la bobina. La bobina es alimentada por el control PID, el cual dependiendo de la posición generada por la bombilla se enviará la corriente
- No es una medición absoluta, es diferencial. La densidad la determina midiendo la corriente a través de la bobina.
- Sistema utilizado para medir cambios en la densidad del agua con gases disueltos en intervalos de temperatura de  $4^{\circ}\text{C}$  a  $20^{\circ}\text{C}$ ; los gases utilizados fueron aire, y combinaciones de oxígeno, nitrógeno y argón. En la siguiente figura se muestra el sistema de medición utilizado por Bignell.

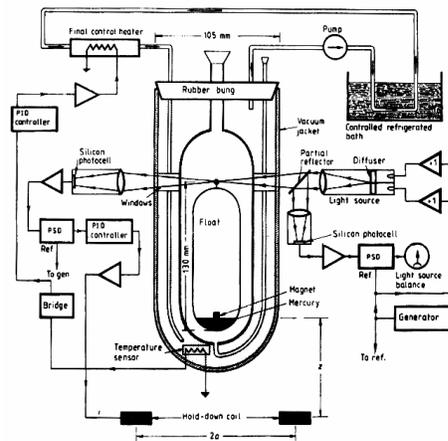


Fig. 2.4 Sistema de medición por suspensión magnética por Bignell

---

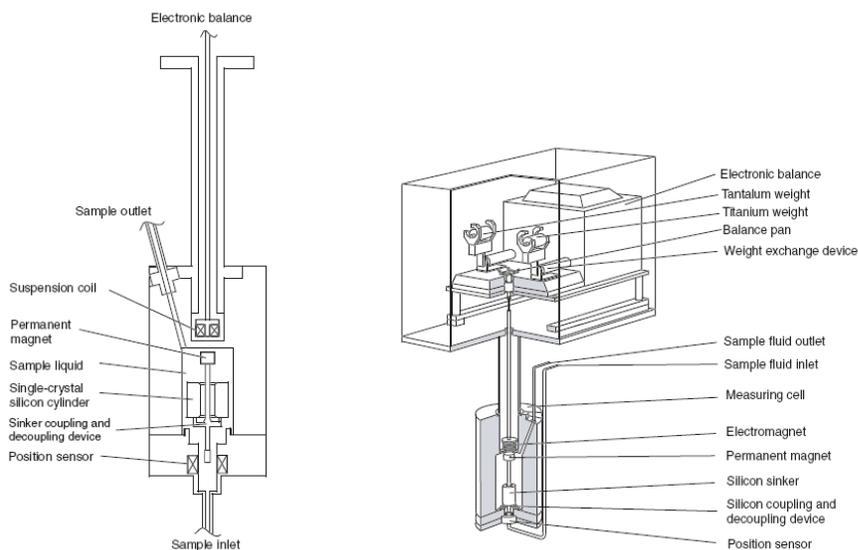
### **2.2.2 Sistema de medición de densidad de líquidos por suspensión magnética del Instituto Nacional de Metrología de Japón**

El sistema fue desarrollado con el objetivo de obtener mediciones en densidad de alta exactitud de materiales de referencia líquidos. Su sistema cumple con tener trazabilidad al SI al utilizar un patrón sólido de silicio calibrado directamente con otro patrón primario en densidad, mantienen un control en la temperatura del líquido de aproximadamente 1 mK. En este sistema utilizan un acoplamiento magnético para sostener al patrón sólido. Una importante aportación es que realizan correcciones en las mediciones debido a: gradientes de temperatura, fuerzas de transmisión debida al acoplamiento magnético y efectos del magnetismo sobre las muestras además de las debidas a: la sensibilidad de la balanza, calibración de patrones, desviación estándar de mediciones, entre otras.

Las características principales del sistema son:

- Sistema con un solo patrón sólido de densidad
- Masa del sinker de aproximadamente 60 g, sinker de silicio en forma de cilindro de aprox. 25 mm de diámetro x 60 mm de altura.
- Bobina suspendida directamente de la balanza.
- Dentro de la “probeta” de medición se encuentra un imán permanente unido al sistema de suspensión del patrón sólido, al cual también tiene unido el sistema de detección de posición.
- Tipo control “PID”
  - o Cuando el acoplamiento magnético se enciende, el imán permanente es suavemente atraído hacia la bobina, este movimiento es guiado por un sensor de posición y el sistema de control. Los sensores de posición están colocados por debajo del sistema de acoplamiento
  - o El controlador PID mantiene una posición absoluta mediante una retroalimentación analógica y la mantiene constante de acuerdo a un valor de set-point
  - o Este valor de set-point se selecciona de tal manera que la corriente a través del electroimán en promedio sea “cero”.
- Balanza utilizada: AT261, Mettler

- Sistema utilizado para medir la densidad de líquidos de referencia como iso-octano, n-nonano, n-tridecano, agua, 2,4 diclorotolueno, 3,4 triclorotolueno y bromobenceno



*Fig. 2. 5 Acoplamiento Magnético sistema de medición por suspensión magnética por Kuramoto et. Al.*

El principal resultado obtenido en este trabajo fue la reducción de incertidumbre en sus mediciones de densidad, la cual, por ejemplo para el bromobenceno se obtuvo una incertidumbre relativa de  $6.7 \times 10^{-6}$ , a 20 °C, [Kuramoto, 2004].

### **2.2.3 Sistema de medición de densidad de líquidos por suspensión magnética del Instituto Nacional de Metrología Alemania**

El objetivo de este trabajo fue realizar mediciones de la densidad del agua en un intervalo más amplio de lo que se obtiene utilizando la fórmula de Tanaka *et al*, realizando mediciones de 0 °C a 40 °C y expandirla hasta 90 °C.

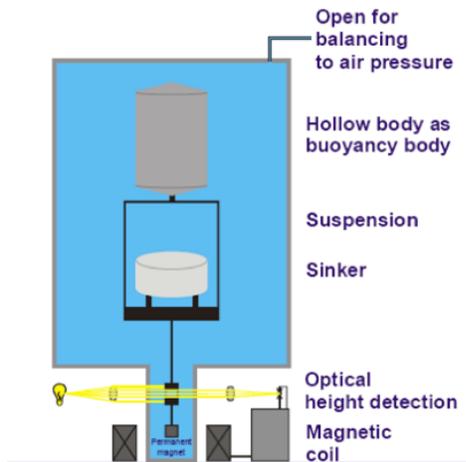


Fig. 2.6 Esquema general de balanza suspensión magnética PTB

Las características principales de este sistema son (Fig. 4):

- Sistema con dos patrones sólidos de densidad
- 30 L de capacidad
- Los patrones sólidos son huecos, fabricados en cuarzo con masas aproximadas de 229 g y 368 g, con densidades muy cercanas a la del agua, por lo que el peso en el agua de estos será de aproximadamente 3 g. El electroimán diseñado soporta una corriente máxima de 1.5 A para aproximadamente 12 g.

La diferencia relativa resultante de la densidad del agua entre la fórmula de Tanaka *et al* y la obtenida por su sistema es de  $3 \times 10^{-8}$  con una incertidumbre relativa de  $0.8 \times 10^{-6}$  a 20 °C [Wolf, 2006]. Lo cual es una incertidumbre incluso menor que la obtenida por el sistema de Kuramoto [2004], sin embargo no debemos dejar a un lado que este sistema fue diseñado especialmente para la determinación de la densidad del agua.

En los casos anteriores se tiene un común denominador: el acoplamiento magnético, que está constituido por: el electroimán, un sensor de posición, un imán permanente y el control, el cual es un PID.

---

## CAPITULO 3 Marco Teórico

---

El objetivo del presente trabajo es obtener una suspensión magnética con una aplicación definida: la determinación de densidad de líquidos. Por lo que en este capítulo se presenta una introducción a la metrología de densidad, sus métodos y sistemas de medición. También es necesario presentar conocimientos básicos de la Teoría Electromagnética y control.

### 3.1 La magnitud de densidad

La densidad es definida como masa por unidad de volumen de una sustancia a una temperatura y presión específicas [Gupta, 2002].

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{ec. 3.1}$$

La unidad de densidad en el Sistema Internacional de Unidades es  $\text{kg m}^{-3}$  o en submúltiplos expresado como  $\text{g cm}^{-3}$  o  $\text{g ml}^{-1}$ . En general, la densidad de una sustancia o un cuerpo tiene dos magnitudes de influencia: la temperatura y la presión. Todo cuerpo experimenta un cambio en su volumen al disminuir o aumentar la temperatura, y por lo tanto habrá un aumento o disminución en la densidad. Así mismo, si la presión aumenta, el volumen de una muestra disminuye y la densidad aumentará. Este efecto siempre está presente. Pero en condiciones comunes de presión y temperatura, se encuentra que casi todos los líquidos sometidos a una presión disminuyen muy poco su volumen (en una fracción de 1 por 100). Lo que significa que los líquidos son casi incompresibles y la densidad depende muy débilmente de la presión, sin embargo, para mediciones de alta exactitud es importante considerar esta variación.

### 3.2 Principios de metrología de densidad

#### 3.2.1 El agua como patrón de densidad

---

El agua es el patrón natural de densidad, ya que la definición de la unidad de masa (el kilogramo) partió de la materialización de un decímetro cúbico de agua, de la cual se originó el Kilogramo Internacional fabricado en platino-iridio.

Todas las mediciones de densidad esencialmente requieren la medición de dos parámetros: la masa y el volumen. La masa de un cuerpo puede ser determinado mediante una balanza y un procedimiento adecuado.

El volumen, puede ser determinado dimensionalmente, el cual puede resultar problemático cuando se desea conocer el volumen de un cuerpo irregular. Sin embargo, es usado muy comúnmente cuando se desea determinar el volumen con alta exactitud mediante métodos interferométricos. Como alternativa para determinar el volumen de un sólido se utiliza el método de pesada hidrostática. El volumen a ser medido tendrá la referencia de la densidad del agua o del líquido que sea utilizado en el procedimiento. De igual manera, se puede utilizar el agua como patrón para determinar el volumen de un vaso por ejemplo. Esto establece la importancia de conocer la densidad del agua con una alta exactitud.

Actualmente la mayor parte de las mediciones de densidad son referidas a la densidad del agua, aunque la ecuación para la determinación de la densidad del agua se obtuvo mediante el uso de un patrón sólido de densidad.

La ecuación que actualmente se utiliza para determinar la densidad del agua es la presentada por Tanaka [Tanaka, 2004] , y es:

$$\rho_{agua} = \left\{ a_5 \left[ 1 - \frac{(t + a_1)^2 (t + a_2)}{a_3 (t + a_4)} \right] + C_{ad} \right\} F_c \quad \text{ec. 3.2}$$

Donde:

$t$  temperatura en °C

$a_1, a_2, a_3, a_4$  y  $a_5$  son constantes

$C_{ad}$  es la corrección por gases disueltos

$F_c$  es la corrección por presión

---

Entre las principales desventajas de utilizar el agua como patrón de densidad están:

- Su alta tensión superficial
- Fácil de contaminar, o presentar cambios en su densidad debido a cambios orgánicos
- La densidad del agua puede ser determinada con cierta inexactitud en algunas partes por millón debido a la concentración de gases disueltos o desconocimiento en la composición isotópica.

### **3.2.2 Patrones sólidos de densidad**

Los sólidos de masa conocida y geometría simple, con volúmenes determinados con un patrón primario de longitud, reemplazan al agua como patrón primario en densidad. En este procedimiento, el volumen del cuerpo se determina por interferometría, y este volumen se transfiere a otros cuerpos sólidos o a un líquido mediante el método de pesada hidrostática.

El único patrón que puede considerarse primario actualmente son los patrones sólidos de densidad cuyo volumen ha sido calibrado directamente por métodos dimensionales.

En masa no representa dificultad la calibración, únicamente se recomienda que su valor (de masa) sea cercano a 1 kg que es donde se ofrece la menor incertidumbre relativa en esta magnitud, debido a que es en este valor de masa en donde se pueden obtener los mejores valores de incertidumbre relativa.

Para poder determinarse su volumen por métodos dimensionales es importante que el cuerpo sea de forma geoméricamente sencilla, como una esfera, un cubo o un cilindro, ya que estas formas geométricas requieren el menor número de mediciones para determinar su volumen.

La esfera por otro lado presenta ventajas adicionales, ya que es el cuerpo que menor superficie de contacto con el medio ambiente tiene para la misma cantidad de masa, además de no contar con aristas que pueden ser un riesgo para el manejo de los patrones, ya que cualquier pérdida de materia cambia su volumen y su masa.



*Fig. 3.1 Patrones sólidos de densidad de Zerodur*

### **3.2.3 Métodos para medir densidad**

Actualmente el método más comúnmente usado para la determinación de densidad es el método de pesada hidrostática, en el que se utiliza el principio de Arquímedes como principio de medición, el cual establece que la fuerza de empuje ejercida en un cuerpo de abajo hacia arriba es igual al peso del volumen del fluido desplazado, de tal forma que si se conoce la masa y volumen del sólido inmerso en un fluido se puede determinar la densidad de líquido en el que esté inmerso [LO Becerra, 1998] [Gupta, 2002]. Un sistema de pesada hidrostática consta básicamente de: una balanza, una suspensión que conecta a la balanza con el sólido inmerso, un vaso contenedor del líquido, un sistema para mantener la temperatura del líquido con una variabilidad de  $\pm 2$  mK, un sólido caracterizado en masa y volumen, y pesas patrón, el sistema de medición se muestra en la figura 3.2



*Fig. 3.2 Sistema de Pesada Hidrostática del Patrón Nacional de Densidad*

---

De manera general el método de pesada hidrostática consiste en pesar la masa aparente del sólido inmerso en el líquido de densidad desconocida y compararlo con pesas patrón, se toma en cuenta la temperatura del líquido y la densidad del aire, de tal forma que la ecuación de equilibrio de la comparación entre la pesada en el aire y en el líquido queda [LO Becerra, 1998] [Gupta, 2002]:

$$m_S - \rho_{liq} V_S = m_p - \rho_a V_p + \Delta L \quad \text{ec. 3.3}$$

Donde:

$m_S$	Masa del sólido
$\rho_{liq}$	Densidad del líquido
$V_S$	Volumen de sólido
$m_p$	masa del patrón
$\rho_a$	Densidad del aire
$V_p$	volumen de patrón
$\Delta L$	Diferencia de lecturas entre el sólido y la masa patrón

Con el método de pesada hidrostática se puede obtener una incertidumbre estándar relativa del orden de  $2 \times 10^{-6}$  en la determinación de densidad del líquido, tomando en cuenta que el sólido utilizado es un patrón con una incertidumbre estándar relativa del orden de  $2 \times 10^{-7}$ . Para el cálculo de incertidumbre es necesario señalar que las mayores contribuciones se deben a: 1) la incertidumbre del volumen del sólido, b) la *variabilidad* de las diferencias que se obtienen entre la pesada en el líquido y las pesas patrón ( $\Delta L$ ).

Para la incertidumbre del patrón interviene la fabricación del sólido y la calibración del mismo, si será calibrado directamente con patrones de las magnitudes de base o con otro patrón de la misma magnitud. La incertidumbre de las diferencias entre el sólido inmerso y las pesas patrón, depende directamente de la desviación estándar de las mediciones, la cual puede ser grande debida principalmente al “hilo” o “alambre” que conecta a la balanza con la suspensión, este “hilo” sufre una elongación o contracción dependiendo si está pesando o no el sólido, además que interviene la tensión superficial de líquido que se esté utilizando y del cual dependerá el diámetro del “hilo” para el menisco que se forme;

---

todas estas variables pueden repercutir en la variabilidad de las diferencias además que se tienen que tomar en cuenta para hacer correcciones a nuestra medición.

Lo anterior es una de las mayores desventajas en los sistemas de pesada hidrostática, además que es un sistema que se utiliza para líquidos incompresibles y a un intervalo de temperatura entre 5°C y 60°C aproximadamente.

### 3.2.4 Suspensión magnética en la determinación de densidad de líquidos

Existe una variante del método de pesada hidrostática. Partiendo de [2] en que un sistema de pesada hidrostática el sólido se coloca y se quita por medio de la suspensión que se conecta a la balanza (a través de un hilo que pasa por el líquido a medir), la pérdida de peso aparente del patrón sólido indica la masa del líquido desplazado por éste. La fuerza que actúa sobre la balanza es una medición de la masa aparente del patrón sólido. Si se quitara el sistema de suspensión que se conecta a la balanza, el sólido flotaría o se sumergiría libremente en el líquido, dependiendo de la densidad. Ahora, si se genera un campo magnético que forzara al patrón sólido a una altura definida obtendríamos un sistema de suspensión magnética como se puede ver en la fig. 3.3:

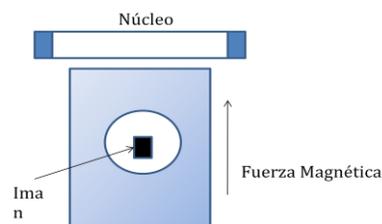


Fig. 3.3 Diagrama básico de empuje por fuerza magnética

En el que, si consideramos solamente fuerzas verticales, y actuando una fuerza magnética entonces la condición de equilibrio sería [Bignell, 2006]:

$$V_S - M_S g + F_{mag} = 0 \quad \text{ec. 3.4}$$

Donde:

- $V_S$  Volumen de sólido
- $\rho_L$  Densidad del líquido
- $M_S$  Masa del sólido

---

$g$       gravedad  
 $F_{mag}$    Fuerza magnética

Y si consideramos a  $\rho_b$  como la densidad de sólido patrón quedaría [Bignell, 2006]:

$$F_{mag} = V_B g (\rho_B - \rho_L) \quad \text{ec. 3.5}$$

Donde:

$F_{mag}$    Fuerza magnética  
 $V_B$       Volumen del patrón sólido en flotación  
 $\rho_B$       Densidad del patrón sólido en flotación  
 $\rho_L$       Densidad del líquido

De lo anterior se puede deducir que la fuerza magnética requerida para producir equilibrio depende de la diferencia entre la densidad del patrón sólido y del líquido.

Existen cuatro métodos para medir la fuerza ( $F_{mag}$ ) en una suspensión magnética [Kuramoto, 2004]. En el primero se mide la corriente de la bobina que se requiere para sostener al sólido patrón. Este método necesita una posición exacta del patrón sólido con respecto a la bobina, y la relación entre la fuerza y la corriente debe ser calibrada usando líquidos de densidad conocida.

Como siguiente método, se utiliza una probeta suspendida directamente de una balanza. La fuerza requerida para levitar el patrón sólido se obtiene directamente como el cambio en la lectura de la balanza cuando el patrón es suspendido por la bobina. Este método presenta 2 ventajas principalmente, sobre el primero: no se necesita conocer la posición exacta del objeto a levitar y sólo se requiere conocer la masa y volumen del patrón.

En el tercer método, se coloca la bobina en lugar de la celda o probeta por debajo de la balanza. Como en el segundo caso, la fuerza requerida para levitar al sólido patrón se obtiene directamente de los cambios en la lectura de la balanza cuando el sólido es suspendido por la bobina. Kuramoto menciona un trabajo de Masui et al, donde utilizan un patrón sólido de un material superconductor, el cual es colocado dentro de una probeta de vidrio junto con el líquido a medir. El sólido es llevado a una levitación estable mediante el efecto Meissner, colocando la probeta simplemente por encima de un imán permanente y

la principal ventaja de un sistema como este es que no se requiere control de retroalimentación alguno.

Sin embargo, el utilizar materiales magnéticos como patrones sólidos presenta algunas desventajas, principalmente al caracterizarlo en densidad. El patrón sólido debe ser calibrado en volumen con alta exactitud, y si el material presenta cambios en volumen debido a la temperatura esto no podría ser posible, adicionalmente al ser de material magnético, al medir su masa se dificulta obtener una incertidumbre pequeña debido a que este material interactúa con los campos magnéticos generados por la balanza (las comparadoras de alta exactitud trabajan con bobinas de compensación)

Como solución, Kleinrahm y Wagner [Kleinrahm, 1986] desarrollaron un cuarto método, donde un acoplamiento de suspensión magnética es usado para medir esta fuerza magnética. El acoplamiento consiste en un electroimán y un imán permanente, donde el primero está conectado directamente a la balanza y el segundo está dentro de la celda de pesaje. El sólido patrón está unido al imán permanente por medio de un dispositivo de acoplamiento y des-acoplamiento.

Para este cuarto método se han desarrollado varios sistemas. En la siguiente figura se muestra un esquema general del sistema de medición:

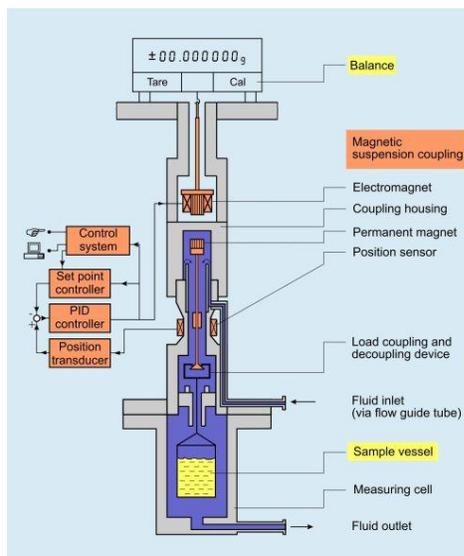


Fig. 3.4 Diagrama básico de un sistema de una balanza de suspensión magnética

---

Los densímetros que utilizan este método están divididos, a su vez, en dos categorías: densímetros de un sólido y densímetros de dos sólidos patrón. Este último tiene dos sólidos, con la misma masa pero con volúmenes diferentes.

### 3.3 Elementos de la Teoría Electromagnética

Una parte fundamental para el diseño de la suspensión magnética es comprender las definiciones necesarias de la teoría electromagnética, las cuales se mencionarán a continuación.

Es importante mencionar que los vínculos entre la electricidad y el magnetismo no se fundamentan en las semejanzas que existen entre las conductas eléctricas de los cuerpos cargados y la conducta de los imanes. Los fenómenos eléctricos y magnéticos son diferentes. En particular Gilbert en 1600 demostró que las brújulas magnéticas no interactúan con varillas cargadas eléctricamente en experimentos en los cuales no existía movimiento relativo [Eisberg, Lerner, 1985].

Como primera relación se puede mencionar que: una carga eléctrica experimenta una fuerza cuando se mueve en un campo magnético. Esta fuerza se denomina fuerza magnética. El movimiento es absolutamente fundamental.

Definición 1. Ley de Lorentz

Si una carga de prueba  $q$  se mueve con una velocidad  $v$  a través del punto  $P$  y si sobre esta carga actúa una fuerza  $F$ , existe un campo magnético  $B$  en el punto  $P$ , que satisface la relación [Eisberg, 1985]

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{ec. 3.6}$$

La magnitud  $v$  de la fuerza es

$$|F| = q_0 v B \sin \theta \quad \text{ec. 3.7}$$

Donde  $\theta$  es el ángulo entre  $v$  y  $B$

---

## Definición 2. Ley de Ampere

La circulación magnética en torno a una curva cerrada es igual a  $\mu_0$  veces la corriente eléctrica que la atraviesa. [Resnick, , 2004]

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \quad \text{ec. 3.8}$$

Donde  $\mu_0$  es la constante de permeabilidad del vacío con un valor de  $4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}$   
En un alambre

$$\begin{aligned} B * 2\pi r &= \mu_0 i \\ B &= \mu_0 i / 2\pi r \end{aligned} \quad \text{ec. 3.9}$$

Definición: Un solenoide es un alambre enrollado  $N$  veces que transporta una corriente  $i$

En donde el campo externo tiende a cero por:

Distancia

Por cancelación de campos producidos.

La Ley de Ampere es válida no sólo para la circulación magnética calculada a lo largo de una trayectoria que encierra un alambre único portador de corriente, sino también para la circulación magnética que se calcula a lo largo de una trayectoria que encierra cualquier número de alambres sean rectas o no. La circulación magnética dada por la Ley de Ampere solamente depende de la magnitud y el sentido de la corriente eléctrica encerrada por la curva amperiana y no por su localización particular dentro de la curva donde ésta atraviesa.

En un solenoide cada vuelta porta una corriente  $i$ . Si en el solenoide, son  $n$  vueltas por unidad de longitud, el número de vueltas que pasan a través de la curva cerrada es  $nz$ . El sentido de la corriente es el mismo para todas las vueltas de tal manera que la corriente neta encerrada por la curva es [Eisberg,1986]:

$$I = nz i \quad \text{ec. 3.10}$$

Utilizando la Ley de Ampere para igualar la circulación a  $\mu_0 I$  se tiene

$$B_z = \mu_0 n z i$$

∴

$$B = \mu_0 n i$$

ec. 3.11

El aspecto más significativo del resultado anterior es que es independiente de la localización de la curva amperiana que se encuentra dentro del solenoide. Es decir, el campo magnético en el interior de un solenoide es uniforme e independiente de su radio.

### Definición 3. Flujo Magnético

Se define como la integral de superficie sobre la componente normal del campo magnético [Eisberg, Lerner, 1985]

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

ec. 3.12

### Definición 4. Ley de Biot-Savart

Indica el campo magnético creado por corrientes eléctricas estacionarias.

Para un alambre recto y una carga puntual se considera lo siguiente [Eisberg, 1986], [Bignell, 2008]:

$B \propto i$  El campo es proporcional a la corriente

$B \propto \frac{1}{R}$  El campo es inversamente proporcional a la distancia de la carga

### Ley general de Biot-Savart

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}$$

ec. 3.13

Donde  $\mu_0$  es la permeabilidad de vacío y se define como  $4\pi \times 10^{-7} \text{ T m / A}$

Para una espira circular la Ley de Biot-Savart queda de la siguiente manera:

$$B = \frac{\mu_0 i k^2}{2} \frac{1}{(z^2 + k^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

ec. 3.14

Esta ecuación denota el campo magnético en un punto a lo largo del eje de la espira y una distancia  $z$  de su centro y  $k$  es el radio de la circunferencia.

---

Definición 5. Autoinductancia

Ocurre en una bobina cuando se varía la corriente que circula por ella, induciendo una fuerza electromotriz sobre sí misma.

En una bobina de  $N$  vueltas, a través de la cual circula una corriente  $I$ , la inductancia está dada por [Eisberg, 1986]:

$$L = \frac{N\Phi}{I} H \quad \text{ec. 3.15}$$

Donde  $l$  es la longitud del alambre de la bobina,  $\Phi$  es el flujo magnético y  $H$  la intensidad del campo magnético.

Considerando la ley de Faraday la autoinductancia es una bobina origina una fuerza contra-electromotriz dada por:

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt} \quad \text{ec. 3.16}$$

### 3.4 Principios de Levitación

En el estudio de la levitación se pueden encontrar dos principios básicos: levitación por atracción y levitación por repulsión. [H.D. Taghirad]

a) Levitación por repulsión

En la levitación por repulsión, las corrientes inducidas en un cuerpo conductor generan la fuerza de levitación. Este sistema es estable en su eje vertical, y tiene un punto de equilibrio natural. Este tipo de suspensión es realizable con materiales de permeabilidad ( $\mu_r$ ) menor que la unidad (material diamagnético) y con superconductores ( $\mu_r = 0$ ).

b) Levitación por atracción

En la levitación por atracción, un cuerpo es atraído por un flujo magnético en contra de la gravedad. El equilibrio que se produce entre la fuerza de atracción y de la gravedad es inestable, por lo que la levitación por atracción es prácticamente imposible sin la ayuda de un sistema de control. Este tipo de sistemas es realizable con materiales ferromagnéticos o imanes permanentes. La ventaja principal es que puede obtenerse una fuerza de atracción igual a cero, pero el sistema se vuelve inherentemente inestable.

---

### 3.5 Representación matemática de sistemas

Las ecuaciones que se utilizan para describir los diversos componentes del sistema, ya sean mecánicos, eléctricos o de otro tipo son modelos ideales o aproximados, los cuales son representados por ecuaciones diferenciales lineales, teniendo la forma [Ogata, 2005] [Moudgalya, 2007]:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \frac{c_1 d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \frac{c_2 d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + \frac{c_{n-1} dy(t)}{dt} + c_n y(t) = d_0 \frac{d^n u(t)}{dt^n} + d_1 \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + d_n u(t)$$

ec. 3.17

donde:

$c_1, \dots, c_n, d_0, \dots, d_n$  son coeficientes constantes (sistema invariante)

$y(t)$  es la señal de salida

$u(t)$  es la señal de entrada

El sistema dinámico puede ser representado de manera matemática ya sea en función del tiempo o en función de la frecuencia. Para fines de control el sistema se representa generalmente bajo el dominio de  $s$  (plano complejo), llegando a un bloque llamado función de transferencia teniendo una función  $F(s)$  que representa el comportamiento del sistema como tal. Esta función  $F(s)$  está definida como el cociente de las transformadas de Laplace de las señales de salida y entrada cuando todas las condiciones iniciales son cero:

$$F(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$$

De tal manera que la ecuación general de ecuaciones diferenciales puede quedar representado con la transformada de Laplace de la siguiente forma [Ogata, 2005] [Moudgalya, 2007]:

$$F(s) = \frac{d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_n}{s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_n}$$

ec. 3.18

El denominador de  $F(s)$  se conoce como ecuación característica. Donde los polos del sistema son las raíces de la ecuación característica:

$$s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_n = (s + p_1)(s + p_2)(s + p_3) + \dots + (s + p_n) \quad \text{ec. 3.19}$$

Donde la estabilidad del sistema estará definida por la colocación de las raíces en el plano complejo. Si son negativas el sistema será estable. [Ogata, 2008] [Eronini, 2001]

Así mismo, un sistema puede ser representado en forma discreta en el plano  $z$ , quedando la ecuación general como [Eronini, 2001]:

$$y(z) + a_1 y(z)z^{-1} + a_2 y(z)z^{-2} + \dots + a_n y(z)z^{-n} = b_1 u(z)z^{-1} + b_2 u(z)z^{-2} + \dots + b_n u(z)z^{-n}$$

Y por lo tanto la función de transferencia está representada como:

$$F(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad \text{ec. 3.20}$$

Las muestras de las variables de los sistemas de control de datos discretos pueden ser modelados por ecuaciones en diferencias. La forma general de una ecuación en diferencias se obtiene a partir de la transformada  $z$ , utilizando el Teorema de corrimiento discreto.

Teorema de corrimiento discreto: Dado que  $E(z) = Z \{ \bar{f}(t) \}$  existe, entonces el corrimiento a la derecha (atraso) está dado por: [Houpis, 1991]

$$Z \{ \bar{f}(t - pT) \} = z^{-p} E(z)$$

Y el corrimiento hacia la izquierda (adelanto) está dado por:

$$Z \{ \bar{f}(t + pT) \} = z^p E(z) - \sum_{i=0}^{p-1} e(iT) z^{p-i}$$

donde  $z^{-p}$  representa un atraso de  $p$  periodos y  $z^p$  representa un avance en  $p$  periodos.

### 3.6 Control PID

El objetivo de un control es obtener una respuesta deseada para un sistema dado. Lo anterior se puede realizar de dos formas: a) por medio de un control de lazo abierto donde el controlador determina la señal de entrada del proceso en función de una referencia solamente; b) con un control de lazo cerrado, que es cuando el controlador determina la señal de entrada en función de la salida del proceso. En la figura 3.5 se muestra un sistema de control de lazo cerrado.

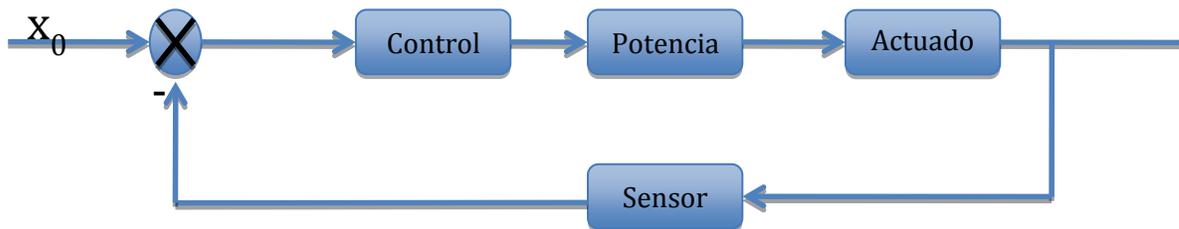


Fig. 3.5 Sistema de control de lazo cerrado

La mayoría de los controladores tienen tres acciones básicas de control: la proporcional, la integral y la derivativa, o alguna combinación entre ellas.

Los controladores que tienen estas leyes de control pueden ser aplicados de manera analógica o digital a la planta a controlar.

#### 3.6.4 Controlador PID

La forma general de un controlador PID es la siguiente [Ogata, 2008]:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

Donde,  $K_p$  es la ganancia proporcional,  $T_i$  es el tiempo de integración y  $T_d$  es el tiempo derivativo.

La función de transferencia en su forma general queda:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

ec. 3.21

---

## CAPITULO 4      Diseño Banco de Prueba

---

Para el diseño de la suspensión magnética es importante tener conocimiento de las variables o magnitudes de entrada que pueden afectar a la estabilidad deseada, además que en función de la variabilidad de las mismas se puede seleccionar de mejor manera la instrumentación necesaria. En este capítulo se presenta el estudio de variabilidad de la densidad de un líquido con respecto a sus variables de entrada, en función de los resultados se selecciona y caracteriza la instrumentación. Adicionalmente se presenta el diseño de la bobina que generará el campo magnético.

### 4.1 Requerimientos de estabilidad del sistema

En un sistema convencional de pesada hidrostática para la determinación de densidad de líquidos las principales fuentes de incertidumbre son: el volumen del sólido patrón y la variabilidad de las mediciones [Becerra L, 1998] [Gupta, 2002]. Esta última está representada por la desviación estándar de las mediciones tomadas directamente de la balanza.

Como parte importante en el desarrollo de este proyecto es necesario determinar los niveles de incertidumbre de las variables de entrada del sistema para la determinación de densidad de líquidos por levitación magnética.

Como se mencionó en el capítulo 3, la determinación de la densidad de un líquido en un densímetro de levitación magnética, es utilizando el principio de Arquímedes, como una variante del método de pesada hidrostática. En un sistema de levitación magnética en lugar de establecer dos ecuaciones entre un patrón y un sólido sumergido, se realiza la comparación primero sin activar el electroimán (pesada de tara) y después activando el electroimán, teniendo en un nivel óptimo de levitación del sólido patrón (pesada de suspensión).

Siguiendo el equilibrio de fuerzas como primera ecuación para la pesada de tara se puede establecer la siguiente ecuación [Kano, 2006]:

$$M_{TP} = M_{sus} - \rho_{fluid} V_{sus} \quad \text{ec. 4.1}$$

Donde  $M_{sus}$  y  $V_{sus}$  son la masa y el volumen del sistema de sujeción de sólido patrón y  $\rho_{fluid}$  es la densidad del líquido.

La segunda ecuación la se establece tomando en cuenta el sólido suspendido a través del sistema de sujeción y el acoplamiento magnético, quedando [Kano, 2006]:

$$M_{MP} = (M_{sus} + M_s) - \rho_{fluid} (V_{sus} + V_s) \quad \text{ec. 4.2}$$

Comparando la ecuación 4.1 y 4.2, la densidad del líquido muestra se puede obtener por:

$$\rho_{fluid} = \frac{M_s}{V_s} - \frac{M_{MP} - M_{TP}}{V_s} \quad \text{ec. 4.3}$$

Para conocer el nivel de dependencia de la densidad del líquido con respecto a cada variable de entrada podemos ver dos caminos: mediante una simulación numérica [JCGM:101, 2008], o calculando las derivadas parciales de la densidad del líquido con respecto a cada una de ellas [JCGM:100, 2008], para establecer una tabla con el presupuesto de incertidumbre.

Iniciando con el primer punto, la simulación se realiza con el programa Simular, con los valores nominales e incertidumbres mostrados en la tabla 4.1:

	Valor	Inc (k=1)
<b>Ms</b>	25.00000003	0.000000044 g
<b>Vs</b>	10.00051484	0.0006 cm <sup>3</sup>
<b>M<sub>MP</sub></b>	15.00002736	0.000612372 g
<b>M<sub>TP</sub></b>	-0.00013682	0.000408248 g
<b>DL</b>	14.9989333	1.50E-03 g
<b><math>\rho_{fluid}</math></b>		<b>1.000055186 g/cm<sup>3</sup></b>

Tabla 4.1 Valores medios de variables de entrada con incertidumbre

Donde  $\Delta L$  está definido como:

$$\Delta L = M_{MP} - M_{TP} \quad \text{ec. 4.4.}$$

Para hacer la simulación se asigna una distribución normal para cada variable y la desviación estándar de acuerdo al nivel de incertidumbre establecido en la tabla 4.1.

El número de muestras se definió en 1000. Los resultados estadísticos de la simulación se muestran en la figura 4.1:

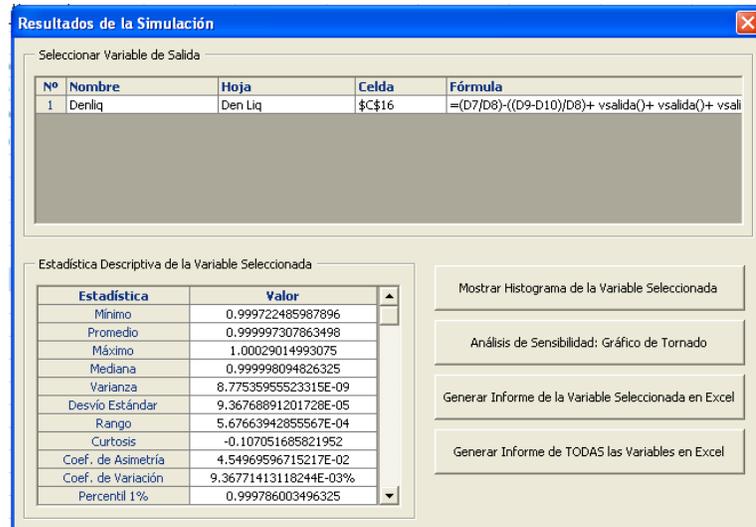


fig. 4.1 Resultados de simulación

De la tabla 4.1 resaltamos el promedio de  $\rho_{fluid}$  que es de  $0.99997307 \text{ g/cm}^3$  con una desviación estándar de  $9.3676 \times 10^{-5} \text{ g/cm}^3$ , la cual es aceptable para el nivel de incertidumbre requerido por el momento de aproximadamente  $2 \times 10^{-5}$  relativo.

En la figura 4.2 se muestra el análisis de sensibilidad de las variables de entrada:

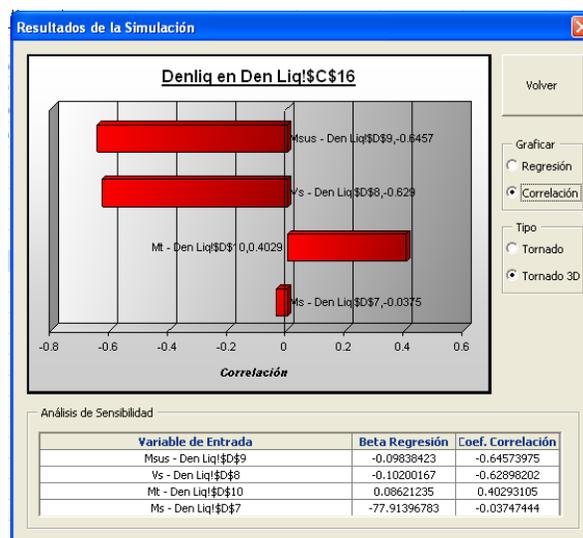


fig 4.2 Análisis de sensibilidad variables de entrada

De la fig. 4.2 se puede observar lo siguiente: las variables de mayor aportación de incertidumbre son el volumen del sólido y las lecturas obtenidas por la balanza. La incertidumbre del volumen del sólido puede ser mejorada al ser calibrada por un patrón primario y alcanzar una incertidumbre relativa  $2 \times 10^{-7}$  (la actual es un orden mayor), sin embargo, la de mayor aportación es debida a la lectura de la balanza al suspender el sólido ( $M_{sus}$ ).

Para conocer el nivel de dependencia de la densidad del líquido con respecto a cada variable de entrada podemos ver dos caminos: mediante una simulación numérica [JCGM:101, 2008], o calculando las derivadas parciales de la densidad del líquido con respecto a cada una de ellas [JCGM:100, 2008], para establecer una tabla con el presupuesto de incertidumbre.

El diagrama de magnitudes de entrada queda de la siguiente manera, fig 4.

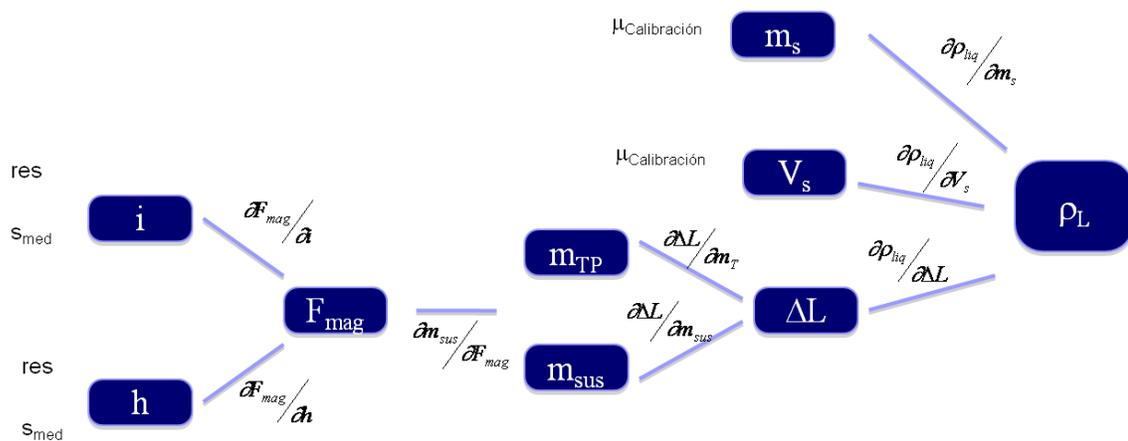


fig 4.3 Diagrama de fuentes de incertidumbre para la determinación de densidad de líquidos

Lo anterior se puede observar en la tabla 4.2 de presupuesto de incertidumbre [JCGM:100, 2008] para la determinación de densidad de líquidos:

Presupuesto incertidumbre							
	Valor	Variabilidad	Coficiente $\frac{\partial \rho_{fluid}}{\partial x_i}$	Incertidumbre estándar	Producto $\frac{\partial \rho_{fluid}}{\partial x_i} u_{x_i}$	Varianza $\left(\frac{\partial \rho_{fluid}}{\partial x_i} u_{x_i}\right)^2$	%
Ms (g)	25	0.000000044	0.9999949	0.000000044	4.39998E-08	1.936E-15	1.51E-06
Vs (cm <sup>3</sup> )	10.000515	0.0006	0.1	0.00060	6E-05	3.6E-09	2.80
$\Delta L$ (g)	15.000164	0.001,8 med.	-0.999995	3.54E-04	-0.000353552	1.25E-07	97.20
<b>Incp<sub>L</sub></b>						<b>0.000359g/cm3</b>	

Tabla 4.2 Presupuesto de incertidumbre densidad de líquido

El presupuesto de incertidumbre [JCGM:100, 2008] se obtiene aplicando:

$$u = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial \rho_{fluid}}{\partial x_i} u_{x_i} \right)^2} \quad \text{ec. 4.5}$$

Se observa que  $\Delta L$  aporta el 86% de la incertidumbre total, por lo que si queremos bajar o mantener esta incertidumbre debemos trabajar sobre esta variable.

$\Delta L$  está influenciada por dos variables de entrada: la resolución de la balanza y la repetibilidad de las mediciones. Además la repetibilidad estará definida por la fuerza magnética que el electroimán genera para suspender el sólido patrón y la estabilidad con que lo sostiene.

Como se definió en el capítulo 2, la fuerza magnética la podemos calcular como [Moudgalya, 2007]:

$$F_{mag} = K \frac{i^2}{h} \quad \text{ec. 4.6}$$

Suponiendo los valores mostrados en la tabla 4.3, aplicaremos 1 A al electroimán, y el cuerpo a suspender estará a 1 cm del núcleo de la bobina, y la variación a esta altura será de 10  $\mu\text{m}$  aproximadamente.

k=1		
i	1 A	2.885e.5 A
h	0.01 m	2.89e-6 m
K	0.0001	

**Fmag 0.01 N**

Tabla. 4.3 valores nominales para calcular fuerza magnética

De acuerdo con la ecuación 4.6 el presupuesto de incertidumbre para la fuerza magnética es:

Presupuesto de incertidumbre							
	Valor	Variabilidad	Inc	Coefficiente sensibilidad	Producto	Varianza	%
i (A)	1	100x10 <sup>-6</sup> , rectangular	2.887E-05	0.02	5.774E-07	3.333E-13	4
h (m)	0.01	10x10 <sup>-6</sup> , rectangular	2.887E-06	-1	-2.887E-06	8.333E-12	96
					Inc (k=1)	<b>2.9439E-06N</b>	

Tabla 4.4 Presupuesto de incertidumbre para la fuerza magnética

Se puede observar en la tabla 4.4 que, tomando una incertidumbre de **100 μA** para la corriente y **10 μm** para la altura, la mayor aportación a la incertidumbre final de la fuerza magnética es precisamente la variabilidad de la altura, en lo que se puede decir que a mayor variabilidad de la altura, mayor será la variabilidad de la fuerza magnética y por lo tanto mayor incertidumbre en la repetibilidad de las mediciones.

Como resultado de este análisis tenemos que la altura (h) debemos medirla al menos con una resolución de **10 μm**, pensando que la mayor aportación de incertidumbre en esta medición será precisamente la resolución del instrumento que utilizemos para medir, y el controlador del sistema de levitación deberá tener máximo esta variabilidad en el control de posición.

---

El valor de incertidumbre en la fuerza magnética de la tabla 4.4 es obtenido en newton, por lo que para poder compararlo con un valor en unidades de masa (kg), obtenemos la incertidumbre relativa [JCGM:100, 2008]:

$$u_{rel} = \frac{u_{F_{mag}}}{F_{mag}} = \frac{2.94 \times 10^{-6}}{0.01} = 2.94 \times 10^{-4}$$

La incertidumbre en masa la obtenemos multiplicando la incertidumbre relativa de la fuerza magnética por el valor de masa convencional del cuerpo en suspensión usado en la simulación:

$$u_{M_{MP}} = u_{rel} * M_{MP} = (2.94 \times 10^{-4})(15g) = 0.0044 g$$

Con este valor de incertidumbre en las lecturas de la balanza al suspender el cuerpo, la incertidumbre relativa esperada de la densidad del líquido sería del orden de  $4 \times 10^{-4}$ , lo cual es alto para un líquido de referencia, sin embargo para fines de diseño hasta el momento se considerará así.

## 4.2 Sensor de Posición

Existen muchos tipos de sensores que nos pueden ayudar a detectar una posición, entre ellos: sensores de efecto hall, inductivos, LVDT's, capacitivos, ultrasónicos u ópticos.

La importancia de la selección del sensor estriba en que será el lazo de retroalimentación del sistema por lo que deberá tener una resolución acorde a la estabilidad deseada del sistema así como un tiempo de respuesta adecuado para el control. Otra característica es que deberá ser de no contacto.

Anteriormente, se concluyó que la resolución máxima del sensor deberá ser de  $10 \mu\text{m}$  y al tener la restricción de no contacto se propone el uso de un sensor óptico.

Dentro de los sensores ópticos también tenemos varias alternativas: magneto-estrictivos, encoders, potenciómetros lineales, láser: PSD (Position Sensor Detector), por triangulación, láser de grandes distancias, etc.

De los anteriores se está proponiendo utilizar un sensor PSD ya que es una opción económica, de alta resolución y excelente tiempo de respuesta.

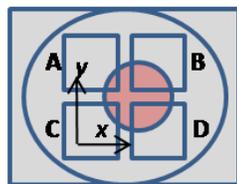
#### 4.2.1 Características sensor PSD (Positional Sensor Detector)

Los Detectores de Posición “PSD” son fotodiodos de silicio que proveen una salida analógica directamente proporcional a la posición de la mancha de luz sobre un área activa. Los PSD permiten monitorear simultáneamente la posición y la intensidad de luz sobre esa área, además de ser un sensor de posición continuo. Comparado con dispositivos discretos ofrecen una buena linealidad, una alta resolución analógica, respuesta rápida y circuitos de operación simples.

#### 4.2.2 Principio de Funcionamiento

En la fig. 4.4 la mancha de luz que ilumina uno de los elementos sólo produce una corriente en ese elemento, si el detector tiene más de un elemento fotosensible la energía se distribuye entre la relación de las celdas adyacentes. La corriente de estos elementos determina la posición relativa de la mancha en la superficie. Es importante señalar que el detector sólo proporciona información de posición a una distancia lineal del diámetro de la mancha, por otra parte, se sabe que se está en un segmento específico, pero no exactamente dónde. Debido a esto se debe tener cuidado en enfocar bien el láser.

Otra consideración clave es que la respuesta al movimiento de la mancha láser no es lineal. Esto se debe a que la relación del movimiento sobre la superficie de la mancha entre los segmentos adyacentes no es lineal, por lo que es importante considerar una configuración de “nulling” o centrada para este tipo de dispositivos.



$$x = \frac{(B + D) - (A + C)}{A + B + C + D}$$

$$y = \frac{(A + B) - (C + D)}{A + B + C + D}$$

Fig. 4.4 Sensor de posición de cuatro cuadrantes

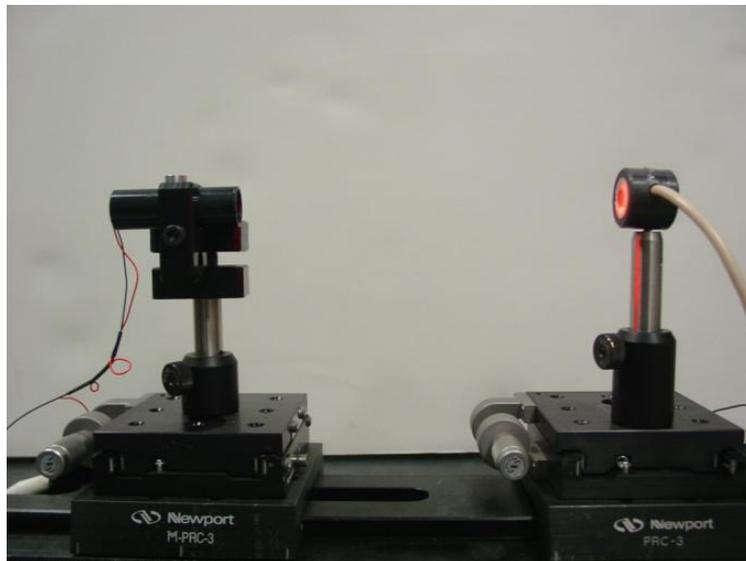
El sensor propuesto para el sistema de levitación de este proyecto es marca OSI optoelectronics, modelo SPOT-4D3000 con 1.5 cm de lado por lado por cuadrante.

---

### 4.2.3 Caracterización sensor de posición

La detección de posición se realiza iluminando totalmente la celda y el haz de luz se obstaculiza mediante una placa neonizada con una ranura de aproximadamente 0.5 mm de ancho, el montaje del sistema óptico se muestra en la fig. 4.5. El circuito de tratamiento de señal es el propuesto por el fabricante pero con las ganancias apropiadas de acuerdo a la intensidad del láser utilizado, el diagrama general se muestra en la fig. 4.6

Para la caracterización del sensor se hizo un barrido hacia arriba y un barrido hacia abajo de ida y vuelta, cada 50  $\mu\text{m}$ , con un laser de 680 nm de longitud de onda. Los datos obtenidos se encuentran en el Anexo A.



*Fig. 4.5 Montaje del sistema óptico*

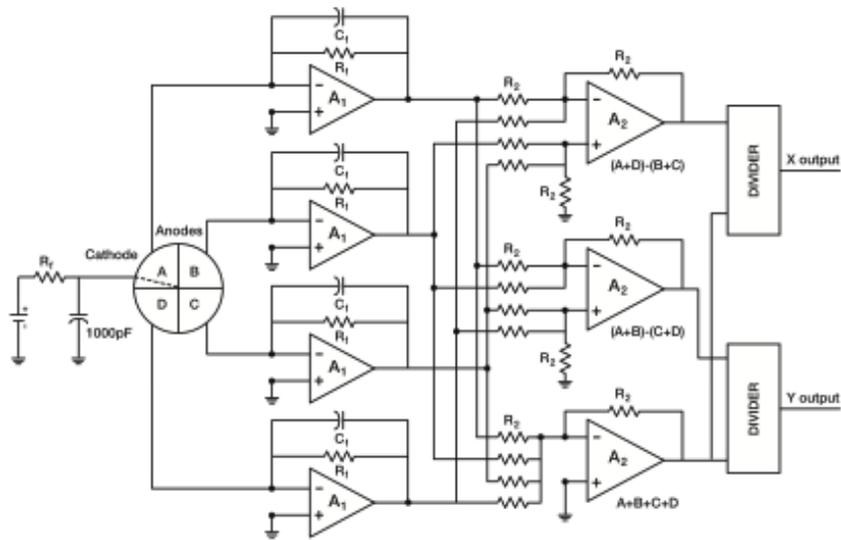


Fig. 4.6 Diagrama de conexión para sensor de cuatro cuadrantes

La respuesta del sensor se muestra en la fig. 4.7:

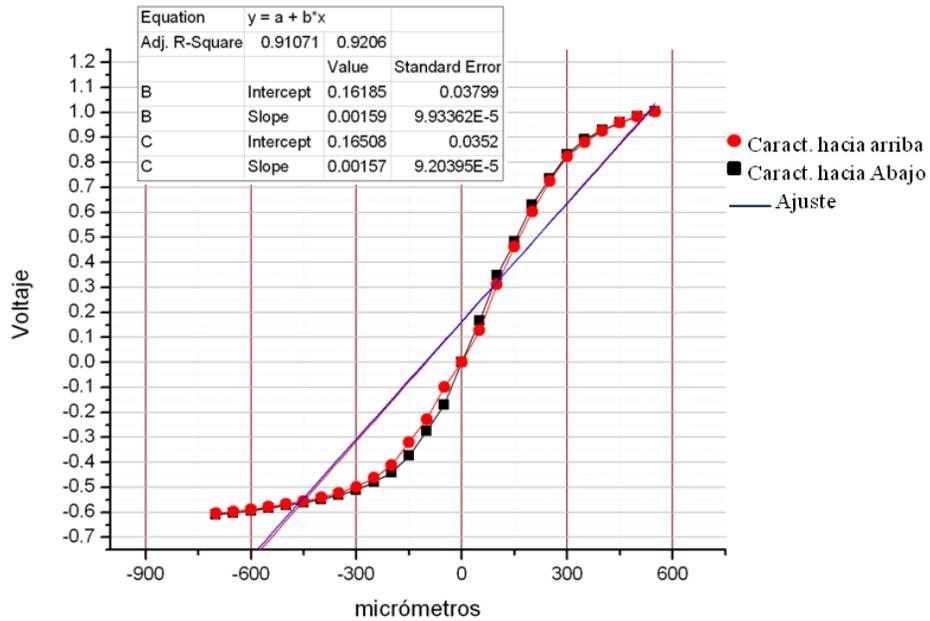


Fig. 4.7 Respuesta de sensor de cuatro cuadrantes

Las mediciones de la caracterización se muestran en el anexo B, como resultado se puede observar que la respuesta no es totalmente lineal. El sensor será la retroalimentación al control, por lo que es importante conocer el comportamiento en la zona en que se usará el sensor. Con fines de simplificar y facilitar el uso de la información del sensor se buscará trabajar sólo en la zona lineal, para determinar el área de trabajo se realizará un ajuste de curva cambiando el intervalo de trabajo buscando encontrar el factor  $R^2$  más alto (igual a 1) además de tratar de aprovechar el mayor intervalo de trabajo posible.

En la tabla 4.5 se muestran los resultados de  $R$  obtenidos.

Intervalo ( $\mu\text{m}$ )	$R^2$
-1500 a 1500	0.88307
-1300 a 1300	0.88831
-450 a 550	0.92060
-500 a 400	0.94366

*Tabla 4.5 Factor R para los diferentes ajustes de curva*

De la tabla 4.5 se obtiene que la zona lineal que mejor ajusta es de  $-500 \mu\text{m}$  a  $400 \mu\text{m}$ , en este intervalo podemos tener una resolución de  $1 \text{ mV}/10 \mu\text{m}$  aproximadamente, esta resolución es apropiada de acuerdo a los resultados de estabilidad del estudio de sensibilidad del sistema.

### 4.3 Diseño bobina

Para el diseño nos basaremos en la Ley de Ampere [Resnick, 2004][Eisberg, 1982]:

$$B = NI\mu_0$$

$$F = iL \times B$$

$$F = iLB\text{sen}\theta$$

Si  $\theta=90$

---

$$F = iLB$$

$$B = \frac{F}{iL}$$

$$F_{mag} = -F_{grav} = -m * g$$

$$m = 20$$

$$g = 9.81$$

$$F = 0.20 * 9.81 = 0.196 \text{ kgm/s}^2$$

$$i = 1 \text{ A}$$

$$L = N2\pi r^2$$

$$r = 1 \text{ cm}$$

$$L = N(0.063)$$

$$B = \frac{F}{iL}$$

$$B = \frac{0.196}{N(0.063)}$$

$$B = NI\mu_0$$

$$\frac{0.196}{N(0.063)} = NI\mu_0$$

$$\frac{0.196}{I\mu_0(0.063)} = N^2$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

$$\frac{0.196}{(1)(4\pi \times 10^{-7})(0.063)} = N^2$$

$$N = 1573 \text{ vueltas}$$

Como una prueba, se utilizó un imán permanente que se colocó fuera del núcleo de la bobina a una distancia  $z$ . Al energizar la bobina el imán permanente trata de –“orientarse” al campo generado, provocando que al soltar el imán se “pegue” al núcleo. Si hacemos que el imán permanezca a una distancia perpendicular  $z$  del núcleo se puede percibir la fuerza magnética de repulsión o atracción entre ambos, conforme  $z$  es más pequeña la fuerza se incrementa y si  $z$  crece (se aleja del núcleo) la fuerza magnética va decreciendo. Es decir la fuerza generada entre el núcleo y el imán es inversamente proporcional a la distancia entre ellos.

Este fenómeno puede describirse matemáticamente mediante la Ley de Biot-Savart, en la figura 4.9 se muestra el comportamiento del campo a diferentes corrientes.

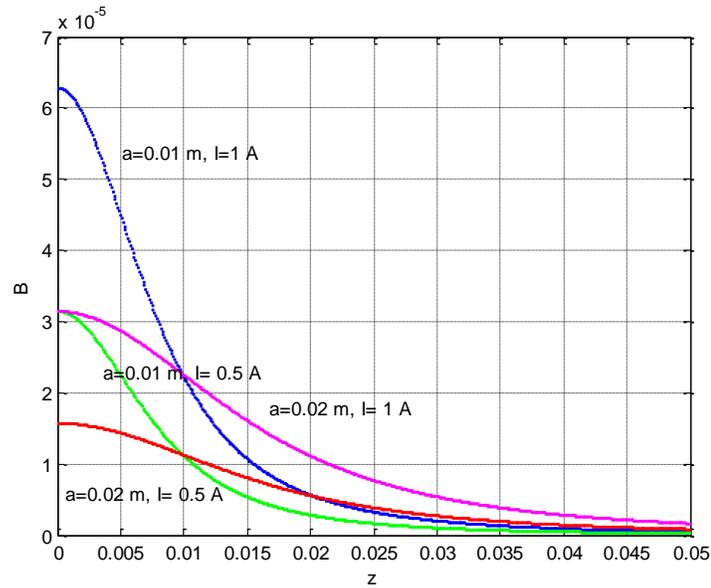


Fig. 4.9 Comportamiento del campo magnético variando  $I$ ,  $z$

Y la fuerza magnética obtenida de la ecuación 4.6 está representada en la fig. 4.10.

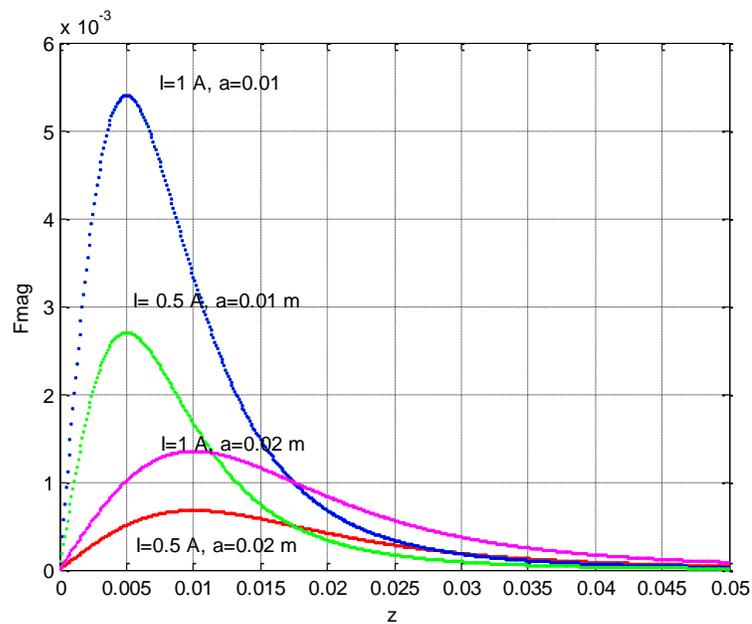


Fig. 4.10 Fuerza magnética con respecto a una distancia

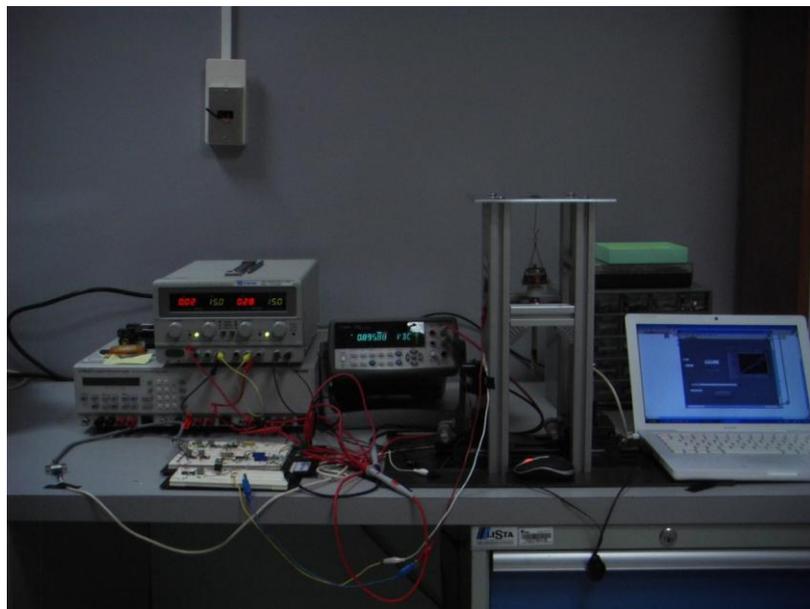
---

De la figura 4.10 podemos ver que la mayor fuerza magnética la obtenemos a 5 mm del origen del campo aplicando una corriente de 1 A, a una bobina de 0.01 m de radio, y del cálculo obtenido se realizará una bobina con 1600 vueltas. En el anexo B se muestra el dibujo con las dimensiones de la bobina.

#### 4.4 Banco de prueba

El banco de prueba se fabrica con perfil de aluminio y acero inoxidable 316. Los dibujos de diseño se encuentran en el Anexo B.

El banco de prueba, sistema óptico y bobina se muestra en la fig. 4.11



*Fig. 4.11 Banco de prueba de la suspensión magnética*

---

## CAPITULO V Control de la Suspensión Magnética

---

De acuerdo a la literatura, en el capítulo II se presentaron dos representaciones dinámicas del sistema de suspensión magnética: la primera propuesta por Hurley et al, en donde la inductancia tiene un comportamiento exponencial negativo en función de la distancia que separa al cuerpo ferromagnético del núcleo de la bobina (**ec. 2.12**), y la segunda, propuesta por Mougalya basada en las leyes de Kirchoff y Newton, obteniendo una representación en ecuaciones de estado (**ec.2.24**). Sin embargo, la característica principal de ambos sistemas es la interacción entre el campo magnético generado por la bobina y un cuerpo ferromagnético, en nuestro caso de estudio la diferencia es la interacción del campo magnético y un imán permanente, el cual no está considerado en ninguno de los dos sistemas dinámicos. Para incluirlo usaremos herramientas para la identificación del sistema.

### 5.1 Identificación de sistemas

Resolver el problema de estimación de parámetros requiere lo siguiente: Datos de entrada-salida del proceso, una clase de modelo y un criterio.

La estimación de parámetros se puede formular como un problema de optimización, en el que el mejor modelo es aquel que mejor se ajusta a los datos de acuerdo con un criterio dado. [Rios Luis Carlos, Toro Nicolas, 2006].

La identificación de sistemas es un proceso iterativo, se puede realizar mediante modelos con diferentes estructuras y comparar el rendimiento del mismo. Se puede comenzar estimando los parámetros de un modelo de estructura simple, si el ajuste es pobre, se puede incrementar gradualmente la complejidad de la estructura del modelo.

Otra razón para comenzar con un modelo de estructura simple, es que los modelos de orden mayor no siempre son de mejor exactitud. Incrementando la complejidad del modelo se incrementa la incertidumbre en los parámetros estimados.

Los modelos paramétricos se pueden obtener mediante:

- 1.- Ecuaciones polinomiales ARX y modelos en espacio de estado. Proveen estructuras simples y permiten estimar el orden del modelo y dinámica del ruido.
- 2.- Modelos polinomiales ARMAX y BJ, proveen estructuras más complejas y requieren una estimación iterativa.
- 3.- Modelos no lineales ARX

Una representación general de las estructuras antes mencionadas es la siguiente:

Tipo de modelo	Estructura Resultante
Modelo ARX	$A * y(t) = B * u(t) + e(t)$
Modelo Output Error (OE)	$y(t) = \frac{B}{F} u(t) + e(t)$
Modelo ARMAX	$A * y(t) = B * u(t) + C * e(t)$
Modelo Box Jenkins (BJ)	$y(t) = \frac{B}{F} u(t) + \frac{C}{D} e(t)$

Tabla 5.1 Modelos paramétrico y su estructura

Todo modelo matemático es capaz de predecir el valor de la salida del sistema en función de las entradas y salidas en instantes anteriores. Se llama predicción  $\varepsilon(t, \theta)$  a la diferencia entre la salida estimada por el modelo y la salida real del sistema en un determinado instante de tiempo [Eronini, 2001]. La función de costo basada en el error cuadrático se define como:

$$J = \int e^2(t) dt \quad \text{ec. 5.1}$$

Donde  $e(t)$  es el error entre el valor real de  $y(t)$  y el valor obtenido por el modelo.

La solución al criterio de mínimos cuadrados está definida como:

$$\beta = \left( \Phi^T \Phi \right)^{-1} \Phi^T y \quad \text{ec. 5.2}$$

Donde:

$$v = \begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \vdots \\ y(n+N) \end{bmatrix}$$

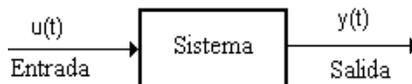
$$\phi = \begin{bmatrix} -y(n) & -y(n-1) & \cdots & -y(1) \\ -y(n+1) & -y(n) & \cdots & -y(2) \\ -y(n+2) & -y(n+1) & \cdots & -y(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(N+n-1) & -y(N+n-2) & \cdots & -y(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n) & u(n-1) & \cdots & u(1) \\ u(n+1) & u(n) & \cdots & u(2) \\ u(n+2) & u(n+1) & \cdots & u(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(N+n-1) & u(N+n-2) & \cdots & u(N) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Donde  $y$  es el vector de salidas,  $u$  es el vector de entradas,  $N$  es el número de muestras y  $n$  es el orden del sistema.

## 5.2 Respuesta del sistema de suspensión magnética

Se aplicará una identificación experimental para obtener un modelo paramétrico, teniendo mediciones de las señales de entrada y de salida del sistema.



*Fig. 5.1 Sistema en lazo abierto*

Al aplicar un escalón en lazo abierto al sistema de suspensión magnética de la fig. 5.1, la respuesta es inmediata y el sistema a suspender es atraído completamente a la bobina,

sin dar oportunidad a la suspensión ya que no hay ninguna referencia. Por lo anterior la identificación deberá ser en lazo cerrado, incluyendo un PID sintonizado de manera experimental (método de Ziegler-Nichols) para obtener una respuesta hasta un punto deseado del sistema, el cual está definido por el sensor óptico. En la fig. 5.2 se muestra el arreglo del sensor óptico, donde el Set Point lo definimos en el área lineal superior del sensor, permitiendo un recorrido de aproximadamente 5 mm para lograr la suspensión, de acuerdo a la fig. 4.7 y la tabla 4.5 un set point lo podemos definir en de 0.6 V aproximadamente.

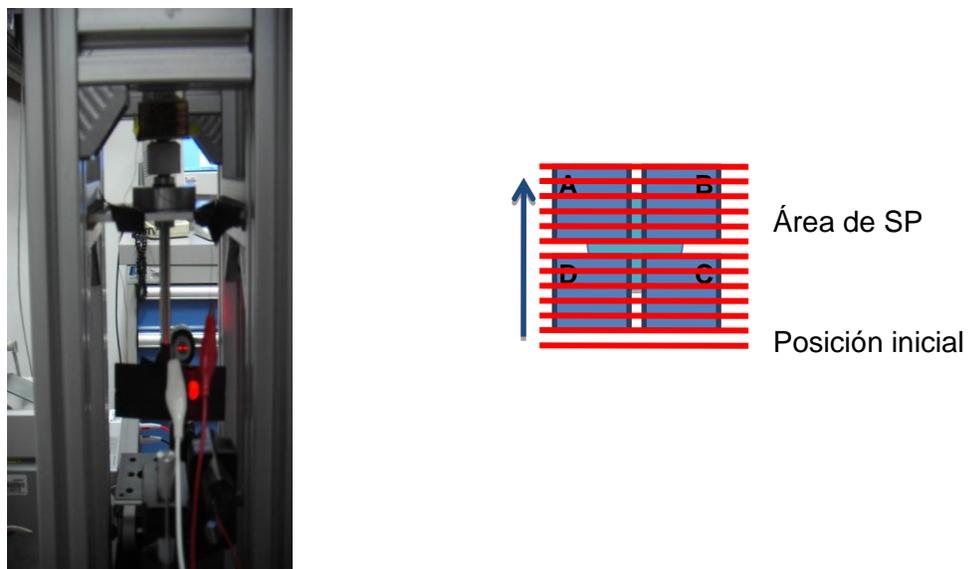


Fig. 5.2 Arreglo del sensor óptico

El diagrama a bloques general para el control se presenta en la fig. 5.3

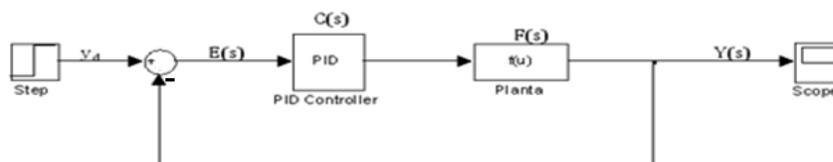
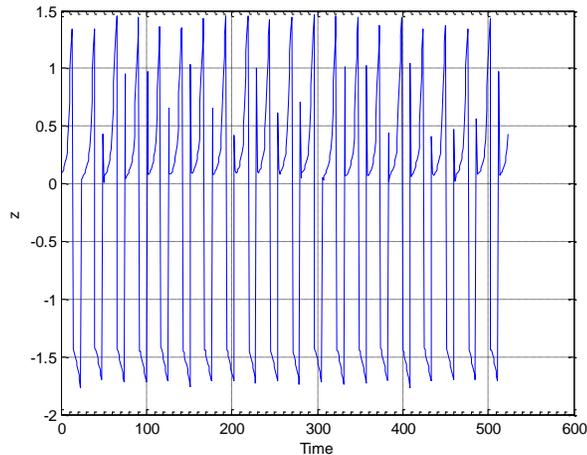


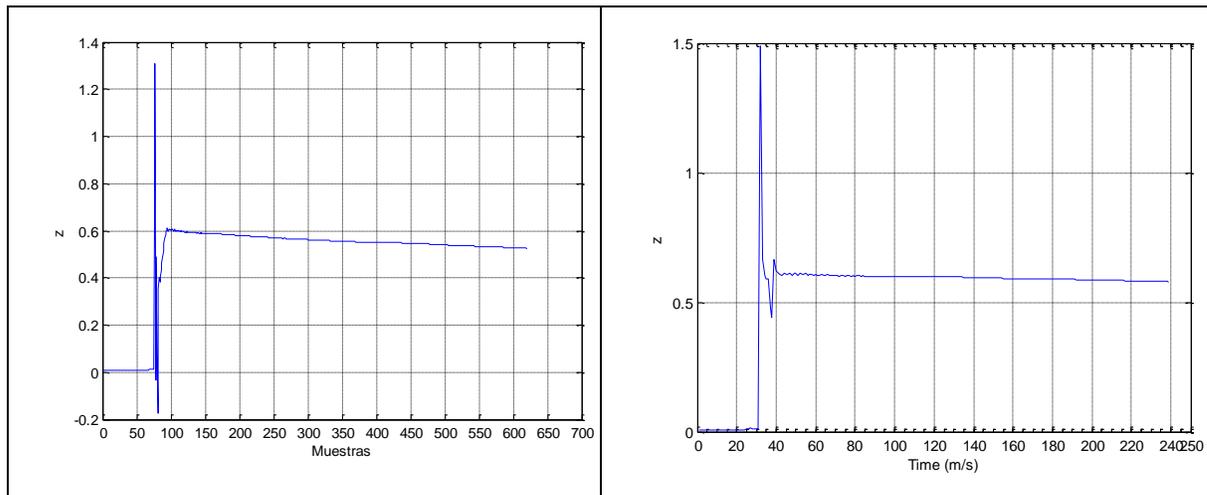
Fig. 5.3 Esquema general de control en lazo cerrado

De acuerdo al método de Ziegler-Nichols al variar la ganancia  $K_p$  hasta obtener oscilaciones se tiene la respuesta en la fig. 5.4; la ganancia  $K_{cr}$  medida es de 6 y  $P_{cr}$  de 25 ms por lo que aplicando las reglas de Ziegler-Nichols se obtienen:  $K_p=3.6$  y  $T_d=3.125e-5$ .



*Fig. 5.4 Respuesta del sistema variando  $K_p$*

La respuesta obtenida del sistema sintonizado se muestra en la fig. 5.5. y en la fig. 5.6 se muestra la respuesta del sistema aumentando el  $K_p$ .

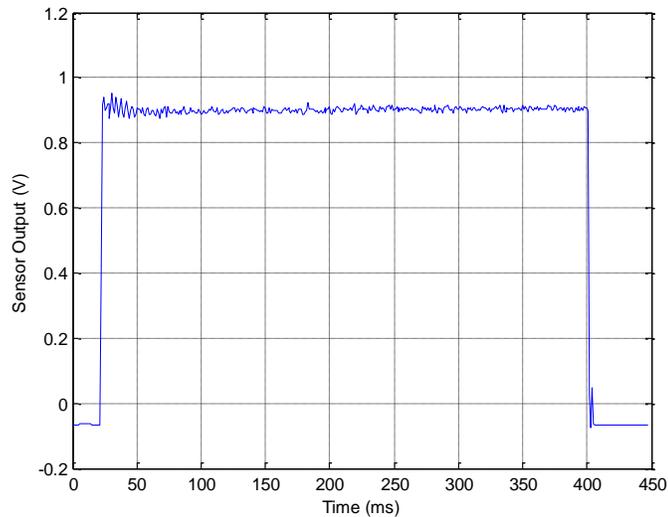


*Fig. 5.5 Respuesta del sistema con  $K_p=3.6$ ,  $T_d=3.125e-5$  aprox.*

*Fig. 5.6 Respuesta del sistema aumentando  $K_p=3.8$*

Como se puede observar en las respuestas del sistema utilizando un control PD, se tiene una deriva en donde va decayendo  $z$ , es decir, el electroimán va perdiendo fuerza para sostener en una posición estable.

Agregando un control integral además de adecuar la etapa de potencia para responder tanto en acción positiva como negativa (Anexo C), y aplicando nuevamente las reglas de Ziegler-Nichols para sintonizar el *PID*, la salida obtenida del sistema de suspensión magnética se muestra en la figura 5.7.



*Fig. 5.7 Respuesta del sistema de suspensión magnética controlado*

Hasta ahora se tiene una respuesta del sistema en lazo cerrado, con esta respuesta se puede establecer un método de identificación y obtener la función de transferencia del sistema.

### 5.2.1 Identificación por el método de mínimos cuadrados utilizando ecuaciones de diferencias

Como primera técnica, se aplica una identificación por mínimos cuadrados:

$$\beta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T v$$

Para un segundo orden se obtienen los siguientes resultados (el programa se muestra en el anexo C) y la simulación del modelo en la figura 5.8:

**Salida:** sensor de posición de -2 a 2 V aproximadamente

**Entrada:** escalón de 0 V a 15 V

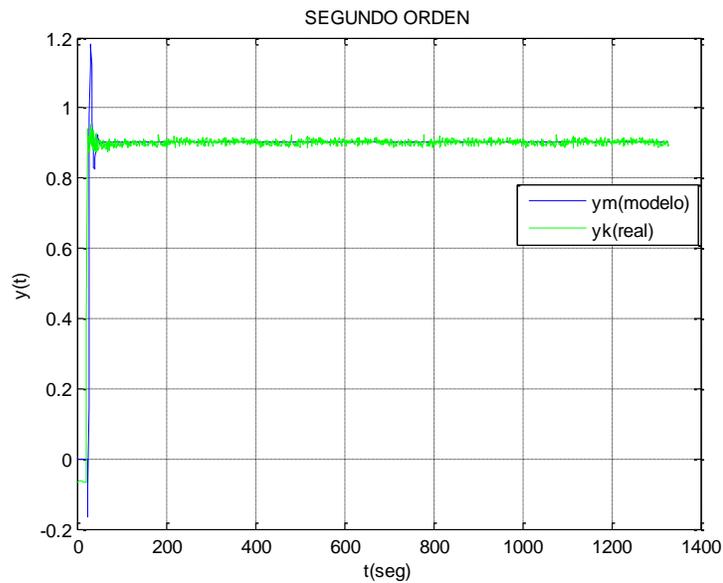
## Identificación de sistema, **orden 2**

beta =

-1.5104  
0.6936  
-0.0111  
0.0221

e = 2.1040

El ajuste de curva tiene un 97.90%



*Fig. 5.8 Ajuste de curva con mínimos cuadrados orden 2*

La ecuación en diferencias para un segundo orden queda como:

ec.5.3

La ecuación 5.3, representa el sistema de suspensión magnética en lazo cerrado incluyendo un control PID.

La ecuación general en tiempo continuo para un sistema de segundo orden está definido como [Ogata, 2008]:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{d_1 s + d_2}{s^2 + c_1 s + c_2} \quad \text{ec. 5.4}$$

La ecuación de segundo orden 5.3 está representada de manera discreta como [Eronini, 2001]:

$$y(k-2) \left[ -\Delta c_1 + \Delta^2 c_2 \right] + y(k-1) \left[ 2 + \Delta c_1 \right] + y(k) = u(k-2) \left[ \Delta d_1 + \Delta^2 d_2 \right] + u(k-1) \Delta d_1$$

ec. 5.5

Igualando las ecuaciones 5.3 y 5.5 se puede obtener los coeficientes de la función de transferencia con:

$$a_1 = -2 + \Delta c_1 = -1.51104$$

$$a_2 = 1 - \Delta c_1 + \Delta^2 c_2 = 0.6936$$

$$b_1 = \Delta d_1 = -0.0111$$

$$b_2 = \Delta d_1 + \Delta d_2 = 0.0221$$

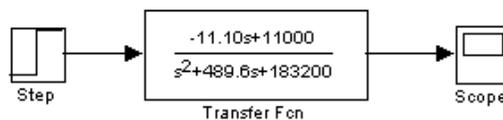
Además:

$$\Delta = \frac{t_{tot}}{n_{muestras}} = \frac{10}{1000} = 0.01$$

Al aplicar las constantes la función de transferencia en tiempo continuo queda representada como se muestra en la ecuación 5.6 y el diagrama a bloques se muestra en la fig. 5.9.

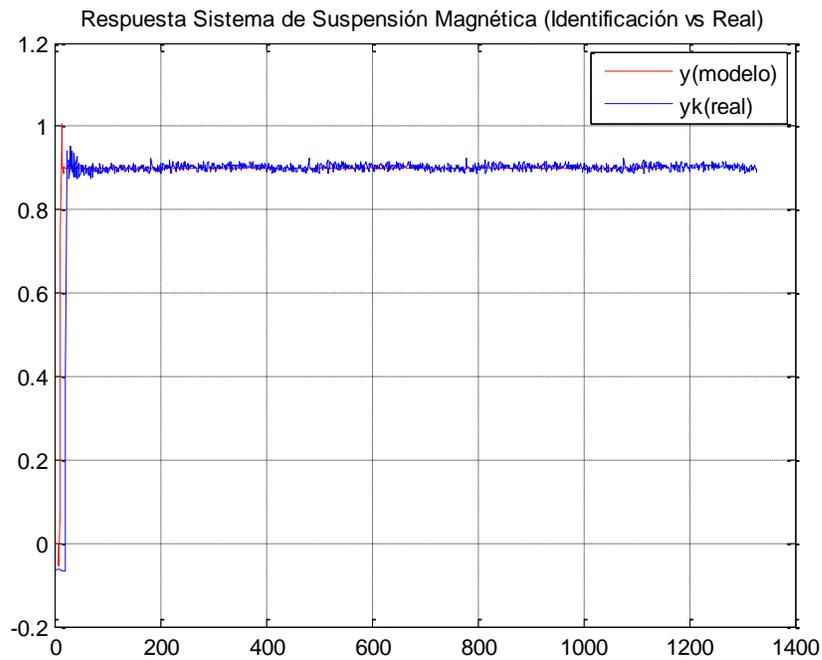
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-11.10s + 11000}{s^2 + 488.96s + 182560} = G(s)$$

ec. 5.6.



### 5.9 Diagrama a bloques de la función de transferencia del sistema de suspensión

La respuesta simulada de la función de transferencia (ec. 5.6) se muestra en la figura 5.10.



### 5.10 Respuesta de la función de transferencia de una suspensión magnética

De acuerdo a la figura 5.3,  $G(s)$  es la planta total del sistema y está definida como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{y_d}$$

Y:

$$\frac{Y(s)}{y_d} = \frac{C(s)F(s)}{1 + C(s)F(s)} = G(s)$$

La ecuación 5.6 representa el sistema de suspensión, incluyendo el control PID. Para obtener  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{G(s)}{C(s) \left[ 1 - G(s) \right]} \quad \text{ec. 5.7}$$

La función de transferencia de un controlador PID es:

$$C(s) = K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \quad \text{ec. 5.8}$$

---

Por lo que la función de transferencia para un sistema de suspensión magnética tomando en cuenta la interacción con un imán permanente queda como se muestra en la ecuación 5.9.

$$F(s) = \frac{-11.10s + 11000}{C(s)[s^2 + 489.6s + 183200]} \quad \text{ec. 5.9}$$

### 5.2.2 Identificación con estimación de un modelo paramétrico con matlab

Dentro del toolbox de Matlab también se puede obtener un modelo en tiempo continuo, como una función de transferencia que describa el sistema dinámico en términos de uno o más de los siguientes elementos:

- Ganancia estática  $K_p$
- Constantes de tiempo  $T_{pk}$ , para polos complejos la constante de tiempo se conoce como  $T_w$
- Zero  $T_z$
- Un posible tiempo de retardo  $T_d$ , antes que la salida del sistema responda a la entrada (tiempo muerto)
- Posible integración

Un modelo simple de esta forma es de un primer orden en tiempo continuo:

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT_{p1}} e^{-sT_d}$$

Los resultados de la identificación utilizando el toolbox de matlab 7.0, comparando los tres modelos anteriores los resultados se muestran en la figura 5.11.

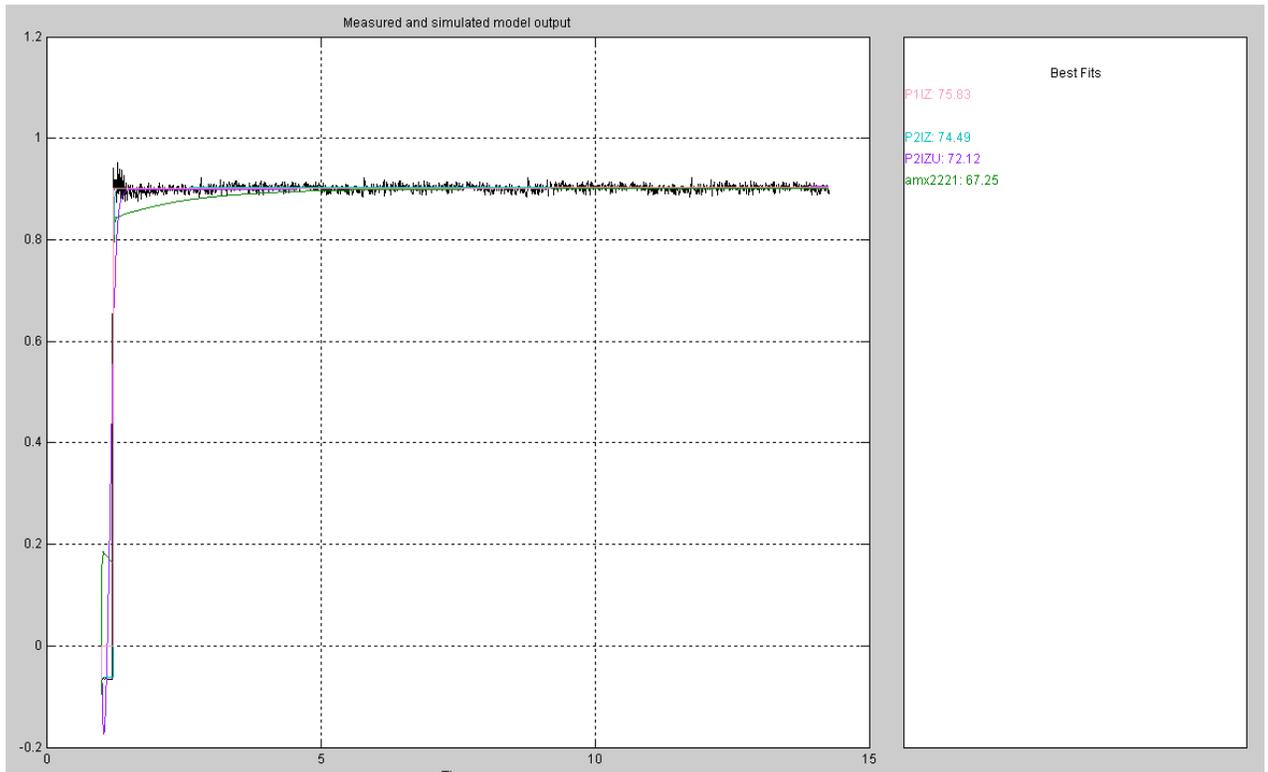


Fig. 5.11 Ajuste de curva con Toolbox de Identificación de Sistemas MatLab

El modelo ARMAX arroja un ajuste del 67.25%, discriminando todo el sobrepaso de respuesta del sistema.

Los modelos que mejor ajustan es una estructura de tiempo continuo con un ajuste de curva del 75.83% y 74.49%.

La función de transferencia obtenida para un 75.83% tiene un polo, un cero y un integrador presentando la siguiente forma:

$$G(s) = K * \frac{1+Tz*s}{s(1+Tp1*s)} \quad 5.9$$

Con:  $K = 1.2577e-005$

$Tp1 = 0.001$

$Tz = 4774.7$

La función de transferencia obtenida para un 74.49% tiene dos polos, un cero y un integrador presentando la siguiente forma:

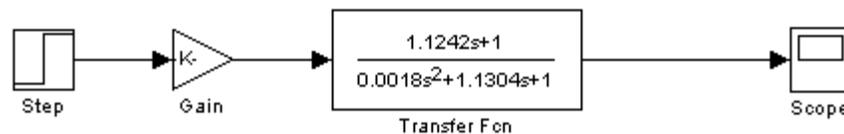
$$G(s) = K * \frac{1+Tz*s}{s(1+Tp1*s)(1+Tp2*s)} \quad 5.10$$

Con:  $K = 1.2022e-005$   
 $Tp1 = 0.001$   
 $Tp2 = 0.0050354$   
 $Tz = 5349.6$

Sin embargo, al simular las ecuaciones anteriores la respuesta no es representativa de acuerdo al modelo original, por lo que se propone otro modelo, el cual es un modelo subamortiguado de 2º. Orden que ajusta al 75.83% y tiene la forma:

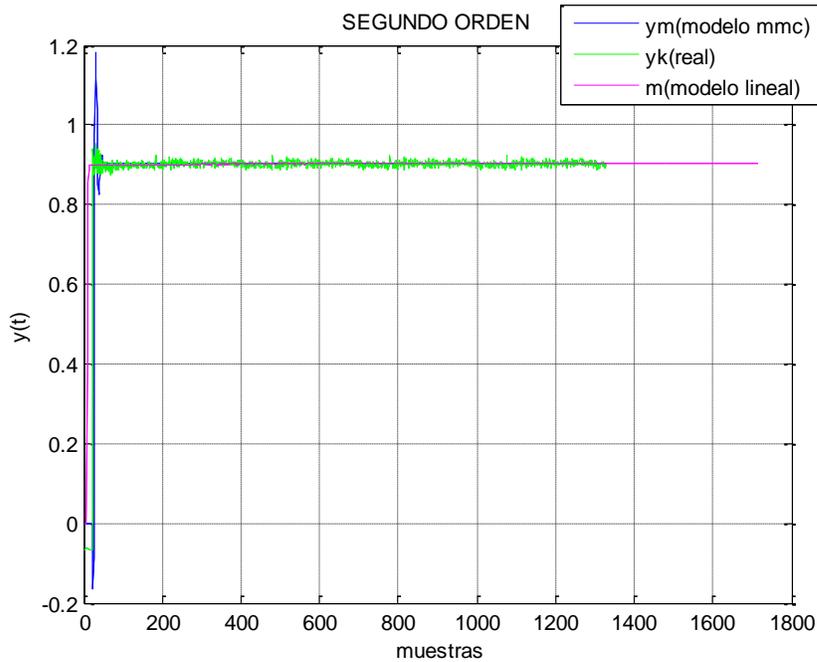
$$G(s) = K * \frac{1+Tz*s}{1+2*Zeta*Tw*s+(Tw*s)^2} \quad \text{ec. 5.11}$$

Con  $K = 0.060156$   
 $Tw = 0.042711$   
 $Zeta = 13.233$   
 $Tz = 1.1242$



### 5.12 Diagrama a bloques función de transferencia modelo continuo

La respuesta de  $G(s)$ , la real y el obtenido por mínimos cuadrados se observa en la fig. 5.13:



### 5.13 Respuesta modelo continuo

Nuevamente se tiene  $G(s)$ , la función de transferencia general del sistema de suspensión y controlador se representa como:

$$G(s) = K * \frac{1 + T_z s}{T_w^2 s^2 + 2 * zeta * T_x * s + 1} \quad 5.12$$

Sustituyendo en 5.6, la función de transferencia de la planta de suspensión magnética queda como:

$$F(s) = \frac{K \frac{1 + T_z s}{T_w^2 s^2 + 2 * zeta * T_x * s + 1}}{Kp \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] \left[ 1 - K \frac{1 + T_z s}{T_w^2 s^2 + 2 * zeta * T_x * s + 1} \right]} \quad 5.13$$

Reduciendo tenemos que:

$$F(s) = \frac{K(1+T_z s)}{\left[ K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right] \left[ T_w^2 s^2 + s(2 * zeta * T_w - K * T_z) + (1 - K) \right]} \quad 5.14$$

El diagrama a bloques incluyendo el control PID queda como sigue:

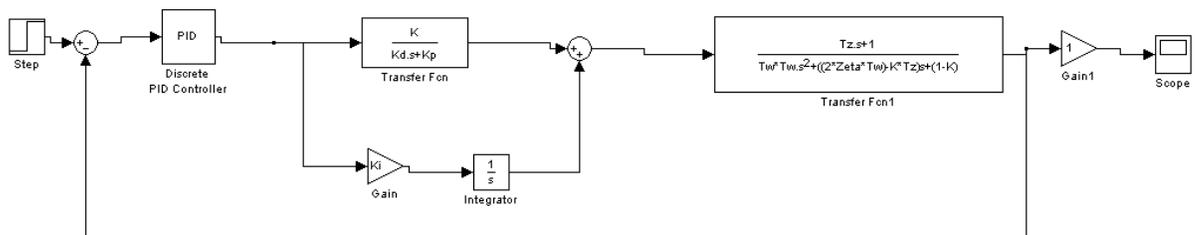


Fig. 5.14 Diagrama a bloques del sistema de suspensión magnética a lazo cerrado

Las constantes utilizadas para la simulación son las siguientes:

$$K = 0.060156$$

$$T_w = 0.042711$$

$$Zeta = 13.233$$

$$T_z = 1.1242$$

$$K_p = 1$$

$$K_d = 0.006$$

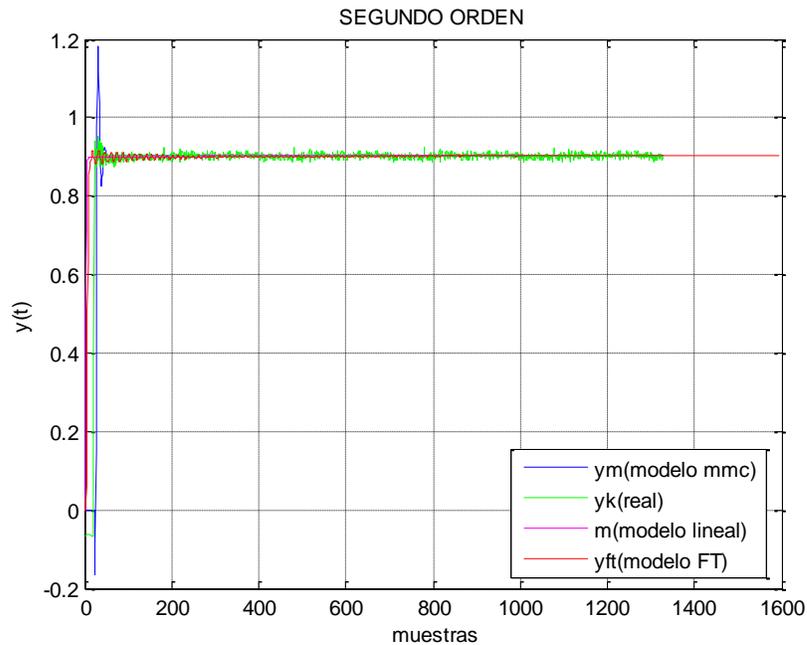
$$K_i = 0.000025$$

El modelo para el sistema de suspensión magnética con una función subamortiguada con 2 polos y 1 cero es:

$$F(s) = \frac{0.060156 + 0.067227s}{\left[ K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right] \left[ 0.00182423s^2 + 1.0027619s + 0.939844 \right]} \quad \text{ec. 5.15}$$

---

La comparación entre modelos se presenta en la siguiente gráfica:



5.14 Gráfica de comparación de modelos

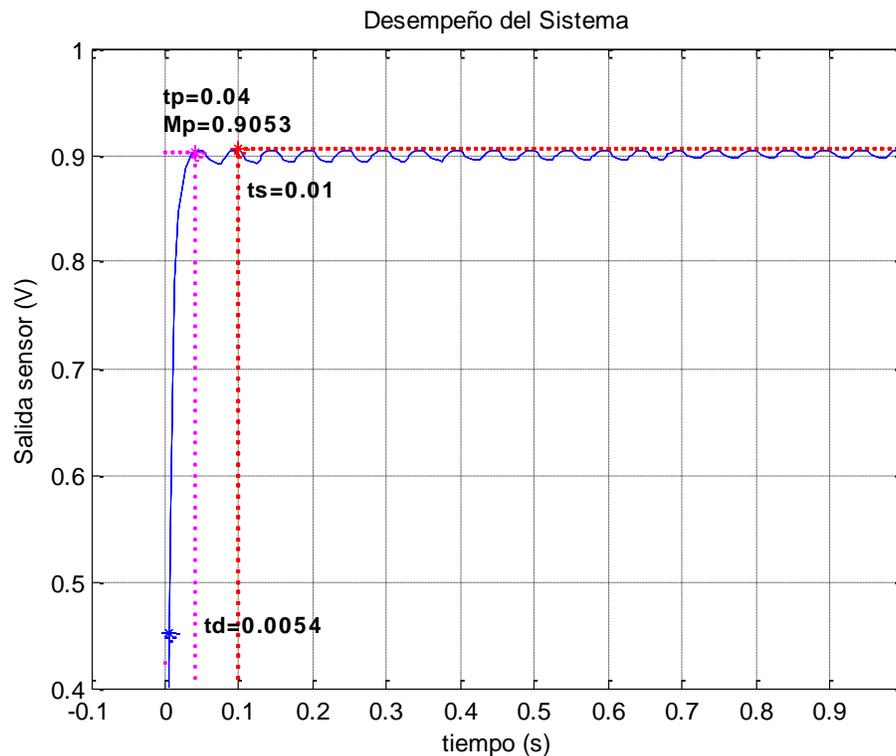
### 5.3 Desempeño del sistema de suspensión magnética

La respuesta transitoria de un sistema de control práctico muestra las oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estacionario. Las especificaciones son las siguientes:

- 1.- Tiempo de retardo  $t_d$ : es el tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.
- 2.- Tiempo pico,  $t_p$ ; es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobreelongación.
- 3.- Sobreelongación máxima,  $M_p$ : es el máximo pico de la curva de respuesta

4.- Tiempo de asentamiento,  $t_s$ ; es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final.

Al tomar la función de transferencia 5.12, y tomando solamente 1 s de la respuesta, se calcularon los valores con el programa en matlab del anexo D. Los resultados se muestran en la fig. 5.15.



### 5.15 Desempeño del sistema de suspensión magnética

En la fig. 15.4 se muestran las diferentes respuestas de la identificación del sistema de suspensión, si tomáramos la respuesta real, se puede observar que sería muy difícil obtener los parámetros del desempeño del sistema ya que presenta mucho “ruido”. Se tomó la función identificada con un modelo en tiempo continuo en la que es posible estudiar la respuesta. De la fig. 5.15 se observa un tiempo de respuesta de 0.0054 s y un establecimiento en 1 s aproximadamente.

---

El sobreimpulso máximo y el tiempo de crecimiento están en conflicto entre sí, es decir, no se puede lograr un sobreimpulso máximo y un tiempo de crecimiento pequeños al mismo tiempo. Si uno de ellos se hace pequeño, el otro se hará grande necesariamente. Sin embargo, si la amplitud de la entrada aumenta, la amplitud del sobreimpulso también, aunque no varíe el tiempo de estabilización. Por lo tanto, para estudiar la estabilidad del sistema sólo es necesario estudiar y simular los parámetros  $w_n$  y  $\xi$ , de ahí la importancia de identificar el sistema y simular estos parámetros.

---

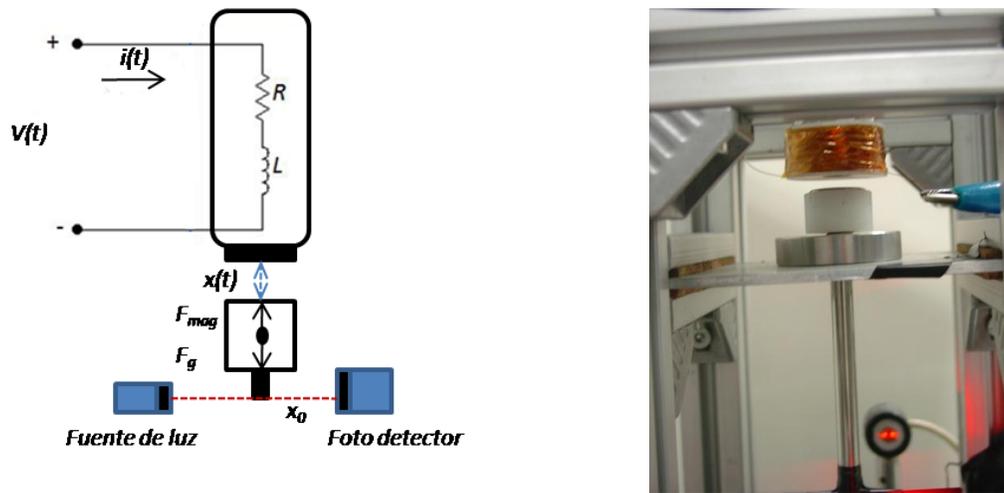
## CAPITULO 6 Conclusiones y Trabajo futuro

---

### 6.1 Conclusiones

Se realizó el diseño y la construcción de un sistema de suspensión magnética que se encuentra en los laboratorios de densidad del CENAM.

El sistema de suspensión magnético consta de: un imán permanente, una bobina diseñada para sostener aproximadamente 25 g, un sistema de posición óptico y un control PID, el sistema general se muestra en la fig. 6.1



*Fig. 6.1 Sistema de suspensión magnética*

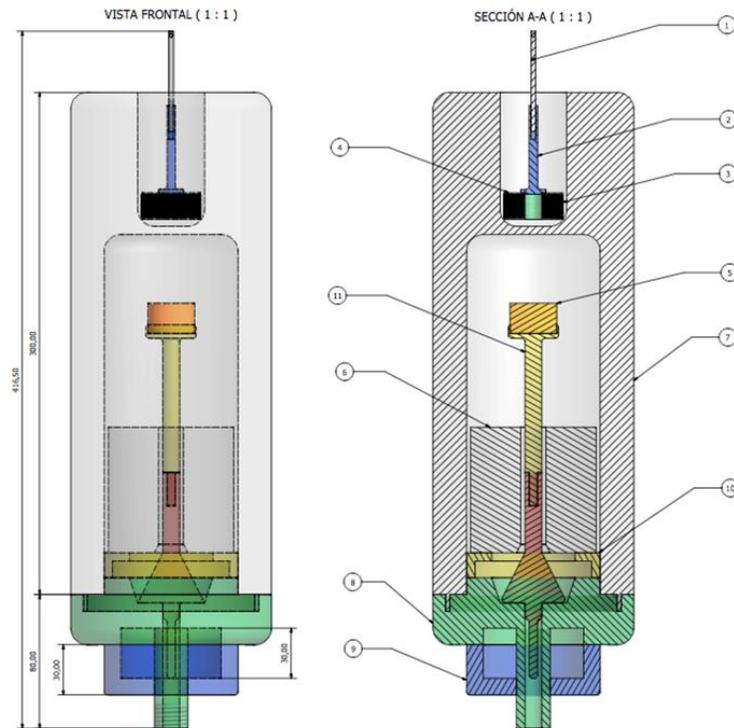
Se obtuvo un sistema dinámico con herramientas de identificación lo que permite un mejor conocimiento del sistema de suspensión magnética.

Con este diseño se puede alcanzar una estabilidad en la suspensión de  $\pm 10 \mu\text{m}$  sobre el eje  $z$ , lo que representa una variabilidad en masa de  $\pm 2 \text{ mg}$ , con lo que se puede obtener una incertidumbre relativa en la medición de densidad de líquidos de aproximadamente  $5 \times 10^{-4}$ , sin tomar en cuenta las posibles correcciones debida a los campos magnéticos sobre los materiales propios del sistema.

Con este sistema de suspensión magnética se tienen los requisitos de diseño para la celda o probeta del líquido, lo cual es el siguiente paso para seguir desarrollando el sistema de medición de densidad de líquidos por suspensión magnética.

Una propuesta de esta probeta se muestra en la fig. 6.2, como trabajo a futuro se tiene la fabricación de dicha probeta.

Además como trabajo a futuro, será necesario mejorar el control aplicando otras técnicas para mejorar la estabilidad, mediante un control de potencia cero o un modelo por referencia, ya que la calibración de densidad de líquidos debe llegar, por mucho, al orden de  $2 \times 10^{-5}$  relativo.



*Fig. 6.2 Diseño de celda para medición de densidad de líquidos por suspensión magnética*

---

## **6.2 Productos de Investigación**

Se realizó un artículo llamado: "Desarrollo de un sistema de suspensión magnética para la determinación de densidad de líquidos", propuesto para publicación en la Revista de Ingeniería e Investigación de la Universidad de Colombia, el artículo está radicado con el número de referencia 1181. La Revista Ingeniería e Investigación está indexada en: e-revist@s, ISI Web of Knowledge, Latindex, entre otras con el número: ISSN 0120-5609.

Anexo E

---

# Bibliografía

---

**Becerra Luis O.**, Pezet S. Felix; Publicación técnica: Determinación de la Densidad de Sólidos y Líquidos; Publicación CNM-MMM-PT-002, Centro Nacional de Metrología, 2002.

**Campos** Hernández Paúl Javier, Construcción y control de un levitador magnético, Tesis de Maestría, Centro de investigación y desarrollo de tecnología digital, IPN, 2008.

**Noel Bignell**, Magnetic flotation in densimetry, Measurement Science and Technology, 2006, 2574-2580

**M Tanaka**, G. Girard, R. Davis, A. Peuto and N. Bignell, Recommended table for the density of water between 0 C and 40 C based on recent experimental reports, Metrologia, 2001, 301-308

**N Kuramoto**, K Fuji and A Waseda, Accurate density measurements of reference liquids by a magnetic suspension balance, Metrologia, 2004, S84-S94

**H Wolf**, H Bettin and A Gluschko, Water density measurement by a magnetic flotation apparatus, Measurement Science and Technology, 2006, 2581-2587

**R Kleinrahm**, W Wagner, Journal of Chemistry and Thermodynamics, 1986, 739-760

**Klimeck J**, R Kleinrahm and W Wagner, Journal of Chemistry and Thermodynamics, 1998, 1571-1780

**W. Wagner**, K. Brachthäuser, R. Kleinrahm and H.W. Lösch, A new, accurate single-sinker densitometer for temperatures from 233 to 523 K at pressures up to 30 MPa, International Journal of Thermophysics, 1194, Volume 16, Number 2, 399-411

**William H. Hurley**, Werner H. Wölf, Electromagnetic Design of a Magnetic Suspension System, IEEE Transactions on education, Vol. 40, No. 2, Mayo 1997.

**Yuya Kano**, Yohei Kayukawa, Kenichi Fujii and Haruki Sato, A new method for correcting a force transmission error due to magnetic effects in a magnetic levitation densimeter, Institute of Physics Publishing, Measurement and Science Technology, 2007, 659-666

---

**H.D. Taghirad**, M. Abrishamchian, R. Ghabcheloo, Electromagnetic Levitation System: an experimental approach, K.N. Toosi University of Technology department of Electrical Engineering, Tehran, Iran.

**Takeshi Mizuno**, Yuuchiro Takemori, A transfer-function approach to the analysis and design of zero-power controllers for magnetic suspension systems

**Kanan Moudgalya**, Digital Control, ed. Wiley & Sons, 2007, pag. 7-10

**Katsuhiko Ogata**, Ingeniería de Control Moderna, , 3<sup>a</sup>. Edición, ed. Prentice-Hall

**Resnick**, Halliday, Krane, Fisica Volumen 2, 5a. Edición, ed. CECSA.

**Robert M. Eisberg**, Lawrence S. Lerner, Fisica Fundamentos y Aplicaciones Vol II, ed. Mc Graw Hill.

**Gupta S. V.**, Practical density measurement and hydrometry, Series in Measurement science and technology, Institute of physics publishing, Bristol and Philadelphia, 2002.

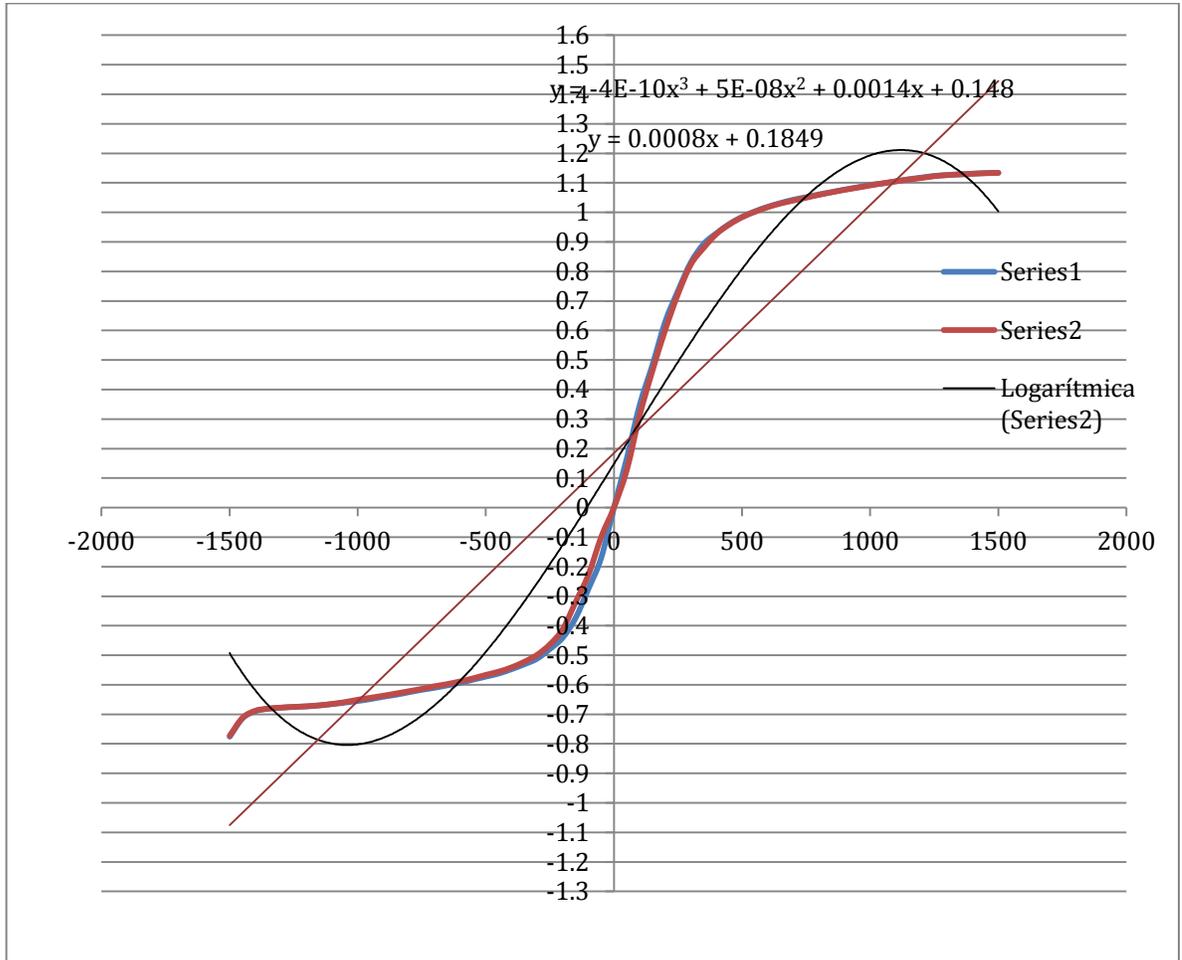
**Visioli Antonio**, Practical PID Control, Advances in industrial control, ed. Springer, 2007.



# ANEXO A



## Caracterización sensor de cuatro cuadrantes



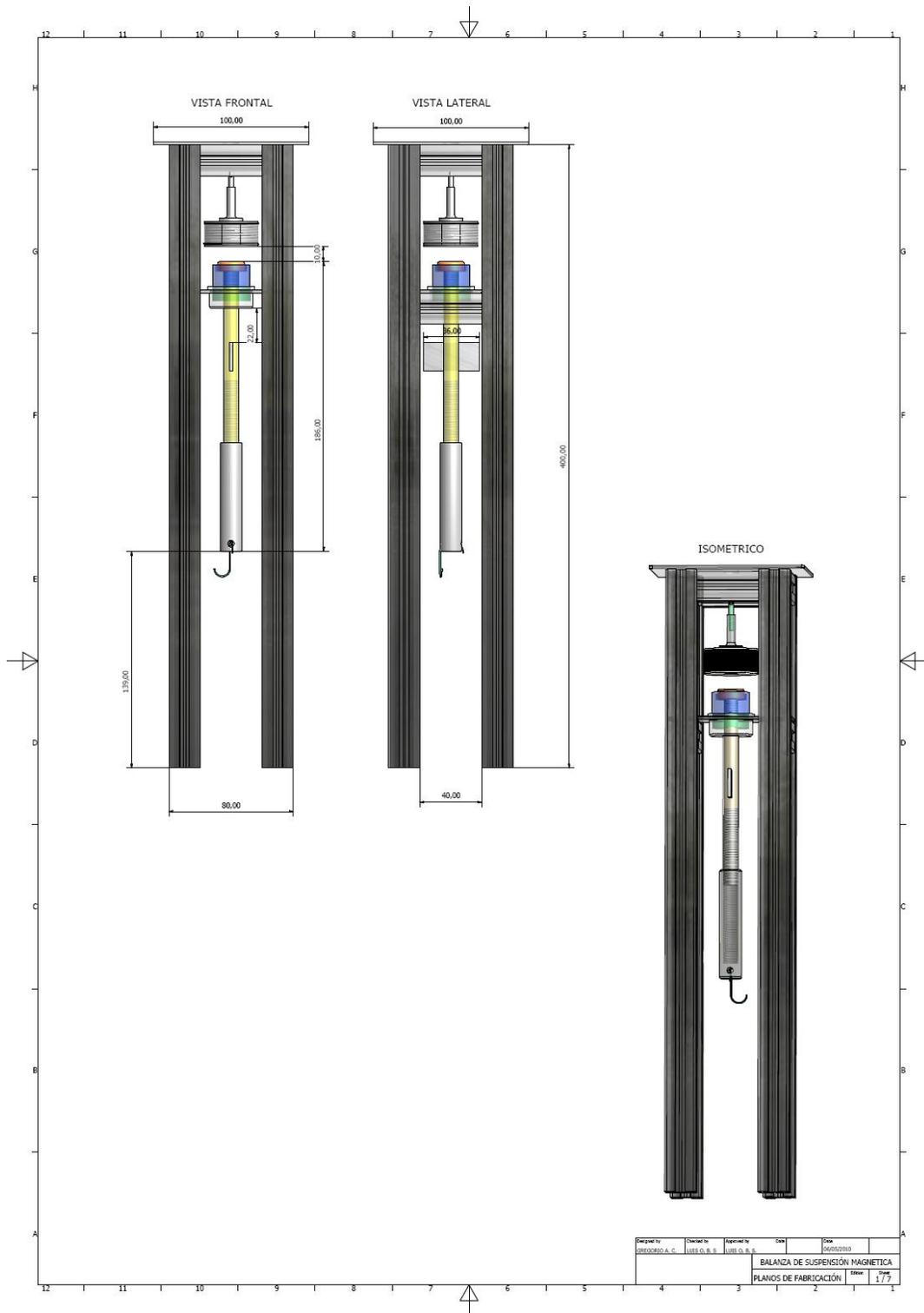
Respuesta general de sensor

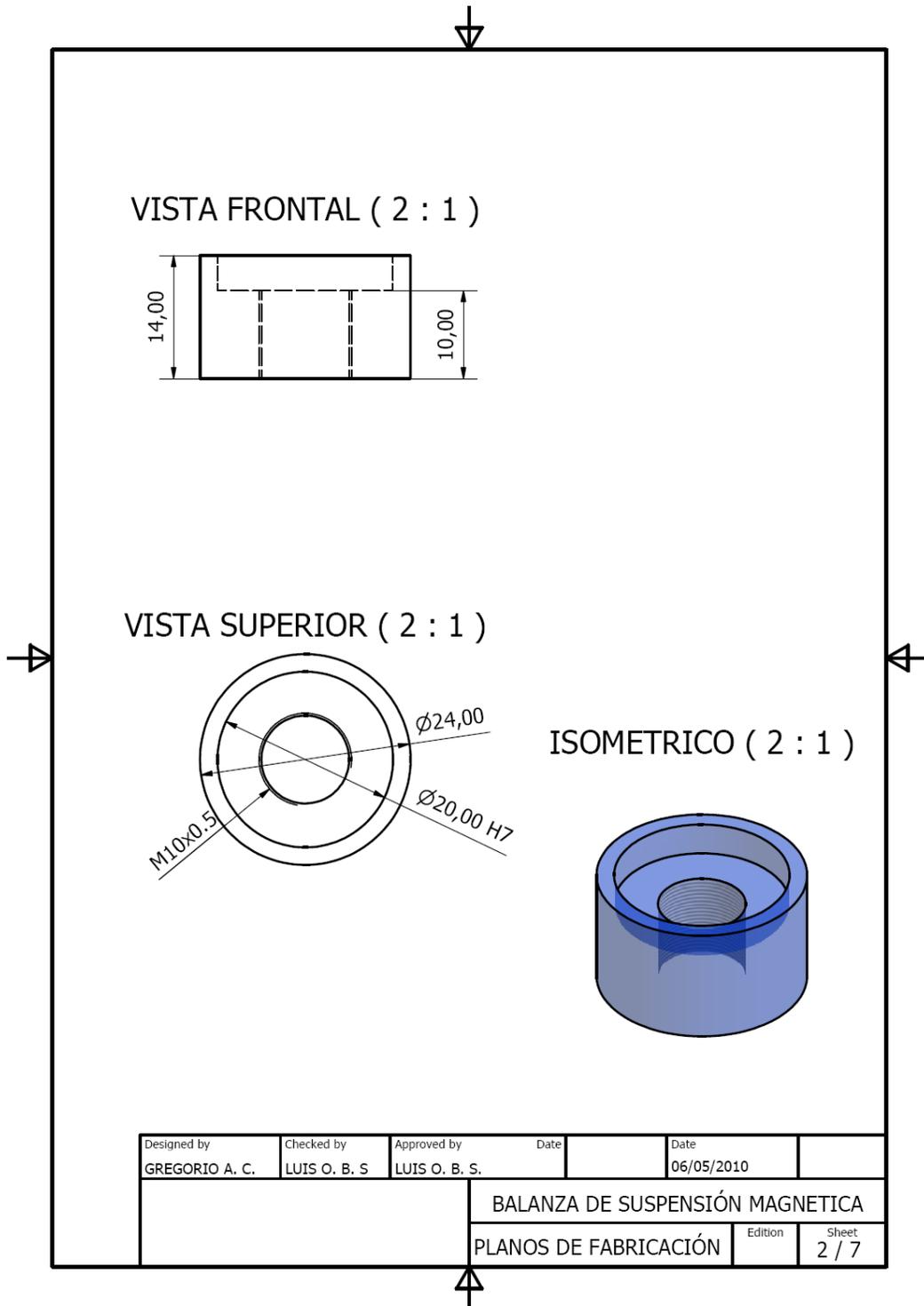


## ANEXO B

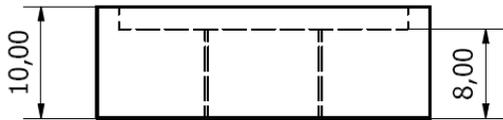


# Banco de prueba general

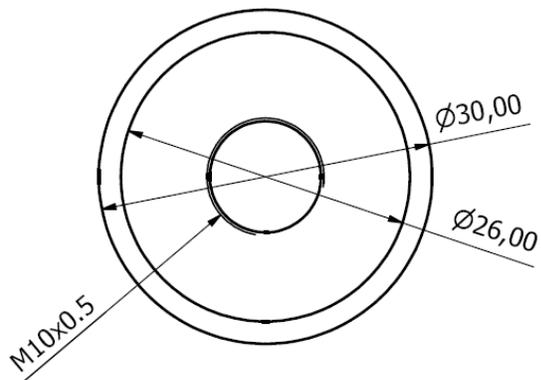




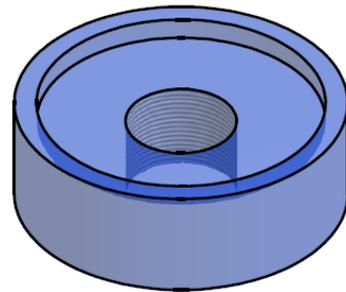
VISTA FRONTAL ( 2 : 1 )



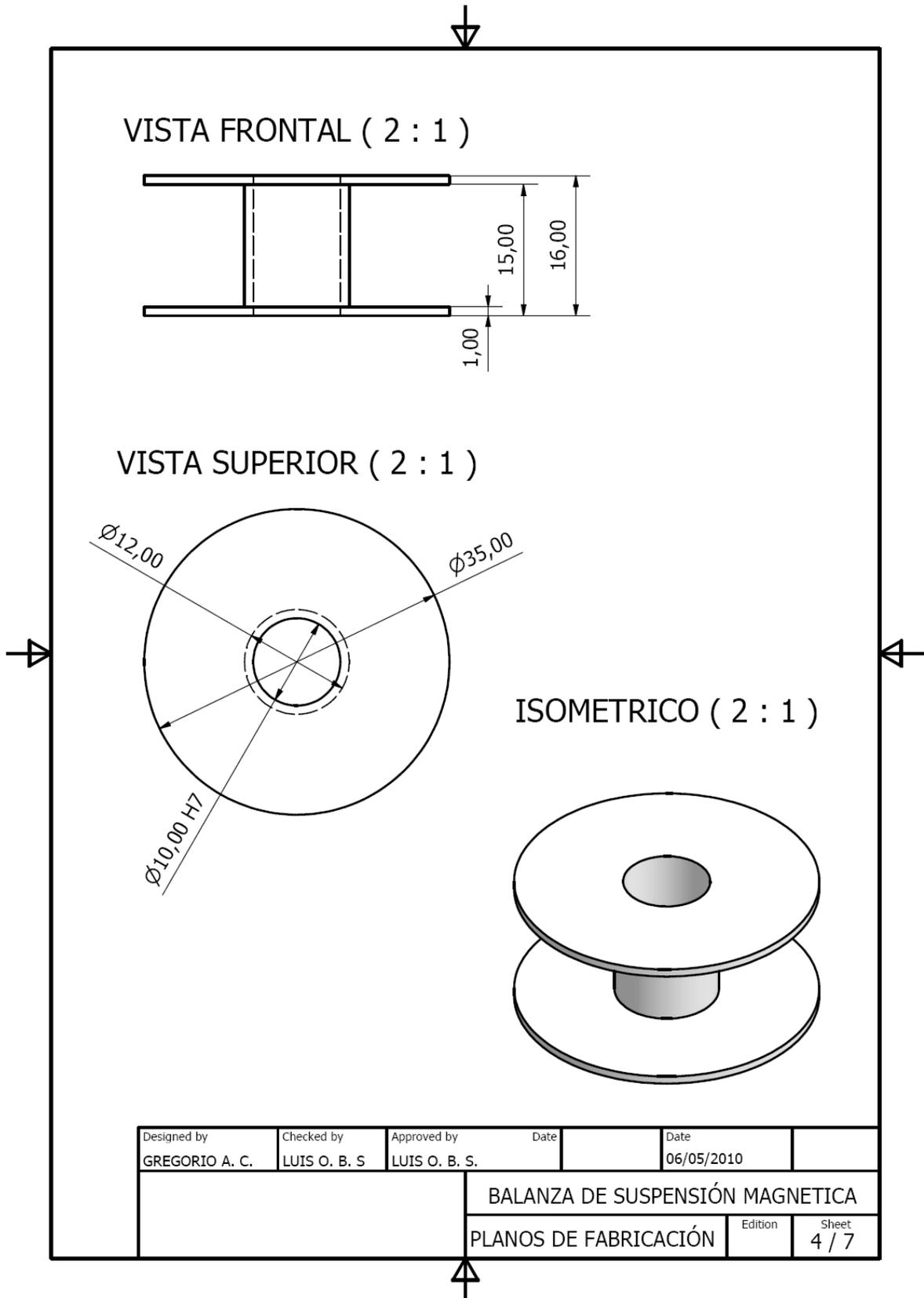
VISTA SUPERIOR ( 2 : 1 )



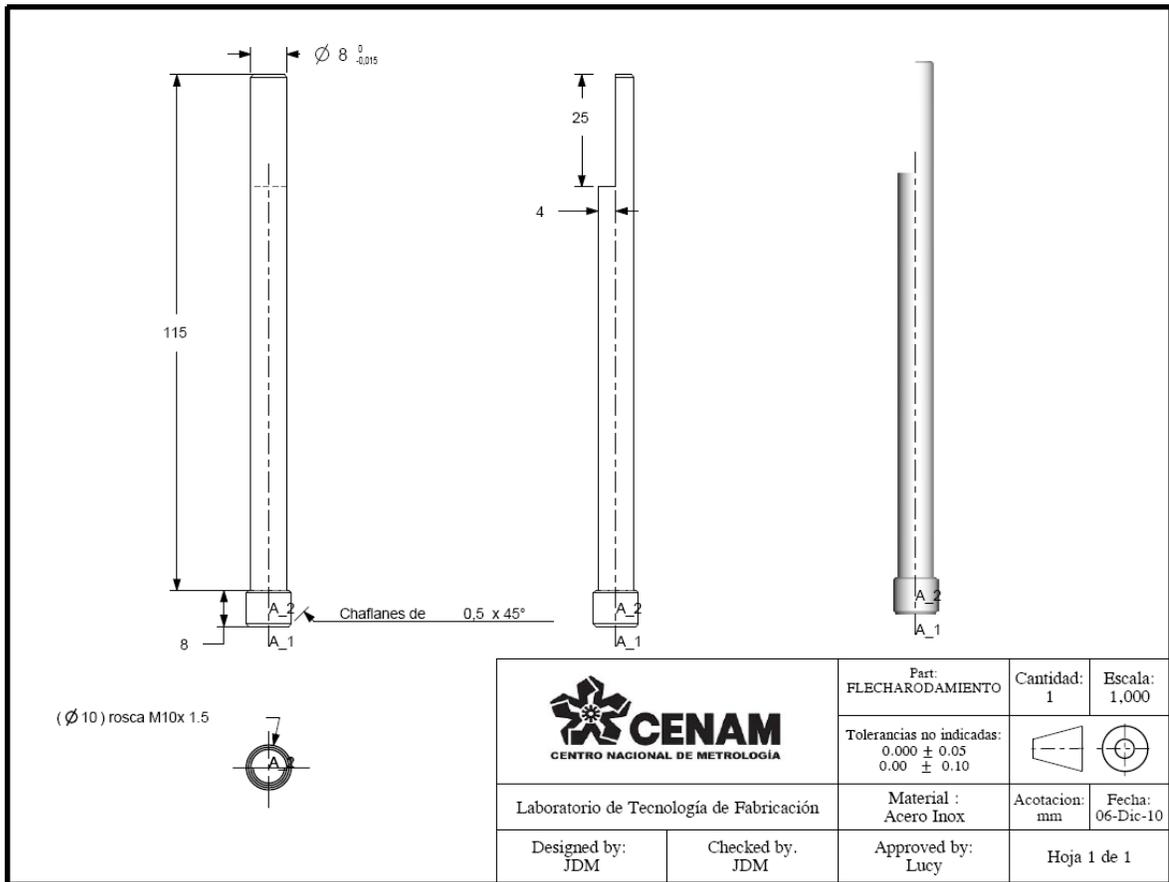
ISOMETRICO ( 2 : 1 )



Designed by GREGORIO A. C.	Checked by LUIS O. B. S	Approved by LUIS O. B. S.	Date	Date 06/05/2010	
			BALANZA DE SUSPENSIÓN MAGNETICA		
			PLANOS DE FABRICACIÓN	Edition	Sheet 3 / 7



# Varilla de sujeción

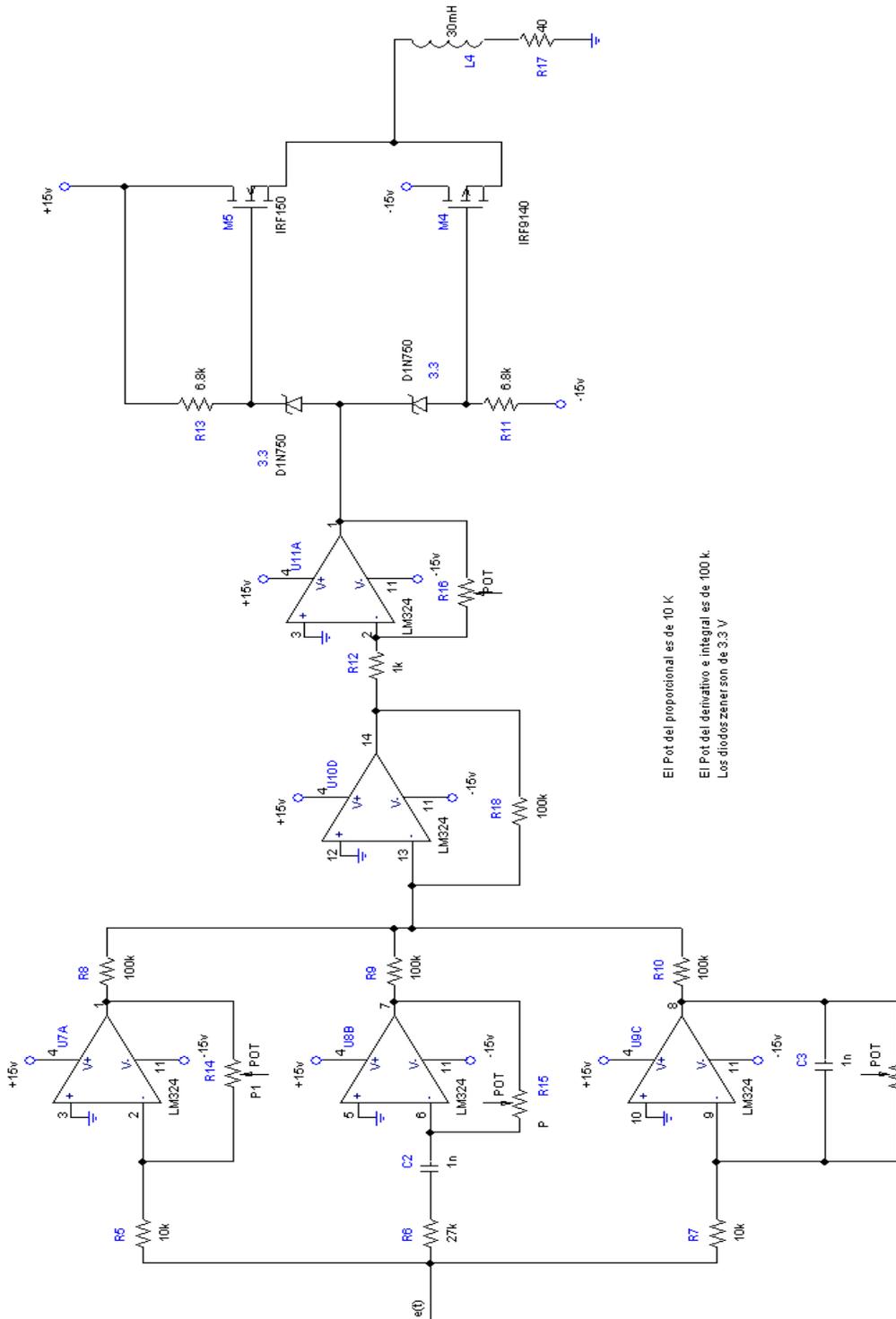




## ANEXO C



## Diagrama electrónico PID y circuito de Potencia





## ANEXO D



---

## **%Programa para obtener el desempeño del sistema de suspensión magnética**

```
v=simulacion_iden;
x=simulacion_iden(:,1);
y=simulacion_iden(:,2);
xi=length(v)
Mp=max(y)
for i=1:xi
    if y(i)==Mp
        tp=x(i)
        pos=i;
    end
end
suma=0;
for c=50:xi
    suma=y(c)+suma;
end
promedio=suma/(xi-50)
valor_td=0;
valor_td=(promedio/2)
for i=1:xi
    if y(i)>=valor_td
        td=x(i)
    end
end
end
%for j=1:550
%plot(x(j),y(j));
%hold on
%end
plot(x,y)
hold on
plot(tp,Mp,'*r')
for k=0:0.01:Mp
    plot(tp,k,'-r')
end
for k=0:0.01:1
    plot((k+tp),Mp,'-r')
end
xtd=x(7);
plot(xtd,valor_td,'*b')
t1=promedio*1.0005;
t2=promedio*0.9995;
for i=1:xi
    if y(i)>=promedio
        ts=x(i)
        break
    end
end
end
plot(ts,t2,'*m')
```

```

for k=0:0.01:ts
    plot(k,t2, '-m')
end
for k=0:0.01:t2
    plot(ts,k, '-m')
end

```

### **%Programa Identificación por mínimos cuadrados**

```

%clear all; %inicializa a cero todas las variables del programa
%clc; %almacenadas y borra la ventana de trabajo de Matlab
%direccion de los datos almacenados de la simulacion.
files=load('E:\ProySuspensionMagnetica\PruebasSistema\pruebas\posicion3_ver3.txt');
n=2; %orden del sistema
ym=[0];
d=0.01;
ym(1)=0;
ym(2)=0;
%t=files(:,2);
yk=files(:,3); %generacion del vector y(k)
uk=files(:,1); %generacion del vector u(k)
um=uk;
N=length(uk)-3; %longitud del vector y(k) y por lo tanto u(k)
PHI=zeros(N,4);
for i=1:N %ciclo para generar el vector v
    v(i)=yk(n+i);
end
V=v';
%generacion de la matriz PHI
PHI=[-yk(n:1:N+n-1),-yk(n-1:1:N+n-2),uk(n:1:N+n-1),uk(n-1:1:N+n-2)];
beta=(inv(PHI'*PHI))*((PHI')*V) %obtencion de los coeficientes de la FT
for k=3:length(um)
    ym(k)=(beta(3))*um(k-1)+(beta(4))*um(k-2)-(beta(1))*ym(k-1)-(beta(2))*ym(k-2);
end
plot(ym,'b'); %ecuacion en diferencias
hold on
plot(yk,'g')% real
grid on;
xlabel('muestras');
ylabel('y(t)');
title('SEGUNDO ORDEN');
ym=ym';
plot(y,'m'); %funcion ident G(s)
plot(yft,'r') %funcion F(s)
e=yk-ym;
e=e.^2;
%plot(e,'r')
er=sum(e);

```

---

```
e=sqrt(er)
legend('ym(modelo mmc)', 'yk(real)', 'm(modelo lineal)', 'yft(modelo FT)', 4)
%in=[t yk];
%out=[t ym];
ly=length(y)
lyy=length(yk)
lym=length(ym)
lyft=length(yft)
```



# ANEXO E



---

---

**DESARROLLO DE UN SISTEMA DE SUSPENSIÓN MAGNÉTICA PARA LA  
DETERMINACIÓN DE DENSIDAD DE LÍQUIDOS  
A MAGNETIC SUSPENSION SYSTEM DEVELOPED FOR THE MEASUREMENT OF  
DENSITY OF LIQUIDS**

Centeno Luz Ma.<sup>1</sup>, Castillo Eduardo<sup>2</sup>, Becerra Luis O<sup>1</sup>, Rochin Alberto<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centro Nacional de Metrología – CENAM, <sup>2</sup>Instituto Politécnico Nacional - CICATA  
<sup>1</sup>km 4,5 Carretera a los Cués, Mpio. El Marqués, <sup>2</sup>Cerro Blanco 141, Col. Colinas del  
Cimatario, Santiago de Querétaro, México.

email: [lcenteno@cenam.mx](mailto:lcenteno@cenam.mx), [ecastilloca@ipn.mx](mailto:ecastilloca@ipn.mx), [lbecerra@cenam.mx](mailto:lbecerra@cenam.mx) ,  
[arochin@cenam.mx](mailto:arochin@cenam.mx)

**Resumen:** La densidad es una magnitud derivada de las magnitudes de base masa y longitud, está definida como masa por unidad de volumen y su unidad en el SI es el kg/m<sup>3</sup>. Las últimas 5 décadas, dentro del ámbito de metrología primaria, se han desarrollado sistemas de suspensión magnética para la determinación de densidad de fluidos, permitiendo realizar investigaciones sobre las características físicas de líquidos y gases. El presente trabajo tiene como objetivo el desarrollo y diseño de un sistema de suspensión magnética que será utilizado en una balanza de suspensión magnética para la determinación de densidad de líquidos en los laboratorios de metrología de densidad dentro del CENAM.

**Palabras clave:** densidad, suspensión magnética, fuerza magnética

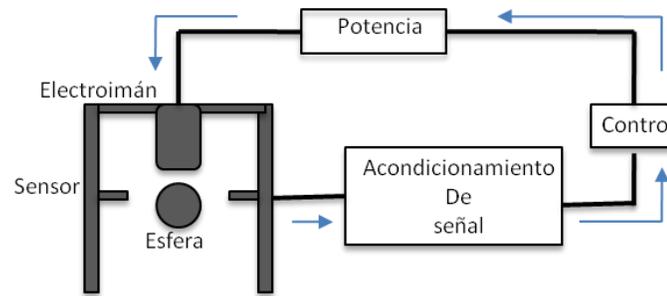
**Abstract :** *Density is a derivative magnitude of mass and length; it is defined as the mass per volume unit, its SI unit is the kg/m<sup>3</sup>. Last years, national metrology institutes have been designed and built their own magnetic suspension systems for fluids density measurements, allowing them to do some researches about physical characteristics of liquids and gases. This work aims to design and develop a magnetic suspension system for a magnetic balance for the determination of liquid density that will be used in the metrology density laboratories at CENAM.*

**Key words:** *density, magnetic suspension, magnetic force*

## 1. INTRODUCCION

El sistema de suspensión magnética en sí, ha sido estudiado y desarrollado por autores como Hurley, Zielhlmann y Mizuno. El común denominador de sus trabajos, es que siguen

un tipo básico de sistema conformado por un electroimán, un cuerpo ferromagnético, un sistema de detección de posición y el control de lazo cerrado como el que se muestra en la figura 1, [Hurley, 1997], [Ziehlmann, 2000].



**Fig. 1** Sistema de suspensión magnética básica

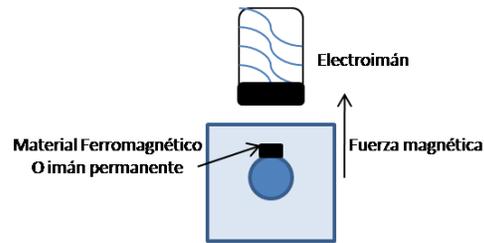
Una variante al sistema anterior es colocar un imán permanente que interactúe con el electroimán, permitiendo disminuir la fuerza que necesita el electroimán para sostener un cuerpo, el cual, no necesariamente es ferromagnético [Kleinrahm, 1986]. Esto permite disminuir la cantidad de energía en el electroimán, la cual se refleja en el calor generado y por consiguiente en una menor variación en la corriente del mismo. Este último tipo de sistemas es ampliamente utilizado en el campo de la metrología de densidad.

En el presente trabajo se encuentra un enfoque del diseño y estudio de estabilidad de levitación magnética orientados a un sistema de medición para la determinación de densidad de líquidos. En este caso, es de gran importancia mantener una estabilidad en la medición en masa no mayor a 1 mg, ya que es la segunda contribución en jerarquía dentro del presupuesto de incertidumbre es la desviación estándar de las mediciones [Becerra L, 1998], que en el sistema propuesto está determinado por la estabilidad de la posición sobre el eje vertical (eje z) del cuerpo levitado.

## 2. Sistemas de suspensión magnética en la determinación de densidad de líquidos

En un sistema de pesada hidrostática, el sólido se coloca y se quita por medio de la suspensión que se conecta a la balanza (a través de un hilo que pasa por la superficie del líquido a medir), la pérdida de peso aparente del sólido patrón indica la masa del líquido desplazado por éste. La fuerza que actúa sobre la balanza es una medición de la masa aparente del sólido patrón. Si se quitara el sistema de suspensión que se conecta a la balanza, el sólido flotaría o se sumergiría libremente en el líquido, dependiendo de su densidad. Ahora, si se generara un campo magnético que mantenga al sólido patrón a

una altura definida obtendríamos un sistema de suspensión magnética, como se muestra en la fig. 2.



**Fig. 2** Diagrama básico de empuje por fuerza magnética

En el que, si se considera solamente fuerzas verticales, y actuando una fuerza magnética entonces la condición de equilibrio sería [Bignell, 2006]:

$$g\rho_L V_s - M_s g + F_{mag} = 0 \quad (1)$$

Donde:

( $V_s$ ) es el volumen de sólido, ( $\rho_L$ ) es la densidad del líquido, ( $M_s$ ) es la masa del sólido patrón, ( $g$ ) es el valor de la aceleración de la gravedad y ( $F_{mag}$ ) es la fuerza magnética necesaria para hacer levitar el sólido.

Y si se considera a  $\rho_s$  como la densidad de sólido patrón [Bignell, 2006] quedaría:

$$F_{mag} = V_s g(\rho_s - \rho_L) \quad (2)$$

De lo anterior se puede deducir que la fuerza magnética requerida para producir equilibrio depende de la diferencia entre la densidad del patrón sólido y del líquido.

En un sistema de medición para la determinación de densidad de líquidos por suspensión magnética se utiliza un acoplamiento magnético que consiste en un electroimán y un imán permanente [Kleinrahm, 1986], donde el primero está conectado directamente a la balanza y el segundo está dentro de una celda de pesaje. El sólido patrón está unido al imán permanente por medio de un dispositivo de acoplamiento y des-acoplamiento. En la figura 3 se muestra un esquema general de un sistema de medición de densidad de líquidos por suspensión magnética.

### 3. REQUISITOS DE ESTABILIDAD PARA DISEÑO

En un sistema convencional de pesada hidrostática para la determinación de densidad de líquidos las principales fuentes de incertidumbre son el volumen del sólido patrón y la variabilidad de las mediciones [Becerra L, 1998] [Gupta, 2002]. Esta última está

representada por la desviación estándar de las mediciones tomadas directamente de la balanza.

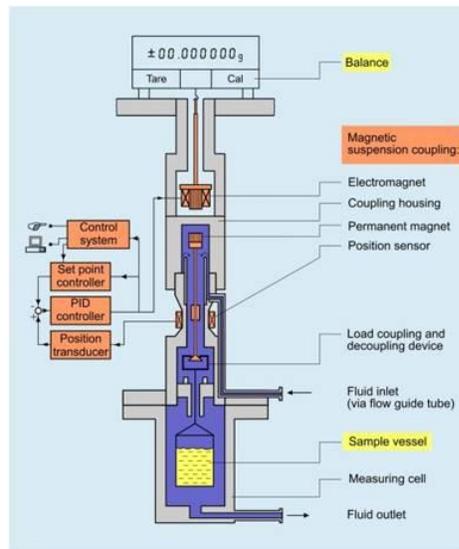


Fig. 3 Diagrama básico de un sistema de una balanza de suspensión magnética<sup>1</sup>

La determinación de la densidad de un líquido en un densímetro de levitación magnética se logra utilizando el principio de Arquímedes, pero en lugar de establecer dos ecuaciones entre un patrón y un sólido sumergido, se realiza la comparación primero sin activar el electroimán (pesada de tara) y después activando el electroimán, teniendo un nivel óptimo de levitación del sólido patrón (pesada de suspensión), [Kano, 2006].

Siguiendo el equilibrio de fuerzas como primera ecuación para la pesada de tara se puede establecer la siguiente relación:

$$M_{TP} = M_{sus} - \rho_L V_{sus} \quad (3)$$

Donde  $M_{sus}$  y  $V_{sus}$  son la masa y el volumen del sistema de sujeción de sólido patrón y  $\rho_L$  es la densidad del líquido.

La segunda ecuación se establece tomando en cuenta el sólido suspendido a través del sistema de sujeción y el acoplamiento magnético, quedando:

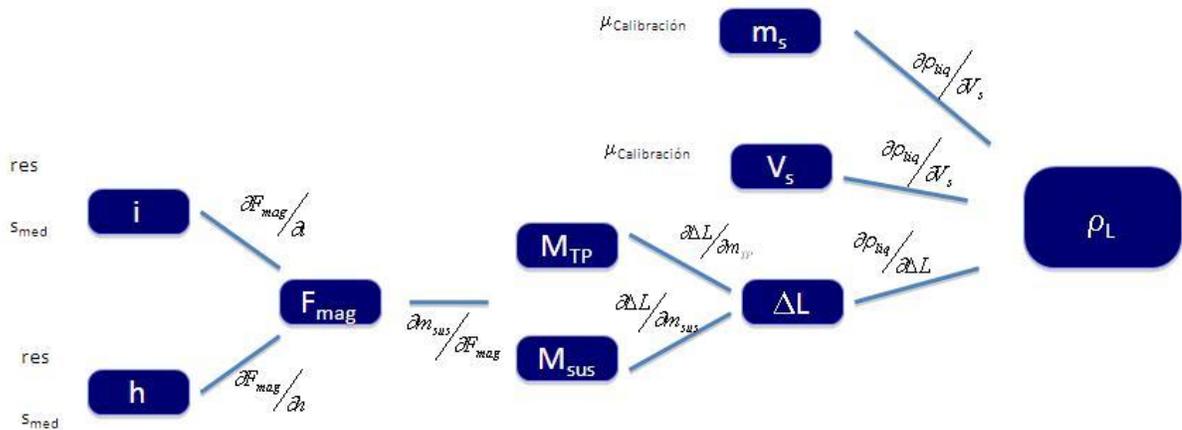
$$M_{MP} = (M_{sus} + M_s) - \rho_L (V_{sus} + V_s) \quad (4)$$

Comparando la ecuación 4.1 y 4.2, la densidad del líquido muestra se puede obtener por:

<sup>1</sup> Imagen obtenida de Rubotherm, [www.rubotherm.com](http://www.rubotherm.com), fabricante de balanzas de suspensión magnética

$$\rho_L = \frac{M_s}{V_s} - \frac{M_{MP} - M_{TP}}{V_s} \quad (5)$$

Para conocer el nivel de dependencia de la densidad del líquido con respecto a cada variable de entrada podemos ver dos caminos: mediante una simulación numérica [JCGM:101, 2008], o calculando las derivadas parciales de la densidad del líquido con respecto a cada una de ellas [JCGM:100, 2008], para establecer una tabla con el presupuesto de incertidumbre. El diagrama de magnitudes de entrada queda de la siguiente manera, figura 4, donde:  $\rho_L$  es la densidad del líquido,  $m_s$  y  $V_s$  son respectivamente la masa y el volumen del sólido patrón,  $\Delta L$  es la diferencia en lecturas con respecto al patrón de masa,  $M_{TP}$  es la lectura en masa en posición de tara,  $M_{SUS}$  es la lectura en masa en posición de suspensión,  $F_{mag}$  es la fuerza magnética necesaria para suspender el sólido,  $i$  es la corriente aplicada a la bobina y  $h$  es la diferencia en altura entre el núcleo de la bobina y el cuerpo suspendido.



**Fig. 4** Diagrama de fuentes de incertidumbre

El presupuesto de incertidumbre [JCGM:100, 2008] para la determinación de densidad de líquidos queda:

	Coeficiente			Producto	Varianza	%
	Valor	$\frac{\partial \rho_L}{\partial x_i}$	Incertidumbre estándar	$\frac{\partial \rho_L}{\partial x_i} u_{x_i}$	$\left(\frac{\partial \rho_L}{\partial x_i} u_{x_i}\right)^2$	
<b>Ms (g)</b>	25	0.09999485	0.000000044	4.40E-09	1.94E-17	7.39E-08
<b>Vs (cm<sup>3</sup>)</b>	10.000515	0.10000037	0.0006	6.00E-05	3.60E-09	13.74
<b>ΔL (g)</b>	15.000164	-0.09999485	0.00150333	-0.00015033	2.26E-08	86.26
<b>Inc ρ<sub>L</sub></b>					<b>0.000161857</b>	<b>g/cm<sup>3</sup></b>

**Tabla 1** Presupuesto de incertidumbre densidad de líquido

De lo anterior se observa que  $\Delta L$  aporta el 86% de la incertidumbre total, por lo que si se quiere disminuir o mantener la incertidumbre a menos de  $2 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$  en la densidad de líquidos se debe trabajar sobre esta variable.

$\Delta L$  está influenciada por dos variables de entrada: la resolución de la balanza y la repetibilidad de las mediciones. Además la repetibilidad está definida por la fuerza magnética que el electroimán genera para suspender el sólido patrón y la estabilidad con que lo sostiene (la cual estará determinada por el control con retroalimentación del sensor de posición).

La fuerza magnética la podemos calcular como [Moudgalya, 2007]:

$$F_{mag} = K \frac{i^2}{h}$$

Suponiendo una corriente ( $i$ ) máxima de 1 A al electroimán, y que el cuerpo a suspender estará a 1 cm del núcleo de la bobina ( $h$ ), y una variabilidad a esta altura de 10  $\mu\text{m}$  aproximadamente, el presupuesto de incertidumbre queda:

Presupuesto de incertidumbre							
	Valor	Variabilidad	Inc	Coefficiente sensibilidad	Producto	Varianza	%
$i$ (A)	1	$100 \times 10^{-6}$ , rectangular	2.887E-05	0.02	5.774E-07	3.333E-13	4
$h$ (m)	0.01	$10 \times 10^{-6}$ , rectangular	2.887E-06	-1	-2.887E-06	8.333E-12	96
Inc (k=1)						2.9439E-06 N	

**Tabla 2** Presupuesto de incertidumbre fuerza magnética

Se puede observar en la tabla 2 que, tomando una variabilidad de **100  $\mu\text{A}$**  para la corriente y **10  $\mu\text{m}$**  para la altura, la mayor aportación a la incertidumbre final de la fuerza magnética es precisamente la variabilidad de la altura, en lo que se puede decir que a mayor variabilidad de la altura, mayor será la variabilidad de la fuerza magnética y por lo tanto mayor incertidumbre en la repetibilidad de las mediciones.

Como resultado de este análisis se tiene que la altura ( $h$ ) se debe medir al menos con una resolución de **10  $\mu\text{m}$** , pensando que la mayor aportación de incertidumbre en esta medición será precisamente la resolución del instrumento que se utilice para medir, y el controlador del sistema de levitación deberá tener máximo esta variabilidad en el control de posición.

---

## 4. BANCO DE PRUEBA

En la fig. 3 se muestra el sistema completo de una balanza de suspensión magnética, del cual se tomará en cuenta sólo el diseño del sistema de suspensión, que está formado por: un electroimán, un imán permanente, un sistema de posicionamiento y un sistema de control.

### 4.1 Diseño bobina

Para el diseño se toma como base la Ley de Ampere y Lenz [Resnick, 2004][Eisberg, 1982]:

$$B = NI\mu_0 \quad \text{Ley de Ampere} \quad (6)$$

$$F = Il \times B \quad \text{Ley de Lenz} \quad (7)$$

$B$  es el campo magnético,  $N$  número de vueltas de la bobina,  $I$  corriente que pasa a través de la bobina,  $\mu_0$  permeabilidad magnética del vacío,  $F$  fuerza en el conductor y  $l$  longitud total del conductor.

La fuerza necesaria para generar la levitación la obtenemos de la 2ª Ley de Newton:

$$F_{mag} = -F_g = -mg \quad (8)$$

$F_{mag}$  es la fuerza magnética necesaria para sostener el cuerpo a levitar,  $m$  masa del cuerpo a levitar y  $g$  el valor de la aceleración de la gravedad.

De las ecuaciones (6), (7) y (8) se puede llegar a calcular el número de espiras para una bobina circular de la siguiente manera:

$$N^2 = \frac{F_{mag}}{I\mu_0 2\pi r^2} \quad (9)$$

Para complementar el diseño magnético es necesario comprender cómo se comporta el campo magnético que generará la bobina: como prueba, se puede utilizar un imán permanente que se coloca fuera del núcleo de la bobina a una distancia  $z$ . Al energizar la bobina el imán permanente trata de orientarse al campo generado, provocando que al soltar el imán, éste sea atraído al núcleo. Si se logra que el imán permanezca a una distancia perpendicular  $z$  del núcleo se puede percibir la fuerza magnética de repulsión o atracción entre ambos, conforme  $z$  es más pequeña la fuerza se incrementa y si  $z$  crece (se aleja del núcleo) la fuerza magnética va decreciendo. Es decir la fuerza generada entre el núcleo y el imán es inversamente proporcional a la distancia entre ellos.

Este fenómeno puede describirse matemáticamente mediante la Ley de Biot-Savart, [Eisberg, 1982]:

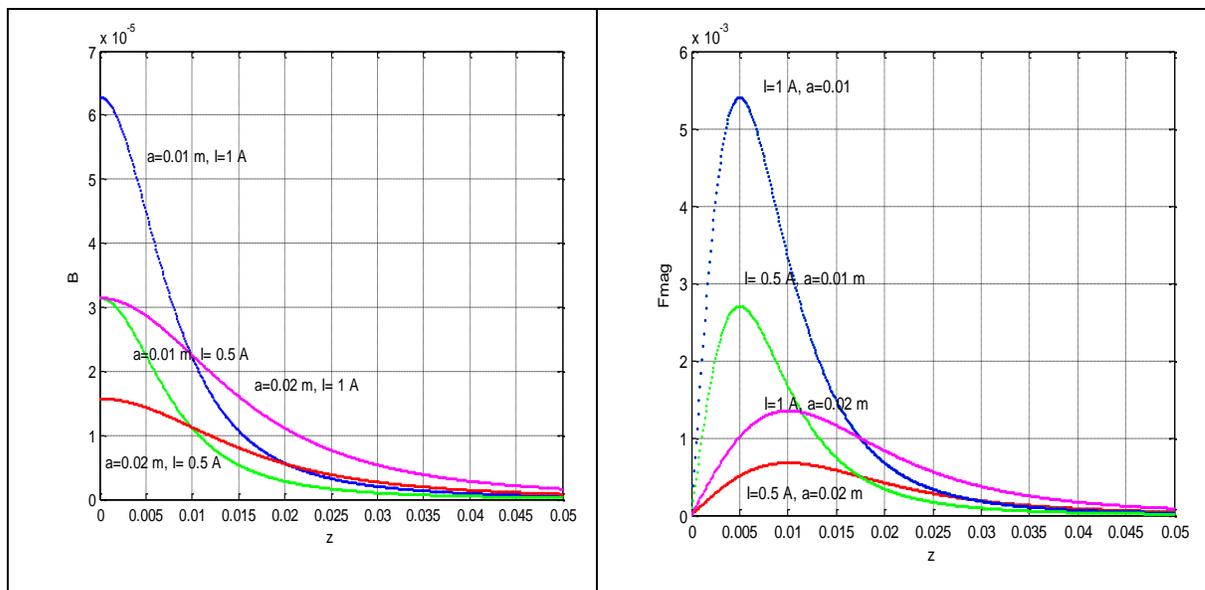
$$B = \frac{\mu_0 I r^2}{2} \frac{1}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (10)$$

$z$  es la distancia vertical sobre el eje  $z$  a partir de la base de la bobina y  $r$  es el radio de la bobina. En la figura 5 se muestra una simulación del comportamiento del campo a diferentes corrientes de acuerdo a la ecuación (10).

La fuerza que actúa sobre un imán de momento  $m$ , en la presencia de un campo magnético de campo  $\mathbf{B}$ , es proporcional a  $m$  veces  $\mathbf{B}$ . Para un núcleo de aire en una bobina,  $\mathbf{B}$  es proporcional a la corriente  $I$  en la bobina y para un radio  $r$ , la fuerza está dada por [Bignell, 2006]:

$$F_{mag} = mB(z, r) = \frac{-3/2 \mu_0 I z r^2}{(z^2 + r^2)^{3/2}} m$$

Donde,  $B(z, r)$  no es más que la derivada parcial con respecto a  $z$  de la ecuación (10). En la figura 6 se muestra una simulación de la fuerza magnética a distintos valores de corriente y radio de la bobina.



**Fig. 5** Comportamiento del campo magnético respecto a la distancia en  $z$

**Fig. 6** Fuerza magnética con respecto a una distancia

De la figura 6 se observa que la mayor fuerza magnética se obtiene a 5 mm del origen del campo aplicando una corriente de 1 A a una bobina de 0.01 m de radio, y aplicando la

fórmula (9) se obtiene una bobina de 1600 vueltas, para una masa a suspender de aproximadamente 200 g.

## 4.2 Sensor de Posición

La importancia de la selección del sensor estriba en que será el lazo de retroalimentación del sistema de control por lo que deberá tener una resolución acorde a la estabilidad deseada de la posición así como un tiempo de respuesta adecuado para el control. Una característica importante y restrictiva es que deberá ser de no contacto además de tener una resolución no mayor a 10  $\mu\text{m}$ .

Existen muchos tipos de sensores que pueden ayudar a detectar una posición, entre ellos: sensores de efecto hall, inductivos, LVDT's, capacitivos, ultrasónicos u ópticos.

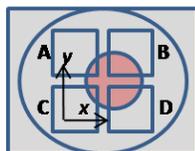
Los sensores capacitivos e inductivos del mercado tienen una resolución mínima de 20  $\mu\text{m}$  además de tener una distancia de detección máxima de 1 cm, los sensores ultrasónicos tienen un rango de detección más amplio, sin embargo su resolución es del orden de milímetros. Las opciones más adecuadas son el uso de LVDT's o sensores ópticos.

Para facilidad de diseño mecánico de la probeta se opta por el uso de sensores ópticos. Dentro de los sensores ópticos también se tienen varias alternativas: magnetostrictivos, encoders, potenciómetros lineales, láser: PSD (Position Sensor Detector), por triangulación, láser de grandes distancias, etc.

De los anteriores se propone utilizar un sensor PSD ya que es una opción económica, con resoluciones de hasta 1  $\mu\text{m}$  y excelente tiempo de respuesta [UDT Sensors Inc, 1982].

### 4.2.1 Características del sensor PSD (Positional Sensor Detector)

Los Detectores de Posición (PSD) son fotodiodos de silicio que proveen una salida analógica directamente proporcional a la posición de la mancha de luz sobre un área activa.



$$x = \frac{(B+D)-(A+C)}{A+B+C+D}$$

$$y = \frac{(A+B)-(C+D)}{A+B+C+D}$$

**Fig. 7** Características sensor PSD de cuatro cuadrantes

De la figura 7 la mancha de luz que ilumina uno de los elementos sólo produce una corriente en ese elemento, si el detector tiene más de un elemento fotosensible la energía

se distribuye entre la relación de las celdas adyacentes. La corriente de estos elementos determina la posición relativa de la mancha en la superficie. Es importante señalar que el detector sólo proporciona información de posición a una distancia lineal del diámetro de la mancha, por otra parte, se sabe que se está en un segmento específico, pero no exactamente dónde. Debido a esto se debe tener cuidado en enfocar bien el láser.

#### 4.2.2 Caracterización del sensor de posición

La detección de posición se realiza iluminando totalmente la celda y el haz de luz se obstaculiza mediante una placa anodizada con una ranura de aproximadamente 0.5 mm de ancho, el montaje del sistema óptico se muestra en la figura 8. Para la caracterización del sensor se hace un barrido hacia arriba y un barrido hacia abajo de ida y vuelta, cada 50  $\mu\text{m}$ , con un láser de 680 nm de longitud de onda.

Como resultado, se puede observar en la figura 9, que la respuesta no es totalmente lineal. El sensor será la retroalimentación al control, por lo que es importante conocer el comportamiento en la zona en que se usará el mismo.

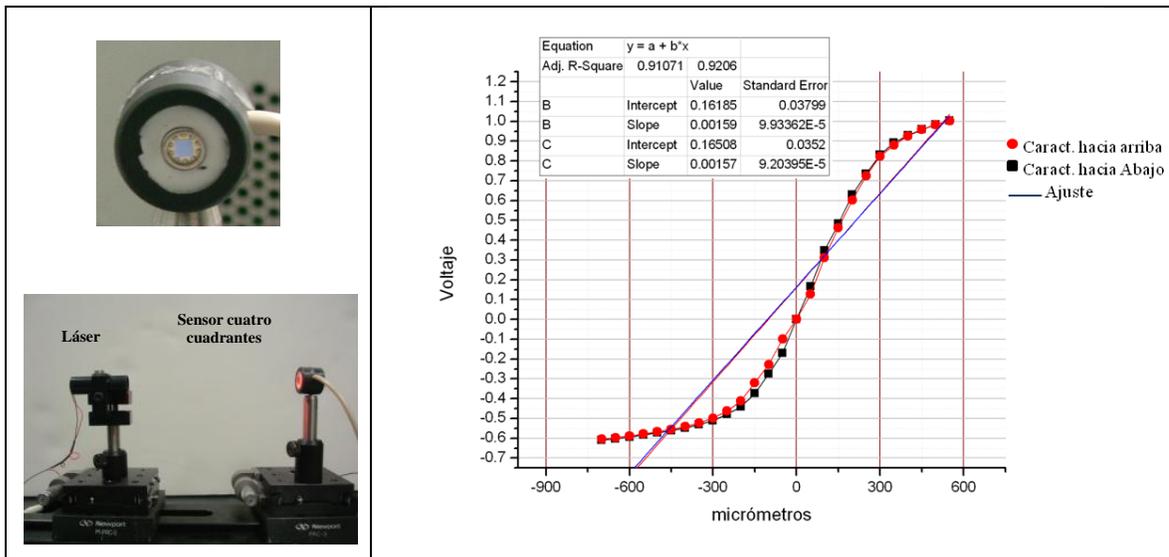


Fig. 8 Sensor óptico PSD

Fig. 9 Respuesta sensor PSD

Con fines de simplificar y facilitar el uso de la información del sensor se buscará trabajar sólo en la zona lineal, para determinar el área de trabajo se realiza un ajuste de curva cambiando el intervalo de trabajo buscando encontrar el factor  $R^2$  más alto (igual a 1) además de tratar de aprovechar el mayor intervalo de trabajo posible.

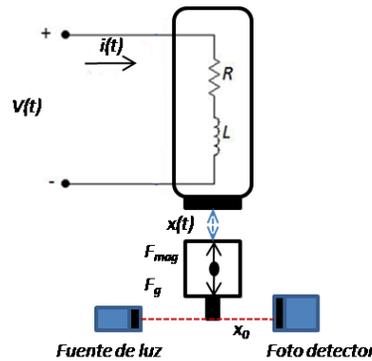
Intervalo ( $\mu\text{m}$ )	$R^2$
-1500 a 1500	0.88307
-1300 a 1300	0.88831
-450 a 550	0.92060
-500 a 400	0.94366

**Tabla 3** Factor  $R$  para diferentes ajustes de curva

De la tabla 3 se observa que la zona lineal que mejor ajusta es de  $-500 \mu\text{m}$  a  $400 \mu\text{m}$ , en este intervalo se puede obtener una resolución de  $1 \text{ mV}/10 \mu\text{m}$  aproximadamente, esta resolución es apropiada de acuerdo a los resultados de estabilidad del estudio de sensibilidad del sistema.

#### 4.2 Sistema dinámico y control PID

La representación eléctrica de un sistema de suspensión magnética se muestra en la figura 10, la posición del objeto a levitar está determinada por un sistema óptico, en donde la señal se utiliza como retroalimentación para un sistema de control. La inductancia de la bobina varía con la posición del objeto, o a su vez, la corriente que pasa a través de la bobina puede cambiar la fuerza magnética generada por la bobina permitiendo así oscilar al objeto a levitar,  $i(t)$  es la corriente del circuito,  $x(t)$  es el desplazamiento del objeto medido desde el electroimán y  $x_0$  es la posición deseada.



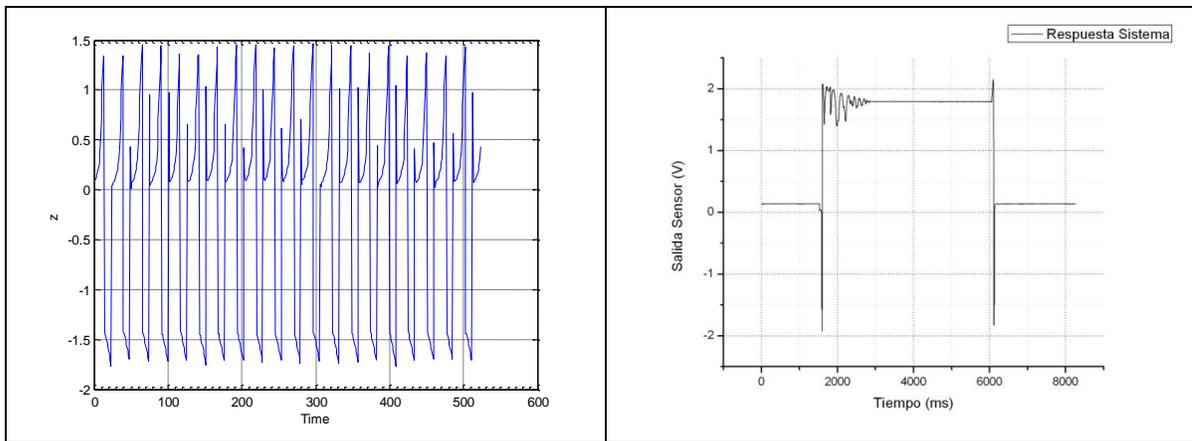
**Fig. 10** Sistema electro-mecánico de una suspensión magnética

Tomando en cuenta una relación de cambio de la inductancia con respecto a la posición, la función de transferencia que describe al sistema dinámico de una suspensión magnética queda como [Hurley, 1997], donde la función de transferencia la salida es la posición a un cambio en la corriente de la bobina:

$$\frac{X(s)}{I(s)} = \frac{-2g/I}{s^2 - g/a} \quad (11)$$

En la ecuación (11) se puede ver que existen dos raíces, una real y una imaginaria por lo que el sistema es inestable y es necesario introducir un término de control, en donde se propone utilizar un PID y para su sintonización se utiliza Ziegler-Nichols en su segundo método.

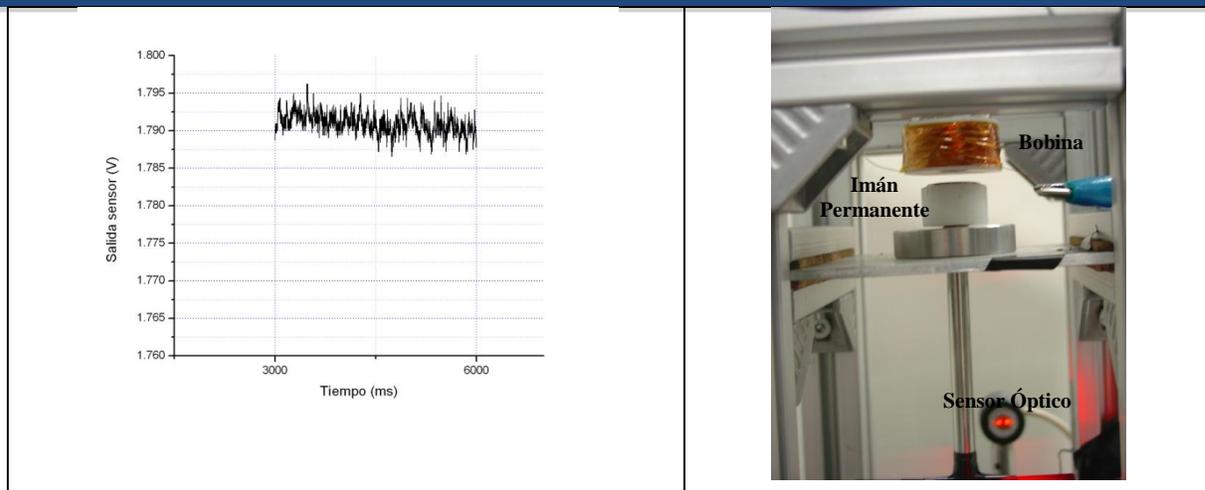
Al variar  $K_p$  hasta obtener oscilaciones sostenidas se obtiene la respuesta como se muestra en la figura 13, y la  $K_{cr}$  calculada es de 6 y  $P_{cr}$  medido es de 25 ms por lo que aplicando las reglas de Ziegler-Nichols [Ogata, 2002] tenemos  $K_p=3.6$  y  $T_d=3.125 \times 10^{-5}$ .



**Fig. 13** Respuesta física del sistema  $K_r=6$

**Fig. 14** Respuesta del sistema sintonizado

Al aplicar las constantes  $K_p$ ,  $K_d$  y  $K_i$  en un sistema de control, la estabilidad de la planta se obtiene aproximadamente después de 1 segundo como se muestra en la figura 14. Después de este tiempo la respuesta tiene una desviación estándar de aproximadamente 1.2 mV, en la fig. 15 se muestra un acercamiento a la salida del sensor de 3 a 6 segundos.



**Fig. 15** Estabilidad de la suspensión magnética después del transitorio

**Fig. 16** Sistema de suspensión magnética

Teniendo una desviación estándar de 1 mV, se obtiene una variación de  $\pm 10 \mu\text{m}$ , lo cual de acuerdo al estudio de sensibilidad del sistema es suficiente para alcanzar una incertidumbre relativa de  $2 \times 10^{-4}$  en la determinación de densidad de líquidos.

## 5. CONCLUSIONES

Se tiene el diseño del sistema de suspensión magnética en los laboratorios de densidad del CENAM como se muestra en la figura 16. Con este diseño se puede alcanzar una estabilidad en la suspensión de  $\pm 10 \mu\text{m}$  sobre el eje z, lo que representa una variabilidad en masa de  $\pm 2 \text{ mg}$ , con lo cual se puede obtener una incertidumbre relativa en la medición de densidad de líquidos de aproximadamente  $5 \times 10^{-4}$ , sin tomar en cuenta las posibles correcciones debida a los campos magnéticos sobre los materiales propios del sistema. Con este sistema de suspensión magnética se tienen los requisitos de diseño para la celda o probeta del líquido, lo cual es el siguiente paso para seguir desarrollando el sistema de medición de densidad de líquidos por suspensión magnética.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al CENAM por todo el apoyo recibido para el desarrollo de este proyecto, así como al CONACYT. Un agradecimiento al Dr. Eduardo Morales (CICATA) por su invaluable aportación en conocimiento en la materia de electromagnetismo.

---

## 7. BIBLIOGRAFIA

**Bignell N.**, Magnetic flotation in densimetry, Measurement Science and Technology, 2006, pp. 2574-2580

**Kleinrahm R.**, W Wagner, Journal of Chemistry and Thermodynamics, 1986, pp. 739-760

**Hurley W. H.**, Wölf W., Electromagnetic Design of a Magnetic Suspension System, IEEE Transactions on education, Vol. 40, No. 2, 1997.

**Kano Y.**, Yohei K., Fuji K. and Sato H., A new method for correcting a force transmission error due to magnetic effects in a magnetic levitation densimeter, Institute of Physics Publishing, Measurement and Science Technology, 2007, pp. 659-666

**Ziehlmann W.**, Barrueto R., Electro 2000, Diseño e implementación de un levitador electromagnético con sensores de posición y velocidad, memorias Simposio IT Chihuahua, México.

**Moudgalya K.**, 2007, Digital Control, ed. Wiley & Sons, pag. 7-10

**Ogata K.**, Ingeniería de Control Moderna, , 3ª. Edición, ed. Prentice-Hall

**Resnick H.**, Krane, Física Volumen 2, 5a. Edición, ed. CECSA.

**Eisberg R. M.**, Lawrence S. Lerner, Física Fundamentos y Aplicaciones Vol II, ed. Mc Graw Hill.

**Gupta S. V.**, 2002, Practical density measurement and hydrometry, Series in Measurement science and technology, Institute of physics publishing, Bristol and Philadelphia

**Becerra L.**, Pezet S. Félix; 1998, Publicación técnica: Determinación de la Densidad de Sólidos y Líquidos; Publicación CNM-MMM-PT-002, Centro Nacional de Metrología

**JCGM:100**, 2008, Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM 1995 with minor corrections), BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, <http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html>

**JCGM:101**, 2008, Evaluation of measurement data – Supplement 1 of “Guide to the expression of uncertainty in measurement, , IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, <http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html>

---

**UDT Sensors**, April 1982, Non-Contact optical position sensing silicon photodetectors, APP Note, No. 13