



**Escuela Superior De Ingeniería Mecánica Y Eléctrica**  
**Sección de Estudios De Posgrado e Investigación**  
**Unidad Azcapotzalco**

---

---

**EVALUACIÓN DEL CAMPO DE ESFUERZOS  
RESIDUALES EN CILINDROS SOMETIDOS A  
PRESIÓN INTERNA, APLICANDO EL MÉTODO DE  
ELEMENTO FINITO**

**TESINA**

**QUE PARA OBTENER EL DIPLOMA DE  
ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA MECÁNICA  
CON OPCIÓN: PROYECTO MECÁNICO**

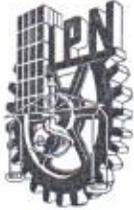
**PRESENTA:**

**ING. RESÉNDIZ CALDERÓN CÉSAR DAVID**

**DIRECTOR: DR. JUAN MANUEL SANDOVAL PINEDA**



**MÉXICO D.F. ABRIL 2011**



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

### ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 03 del mes de Junio del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de ESIME Unidad Azcapotzalco para examinar la tesis titulada:  
Evaluación del campo de esfuerzos residuales en cilindros sometidos a presión interna, aplicando el Método de Elemento Finito.

Presentada por el alumno:

César David  
Nombre(s)

Reséndiz  
Apellido paterno

Calderón  
Apellido materno

Con registro: 

B	1	0	2	0	3	6
---	---	---	---	---	---	---

Aspirante al diploma de:

Especialidad en Ingeniería Mecánica

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

### LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

Dr. Juan Manuel Sandoval Pineda

Dr. Narcizo Muñoz Aguirre  
Presidente

Dr. Luis Armando Flores Herrera

Secretario

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. Jaime Pacheco Martinez





*INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL*  
*SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO*

*CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

En la Ciudad de México el día 03 del mes de Junio del año 2011, el (la) que suscribe Reséndiz Calderón César David alumno (a) del Programa de Especialidad en Ingeniería Mecánica con número de registro B102036, adscrito en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Unidad Azcapotzalco, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesina bajo la dirección del Dr. Juan Manuel Sandoval Pineda y cede los derechos del trabajo intitulado “Evaluación del campo de esfuerzos residuales en cilindros sometidos a presión interna, aplicando el Método de Elemento Finito”, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección [jsandovalp@ipn.mx](mailto:jsandovalp@ipn.mx) y [resendiz\\_calderon\\_cesardavid@hotmail.com](mailto:resendiz_calderon_cesardavid@hotmail.com). Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

  
Reséndiz Calderón César David  
Nombre y firma

# **CAPÍTULO I**

## **ESTADO DEL ARTE**

# **CAPÍTULO II**

## **MARCO TEÓRICO**

# **CAPÍTULO III**

## **EVALUACIÓN ANALÍTICA DE CAMPOS DE ESFUERZOS RESIDUALES**

# **CAPÍTULO IV**

**EVALUACIÓN DEL CAMPO DE  
ESFUERZOS RESIDUALES EN  
CILINDROS APLICANDO EL  
MÉTODO DE ELEMENTO FINITO**

## **AGRADECIMIENTOS**

A mi esposa, por el apoyo y el amor incondicional que todos los días me demuestra y a quien le correspondo de igual forma pues sin ella no me sería posible alcanzar todas mis metas.

A mi hija, que aunque aún no está conmigo, es el motor que todos los días me da fuerza para seguir esforzándome en mejorar todos los aspectos de nuestra vida.

A mis padres, a quien nunca podre pagar sus sacrificios, a quien debo todo lo que he logrado alcanzar, todo lo que soy y gran parte de lo que llegue a ser.

A mis hermanos, con quienes he compartido toda mi vida, por su siempre leal apoyo y solidaridad.

Al Doctor Juan Manuel Sandoval Pineda, por haberme obsequiado de su tiempo y de sus conocimientos a lo largo del desarrollo de esta tesina.

Al Instituto Politécnico Nacional, por su labor académica formando profesionistas siempre dispuestos a enaltecer el nombre de su país.

Al Consejo Nacional De Ciencia Y Tecnología CONACYT, por la labor que viene desarrollando desde su formación, fomentando la formación de investigadores en nuestro país.

---

## RESUMEN

En este trabajo de tesina se evalúa el comportamiento del campo de esfuerzos residuales que se genera dentro de cilindros huecos sometidos a presión interna, los cuales se inducen cuando la magnitud de las presiones exceden el límite de cedencia del material del que está hecho el cilindro. Se da inicio con la exposición de conceptos de ingeniería básica elementales para la comprensión de la tesina. También se hace referencia a investigaciones que se han desarrollado acerca de la naturaleza de los esfuerzos residuales, así como de metodologías desarrolladas para el cálculo de esfuerzos residuales en cilindros, específicamente del Método de Sachs.

Además se define el concepto de campos de esfuerzos residuales, así como las causas que lo originan. Estos se clasifican según su origen, y se dividen en diferentes clases según su distribución y la escala en la que pueden ser medidos. Se hace referencia a los métodos de evaluación más representativos que actualmente existen para el cálculo y evaluación de esfuerzos residuales, así como una clasificación de estos métodos.

Se exponen métodos analíticos para el cálculo de esfuerzos residuales para diferentes configuraciones de carga, tales como el de vigas bajo cuatro puntos de flexión y cilindros sometidos a torsión. Asimismo se plantean y analizan las ecuaciones que rigen al Método de Sachs, que es utilizado para la determinación de esfuerzos residuales en cilindros.

Finalmente se evalúan numéricamente los campos de esfuerzos residuales en cilindros bajo presión interna, para lo cual se aplica el Método de Elemento Finito por medio del software ANSYS 12.0. Los resultados obtenidos en este trabajo muestran excelente concordancia con los resultados mostrados en la literatura científica.

---

## ABSTRACT

In the present work, behavior of the residual stresses field that acts on a cylinder under internal pressure is evaluated. It begins with exposure of basic concepts for the understanding of the work. Also refers to research that has been developed about the origin of residual stress as well as methods developed for calculating residual stresses in cylinders, specifically the Sachs method.

The concept of residual stress and the causes that originate it, are defined. They are classified according to their origin, and are divided into different classes according to their distribution and scale that can be measured. The most representative methods currently exist for the calculation of residual stresses, thereby classifying them according to the methodology they use, are referenced.

Analytical methods for calculating residual stresses in different situations are exposed, and raises the equations governing the Sachs method for the determination of residual stresses in cylinders.

Residual stress fields using the Finite Element Method resolved for ANSYS 12.0 software is evaluated.

**OBJETIVO GENERAL:**

En este trabajo de tesina se evalúa el campo de esfuerzos residuales en cilindros de acero sometidos a presión interna, para lo cual se aplica el método del Elemento Finito resuelto por el software ANSYS 12.0.

**OBJETIVOS ESPECÍFICOS:**

Para lograr el objetivo general, se proponen los siguientes objetivos particulares.

- ◆ Comprender el concepto y el comportamiento de los esfuerzos residuales.
- ◆ Investigar los diferentes métodos de evaluación de campos de esfuerzos residuales.
- ◆ Aplicar el Método del Elemento Finito y resolverlo por medio de la simulación numérica. Con lo que se evalúan los campos de esfuerzos residuales.

---

## JUSTIFICACIÓN

Todos los proyectos mecánicos, sin que importe su tamaño, su función o su estructura, fundamentan su seguridad y funcionalidad en el diseño de elementos mecánicos.

Los ingenieros encargados de diseñar dichos elementos se basan en principios establecidos en la mecánica de materiales en donde uno de los puntos más importantes es que para que una estructura o un conjunto de elementos mecánicos trabajando entre si no falle (Fracturas, pandeos, etc.), los materiales deben de trabajar en su zona elástica y sin exceder nunca su esfuerzo de cedencia.

La conducta mecánica de los componentes de estructuras o mecanismos, está expuesta a la aplicación de cargas súbitas, las cuales generan esfuerzos que rebasan el límite de proporcionalidad del material con el cual están fabricados, dejando de trabajar en su zona elástica, por lo que es importante evaluar ese comportamiento y sus consecuencias bajo esas condiciones.

---

## ÍNDICE DE GENERAL

RESUMEN	i
ABSTRACT	ii
OBJETIVO	iii
JUSTIFICACIÓN	iv
ÍNDICE GENERAL	v
ÍNDICE DE FIGURAS	viii
ÍNDICE DE TABLAS	xi
ÍNDICE DE GRÁFICAS	xii
INTRODUCCIÓN	xiii

## CAPÍTULO I

1.1.- Generalidades	2
1.2.- Ingeniería básica	2
1.2.1.- Definición de esfuerzo y deformación	2
1.2.2.- El ensayo de tensión	3
1.2.3.- Elasticidad, ley de Hooke	7
1.3.- Estado del arte	9
1.4.- Planteamiento del problema	12
1.5.- Sumario	12

## CAPÍTULO II

2.1.- Generalidades	14
2.2.- Definición e importancia de los esfuerzos residuales	15
2.3.- Clasificación, origen y efecto de los esfuerzos residuales	16
2.4.- Técnicas para la medición de esfuerzos residuales	19
2.4.1.- Métodos destructivos	20
2.4.2.1.- Método de Sachs	20
2.4.2.2.- Método de Respuesta de Grieta	21

---

2.4.2.- Métodos no destructivos	22
2.4.2.1.- Método acústico	23
2.4.2.2.- Método magnético	23
2.4.2.3.- Método de difracción de rayos X	24
2.4.2.4.- Método de difracción de neutrones.	25
2.4.3.- Métodos semi destructivos	26
2.4.3.1.- Método de barreno	26
2.4.3.2.- Método de barreno profundo	28
2.4.3.3.- Método del anillo anular	29
2.5.- Sumario	30

### **CAPÍTULO III**

3.1.- Generalidades	32
3.2.- Materiales elastoplásticos	32
3.3.- Cálculo de esfuerzos residuales por medio de métodos analíticos	33
3.4.- Esfuerzos residuales en ejes sometidos a torsión	34
3.4.1.- Ejes circulares hechos de un material elastoplástico perfecto	34
3.4.2.- Cálculo de esfuerzos residuales en ejes circulares	38
3.5 Esfuerzos residuales en elementos sometidos a flexión	43
3.5.1.- Elementos hecho de material elastoplástico	44
3.5.2.- Esfuerzos residuales producidos por momentos flectores	48
3.5.3.- Cálculo de la deformación y esfuerzos residuales en un elemento de sección transversal rectangular	49
3.6.- Cilindros de pared gruesa	52
3.7.- Planteamiento analítico del método de Sachs	56
3.8.- Sumario	59

### **CAPÍTULO IV**

4.1.- Generalidades	61
4.2.- El Método de Elemento Finito	61
4.3.- Tipos de elementos finitos	64

Contenido	vii
<hr/>	
4.4.- Simulación de sistemas mecánicos	66
4.5.- Evaluación del campo de esfuerzos residuales en cilindros sometidos a presión interna	72
4.6.- Sumario	83
CONCLUSIONES	xv
REFERENCIAS	xvi

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

### CAPÍTULO I

Figura 1.1.- Estructuras soportando cargas externas	2
Figura 1.2.- Probeta utilizada en el ensayo de tensión	4
Figura 1.3.- Grafica “Esfuerzo-Deformación” para una probeta de acero	4
Figura 1.4.- Curva típica de “Esfuerzo-Deformación” del Aluminio	6
Figura 1.5.- Probeta cúbica ensayada a compresión	7
Figura 1.6.- Modulo de Elasticidad de distintos Materiales	9

### CAPÍTULO II

Figura 2.1.- Fallas súbitas en elementos mecanicos	14
Figura 2.2.- Esquema de un estado de esfuerzos compuesto de 1er, 2do y 3er tipo de esfuerzos residuales [ <i>Macherauch y Kloos, 1986</i> ]	18
Figura 2.3.- Método de Sachs para evaluar el campo de esfuerzos residuales en cilindros	21
Figura 2.4.- Terminología y sistema de coordenadas del método de respuesta de grieta aplicado a una viga prismática [ <i>Prime, 1999</i> ].	22
Figura 2.5.- Relajación de esfuerzos radiales debido al barrenado [ <i>Beaney y Procter, 1974</i> ]	27
Figura 2.6.- Posición de la roseta rectangular a 45° para medir esfuerzos residuales [ <i>Beaney y Procter, 1974</i> ]	27
Figura 2.7.- Representación esquemática del método del barrenado profundo (deep hole method) [ <i>DeWald y Hill, 2003</i> ]	28
Figura 2.8.- Principio del método del anillo anular para la determinación del plano de esfuerzos residuales [ <i>Keil, 1992</i> ].	30

### CAPÍTULO III

Figura 3.1.- Diagramas Esfuerzo-Deformación idealizado	32
Figura 3.2.- Descarga y nueva carga de (a) un material dúctil real, y (b) un material elastoplástico perfecto. En (b), la descarga y nueva carga siguen la	34

---

misma línea recta BC y CB, aunque se hayan dibujado ligeramente separadas para su comparación con (a)

Figura 3.3.- Ejes circulares hechos de un material elastoplástico sometidos a diferentes pares de torsión	35
Figura 3.4.- Representación de las componentes de un par de torsión aplicado a un eje	36
Figura 3.5.- Diagrama T - $\phi$	39
Figura 3.6.- Determinación de esfuerzos residuales	40
Figura 3.7.- Eje hecho de un material elastoplástico sometido a un par de torsión	40
Figura 3.8.- Representación de los esfuerzos residuales producidos en un eje circular	43
Figura 3.9.- Elementos hechos de material elastoplástico sometidos a flexión	45
Figura 3.10.- Diagrama Esfuerzo-Deformación para un elemento sometido a flexión	46
Figura 3.11.- Diagrama Esfuerzo-Deformación de un elemento hecho de un material elastoplástico sometido a flexión excediendo el esfuerzo de cedencia	48
Figura 3.12.- Viga sometida a flexión	49
Figura 3.13.- Distribución de esfuerzos residuales en una viga hecha de material elastoplástico sometida a flexión	51
Figura 3.14.- Cilindro de pared gruesa sometido a presión interna $p_i$ y presión externa $p_e$	52
Figura 3.15.- Esfuerzos en medio cilindro diferencial	53

## CAPÍTULO IV

Figura 4.1.- Elemento finito Lineal	64
Figura 4.2.- Elementos Finitos Superficiales Placa	64
Figura 4.3.- Elementos Finitos Volumétricos Sólidos	65
Figura 4.4.- Procedimiento de resolución de problemas mediante	66

---

software basados en el MEF	
Figura 4.5.- Modelo de una viga con sección transversal rectangular	67
Figura 4.6.- Elemento Finito Plane 183 con 6 nodos y 2 grados de libertad	68
Figura 4.7.- Malla generada en una viga con sección transversal rectangular	69
Figura 4.8.- Condiciones de frontera de una viga mallada	69
Figura 4.9.- Campo de esfuerzos encontrados por medio del software ANSYS 12.0 antes y después de retirar las cargas aplicadas a la viga	70
Figura 4.10.- Modelo de un cilindro hueco para su simulación bajo presión interna	73
Figura 4.11.- Malla generada en un cilindro hueco para su simulación bajo presión interna	73
Figura 4.12.- Condiciones de frontera en un cilindro hueco bajo presión interna igual a 80 MPa	74
Figura 4.13.- Resultados obtenidos por medio del software ANSYS 12.0 para una presión aplicada igual a 80 MPa	76
Figura 4.14.- (a) Modelado de cilindro mallado con aplicación de presión interna igual a 150 MPa y presión externa igual a 0.1 MPa (1Atm). (b) Modelado de cilindro mallado con aplicación de presión interna igual a cero y presión externa igual a 0.1 MPa (1Atm).	77
Figura 4.15.- Resultados obtenidos del $\sigma_y$ por medio del software ANSYS 12.0 para una presión aplicada igual a 150 MPa	78
Figura 4.16.- Resultados obtenidos del $\sigma_x$ por medio del software ANSYS 12.0 para una presión aplicada igual a 150 MPa	78
Figura 4.17.- Representación de los esfuerzos que actúan en un cilindro sometido a presión interna	79
Figura 4.18.- Campo de esfuerzos residuales que actúan en el eje X encontrados por medio del software ANSYS 12.0	80
Figura 4.19.- Campo de esfuerzos residuales que actúan en el eje Y encontrados por medio del software ANSYS 12.0	80
Figura 4.20.- Campo de esfuerzos residuales en cilindros sometidos a presión interna	82

---

**ÍNDICE DE TABLAS**

Tabla 4.1.- Aplicaciones comunes en diferentes disciplinas de ingeniería	61
Tabla 4.2.- Software basados en el Método de Elemento Finito.	63

---

## ÍNDICE DE GRÁFICAS

### CAPÍTULO IV

Grafica 4.1.- Campo de esfuerzos residuales de una viga de sección transversal rectangular obtenido por medio de ANSYS 12.0.	71
Grafica 4.2.- Campo de esfuerzos residuales de una viga de sección transversal rectangular obtenido por un método analítico.	71
Grafica 4.3.- Comparación de resultados obtenidos por medio de dos métodos diferentes.	72
Grafica 4.4.- Esfuerzos residuales que actúan en el eje X generados en un cilindro hueco sometido a presión interna.	82
Grafica 4.5.- Esfuerzos residuales que actúan en el eje Y generados en un cilindro hueco sometido a presión interna.	82
Grafica 4.6.- Campo de Esfuerzos residuales generado en un cilindro hueco sometido a presión interna.	83

---

## INTRODUCCIÓN

Con las mejoras implementadas en las últimas décadas a los ordenadores, junto con el desarrollo de software basados en el Método de Elemento Finito, que ayudan a resolver problemas de resistencia mecánica, y de muchas otras áreas, es posible la determinación de resultados cada vez más exactos, y con inversiones relativamente cortas de tiempo.

Al mismo tiempo, el desarrollo de todas las ciencias, hasta un punto en que se han vuelto tan minuciosas, ha ayudado a comprender la naturaleza de los fenómenos físicos con mayor amplitud. Uno de estos fenómenos son las fallas súbitas que se presentan en sistemas mecánicos.

El estado del arte acerca de este fenómeno, está ya muy avanzado. Se puede tener una idea muy clara ya, de la causa de estas fallas súbitas, la cual es la presencia de esfuerzos residuales que actuando en conjunto con las fuerzas externas llevan a la reducción de vida de elementos mecánicos, en los que estos esfuerzos inherentes a su manufactura, o producidos en una carga de impacto no esperada por ejemplo, no son considerados.

Existen diversas metodologías para la determinación de los llamados esfuerzos residuales. Todas estas técnicas tienen ventajas y desventajas unas sobre las otras, y la correcta aplicación de ellas, es vital para la obtención de resultados coherentes.

Igualmente se han desarrollado métodos analíticos para calcular campos de esfuerzos residuales en diversas situaciones, aunque cabe señalar que muchos de ellos, cuando la situaciones son muy complejas, se vuelven igualmente complicados, y la mayoría están diseñados, para la determinación de macroesfuerzos residuales, por lo que es conveniente tener conocimiento de los diferentes métodos que existen para evaluar dichos campos.

Como primer capítulo se exponen conceptos básicos acerca de la mecánica de materiales necesarios para la comprensión de la tesina. También dentro del primer

capítulo se encuentra el estado del arte, donde se exponen diferentes conceptos de esfuerzos residuales, de metodologías para determinarlos, así como puntos de vista y resultados obtenidos en diversas investigaciones acerca del tema.

El capítulo dos hace referencia a diversos conceptos de esfuerzos residuales, así como a formas de clasificarlos según su origen o su escala de medición. Aunado a esto, se exponen diversos métodos diseñados para su cálculo.

En el tercer capítulo, se exponen una serie de métodos analíticos para el cálculo de esfuerzos residuales, y se ahonda en el Método de Sachs para el cálculo de esfuerzos residuales en elementos cilíndricos.

En el capítulo final, se expone la solución del problema planteado en la tesina utilizando El Método de Elemento Finito resuelto por medio del Software Ansys 12.0, con lo que se finaliza la tesina.

## 1.1 GENERALIDADES

Antes del inicio de un proyecto, es importante siempre hacer un trabajo de revisión acerca de los conocimientos que se encuentran disponibles en la literatura acerca del tema y así apoyarse en ellos. Revisar lo que se ha trabajado en torno a un tema específico, las herramientas metodológicas empleadas, las conclusiones alcanzadas y las sugerencias propuestas.

## 1.2 INGENIERÍA BÁSICA

Se tomara como punto de partida del presente trabajo algunos conceptos básicos de resistencia de materiales, pues es de vital importancia la comprensión de ellos para el entendimiento del tema a desarrollar.

### 1.2.1 DEFINICIÓN DE ESFUERZO Y DEFORMACIÓN

Se define como esfuerzo la capacidad interna de una material, elemento, componente o estructura para resistir fuerzas o presiones que se aplican externamente. Las fuerzas, presiones e, incluso momentos, de naturaleza externa, también comúnmente reciben el término de agentes externos. Por otra parte, la tercera ley de Newton establece: *A toda acción corresponde una reacción de igual magnitud, pero de sentido contrario*. En este escenario, si a una estructura fija se le aplica una carga, entonces el esfuerzo es la reacción interna de la estructura para soportar esa carga externa. Cuando se diseña una estructura o un elemento que soportara cargas externas, se puede considerar que será segura mientras no exceda los límites de la resistencia interna del material con la cual fue construida.



**Figura 1.1.-** Estructuras soportando cargas externas.

La deformación es igual de relevante como lo es el nivel de esfuerzo, puesto que el tener deformaciones excesivas podría convertir a la estructura en inestable o, simplemente dejar de ser funcional al interferir con otros componentes. El esfuerzo y la deformación no son parámetros independientes uno del otro, por el contrario, ambos tienen relación puesto que son indicativos de la resistencia mecánica del material.

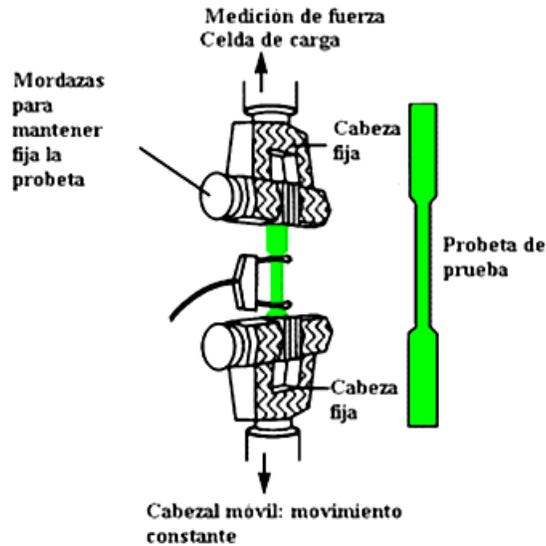
La determinación de las relaciones esfuerzo-deformación para los diferentes materiales se ha llevado a cabo, desde hace mucho tiempo, de forma experimental en laboratorios y mediante pruebas físicas controladas y normalizadas. De todas las pruebas mecánicas realizadas en los laboratorios de ensayo de materiales, el ensayo de tensión axial es el más típico y por lo tanto, el más publicado y difundido.

El ensayo de tensión, además de describir detalladamente la relación Esfuerzo-Deformación, arroja importantes datos de material como son: el esfuerzo de cadencia, el esfuerzo último, también llamada resistencia última, además del esfuerzo de fractura, entre otros, los cuales son muy útiles para ingenieros y diseñadores mecánicos.

### 1.2.2 EL ENSAYO DE TENSIÓN

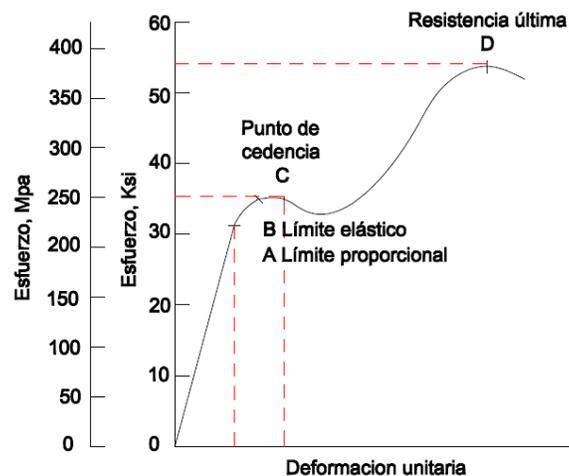
La prueba de materiales más común es la prueba de tensión uniaxial, mediante la cual, se aplican cargas de tensión a una probeta normalizada, en una sola dirección (dirección longitudinal o, también conocida como uniaxilar).

Los extremos de la probeta, de mayor diámetro que en el centro, se fijan en unas mordazas de montaje, a fin de que la ruptura de la probeta se presente en la región central que posee un diámetro uniforme y calibrado, en este punto es sencillo calcular el esfuerzo, en lugar de ocurrir cerca de los extremos, donde la distribución de esfuerzos es más complicada de medir.



**Figura 1.2.-** Probeta utilizada en el ensayo de tensión.

Mediante una máquina de ensayos, se aplica, con velocidad lenta y uniforme, una fuerza de tensión (en dirección longitudinal o, también axial) a la probeta hasta llegar a su ruptura (falla). Los resultados del ensayo de tensión uniaxial son representados en una gráfica llamada esfuerzo-deformación. La gráfica muestra los resultados desde el comienzo hasta el término de la prueba disponiendo la deformación unitaria en el eje horizontal y el esfuerzo en el eje vertical. La Figura 1.3 muestra los resultados llevados a cabo en una probeta de acero.



**Figura 1.3.-** Grafica “Esfuerzo-Deformación unitaria” para una probeta de acero.

Puede observarse que durante la primera fase de la aplicación de la carga, la grafica del esfuerzo contra la deformación es una curva recta, lo que indica que el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación unitaria. La deformación unitaria se obtiene dividiendo la deformación total que se mide de la Figura 1.3, entre la longitud original de la muestra. Después del punto marcado como “A” en la grafica, la curva deja de ser recta.

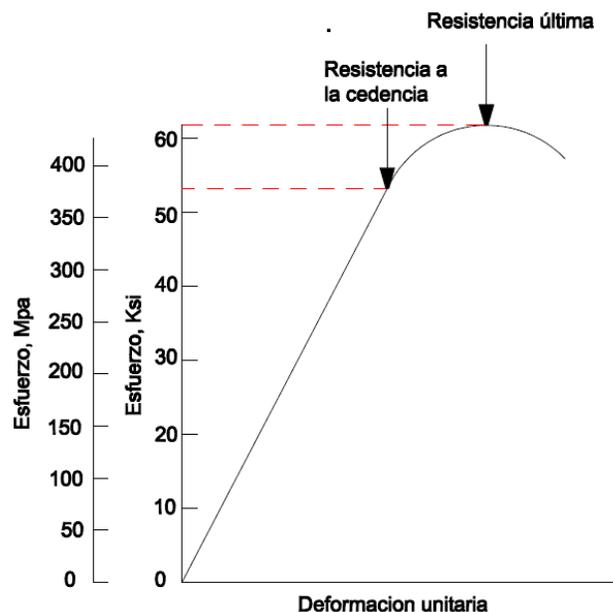
El punto “A” se conoce como limite proporcional. Conforme se incrementa continuamente la carga sobre la probeta, se llega a un punto que se conoce como límite elástico, marcado con la letra “B” en la Figura 1.3. En todos los niveles de esfuerzo menores a este punto, el material recupera su tamaño y forma originales si se elimina la carga (elasticidad).

El esfuerzo de cedencia, se define como el punto en el cual el material sufre una deformación plástica, es decir, el material pasa la zona de deformación elástica (Figura 1.3), el punto de cedencia está en “C” (aproximadamente 36 000 psi ò 248 MPa). El aplicar cargas aun mayores, luego de alcanzar el punto de cedencia, (punto “C”), hace que la curva vuelva a elevarse llegando a un pico, la curva cae de manera ligera hasta que finalmente se rompe la probeta, terminando así la gráfica en el punto de ruptura (punto “D”).

El esfuerzo aparente más elevado y que se toma del diagrama de “esfuerzo-deformación”, se conoce como esfuerzo último (aproximadamente 53 000 psi ò 365 MPa en la Figura 1.3). El hecho de que la curva de “esfuerzo-deformación”, en la Figura 1.3, caiga luego de llegar a un pico, indica que disminuye el nivel de esfuerzo. En realidad no es así, el esfuerzo verdadero continúa elevándose hasta que finalmente el material se fractura. La razón para la aparente disminución en el esfuerzo es que la grafica que se toma de una típica máquina de prueba de tensión es en realidad de carga contra alargamiento y no de esfuerzo contra deformación.

El eje vertical se convierte en esfuerzo al dividir la carga (fuerza) sobre la probeta entre el área de sección transversal original de la probeta. Cuando la probeta se acerca a su carga de ruptura, se reduce su diámetro y, en consecuencia, su área de sección transversal. El área que se redujo (estricción) requirió una fuerza menor para seguir alargando la probeta, aun cuando el esfuerzo verdadero sobre el material se incrementa. Esto resulta en la caída de la curva que se muestra en la Figura 1.3. En vista de que es muy difícil controlar el diámetro decreciente, y debido a que los experimentos demostraron que hay poca diferencia entre el esfuerzo máximo verdadero y el que se obtuvo para el pico del esfuerzo aparente contra la curva de deformación, al pico se le acepta como la resistencia última a la tensión (ò tracción) del material.

Muchos metales no representan un punto de cedencia tan bien definido como el de la Figura 1.3. Algunos ejemplos de ellos son las aleaciones de acero de alta resistencia, el aluminio y el titanio. Sin embargo, estos materiales en realidad si presentan cedencia, puesto que se deforman en una cantidad apreciable antes de que ocurra la fractura. Para estos materiales un típico diagrama “esfuerzo-deformación” sería similar al de la Figura 1.4.



**Figura 1.4.-** Curva típica de “Esfuerzo-Deformación” del Aluminio.

Evaluación del campo de esfuerzos residuales en cilindros sometidos a presión interna, aplicando el Método de Elemento Finito.

En la mayoría de los metales forjados, el comportamiento de los materiales a la compresión es similar a los materiales que están a tensión, y por esto, generalmente no se realizan pruebas separadas de compresión. Sin embargo, en materiales colados y no homogéneos como la madera y el concreto, hay grandes diferencias entre las propiedades a tensión y compresión, y deben realizarse pruebas de compresión.

Para piedra y hormigón se utilizan corrientemente probetas cúbicas. Al comprimir las entre las superficies planas de la máquina de ensayos se supone corrientemente que la fuerza compresora se distribuye uniformemente sobre la sección. La distribución real del esfuerzo es mucho más complicada, aunque las superficies estén en contacto perfecto. Debido al rozamiento entre las superficies de contacto de la probeta y la cabeza compresora de la máquina, la expansión lateral que acompaña a la compresión, está impedida en estas superficies y el material en esta región en situación favorable. Consecuencia de ello es que el material en contacto con la máquina resiste, mientras que salta el de las caras laterales. Para obtener la verdadera resistencia a compresión de un material debe eliminarse o reducirse al mínimo la influencia del rozamiento entre las superficies de contacto. Para este efecto se recubren dichas superficies con parafina. De esta forma se reduce mucho la carga de rotura y el modo de fallar la probeta es completamente diferente; una probeta cúbica se rompe subdividiéndose en láminas paralelas a una de las caras laterales Figura 1.5.



**Figura 1.5.-** Probeta cubica ensayada a compresión.

### 1.2.3 ELASTICIDAD, LEY DE HOOKE

Con frecuencia, es necesario determinar cuánto se deformará una pieza o estructura bajo una determinada condición de carga para asegurar que la deformación excesiva no destruya su utilidad. Esto puede ocurrir a esfuerzos muy inferiores a la resistencia a la cedencia del material, en especial, en miembros muy alargados o en dispositivos de alta precisión. La rigidez del material es una función de su módulo de elasticidad, igualmente llamado, módulo de Young (E) [Beer, 2007 y Johnston, 2007].

El módulo de elasticidad es una medida de la rigidez de un material, es determinado por la pendiente de la porción recta de la curva de “esfuerzo-deformación”. Es la razón de cambio de esfuerzo a cambio en la deformación correspondiente. Este puede formularse matemáticamente mediante la Ley de Hooke, en la zona lineal de la curva “esfuerzo-deformación” como:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (1.1)$$

En donde:

E - Modulo de Young

$\sigma$  – Esfuerzo

$\epsilon$  - Deformación unitaria.

Por consiguiente, un material con una pendiente más pronunciada en su curva de “Esfuerzo-Deformación” será más rígido y se deformara menos bajo una carga que un material que tiene una pendiente menos pronunciada. En la Figura 1.6, puede verse que si dos piezas, que de otro modo serian idénticas, estuvieran hechas de Acero y Aluminio respectivamente, la pieza de aluminio se deformaría tres veces más al verse sometidas a la misma carga. El diseño de los miembros característicos de elementos de maquinas y estructuras es tal, que el esfuerzo queda definido debajo del límite proporcional.

Para los materiales homogéneos isotrópicos en estado de esfuerzo plano, la Ley de Hooke establece que cuando el nivel de esfuerzo en un material sometido a carga, es menor que el límite proporcional, existe una relación lineal entre esfuerzo y la deformación y se recupera totalmente si la carga es relevada. Cuando se tiene un material homogéneo e isotrópico, los datos recabados del ensayo de tensión uniaxial son aplicables a todas las restantes direcciones del material. La consideración de material homogéneo e isotrópico simplifica, en gran medida, la resolución de las ecuaciones de esfuerzo deformación.

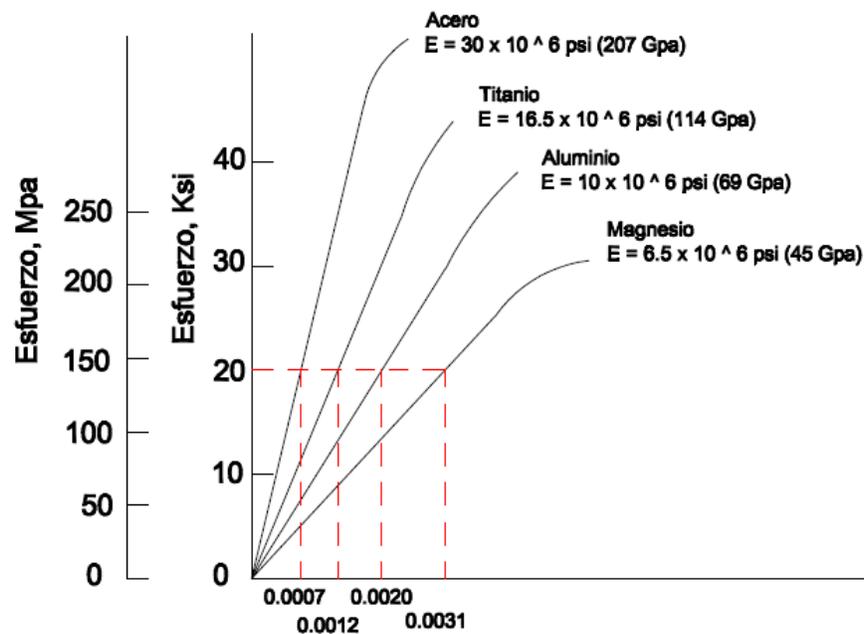


Figura 1.6.- Modulo de Elasticidad de distintos Materiales.

### 1.3 ESTADO DEL ARTE

Con técnicas analíticas y computacionales modernas, frecuentemente es posible calcular los esfuerzos a los que está sometido un elemento en servicio. Esto no es suficiente para obtener una predicción confiable del desempeño que tendrá dicho componente. De hecho, en muchos casos, cuando una falla súbita se presenta, se debe a la presencia de esfuerzos residuales, los cuales pueden ser benéficos o dañinos y que se suman a los esfuerzos producidos por agentes externos al componente, y que reducen la vida útil del mismo.

Por otro lado, algunas veces se aprovechan sus ventajas y desventajas por lo que se inducen esfuerzos residuales de comprensión, por ejemplo, por medio de granallado, para mejorar la resistencia a la fatiga.

Científicos e Ingenieros, tienen acceso en la actualidad a una larga lista de técnicas de medición de esfuerzos residuales. Algunas son destructivas, mientras que otras pueden ser utilizadas sin alterar estructuralmente la configuración del elemento a estudiar, la precisión de la medición así como sus alcances varían de un método a otro también. La fidelidad de los resultados, dependerá del buen criterio con que sea elegido el método que se usara para medir los esfuerzos residuales

En la práctica, no es probable que algún componente manufacturado esté libre de esfuerzos residuales introducidos durante el proceso de manufactura. Los tecnólogos de materiales, cuentan con una gama de técnicas de medición de esfuerzos, con diferentes capacidades para caracterizar los campos de esfuerzos que actúan en elementos mecánicos. El desafío es utilizar la información obtenida en la optimización y manejo de los campos de esfuerzos residuales, con la meta de mejorar procesos y diseño de componentes [*Withers y Bhadeshia, 2000*].

Los esfuerzos residuales, son esfuerzos permanentes que por lo regular son producidos por los procesos de fabricación, manufactura o tratamiento térmico. Estos esfuerzos son producidos por cargas no homogéneas que superan el punto de cedencia del material, además de permanecer en el componente después de haberse retirado la carga inicial.

Tienen la característica de ser auto-equilibrantes, por lo que pueden ser benéficos o dañinos al mismo tiempo. Por lo regular los esfuerzos residuales a comprensión son benéficos, y en cuestiones de grietas, reducen la posibilidad de su propagación. Diferentes métodos se han desarrollado para su medición, como son

los métodos de Rayos X, Difracción de neutrones, Método Electromagnético, Ultrasonido, Sachs, Etc. [*Sandoval Pineda, Urriolagoitia Sosa, 2007*].

Esta técnica de medición puede, en teoría, ser usada para medir esfuerzos por debajo de la superficie en estructuras con geometrías complejas. La técnica consiste en la medición del relajamiento de la deformación elástica en la superficie de la estructura cuando el cuerpo de la estructura es cortado o maquinado. Sachs fue el primero que trabajo con el método. Él tomo ventaja de la simple relación que hay entre la cantidad de deformación debida a el alivio de los esfuerzos cuando una capa interna o externa es removida de un objeto cilíndrico en el cual puede ser asumido que los esfuerzos son axialmente simétricos y constantes a lo largo de su longitud axial [*Procter y Beaney, 1990*].

El método de Sachs es un procedimiento experimental utilizado principalmente en la determinación de esfuerzos residuales en cilindros. En su forma habitual implica la fijación de indicadores de deformación colocados en dirección axial y diametral en el diámetro exterior de un tubo, las lecturas de deformación se obtendrán después de cada extracción incremental de material de la cavidad [*Anthony P. Parker, 2004*].

Este método fue desarrollado por G. Sachs y G. Espey [1941]. Permite la completa determinación de la distribución de esfuerzos en la dirección circunferencial y longitudinal en barras circulares y/o anulares. Si las capas se remueven desde la parte interna, las deformaciones axiales y tangenciales se miden en el exterior de la superficie, si las capas se remueven desde el exterior las deformaciones se miden en el interior el tubo.

Este método se usa en casos donde tienen simetría rotacional y los esfuerzos son uniformes en la dirección axial. El procedimiento incluye la determinación de la variación progresiva del cambio de la deformación sobre la superficie, al removerse las capas superficiales, causando así relajación parcial. Además que

es un método relativamente simple, se aplica en un amplio rango de materiales y puede ser combinado con otras técnicas para dar el perfil de esfuerzos. Por otra, parte está limitado a formas circulares, es destructivo y sólo es posible aplicarlo en laboratorio [Kandil,2001].

#### **1.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.**

Cuando algún elemento mecánico es sometido a esfuerzos que exceden su límite de proporcionalidad, sus propiedades mecánicas y su comportamiento es completamente distinto con respecto al cual fue diseñado, por lo que no es el mismo que cuando soporta esfuerzos dentro de su límite elástico.

La evaluación de los esfuerzos generados en un elemento o en un conjunto de elementos mediante el Método de Elemento Finito, ha logrado alcanzar vital importancia en la actualidad, gracias al desarrollo tecnológico de computadoras más veloces y de software que optimizan su aplicación.

Existen trabajos enfocados al análisis de ese comportamiento en vigas y en secciones planas por lo que la importancia de este trabajo radica en enfocarlo al análisis en cilindros sometidos a presión interna.

#### **1.5 SUMARIO.**

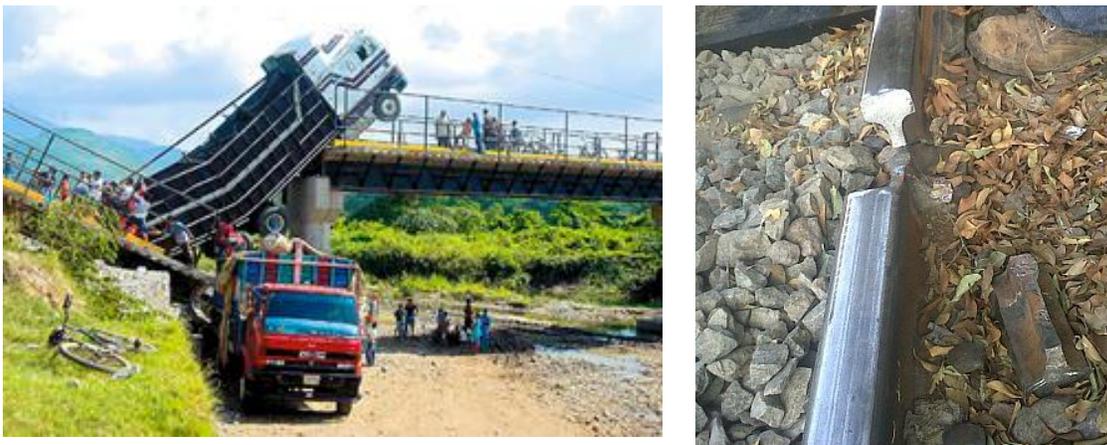
En este capítulo, se hace una reseña de investigaciones relacionadas con el origen de los esfuerzos residuales y del Método de Sachs. También se hace referencia a conceptos elementales de la mecánica del cuerpo deformable con el fin de contar con los elementos necesarios para la comprensión de la tesina.

El siguiente capítulo comprende el marco teórico, en el que se analizan los conceptos que son la base de la tesina. Se define el concepto de esfuerzo residual, se clasifica de acuerdo a su origen y se hace referencia a diferentes métodos para calcularlos.

## 2.1 GENERALIDADES

Los ingenieros son los encargados de diseñar todos los elementos que conforman el proyecto mecánico, basándose en principios establecidos en la mecánica de materiales en donde uno de los puntos más importantes es que para que una estructura o un conjunto de elementos mecánicos trabajando entre si no falle (Fracturas, pandeos, etc.), los materiales deben de trabajar en su zona elástica y sin exceder nunca su esfuerzo de cedencia. En términos más sencillos, durante el diseño de los elementos mecánicos se supone que el elemento que se encuentre soportando una carga regresará a su forma original una vez que esta sea retirada de él [Marin, 1962 y, Timoshenko y Gere, 1991].

Por lo citado en el párrafo anterior se puede agregar entonces que el material de los elementos diseñados se considera de forma ideal, es decir se considera con isotropía, continuidad y homogeneidad, y por tanto no se considera que estos elementos, ya sea una viga, una barra, un cilindro, etc. fue sometido a procesos de manufactura antes de llegar a su forma final, y que estos procesos produjeron dentro de los elementos cambios microestructurales en mayor o menor medida, y que a su vez esto produce un campo de esfuerzos residuales dentro del los mismos [Dowling, 1999]. El ignorar estos puntos en el diseño de elementos mecánicos conduce a que aunque los cálculos de diseño sean acertados, en algunos casos no se obtienen los resultados deseados de los elementos mecánicos, se presentan fallas súbitas. Tales como las que se muestran en la Figura 2.1



**Figura 2.1.-** Fallas súbitas en elementos mecánicos.

## 2.2 DEFINICIÓN E IMPORTANCIA DE LOS ESFUERZOS RESIDUALES.

Los esfuerzos residuales en forma general se pueden definir como esfuerzos de tensión y de compresión que existen en un material sin la aplicación de un agente externo y se encuentran en autoequilibrio [*Macherauch y Kloos, 1986*].

Los esfuerzos residuales inevitablemente se inducen dentro de un material cuando se transforma de materia prima en un objeto útil. Permanecen en un sólido aún en ausencia de cargas externas y gradientes térmicos. Se les conoce también como esfuerzos internos, esfuerzos candado, esfuerzos de formado, esfuerzos inducidos, esfuerzos inherentes, etc. [*Masubuchi, 1980*].

Los esfuerzos residuales son consecuencia de casi todos los procesos de manufactura, los cuales transforman la forma y/o cambian las propiedades del material. Engloban varios granos metálicos (en el orden de milímetros o fracciones de milímetros), estos se denominan macro-esfuerzos residuales. Existen también los micro-esfuerzos residuales, que se consideran como los causantes de la variación de deformación interatómica y se localizan sobre un simple grano metálico, cerca del área de las dislocaciones [*Masubuchi, 1980*].

Diferentes tipos de esfuerzos residuales (tensión y compresión) se forman cuando porciones de un componente experimentan cambios dimensionales permanentes no uniformes (deformaciones elásticas y deformaciones plásticas). Los esfuerzos residuales si son de tensión, contribuyen a la activación de micro-defectos que conllevan al crecimiento de grieta, a la falla por fatiga y agrietamiento por esfuerzos de corrosión de componentes metálicos [*Huang, Mayo y Chen, 1987*]. Por otra parte, los esfuerzos residuales de compresión mejoran las propiedades de un componente y tienden a cerrar grietas además de detener su propagación [*Withers y Bhadeshia, 2001*].

Uno de los problemas más complicados en análisis estructural es la medición de los esfuerzos residuales reales y su efecto en la integridad estructural. Por ejemplo en la manufactura de grandes estructuras, tales como recipientes a presión, se requieren cordones de soldadura muy gruesos, la soldadura y el material alrededor contiene esfuerzos residuales debido al proceso de calentamiento y enfriamiento no homogéneo del metal [Stänhlkopf y Egan, 1979].

La relevancia de la medición, predicción y control de los esfuerzos residuales es su efecto sobre el servicio de componentes manufacturados, donde los esfuerzos residuales en tensión pueden inducir fallas prematuras, por ejemplo; son promotores de grietas, reducen la resistencia del material a la fatiga, inducen esfuerzos por corrosión y pueden causar distorsión de los componentes. Así, la investigación y subsiguiente entendimiento de esfuerzos residuales sobre una macro y micro escala es de vital importancia para la calidad y confiabilidad de los componentes mecánicos.

### **2.3 CLASIFICACIÓN, ORIGEN Y EFECTO DE LOS ESFUERZOS RESIDUALES.**

Un componente estructural que es sometido a algún agente externo (si la carga es lo suficientemente grande para producir deformación permanente), tiende a deformar la geometría del elemento y esta no se recupera en su totalidad después de retirada la carga. Si la aplicación de la carga se realizó en forma no homogénea, el fenómeno que presenta es la inducción de esfuerzos residuales que de alguna manera modifican la geometría del componente. El origen de los esfuerzos residuales no está totalmente entendido. Además, su medición es difícil y a menudo incierta. Sus efectos pueden ser insidiosos, de largo alcance y ocasionalmente desastrosos. Raramente se puede suponer que los esfuerzos residuales están uniformemente distribuidos, considerando que el esfuerzo se debe a la fuerza que actúa sobre un elemento infinitesimal o diferencial de área; y es continuamente variable de punto a punto sobre una sección. Los esfuerzos residuales son esfuerzos internos en un cuerpo y se debe examinar el estado de esfuerzos que puede existir para cualquier punto dentro del mismo [Bainbridge, 1969].

Los esfuerzos residuales son causados por varios mecanismos inherentes en el procesamiento de materiales, su origen puede verse como térmico, químico o mecánico, los cuales se describen a continuación [Rudd, 1992].

**Origen térmico.-** Se deben a una deformación plástica originada por una expansión o contracción térmica no homogénea, lo que produce esfuerzos residuales en ausencia de transformación de fase, por ejemplo el templado drástico del acero.

**Origen químico.-** Se deben precisamente a cambios de volumen producidos por reacciones químicas, como es la precipitación y la transformación de fase, la cual produce esfuerzos residuales de varias maneras, por ejemplo; el nitrurado, que produce esfuerzos de compresión en la región de difusión debido a la precipitación de nitruro, la carburización causa crecimiento similar por cambio de volumen por transformación austenítica durante el enfriamiento en combinación con esfuerzos debido a los gradientes térmicos, determinando durante el templado la distribución de esfuerzos residuales. En estos procesos, el objetivo es producir un nivel benéfico y controlado de esfuerzos residuales en la superficie.

**Origen mecánico.-** En la mayoría de los procesos de manufactura, los esfuerzos residuales pueden crearse en una manera no controlada, esto se debe a deformación plástica no uniforme, por ejemplo; torneado, rolado superficial y el granallado. Los mecanismos asociados con los orígenes antes mencionados de esfuerzos residuales operan sobre la base microestructural o cristalográfica, aún usualmente, los esfuerzos residuales se investigan y se reportan sobre una macroescala, es decir, son esfuerzos promedio sobre varios centímetros o milímetros. No obstante esos macroesfuerzos se componen de la suma y promedio de los microesfuerzos [Treuting, 1952].

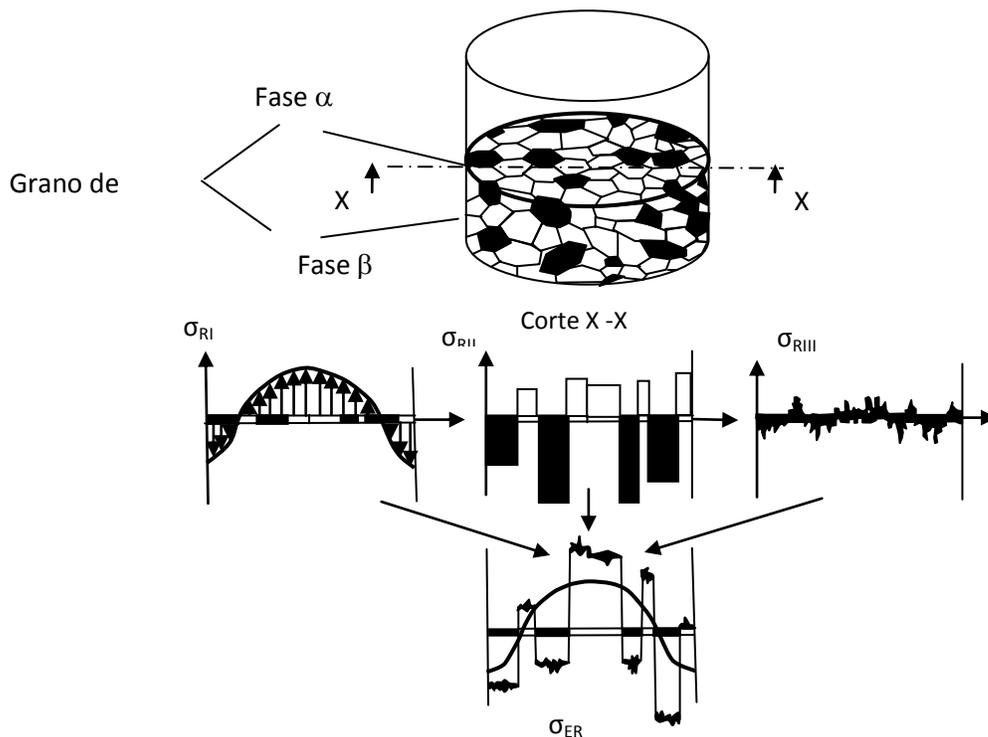
Es así que, los esfuerzos residuales se dividen en tres diferentes clases:

**Esfuerzos residuales de primera clase (Macro).-** Actúan en forma homogénea sobre algunos granos del componente.

**Esfuerzos residuales de segunda clase (Micro).**- Los cuales se presentan en forma homogénea sobre un grano en particular del material.

**Esfuerzos residuales de tercera clase (Micro).**- Estos se distribuyen en forma no homogénea a través de áreas sub-microscópicas, se dice que a varias distancias atómicas dentro de un grano.

Se supone que un acero puede estar libre de esfuerzos cuando alcanza una temperatura de 660 °C, cuando se recoce. Al terminar el tratamiento térmico y encontrándose el material a temperatura ambiente, si se flexiona el componente aplicando fuerzas que desarrollen deformaciones no homogéneas dentro de él, y se descarga después, como consecuencia de la deformación plástica inducida, se desarrolla un macro estado de esfuerzos residuales de *1er clase*. Sin embargo, también es posible encontrar esfuerzos residuales de *2do clase*. Además, todos los tipos de imperfecciones de la red cristalina, por ejemplo los átomos externos absorbidos, causan esfuerzos residuales de *3er clase*.



**Figura 2.2.-** Esquema de un estado de esfuerzos compuesto de 1er, 2do y 3er tipo de esfuerzos residuales  
[Macherauch y Kloos, 1986]

## 2.4 TÉCNICAS PARA LA MEDICIÓN DE ESFUERZOS RESIDUALES.

Los esfuerzos residuales están siempre presentes y rara vez o nunca se evalúan directamente, lo que se mide es el relajamiento de la deformación elástica causada por el macro y micro esfuerzo residual. Esta condición se aplica a todas las metodologías que se empleen para su medición, y es muy importante cuando se selecciona el método correcto para la medición de esfuerzos residuales en un componente. En las últimas décadas se han desarrollado diversas técnicas para su evaluación, tanto cuantitativas como cualitativas.

La primer serie de métodos, probablemente los más empleados, se basa en la destrucción del estado de equilibrio del esfuerzo residual después de seccionar el componente mecánico, ya sea maquinando o removiendo capas del material.

El esfuerzo residual se deduce mediante la medición de la deformación producida por el reajuste del campo de esfuerzos residuales y utilizando la teoría elástica. Este tipo de metodologías se conoce como métodos destructivos y los más comunes son [Wyat y Berry, 2005]:

- El Método de Sachs.
- El Método de Respuesta de grieta.

La segunda serie de métodos es con relación existente entre los parámetros físicos y cristalográficos, contra los esfuerzos residuales. Estos métodos son conocidos como no destructivos y los más empleados son [Kandil, et. al., 2001]:

- Las técnicas ultrasónicas o acústicas.
- Los métodos magnéticos.
- El método de difracción de rayos X
- Método de difracción de Neutrones.

Existe una serie de métodos denominados semi destructivos, los cuales actualmente han empezado a cobrar una gran importancia. Su operación se fundamenta en la inducción de una muy pequeña perforación o ranura (la cual no inutiliza la operación del componente, es decir no lo destruye) que permite la relajación del campo de esfuerzos residuales locales en una zona determinada. Los más empleados son [Wadsley, 1994]:

- El método del barreno.
- El método de barreno profundo.
- La técnica del anillo anular.

A continuación se presenta una breve explicación sobre las metodologías y técnicas más usuales.

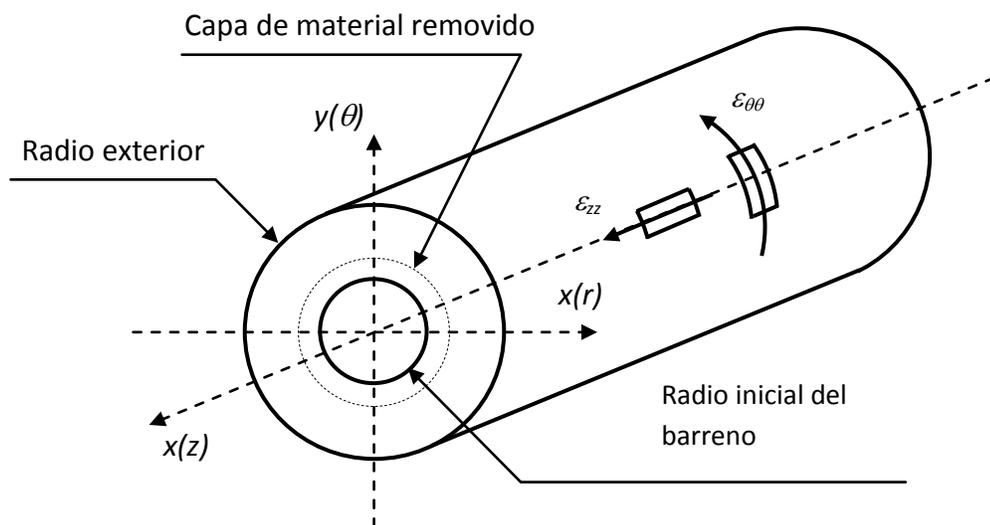
### **2.4.1 MÉTODOS DESTRUCTIVOS**

Los métodos mecánicos para la medición de macro esfuerzos residuales son los más empleados y son conocidos como destructivos. Estos dan resultados confiables, cercanos a la exactitud y, típicamente requieren equipos de medición más baratos y sencillos que los métodos no destructivos. Existen básicamente dos técnicas utilizadas para la medición de macro esfuerzos residuales, en los cuales, el método consiste en la remoción de grandes cantidades de material, lo cual produce un cambio estructural y de forma; la medición de este cambio estructural y de forma permite calcular el campo de esfuerzos residual original [Schajer, 2001].

#### **2.4.1.1 MÉTODO DE SACHS.**

Este método fue desarrollado por G. Sachs y G. Espey [1941], y es la base para el presente trabajo. Permite la completa determinación de la distribución de esfuerzos en la dirección circunferencial y longitudinal en barras circulares y/o anulares. Si las capas se remueven desde la parte interna, las deformaciones radiales y tangenciales se miden en el exterior de la superficie, si las capas se remueven desde el exterior las deformaciones se miden en el interior el tubo, tal como se muestra en la Figura 2.3. Este método se usa en

casos donde tienen simetría rotacional y son uniformes en la dirección axial. El procedimiento incluye la determinación de la variación progresiva del cambio de la deformación sobre la superficie, al removerse las capas superficiales, causando así relajación parcial. Además que es un método relativamente simple, se aplica en un amplio rango de materiales y puede ser combinado con otras técnicas para obtener el perfil de esfuerzos. Por otra, parte está limitado a formas circulares, es destructivo y sólo se puede aplicar en laboratorio [Kandil et al, 2001].

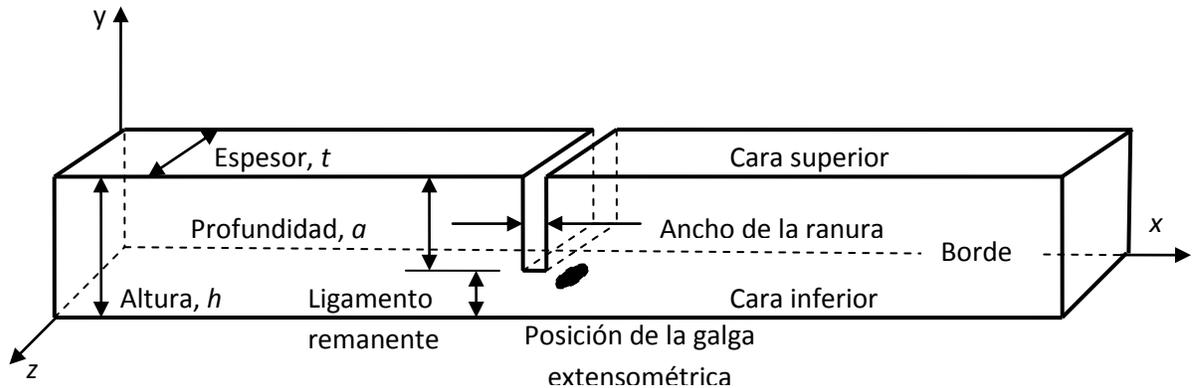


**Figura 2.3.-** Método de Sachs para evaluar el campo de esfuerzos residuales en cilindros.

#### 2.4.1.2 MÉTODO DE RESPUESTA DE GRIETA.

Consiste en la inducción de una pequeña muesca de profundidad incremental en el componente a estudiar, la cual produce una relajación parcial del campo de esfuerzos residuales en la vecindad de la grieta. Además, se utiliza una galga extensométrica para medir la relajación en cuanto a deformación que se produce en el auto-acomodo del campo de los esfuerzos residuales al introducir el corte.

El principio de operación del método se muestra en la Figura 2.4. Incrementando en forma controlada la profundidad del corte, es posible evaluar el campo de esfuerzos residuales, normales a la grieta [Prime, 1999].



**Figura 2.4.-** Terminología y sistema de coordenadas del método de respuesta de grieta aplicado a una viga prismática [Prime, 1999].

El método de respuesta de grieta es una alternativa útil a las técnicas comúnmente usadas tales como el método del barreno, remoción de capas y difracción de rayos X. La técnica es destructiva, pero ofrece las ventajas de bajo costo y potencialmente buena exactitud para un buen número de situaciones comunes [Nowell, Tochilin y Hills, 2000].

## 2.4.2 MÉTODOS NO DESTRUCTIVOS.

Estos métodos se aplican para evaluar el campo de esfuerzos residuales en un componente sin que éste sufra daño alguno. Consisten en la medición de la distribución de la deformación de los redes inter-granulares. Tienen la desventaja de ser métodos indirectos y las cantidades determinadas están influenciadas no sólo por los esfuerzos, también por los parámetros del material, tales como la estructura metalúrgica y sus defectos. Su problema más complicado es la interpretación de resultados y la certeza de los resultados obtenidos. A continuación se presentan algunos de estos.

### 2.4.2.1 MÉTODO ACÚSTICO.

La idea básica detrás de este método, es que muchos sólidos no son armónicos; cuando existen esfuerzos, hay un cambio en las constantes elásticas. Por lo tanto la velocidad de propagación de la onda se altera. Los métodos más empleados de análisis de esfuerzos, incluyen birrefringencia acústica, implican la medición de la velocidad o más precisamente la diferencia de fase en dos direcciones con respecto al sistema de esfuerzos. Es posible medir la deformación a diferente profundidad de la muestra alterando la frecuencia. Todas estas técnicas tienen la desventaja de ser sensibles a la microestructura, textura y en algunos casos a la deformación plástica. Por esta razón debe existir una calibración cuidadosa [Noyan y Cohen, 1982].

### 2.4.2.2 MÉTODO MAGNÉTICO.

La técnica magneto-elástica “Barkhausen Noise” se basa en un concepto relativamente simple que fue descubierto en 1919 [Tiitto, 1996]. Aprovecha la propiedad de que los materiales Ferro-magnéticos consisten de pequeñas regiones magnéticas semejantes a magnetos individuales llamados dominios. Cada uno de estos se magnetiza a lo largo de cierta dirección cristalográfica. Los dominios se separan uno de otro por fronteras llamados paredes de dominio. El campo magnético aplicado causa que las paredes del dominio se muevan, como consecuencia, el domino de un lado de la pared incrementa su tamaño, mientras que el dominio del lado opuesto de la pared disminuye. El resultado es un cambio en la magnetización total de la muestra. Si una bobina se localiza cerca de la muestra mientras las paredes del dominio se mueven, el cambio resultante en la magnetización inducirá un pulso eléctrico en la bobina. Barkhausen probó que el proceso de magnetización, el cual se caracteriza por la curva de histéresis, no es continua y está hecha de pequeñas y abruptas etapas, que son causadas cuando los dominios magnéticos se mueven bajo la aplicación de un campo magnético [Sarnatski, et. al., 2001]. Cuando el pulso eléctrico producido y el movimiento del dominio se suman, se genera un ruido parecido a una señal, llamado ruido de Barkhausen.

Para aplicaciones prácticas, la profundidad que puede medirse varía entre 0.01 y 1.5 mm. Dos importantes características del material afectarán la intensidad del ruido de Barkhausen. Una es la presencia y distribución de esfuerzos elásticos, los cuales tendrán influencia sobre la manera de elegir los dominios y el enlace con la dirección de la magnetización. El fenómeno de la interacción de las propiedades elásticas con la estructura del dominio y las propiedades magnéticas del material se denomina “Interacción Magnetoelástica”, que como resultado de su interacción en materiales con anisotropía magnética positiva (Hierro, más acero y Cobalto), en presencia de una campo de esfuerzos residuales de compresión, se reducirán la intensidad del ruido de Barkhausen, mientras que un esfuerzo de tensión se incrementará.

La señal *BNA* es tan sensitiva para cambios leves en materiales en cuanto a composición química, densidad de dislocación, composición de fase, densidad de dislocación, microestructura, etc., como es para macro-esfuerzos residuales. Así, *BNA* ha encontrado amplia aplicación para la medición cuantitativa de macro esfuerzos, no para micro esfuerzos [Pacyna y Kokosza, 1999].

#### **2.4.2.3 MÉTODO DE DIFRACCIÓN DE RAYOS X.**

Cuando un metal o material cerámico policristalino se encuentra bajo esfuerzos, las deformaciones elásticas en el material se manifiestan en la red cristalina de los granos individuales. Las técnicas de difracción de rayos-X son capaces de medir realmente los espacios inter-atómicos los cuales indican la macro-deformación sufrida por el espécimen [Middleton, 1987].

Los valores de esfuerzo se obtienen de las deformaciones elásticas en los cristales conociendo las constantes elásticas efectivas del material y suponiendo que el esfuerzo es proporcional a la deformación, lo cual es una suposición razonable para materiales homogéneos e isotrópicos, como son la mayoría de los metales y aleaciones que nos conciernen en la práctica. Es importante reconocer que la descripción anterior del método de la medición de esfuerzos por difracción de rayos X se aplica para la medición de

macro-esfuerzos. La variación de las micro-deformaciones son causadas por varias fuentes, las cuales causan deformaciones no homogéneas dentro de cada grano o entre los granos sobre los cuales las macro-esfuerzos están siendo determinados [Ruud, 1992]. La variación entre los granos son causadas por deformación plástica (las dislocaciones tienden a ser más numerosas cerca de las fronteras de grano y cada dislocación contiene una región de tensión y una de compresión), y la variación en rigidez en la cercanía de los granos. La variación entre los granos es causada por diferentes orientaciones de granos cercanos y macro gradientes de esfuerzo. Esta es la técnica no-destructiva más eficiente para la medición de esfuerzos residuales [Ruud, 1992].

#### **2.4.2.4 MÉTODO DE DIFRACCIÓN DE NEUTRONES.**

La técnica por difracción de neutrones es capaz de hacer mediciones de esfuerzos residuales en forma no destructiva a varios centímetros dentro de la superficie de muchos metales. Debido a estas características es particularmente conveniente para aplicaciones de ingeniería. La técnica de difracción de neutrones para determinar esfuerzos residuales se fundamenta en la precisa medición de la separación de planos similarmente orientados en un policristal. Esto se alcanza por la interacción de la dispersión de ondas, las cuales producen picos de difracción máximos, donde la posición de estos picos esta dado por la ley de Bragg [Lambrineas et. al., 1987].

Las mediciones se llevan a cabo de manera similar a las realizadas con difracción de rayos X, con un detector que se mueve alrededor de la muestra, ubicando la posición de haces difractados de alta intensidad. La gran ventaja que este método ofrece sobre el método de rayos X es la profundidad de penetración grande que se obtiene con los neutrones. Es posible medir volúmenes de  $100 \text{ mm}^3$  en aluminio o  $25 \text{ mm}^3$  en acero. Con resolución espacial alta, la difracción de neutrones puede proveer mapas completos de deformación en tres dimensiones para componentes de ingeniería. Esto se alcanza a través de movimientos de rotación y traslación del componente.

Este método de evaluación de esfuerzos residuales, tiene la capacidad de recabar grandes cantidades de datos, sobre la superficie y profundidad del componente (dependiendo del espesor de la muestra), lo que hace de la difracción de neutrones una técnica particularmente usada para la validación de modelos teóricos y numéricos. Sin embargo, comparado con otras técnicas tales como difracción de rayos X, el costo relativo es mucho más alto y la disponibilidad es mucho menor [Kandil, 2001]. Entre las ventajas que se tienen con este método es su excelente penetración y resolución. Además, se tiene vistas en tres dimensiones y es capaz de medir macro y micro esfuerzos residuales. Las desventajas que presenta es que sólo puede ser aplicado por especialistas y se emplea sólo en laboratorio [Ezeilo y Webster, 1999].

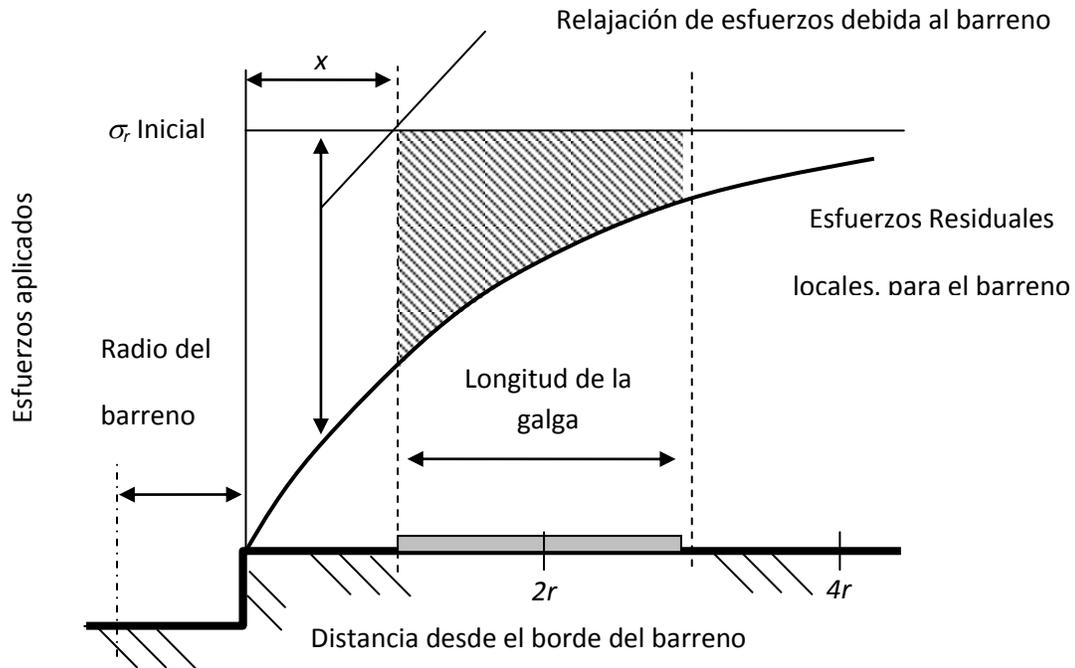
### 2.4.3 MÉTODO SEMI DESTRUCTIVOS.

La característica principal de estos métodos es que requieren cierto grado de destrucción del componente a medir, por lo que una vez aplicados, la capa de material que fue removida puede ser reparada y el componente puede ser utilizado. La relajación de las deformaciones debido a la remoción del material ocurre en la superficie del objeto a medir, las cuales se miden usando galgas extensométricas, con lo que estos datos posteriormente se transforman a esfuerzos residuales [Keil, 1992]. A continuación se enlistan los principales métodos semi-destructivos.

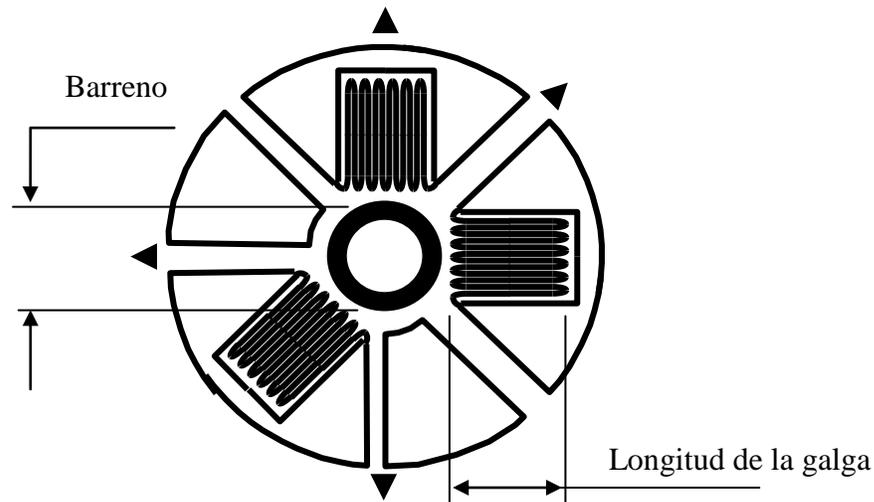
#### 2.4.3.1 MÉTODO DE BARRENO.

La técnica más comúnmente empleada en la práctica, es la del barreno (hole-drilling) (Figura 2.5) [Beaney y Procter, 1974].

Esta técnica consiste, en pegar un conjunto de galgas extensométricas alrededor del barreno (Figura 2.6) y medir los cambios de deformación causados por la remoción de material que se encuentra bajo el efecto de esfuerzos residuales cuando se hace el barreno. Esta técnica tiene muchas limitaciones y no es apropiada donde existen altos esfuerzos y gradientes de esfuerzos.



**Figura 2.5.-** Relajación de esfuerzos radiales debida al barreno [Beaney y Procter, 1974].

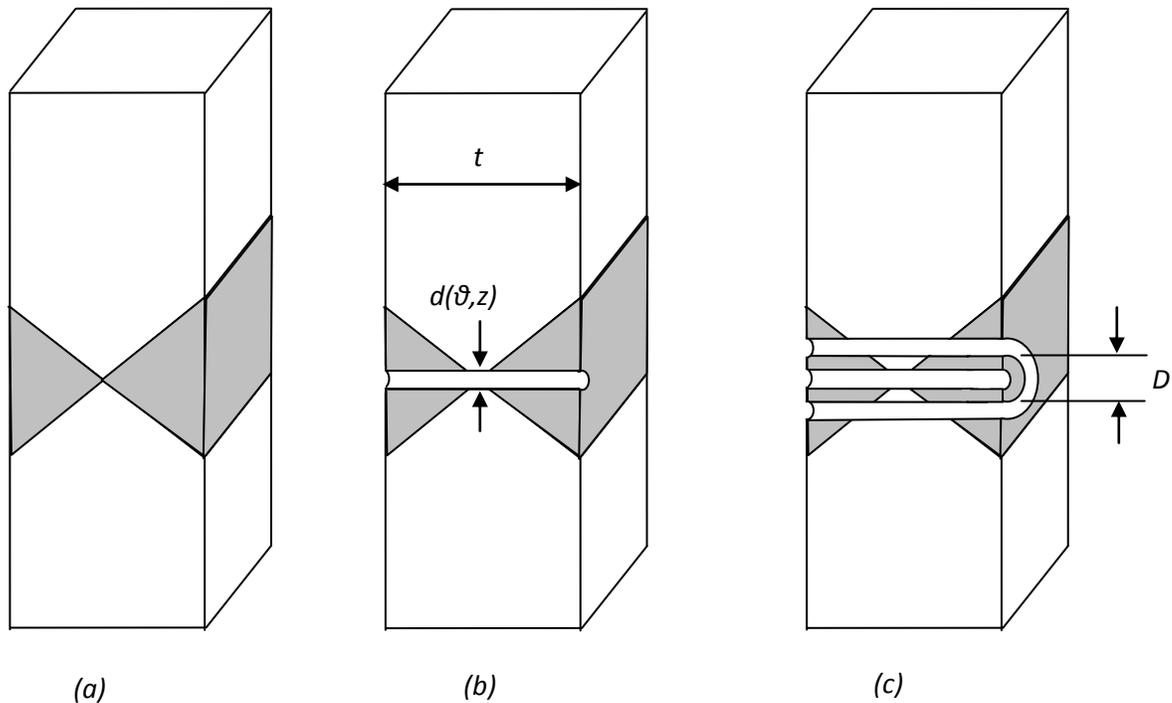


**Figura 2.6.-** Posición de la roseta rectangular a 45° para medir esfuerzos residuales [Beaney y Procter, 1974]

Este método tiene la ventaja de ser muy rápido y sencillo, se puede hacer con equipo portátil. Se aplica a un amplio rango de materiales. Su desventaja es la interpretación de datos y tiene limitada sensibilidad a la deformación.

### 2.4.3.2 MÉTODO DE BARRENO PROFUNDO.

Esta técnica se emplea en aceros con un espesor mayor a  $50\text{ mm}$ , es uno de los pocos métodos aplicables para medir esfuerzos residuales a través del espesor del material, la ventaja de este método es que puede ser aplicada en campo. Este método estima la distribución de esfuerzos residuales a través del espesor de un componente, se mide el cambio de diámetro de un barreno de referencia, esto ocurre cuando por trepanado, un núcleo del material es removido del componente. En la Figura 2.7 se muestra esquemáticamente las etapas que sigue este método y su desarrollo es el siguiente:



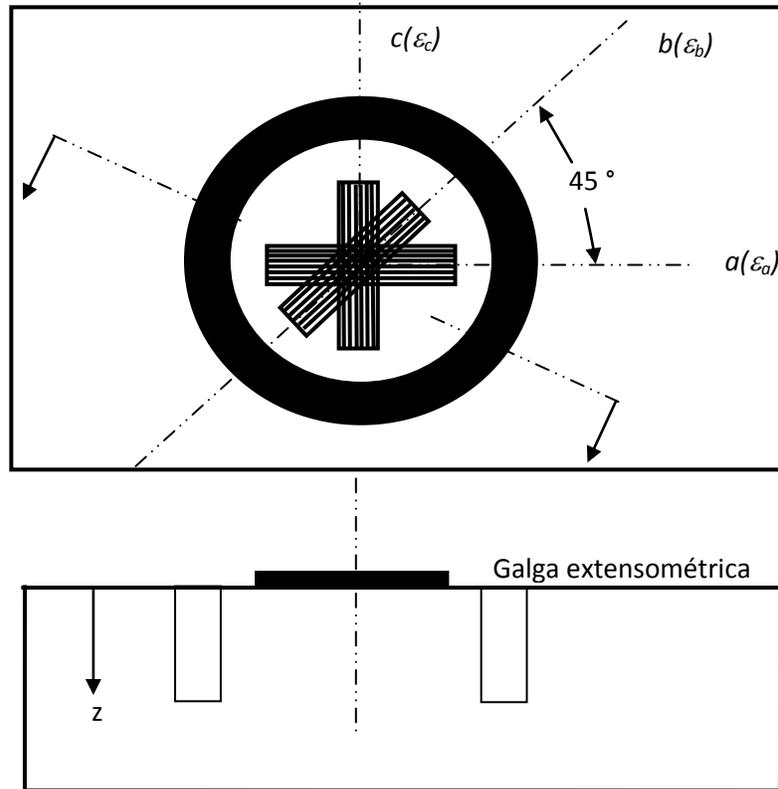
**Figura 2.7.-** Representación esquemática del método del barreno profundo (deep hole method) [DeWald y Hill, 2003]

1. Se efectúa un barreno a través del componente. Este se pule para rectificar el diámetro del barreno (Figura 2.7a).

2. Se registran las dimensiones exactas del barreno de referencia, marcándose cierto número de ángulos  $\theta$  alrededor del mismo eje del barreno, para varios incrementos de la profundidad  $z$  (Figura 2.7b), con lo que se obtiene  $d(\theta, z)$ .
3. Se lleva a cabo el trepanado del núcleo del material que contiene el barreno de referencia y se retira del resto del componente, para lo cual se emplea una máquina de descarga eléctrica.
4. Después de remover el núcleo, se mide el diámetro del barreno de referencia (Figura 2.7c), con lo que se obtiene  $d'(\theta, z)$ .
5. Los cambios en el diámetro del barreno de referencia se emplean para calcular la distribución de esfuerzos residuales en el componente.

#### 2.4.3.3 MÉTODO DEL ANILLO ANULAR.

Para la determinación de esfuerzos residuales, el método de anillo anular es ampliamente usado, dado que mientras con los experimentos convencionales sólo se accede a los esfuerzos biaxiales, la extensión del método por un transductor adicional en la dirección del desplazamiento vertical, permite la determinación del esfuerzo residual triaxial [Wern, 1997]. Con este método se maquina una ranura en forma anular en la superficie del objeto a ser examinado, dejando la parte superior del núcleo central separado del material de alrededor. Esta separación causa la liberación de una parte de los esfuerzos residuales presentes en el núcleo. La deformación que ocurre sobre el lado de la cara del núcleo puede medirse con galgas extensométricas. La roseta empleada para este método es una combinación de tres rejillas superpuestas, cada una desplazada por  $45^\circ$ . La Figura 2.8 muestra esta roseta vista desde la parte superior y un corte longitudinal del material [Keil, 1992].



**Figura 2.8.-** Principio del método del anillo anular para la determinación del plano de esfuerzos residuales  
[Keil, 1992].

## 2.5 SUMARIO.

En este capítulo, se define el concepto de esfuerzo residual, se exponen las causas que pueden originar esfuerzos residuales y se clasifican según estos factores. Se hace una reseña acerca de los principales métodos que actualmente existen para la determinación de esta clase de esfuerzos, en donde se clasifican de acuerdo a ciertas características.

El siguiente capítulo, tratará ejemplos en donde los esfuerzos residuales en elementos mecánicos son determinados de forma analítica y planteará las ecuaciones que rigen al método de Sachs.

### 3.1 GENERALIDADES

El diseño de componentes de ingeniería se ha vuelto menos conservativo. Hay un creciente interés por conocer como los esfuerzos residuales afectan las propiedades mecánicas de dichos componentes. Esto a causa de que las fallas estructurales pueden ser causadas por la acción de esfuerzos residuales combinados con las cargas aplicadas externamente. Por esa razón la importancia de desarrollar métodos que permitan conocer la distribución de esfuerzos residuales una vez que se exceden los esfuerzos de cedencia en elementos mecánicos, con el objetivo de considerarlos en el diseño y prever fallas, o para utilizarlos de manera benéfica en los materiales.

### 3.2 MATERIALES ELASTOPLÁSTICOS.

La relación Esfuerzo-Deformación unitaria en un material dúctil se puede representar aproximadamente mediante el diagrama ideal de la Figura 3.1a. La zona elástica del diagrama es el segmento de pendiente  $E$ , módulo elástico del material. La zona plástica también es una línea recta, que empieza en el punto de cedencia y tiene una pendiente  $C$ . Esta pendiente es mucho menor que  $E$ , por lo que el aumento de esfuerzo necesario para producir un incremento de deformación determinado, es mucho menor en la zona plástica que en la elástica, pero siempre es necesario un incremento de esfuerzo aunque sea pequeño, para producir un incremento de deformación. Un material en el que  $C$  sea nulo, se llama elastoplástico perfecto; en un material de este tipo, sobrepasado el punto de cedencia, la deformación puede seguir aumentando indefinidamente sin aumento ulterior del esfuerzo. En la Figura 3.1b se ha representado el diagrama ideal de este tipo de materiales [Singer Ferdinand, 1982].

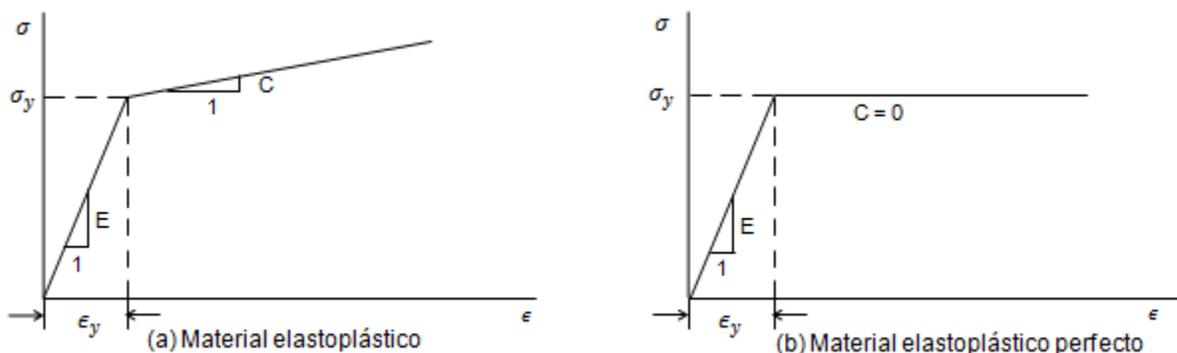


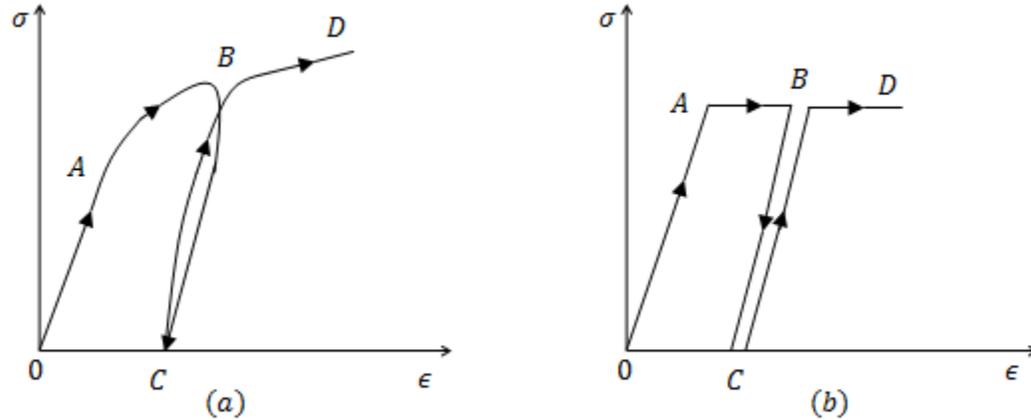
Figura 3.1.- Diagramas Esfuerzo-Deformación idealizado.

### 3.3 CALCULO DE ESFUERZOS RESIDUALES POR MEDIO DE MÉTODOS ANALÍTICOS.

Los experimentos realizados con materiales dúctiles, demuestran que, cargados más allá del punto de cedencia (curva  $OAB$  en la Figura 3.2a) se descargan elásticamente, siguiendo la ruta desplazada  $BC$ , prácticamente paralelo al tramo inicial elástico  $OA$ . Si se vuelve a cargar, el material permanece ahora elástico hasta el punto  $B$  alcanzado en la primera carga (endurecimiento por deformación), y después sigue ya la curva inicial plástica  $BD$ . Para un material ideal elastoplástico perfecto al que se limita este estudio, el ciclo de carga, descarga, nueva carga, etc., tiene lugar como aparece en la figura 3.2b.

El efecto principal de la descarga de un material que ha sido deformado más allá del punto de cedencia y, por tanto, ha alcanzado un estado parcial o totalmente plástico, es que al haberse producido deformaciones permanentes, si estas no son compatibles con el estado inicial del sólido (ya que, al descargarlo, en principio estas deformaciones plásticas no desaparecen), se crea un estado de esfuerzos internamente equilibrados y que se llaman esfuerzos residuales.

La magnitud y distribución de estos esfuerzos residuales se puede determinar superponiendo a la distribución de esfuerzos (parcial o totalmente plásticos) producida por la carga inicial, la producida por una carga igual y de sentido contrario. El efecto exterior de añadir a la carga inicial otra igual y opuesta equivale a descargar el elemento. Sin embargo, en esta descarga la distribución de esfuerzos es elástica como se indica en la Figura 3.2. Más aun, la descarga  $BC$ , puede prolongarse de manera que se obtengan esfuerzos de signo contrario, por debajo del eje  $\epsilon$ , y seguiría la dirección y sentido de  $BC$  hasta alcanzar el punto de cedencia en esta compresión. Naturalmente que la descarga será elástica, y se podrá seguir este método. Como primer ejemplo de distribución de esfuerzos residuales, se analizará el caso de una barra de sección circular en la que, se excede el esfuerzo de cedencia [*Singer Ferdinand, 1982*].



**Figura 3.2.-** Descarga y nueva carga de (a) un material dúctil real, y (b) un material elastoplástico perfecto. En (b), la descarga y nueva carga siguen la misma línea recta BC y CB, aunque se hayan dibujado ligeramente separadas para su comparación con (a) [Singer Ferdinand, 1982].

### 3.4 ESFUERZOS RESIDUALES EN EJES SOMETIDOS A TORSIÓN.

Si al someter un eje de sección transversal circular a torsión, se excede el esfuerzo de cedencia, las ecuaciones deducidas bajo las consideraciones de la ley de Hooke para calcular el momento aplicado al eje y el ángulo de giro producido en él, dejan de ser válidas [Beer, 2007 y Johnston, 2007].

A continuación se ilustra un método más general que puede utilizarse cuando no se aplica la ley de Hooke.

#### 3.4.1 EJES CIRCULARES HECHOS DE MATERIAL ELASTOPLÁSTICO PERFECTO

Se obtiene un panorama más amplio del comportamiento plástico de un eje sometido a torsión, si se considera el caso idealizado de un eje circular sólido hecho de un material elastoplástico. El diagrama Esfuerzo-Deformación de dicho material se muestra en la Figura 3.1b. Mientras el esfuerzo cortante no exceda la resistencia de cedencia  $\tau_y$  se aplica la ley de Hooke, y la distribución de esfuerzos a través de la sección es lineal (Figura 3.1), y  $\tau_{Max}$  está dado por la ecuación:

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} \quad (3.1)$$

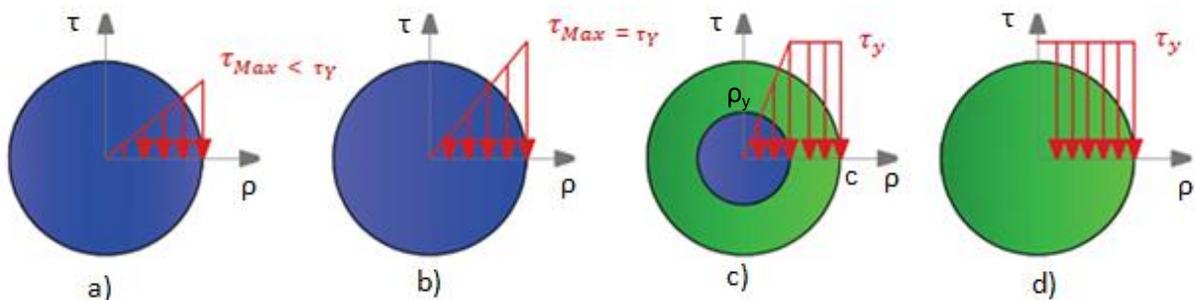
En donde:  $T$  – Par de torsión.

$c$  – Radio del eje.

$J$  – Momento polar de inercia.

$$T_y = \frac{J}{c} \tau_y \quad (3.1.1)$$

Al aumentar el par,  $\tau_{Max}$  finalmente alcanza el valor de  $\tau_y$  (Figura 3.3 b). Sustituyendo este valor en la Ecuación 3.1, y despejando el valor correspondiente de  $T$ , se obtiene  $T_y$  del par al inicio de la cedencia.



**Figura 3.3.-** Ejes circulares hechos de un material elastoplástico sometidos a diferentes pares de torsión.

El valor obtenido se conoce como el par de torsión máximo elástico, ya que es el par máximo para el que la deformación permanece completamente elástica. Recordando que para un eje circular sólido  $\frac{J}{c} = \frac{1}{2} \pi c^3$ , se tiene que:

$$T_y = \frac{1}{2} \pi c^3 \tau_y \quad (3.1.2)$$

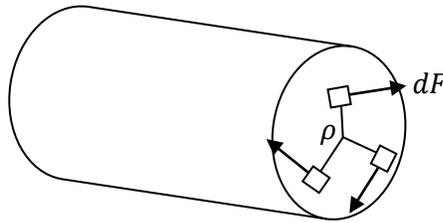
Al incrementar el par aun más, se desarrolla una región plástica en el eje, alrededor de un núcleo elástico de radio  $\rho_y$  (Figura 3.3 c). En la región plástica el esfuerzo es uniformemente igual a  $\tau_y$ , mientras que en el núcleo elástico el esfuerzo varía linealmente

con  $\rho$  y puede expresarse como:

$$\tau = \frac{\tau_y}{\rho_y} \rho \quad (3.2)$$

Al aumentar  $T$ , la región plástica se expande hasta que, en el límite la deformación es completamente plástica (Figura 3.3 d).

Para continuar con el método es necesario antes recordar la deducción de la siguiente ecuación:



**Figura 3.4.-** Representación de las componentes de un par de torsión aplicado a un eje.

$$T = \int \rho dF \quad (3.3)$$

Ó, ya que  $dF = \tau dA$ , donde  $\tau$  es el esfuerzo cortante en el elemento de área  $dA$

$$T = \int \rho (\tau dA) \quad (3.3.1)$$

Considerando un elemento anular con radio  $\rho$  y espesor  $d\rho$ , se expresa el elemento de área en la Ecuación 3.3.1 como  $dA = 2\pi\rho d\rho$  y se escribe:

$$\begin{aligned} T &= \int \rho \tau (2\pi\rho d\rho) \\ &\quad \text{ó} \\ T &= 2\pi \int \tau \rho^2 d\rho \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

La Ecuación III.3.2 será utilizada para determinar el valor del par T correspondiente a un radio dado  $\rho_y$  del núcleo elástico. Recordando que  $\tau$  está dada por la Ecuación 3.2 para  $0 \leq \rho \leq \rho_y$ , y es igual a  $\tau_y$  para  $\rho_y \leq \rho \leq c$ , se escribe:

$$T = \int_0^{\rho_y} \left(\frac{\tau_y}{\rho_y}\right) \rho^2 d\rho + 2\pi \int_{\rho_y}^c \tau_y \rho^2 d\rho$$

$$T = \frac{2}{3} \pi c^3 T_y \left(1 - \frac{1\rho^3}{4c^3}\right)$$

ó según la Ecuación 3.1.2

$$T = \frac{4}{3} T_y \left(1 - \frac{1\rho^3}{4c^3}\right) \quad (3.3.3)$$

Donde  $T_y$  es el par de torsión máximo elástico. Se advierte que, al acercarse  $\rho_y$  a cero, el par se aproxima al valor limitante.

$$T_p = \frac{4}{3} T_y \quad (3.3.4)$$

Este valor del par, que corresponde a la deformación completamente plástica (Figura 3.2 d), se llama par de torsión plástico del eje considerado. Note que la Ecuación 3.3.4 es válida sólo para un eje circular sólido hecho de un material elastoplástico.

Como la distribución de la deformación a través de la sección permanece lineal después del inicio de la cedencia la Ecuación 3.4 (cálculo de deformación sin exceder el límite elástico) sigue siendo válida y puede utilizarse para expresar el radio  $\rho_y$  del núcleo elástico en términos del ángulo de giro  $\emptyset$ . Si  $\emptyset$  es suficientemente grande para causar una deformación plástica, el radio  $\rho_y$  del núcleo elástico se obtiene  $\gamma$  con la deformación de cedencia de  $\gamma_y$  en la Ecuación 3.4 y despejando para el valor correspondiente  $\rho_y$  de la distancia  $\rho$ . se tiene que:

$$\gamma = \frac{\rho \emptyset}{L} \quad (3.4)$$

$$\rho_y = \frac{L\gamma_y}{\phi_y} \quad (3.4.1)$$

Sea  $\phi_y$  el ángulo de giro al inicio de la cedencia, es decir, cuando  $\rho_y = c$ . Haciendo a  $\phi = \phi_y$  y a  $\rho_y = c$  en la ecuación 3.3.1, se tiene que:

$$c = \frac{L\gamma_y}{\phi_y} \quad (3.4.2)$$

Dividiendo la Ecuación 3.4.1 entre la 3.4.2, miembro a miembro, se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{\rho_y}{c} = \frac{\phi_y}{\phi} \quad (3.4.3)$$

Si se introduce la Ecuación 3.33 la expresión obtenida para  $\frac{\rho_y}{c}$ , el par  $T$  se expresa como función del ángulo de giro  $\phi$ .

$$T = \frac{4}{3} T_y \left( 1 - \frac{1\phi_y^3}{4\phi^3} \right) \quad (3.3.5)$$

Donde  $T_y$  y  $\phi_y$  representan respectivamente, el par y el ángulo de giro al inicio de la cedencia.

### 3.4.2 CÁLCULO DE ESFUERZOS RESIDUALES EN EJES CIRCULARES.

En las secciones precedentes analizamos el comportamiento plástico de un eje sometido a un par de torsión que excede su resistencia a la cedencia. Si se retira el par, la reducción de esfuerzo y de deformación unitaria en el diagrama de Esfuerzo-Deformación tendrá lugar a lo largo de una línea recta. El valor final del esfuerzo no será, en general, cero, ya que habrá un esfuerzo residual en la mayoría de los puntos, que podrá ser negativo o positivo [Beer, 2007 y Johnston, 2007].

Considere otra vez el caso idealizado de un material elastoplástico perfecto caracterizado por el diagrama de Esfuerzo-Deformación de la Figura 3.1b. Se considerará que la

relación entre  $\tau$  y  $\gamma$  permanece lineal al momento de la descarga, por lo que es posible utilizar la Ecuación 3.5 para calcular el ángulo en el cual el eje se destuerce al disminuir el par a cero. Como resultado, la descarga del eje será representada por una línea recta en el diagrama  $T - \phi$  (Figura 3.5). Observe que el ángulo de giro no ha regresado a cero después de haber sido retirado el par. De hecho, la carga y la descarga resultan en una deformación permanente caracterizada por el ángulo:

$$\phi_p = \phi - \phi' \quad (3.6)$$

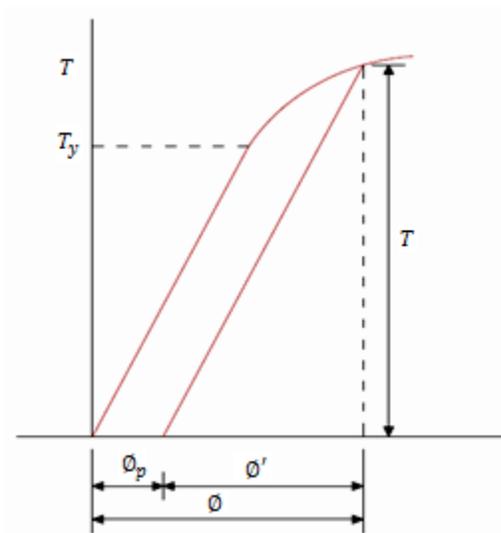
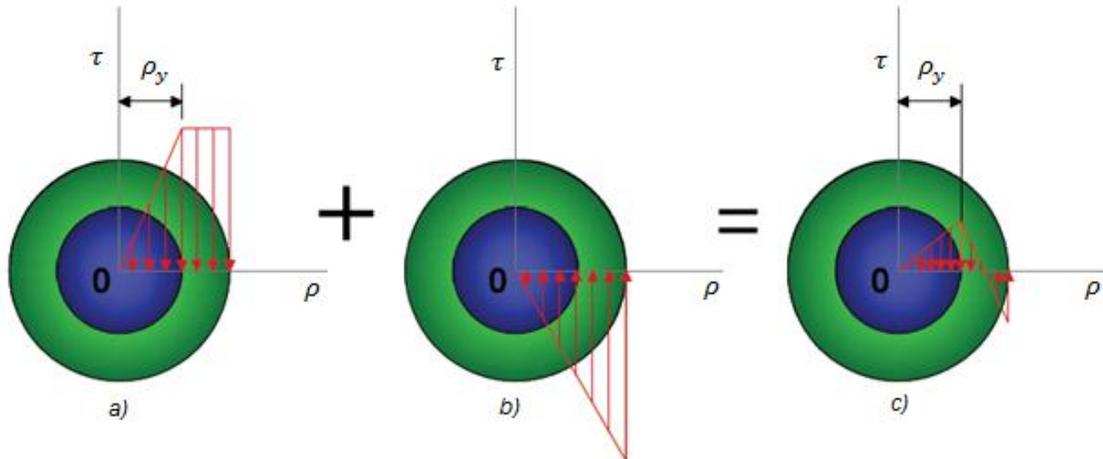


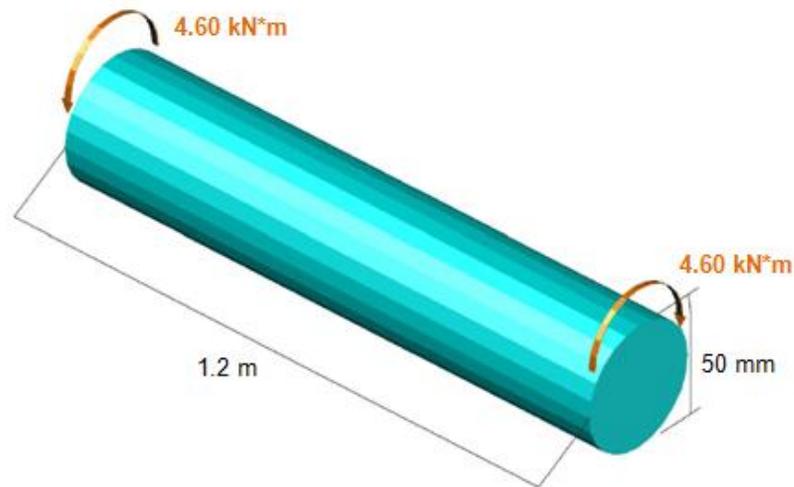
Figura 3.5.- Diagrama  $T - \phi$

Donde  $\phi$  corresponde a la fase de carga y puede obtenerse de  $T$  y de la Ecuación 3.6, y donde  $\phi'$  corresponde a la fase de descarga y puede obtenerse de la Ecuación 3.5. Los esfuerzos residuales se obtienen aplicando el método de superposición. Considere, por una parte, los esfuerzos debidos a la aplicación del par dado  $T$  y, por otra, los esfuerzos debidos al par igual y opuesto que se aplica para descargar el eje. el primer grupo de esfuerzos refleja el comportamiento elastoplástico del material durante la fase de carga (Figura 3.6 a), y el segundo grupo e comportamiento lineal del mismo material durante la fase de descarga (Figura 3.6 b). Sumando los 2 grupos de esfuerzos se obtiene la distribución de esfuerzos residuales en el eje (Figura 3.6 c).



**Figura 3.6.-** Determinación de esfuerzos residuales

Una vez que se han expuesto las formulas necesarias para el cálculo de esfuerzos residuales en cilindro hechos de un material elastoplástico, se procederá a calcular los esfuerzos residuales producidos en un eje circular solido de 1.2 m de longitud y 50 mm de diámetro el cual está fabricado con material elastoplástico y el cual se sujeta a un par de torsión de 4.60 kN\*m en cada extremo (Figura 3.7). La resistencia de cedencia al corte del cilindro es de 150 MPa y su modulo de rigidez de 77 GPa.



**Figura 3.7.-** Eje hecho de un material elastoplástico sometido a un par de torsión.

**a) Radio del núcleo elástico.**

Primero se determina el par  $T_y$  al inicio de la cedencia. Utilizando la Ecuación 3.11 con  $\tau_y = 150 \text{ MPa}$ ,  $c = 25$  y  $J = \frac{1}{2} \pi c^4$ .

$$J = \frac{1}{2} \pi c^4 = \frac{1}{2} \pi (25 \times 10^{-3} \text{ m})^4 = 614 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Se escribe:

$$T_y = \frac{J\tau_y}{c} = \frac{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(150 \times 10^6 \text{ Pa})}{25 \times 10^{-3} \text{ m}} = 3.68 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Despejando de la Ecuación 3.33 el término  $\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3$  y sustituyendo los valores de  $T$  y de  $T_y$ , se tiene:

$$\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3 = 4 - \frac{3T}{T_y} = 4 - \frac{3(4.6 \text{ kN} \cdot \text{m})}{3.68 \text{ kN} \cdot \text{m}} = 0.250$$

$$\frac{\rho_y}{c} = 0.630 \quad \rho_y = 0.630(25 \text{ mm}) = 15.8 \text{ mm}$$

**b) Ángulo de giro.**

Primero se determina el ángulo de giro  $\phi_y$  al inicio de la cedencia de la Ecuación 3.5 para la determinación del ángulo de giro sin exceder el modulo elástico que se expone a continuación:

$$\phi = \frac{TL}{JG} \quad (3.5)$$

$$\phi = \frac{T_y L}{JG} = \frac{(3.68 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(1.2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(77 \times 10^9)} = 93.4 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Despejando de la Ecuación 3.43 y sustituyendo los valores obtenidos para  $\phi_y$  y para  $\frac{\rho_y}{c}$ , se escribe:

$$\phi = \frac{\phi_y}{\rho_y/c} = \frac{93.4 \times 10^{-3} \text{ rad}}{0.630} = 148.3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Ó

$$\phi = (148.3 \times 10^{-3} \text{ rad}) \left( \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \right) = 8.5^\circ$$

**c) Ángulo de torsión permanente.**

El ángulo  $\phi'$  a través del que se destuerce el eje al retirarse el par se obtiene de la ecuación 3.4. Sustituyendo los datos recibidos,

$$T = 4.60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$L = 1.2 \text{ m}$$

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa}$$

Y el valor de  $J = 614 \times 10^{-9} \text{ m}^4$  obtenido en la solución del ejemplo anterior, se tiene que:

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(4.60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(1.2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})} = 116.8 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\phi' = (116.8 \times 10^{-3} \text{ rad}) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 6.69^\circ$$

El ángulo de torsión permanente es, por lo tanto,

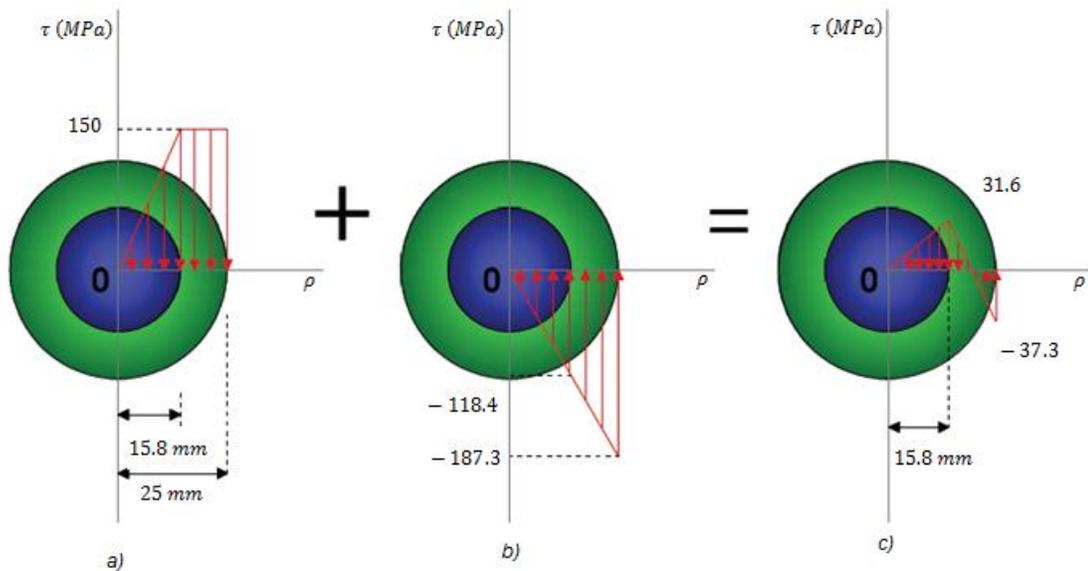
$$\phi_p = \phi - \phi' = 8.5^\circ - 6.69^\circ = 1.81^\circ$$

**d) Esfuerzos residuales.**

La distribución de esfuerzos en este eje es, por lo tanto, mostrado en la Figura 3.8 a. La distribución de esfuerzos debida al par opuesto de  $4.60 \text{ kN} \cdot \text{m}$  requerido para descargar el eje es lineal, como se observa en la Figura 3.8 b. El máximo esfuerzo en la distribución de los esfuerzos inversos se determina de la Ecuación 3.1.

$$\tau'_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{(4.60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(25 \times 10^{-3} \text{ m})}{614 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 187.3 \text{ MPa}$$

Superponiendo las dos distribuciones de esfuerzos, se obtienen los esfuerzos residuales ilustrados en la Figura 3.8 c.



**Figura 3.8.-** Representación de los esfuerzos residuales producidos en un eje circular.

### 3.5 ESFUERZOS RESIDUALES EN ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN.

La ecuación deducida para determinar esfuerzos en elementos sometidos a flexión cuando estos no sobrepasan el límite elástico del material, es la siguiente:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (3.6)$$

Al igual que en el caso de torsión, esta ecuación se invalida una vez que se excede el límite de proporcionalidad del material. El objetivo de esta sección es exponer un método más general para determinar la distribución de esfuerzos en un elemento sometido a flexión pura.

Como primer paso para desarrollar un método de distribución de esfuerzos el cual no esté sustentado en la ley de Hooke, se debe recordar que la deformación  $\epsilon_x$  en un elemento sometido a flexión, varía linealmente con la distancia y desde el eje neutro del elemento, el cual coincide con su centroide. Esto se expresa en la Ecuación 3.7

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_m \quad (3.7)$$

Donde  $y$  es la distancia del punto estudiado a la superficie neutra y  $c$  el valor máximo de  $y$ .

Sin embargo, no es posible seguir suponiendo que, en una sección dada, el eje neutro pasa por el centroide de dicha sección, puesto que esta propiedad se supone bajo la hipótesis de deformación elástica.

En general, el eje neutro debe localizarse por aproximaciones sucesivas, hasta hallar una distribución de esfuerzos que satisfagan las Ecuaciones 3.6 y 3.7. En el caso particular de un elemento que posee un plano horizontal de simetría y esté hecho de un material caracterizado por la misma relación Esfuerzo-Deformación a tensión y a compresión, el eje neutro coincidirá con el eje longitudinal de simetría de la sección. Ciertamente, las propiedades del material requieren que los esfuerzos sean simétricos con respecto al eje neutro, es decir, simétricos con respecto a algún eje horizontal, y es claro que esto se cumplirá y la Ecuación 3.7 se satisfará al mismo tiempo, solo si ese eje es el mismo eje horizontal de simetría.

### 3.5.1 ELEMENTOS HECHOS DE MATERIAL ELASTOPLÁSTICO.

Con el fin de ofrecer una mejor visión de la conducta plástica de un material sometido a flexión, se analizara el caso de un elemento hecho de material elastoplástico suponiéndose primero que el elemento tiene una sección rectangular de ancho  $b$  y altura  $2c$ . Recuerde de la sección 3.2 el comportamiento de un material elastoplástico.

Mientras  $\sigma_x$  no excede el límite de fluencia  $\sigma_y$ , se aplica la ley de Hooke, y la distribución de esfuerzos es lineal (Figura 3.9 a). El esfuerzo máximo es:

$$\sigma_{max} = -\frac{Mc}{I} \quad (3.8)$$

Cuando el momento flector aumenta,  $\sigma_{max}$  alcanza eventualmente el valor  $\sigma_y$  (Figura 3.9 b). Sustituyendo este valor en la Ecuación 3.8, y resolviendo para  $M$ , se obtiene el valor  $M_y$ , del momento flector en el momento de la fluencia:

$$M_y = \frac{I}{c} \sigma_y \quad (3.9)$$

El momento  $M_y$ , es el máximo momento elástico ya que es el mayor momento para el cual la deformación permanece completamente elástica. Recordando que, para la sección rectangular considerada,

$$\frac{I}{c} = \frac{b(2c)^3}{12c} = \frac{2}{3}bc^2$$

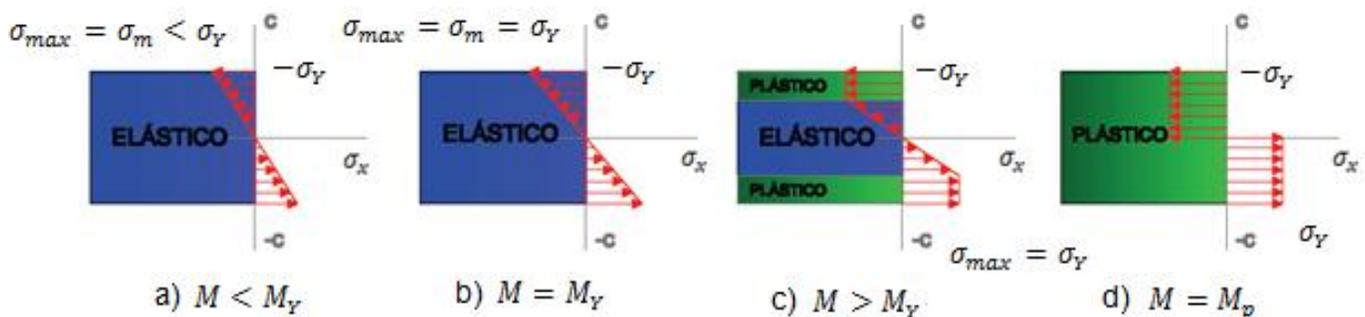
Se obtiene

$$M_y = \frac{2}{3}bc^2\sigma_y \quad (3.10)$$

Si el momento flector sigue aumentando, se desarrollan zonas plásticas en el elemento que tiene el esfuerzo uniformemente igual a  $a - \sigma_y$  en la zona superior y  $a + \sigma_y$  en la inferior (Figura 3.9 c). Entre las zonas plásticas subsiste un núcleo elástico en el cual  $\sigma_x$  varia linealmente con  $y$ .

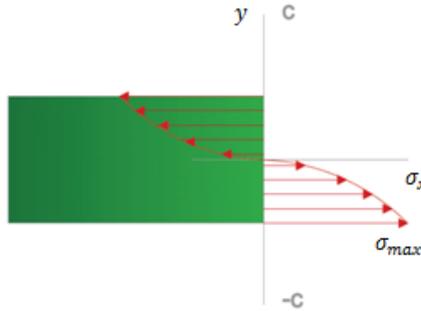
$$\sigma_x = -\frac{\sigma_y}{y_y}y \quad (3.11)$$

Donde  $y_y$  la mitad del espesor del núcleo elástico. Cuando  $M$  aumenta, la zona plástica se expande hasta que, en el límite, la deformación es completamente plástica (Figura 3.9 d).



**Figura 3.9.-** Elementos hechos de material elastoplástico sometidos a flexión.

Ahora considere la siguiente figura.



**Figura 3.10.-** Diagrama Esfuerzo-Deformación para un elemento sometido a flexión.

Para calcular el momento flector  $M$ , que corresponde a la distribución de esfuerzos de la Figura 3.10. Considerando el caso particular de un elemento que tiene una sección rectangular de ancho  $b$ , el elemento de área se expresa como  $dA = b dy$ , y se obtiene:

$$M = -b \int_{-c}^c y \sigma_x dy \quad (3.12)$$

Donde  $\sigma_x$  es la función de  $y$  graficada en la Figura 3.9. Como  $\sigma_x$  es una función impar de  $y$ , la Ecuación 3.10 se escribe:

$$M = -2b \int_0^c y \sigma_x dy$$

Considerando que  $\sigma_x$  está dado para la Ecuación 3.11 para  $0 \leq y \leq y_Y$ , y es igual a  $-\sigma_Y$  para  $y_Y \leq y \leq c$ , se obtiene:

$$M = -2b \int_0^{y_Y} y \left( -\frac{\sigma_Y}{y_Y} y \right) dy - 2b \int_{y_Y}^c y (-\sigma_Y) dy$$

$$M = bc^2 \sigma_Y \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{y_Y^2}{c^2} \right)$$

O, a partir de la Ecuación 3.10

$$M = \frac{3}{2} M_y \left( 1 - \frac{1y^2}{3c^2} \right) \quad (3.13)$$

Donde  $M_y$  es el momento elástico máximo. Se observa que cuando  $y_Y$  se aproxima a cero, el momento flector tiende a:

$$M_p = \frac{3}{2} M_y \quad (3.14)$$

Este valor del momento flector, que corresponde a una deformación completamente plástica (Figura 3.8 d), es el momento plástico del elemento estudiado. Note que la Ecuación 3.14, es válida solo para elementos de sección rectangular hechos de material elastoplástico.

Debe tenerse claro que la distribución de las deformaciones a través de la sección permanece lineal después de la fluencia. Esto quiere decir que aun es válida la siguiente relación:

$$\epsilon_y = \frac{y_Y}{\rho} \quad y_Y = \epsilon_y \rho$$

Donde  $\epsilon_y$  es la deformación de fluencia y  $\rho$  el radio de curvatura correspondiente a un momento flector  $M \leq M_y$ . Cuando el momento flector es igual a  $M_y$  se tiene  $y_Y = c$  y la Ecuación anterior resulta en:

$$c = \epsilon_y \rho_y$$

Donde  $\rho_y$  es el radio de curvatura correspondiente al momento elástico máximo  $M_y$ . Dividiendo miembro a miembro las Ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\frac{y_Y}{c} = \frac{\rho}{\rho_Y} \quad (3.15)$$

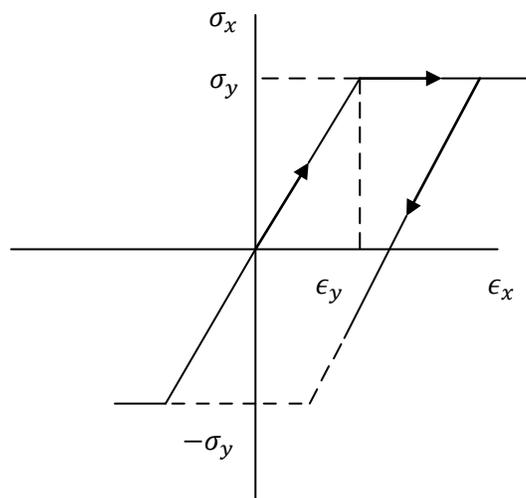
Sustituyendo por  $y_Y/c$ , de la Ecuación 3.15 en la Ecuación 3.13 se expresa el momento flector  $M$  como función de radio de curvatura  $\rho$  de la superficie neutra:

$$M = \frac{3}{2} M_y \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{\rho^2}{\rho_y^2} \right) \quad (3.16)$$

Debe notarse que la Ecuación 3.16 solo es válida después del inicio de la fluencia.

### 3.5.2 ESFUERZOS RESIDUALES PRODUCIDOS POR MOMENTOS FLECTORES.

En la sección precedente se estudió que si en un elemento hecho de un material elastoplástico el momento flector es suficientemente grande, se desarrollaran zonas plásticas. Cuando el momento flector se reduce a cero, la correspondiente reducción en esfuerzo y deformación, en cualquier punto dado, puede representarse por una línea recta en el diagrama Esfuerzo-Deformación, como se ilustra en la Figura 3.11. El valor final del esfuerzo en un punto no será cero, en general, tal como se verá en seguida. Habrá un esfuerzo residual en casi todos los puntos, y ese esfuerzo puede tener o no el mismo signo de esfuerzo máximo alcanzado al final de la fase de carga [Beer, 2007 y Johnston, 2007].



**Figura 3.11.-** Diagrama Esfuerzo-Deformación de un elemento hecho de un material elastoplástico sometido a flexión excediendo el esfuerzo de cedencia

Puesto que la relación lineal entre  $\sigma_x$  y  $\epsilon_x$  se aplica a todos los puntos del elemento durante la fase de descarga, es posible que la Ecuación 3.6 pueda usarse para obtener el cambio de esfuerzo en cualquier punto dado.

En otras palabras, la fase de descarga puede manejarse suponiendo que el elemento es completamente elástico.

Los esfuerzos residuales se obtienen aplicando el principio de superposición en forma análoga a como se hizo para calcularlos en ejes sometidos a torsión. Se analizan por una parte, los esfuerzos debido a la aplicación del momento flector  $M$  y, por otro, los esfuerzos contrarios debido al momento flector igual y opuesto  $-M$  que se aplica para descargar el elemento. El primer grupo de esfuerzos refleja el comportamiento elastoplástico del material durante la fase de carga, y el segundo grupo la conducta lineal del material durante la fase de descarga. Sumando los grupos de esfuerzos, se obtiene la distribución de esfuerzos residuales en el elemento.

### 3.5.3 CÁLCULO DE DEFORMACIÓN Y ESFUERZOS RESIDUALES EN UN ELEMENTO DE SECCIÓN TRANSVERSAL RECTANGULAR.

Ya que se han establecido las ecuaciones que rigen el método analítico para el cálculo de esfuerzos residuales en elementos sometidos a flexión, se propone encontrar los esfuerzos residuales en un elemento de sección rectangular de  $1 \times 10$  mm, que tiene dos cargas aplicadas como muestra la Figura 3.12.

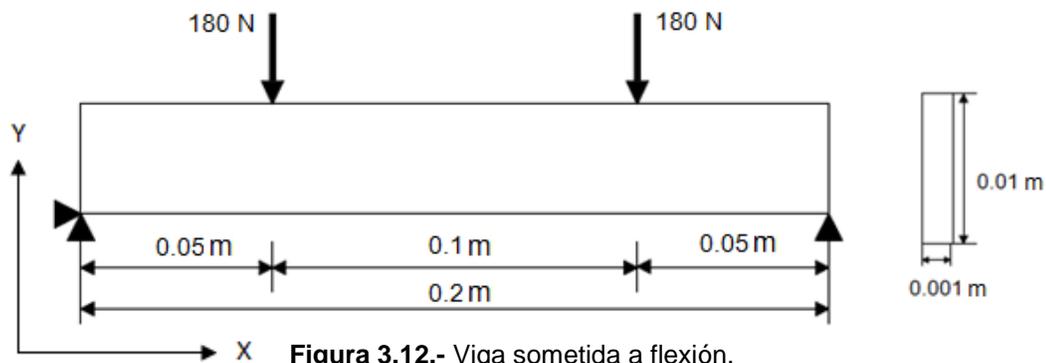


Figura 3.12.- Viga sometida a flexión.

Se supone que el elemento está hecho de un material elastoplástico con un punto de fluencia de 420MPa y un módulo de elasticidad de 210 GPa.

**a) Espesor del núcleo elástico.**

Primero se determina el momento elástico máximo  $M_y$ .

$$M_y = \frac{I}{c} \sigma_y$$

$$\frac{I}{c} = \frac{b(2c)^5}{12c} = \frac{2}{3}bc^2 = \frac{2}{3}(.001)(.005)^2 = 1.666 \times 10^{-8}$$

$$M_y = \frac{I}{c} \sigma_y = (1.666 \times 10^{-8})(420MPa) = 6.9 N \cdot m$$

$$M = \frac{3}{2}M_y \left(1 - \frac{1y_Y^2}{3c^2}\right) \quad \left(\frac{y_Y}{c}\right)^2 = \left(\frac{3M_y - 2M}{M_y}\right)$$

El momento producido por las fuerzas que están actuando en las vigas es  $M = 9 N \cdot m$

$$\left(\frac{y_Y}{c}\right)^2 = .391$$

$$y_Y = \sqrt{(.391)(.005)^2} = .0031 m$$

El espesor de la zona plástica es  $2y_Y = .0062m$

La deformación de fluencia es:

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{420 MPa}{210 GPa} = .002$$

Utilizando la siguiente ecuación

$$\rho = \frac{y_Y}{\epsilon_y} = 1.55 m$$

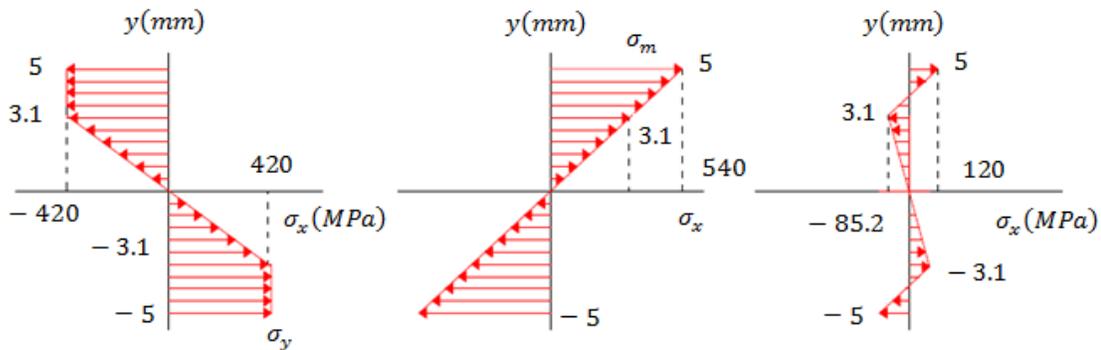
### Distribución de esfuerzos residuales.

Retomando los datos del ejemplo anterior, sabemos que el límite de fluencia es  $\sigma_y = 420 \text{ MPa}$  y que el espesor del núcleo elástico es  $2y_Y = .0062\text{m}$ . La distribución de esfuerzos en el elemento cargado es la que se muestra en la Figura 3.13 a.

La distribución de los esfuerzos contrarios debidos al momento flector opuesto de  $M = 9 \text{ N} \cdot \text{m}$  requerido para descargar el elemento es lineal como se observa en la Figura 3.11. El esfuerzo máximo en esa distribución se obtiene de la Ecuación 3.6. Recordando del ejemplo anterior que  $\frac{I}{c} = 1.666 \times 10^{-8}$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{9 \text{ N} \cdot \text{m}}{1.666 \times 10^{-8}} = 540 \text{ MPa}$$

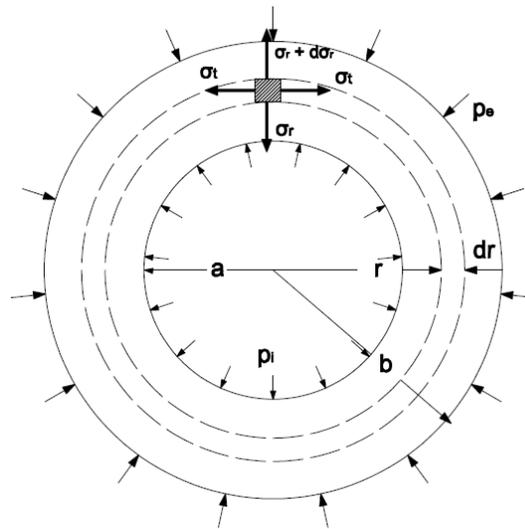
Superponiendo las 2 distribuciones de esfuerzos se obtienen los esfuerzos residuales ilustrados en la Figura 3.13.



**Figura 3.13.-** Distribución de esfuerzos residuales en una viga hecha de material elastoplástico sometida a flexión.

### 3.6 CILINDROS DE PARED GRUESA.

La diferencia entre un cilindro de pared delgada y un cilindro de pared gruesa, estriba en una relación entre el espesor de pared del cilindro y su diámetro. Los cilindros de pared gruesa son aquellos cuyo espesor de pared es mayor a 1/20 de su diámetro. En cilindros de pared delgada, se considera que el esfuerzo medio circunferencial se distribuye uniformemente en el espesor, lo que no sucede en los cilindros de pared gruesa, en donde el valor del esfuerzo medio circunferencial está lejos de ser igual al valor del máximo esfuerzo circunferencial [Singer Ferdinand, 1982].



**Figura 3.14.-** Cilindro de pared gruesa sometido a presión interna  $p_i$  y presión externa  $p_e$ .

El problema de la determinación del esfuerzo tangencial  $\sigma_t$  y del esfuerzo radial  $\sigma_r$  en un punto cualquiera, en función de las presiones exteriores e interiores aplicadas, y de las condiciones geométricas, fue resuelto en 1833 por *Gabriel Lamé*. El cilindro de la Figura 3.14 tiene un radio interior  $a$  y un radio exterior  $b$ , estando sometido a presiones internas y externas uniformemente distribuidas y de valor  $p_i$  y  $p_e$ . Aislando un cilindro de espesor diferencial  $dr$ , y consideremos la mitad de longitud unitaria de este elemento cilíndrico diferencial. El esfuerzo tangencial en el elemento aislado en la Figura 3.15 es  $\sigma_t$ , el esfuerzo radial en la superficie interior es  $\sigma_r$  y en la superficie exterior  $\sigma_t + d\sigma_r$ , ya que  $\sigma_r$  varía a lo largo del radio. Los esfuerzos radiales se suponen (incorrectamente) de tensión de modo que un resultado negativo indica compresión.

Tal elemento puede estudiarse como un cilindro de pared delgada y, por tanto, para el equilibrio, la suma total de los esfuerzos aplicada debe ser igual a cero.

$$(\sigma_r + d\sigma_r) \cdot 2(r + dr) - \sigma_r(2r) - 2\sigma_t dr = 0 \quad (3.17)$$

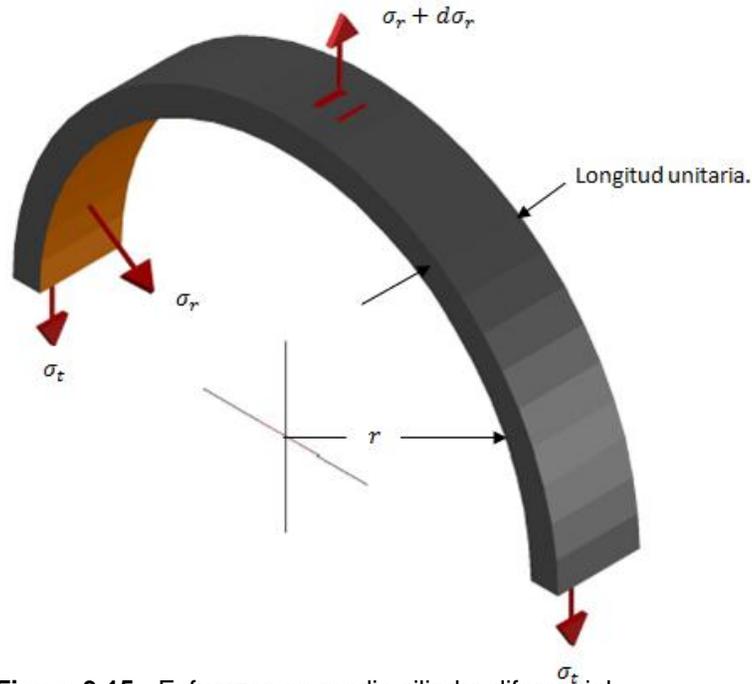


Figura 3.15.- Esfuerzos en medio cilindro diferencial.

Al resolver y simplificar la ecuación obtenemos:

$$2r\sigma_r + 2rd\sigma_r + 2\sigma_r d\sigma_r + 2dr d\sigma_r - 2r\sigma_r - 2\sigma_t dr = 0$$

El producto  $dr \cdot d\sigma_r$  puede despreciarse como infinitésimo de segundo orden, respecto de las otras cantidades. En estas condiciones, y al dividir todos los elementos entre  $2 dr$ , se obtiene:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0 \quad (3.18)$$

Para obtener otra relación entre  $\sigma_r$  y  $\sigma_t$  hay que adoptar alguna hipótesis complementaria. Se supone que una sección recta, normal al eje del cilindro, permanece plana después de la deformación y, por tanto, que la deformación unitaria longitudinal es constante en

cualquier punto de la sección. Aplicando la ley de Hooke en el caso de un estado triaxial de esfuerzos se obtiene:

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_t)]$$

Ahora bien, como  $\epsilon_z$ ,  $E$ ,  $\sigma_z$  y  $\nu$  son constantes, la suma de  $\sigma_r + \sigma_t$  ha de ser constante en toda la sección. Llamando  $2A$  a esta constante,

$$\sigma_r + \sigma_t = 2A \quad (3.19)$$

Ahora se puede enunciar una ecuación que solo incluya  $\sigma_r$ ; Al sumar las Ecuaciones 3.18 y 3.19 se obtiene:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + 2\sigma_r = 2A$$

o bien,

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = 2(A - \sigma_r)$$

De donde al separar las variables se obtiene:

$$\frac{d\sigma_r}{A - \sigma_r} = 2 \frac{dr}{r}$$

Integrando se obtiene:

$$(A - \sigma_r)r^2 = e^{-c}$$

Sustituimos la constante  $e^{-c}$  por  $B$ . Resolviendo para  $\sigma_r$ , finalmente se obtiene:

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} \quad (3.20)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 3.19 resulta:

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} \quad (3.21)$$

Los valores de las constantes A y B se determinan mediante las condiciones de frontera, que son:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p_i \quad \text{para } r = a \\ \sigma_r &= -p_e \quad \text{para } r = b \end{aligned} \right\}$$

Donde el signo menos indica que  $\sigma_r$  es un esfuerzo de compresión, con estos valores se obtiene el sistema:

$$\left. \begin{aligned} -p_i &= A - \frac{B}{a^2} \\ -p_e &= A - \frac{B}{b^2} \end{aligned} \right\}$$

Cuya solución es:

$$A = \frac{a^2 p_i - b^2 p_e}{b^2 - a^2}$$

$$B = \frac{a^2 b^2 (p_i - p_e)}{b^2 - a^2}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones c y d se obtienen las expresiones generales de  $\sigma_r$  y  $\sigma_t$  en un punto cualquiera, a la distancia r del centro:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i - b^2 p_e}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_i - p_e)}{(b^2 - a^2) r^2} \quad (3.22)$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_i - b^2 p_e}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_i - p_e)}{(b^2 - a^2) r^2} \quad (3.23)$$

### Caso particular en donde no existe presión externa.

Si la presión interior es  $p_i$ , y la presión exterior es nula ( $p_e = 0$ ), las ecuaciones generales para el cálculo de esfuerzos radiales y tangenciales, toman la forma:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2} \right]$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2} \right]$$

Obsérvese que  $\sigma_r$  siempre es negativa, es decir, se encuentra en compresión, y que  $\sigma_t$  siempre es positiva, se encuentra en tensión, y es mayor que  $\sigma_r$ . Su valor máximo aparece en la superficie interior del cilindro.

$$\sigma_{tmax} = \left( \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \right) p_i \quad (3.24)$$

Como el esfuerzo cortante máximo es igual a la semidiferencia de los esfuerzos principales, como se deduce del círculo de Mohr, y como la falla de un material dúctil, tal como el acero (material con el que se fabrican muchos tubos de este tipo), se supone debido al esfuerzo cortante (como establece la teoría del esfuerzo cortante máximo). Este valor es muy importante en el diseño de estos tubos, el valor máximo tiene lugar en la superficie interior del cilindro, en donde  $\sigma_r$  y  $\sigma_t$  son máximos y de signos contrarios, de donde se obtiene que:

$$\tau_{Max} = \frac{(\sigma_t)_{max} - (\sigma_r)_{max}}{2} = \frac{b^2}{b^2 - a^2} p_i \quad (3.25)$$

### 3.7 PLANTEAMIENTO ANALÍTICO DEL MÉTODO DE SACHS.

Mesnager en 1919 introdujo un método mecánico para la determinación de esfuerzos residuales en cilindros, el cual consiste en remover material del centro del cilindro y hacer mediciones de las deformaciones tangenciales y longitudinales que se producen en la superficie exterior. Al sustituir los valores de deformación en ecuaciones que él desarrollo por medio de la teoría de elasticidad de cilindros presurizados Mesnager fue capaz de

estimar con gran precisión esfuerzos radiales, axiales y longitudinales en cilindros hechos de un material isotrópico. Sachs en 1927 simplificó los cálculos de Mesnager por lo que hoy este método es llamado Metodo de Sachs [*W. A. Olson y C. W. Bert*].

Los esfuerzos residuales, son aquellos esfuerzos que se encuentran dentro de algún material cuando este está libre de la aplicación de fuerzas externas. Estos esfuerzos están presentes prácticamente en cualquier componente manufacturado y estructura ensamblada. Cuando se manufacturan tubos, los esfuerzos residuales son introducidos dentro de ellos generalmente a causa del procesos de rolado en caliente, el cual genera grandes deformaciones. La identificación de los esfuerzos residuales en cilindros, puede ser realizada experimentalmente por medio de técnicas destructivas conocidas como métodos de remoción de capaz los cuales están basados en los trabajos pioneros desarrollados por Sachs. El Método de Mesnager-Sachs, consiste en remover sucesivamente pequeñas capas desde el centro del cilindro y medir los cambios en la longitud y en el diámetro en el cilindro después de cada remoción de material [A. Amirat, A. Mohamed-Chateauneuf, K. Chaoui, 2004].

El método usado para la medición de esfuerzos residuales en cilindros con de pared gruesa, fue originalmente propuesto por Sachs [1941], y por esta razón es llamado Método de Sachs. Este método ha sido empleado ampliamente en años recientes en la investigación de esfuerzos residuales en cilindros auto zunchados (autofrettage).

La medición práctica comprueba que es confiable usar el método de Sachs para la medición de esfuerzos residuales planos en cilindros de longitud finita y no se obtienen buenos resultados en la medición de esfuerzos residuales longitudinales. De hecho, Las fórmulas de Sachs no son adecuadas para cilindros en donde los esfuerzos longitudinales no son constantes [*Song Shun-Cheng, 1989*].

Primero, se supone que el cilindro contiene esfuerzos residuales, en condiciones de esfuerzo plano. Como el material es removido del orificio del cilindro, su radio inicial  $a$  se convierte en  $r$  y su superficie exterior produce esfuerzos residuales tangenciales

adicionales  $\sigma_t(r)$  debido a que los esfuerzos residuales radiales  $\sigma_r(r)$  en el radio interior  $r$  están relajados. De las Ecuaciones de Lamé:

$$\sigma_t(r) = \frac{2r^2}{b^2 - r^2} \sigma_r(r)$$

ó

$$\sigma_r(r) = \frac{b^2 - r^2}{2r^2} \sigma_t(r) \quad (3.26.1)$$

En donde  $b$  es el radio exterior del cilindro.

De la ley de Hooke:

$$\sigma_t(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{b^2 - r^2}{2r^2} [\epsilon_t(r) + \nu \epsilon_r(r)] \quad (3.26.2)$$

Combinando las ecuaciones 3.26.1 y 3.26.2

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{b^2 - r^2}{2r^2} [\sigma_t(r) + \nu \epsilon_z(r)] \quad (3.27)$$

En donde  $E$  y  $\nu$  son el modulo de Young del material y la relación de Poisson respectivamente.  $\epsilon_t$  y  $\epsilon_z$  son la deformación tangencial y la deformación longitudinal respectivamente, cuando son inducidas por la remoción del material que produjo el cambio de radio de  $a$  a  $r$ .

Es decir, como el material es removido del radio inicial  $a$  a  $r$ , se puede calcular los esfuerzos residuales radiales  $\sigma_r(r)$  contenidos en el cilindro original en el radio  $r$  con la Ecuación 3.27.1, usando las deformaciones en la superficies exterior  $\epsilon_t(r)$  y  $\epsilon_z(r)$ .

Los esfuerzos residuales planos son satisfechos con la Ecuación (3.28):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad (3.28)$$

Combinando la Ecuación 3.27 y 3.28 se obtiene la formula con respecto al cálculo de esfuerzos residuales tangenciales  $\sigma_t(r)$  contenidos en el cilindro en el radio r.

$$\sigma_t(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{b^2-r^2}{2r^2} \frac{d}{dr} [\epsilon_t(r) + \nu\epsilon_z(r)] - \frac{b^2+r^2}{2r^2} [\epsilon_t(r) + \nu\epsilon_z(r)] \right\} \quad (3.29)$$

Escribiendo  $\epsilon_t(r) + \nu\epsilon_z(r) = \theta$ , la Ecuación 3.27 y 3.29 se convierten en:

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{A_b-A}{2A} \theta \quad (3.30)$$

$$\sigma_t(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (A_b - A) \frac{d\theta}{dA} - \frac{A_b-A}{2A} \theta \right] \quad (3.31)$$

En donde  $A = \pi r^2$ ,  $A_b = \pi b^2$ .

Las Ecuaciones 3.30 y 3.31 son las ecuaciones que rigen al Método de Sachs. Por el proceso de deducción de las ecuaciones, se sabe que las fórmulas de Sachs solo son satisfechas para esfuerzos residuales planos [Song Shun-Cheng, 1988]

### 3.8 SUMARIO.

En este capítulo, se expone la metodología a seguir para calcular las deformaciones permanentes que se general al sobrepasar el esfuerzo de fluencia de algún material dado, así como para determinar los esfuerzos residuales que se generan a causa de las deformaciones permanentes e incompatibles con la configuración geométrica inicial del elemento. También se exponen las formulas para el cálculo de esfuerzos en cilindros de pared gruesa, mismas que servirán para interpretar el campo de esfuerzos residuales creado en cilindros sometidos a presión interna en el siguiente capítulo.

## 4.1 GENERALIDADES.

A la par del avance tecnológico de los ordenadores, se desarrollan cada vez software más rápidos, con mejores herramientas y con mayor precisión que permiten obtener resultados tales como el esfuerzo y la deformación unitaria, producidos por agentes externos en sistemas mecánicos complejos, que de otra forma serían muy difíciles de calcular. El uso de estas nuevas tecnologías ayuda a obtener una visión más amplia del comportamiento de sistemas mecánicos ante diferentes situaciones, sin la necesidad de recurrir a experimentaciones o cálculos complejos.

## 4.2 EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

El Método del Elemento Finito (MEF), es una técnica de análisis matemático, específicamente matricial, que se emplea para obtener soluciones aproximadas a problemas reales. Su aplicación abarca diferentes campos de la ingeniería, tales como los que se muestran en la Tabla 4.1.

**Tabla 4.1.-** Aplicaciones comunes en diferentes disciplinas de ingeniería.

Disciplina	Datos Primarios	Resultados Obtenidos
<b>Estructural</b>	Desplazamiento	Esfuerzo, deformación, reacciones, daño y fatiga, choque e impacto y contacto mecánico.
<b>Térmica</b>	Temperatura	Flujo térmico, gradiente térmico, disipación térmica, Etc.
<b>Magnética</b>	Potencial magnético	Flujo magnético, densidad de corriente, Etc.
<b>Eléctrica</b>	Potencial eléctrico escalar	Campo eléctrico, densidad de flujo. voltaje, corriente, Etc.
<b>Fluidos</b>	Velocidad, Presión	Gradiente de presión, flujo de calor, etc.

El Método de Elemento Finito, consiste en discretizar (o dividir) la estructura en pequeñas partes. Cada una de estas pequeñas partes es un elemento finito, y todos los elementos finitos, en conjunto, forman la malla de elementos finitos en

un modelo analítico. Debido a la enorme ventaja de que el material homogéneo e isotrópico es un medio continuo, las mallas de elemento finito también lo son, y por lo tanto, la malla de elementos finitos, puede adaptarse a toda la geometría de la estructura en cuestión. Dentro de una malla, un elemento finito se une a otro por medio de puntos comunes llamados nodos.

A través de los nodos, es posible obtener la matriz característica del elemento finito y, precisamente, es a través de los nodos que se realiza la transferencia del desplazamiento y fuerzas internas (en el caso de un análisis estructural) de tal forma que, prácticamente en cualquier parte de la malla es posible obtener resultados tales como esfuerzo y deformación.

Los resultados pueden fácilmente graficarse y así obtener una mejor representación visual del comportamiento de la estructura. Esto es lo que hace particularmente tan atractivo al Método de Elemento Finito al contar con herramientas visuales para representar una simulación del comportamiento de la estructura.

Si la malla del modelo contiene un número elevado de nodos, mayor será la complejidad para la resolución matemática. Si se tiene una estructura con un número demasiado grande de nodos, resolver las ecuaciones de este elemento de forma manual sería una tarea prácticamente imposible. Por ellos es necesaria la utilización de un software basado en el Método de Elemento Finito.

En el mercado existe una gran cantidad de software basado en el Método de Elemento Finito, para una gran diversidad de aplicaciones. En la siguiente tabla se muestran algunos de ellos.

**Tabla 4.2.-** Softwares basados en el Método de Elemento Finito.

<b>Software Basados en el Método de Elemento Finito.</b>		
ABAQUS/Explicit	ABAQUS/Standard	ADAMS/FEA
ADINA	AFEMS	ALGOR
ANSYS	AUTODYN	C-MOLD
CAMRAD II	COSMOS/M	ENDURE
FAM	INERTIA	DIANA
GPBEST	LAPFEA	MARC
SPECTRUM	EMFlex	EMSS
SAMCEF	RADIOSS	STRAP

Los software de elemento finito tienen su funcionalidad básicamente en tres partes:

1. Funciones del preprocesador. En esta parte se crean las mallas que representan las partes reales a analizar, se definen los tipos de elementos que se emplearán, se seleccionan las propiedades geométricas, se definen materiales, se definen cargas y por último el tipo de análisis.
2. Funciones del procesador. Abarca la solución matemática de las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad establecidas en la matriz de rigidez. Además se definen los parámetros y criterios de resolución.
3. Funciones del postprocesador. Contiene las herramientas, rutinas y macros para poder visualizar a través de gráficos los resultados de la solución matemática.

### 4.3 TIPOS DE ELEMENTOS FINITOS.

Los tipos de elementos finitos se pueden clasificar de la siguiente manera:

**1.- Elemento Finito Puntual.-** Es un elemento que no tiene dimensión y su definición se reduce a un solo punto o nodo. Su aplicación es, muy comúnmente para representar masas concentradas o representar resortes con rigidez donde su longitud no es una característica relevante.

**2.- Elemento Finito Lineal.-** Es un elemento que tiene una sola dimensión, generalmente es definido por dos nodos y su longitud si es relevante. Sin embargo, aunque el elemento es lineal, también es posible definirle propiedades para su sección transversal (Figura 4.1).

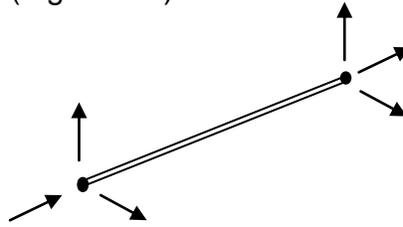


Figura 4.1.- Elemento finito Lineal

**3.- Elemento Finito Superficial Placa.-** Los elementos planos, definidos por tres o cuatro nodos (triangulares y cuadriláteros respectivamente), son las placas delgadas que son cargadas en su propio plano (esfuerzo plano).

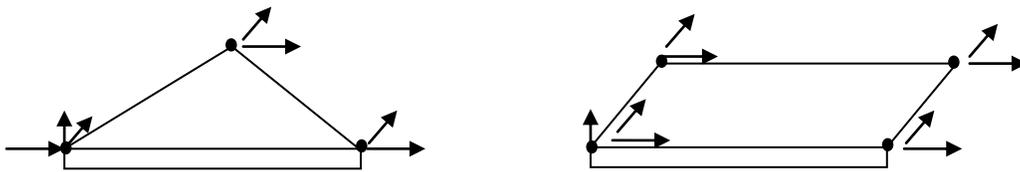
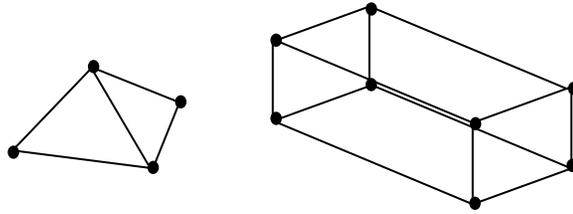


Figura 4.2.- Elementos Finitos Superficiales Placa

**4.- Elementos Finitos Volumétricos Sólidos.-** Son la generalización tridimensional de los elementos en esfuerzo plano: el tetraedro, el pentaedro, y el hexaedro son las formas más comunes de los elementos tridimensionales (Figura 5.3).



**Figura 4.3.-** Elementos Finitos Volumétricos Sólidos

5.- Elementos Finitos Volumétricos Axisimétricos.- Utilizados para la resolución de una gran variedad de problemas de ingeniería incluyendo tanques y contenedores de acero y de concreto, recipientes de contenido nuclear, rotores, émbolos y escapes de cohetes; en todos ellos se utilizan estos elementos. Su característica principal es que tanto la carga como la geometría, usualmente son axisimétricos.

6.- Placa Plana en Flexión.- Son elementos usados no solo entre sí, si no también junto con cascarones y miembros de pared delgada. Las formas geométricas son análogas a las de los elementos en esfuerzo plano, con mayor énfasis también en las formas triangulares, y cuadriláteras.

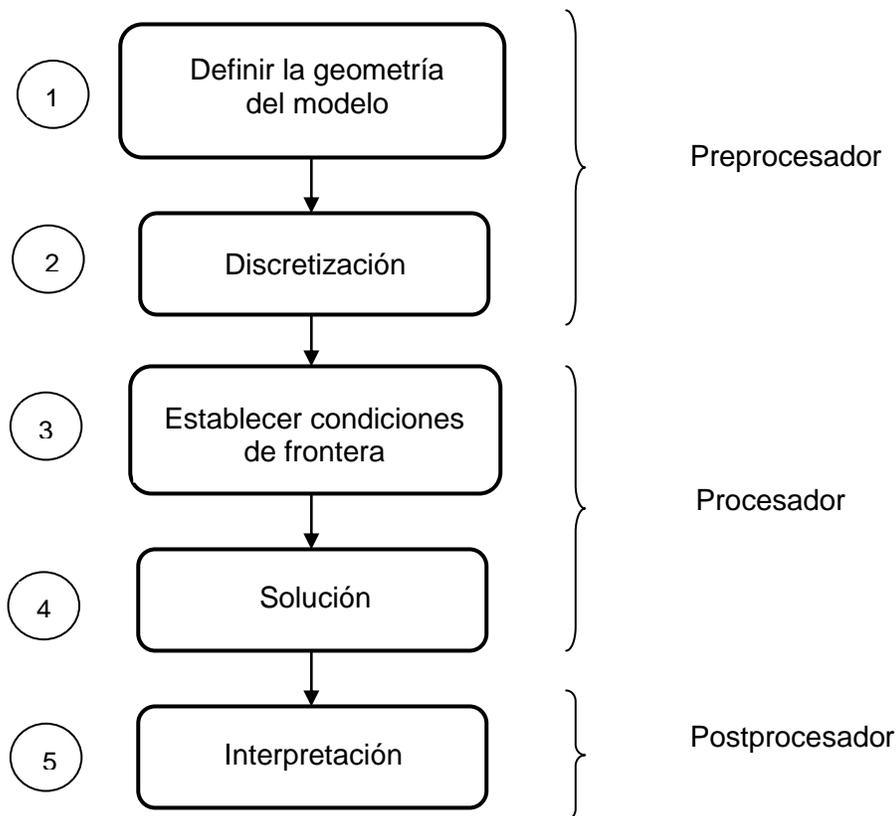
7.- Cascaron Axisimétrico.- Tienen la misma importancia en aplicaciones prácticas que los sólidos axisimétricos, aunque aquí, las formulaciones se derivan de la teoría de la membrana. Dentro de esta formulación se encuentra la diferencia con respecto a los elementos placa en flexión y tensión y sirven para identificar problemas clave.

8.- Cascarón Curvo.- Cuando una estructura está curva, es preferible usar elementos cascarón curvo para los modelos analíticos. Dentro de las ventajas esta la habilidad para describir de forma más adecuada la geometría de una superficie curva. Existe un gran número de alternativas para formular este tipo de elementos.

#### 4.4 SIMULACIÓN DE SISTEMAS MECÁNICOS.

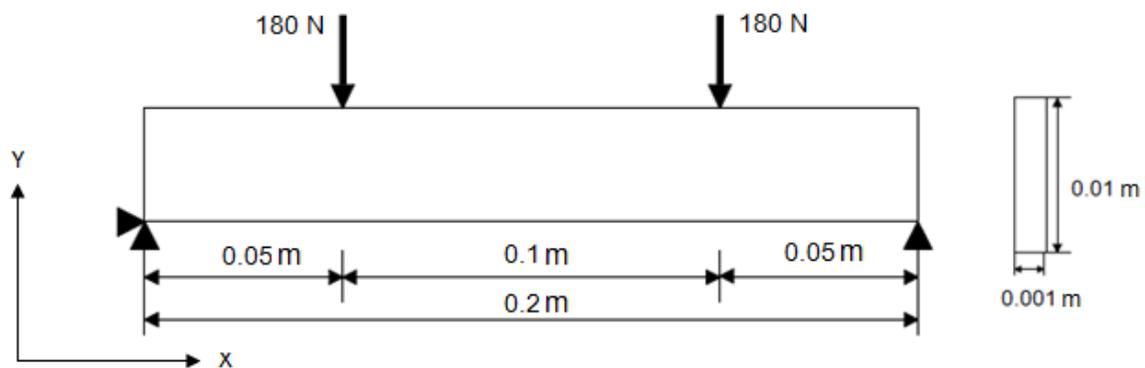
Ya que se ha dado una breve explicación acerca de en qué consiste el Método de Elemento Finito, así como un breve listado de algunos de los software basados en el Método de Elemento Finito y de los elementos finitos con los cuales trabajan estos software, ahora se resolverá un problema de resistencia de materiales por medio de el software Ansys 12.0, con el fin de apreciar el procedimiento a seguir para realizar un análisis de tipo estructural enfocado a resolver el problema planteado dentro de la tesina.

En general, se ha establecido una serie de pasos a seguir para la resolución de cualquier problema por medio de un software basado en el MEF, como se muestra en el siguiente diagrama.



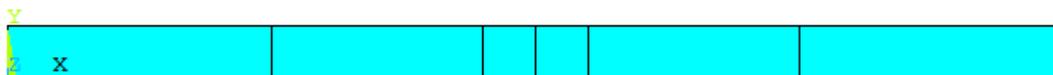
**Figura 4.4.-** Procedimiento de resolución de problemas mediante software basados en el MEF.

Una vez que en general se han establecido los pasos a seguir para resolver problemas por medio de software basados en el MEF, se plantea un problema anteriormente resuelto de forma analítica en la sección 3.3.3, en donde se encuentran los esfuerzos residuales en una viga de sección rectangular como se muestra en la Figura 3.11. Una vez obtenidos los resultados por medio del MEF, se pueden comparar con los obtenidos de forma analítica, y verificar que el procedimiento de cálculo de esfuerzos residuales mediante ANSYS 12.0 es correcto.



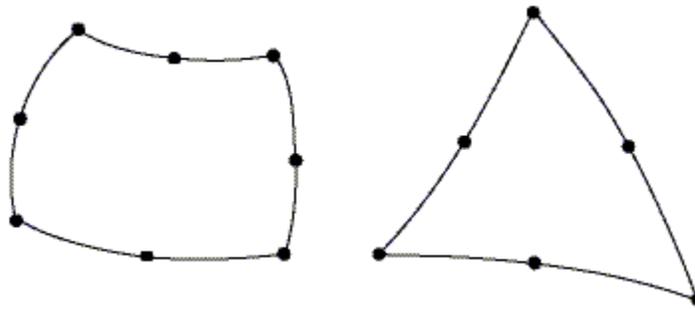
**Figura 3.11.-** Viga sometida a flexión.

El primer paso según la Figura 4.4 es definir la geometría del modelo. Para el problema planteado se divide el área longitudinal de la viga en 6 partes, Las secciones mas largas, corresponden a la longitud que hay desde el extremo de la viga hasta el punto de la aplicación de la carga, las cuatro secciones restantes corresponden a la sección de la viga en la cual el momento flexionante se mantiene constante. Hay muchas formas de modelar la geometría de la Figura 3.11, una de estas formas es por medio de keypoints y líneas a partir de las cuales se forman las áreas como se muestra en la Figura 4.5.



**Figura 4.5.-** Modelo de una viga con sección transversal rectangular.

El siguiente paso es discretizar el modelo. Se puede definir la discretización como la generación de una malla que representa los elementos finitos del modelo real a analizar. Otra forma de definir la discretización es como la división del continuo, es decir, la división de una estructura en muchas partes. Dentro de la discretización también se define el tipo de elemento finito que se usará, así como las propiedades del material que se desea simular. En este caso se utiliza el elemento Plane 183, el cual es un elemento finito con forma de cuadrilátero o triángulo formado por 8 o 6 nodos según la forma de su geometría. Cada uno de sus nodos posee 2 grados de libertad (translación en el eje X y traslación en el eje Y). El elemento puede ser empleado como un elemento plano (esfuerzo plano) o como un elemento axisimétrico. Este elemento posee plasticidad, hiperelasticidad, fluencia y rigidez. Es un elemento 2D que puede tener espesor.

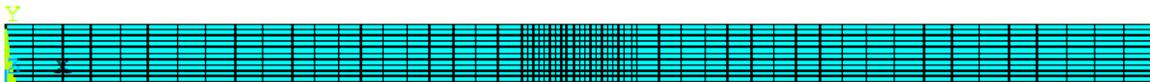


**Figura 4.6.-** Elemento Finito Plane 183 con 6 nodos y 2 grados de libertad.

Por ser la sección transversal de la viga que se desea modelar muy pequeña comparada con su longitud, se utiliza la propiedad que posee el elemento Plane 183 de ser un elemento 2D con espesor en vez de modelar su sección transversal. El espesor que debe indicarse es igual a 0.001 m. Las propiedades del material se encuentran en la sección 3.3.3 del Capítulo 3, en donde se especifica que la viga está hecha de un material elastoplástico con un punto de fluencia de 420MPa y un modulo de elasticidad de 210 GPa.

Ya que se han definido el tipo de elemento finito que se usará y las propiedades del material, se procede a generar la malla del modelo. Al igual que en la

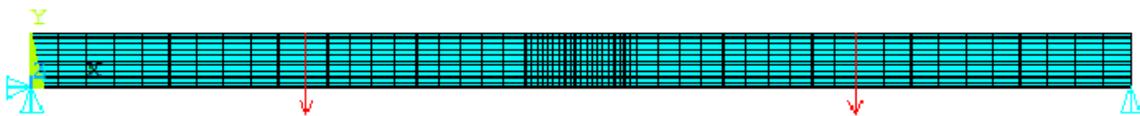
generación del modelo, existen muchas formas de generar la misma malla. En este caso se genera una malla con más elementos en la parte central de la viga que en sus extremos, por ser la sección central de la viga como ya se había mencionado con anterioridad, la sección en donde el momento flexionante se mantiene constante y la parte ideal para medir los esfuerzos. La malla generada en el modelo se muestra en la Figura 4.7.



**Figura 4.7.-** Malla generada en una viga con sección transversal rectangular.

Ahora que se ha seleccionado el elemento finito más adecuado para la simulación del problema planteado, que se definieron las propiedades del material del modelo y que la malla se ha generado, concluyen las funciones del Preprocesador que comprenden los pasos uno y dos de la Figura 4.4. El siguiente paso es establecer las condiciones de frontera, es decir, restringir grados de libertad en uno o varios nodos del modelo y establecer las solitudes de carga.

De acuerdo con el problema planteado, la viga se encuentra restringida en uno de sus extremos en todos sus grados de libertad, mientras que en el extremo opuesto se encuentra restringida solo en la traslación en el eje y. Así mismo dos fuerzas con un valor de 180 N actúan en la viga con dirección negativa en el eje Y como se muestra en la Figura 4.8.

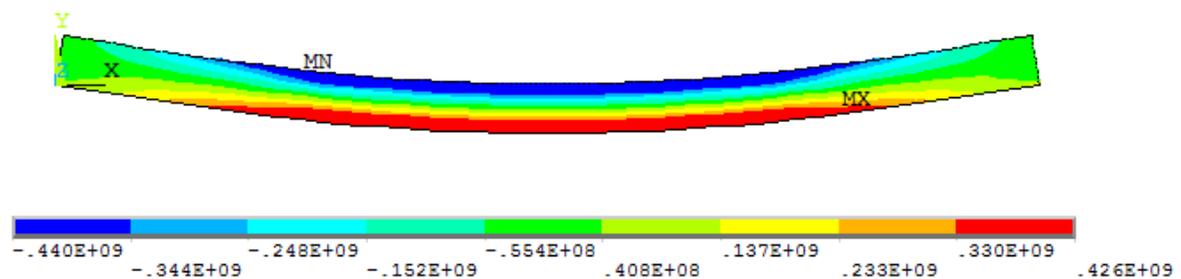


**Figura 4.8.-** Condiciones de frontera de una viga mallada.

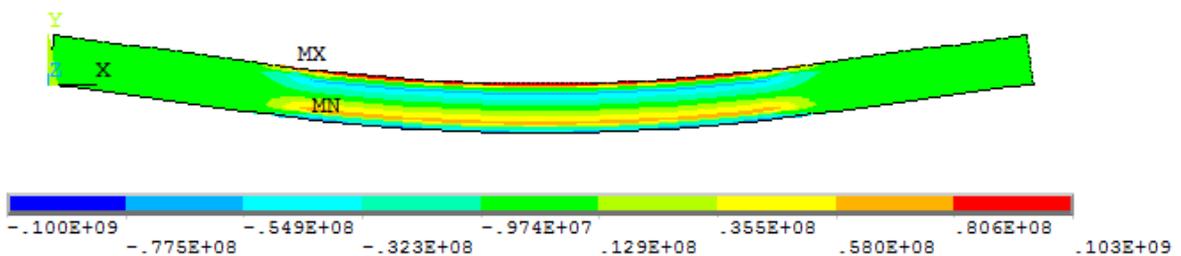
Después de establecer las condiciones de frontera, se procede a resolver el problema por medio del software. Una vez que se obtiene la solución para las

condiciones dadas, es necesario simular ahora la viga cuando las cargas aplicadas son retiradas de ella. Para este efecto se declaran nuevamente las cargas aplicadas en el mismo lugar en donde se establecieron las primeras condiciones de frontera con un valor igual a cero, lo que simularía que las cargas han sido retiradas de la viga. Se procede nuevamente a encontrar la solución de la simulación por medio del software, y así se concluyen las funciones del Procesador.

Igual de importante que la discretización del modelo y el establecer las condiciones de frontera es que la interpretación de los resultados sea correcta. En el problema planteado en la sección 3.3.3, el campo de esfuerzos residuales es evaluado de acuerdo a un eje coordenado, en donde el eje Y es representado por la longitud del lado más largo de la sección transversal, tomando el centro de esta como el origen del plano. Graficando los valores de esfuerzos residuales encontrados por medio del software en cada nodo del centro de la viga se obtienen la siguiente gráfica.



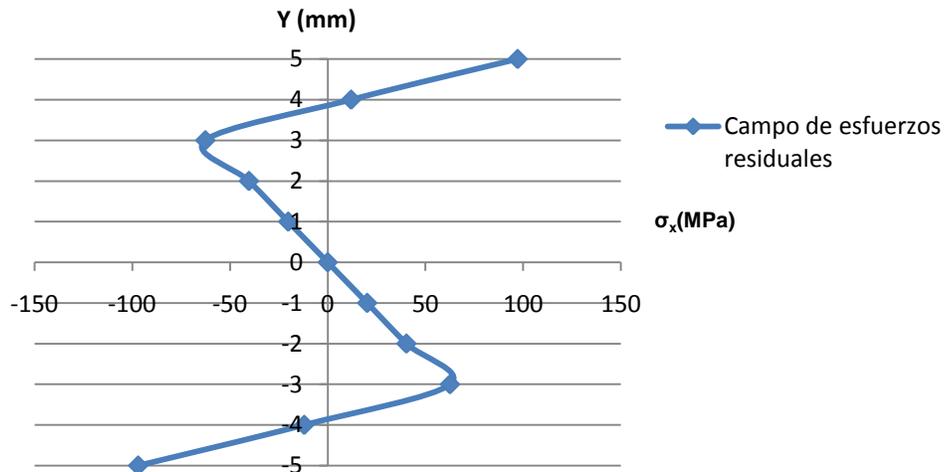
Primera etapa. Fase de carga.



Segunda etapa. Fase de descarga.

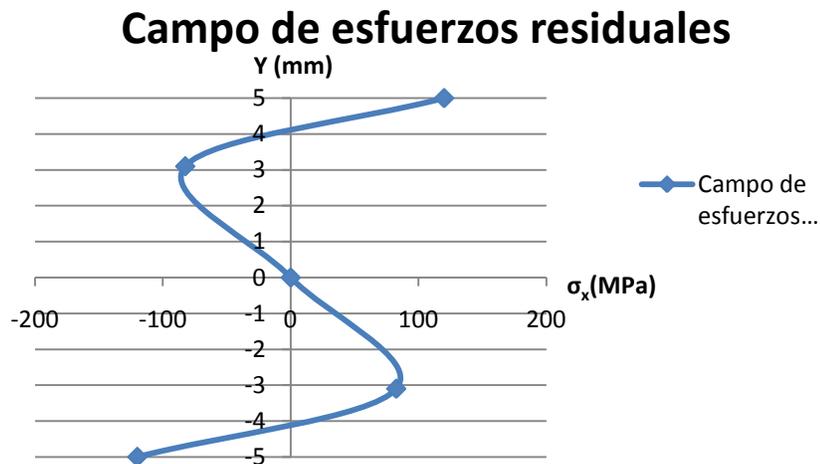
**Figura 4.9.-** Campo de esfuerzos encontrados por medio del software ANSYS 12.0 antes y después de retirar las cargas aplicadas a la viga.

## Campo de esfuerzos residuales



**Gráfica 4.1.-** Campo de esfuerzos residuales de una viga de sección transversal rectangular obtenido por medio de ANSYS 12.0.

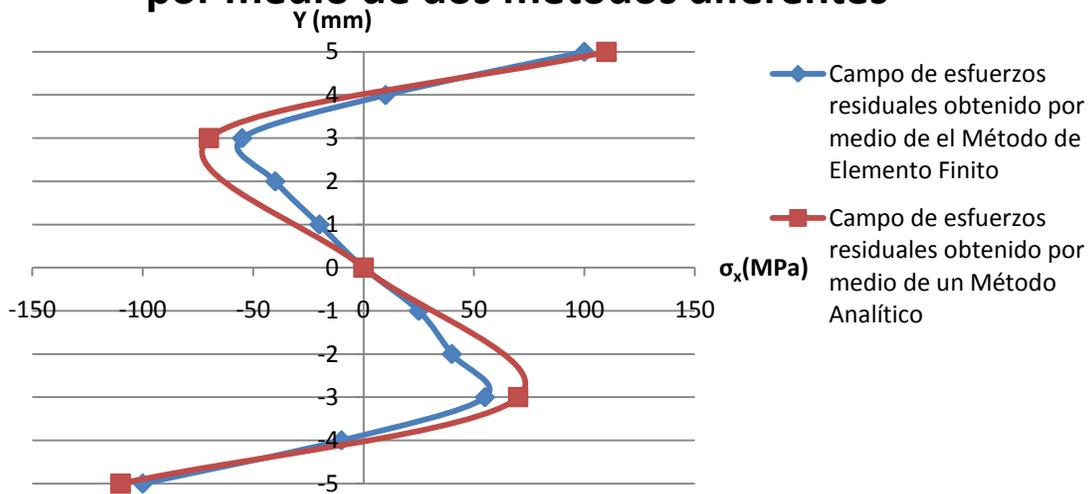
Al graficar los valores de esfuerzos residuales encontrados por medio del método analítico se obtiene la siguiente gráfica.



**Gráfica 4.2.-** Campo de esfuerzos residuales de una viga de sección transversal rectangular obtenido por un método analítico.

Al sobreponer la Gráfica 4.2 a la Gráfica 4.1, se puede notar muy claramente que los resultados obtenidos por medio del Método de Elemento Finito resuelto por el software ANSYS 12.0 son muy aproximados a los resultados obtenidos por medio de un método analítico.

## Campo de esfuerzos residuales obtenidos por medio de dos métodos diferentes

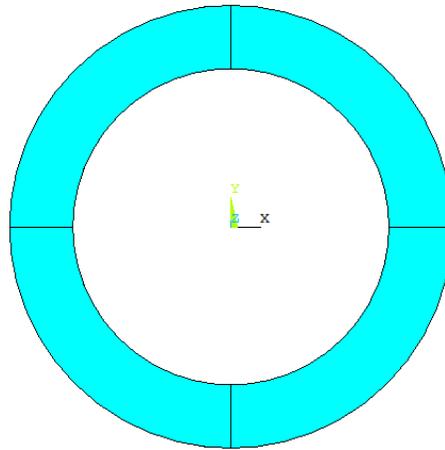


Gráfica 4.3.- Comparación de resultados obtenidos por medio de dos métodos diferentes.

### 4.5 EVALUACIÓN DEL CAMPO DE ESFUERZOS RESIDUALES EN CILINDROS SOMETIDOS A PRESIÓN INTERNA.

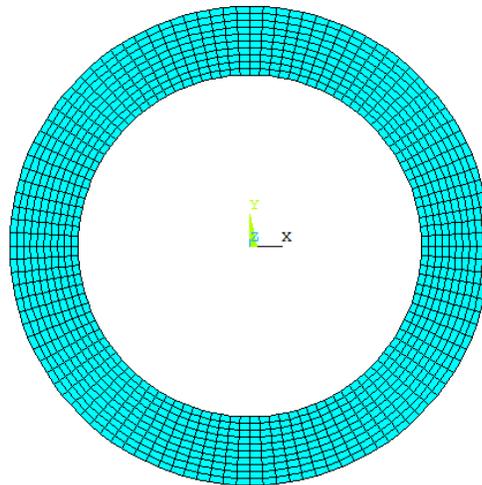
A través del Método de Elemento Finito resuelto por el software ANSYS 12.0 se puede encontrar como ya se ha ejemplificado con una viga sometida a flexión, los esfuerzos residuales que se producen en un elemento mecánico al ejercer sobre él, una o varias cargas que producen esfuerzos que exceden el límite de proporcionalidad del material del que está hecho dicho elemento.

Retomando la metodología del ejemplo anterior, se evaluará el campo de esfuerzos residuales producido dentro de un cilindro sometido a presión interna. Se define la geometría del modelo como un anillo bidimensional (Figura 4.9), en el que se pueden encontrar los esfuerzos radiales y tangenciales que actúan dentro de esta geometría al ejercer presión en sus paredes interiores. La razón de considerar un anillo bidimensional en lugar de uno tridimensional se debe a la suposición de que al considerar una sección recta, normal al eje del cilindro, permanece plana después de la deformación y, por tanto, la deformación unitaria longitudinal es constante en cualquier punto de la sección y los esfuerzos longitudinales nulos.



**Figura 4.10.-** Modelo de un cilindro hueco para su simulación bajo presión interna.

Una vez que se ha modelado el cilindro, el siguiente paso es discretizarlo. Como ya se había denotado en las secciones precedentes, dentro de la discretización se tiene que definir, el tipo de elemento finito a utilizar y las propiedades del material del cual está hecho el cilindro. Nuevamente se utiliza el elemento Plane 183, cuyas características pueden encontrarse en la sección 4.4 de este mismo capítulo. Se utiliza un material elastoplástico con un modulo de Young igual a  $210\text{ GPa}$  y un punto de fluencia de  $420\text{ MPa}$ . Después de definir el elemento finito que se utilizará, y las propiedades del material, se genera la malla con 10 nodos en el espesor de la pared del cilindro como se muestra en la Figura 4.11.



**Figura 4.11.-** Malla generada en un cilindro hueco para su simulación bajo presión interna.

Antes de establecer las condiciones de frontera del modelo, se calcula la presión para la cual se generan esfuerzos de igual magnitud que el esfuerzo de fluencia

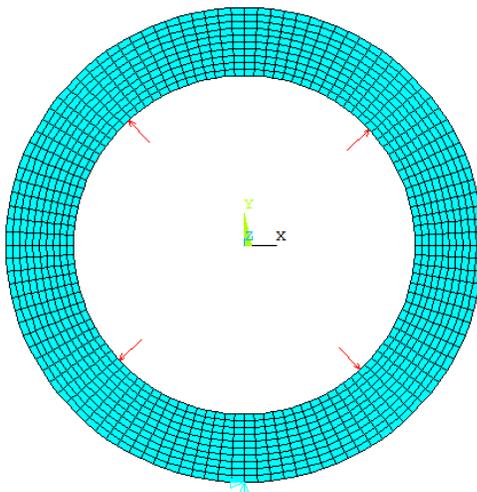
del material. Se utiliza la ecuación para el cálculo de esfuerzos tangenciales en un cilindro sometido a presión interna expuesta en la sección 3.6 del capítulo 3, puesto que los esfuerzos tangenciales son siempre más grandes que los radiales.

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2} \right]$$

Dejando la ecuación en función de la presión interna obtenemos:

$$p_i = \frac{\sigma_y (b^2 - a^2) r^2}{a^2 (r^2 + b^2)}$$

El cilindro modelado tiene un radio  $a = 0.05 \text{ m}$  y un radio  $b = 0.07 \text{ m}$ . Al sustituir los valores numéricos en la ecuación igualando el valor de  $r = a$  por ser este el punto en donde el esfuerzo es máximo, se obtiene la presión que genera dentro del cilindro esfuerzos iguales al esfuerzo de fluencia del material y que tiene una magnitud  $p_i = 136 \text{ MPa}$ . Para verificar que los resultados arrojados por el software son correctos, establecemos como condiciones de frontera la restricción de todos los grados de libertad en uno de los nodos en la circunferencia exterior del cilindro, y la aplicación de presión en la circunferencia interior del modelo con una magnitud menor a  $136 \text{ MPa}$ . Se obtienen los resultados por medio de las ecuaciones de Lamé, para la misma aplicación de presión y al comparar los resultados.



**Figura 4.12.-** Condiciones de frontera en un cilindro hueco bajo presión interna igual a  $80 \text{ MPa}$ .

La presión interna definida para la simulación es  $p_i = 80 \text{ MPa}$

Calculado de forma analítica, el esfuerzo tangencial en  $a$  son iguales a:

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2} \right]$$

$$\sigma_t = \frac{(.05)^2 (80 \text{ MPa})}{(.07)^2 - (.05)^2} \left[ 1 + \frac{(.07)^2}{(.05)^2} \right] = 246.6 \text{ MPa}$$

Calculado de forma analítica, el esfuerzo tangencial en  $b$  son iguales a:

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2} \right]$$

$$\sigma_t = \frac{(.05)^2 (80 \text{ MPa})}{(.07)^2 - (.05)^2} \left[ 1 + \frac{(.07)^2}{(.07)^2} \right] = 166.6 \text{ MPa}$$

Calculado de forma analítica, el esfuerzo radial en  $a$  son iguales a:

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2} \right]$$

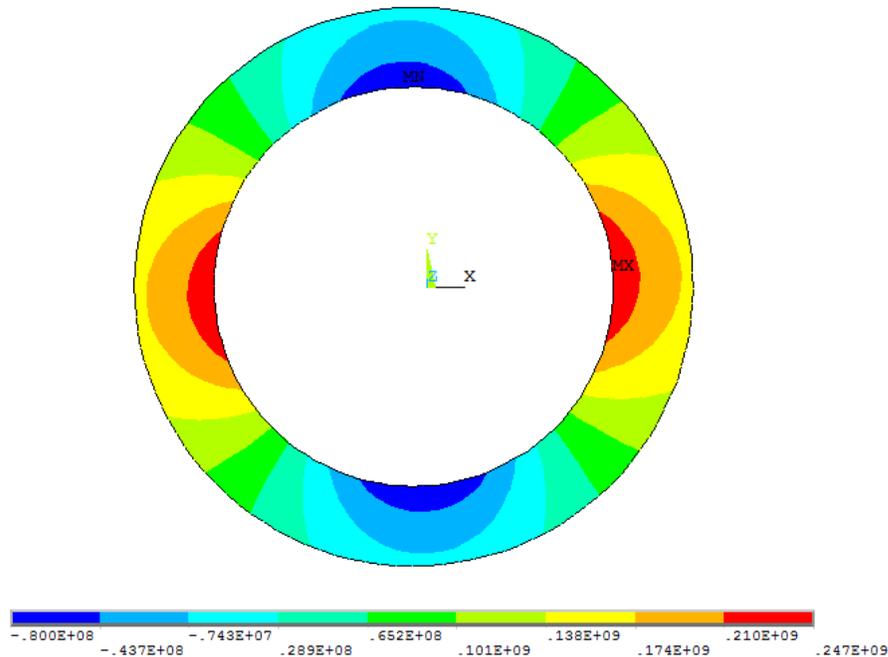
$$\sigma_t = \frac{(.05)^2 (80 \text{ MPa})}{(.07)^2 - (.05)^2} \left[ 1 - \frac{(.07)^2}{(.05)^2} \right] = -80 \text{ MPa}$$

Calculado de forma analítica, el esfuerzo radial en  $b$  son iguales a:

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2} \right]$$

$$\sigma_t = \frac{(.05)^2 (80 \text{ MPa})}{(.07)^2 - (.05)^2} \left[ 1 - \frac{(.07)^2}{(.07)^2} \right] = 0$$

Se obtienen los resultados para la simulación por medio de ANSYS 12.0 en los que se encuentra:

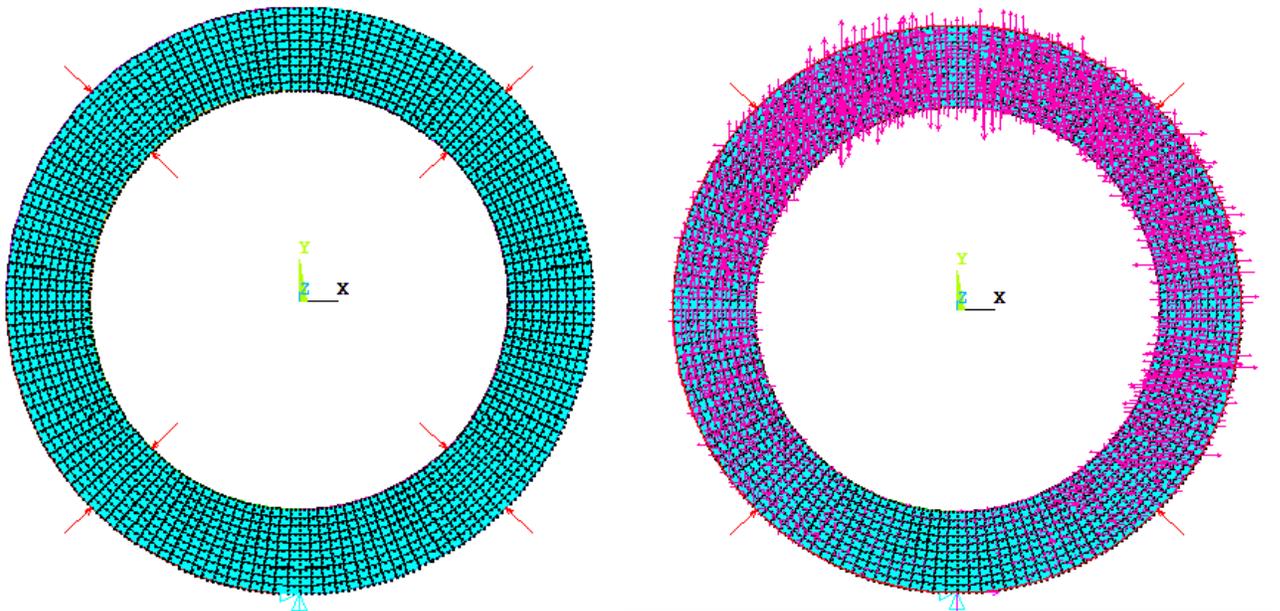


**Figura 4.13.-** Resultados obtenidos por medio del software ANSYS 12.0 para una presión aplicada igual a 80 MPa.

En la Figura 4.13 a través de la escala de colores que se encuentra en su parte inferior, y la cual esta escalada en Pascales, se puede observar que el valor máximo de esfuerzo a tensión (esfuerzos tangenciales) y el valor máximo de esfuerzo a compresión (esfuerzos radiales), se encuentra en el diámetro interior del cilindro, tal y como las ecuaciones de Lamé indican. También se puede observar que los valores máximos de estos esfuerzos concuerdan con los obtenidos de forma analítica, por lo que se puede concluir que el modelado y la discretización del modelo en el software ANSYS 12.0, son correctos, y que por lo tanto, se pueden establecer condiciones de frontera diferentes para el mismo modelo y con la misma discretización en donde se pueden esperar resultados igualmente correctos.

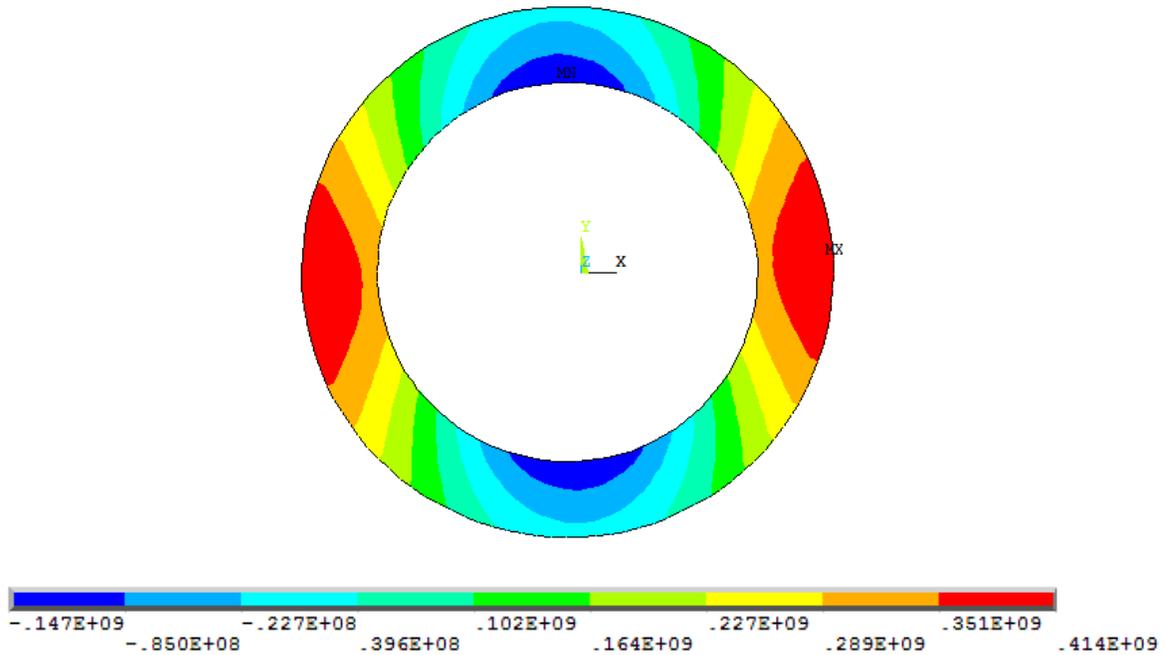
Ya que se ha verificado que se obtienen resultados confiables por medio del MEF resuelto por el software ANSYS 12.0, utilizando el mismo modelo mallado, se establecen condiciones de frontera para las cuales se producirán esfuerzos que exceden el esfuerzo de fluencia del material.

Hay que recordar que para encontrar los esfuerzos residuales en un elemento mecánico, la simulación se realiza en dos pasos, en el primero es aplicada una carga dada y se resuelve la simulación, en el segundo se aplica una carga en el mismo lugar con una magnitud igual a cero, lo que representa que la carga ha sido retirada. Recordado esto, se procede modelando de la misma manera que en el caso anterior un anillo bidimensional con una malla compuesta del elemento finito Plane 183 con 10 nodos en el espesor de su pared. Se establecen como condiciones de frontera la restricción de todos los grados de libertad de un nodo en la circunferencia exterior del cilindro. Se aplica presión en la pared interior del cilindro con una magnitud igual a  $145 \text{ MPa}$ , y presión externa en el exterior con valor igual a la ejercida por la atmosfera ( $1 \text{ MPa}$ ) y se procede a realizar la simulación. Una vez hecho esto, antes de pasar al Postprocesador, es necesario establecer las nuevas condiciones de frontera las cuales representarán al cilindro una vez que la presión ha sido retirada de su interior y se resolverá nuevamente la simulación como muestra la Figura 4.14.

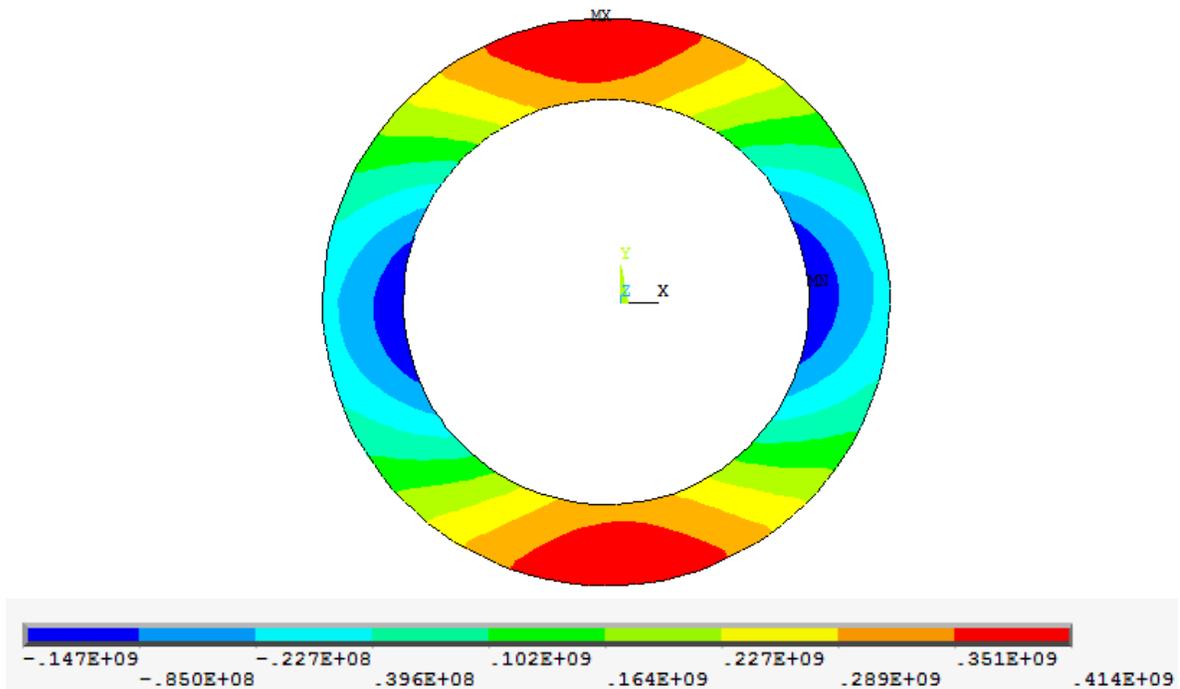


**Figura 4.14.-** (a) Modelado de cilindro mallado con aplicación de presión interna igual a  $150 \text{ MPa}$  y presión externa igual a  $0.1 \text{ MPa}$  ( $1 \text{ Atm}$ ). (b) Modelado de cilindro mallado con aplicación de presión interna igual a cero y presión externa igual a  $0.1 \text{ MPa}$  ( $1 \text{ Atm}$ ).

Una vez que el software ha resuelto los dos casos, se procede a evaluar los resultados encontrados expuestos a continuación.



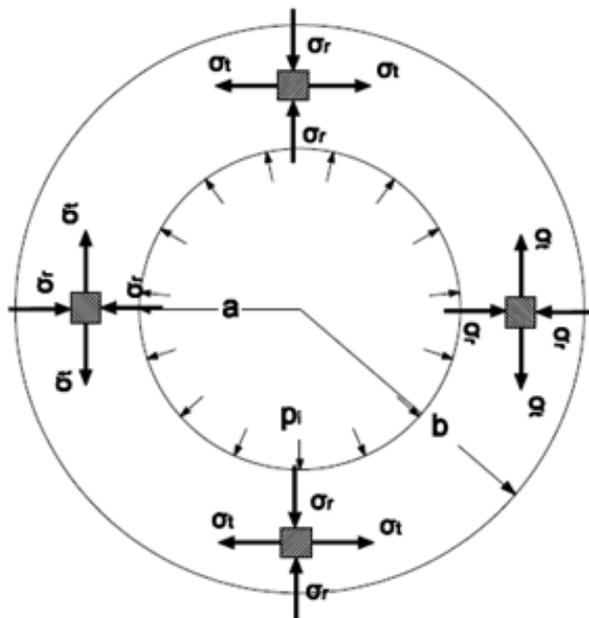
**Figura 4.15.-** Resultados obtenidos del  $\sigma_y$  por medio del software ANSYS 12.0 para una presión aplicada igual a 145 MPa.



**Figura 4.16.-** Resultados obtenidos del  $\sigma_x$  por medio del software ANSYS 12.0 para una presión aplicada igual a 145 MPa.

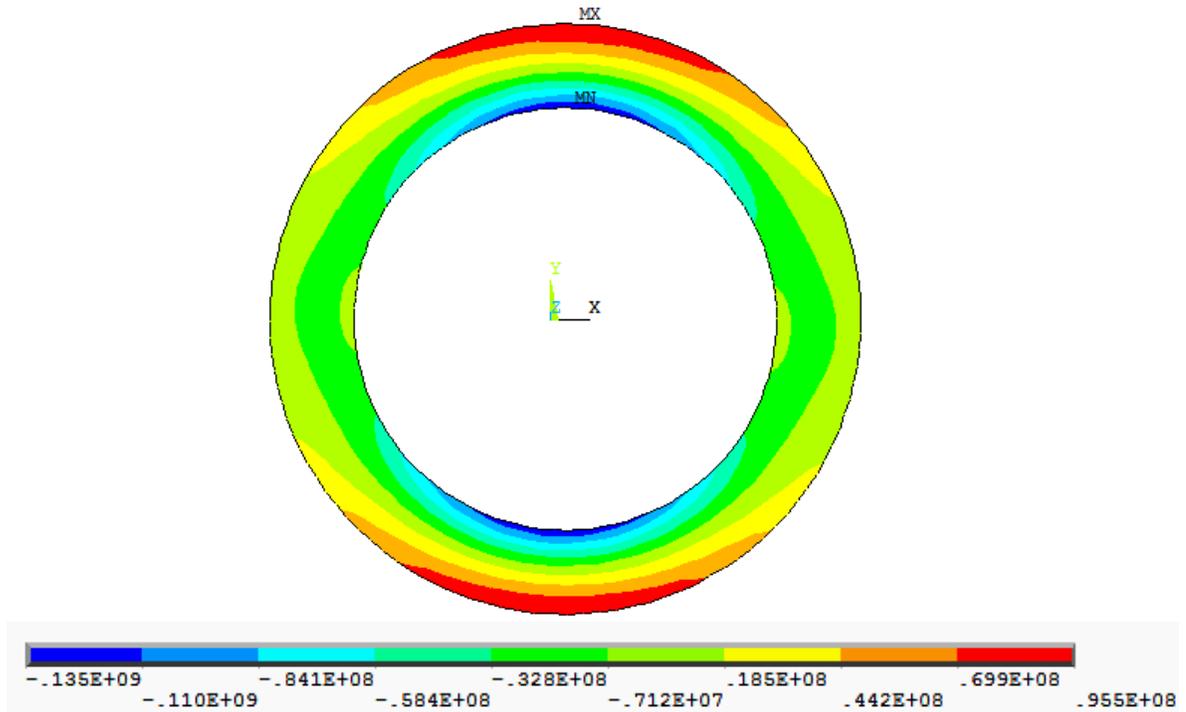
Al observar la Figura 4.15 y la Figura 4.16, en donde se representan los valores de los esfuerzos que actúan en el eje  $x$  y en el eje  $Y$  respectivamente en el cilindro sometido a una presión interna de 145 MPa se puede notar que los valores se invierten un ángulo de  $90^\circ$ .

Esto se puede representar por medio de la Figura 4.17, en donde se puede concluir que las magnitudes negativas son esfuerzos de compresión y por tanto son los esfuerzos radiales que están actuando dentro del cilindro, de la misma forma se intuye que los esfuerzos de tensión son los esfuerzos tangenciales que están actuando dentro del cilindro, y que ambos esfuerzos se encuentran actuando en todo el cilindro, con magnitudes más grandes como es de esperarse en la secciones en donde no hay esfuerzos cortantes.

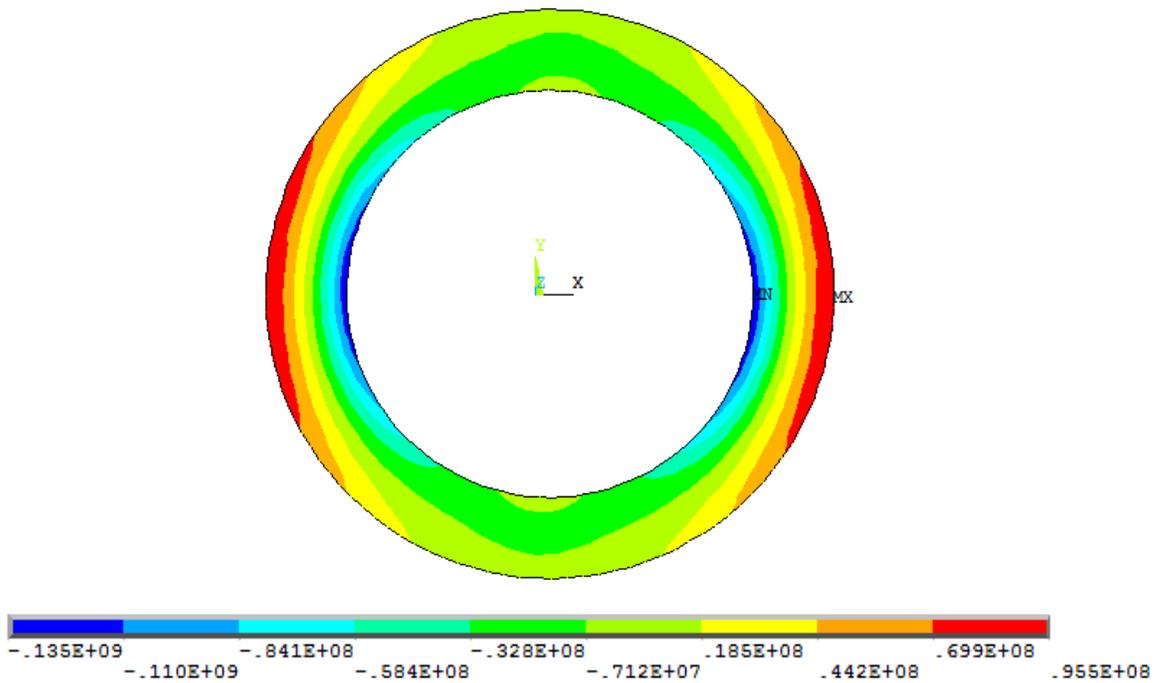


**Figura 4.17.-** Representación de los esfuerzos que actúan en un cilindro sometido a presión interna.

De la misma forma en la que son interpretados los resultados obtenidos en la fase de carga, se pueden interpretar los esfuerzos remanentes que son generados al haber producido esfuerzos que prácticamente son iguales al esfuerzo de fluencia.

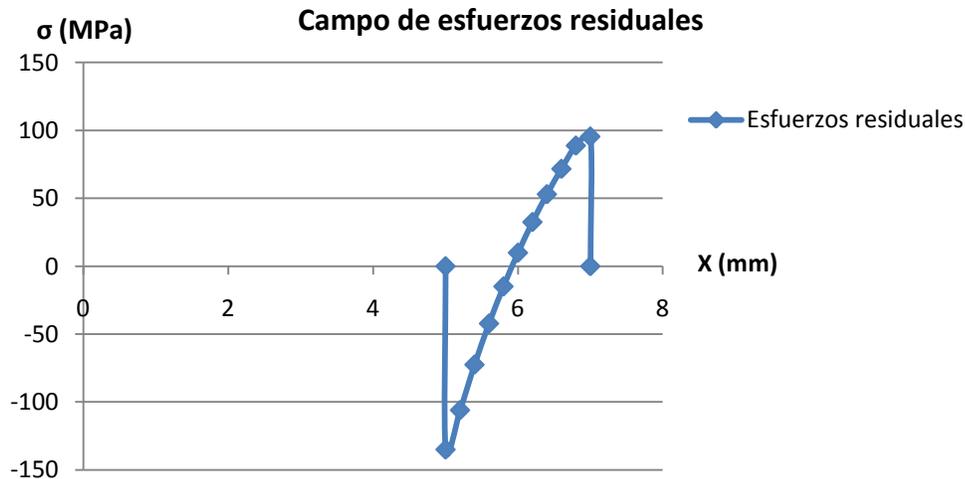


**Figura 4.18.-** Campo de esfuerzos residuales que actúan en el eje X encontrados por medio del software ANSYS 12.0.



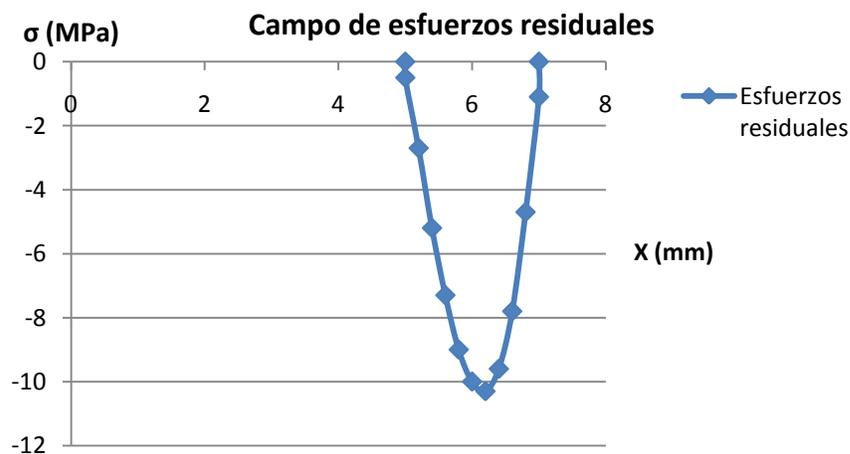
**Figura 4.19.-** Campo de esfuerzos residuales que actúan en el eje Y encontrados por medio del software ANSYS 12.0.

Ya que se han obtenido los resultados por medio del software ANSYS 12.0, deben de ser graficados para tener una mejor apreciación del campo de esfuerzos residuales que se crean dentro del cilindro.



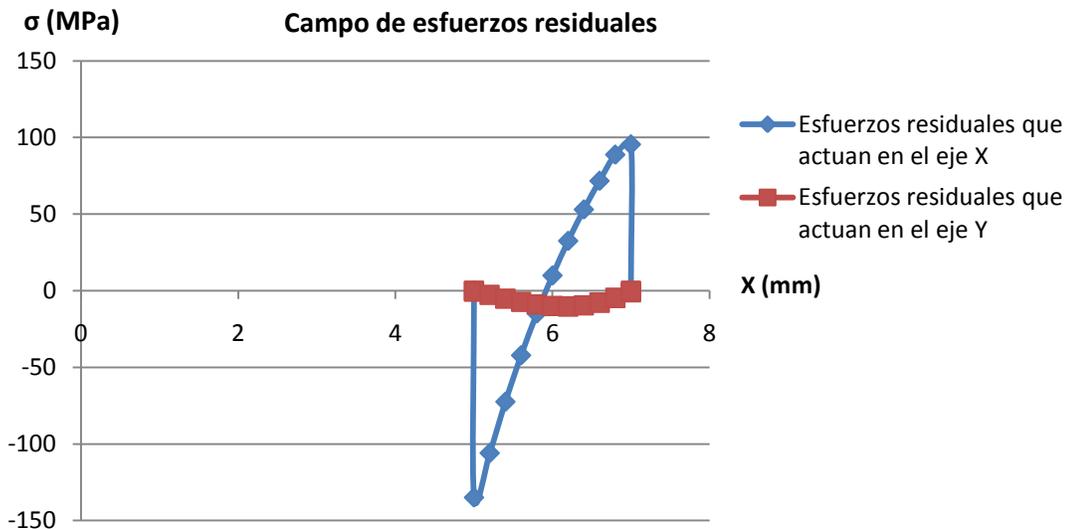
**Gráfica 4.4.-** Esfuerzos residuales que actúan en el eje X generados en un cilindro hueco sometido a presión interna.

La Gráfica 4.4, representa los esfuerzos residuales que actúan en el eje X que se generan en un cilindro que ha sido sometido a presión interna y que ha excedido su esfuerzo a la cedencia. Pero al igual que en el caso en el que el cilindro se encuentra cargado, existe un campo de esfuerzos residuales que se encuentra actuando en el eje Y, y que son representados en la Gráfica 4.5.



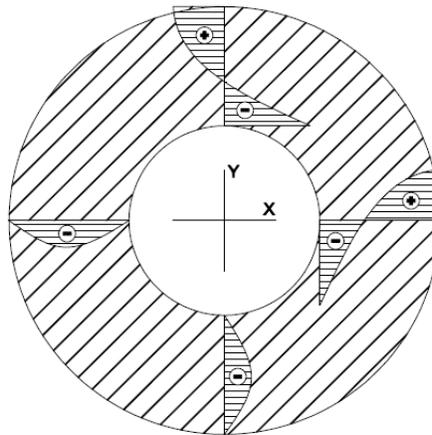
**Gráfica 4.5.-** Esfuerzos residuales que actúan en el eje Y generados en un cilindro hueco sometido a presión interna.

Superponiendo la Gráfica 4.4 y la Gráfica 4.5, se encuentra el campo de esfuerzos residuales que actúa dentro de un cilindro sometido a presión interna bajo las condiciones establecidas. La Gráfica 4.6 representa el campo de esfuerzos residuales generado en el cilindro hueco sometido a una presión con una magnitud que produce esfuerzos que sobrepasan su esfuerzo a la cedencia.



**Grafica 4.6.-** Campo de Esfuerzos residuales generado en un cilindro hueco sometido a presión interna.

Se puede notar que al igual que en el caso en el que se los esfuerzos que se generan en el cilindro mientras está cargado, los esfuerzos se invierten un ángulo de  $90^\circ$ , lo que se puede interpretar como muestra la Figura 4.21.



**Figura 4.20.-** Campo de esfuerzos residuales en cilindros sometidos a presión interna.

#### 4.4 SUMARIO

Dentro del capítulo 4, se hace una breve reseña acerca del Método de Elemento Finito, resaltando los puntos de vital importancia dentro de él. Se establece el procedimiento que se recomienda seguir para resolver un problema por medio del Método de Elemento Finito resuelto por un software basado en dicho método. Por último, una vez establecidas las bases en las que se fundamenta la tesina, es resuelta la simulación de un cilindro sometido a presión interna para evaluar el campo de esfuerzos residuales que se crea al retirar la carga de él.

---

## CONCLUSIONES

Aplicando el Método de Elemento Finito resuelto por medio del software ANSYS 12.0, de los aspectos más importantes que se han evaluado es el campo de esfuerzos residuales que se crea dentro de un cilindro sometido a presión interna en donde podemos concluir como puntos más importantes lo siguiente:

Efectivamente el campo de esfuerzos residuales encontrado dentro del cilindro cumple con las características que indican los trabajos de investigación acerca del tema. Una de estas características es el auto equilibrio al que tienden los esfuerzos residuales.

Los esfuerzos residuales se generan dentro de elementos mecánicos sometidos a esfuerzos que exceden el límite de cedencia del material del que están hechos, creando deformaciones incompatibles con la configuración original del elemento, y que son la razón de su origen.

Finalmente, los software de simulación mecánica basados en el Método de Elemento Finito, al ser utilizados correctamente, arrojan resultados confiables y útiles para la verificación de resultados o la formulación de hipótesis.

---

**RESIDUAL STRESS****Part 1-Measurement techniques*****P.J. Withers and H. K. D. H. Bhadeshia***

*Professor Withers is in the Manchester Materials Science Centre, University of Manchester and UMIST, Grosvenor Street, Manchester M1 7HS, UK ([philip.withers@man.ac.uk](mailto:philip.withers@man.ac.uk)). Professor Bhadeshia is in the Department of Materials Science and Metallurgy, University of Cambridge, Pembroke Street, Cambridge CB2 3QZ, UK ([hkdb@cus.cam.ac.uk](mailto:hkdb@cus.cam.ac.uk)). Manuscript received 3 March 2000, accepted 6 December 2000.*

© 2001 IoM Communications Ltd.

**RESIDUAL STRESS****Part 2- Nature and origins*****P.J. Withers and H. K. D. H. Bhadeshia***

*Professor Withers is in the Manchester Materials Science Centre, University of Manchester and UMIST, Grosvenor Street, Manchester M1 7HS, UK ([philip.withers@man.ac.uk](mailto:philip.withers@man.ac.uk)). Professor Bhadeshia is in the Department of Materials Science and Metallurgy, University of Cambridge, Pembroke Street, Cambridge CB2 3QZ, UK ([hkdb@cus.cam.ac.uk](mailto:hkdb@cus.cam.ac.uk)). Manuscript received 3 March 2000, accepted 6 December 2000.*

© 2001 IoM Communications Ltd.

**BAUSCHINGER EFFECT DESIGN PROCEDURES FOR AUTOFRETTAGED TUBES INCLUDING MATERIAL REMOVAL AND SACHS METHOD*****Anthony P. Parker, John H. Underwood and David P. Kendall***

*Us Army Armament Research, Development and engineering Center. Close Combat Armaments Center Benet Laboratories Watervliet, N.Y. 12189-4050.*

**NEW MEASURING METHOD OF AXISYMMETRIC THREE DIMENSIONAL RESIDUAL STRESSES USING INHERENT STRAINS AS PARAMETERS*****Yokio UEDA\*, Keijil FUKUDA\*\*, You Chul KIM\*\*\*, and Toshibisa YAMAZAKI\*\*\*\*.***

---

**A REVIEW OF RESIDUAL STRESS MEASUREMENT METHODS**

- *A Guide to Technique Selection*

**F. A. Kandil, J. D. Lord, A. T. Fry and P. V. Grant.**

*NPL Materials Centre, Queens Road Teddington, Middlesex, UK. TW11 0LW*

**Ferdinand L. Singer and Andrew Pyte., RESISTENCIA DE MATERIALES, Ed Harla. Third Edition. 1982**

**Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr. And John T. DeWolf MECÁNICA DE MATERIALES, Ed Mc Graw-Hil, Fourth Edition. 2007**

*Theory Reference, Release 10.0 Documentation for ANSYS, Element Reference / Part I. Element Library / PLANE183.*

**EFEECTO DE LOS ESFUERZOS RESIDUALES EN ACERO 1045 Y SU EVALUACIÓN APLICANDO METODOS ANALÍTICOS Y COMPUTACIONALES.**

**Juan Manuel Sandoval Pineda<sup>1</sup>, Jesús García Lira<sup>1</sup>, y Guillermo Urriolagoitia Sosa<sup>1</sup>, Luis Héctor Hernández Gómez<sup>2</sup>.**

<sup>1</sup>*Instituto Politécnico Nacional, Sección de Estudios de posgrado e Investigación (SEPI), Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME) Unidad Profesional AZCAPOTZALCO, Av. de las Granjas No 682 Col. Sta. Catarina Azcapotzalco, C.P. 02550, México.*