



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**PROGRAMA DE MAESTRIA EN INGENIERIA DE
MANUFACTURA**

**SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
ESIME-AZCAPOTZALCO**

**EFFECTO DE LA CONDUCTIVIDAD TÉRMICA FINITA EN LAS PAREDES
DE UN MICROCANAL SOBRE LA CONVECCION DE CALOR EN UN
FLUJO GASEOSO EN REGIMEN DE DESLIZAMIENTO: PROBLEMA
CONJUGADO**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA DE MANUFACTURA**

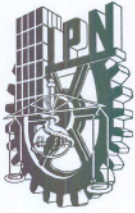
P R E S E N T A:

ING. CÉSAR OCTAVIO MACÍAS GONZÁLEZ



**DIRECTORES DE TESIS
DR. OSCAR ELADIO BAUTISTA GODÍNEZ
M. EN C. JUAN PABLO ESCANDÓN COLIN**

MÉXICO D.F. FEBRERO 2011



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 21 del mes de Febrero del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de ESIME UA para examinar la tesis titulada:

EFFECTO DE LA CONDUCTIVIDAD TÉRMICA FINITA EN LAS PAREDES DE UN MICROCANAL SOBRE LA CONVECCION DE CALOR EN UN FLUJO GASEOSO EN REGIMEN DE DESLIZAMIENTO: PROBLEMA CONJUGADO

Presentada por el alumno:

Macías

Apellido paterno

González

Apellido materno

César Octavio

Nombre(s)

Con registro:

B	0	8	1	7	4	0
---	---	---	---	---	---	---

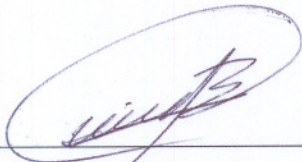
aspirante de:

Maestro en Ingeniería de Manufactura

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis


Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez


M. en C. Juan Pablo Escandón Colín



Dr. Pedro Alejandro Tamayo Meza


M. en C. José Carlos Arcos Hernández


Dr. Manuel Faraón Carbajal Romero


Dr. Salvador Antonio Rodríguez Paredes

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES


Dr. Jaime Pacheco Martínez



94 5



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de **México, D.F.** el día **21** del mes **Febrero** del año **2011**, el que suscribe **Ing. César Octavio Macías González** alumno del Programa **Maestría en Ingeniería de Manufactura** con número de registro **B081740**, adscrito a **SEPI-ESIME-UA**, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del **Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez** y el **M. en C. Juan Pablo Escandón Colin** y cede los derechos del trabajo intitulado "**Efecto de la conductividad térmica finita en las paredes de un microcanal sobre la convección de calor en un flujo gaseoso en régimen de deslizamiento: problema conjugado**", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección cesarmagoc_00@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.



Ing. César Octavio Macías González

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, Teresa González Ruiz y Francisco Javier Macías Munguía que han sido las personas más maravillosas de esta vida y que siempre han estado en esos momentos importantes de mi vida, tal vez alejados por una distancia terrenal pero sé, que siempre presente en su corazón y mente, LOS AMO MAS QUE A NADIE.

A mis queridos hermanos, Lizeth, Guillermo y Francisco que tan solo recordar su sonrisa y aquellos momentos de felicidad que disfrutamos juntos me dan la fortaleza para seguir adelante.

A la invaluable criatura con la que Dios nos ha bendecido en nuestro hogar a ti Emiliano.

A usted señora Yolanda Rodríguez y familia.

A todos ustedes que creyeron en mí.

Al Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez, por sus enseñanzas, disposición y gran apoyo para llevar a cabo la realización del presente trabajo desde mis estudios de especialidad

Al M. en C. Juan Pablo Escandón Colin por su tiempo y amistad para la culminación de este trabajo

Al CONACYT, por su apoyo sin el cual no se hubiera realizado este trabajo

Al Instituto Politécnico Nacional por la beca PIFI que se me otorgo durante mis estudios.

Este trabajo es parte de los proyectos:

Análisis de la Transferencia de Calor con Cambio de Fase en Sistemas Microelectrónicos Núm. 58817 SEP CONACYT, y Estudio de la Transferencia de Calor y Flujo de Fluidos para Gases y Líquidos en Escalas Micrométricas “Microfluidica” 20080069 SIP IPN.

Índice

Resumen	iv
Abstract	vi
Nomenclatura	viii
I Introducción	1
1 Generalidades	2
1.1.- Modelado del campo de flujo	5
1.1.1. Número de Knudsen	6
1.1.2. Transición a flujo laminar en ductos	9
1.1.3. Compresibilidad	10
1.1.4. Número de Brinkman	11
2 Antecedentes	13
II Modelo matemático	16
3 Ecuaciones de gobierno	18
3.1.- Análisis de órdenes de magnitud para el problema conjugado	19
3.2.- Ecuación de continuidad: fluido incompresible	19
3.3.- Ecuación de cantidad de movimiento: Navier - Stokes	21
3.3.1.- Condiciones en la frontera	24
3.4.- Ecuación para la Conservación de la energía en el fluido	26
3.4.1.- Condiciones en la frontera	27
3.5.- Ecuación de Laplace	29
3.5.1.- Condiciones en la frontera	29
3.6.- Ecuaciones adimensionales	30

3.6.1.-	Ecuación para la cantidad de movimiento	31
3.6.2.-	Ecuación de la energía en el fluido	31
3.6.3.-	Ecuación de la energía en el sólido adimensional	33
4	Metodología de solución	34
4.1.-	Planteamiento matemático	34
4.2.-	Perfil de velocidad del fluido	34
4.3.-	Perfil de temperatura en el fluido	37
4.4.-	Metodología de solución al problema conjugado de Graetz	36
4.5.-	Solución asintótica para $\varepsilon^2/\alpha \sim 1$ con $\alpha \ll 1$	37
4.6.-	Coefficiente de transferencia de calor: número de Nusselt	41
III	Resultados y conclusiones	45
5	Resultados	45
5.1.-	Perfil de velocidad del fluido \bar{u}	45
5.2.-	Perfil de temperatura del fluido, θ_0	47
5.3.-	Perfil de temperatura del sólido, θ_{w0}	49
5.4.-	Comparación entre perfiles de temperatura del sólido y fluido θ_{w0}, θ_0	53
5.5.-	Número de Nusselt, Nu	54
5.6.-	Comparación de resultados	56
6	Conclusiones y Trabajo a Futuro	59
	Referencias	62

Resumen

En el presente trabajo de tesis se estudia la mecánica de transferencia de calor a escalas micrométricas presente en un microcanal rectangular de placas planas y paralelas donde se presenta un perfil de Poiseuille en régimen de deslizamiento. Para este modelo la superficie externa de las paredes del microcanal se encuentran sometidas a flujo de calor constante, utilizando como medio de enfriamiento un flujo gas en fase simple, problema conjugado de Graetz. El planteamiento de este modelo da lugar a dos regiones: cuando se estudia el fenómeno de transferencia de calor por conducción en la región de las paredes del microcanal y el estudio del fenómeno de transferencia de calor por convección en la región interna del sistema, que se origina como consecuencia de la interacción de un flujo de gas con las paredes.

En el planteamiento del modelo matemático a escalas micrométricas se presenta un perfil de flujo en régimen transitorio, es decir; la transición de un medio continuo a uno en régimen molecular y que es determinado por el número de Knudsen, lo que origina que se presente en la región de interface sólido – fluido un flujo deslizante y como consecuencia el salto de temperatura en esta zona para lo cual las condiciones de frontera a escalas macroscópicas dejan de ser válidas y se requiere su reformulación, que para este caso se utilizan las condiciones en la frontera de primer orden propuestas por Maxwell y Smoluchowski para la velocidad de deslizamiento y el salto de temperatura respectivamente.

En la primera parte del presente trabajo se hace una introducción al tema, haciendo una revisión de las múltiples aplicaciones que presentan los microcanales y como se puede modelar un sistema a escalas micrométricas considerando parámetros adimensionales que

se encuentran involucrados en las ecuaciones gobernantes en el flujo de fluidos y la transferencia de calor.

En la segunda parte se presenta el desarrollo del modelo matemático que describe el fenómeno de transferencia de calor a escalas micrométricas. En primer lugar se realiza un análisis de orden de magnitud, después se presentan las ecuaciones de gobierno en la región del fluido y del sólido para finalmente concluir con las ecuaciones adimensionales para el problema conjugado utilizando métodos de perturbación regular para obtener su solución.

Abstract

In this thesis we study the mechanics of heat transfer to micrometer scales present in a rectangular microchannel flat parallel plate which presents a profile of Poiseuille in slip regime. For this model the outer surface of the microchannel walls are under constant heat flux, using as cooling medium gas flow in single phase, conjugated Graetz problem. The approach of this model results in two regions: when studying the phenomenon of heat transfer by conduction in the region of the walls of the microchannel and the study of the phenomenon of heat transfer by convection in the inner region of the system, which is originated by the interaction of a gas flow with the walls.

In the mathematical model approach to micrometer scales presents a profile of transient flow, ie, the transition from one continuum to molecular regime which is determined by the Knudsen number, which causes to be presented at interface region of solid - fluid sliding flow and subsequently the temperature jump in this area for which the boundary conditions to macroscopic scales are no longer valid and require reformulation, which in this case are used in conditions first-order boundary proposed by Maxwell and Smoluchowski for speed slide and the temperature jump, respectively.

In the first part of this paper is an introduction to the topic, reviewing the many applications that have the microchannels and can be modeled as a system to micrometer scales considering dimensionless parameters that are involved in the governing equations in the flow fluids and heat transfer.

In the second part presents the development of mathematical model describing the phenomenon of heat transfer to micrometer scales. First, an analysis of order of magnitude,

then the equations of government in the region of the fluid and solid concluding with dimensionless equations for the conjugate problem using regular perturbation methods for their solution.

Nomenclatura

Br	Número de Brinkman $\frac{\mu \bar{u}^2}{q_0'' L_c}$
C_p	Calor específico a presión constante [$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$]
L_c	Longitud característica H [m]
θ_0	Temperatura del fluido adimensional del orden cero
θ_{w0}	Temperatura de la placa adimensional del orden cero
$\bar{\theta}_{w0}$	Temperatura media de la placa adimensional del orden cero
u	Velocidad de fluido [ms^{-1}]
T_f	Temperatura del fluido [K]
H	Altura del microcanal [m]
k_f	Conductividad térmica del fluido [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$]
k_w	Conductividad térmica de la pared [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$]
a_0	Velocidad del sonido en el medio [ms^{-1}]
Ma	Número de Mach $\frac{\bar{u}}{a_0}$
Kn	Número de Knudsen $\frac{\lambda}{L_c}$
Nu	Número de Nusselt $\frac{q_s'' L_c}{k_f(T_w - T_m)}$
Pe	Número de Peclet $Pr \cdot Re$
Pr	Número de Prandtl $\frac{C_p \mu}{k_f}$
q_0''	Flujo de calor en la superficie del microcanal $k_f \frac{\partial T}{\partial y} \Big _{y=\frac{H}{2}}$ [Wm^{-2}]
u_w	Velocidad de la pared [ms^{-1}]
T_w	Temperatura de la pared [K]
Re	Número de Reynolds $\frac{\rho U_c L_c}{\mu}$

u_s	Velocidad de deslizamiento $u _{y=H}$ [ms^{-1}]
\bar{u}	Velocidad del fluido adimensional u_c/u_m
x, y	Coordenadas cartesianas [m]
η	Coordenada cartesiana y/H
χ	Coordenada cartesiana x/L
z	Coordenada cartesiana en el sólido $y - H/h$
R	Constante del gas [$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$]

Símbolos Griegos

α_T	Difusividad térmica $\frac{k_f}{\rho c_p}$ [m^2s^{-1}]
β_{T1}	Coeficiente de acomodación de energía de primer orden para el salto de temperatura $\left(\left(\frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\right)\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)\right)\left(\frac{1}{Pr}\right)$
β_{V1}	Coeficiente de acomodación de momentum tangencial de primer orden para la velocidad de deslizamiento $\left(\frac{2-\sigma_V}{\sigma_V}\right)$
ε	Parámetro de esbeltez para el sólido $\frac{h}{L}$
β	Parámetro de esbeltez para el fluido $\frac{H}{L}$
γ	Relación de calores específicos
λ	Trayectoria media libre de las moléculas $\frac{\mu}{\rho\sqrt{2RT_w/\pi}}$ [m]
μ	Viscosidad [$\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$]
ρ	Densidad [kgm^{-3}]
σ_T	Coeficiente de acomodación de energía
σ_V	Coeficiente de acomodación de momentum tangencial
α_c	Coeficiente de compresibilidad isotérmico
β_c	Coeficiente de expansión térmica
α	Parámetro conjugado

Parte I

Introducción

Capítulo 1

Generalidades

Con el advenimiento de la miniaturización en dispositivos electrónicos, especialmente en los circuitos integrados, donde se alcanzan flujos de calor mayores a 100 W/cm^2 , ha sido necesario comprender los fenómenos de transporte asociados en este tipo de sistemas. Hasta la fecha existe una gran cantidad de investigaciones realizadas en este campo, específicamente en aquellos relacionados con el proceso de transferencia de calor por convección en microcanales como uno de los métodos de enfriamiento más en la actualidad. Entre los fluidos de enfriamiento que se utilizan se encuentran muchos en fase gaseosa (aire, helio, hidrógeno, entre otros). En este contexto es necesario modelar el proceso de transferencia de calor con las particularidades que esto implica, por ejemplo se tienen condiciones de no equilibrio termodinámico (salto de temperatura entre la pared sólida de los microcanales y el fluido que circula por ellos), así como la existencia de velocidad de deslizamiento en la pared, a diferencia de las condiciones de frontera utilizadas en escalas macroscópicas. Por otra parte, los efectos de la conducción de calor en las paredes del microcanal, fenómeno que a escalas macroscópicas es despreciable sin embargo a escalas microscópicas se debe considerar en el análisis, con la finalidad de estudiar el fenómeno de transferencia de calor por convección. Es necesario resaltar que el efecto de la conductividad térmica en las paredes del microcanal no se ha considerado en la mayoría de los trabajos de investigación realizados sobre el tema. Algunos de los ejemplos que se han desarrollado para este tipo de mecanismos los constituyen micro-reactores, micro-válvulas, micro-motores, micro-biochips y micro-celdas de combustible encontrando

sus aplicaciones en diferentes áreas de la industria como lo son la microelectrónica, la biotecnología, la aeroespacial, en Sistemas Microelectromecánicos (MEMS – Microelectromechanical systems por sus siglas en inglés) y en investigaciones científicas. El desarrollo de la tecnología de los MEMS durante la década de los 70's fue el punto de partida para el estudio de flujo de fluidos y de transferencia de calor en microcanales. La necesidad de diseñar métodos eficaces de enfriamiento atrajo la atención de la comunidad científica, con la finalidad de realizar investigaciones en las ramas de la ingeniería mecánica, específicamente en convección de calor forzada al saber que el fenómeno de transferencia de calor por convección natural no era lo suficientemente eficaz para disipar los elevados flujos de calor en estos sistemas [1,2,3]. Al hablar de Sistemas Microelectromecánicos nos referimos a dispositivos que poseen longitudes características menores a 1 cm, pero mayores a 1 mm, que combinan componentes eléctricos y mecánicos, actualmente la manufactura de los MEMS incluye micro maquinados en superficie de silicio, litografía, electrodeposición, moldeo de plástico, maquinados por electro descarga (EDM – electrical discharge machining por sus siglas en inglés), entre otros.

El flujo de fluidos por microcanales como se ha mencionado, es el centro de atención de muchos de los sistemas naturales y artificiales. La transferencia de calor y de masa se presenta a través de las paredes de canales en sistemas biológicos, tales como venas, pulmones, riñones, intestinos, vasos sanguíneos, etc., como también en sistemas artificiales, tales como disipadores de calor, reactores nucleares, unidades de desalinización, unidades de filtración de aire, etc. En general los procesos de transporte ocurren a través de las paredes de los canales, mientras que el flujo de fluidos toma lugar a través del área de sección transversal del canal.

Debido a la tendencia actual de la miniaturización de estos sistemas algunas de las teorías convencionales para la mayor parte de los fluidos como lo son las ecuaciones de Navier – Stokes con condiciones de frontera sin deslizamiento a escalas macroscópicas dejan de ser válidas, para lo cual es necesario su reformulación en escalas microscópicas incluyendo las

condiciones de frontera de primer orden en régimen de deslizamiento propuestas por Maxwell y Smoluchowski [2,4].

Actualmente la operación de los MEMS tiene diferentes aplicaciones en la rama de la ingeniería como los son en ductos, boquillas, válvulas, anillos, turbo maquinas, etc., no siempre puede ser predecible por los modelos convencionales para flujos, tales como las ecuaciones de Navier – Stokes donde no existe deslizamiento en las condiciones de frontera entre la interface del sólido y el fluido, principal aplicación para el flujo de fluidos en sistemas macro. Una gran cantidad de preguntas surgen cuando los resultados de los experimentos llevados a cabo con micro dispositivos no son resueltos con el modelado de flujo tradicional a escalas macroscópicas. Por ejemplo se ha observado que el gradiente de presión a lo largo de microductos no es constante y la medición del flujo de fluidos ha sido mayor al predicho por el modelado de flujo en medios continuos [3].

En las últimas décadas los investigadores se han dedicado a desarrollar modelos matemáticos que les permitan modelar el flujo de fluidos a escalas micrométricas de forma más exacta, en la década de los 60's el objetivo era construir sistemas MEMS que fueran lo funcionalmente posible, como sucedía con los micro sensores que mostraban lecturas sin embargo los investigadores no interpretaban exactamente de lo que se trataba, los microactuadores que presentaban movimiento pero los modelos convencionales no predecían con exactitud su comportamiento. En la Figura 1.1, se muestra el modelado de campos de flujos, para los cuales se trabaja principalmente en dos regiones como los son un medio molecular o continuo [2].

En las siguientes secciones se estudia el modelado de los campos de flujo a escalas micrométricas para un flujo de Poiseuille en régimen de deslizamiento, los parámetros asociados al problema y la solución al problema conjugado de Graetz.

1.1.- Modelado del campo de flujo

En la literatura, existen básicamente dos maneras de modelar el campo de flujo de fluidos:

- a) El fluido se puede considerar como un grupo de moléculas individuales presente a escalas micrométricas.
- b) Como un medio continuo, es decir, un conjunto moléculas infinitamente divisible donde se admite que no existen discontinuidades entre las partículas presentes en el campo del fluido.

El criterio para validar si nuestro modelo trabajará en un medio continuo o como un grupo de moléculas individuales (modelo molecular) se encuentra determinado por el número de Knudsen, Kn , que determina el grado de rarefacción de un medio, es decir si; si la trayectoria media libre de las moléculas antes de colisionar λ es muy pequeña comparado con la longitud característica L_c , del microcanal definida como H , se aleja del régimen de transición molecular y se acerca al equilibrio termodinámico o medio continuo con condiciones de frontera sin deslizamiento, caso contrario ocurre cuando $Kn > 0.001$ y el flujo se comienza a comportar como un grupo de moléculas libres y las condiciones de frontera sin deslizamiento dejan de ser válidas [2,5].

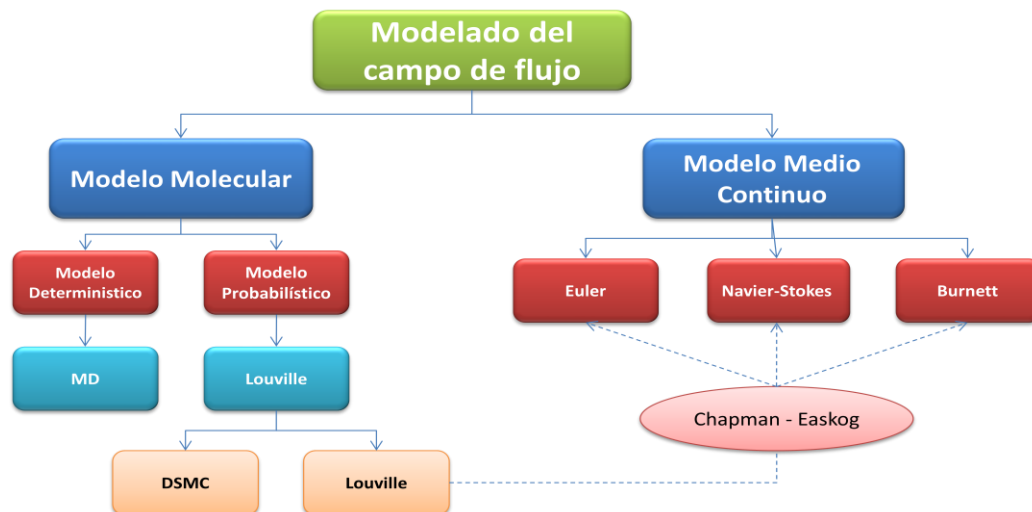


Figura 1.1 Modelado del flujo de fluidos en medios molecular y continuo.

Los dos modelos matemáticos por lo que se puede comenzar a analizar el fluido se muestran en la Figura 1.1.

1.1.1. Número de Knudsen

Al inicio del proyecto de investigación se plantearon las condiciones bajo las cuales se realizaría el estudio del problema conjugado de Graetz, como lo son, sin presencia de cambio de fase y con un flujo de enfriamiento en fase gaseosa (aire). Para un gas ideal, la trayectoria media libre está relacionada directamente con la temperatura del fluido, T_f , y la presión del gas, p , como se presenta a continuación

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n \sigma^2} = \frac{kT_f}{\sqrt{2}\pi p \sigma^2} \quad (1.1)$$

donde n es el número de la densidad (número de moléculas por unidad de volumen), σ es el diámetro molecular, y k es la constante de Boltzmann.

De esta manera el número de Knudsen Kn , se define como el cociente entre la trayectoria media libre de las moléculas antes de colisionar y la longitud característica L_c

$$Kn = \frac{\lambda}{L_c} \quad (1.2)$$

El enfoque que se presenta para un medio continuo es válido para un número de Knudsen $Kn < 0.001$, no obstante se deben modificar las condiciones de frontera, para valores de $Kn > 0.001$, las consideraciones para el medio continuo dejan de ser válidas y se trabaja en un régimen de transición molecular con condiciones de frontera de primer orden para un flujo de Poiseuille en régimen de deslizamiento [4].

La Tabla 1.1 presenta el rango de valores para el número de Knudsen, y el grado de validación para el modelo continuo y para un régimen de flujo en particular.

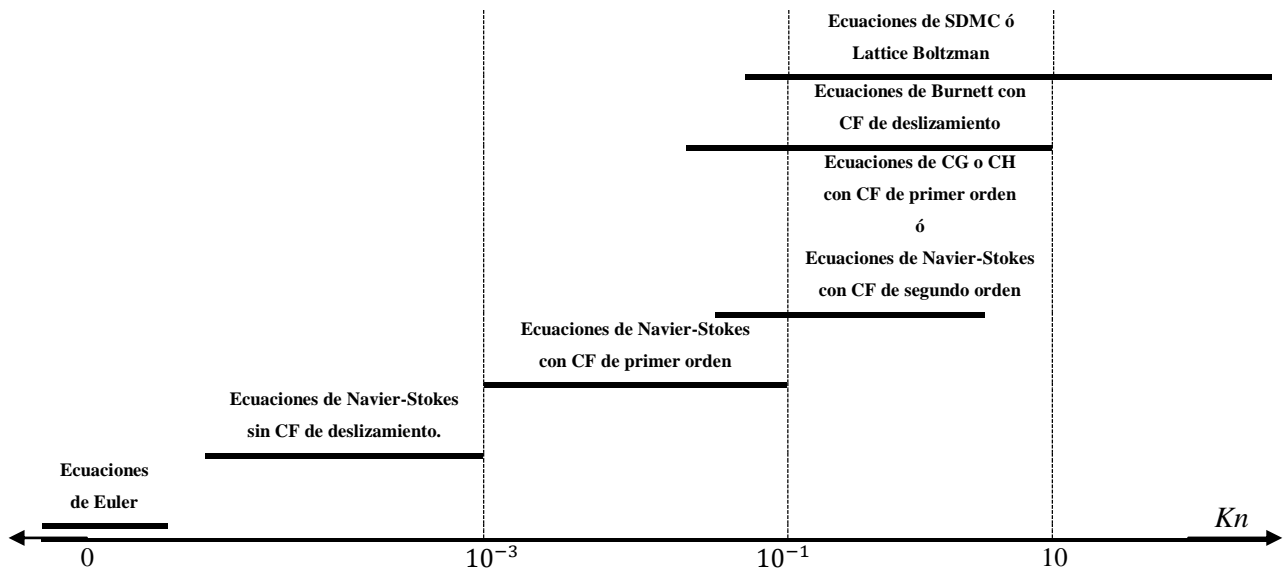
Tabla 1.1 Clasificación para gases.

Rango de aplicación del número de Knudsen	Clasificación	Régimen de flujo basado en el número de Kn
$Kn \rightarrow 0.0$ ($Re \rightarrow \infty$)	Medio Continuo	Ligeramente enrarecido Ecuaciones de Euler.
$0.001 < Kn$	Medio Continuo.	Ligeramente enrarecido Ecuaciones de Navier - Stokes con condiciones de frontera sin deslizamiento.
$0.001 \leq Kn \leq 0.1$	Medio Continuo, flujo deslizante.	Moderadamente enrarecido Ecuaciones de Navier - Stokes con condiciones de frontera con deslizamiento.
$0.1 < Kn < 10$	Transición de medio continuo a flujo de moléculas libres.	Flujo de moléculas libres
$10 < Kn < \infty$	Flujo de moléculas libres.	Altamente enrarecido

Si no hay velocidad relativa entre el fluido y la superficie de la pared, el régimen dentro del cual se encuentra trabajando el fluido es no deslizante. De igual manera si no hay discontinuidad en la temperatura del fluido y de la superficie de la placa (el fluido en la interface solido – fluido, se encuentra a la misma temperatura que en el sólido, T_w , es decir; $T_w = T_f$), no existe salto de temperatura.

Los modelos matemáticos con sus respectivas condiciones de frontera que suelen describir el flujo de gas en los microcanales dependen del grado de rarefacción del gas utilizado para el enfriamiento de los microcanales, dichos modelos se muestran en la Figura 1.2, con sus rangos de aplicación dependiendo el valor que tome Kn .

Estas condiciones de modelado son válidas para distintos tipos de gas como flujo de enfriamiento en los sistemas MEMS los cuales pueden ser (aire, helio, hidrogeno, nitrógeno, oxígeno, etc.) [1,3,5].



CF: Condiciones de Frontera, CG: Ecuaciones Cuasi-Gasodinamicas, CH: Ecuaciones Cuasi-Hidrodinamicas, SDMC: Simulación Directa de Montecarlo

Figura 1.2 Regímenes para el flujo de gas y dominio de los modelos de acuerdo al número de Knudsen.

Existen dos parámetros adimensionales en la mecánica de fluidos mediante los cuales se puede expresar el número de Knudsen. El número de Reynolds que se define como el cociente entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas

$$Re = \frac{uL_c}{\nu} \quad (1.3)$$

donde u es la velocidad del fluido, y ν es la viscosidad cinemática del fluido. El segundo parámetro adimensional es el número de Mach el cual se define como el cociente entre la velocidad del flujo y la velocidad del sonido en el medio (fluido) a_o ,

$$Ma = \frac{u}{a_o} \quad (1.4)$$

de esta forma el número de Mach se define como una medida dinámica de la compresibilidad del fluido y es considerado como el cociente entre las fuerzas inerciales y las elásticas. De la teoría cinética para gases se desprende que la trayectoria media libre de las moléculas está relacionada con la viscosidad como se presenta a continuación

$$v = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{2} \lambda u_m \quad (1.5)$$

donde μ y u_m son la viscosidad dinámica la velocidad media de fluido respectivamente donde u_m es mayor que la velocidad del sonido en el medio,

$$u_m = \sqrt{\frac{8}{\pi\gamma}} a_o \quad (1.6)$$

donde γ es el coeficiente entre calores específicos. Combinando las ecuaciones (1.2) – (1.6) se llega a la relación planteada

$$Kn = \sqrt{\frac{\pi\gamma}{2}} \frac{Ma}{Re} \quad (1.7)$$

donde se obtiene el número de Knudsen como función del número de Mach y de Reynolds. Generalmente los gases enrarecidos los podemos encontrar en flujos a través de geometrías pequeñas tales como lo son los dispositivos MEMS y en aplicaciones a bajas presiones por ejemplo en vuelos a elevadas alturas. De esta manera se recuerda que Knudsen dio inicio con los experimentos que involucraban gases enrarecidos en el año de 1909 [2,7].

1.1.2. Transición a flujo laminar en ductos

Una clasificación para el flujo de fluidos y la transferencia de calor se basa, en ciertas propiedades que presenta el flujo. Un flujo turbulento se caracteriza por fluctuaciones aleatorias de propiedades tales como la velocidad, temperatura, densidad y presión. Mientras que para un flujo laminar no existen tales variaciones. El número de Reynolds suele ser un criterio para determinar cuando ocurre la transición de un flujo de régimen

turbulento a laminar. En macrocanales la transición se determina por el número de Reynolds que depende de la geometría de sección transversal y de la rugosidad de la superficie. Para el flujo a través de ductos el número de Reynolds se define como la correlación del comportamiento de la viscosidad de todos los fluidos newtonianos como:

$$Re_t = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{u D}{\nu} \approx 2300 \quad (1.8)$$

donde, D es el diámetro del canal, y ν es la viscosidad cinemática. Sin embargo para microcanales la transición para el número de Reynolds se encuentra en un rango de 300 a 16,000. Actualmente la transición para el número de Reynolds debido a los efectos causados por la geometría de los microcanales y su respectiva rugosidad no ha sido de un completo dominio de estudio [1].

1.1.3. Compresibilidad

A continuación se muestra un enfoque sobre el nivel de compresibilidad de un fluido el cual es determinado por el número de Mach parámetro adimensional que afecta al número de Kn , del que se habló en secciones anteriores. Considerar un flujo continuo, como compresible o incompresible parece ser una tarea sencilla, sin embargo puede resultar más complejo de lo esperado. El nivel de compresibilidad esta expresado en términos del número de Mach, parámetro dominante en el análisis de flujos. Si el número de Mach es < 0.3 , el flujo de un fluido compresible como el aire puede ser tratado como incompresible. La compresibilidad se presenta como resultado del comportamiento no lineal en la caída de la presión del fluido a lo largo del microcanal [2]. De esta manera se entiende que un fluido incompresible es aquel en el que los cambios en su densidad como función del tiempo y el espacio no son tomados en cuenta. Para flujo interno (ductos), lo más importante es identificar si se trata de un flujo subsónico $Ma < 1$, o supersónico $Ma > 1$. Comúnmente, si $Ma > 0.3$, los efectos de compresibilidad deben de tomarse en cuenta.

Se ha visto que los gases presentan un comportamiento de fluido incompresible cuando se mueven a velocidades moderadas. Es así que en la actualidad se utilizan los términos, flujo compresible para identificar el movimiento de un fluido a velocidades altas y flujo incompresible para el movimiento de un fluido a velocidades bajas tratándose de un líquido o un gas [6, 7].

Hasta ahora, en lo que se ha avanzado en este capítulo 1, se ha observado que las dimensiones de los microcanales tienen efectos significativos sobre el flujo de fluidos y la transferencia de calor, de esta forma resulta importante clasificar los canales de acuerdo a sus dimensiones geométricas.

Tabla 2 Clasificaciones de canales de acuerdo a las dimensiones en su geometría.

Descripción	Medidas
Canales convencionales	$> 3mm$
Mini-canales	$3 mm \geq D > 200 \mu m$
Micro-canales	$200 \mu m \geq D > 10 \mu m$
Transición a Micro-canales	$10 \mu m \geq D > 1 \mu m$
Transición a Nano-canales	$1 \mu m \geq D > 0.1 \mu m$
Nano-canales	$0.1 \mu m \geq D$

D: Diámetro del canal

Cuando un microcanal no posee sección transversal circular, es recomendable que se opte por la dimensión más pequeña; por ejemplo, para el caso en el que se trabaja con microcanales rectangulares, [7].

1.1.4. Numero de Brinkman

El número de Brinkman, es un parámetro adimensional que representa los efectos de la disipación viscosa en el fluido. Su efecto no es considerado cuando se trabaja con viscosidades y flujo de fluidos con velocidades bajas a través de macrocanales con longitudes pequeñas. Sin embargo cuando el cociente ($L/2H \sim 100$), donde $2H$ es el diámetro del microcanal, el número de Brinkman podría ser importante para el flujo en

microcanales rectangulares con longitudes considerables, el cual predice un comportamiento inusual de la transferencia de calor en microcanales combinado con los efectos de rarefacción. Matemáticamente el número de Brinkman Br , se definido como,

$$Br = \frac{\mu u_m^2}{q_o'' H} = \frac{H \mu u_m^2}{k_f \Delta T} = \frac{H \mu u_m^2}{k_f (T_w - T_f)} \quad (1.18)$$

donde k_f es la conductividad térmica del fluido, y ΔT es la diferencia de temperaturas entre la superficie de la placa T_w y el fluido T_f . Por lo tanto Br es un parámetro que determinar si el flujo de calor ocurre de las paredes del microcanal hacia el fluido o viceversa. Para flujo en microcanales Br se considera importante siempre y cuando la longitud recorrida sea similar a la longitud del microcanal a escalas micrométricas [3,8].

Capítulo 2

Antecedentes

En las últimas tres décadas se ha despertado un gran interés por el estudio sobre el flujo de gas y la transferencia de calor en microcanales por sus importantes aplicaciones dentro del campo de la ingeniería. En la literatura existe gran número de publicaciones en fase simple y con cambio de fase en microcanales. En este capítulo solo se estudia el fenómeno de transferencia de calor por convección forzada en un microcanal con fluido en fase simple en microcanales incluyendo análisis analítico.

El problema de Graetz es una simplificación del problema de transferencia de calor por convección forzada en un tubo circular en régimen laminar [1,3] el cual fue resuelto analíticamente por Graetz, asumiendo que se trataba de un flujo hidrodinámicamente desarrollado en régimen laminar ignorando la conductividad térmica axial en el fluido y los efectos de la disipación viscosa.

En la mayoría de los análisis del problema extendido de Graetz, los efectos de la conductividad térmica axial y la disipación viscosa no se incluyen simultáneamente en la formulación del problema.

Jiji [1] realizó estudios en microcanales rectangulares donde considero un flujo de Poiseuille térmica e hidrodinámicamente desarrollado en régimen de deslizamiento con condiciones de frontera de primer orden para el la velocidad de deslizamiento y el salto de

temperatura, determinando que los efectos de rarefacción y de compresibilidad reducen el coeficiente de transferencia de calor o número de Nusselt.

Ho-Eyoul et al., [3] estudiaron el problema extendido de Graetz en un microcanal rectangular incluyendo los efectos de rarefacción, conducción térmica axial en el fluido y la disipación viscosa en el mismo planteamiento matemático. Asumiendo un flujo de Poiseuille hidrodinámicamente desarrollado, con condiciones de frontera de temperatura uniforme y flujo de calor constante en la superficie externa del microcanal, incluyendo condiciones de frontera de primer orden para la velocidad de deslizamiento y salto de temperatura.

Rij et al. [4], realizaron investigaciones sobre el fenómeno de transferencia de calor por convección en microcanales para un medio continuo, involucrando efectos de la disipación viscosa del arrastre térmico “thermal creep” los coeficientes de acomodación del número de Knudsen y de Peclet, parámetros presentes en el flujo de gas a escalas micrométricas; empleando soluciones analíticas (análisis adimensional) y técnicas numéricas como lo son las simulaciones directas de Monte Carlo (SDMC), para condiciones de frontera de primer y segundo orden como lo son las propuestas por Deissler y Beskok.

Barron et al., [10] incluyeron los efectos de un flujo deslizante, el cual ocurre cuando se presentan gases a bajas presiones o en flujo de fluidos en pasajes extremadamente pequeños (microcanales), donde se trabaja con valores para el número de Knudsen en un rango de 0 a 0.12, con un perfil de flujo térmicamente desarrollado, flujo laminar y régimen de deslizamiento. De este análisis se determina que el número de Nusselt se incrementa cuando decrece el número de Knudsen sugiriendo que el flujo deslizante es uno de los mecanismos responsables del incremento en la transferencia de calor por convección en fase gaseosa.

Arkilic et al., [11] realizaron investigaciones sobre flujos gaseosos ligeramente enrarecidos a través de microcanales llevando a cabo un análisis de las ecuaciones de Navier – Stokes

en dos dimensiones con condiciones de frontera de primer orden para la velocidad de deslizamiento y salto de temperatura demostrando que los efectos de compresibilidad y no continuidad de un flujo se presentan en microcanales del orden de $7500 \mu m$.

Un caso similar presenta Orhan Aydin et al. [23], para el caso en el que se opta por utilizar las condiciones de frontera descritas en el párrafo anterior, sin embargo en este análisis dentro de la ecuación de la conservación de energía si se consideran los efectos de la disipación viscosa.

Otro estudio presenta , la solución analítica para el fenómeno de transferencia de calor en fase simple para un microcanal dentro del régimen de deslizamiento, donde se involucran las condiciones de primer orden para el salto de temperatura y el flujo deslizante (Y. Bayazitoglu, G. Tunc, K. Wilson y I. Tjahnono, 2005) respectivamente. El estudio sobre la transferencia de calor para un flujo térmica e hidrodinámicamente desarrollado, bajo flujo de calor constante en microcanales circulares y rectangulares fue estudiado por (Ameel 1997; Yu y Ameel, 2002). Un problema similar se estudia en la entrada del microcanal incluyendo los efectos de la transferencia de calor para ciertos límites del número de Knudsen por (Chen y Xu, 2002). El estudio de flujo térmicamente desarrollado en un tubo circular bajo temperatura constante dentro del régimen de deslizamiento fue presentado por (Larroché, 2000). La transferencia de calor por convección a temperatura constante bajo condiciones de flujo térmica e hidrodinámicamente desarrollado considerado para diferentes geometrías así como diferentes régimen de flujo, tal como flujo deslizante en micro-canales rectangulares (Tunc y Bayazitoglu, 2002) y para flujo en canales en dos dimensiones para $0 < Kn < 10$ (Simek y Hadjiconstantinou, 2002). Sin dejar de lado uno de los trabajos más importantes dentro del análisis de la transferencia de calor en microcanales dentro del régimen de deslizamiento el cual mostro que los niveles de transferencia de calor se reducen al considerar flujo deslizante en la superficie de un microcanal rectangular de placas planas y paralelas (Imman, 1964).

Parte II

Modelo Matemático

En el presente trabajo de tesis se analiza el problema conjugado de Graetz y su formulación matemática en un microcanal rectangular, incluyendo los efectos de rarefacción, conducción térmica axial en el fluido, disipación viscosa y los efectos de las caídas de temperatura en las paredes del microcanal sobre el perfil de temperatura del fluido. Asumiendo un flujo de Poiseuille hidrodinámicamente desarrollado.

En primer lugar se estudia la mecánica del flujo de fluido a través del microcanal, presentado las ecuaciones de gobierno de dicho fenómeno, el análisis del flujo de calor en las paredes del microcanal, el análisis de orden de magnitud y las ecuaciones adimensionales para el caso de estudio. Posteriormente se describen aquellas variables que intervienen en el acoplamiento que existe en la solución al problema conjugado de Graetz. Debido a lo complejo que resulta al desarrollar un modelo que describa exactamente la naturaleza del problema es necesario realizar ciertas consideraciones que estén basadas en situaciones reales y que describan de forma adecuada el fenómeno.

El modelo simplificado para el caso de estudio se muestra en la Figura 2.1, y consiste principalmente de dos placas planas paralelas, con velocidad de pared $u_w = 0$, sometidas a flujo de calor constante q_0'' en la superficie externa de las paredes del microcanal, separadas a una distancia $2H$ y aisladas en $x = 0$; $x = L$, es decir; el gradiente de temperatura en estas dos posiciones es cero.

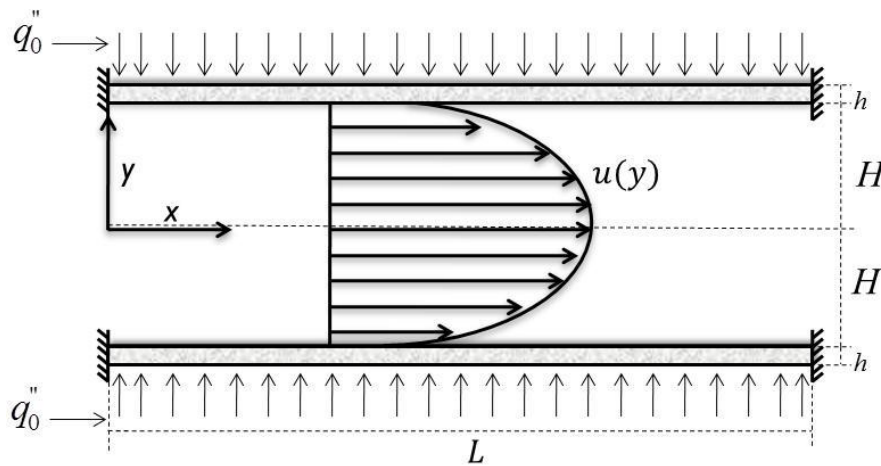


Figura 2.1 Modelo simplificado para la configuración del flujo en el microcanal.

Capítulo 3

Ecuaciones de Gobierno

A continuación se presentan las ecuaciones generales que describen el proceso de transferencia de calor por convección en microcanales considerando los efectos de conductividad térmica en las paredes del microcanal. De las ecuaciones de gobierno involucradas en la solución del problema conjugado, como primer paso se tiene el principio de conservación de la masa dentro del análisis matemático que forma parte importante dentro del estudio, al considerar que se trabaja con un fluido donde las variaciones de la densidad a lo largo del microcanal son despreciables, se habla entonces de un fluido incompresible. Sin embargo el flujo de fluidos a través de microcanales es un proceso complejo que merece un estudio cuidadoso.

En el presente capítulo se incluye la ecuación para la cantidad de movimiento del fluido desde la entrada del microcanal y las condiciones de frontera para la velocidad de deslizamiento en la interface fluido solido - fluido, como consecuencia de los efectos de rarefacción debidos al número de Knudsen. Para describir como ocurre la transferencia de calor de las paredes del microcanal hacia el fluido y como se desarrolla el perfil de temperaturas, es necesario llegar a una expresión matemática. Con las consideraciones que se han presentado en capítulos anteriores y las que se verán en este capítulo se llega a la ecuación de la conservación de la energía en el fluido parte central de este análisis y su acoplamiento con la ecuación de la energía en el sólido dependencia que se muestra en el análisis de resultados.

3.1.- Análisis de órdenes de magnitud para el problema conjugado

A continuación se presenta el análisis de orden de magnitud con la finalidad de simplificar las ecuaciones involucradas con el problema conjugado de Graetz, basado en situaciones reales. El análisis por lo tanto se centra en determinar los parámetros asociados al problema, las escalas características, la influencia de los parámetros y escalas en las interacciones entre las paredes del sólido y el fluido. Para esto es necesario partir de algún dato conocido del problema. En este caso se conoce la geometría del microcanal, altura y longitud, H y L , respectivamente. Con los órdenes de magnitud que se presentan a continuación se tiene la finalidad de determinar cuales son aquellas variables dentro de la ecuación de continuidad, de cantidad de movimiento, de la conservación de la energía en el fluido y en el sólido que pueden llegar a ser representativos

$$y \sim H, \quad H \ll L, \quad x \sim L, \quad u \sim u_c$$

donde u_c es una velocidad característica que se determinará en la siguiente sección, y ΔT_c que se obtiene de la ecuación de Fourier

$$\pm q_0'' = -k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad \therefore \quad \Delta T_c = \sim \frac{q_0'' H}{k_f};$$

así mismo comparando los términos difusivos axial y transversal de la ecuación de la energía en el fluido se obtiene la siguiente relación para ΔT_x

$$\frac{\Delta T_x}{L^2} \sim \frac{\Delta T_y}{H^2} \Rightarrow \Delta T_x \sim \left(\frac{L}{H}\right)^2 \frac{q_0'' H}{k_f} = \frac{q_0'' L^2}{H k_f}$$

A continuación se presentan las ecuaciones y su solución asociada, cabe destacar que dentro de cada análisis se presentan las consideraciones realizadas, y el análisis de escala

para llegar a la solución simplificada de cada una de las ecuaciones involucradas en la solución del problema.

3.2.- Ecuación de continuidad: fluido incompresible

De la ecuación general para la conservación de la masa que describe la compresibilidad del fluido se obtiene la siguiente relación

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0 \quad (3.1)$$

Los primeros cuatro términos de la ecuación (3.1) representan la derivada total de ρ y los últimos tres términos representan la divergencia del vector velocidad \vec{V} . Por lo tanto la ecuación (3.1) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (3.1a)$$

donde ∇ es el operador que representa un gradiente, que puede ser expresado en coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas. En coordenadas cartesianas está determinado como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad (3.1b)$$

y \vec{V} es el vector velocidad de un fluido en movimiento. Así u, v y w son las componentes de la velocidad en la dirección x, y y z respectivamente. Por lo tanto \vec{V} se puede escribir de la siguiente forma

$$\vec{V} = ui + vj + wk \quad (3.1c)$$

una forma alterna de escribir (3.1a) es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (3.1b)$$

para un fluido con densidad constante (fluido incompresible) la derivada total en (3.1b) no varia por lo tanto

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (3.1c)$$

sustituyendo en la ecuación (3.1b), se obtiene

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.2)$$

Que se describe como la ecuación de continuidad (3.2) para un fluido incompresible.

3.3.- Ecuación de cantidad de movimiento: Navier - Stokes

La ecuación de cantidad de movimiento (3.3) es aplicable para un medio continuo y fluido newtoniano, en forma de vector se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = & \rho \vec{g} - \nabla \vec{p} + \frac{4}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \vec{V}) + \nabla (\vec{V} \cdot \nabla \mu) - \vec{V} \nabla^2 \mu + \nabla \mu \times (\nabla \times \vec{V}) - (\nabla \cdot \vec{V}) \nabla \mu \\ & - \nabla \times (\nabla \times \mu \vec{V}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde \vec{g} es el vector de la gravedad en la dirección x, y y z , al considerar un fluido con viscosidad constante se tiene

$$\nabla \mu = 0 \quad (3.4)$$

y

$$\nabla \times (\nabla \times \mu \vec{V}) = \nabla (\nabla \cdot \mu \vec{V}) - \nabla \cdot \nabla \mu \vec{V} = \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) - \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (3.5)$$

sustituyendo (3.4) y (3.5) en la ecuación (3.3) se puede reescribirse de la siguiente forma

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla \vec{p} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (3.6)$$

de esta forma la ecuación (3.9) es válida para: (1) medio continuo, (2) fluido newtoniano y (3) viscosidad constante. Al considerar que la densidad permanece constante se habla de un fluido incompresible por lo tanto el termino representando por la ecuación de continuidad de la ecuación (3.2) es cero

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.7)$$

sustituyendo (3.7) en la ecuación (3.6) y reescribiendo

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla \vec{p} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (3.8)$$

de esta manera la ecuación (3.8) es válida para: (1) medio continuo, (2) fluido newtoniano, (3) viscosidad constante y (4) fluido incompresible. Se puede notar que la ecuación (3.8) en forma de vector representa las tres componentes de las ecuaciones de Navier-Stokes de movimiento. Estas tres componentes x, y y z son

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.9x)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.9y)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.9z)$$

- **Campo de Flujo:** siguiendo con el análisis de la ecuación de Navier-Stokes (3.9), la coordenada para la componente axial para la cual se realiza este análisis, considerando que el movimiento del fluido en la coordenada y y z es nulo.

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = \rho g_x - \nabla p_x + \mu \nabla^2 V_x \quad (3.10)$$

considerando solo las variaciones espaciales, se tiene un régimen de flujo en estado estacionario, así mismo se ignoran la fuerzas de gravedad debido a que el medio de transporte se comporta como un medio continuo y no como un sistema de moléculas individuales,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = g_x = 0 \quad (3.11)$$

Para obtener una simplificación menos compleja de la ecuación (3.10) se realizan las siguientes consideraciones.

- Se ignoran fuerzas de inercia. Con estas consideraciones el término $\rho(u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y + w\partial u/\partial z)$ es despreciable. Esta aproximación se justifica debido a los bajos números de Reynolds. Recordando que el número de Reynolds en la mayoría de los microcanales en proporción es más pequeño, debido al diámetro equivalente de éstos.
- Debido a que se consideran los efectos de la disipación viscosa, es necesario realizar un análisis de escalas con la finalidad de determinar cuáles de los términos son representativos. El término dominante de la disipación viscosa es $\mu(\partial^2 u/\partial y^2)$. Por lo tanto el análisis muestra que este término es del orden de H^{-2} mientras que $\mu(\partial^2 u/\partial x^2)$ y $\mu\partial/\partial x(\partial v/\partial y)$ son del orden de L^{-2} . Por lo tanto estos dos términos pueden ser ignorados. De esta manera la ecuación (3.10) con las consideraciones realizadas y (3.11) obtiene la siguiente forma.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.12)$$

Al observar de (3.12) que la presión es únicamente función de la posición longitudinal x , lo que significa que se puede escribir,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} \quad (3.13)$$

reescribiendo la ecuación (3.12) e introduciendo la consideración realizada de (3.13)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (3.14)$$

La ecuación (3.14) representa la ecuación de Navier-Stokes para la cantidad de movimiento del fluido dentro del microcanal, lo que permite obtener su solución mediante las condiciones de frontera para el flujo dentro del régimen de deslizamiento.

3.3.1.- Condiciones en la frontera

Para resolver la ecuación de cantidad de movimiento que describe el movimiento del fluido es necesario conocer las condiciones de frontera en las regiones de interés. Para el estudio del flujo de un fluido dentro del régimen de deslizamiento ($0.001 \leq Kn \leq 0.1$) se utiliza las condiciones de frontera de primer orden mostradas en las ecuaciones (3.15) y (3.16). La condición de frontera para la velocidad de deslizamiento se presenta en las paredes del microcanal en $y = H$, Figura 3.1, y se presenta en la ecuación (3.15), la cual fue introducida por Maxwell [4],

$$u|_{y=\pm H} - u_w = \left(\frac{2 - \sigma_V}{\sigma_V} \right) \lambda \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\pm H} \quad (3.15)$$

Donde $u_w = 0$, debido a que las placas del microcanal son fijas y no existe velocidad axial de las paredes, y σ_V representa el coeficiente de acomodación de momentum tangencial,

factor empírico que refleja la interacción entre las moléculas de gas y la superficie del microcanal. Este coeficiente depende del gas utilizado, de la geometría del microcanal y de la naturaleza de choque con la superficie.

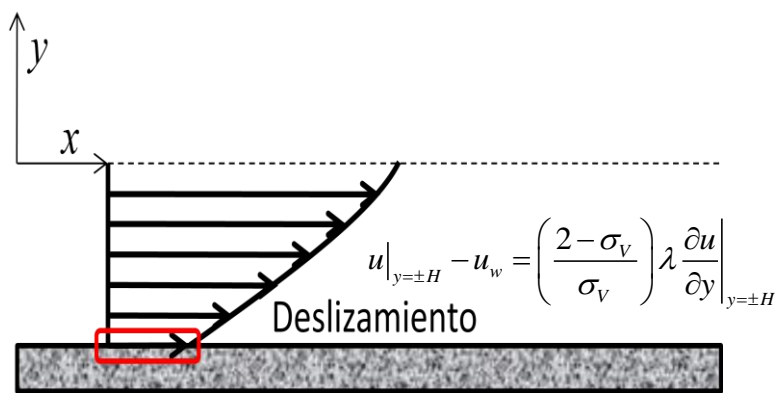


Figura 3.1., Velocidad de deslizamiento en la pared, con condición de frontera de primer orden.

Los valores para dicho coeficiente se encuentran dentro de un rango de 0-1 que han sido determinados de forma empírica y representan la *reflexión especular* y *difusa* respectivamente [4], dicho fenómeno se observa en la Figura 3.2,

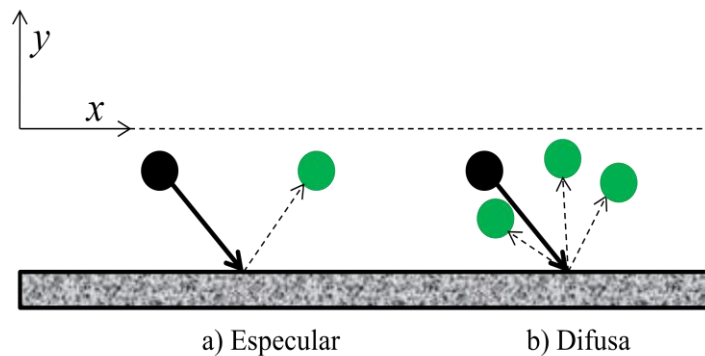


Figura 3.2, Reflexión especular y difusa de las moléculas de un gas en la pared del sólido.

En el centro del microcanal se tiene la condición de simetría, entonces en $y = 0$.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \tag{3.16}$$

3.4.- Ecuación para la conservación de la energía

La solución al perfil de temperatura se obtiene de la ecuación de la conservación de la energía en el fluido, que tiene la forma [1]

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot k_f \nabla T + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \mu \varphi \quad (3.17)$$

donde C_p es el calor específico a presión constante, k_f es la conductividad térmica del fluido, β el coeficiente de expansión térmica (compresibilidad) y φ es función de la disipación. El coeficiente de expansión térmica β_c es una propiedad del material definido como

$$\beta_c = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_p \quad (3.18)$$

la función de la disipación φ esta asociada con la disipación de energía por fricción. Por lo tanto es de gran importancia para flujos que presentan altas velocidades y para fluidos muy viscosos. En coordenadas cartesianas φ esta definida como

$$\varphi = 2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \quad (3.19)$$

La ecuación (3.17) se basa en las siguientes consideraciones: (1) medio continuo, (2) fluido newtoniano, (3) no se considera, que exista transferencia de energía por radiación nuclear y electromagnética.

Debido a la complejidad que resulta dar solución a la ecuación (3.17) y como se ha estudiado hasta ahora se trata de un fluido incompresible y con conductividad térmica del fluido constante, por lo tanto la ecuación (3.17) queda expresada de la siguiente forma

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k_f \nabla^2 T + \mu \varphi \quad (3.20)$$

La ecuación (3.20) se puede reescribir utilizando la definición de la derivada total y del operador diferencial ∇ , con la finalidad de realizar un análisis de escalas que me permita definir cuales son aquellas variables representativas dentro de la ecuación de la energía.

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k_f \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \varphi \quad (3.20a)$$

Al considerar que se trata de un análisis en el que solo se toman en cuenta las variaciones espaciales por lo tanto $\partial T / \partial t = 0$, también se ignora la velocidad transversal $v = 0$, y $w = 0$ así la ecuación (3.20a) se puede reescribir como se presenta a continuación

$$\rho C_p u \frac{\partial T}{\partial x} = k_f \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.21)$$

La ecuación (3.21) es la ecuación que representa el problema de Graetz extendido, es decir, se incluye el término de conducción axial de la temperatura $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, y los efectos de la disipación viscosa $\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$.

3.4.1.- Condiciones en la frontera

En este apartado se estudian las condiciones de frontera para un régimen en deslizamiento lo que da lugar a un salto de temperatura entre las paredes del microcanal y el fluido, es decir, la temperatura de la placa no es igual a la temperatura del fluido en $y = H$. Si no se trabaja en un medio en régimen de deslizamiento se comportaría la región de interface como un medio continuo lo que da lugar a $T_w = T_f$, es decir, la temperatura de la placa en

esa región sería la misma que la temperatura del fluido respectivamente, sin embargo en esta trabajo no se considera esta condición y por lo tanto la condición de frontera para el salto de temperatura, fue propuesta originalmente por Smoluchowski [4], se representa como se muestra a continuación:

$$T|_{y=\pm H} - T_w|_{y=\pm H} = \left(\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T}\right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right) \frac{\lambda}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\pm H} \quad (3.22)$$

Donde σ_T , representa el coeficiente de acomodación de energía, y es un factor empírico que refleja la interacción entre las moléculas de gas y la superficie del microcanal, γ la relación de calores específicos del gas C_p y C_v y el número de Prandtl, Pr .

Continuando con las respectivas condiciones de frontera para la solución de la ecuación (3.21) se tienen:

$$x = 0; \quad T_f = T_o \quad (3.23)$$

$$x = L; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (3.24)$$

$$y = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (3.25)$$

de la ecuación (3.25) T_o es la temperatura del fluido a la entrada del microcanal por otra parte la condición de frontera (3.24) expresa la temperatura del fluido a la salida del microcanal y determina que no existe flujo de calor de la pared hacia el fluido es decir su pendiente es cero para una longitud finita de las paredes del sistema debido a que no existen variaciones de la temperatura en esa posición y finalmente la condición de simetría en la mitad del microcanal.

3.5.- Ecuación de la Laplace

La ecuación que determina el campo de temperatura en las paredes del sólido, donde solo se consideran variaciones espaciales y que no existe generación interna de calor es la ecuación de Laplace y se representa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial z^2} = 0 \quad (3.26)$$

La ecuación de Laplace (3.26) considera variaciones espaciales en los tres ejes coordenados, x, y y z , sin embargo para el estudio realizado del problema conjugado de Graetz solo se consideran las variaciones de temperatura en la sección transversal y longitudinal, como consecuencia del fenómeno de transferencia de calor por convección, fenómeno presente como consecuencia de la interacción entre las paredes y el flujo de gas en régimen de deslizamiento que circula por el microcanal, de esta manera reescribiendo (3.26),

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.27)$$

3.5.1.- Condiciones en la frontera

Para la solución de la ecuación (3.27) es necesario establecer las condiciones de frontera en las regiones de interés, por lo tanto:

$$x = 0, L \quad \frac{\partial T_w}{\partial x} = 0 \quad (3.28)$$

$$\pm q_s'' = -k_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial y} \right|_{y=H+h} \quad (3.29)$$

$$T|_{y=\pm H} - T_w|_{y=\pm H} = - \left(\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{\lambda}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\pm H} \quad (3.30)$$

$$k_f \frac{\partial T}{\partial y} = k_w \frac{\partial T_w}{\partial y} \quad (3.31)$$

la condición de frontera (3.28) expresa que las paredes del microcanal son adiabáticas, es decir; no existe flujo de calor en los extremos de las paredes hacia el medio exterior en $x = 0, L$, por otra parte la condición de frontera (3.29) es en la cual se basa el estudio de este trabajo de tesis, es decir se estudia el problema de Graetz, donde la superficie exterior de las paredes del microcanal Fig. 2.1, se encuentran sujetas a flujo de calor constante y es representada por la ecuación de Fourier, y finalmente la condición de frontera que representa el salto de temperatura en la interface solido – fluido ecuación (3.30), debido al régimen de deslizamiento que se presenta en las paredes internas del microcanal.

Con el objetivo de completar las condiciones de frontera para el problema conjugado de Graetz, se necesita establecer una condición de frontera más en $y = H$, la cual corresponde al demandante flujo de calor debido al flujo de gas en el microcanal representado por (3.31), fenómeno de transferencia de calor por convección.

3.6.- Ecuaciones adimensionales

Utilizando las escalas características obtenidas del análisis de orden de magnitud se obtienen las ecuaciones adimensionales de la mecánica de transferencia de calor por convección a escalas micrométricas. Para facilitar la lectura se muestran las ecuaciones reducidas; es decir; despreciando los términos que están asociados a parámetros que son mucho menor que la unidad. A continuación se exponen las ecuaciones que describen el problema conjugado de Graetz en el microcanal con sus respectivas condiciones de frontera. Para el problema objeto de análisis de este trabajo de tesis se realizan los siguientes cambios de variable para obtener las ecuaciones adimensionales:

$$\eta = \frac{y}{H}; \quad \chi = \frac{x}{L}; \quad z = \frac{y-H}{h}; \quad \bar{u} = \frac{u_c}{u_m}; \quad \theta = \frac{T_f - T_o}{\Delta T_c}; \quad \theta_w = \frac{T_w - T_o}{\Delta T_c} \quad (3.31a)$$

Donde u_m es la velocidad media del fluido como función de la posición en y y de u_c determinada de la ecuación (3.14), θ es la temperatura del fluido adimensional y θ_w es la temperatura del sólido.

3.6.1- Ecuación para la cantidad de movimiento

Esta ecuación no requiere la reformulación inicial de las ecuaciones en parámetros adimensionales, debido a que se establece que el perfil de velocidad del fluido es determinado por $\bar{u} = \frac{u_c}{u_m}$ donde u_c se obtiene de la ecuación (3.14) aplicando las condiciones de frontera en variables físicas (3.15 y 3.16) para después obtener la velocidad media del fluido y adimensionalizar posteriormente de acuerdo con la definición $\bar{u} = \frac{u_c}{u_m}$. resultado que se muestra a detalle en el capítulo 4.

3.6.2- Ecuación de la energía en el fluido adimensional

A continuación se realizan los cambios de variable propuestos en la ecuación (3.21) para obtener las ecuaciones adimensionales de la mecánica de transferencia de calor en el fluido.

$$\bar{u}\beta Pe \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = \beta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + Br \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3.32)$$

y sus respectivas condiciones de frontera en forma adimensional se escriben como:

$$\chi = 0; \quad \theta = 0 \quad (3.33)$$

$$\chi = 1; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = 0 \quad (3.34)$$

$$\eta = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad (3.35)$$

$$\theta - \theta_w = - \left(\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{Kn}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} \quad (3.36)$$

La ecuación (3.35) representa la temperatura del fluido a la entrada del microcanal en forma adimensional, la condición de frontera (3.34) expresa la temperatura del fluido en $\chi = 1$; la ecuación (3.35) es la condición de simetría en la mitad del microcanal y finalmente la condición de frontera (3.36) para el salto de temperatura en el interface sólido – fluido.

Cuando se lleva a cabo el proceso de adimensionalización debido a los cambio de variable que se realizan dentro de la ecuación (3.21) se determinan varios parámetros asociados. El primer parámetro a considerar es el número de Peclet que para este problema se define como: $Pe = \frac{u_m L}{\alpha_T}$; donde α_T representa la difusividad térmica del material y se define de la

misma manera en términos de : $\alpha_T = \frac{k_f}{\rho C_p}$, que para el fluido en microcanales resulta $Pe \sim 1000 \times 10^{-3}$, y que se presenta en problemas donde se tiene fenómeno de transferencia de calor por convección y conducción, el cual representa la competencia entre el transporte de energía por convección y conducción de calor. Otros parámetros adimensionales presentes en la ecuación (3.32) son el número de Brinkman y el parámetro

de esbeltez que se define de la siguiente manera: $\beta^2 = \frac{\Delta T y}{\Delta T x} \sim \frac{\frac{q_0 H}{k_f}}{\frac{q_0 L^2}{k_f H}} = \left(\frac{H}{L} \right)^2 \ll 1$, el cual

determina que las variaciones de la temperatura del fluido en la dirección transversal son muy pequeñas comparadas con las caídas de temperatura del fluido en la dirección longitudinal.

3.6.3- Ecuación de la energía en el sólido adimensional

Al realizar el cambio de variables físicas a adimensionales en la ecuación de la energía en el sólido (3.27) se expresada como

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial z^2} = 0 \quad (3.37)$$

con sus respectivas condiciones frontera

$$\chi = 0; L \quad \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} = 0 \quad (3.38)$$

$$z = 0, 1; \quad \frac{\partial \theta_w}{\partial z} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \quad (3.39)$$

$$\eta = 1; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{\partial \theta_w}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (3.40)$$

La ecuación (3.38) expresa que no exista un gradiente de temperatura entre el medio circundante y los extremos de la placa, la ecuación (3.39) determina el gradiente de temperatura que existe en la superficie de la placa que está sometida a flujo de calor constante q_o'' . Y finalmente la ecuación (3.40) que se presenta en $\eta = 1$, $z = 0$ interface solido – fluido y determina el flujo de calor demandante por el fenómeno de convección debido al gradiente de temperatura entre el sólido y el fluido que se obtiene de la ecuación (3.31), donde α es el parámetro conjugado que relaciona la competencia entre la conductividad térmica de las paredes del microcanal y la del fluido utilizado como medio de enfriamiento en dicho sistema considerando los efectos debido a la geometría del microcanal y de las paredes del mismo, finalmente ε que se define como el parámetro de esbeltez para la pared del microcanal,

$$\alpha = \frac{k_w}{k_f} \frac{h}{L} \frac{H}{L}; \quad \varepsilon = \frac{h}{L}$$

Capítulo 4

Metodología de Solución

4.1.- Planteamiento matemático

El modelo teórico consiste en establecer las ecuaciones que describen el fenómeno de la transferencia de calor por convección que se presenta a escalas micrométricas como uno de los métodos de enfriamiento de sistemas microelectrónicos más utilizado en la actualidad. En el presente capítulo se muestra la solución a las ecuaciones de gobierno que rigen el problema conjugado de Graetz y el acoplamiento que existe entre la ecuación de la energía en el fluido y en el sólido determinado para el fluido por el número de Brinkman que incluye la condición de flujo de calor impuesta en la superficie externa de las paredes del microcanal así la como la temperatura de la pared T_w mientras tanto para la ecuación de Laplace se obtiene el acoplamiento por medio del parámetro conjugado que relaciona las características geométricas del microcanal y la conductividad térmica del fluido utilizado como flujo de enfriamiento.

4.2.- Perfil de velocidad del fluido

Como se mencionó en el apartado anterior es necesario resolver la ecuación de cantidad de movimiento y de esta forma iniciar con el proceso de adimensionalización para determinar el perfil de velocidad del fluido.

En la región del fluido, se tiene que la ecuación de Navier – Stokes en la dirección transversal descrita en la ecuación (3.14) la ecuación se reduce al problema clásico de Poiseuille con deslizamiento en el que el gradiente de presión a lo largo del microcanal permanece constante, es decir; no existen variaciones de la densidad.

Para obtener su solución es necesario integrar, ya que la presión no depende de la coordenada transversal utilizando las condiciones de frontera (3.15 y 3.16).

Al resolver la ecuación (3.14) se obtiene el perfil de velocidad del fluido en términos de la presión, la posición transversal, el número de Knudsen, Kn , y la viscosidad del fluido.

$$u_c = -\frac{H^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left[1 - \left(\frac{y}{H}\right)^2 + 2Kn \right] \quad (4.1)$$

Como se definió, el perfil de velocidad adimensional es función u_c y u_m , es necesario determinar la velocidad media del fluido, como se muestra a continuación:

$$u_m = \frac{1}{H} \int_0^H u_c(y) dy \quad (4.2)$$

Usando la velocidad característica del fluido u_c , definida en la ecuación (4.1) en la definición de la velocidad media, ecuación (4.2), se tiene la velocidad media

$$u_m = -\frac{H^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left[\frac{2}{3} + 2Kn \right] \quad (4.3)$$

de esta manera la velocidad media del fluido ecuación (4.3) y la velocidad característica ecuación (4.1) se sustituyen el parámetro adimensional para la velocidad \bar{u} , obteniendo el perfil de velocidad de fluido en parámetros adimensionales.

$$\bar{u} = \frac{u_c}{u_m} = \frac{3 [1 - \eta^2 + 2Kn]}{2 [1 + 3Kn]} \quad (4.4)$$

4.3.- Perfil de temperatura en el fluido

Para resolver la ecuación de la energía en el fluido (3.32), es necesario aplicar las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (3.33 – 3.36).

Una vez definido el parámetro de esbeltez como resultado de la adimensionalización de la ecuación (3.21) se observa que las variaciones de la temperatura en la dirección transversal son mucho muy pequeñas comparadas con la caída de temperatura a lo largo del microcanal – dirección axial $\frac{\Delta T_y}{\Delta T_x} \sim \left(\frac{H}{L}\right)^2 \sim \beta^2 \ll 1$, por lo tanto se puede integrar la ecuación (3.32) en la dirección transversal.

$$\beta Pe \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \int_0^1 \bar{u} d\eta = \beta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} + Br \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right)^2 d\eta \quad (4.5)$$

La ecuación (4.5) se resolverá en la siguiente sección en conjunto con la ecuación de Laplace para las zonas de las paredes del microcanal y por lo tanto presentar el acoplamiento que existe entre ambas.

4.4.- Metodología de solución al problema conjugado de Graetz

Los métodos de perturbación, también conocidos como de linearización o asintóticos se utilizan para obtener soluciones analíticas aproximadas de ecuaciones en las que se involucra un parámetro pequeño. Para la solución entonces se utiliza la técnica de perturbación: acoplamiento asintótico. Para explicar este método en el problema conjugado de convección en microcanales, α es el parámetro pequeño $0 < \alpha \ll 1$.

El principio de la técnica de acoplamiento asintótico es simple; el intervalo en el que se tiene un problema de transferencia de calor por convección que se divide en dos regiones solido – fluido, en cada región se utiliza la teoría de perturbación para obtener una solución aproximada de las ecuaciones diferenciales en cada región. Finalmente el acoplamiento

requiere que las soluciones asintóticas tengan la misma forma funcional en las dos regiones. Con esto se obtiene una secuencia de aproximaciones asintóticas de la solución de las ecuaciones diferenciales energía en el fluido y Laplace en la zona de las paredes del microcanal, en donde cada aproximación satisface todas las condiciones en la frontera dadas para diferentes puntos en el intervalo de $z = 0 - 1$ y $\eta = 0 - 1$. El resultado es la solución aproximada del problema valido en todo el intervalo. A continuación se presenta el análisis en las regiones del sólido y el fluido.

4.5.- Solución asintótica para $\varepsilon^2/\alpha \sim 1$ con $\alpha \ll 1$

Para la solución al problema conjugado de Graetz ya se ha identificado el parámetro pequeño, que enlaza la ecuación de conservación de la energía en el fluido y la de Laplace en la región del solido que se definió como el parámetro conjugado, para este caso se propone una solución en series de potencia de α , de manera siguiente tenemos para el fluido

$$\theta = \theta_0(\chi) + \alpha\theta_1(\chi, \eta) + \alpha^2\theta_2(\chi, \eta) + \dots \dots \dots \quad (4.6)$$

y para la pared

$$\theta_w = \theta_{w0}(\chi) + \alpha\theta_{w1}(\chi, z) + \alpha^2\theta_{w2}(\chi, z) + \dots \dots \dots \quad (4.7)$$

donde asumimos que la temperatura en el fluido en la primera aproximación es función de χ , mientras que la temperatura en la placa depende tanto de χ como de z . Sustituyendo las expansiones en las correspondientes ecuaciones de la energía en el fluido y el sólido respectivamente, se llega a:

$$\begin{aligned} \beta Pe \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial \chi} + \alpha \frac{\partial \theta_1}{\partial \chi} + \alpha^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \chi} \right) \int_0^1 \bar{u} d\eta &= \beta^2 \left(\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \chi^2} + \alpha \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \chi^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \chi^2} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} + \alpha \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} + \alpha^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=1} + Br \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \end{aligned} \quad (4.8)$$

con sus respectivas condiciones de frontera

$$\chi = 0; \quad \theta_0(\chi) + \alpha \theta_1(\chi, \eta) + \alpha^2 \theta_2(\chi, \eta) = 0 \quad (4.9)$$

$$\chi = 1; \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial \chi} + \alpha \frac{\partial \theta_1}{\partial \chi} + \alpha^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \chi} = 0 \quad (4.10)$$

$$\eta = 0; \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} + \alpha \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} + \alpha^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} = 0 \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} &\theta_0(\chi) + \alpha \theta_1(\chi, \eta) + \alpha^2 \theta_2(\chi, \eta) - (\theta_{w0}(\chi) + \alpha \theta_{w1}(\chi, z) + \alpha^2 \theta_{w2}(\chi, z)) \\ &= - \left(\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{Kn}{Pr} \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} + \alpha \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} + \alpha^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

agrupando términos del $O(\alpha^0)$ y $\alpha \ll 1$ de las ecuaciones (4.8 – 4.12)

$$\beta Pe \frac{\partial \theta_0}{\partial \chi} \int_0^1 \bar{u} d\eta = \beta^2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \chi^2} + \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} + Br \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \quad (4.13)$$

y sustituyendo las condiciones de frontera (3.42 y 3.42) para la condición de flujo de calor en la pared en la ecuación (4.13) obtenemos

$$\beta Pe \frac{\partial \theta_0}{\partial \chi} \int_0^1 \bar{u} d\eta = \beta^2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \chi^2} + 1 + Br \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \quad (4.14)$$

de la misma manera integrando el perfil de velocidad del fluido de la ecuación (4.4) y evaluando en $\eta = 0 - 1$, se obtiene

$$\beta Pe \frac{\partial \theta_0}{\partial \chi} \left[\left(\frac{3}{2} \right) \frac{1 + 2Kn}{1 + 3Kn} - \frac{1}{2(1 + 3Kn)} \right] = \beta^2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \chi^2} + 1 + Br \frac{3}{(1 + 3Kn)^2} \quad (4.15)$$

con sus respectivas condiciones de frontera

$$\chi = 0; \quad \theta_0 = 0 \quad (4.16)$$

$$\chi = 1; \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial \chi} = 0 \quad (4.17)$$

$$\eta = 0; \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} = 0 \quad (4.18)$$

$$\theta_0(z = 0, \eta = 1) - \theta_{w0}(z = 0, \eta = 1) = - \left(\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{Kn}{Pr} \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} \quad (4.19)$$

el acoplamiento que existe para la ecuación de la energía en el fluido (4.20) está definido por $Br \left[\frac{3}{(1+3Kn)^2} \right] + 1$ donde Br representa la disipación viscosa y que incluye la condición de flujo de calor impuesta en la superficie externa de las paredes del microcanal así la como la temperatura de la pared T_w definido en la ecuación (1.18) y el coeficiente 1 que es determinado de la condición de flujo de calor en la superficie externa de la pared en $\eta = 1$ y $z = 0$, de las condiciones de frontera (3.41 y 3.42).

Por lo tanto aplicando las condiciones de frontera (4.16 – 4.19), a la ecuación (4.15) se obtiene la ecuación de acoplamiento que determina el perfil de temperatura del fluido en la dirección longitudinal x como primera aproximación, sin embargo es necesario obtener la ecuación para el perfil de temperatura en el sólido para poder resolver el problema conjugado.

$$\theta_0(\chi) =$$

$$\frac{Br \left[\frac{3}{(1+3Kn)^2} \right] + 1}{Pe \left[\left(\frac{3}{2} \right) \frac{1+2Kn}{1+3Kn} - \frac{1}{2(1+3Kn)} \right]} \left[\frac{1}{Pe \left(\left(\frac{3}{2} \right) \frac{1+2Kn}{1+3Kn} - \frac{1}{2(1+3Kn)} \right) \exp \left[\frac{Pe \left(\left(\frac{3}{2} \right) \frac{1+2Kn}{1+3Kn} - \frac{1}{2(1+3Kn)} \right)}{\beta} \right]} \right. \\ \left. - \frac{\exp \left[\frac{Pe \left(\left(\frac{3}{2} \right) \frac{1+2Kn}{1+3Kn} - \frac{1}{2(1+3Kn)} \right)}{\beta} \right] \chi}{Pe \left(\left(\frac{3}{2} \right) \frac{1+2Kn}{1+3Kn} - \frac{1}{2(1+3Kn)} \right) \exp \left[\frac{Pe \left(\left(\frac{3}{2} \right) \frac{1+2Kn}{1+3Kn} - \frac{1}{2(1+3Kn)} \right)}{\beta} \right]} + \frac{\chi}{\beta} \right] \quad (4.20)$$

La expresión para determinar el perfil de temperaturas en el sólido se obtiene sustituyendo la expansión (4.7) en la ecuación (3.39) con $\varepsilon^2/\alpha \sim 1$ con $\alpha \ll 1$

$$\frac{\partial^2 \theta_{w0}}{\partial z^2} = 0 \quad (4.21)$$

con sus respectivas condiciones de frontera

$$z = 0, 1; \quad \frac{\partial \theta_{w0}}{\partial z} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \quad (4.22)$$

$$\theta_{w0}(z = 0, \eta = 1) = \theta_0(z = 0, \eta = 1) + \left(\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{Kn}{Pr} \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} \quad (4.23)$$

$$\eta = 1; \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{\partial \theta_{w0}}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (4.24)$$

Se obtiene la ecuación que describe como son las caídas de temperatura en las paredes del microcanal en la dirección transversal,

$$\theta_{w0} = \left[\frac{\varepsilon^2}{\alpha} \right] z + \theta_0 + \left(\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{Kn}{Pr} \quad (4.25)$$

De esta manera se obtiene las dos ecuaciones que describen los perfiles de temperatura para el fluido (4.20) y el sólido (4.25) donde se define el acoplamiento para las dos ecuaciones que se describió en los párrafos anteriores.

4.6.- Coeficiente de transferencia de calor: número de Nusselt

Al número de Nusselt se le conoce como el coeficiente de transferencia de calor por convección, se trata de un parámetro que representa el gradiente de temperatura adimensional en la pared. Dado que el número de Nusselt incluye al coeficiente de transferencia de calor h determinado de la ley de enfriamiento de Newton que relaciona el flujo de calor que existe de una pared disipado por un fluido que fluye sobre ella $q_0'' / (T_w - T_f)$.

El cálculo del número de Nusselt Nu constituye uno de los principales objetivos a resolver en la mayoría de los problemas de transferencia de calor por convección, ya sea por métodos analíticos o experimentales. Así el Nusselt queda definido de la siguiente forma,

$$Nu = \frac{hL_c}{k_f} \quad (4.26)$$

donde el coeficiente de transferencia de calor se determina de la ecuación (4.27) que relaciona el flujo de calor en la pared de la ecuación de Fourier y el termino del lado derecho que representa la ley de enfriamiento de Newton.

$$\pm q_0'' = -k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=H} = h(\bar{T}_w - T_f) \quad (4.27)$$

donde \bar{T}_w representa la temperatura media de las paredes del microcanal en la dirección transversal, de esta manera adimensionalizando la ecuación (4.27)

$$\pm q_0'' = -k_f \frac{\Delta T_c}{H} \left. \frac{\partial \theta_{w0}}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = h(\bar{T}_w - T_f) \quad (4.28)$$

despejando h sustituyendo en la ecuación (4.26) y adimensionalizando se llega a

$$Nu = \frac{1}{\bar{\theta}_{w0} - \theta_0} \left. \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} \quad (4.29)$$

donde $\bar{\theta}_{w0}$ es la temperatura media adimensional en las paredes y que se determina mediante la siguiente ecuación

$$\bar{\theta}_{w0} = \int_0^1 \theta_{w0}(\chi, z) dz \quad (4.30)$$

integrando y sustituyendo en la ecuación (4.30) se obtiene

$$\bar{\theta}_w = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\alpha} + \theta_0(\chi) + \left(\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{Kn}{Pr} \quad (4.31)$$

y

$$\bar{\theta}_w - \theta_0(\chi) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\alpha} + \left(\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{Kn}{Pr} \quad (4.32)$$

de la misma manera de la ecuación (4.23)

$$\left. \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \frac{-\theta_{w0}(z=0, \eta=1) + \theta_0(z=0, \eta=1)}{-\left(\frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\right)\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)\frac{Kn}{Pr}} \quad (4.33)$$

Sustituyendo la ecuación (4.33) y (4.32) en (4.32)

$$Nu = \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\alpha} + \left(\frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\right)\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)\frac{Kn}{Pr}} \left(\frac{-\theta_{w0}(z=0, \eta=1) + \theta_0(z=0, \eta=1)}{-\left(\frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\right)\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)\frac{Kn}{Pr}} \right) \quad (4.34)$$

De la ecuación (4.25) evaluando en $z=0, \eta=1$ interface solido – fluido se llega a

$$\theta_0(z=0, \eta=1) - \theta_{w0}(z=0, \eta=1) = -\left(\frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\right)\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)\frac{Kn}{Pr} \quad (4.35)$$

sustituyendo la ecuación (4.35) en (4.34) se obtiene.

$$Nu = \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\alpha} + \left(\frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\right)\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)\frac{Kn}{Pr}} \quad (4.36)$$

La ecuación (4.36) determina el número de Nusselt, Nu , como función de los parámetros α , ε , de las constantes (Pr, γ, σ_T) y del número de Kn , para un flujo en régimen de deslizamiento.

Parte III

Resultados y Conclusiones

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos por el modelo desarrollado para el problema conjugado de Graetz. En primer lugar se muestra el perfil de velocidad del fluido para un flujo de Poiseuille y el efecto del número de Knudsen sobre éste. Posteriormente se presentan los resultados obtenidos para el perfil de temperatura del fluido a lo largo del microcanal observando el efecto de los parámetros que intervienen en este perfil como lo son el número de Pe, Br y el parámetro de esbeltez β . Posteriormente se presentan los perfiles de temperatura en el sólido y la influencia de los parámetros que intervienen en dicha solución. Y finalmente se muestra los resultados obtenidos del conjugado solido – fluido para el problema Graetz donde se ilustra un comparativo entre los dos perfiles y finalizando con la determinación del número de Nusselt.

5.1.- Perfil de velocidad del fluido

Uno de los parámetros más importantes si no es que el más importante de este análisis es el número de Knudsen que afecta significativamente a todas las variables de interés, en este apartado solo se centra su efecto sobre el perfil de velocidad del fluido. De la ecuación para el perfil de velocidad del fluido se observa el deslizamiento para un perfil en transición de un régimen en medio continuo a uno en medio molecular regido por Kn .

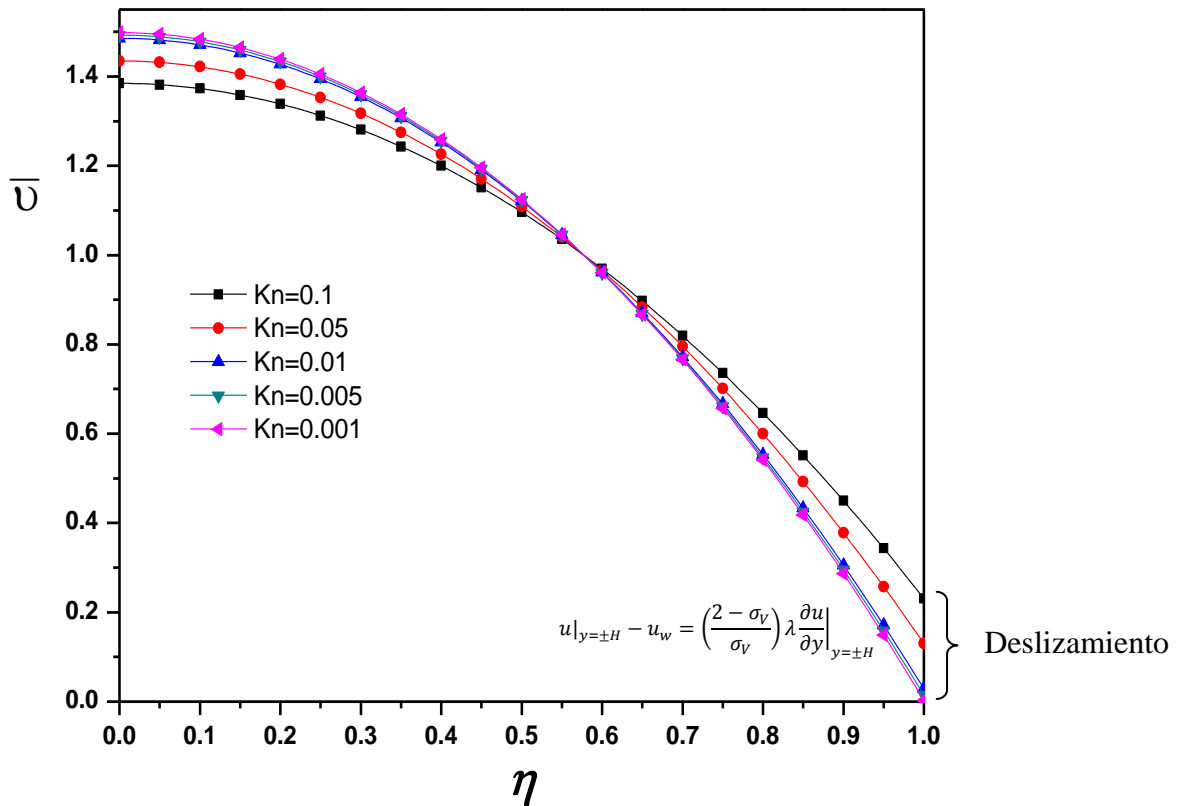


Fig. 5.1, Perfiles de velocidad adimensional como función de la coordenada transversal η y del número de Kn .

Es decir; cuando $Kn \ll 0.1$, se trabaja en un medio continuo y la velocidad deslizamiento en $\eta = 1$, tiende a ser cero como se observa en la Fig. 5.1, ya que no existe transición a flujo de moléculas libres lo que origina que la densidad sea mayor en la interface solido - fluido y por lo tanto los esfuerzos originados por el contacto entre la pared y el fluido sean mayores, caso contrario ocurre cuando el flujo de moléculas se encuentra en régimen transitorio y el gas se encuentra enrarecido $Kn \gg 0.001$, la trayectoria media libre de las moléculas es mayor, la densidad disminuye y por los tanto se provoca que exista un deslizamiento en la interface que origina que la velocidad en el centro del microcanal también disminuya.

5.2.- Perfil de temperatura del fluido, θ_0

El perfil de temperatura del fluido constituye uno de los resultados más importantes de este estudio ya que nos permite determinar cuál es el grado con el que la transferencia de calor por convección disipa calor, es decir; la influencia que tiene el salto de temperatura, el régimen de deslizamiento, la geometría de los microcanales y otros parámetros asociados a este problema que es donde se centra la atención y lo permitirá optimizar los sistemas de enfriamiento en los sistemas MEMS, debido a los elevados flujos de calor que se presentan en las recientes tecnologías a escalas micro.

En la Fig. 5.2 se puede observar la influencia del número de Peclet sobre el perfil de temperatura adimensional como función de la coordenada adimensional χ en el fluido.

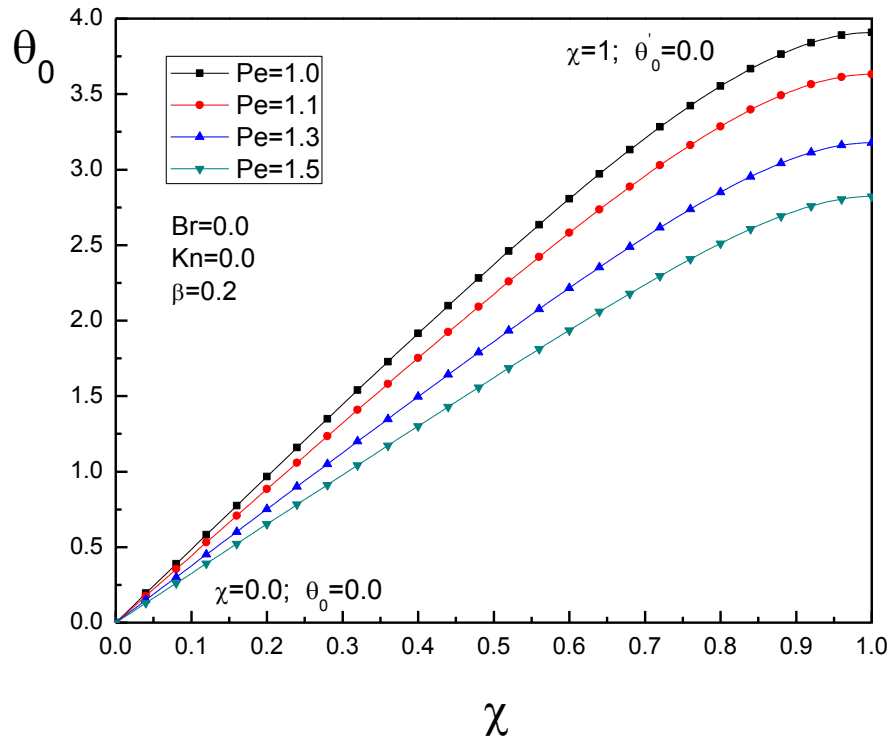


Fig. 5.2, Perfiles de temperatura adimensional del fluido como función de la coordenada axial χ , para diferentes valores del número de Peclet.

donde $\chi = 0; \theta_0 = 0.0$ y $\chi = 1; \theta'_0 = 0.0$ son las condiciones de frontera impuestas a la entrada y a la salida del microcanal para la temperatura del fluido adimensional para las cuales se observa que se cumple con estas condiciones. Para valores decrecientes de Pe , la

temperatura del fluido aumenta como consecuencia del flujo del fluido a bajas velocidades lo que provoca que la disipación de calor por convección sea menor que la disipación de calor por conducción y caso contrario ocurre cuando Pe se incrementa, de esta manera es importante considerar números de Peclet grandes a fin de disipar la mayor cantidad de calor de los microchips.

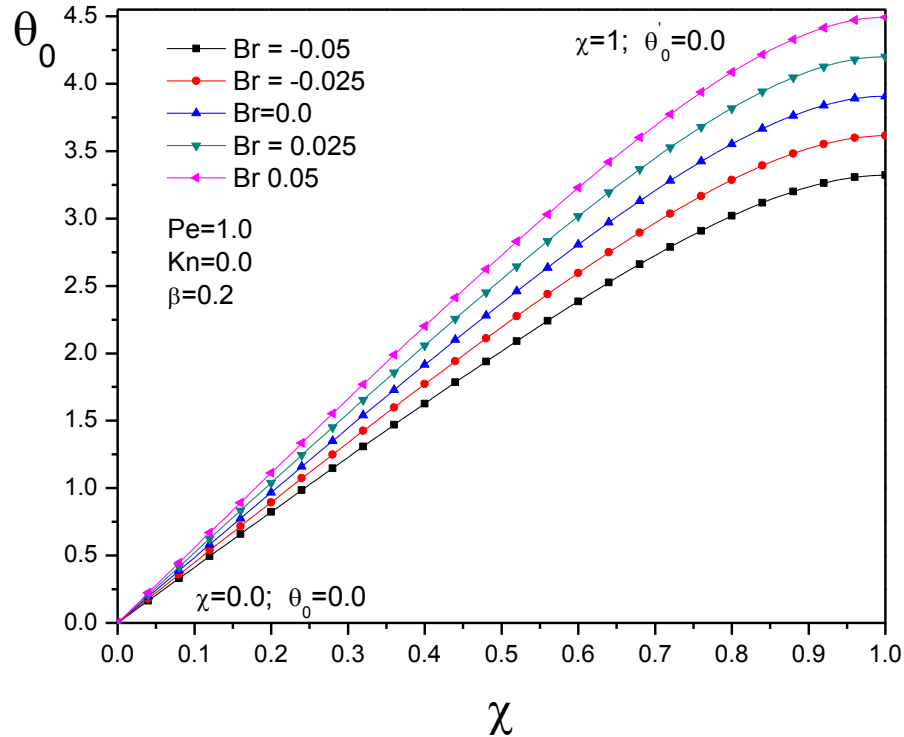


Fig. 5.3, Variación de la temperatura del fluido como función del número de Brinkman.

En la Fig. 5.3, se observa la dependencia del perfil de temperatura del fluido θ_0 adimensional como función de la coordenada axial y del número de Brinkman, el cual determina el flujo de calor proveniente de la placa o el fluido, es decir para números de $Br > 0$ el flujo de calor q_0'' es de la placa hacia el fluido por consiguiente la temperatura del fluido se eleva, caso contrario ocurre cuando $Br < 0$, la temperatura del fluido es mayor que la de la placa en $\eta = 1$, y por consiguiente la temperatura del flujo disminuye debido a que cede calor hacia las paredes del microcanal en la interface solido – fluido.

En la Figura 5.4, se muestra la influencia del parámetro de esbeltez en el microcanal definido como $\beta = \frac{H}{L}$ afecta la temperatura del fluido significativamente es decir, a medida

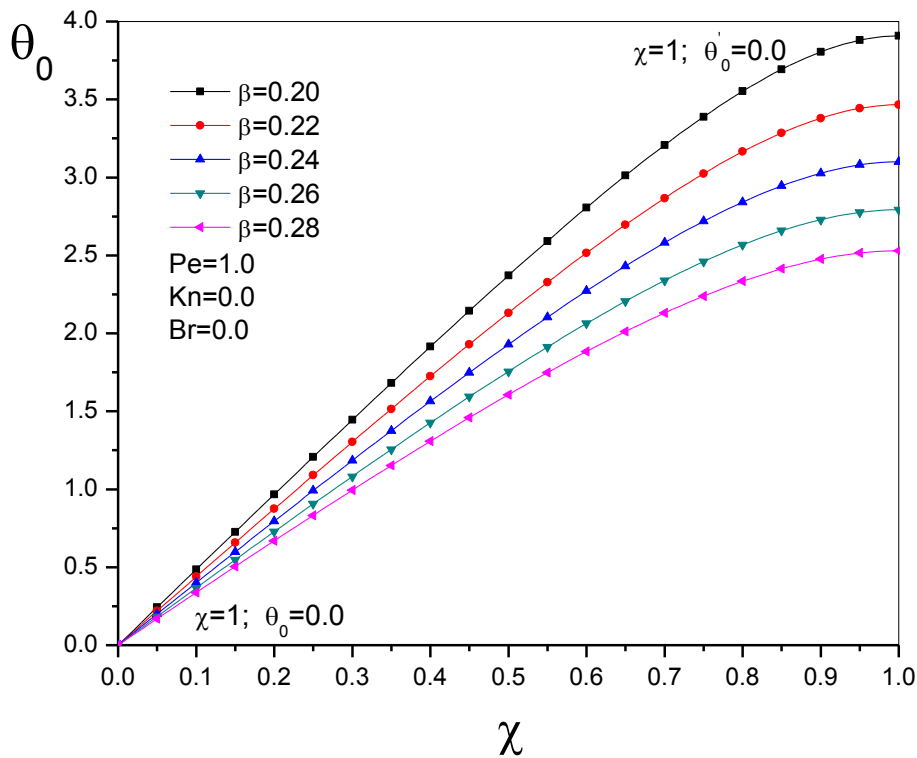


Fig. 5.4, Variación de la temperatura del fluido como función del parámetro de esbeltez.

que la altura del microcanal es menor $H \downarrow$ la temperatura del fluido se incrementa con mayor rapidez debido a una disminución en el flujo másico que circula por el microcanal, caso contrario ocurre cuando $\beta \uparrow$.

5.3.- Perfil de temperatura del sólido, θ_{w0}

Una de las aportaciones de este trabajo de estudio es comprender el fenómeno de transferencia de calor a escalas micrométrica en la región de interface sólido – fluido y el comportamiento que se tiene del perfil de temperatura en el sólido debido al salto de temperatura que existe, es decir; si se disipa una mayor cantidad de calor en $\eta = 1, z = 0$, el flujo de calor acumulado en el microchip será menor y por consiguiente problemas estructurales como lo son la fractura y la eficiencia de trabajo de los MEMS será mayor, se podrían reducir por consiguiente la implementación de sistemas de enfriamiento por

convección forzada demasiado complejos e ineficientes, esto se logra considerando las variables que se establecieron en un inicio para la solución de este problema.

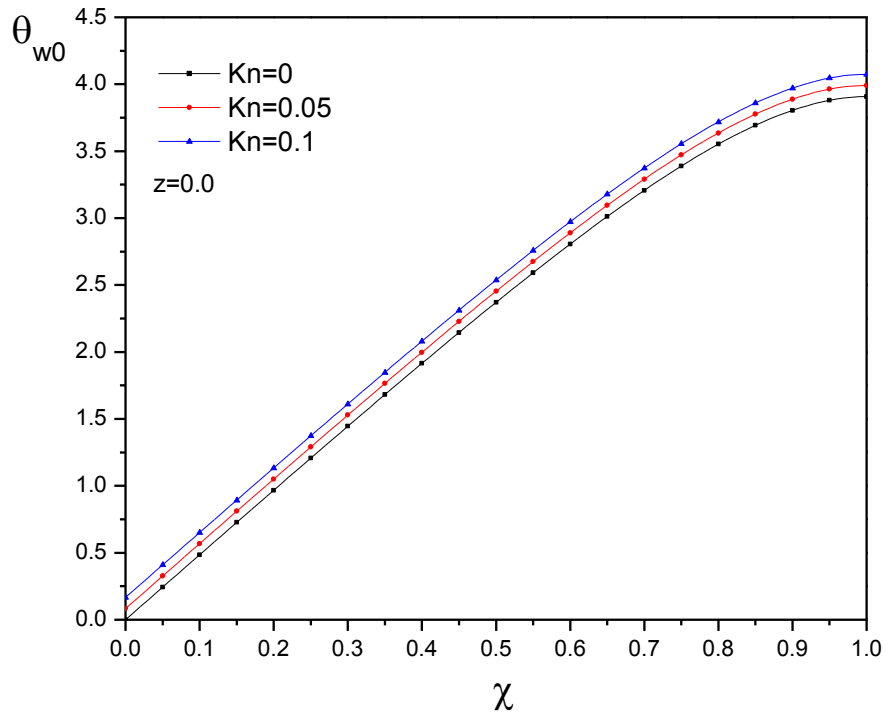


Fig. 5.5, Variación de la temperatura en la placa como función de Kn .

Cuando el medio se comporta como un medio continuo $Kn = 0.0$, la transferencia de calor por convección se incrementa en $\eta = 1$, $z = 0$, caso contrario ocurre cuando comienza a crearse la transición a un medio molecular. Esto es importante porque el fenómeno que se presenta a escalas micrométricas es una transición a flujo de moléculas libres y por consiguiente se observa que tiene efectos significativos sobre el calentamiento de los microchips, por esta razón es necesario diseñar mejores y eficaces sistemas de enfriamiento.

En la Figura 5.6, se observa la variación de la temperatura adimensional en la sección transversal de la placa, es decir; variando $z = 0 - 1$, donde θ_{w0} en $z = 1$, es mayor debido a que es donde se encuentra impuesta la condición de flujo de calor constante.

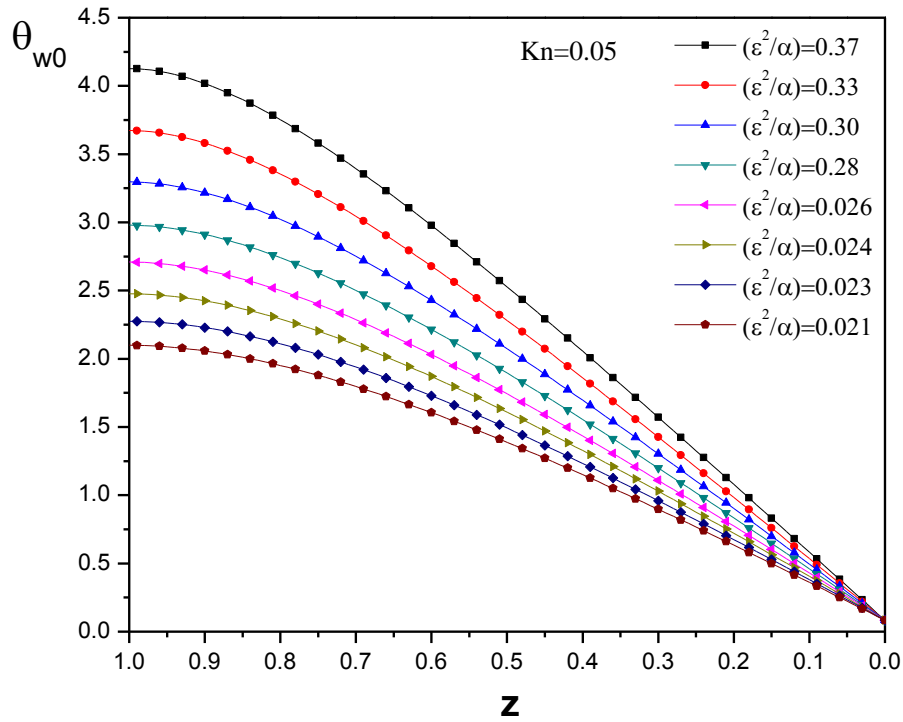


Fig. 5.6, Perfiles de temperatura adimensional en la placa como función de la coordenada transversal z y del parámetro ε^2/α .

Variando el parámetro conjugado ε^2/α , para diferentes valores se puede observar que cuando el diámetro del microcanal aumenta H , se disipa una mayor cantidad de flujo de calor de la placa, sin embargo debido a las variables físicas que involucra el parámetro alfa se pueden considerar otros flujos de enfriamiento como lo son: el hidrogeno, helio, nitrógeno que debido a su conductividad térmica mayor que la del aire la disipación de calor será mayor y por consecuencia la eficiencia de los sistemas de enfriamiento se incrementa.

En la Fig. 5.7, se muestra el perfil de temperatura en las paredes del microcanal de sección transversal, como función de $z = 0 - 1$, e incluyendo los efectos del número de Brinkman incluido en la ecuación para el fluido (4.20) y cómo influye sobre los perfiles de temperatura en la pared, es decir; cuando $Br > 0$ ó $Br < 0$ el flujo de calor $q_0'' > 0$ ó $q_0'' < 0$ respectivamente, es decir; para el caso en el que el número de Brinkman es positivo el flujo de calor en la superficie externa es mucho mayor y el perfil de temperaturas en la pared son mayores debido a que el perfil de temperaturas en el fluido es mayor y por lo

tanto la saturación de flujo de calor es mayor, así la temperatura en la pared serán mayor, para el caso en que Brinkman toma valores negativos el flujo de calor es mayor debido a que debido a que existe un gradiente de temperaturas mayor entre el fluido y el sólido, por lo tanto el perfil de temperaturas en la pared será mayor.

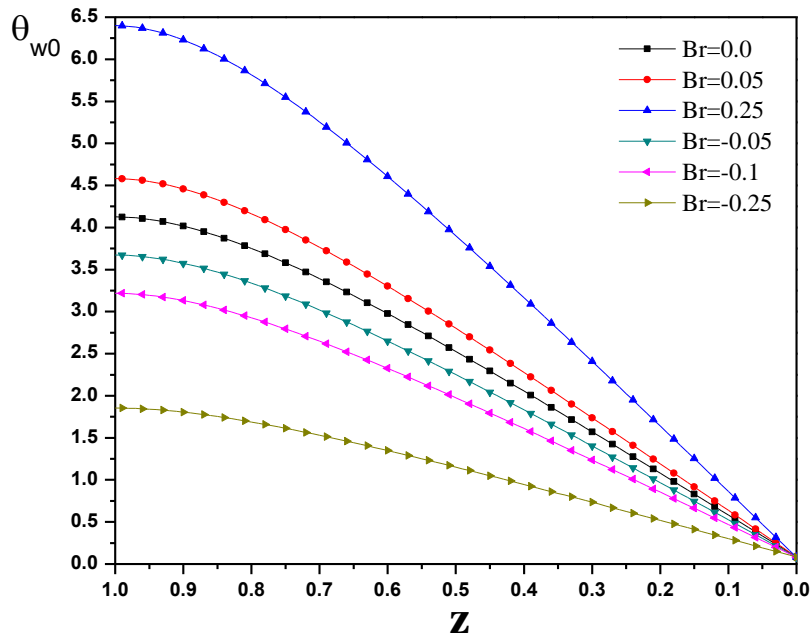


Fig. 5.7, Variación de la temperatura en el sólido como función de Br , $Kn = 0.05$, $Pe = 1.0$.

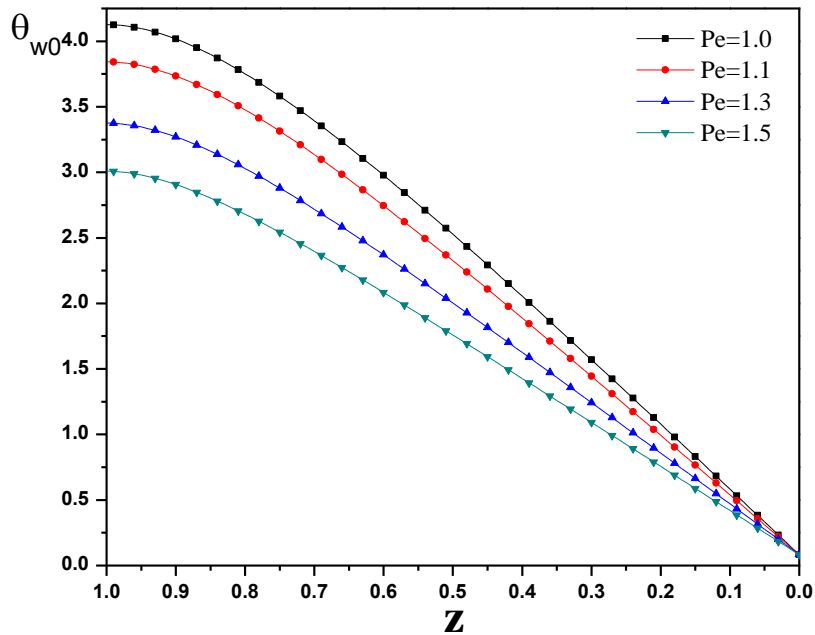


Fig. 5.8, Variación de la temperatura en el sólido como función de $Br = 0.0$, $Kn = 0.05$.

En la Fig. 5.8, se observa el comportamiento del gradiente de temperatura en las paredes del microcanal como función de la coordenada transversal z , y para un número de Knudsen de 0.05, es evidente que cuando un flujo de fluido en este caso gas presenta bajas velocidades dentro del microcanal el calor disipado es menor debido a que el fenómeno de transferencia de calor por convección disminuye y por lo tanto la temperatura de la placa se incrementa. Cuando las velocidades del flujo son mayores por consecuencia Pe es mayor y de esta forma la disipación por convección es mayor.

5.4.- Comparación entre perfiles de temperatura del sólido y fluido θ_{w0}, θ_0

De la ecuación para el salto de temperatura $\theta_0 - \theta_{w0} = - \left(\frac{2-\sigma_T}{\sigma_T} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} \right) \frac{Kn}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1}$; en $z =$

0, donde es función del número de Kn y otros parámetros, cuando $Kn = 0.1$, se trabaja en un medio en régimen transitorio a moléculas libres para lo cual se presenta un salto de temperatura entre la θ_{w0} y θ_0 como se muestra en la Fig. 5.9, y por consiguiente se aleja de un medio continuo. En la actualidad es necesario considerar los efectos del número de Knudsen debido a la tendencia en la miniaturización, su importancia se puede observar en las Figuras 5.9 y 5.10.

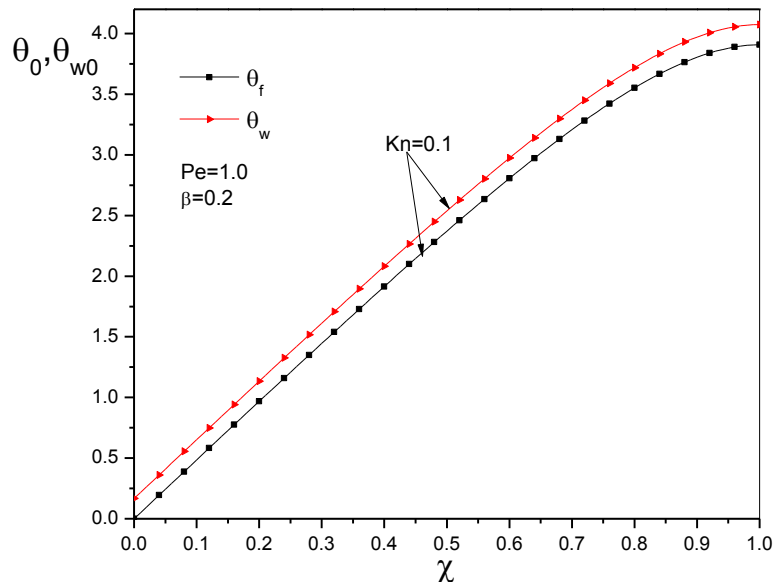


Fig. 5.9, Presenta el salto de temperatura entre el fluido y el sólido.

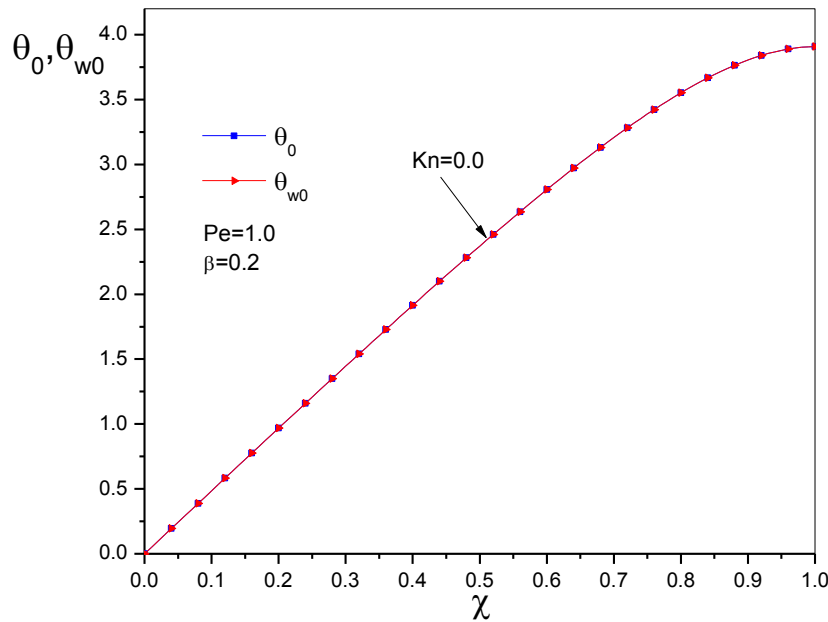


Fig. 5.10, Condición para un medio continuo con $Kn = 0.0$ donde $\theta_{w0} = \theta_0$.

5.5.- Número de Nusselt, Nu

De acuerdo con la definición obtenida en la sección anterior para el número de Nusselt,

$$Nu = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha} \right) + \left(\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{Kn}{Pr}}$$

este es un parámetro adimensional que mide la transferencia de calor por convección entre la interface solido – fluido, para el cual en la Figura 5.10, cuando el cociente ε^2/α disminuye el numero de Nusselt se incrementa debido a que existe una mayor transferencia de calor de las placas hacia las moléculas del fluido debido a que existe un flujo másico mayor cuando la distancia de separación entre las placas H se incrementa. Sin dejar de lado el efecto de la conducción térmica que se presenta cuando $Kn = 0.0$ esto es $\theta_{w0} = \theta_0$ que representa un medio continuo por lo tanto la disipación de calor es mayor.

En la Figura 5.11, se muestra el comportamiento del número de Nusselt cuando el diámetro del microcanal es variable y por consecuencias los niveles de disipación por convección forzada incrementan.

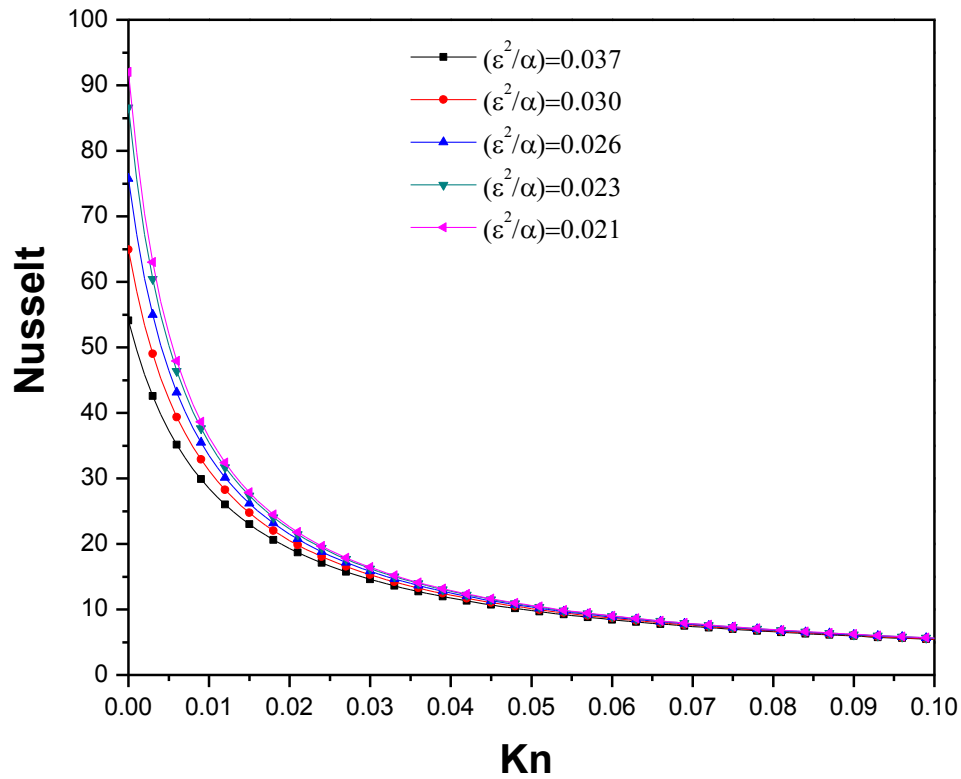


Fig. 5.11, Numero de Nusselt como función del parámetro conjugado y de esbeltez para la placa.

De esta manera se observa la dependencia dentro del problema conjugado de Graetz en el cual si alguno de los parámetros de la geometría del microcanal se modifica, se afecta significativamente el resultado de las otras ecuaciones.

Esto como consecuencia permite determinar de manera eficaz cuales son las variables de interés que pueden incrementar la eficiencia de los sistemas de enfriamiento en microcanales. Por ejemplo podemos mencionar la importancia de las condiciones de frontera de primer orden propuestas por Maxwell y Smoluchowski, así mismo la importancia de trabajar a escalas micrométricas donde se presenta una transición de un régimen en medio continuo a uno de flujo de moléculas libres.

5.6.- Comparación de resultados

En la siguiente sección se realiza la comparación de resultados obtenidos en este trabajo de tesis con otros trabajos científicos que se han desarrollado para la solución al problema de Graetz, es decir; se analizarán los resultados individuales y como afecta la pared del sólido dentro del análisis de transferencia de calor a escalas micrométricas.

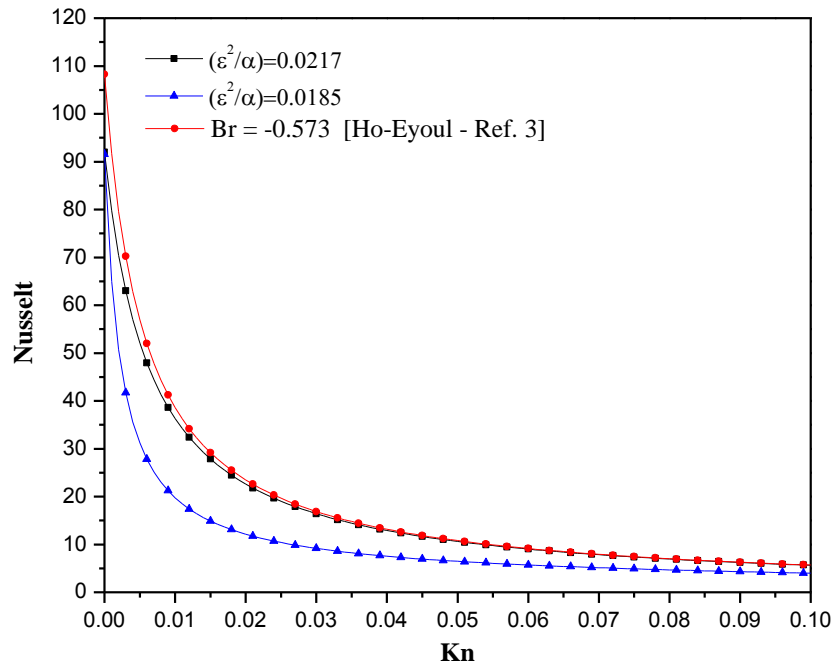


Fig. 12, Numero de Nusselt como función del parámetro conjugado de esbeltez para la placa y de Br .

En la Fig. 12, la variación del número de Nusselt como función del número de Knudsen en la coordenada axial, en este comparativo se observan los resultados obtenidos por Ho-Eyoul en el cual se analiza el problema extendido de Graetz donde no consideran los efectos de las paredes del microcanal para la determinación del número de Nusselt y solo como función del número de Knudsen y de Brinkman[3], en la misma figura se observan los resultados obtenidos en este trabajo de tesis en el cual se puede observar que los resultados son muy similares dependiendo de los parámetros asociados que cambien dentro del análisis.

Para este caso se consideró un valor para Brinkman de -0.573 [3], es decir; se considera que el q_0'' flujo de calor en la pared < 0 y por lo tanto la transferencia de calor ocurre del fluido

hacia las paredes del microcanal lo que provoca que el fenómeno de transferencia de convección ocurra en mayor grado debido a la diferencia de temperaturas entre la interface solido – fluido, es decir; ocurre un elevado grado de disipación de calor, en el caso de este trabajo de tesis el parámetro a variar es ε^3/α , es decir; cuando este termino decrece el coeficiente de transferencia de calor por convección se incrementa debido a los cambios en la geometría y/o propiedades físicas de las paredes del microcanal o del fluido como lo son la conductividad térmica, el espesor de las paredes ó la separación entre las placas, considerando que cuando la geometría del microcanal cambia por ejemplo, la separación entre placas existe un mayor flujo de gas a través de este lo que provoca que se disipe una mayor cantidad de calor en el sistema.

Si fuera el caso donde Brinkman > 0 el fenómeno de transferencia de calor por convección es menor debido a que el flujo de calor ocurre con menor grado debido a una diferencia de temperaturas menor entre la T_f y T_w .

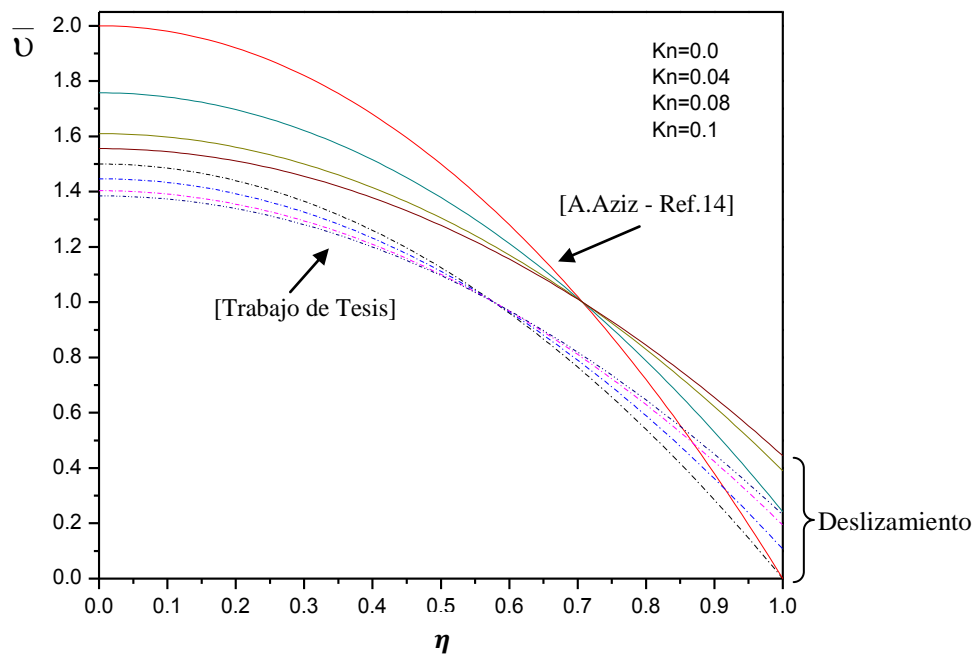


Fig. 13, Comparación entre perfiles de velocidad del fluido para régimen en medio continuo y con deslizamiento.

En la Fig. 13, se muestra la comparación de resultados para los perfiles de velocidad, utilizando condiciones de frontera de primer orden en régimen de deslizamiento y medio

continuo, para las cuales el comportamiento es similar presentando en un medio continuo flujo deslizante entre la interface sólido – fluido un valor de cero, y para un flujo en régimen transitorio el fenómeno de deslizamiento en dicha región.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo a futuro

El problema conjugado de transferencia de calor por convección a escalas micrométricas es un fenómeno complejo que depende de múltiples variables, que resultan difíciles de controlar y aún más de aislar para observar el efecto que tienen las variables de interés en la transferencia de calor presente en el fluido y en las paredes del microcanal.

Con el fin de conocer a detalle el fenómeno de transferencia de calor a escalas micrométricas se han realizado diversos modelos teóricos del fenómeno. En este tipo de estudios se ha observado que la transferencia de calor depende de una gran colección de parámetros que deben ser tomados en cuenta para obtener resultados coherentes con la realidad. Ante este problema se vuelve necesario privilegiar algunos efectos sobre otros, ya que es demasiado complicado analizar la influencia de todos al mismo tiempo. Sin embargo se debe ser muy cuidadoso al seleccionar los parámetros, porque al estudiar de forma aislada la influencia de un efecto se podría incurrir en errores graves debido a la interdependencia de los diversos parámetros.

El modelo matemático presente en este trabajo de tesis considera dos regiones, una central ocupada por el flujo del fluido a través del microcanal y la región de las paredes del sólido, separadas a una distancia establecida por la que circula el flujo de gas como un medio de enfriamiento de sistemas microelectrónicos. Estas dos regiones se presentan en la

realidad y su comprensión resulta de gran relevancia en aplicaciones relacionadas con la ingeniería a escalas micrométricas específicamente en los MEMS.

Los resultados muestran diferencias importantes entre las dos regiones que se estudian y como la influencia de una región hacia otra resulta de vital importancia en el proceso de optimización de sistemas de enfriamiento donde se presentan elevados flujos de calor como consecuencia del proceso de miniaturización que se presenta la tendencia actual de la micro tecnología.

Para el perfil de velocidades en el fluido se observa que en límite de la región sólido – fluido se presenta una disminución de la velocidad de deslizamiento debido a la interacción entre la pared y el fluido, lo que provoca que se presente una región de transición de un medio continuo a uno molecular dependiendo del grado de rarefacción del gas en el microcanal provocando que el número de Peclet aumente o disminuya dependiendo de este gradiente y por consiguiente la disipación de calor por convección se incremente o decremente dependiendo de los valores que tome este parámetro.

Para resolver el problema en la región del fluido es necesario conocer las variables de la mecánica transferencia de calor, para ser más preciso se requiere resolver la ecuación de la energía en el sólido y el perfil de velocidad en la sección transversal del sistema. En este trabajo, del análisis de escalas en la región del fluido se desprende que las caídas de temperatura en la sección transversal del microcanal son muy pequeñas comparadas con el perfil en desarrollo a lo largo del microcanal, es decir; en la dirección longitudinal, además de que se obtienen varios parámetros adimensionales asociados con la transferencia de calor en el fluido que afectan significativamente el flujo de calor de las paredes hacia el fluido y su estudio requiere de un cuidadoso análisis.

El acoplamiento del problema conjugado se observa en las ecuaciones resueltas por métodos asintóticos para la región del fluido y del sólido así como la interdependencia entre ambas soluciones, para la región del sólido es importante considerar en su solución los perfiles de temperatura en el fluido los cuales determinan si el sistema de enfriamiento es lo suficientemente eficaz para disipar elevados flujos calor en la región del sólido o si es

necesario cambiar las características geométricas del microcanal, el flujo de gas utilizado en los sistemas de enfriamiento considerando su conductividad térmica y uno de los principales enfoques a nivel micro como lo son el deslizamiento y el salto de temperatura que ayudan significativamente a entender el fenómeno de transferencia de calor a escalas micrométricas por convección presente en el problema conjugado de Graetz. Por lo que el presente trabajo deja abierta la puerta para obtener un modelo en el que se puedan considerar más efectos que estén presentes en el área de transferencia de calor por convección en sistemas microelectrónicos, así como la relación entre parámetros y con esto obtener resultados que puedan predecir e indicar las mejores condiciones de trabajo de dichos sistemas.

Referencias

- [1] Latif M. Jiji, Heat Convection, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006.
- [2] Mohamed Gad-el-Hak, The Fluid Mechanics of Microdevices – The Freeman Scholar Lecture, Journals of Fluid Engineering, ASME 1999.
- [3] Ho-Eyoul Jeon, Jae-Tack Jeong, Extended Graetz problem including streamwise conduction and viscous dissipation in microchannel, International Journal of Heat and Mass Transfer 49 (2006) 2151 – 2157.
- [4] J. V. Rij, T. Harman, T. Ameel, The effect of creep flow on two-dimensional isoflux microchannels 46 (2007) 1095-1103
- [5] Babaros Çetin, Analysis of single phase convective heat transfer in microtubes and microchannels, Thesis of Master of Science in Mechanical Engineering, MIT, 2005.
- [6] Frank M. White, Fluid Mechanics, McGraw-Hill, 2003.
- [7] Satish G. Kandlikar, Srinivas Garimella, Dongqing Li, Stéphane Colin, Michael R. King, Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels, 2006 Elsevier Ltd.
- [8] S.KakaÇ, L.L. Vasiliev, Y. Bayazitoglu and Y. Yener, Microscale Heat Transfer fundamentals and applications, NATO Science Series, 18-30 July 2004.
- [9] Babaros Çetin, Almila G., S.KakaÇ, Slip – Flow heat transfer in microtubes with axial conduction and viscous dissipation – An Extended Graetz Problem. Internal Journal of Thermal Sciences, 2008.
- [10] Randall F. Barron, Xianming Wang, Timothy A. Ameel and Roberto O. Warrington, The Graetz problem extended to slip-flow. Elsevier Science 1997.
- [11] E. B. Arkilic, M. A. Schmidt, K. S. Breuer, Gaseous slip flow in long microchannels.

- [12] George Karniadakis, Ali Beskok, Narayan Aluru, *Microflows and Nanoflows Fundamentals and simulation*, Springer 2005.
- [13] Robert Inman, *Laminar slip flow heat transfer in a parallel-plate channel or a round tube with uniform wall heating*, Nasa Technical note, Nasa Tnd-2393.
- [14] A. Aziz, Nick Niedbalski, *Thermally developing microtube gas flow with axial conduction and viscous dissipation*, *International Journal of Thermal Sciences*, Elsevier, 2010.
- [15] O. Bautista, F. Mendez, *Internal heat generation in a discrete heat source: Conjugate heat transfer analysis*, *Applied Thermal Engineering*, Elsevier, 2006.
- [16] Mohamed Gad-el-Hak, *Comments on “critical” view on new results in micro-fluid mechanics*, *Heat and Mass Transfer*, Pergamon, 2003.
- [17] Xiaojin Wei, Yogendra Joshi, *Experimental and numerical study of sidewall profile effects on flow and heat transfer inside microchannels*, *Heat and Mass Transfer*, Elsevier, 2007.
- [18] G. Hetsroni, A. Mosyak, E. Pogrebnyak, L.P. Yarin, *Flow fluid in microchannels*, *Heat and Mass Transfer*, Elsevier, 2005.
- [19] G. Hetsroni, A. Mosyak, E. Pogrebnyak, L.P. Yarin, *Heat transfer in microchannels: Comparison of experiments with theory and numerical results*, *Heat and Mass Transfer*, Elsevier, 2005.
- [20] Poh-Seng Lee, Suresh V. Garimella, Dong Liu, *Investigation of heat transfer in rectangular microchannels*, *Heat and Mass Transfer*, Elsevier, 2004.
- [21] G.E. Karniadakis, A. Beskok, *Micro Flows: Fundamentals and Simulation*, Springer-Verlag, New York 2002.
- [22] Nishanth Dongari, Abhishek Agrawal, Amit Agrawal, *Analytical Solution of gaseous slip flow in long microchannels*. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50(2007) 3411-3421.
- [23] Orhan Aydin, M. Avci, *Analysis of laminar heat transfer in micro-Poiseuille flow*, *International Journal of Thermal Sciences* 46 (2007) 30-37
- [24] J. V. Rij, T. Ameer, T. Harman, *The effect of viscous dissipation and rarefaction on rectangular microchannel convective heat transfer*.

- [25] Y. Bayazitoglu, G. Tunc, K. Wilson, I. Tjahjono, Convective heat transfer for single-phase gases in microchannel slip flow: analytical solutions Springer, Printed in the Netherlands (2005) 125-148.
- [26] Frank P. Incropera, David P. DeWitt, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, John Wiley and Sons, 2002.
- [27] Shou-Shing Hsieh, Huang-Hsiu Tsai, Chih-Yi, Ching-Feng Huang, Cheng-Ming Chien, Gas flow in a long microchannel, International journal of heat and mass transfer 47 (2004) 3877-3887.
- [28] Jiang-Tao Liu, Xiao-Feng Peng, Wei-Mon Yan, Numerical study of fluid and heat transfer in microchannel cooling passages, International journal of heat and mass transfer 50 (2007) 1855-1864.
- [29] A. Bejan, Convection Transfer, Wiley, New York, 1993.
- [30] Frank Kreith, Mark S. Bohn, Principles of Heat Transfer, Thomson Learning, 2001.
- [31] Yunus A. Cengel, Transferencia de calor, McGraw-Hill, 2004.