



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Unidad Azcapotzalco**

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

**SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA DEFORMACIÓN DE
ONDAS LARGAS QUE SE PROPAGAN EN UN CANAL
CON ANCHO CONSTANTE Y FONDO VARIABLE.**

**T E S I S PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS EN TERMOFLUIDOS PRESENTA:
ING. EMMANUEL ARCOS HERNÁNDEZ**

**DIRECTORES DE TESIS: DR. ERIC GUSTAVO BAUTISTA GODÍNEZ
DR. JUAN PABLO ESCANDÓN COLÍN**

MÉXICO D. F. 02 DE DICIEMBRE 2011





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México D.F el día 16 del mes noviembre del año 2011, el que suscribe Emmanuel Arcos Hernández alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Termodinámicos con número de registro A100108, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica unidad Azcapotzalco, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Eric Gustavo Bautista Godínez y cede los derechos del trabajo intitulado Solución analítica de la deformación de ondas largas que se propagan en un canal con ancho constante y fondo variable, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones erbautista@ipn.mx, earcosh361@ipn.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Ing. Emmanuel Arcos Hernández

Agradecimientos

A mi amada esposa
Yessica Nathaly Velazquez Murillo
por su amor y paciencia en este largo camino

Para ti Kenia,
mi mayor preocupación y felicidad

A mis padres, Elodia Ma. Del Carmen y Félix Manuel;
y hermanos, Verónica, Angélica y José Carlos.

Al Dr. Eric G. Bautista Godínez,
por sus enseñanzas académicas y científicas,
pero aún más por enseñarme a ver la vida en otras escalas.

Al Dr. Federico Méndez Lavielle,
por sus importantes comentarios y apoyo en este trabajo.

Al claustro de profesores de Termofluidos,
de la SEPI ESIME UA, por sus enseñanzas académicas y científicas.

Al CONACyT,
por haberme otorgado una beca durante mis estudios de maestría.

Al proyecto CONACyT,
de ciencia básica con número de referencia 84600, titulado,
“Análisis y optimización de la energía del oleaje y su transformación
en energía mecánica a través de una columna de agua oscilante ”,
por el financiamiento de esta tesis.

Al programa institucional de formación de investigadores (PIFI),
por otorgarme una beca, del proyecto de investigación
“Propagación del oleaje en el interior de puertos
de geometría regular, con condiciones de flujo somero ”,
con número de referencia SIP-20113160.

Al COMECyT,
por el apoyo económico recibido.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Antecedentes	5
1.3. Propuesta	10
1.4. Objetivos	12
1.5. Aproximación asintótica de ondas extremadamente largas . . .	12
1.6. Teoría de Airy para ondas muy largas	14
2. Planteamiento del problema	19
2.1. Descripción del problema físico	19
2.2. Hipótesis	20
2.3. Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno	24
3. Teoría WKB: límite asintótico $\kappa \ll 1$	26
3.1. Solución asintótica	26
4. Coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje	31
4.1. Coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje	31
5. Resultados	37
Conclusiones	53
Bibliografía	55

Índice de figuras

1.1.	Representación esquemática de los límites entre una costa y el mar: (a) plataforma continental, (b) pendiente continental, (c) incremento de la plataforma continental, (d) desfiladero submarino, (e) llanura abisal.	1
1.2.	Erosión de playas.	2
1.3.	Estructuras rompeolas.	3
1.4.	Concentrador de oleaje tipo Tapchan.	3
1.5.	Propagación de tsunamis.	4
1.6.	Representación esquemática de la propagación del oleaje sobre un fondo variable: (a) propagación del oleaje hacia la plataforma, (b) transformación del oleaje sobre la pendiente, (c) oleaje reflejado y transmitido	11
1.7.	Representación esquemática del fondo del mar y de las condiciones de frontera en dos dimensiones.	15
2.1.	Esquema del modelo físico en estudio.	20
5.1.	Comparación del coeficiente de reflexión del oleaje en un escalón infinito usando el modelo presente con resultados obtenidos en Lamb (1932), Sugimoto et al., (1987) y Lin (2004).	38
5.2.	Comparación del coeficiente de transmisión del oleaje en un escalón infinito usando el modelo presente con resultados obtenidos por Lamb (1932), Sugimoto et al., (1987) y Lin (2004).	39
5.3.	Coeficiente de reflexión C_R como una función del parámetro relativo de profundidades ε con un $\gamma = 1$ para distintos valores del parámetro cinemático κ	41

5.4.	Coeficiente de transmisión C_T como una función del parámetro relativo de profundidades ε con un $\gamma = 1$ para distintos valores del parámetro cinemático κ	42
5.5.	Coeficiente de reflexión C_R , como una función del parámetro relativo de profundidades ε , con un $\kappa = 0.02$, para distintos valores de la pendiente m	43
5.6.	Coeficiente de transmisión C_T , como una función del parámetro relativo de profundidades ε , con un $\kappa = 0.02$, para distintos valores de la pendiente m	44
5.7.	Coeficiente de reflexión C_R , como una función del parámetro cinemático κ con un $m = 1$, para distintos valores del parámetro relativo de profundidades ε	45
5.8.	Coeficiente de transmisión C_T , como una función del parámetro cinemático κ con un $m = 1$, para distintos valores del parámetro relativo de profundidades ε	46
5.9.	Coeficiente de reflexión C_R , como una función del parámetro cinemático κ , con un $m = 10$, para distintos valores del parámetro relativo de profundidades ε	48
5.10.	Coeficiente de transmisión C_T , como una función del parámetro cinemático κ , con un $m = 10$, para distintos valores del parámetro relativo de profundidades ε	49
5.11.	Amplitud adimensional de las ondas del océano $\bar{\xi}$ en función de la coordenada adimensional $\bar{\chi}$, con un $\kappa = 0.001$, para distintos valores de ε y m , respectivamente.	50
5.12.	Amplitud adimensional de las ondas del océano $\bar{\xi}$ en función de la coordenada adimensional $\bar{\chi}$, con un $\kappa = 0.004$, para distintos valores de ε	51
5.13.	Amplitud adimensional de las ondas del océano $\bar{\xi}$ en función de la coordenada adimensional $\bar{\chi}$, con un $\varepsilon = 0.2$ y $m = 0.008$, para distintos valores del parámetro cinemático κ	52

Resumen

En esta tesis se resuelve teóricamente la hidrodinámica de la propagación del oleaje que incide sobre una superficie inclinada. Se presenta un modelo adimensional lineal que predice el movimiento de las ondas largas del océano sobre la geometría seleccionada. Para llevar a cabo este análisis las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento basadas en la teoría de flujo somero, se adimensionalizan y se resuelven empleando la técnica de perturbación singular WKB (Wentzel, Kramers y Brillouin). El sistema de ecuaciones adimensional depende de tres parámetros adimensionales: Un parámetro cinemático κ que relaciona la competencia entre los efectos gravitatorios y los cinemáticos, el parámetro geométrico ε relaciona dos profundidades características del modelo en estudio y m es la pendiente del fondo. Usando condiciones de frontera de acoplamiento se obtienen expresiones para los coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje.

Abstract

In this work, we treat theoretically the hydrodynamic propagation of water waves propagating on an inclined face. We show a linear dimensionless model to predict the motion of the long ocean waves over the selected geometry. In order to predict this analysis, the mass and momentum balance equations based on the shallow water waves theory, were nondimensionalized and solved using the WKB (Wentzel, Kramers and Brillouin) singular perturbation technique. The mentioned governing equations contain three dimensionless parameters: a kinematical parameter κ which denotes the ratio of the potential head due to gravity, to the kinetic head of the ocean waves along the longitudinal axis of the channel. Meanwhile, ε is a dimensionless geometrical parameter that represents a characteristic depth ratio of the inclined face and m is the face slope.

Using matching conditions, simple expressions for the reflection and transmission coefficients are obtained.

Nomenclatura

Letras latinas

A_I	Amplitud incidente, [m].
A_R	Amplitud reflejada, [m].
A_T	Amplitud transmitida, [m].
c	Velocidad de fase, [m/s].
H	Altura de la onda, [m].
h	Profundidad del agua, [m].
h_x	Profundidad en la región 1, [m].
h_2	Profundidad en la región 2, [m].
h_3	Profundidad en la región 3, [m].
k	Número de onda, $k = 2\pi/\lambda$.
L_c	Longitud característica de la región 1, [m].
L_{c2}	Longitud característica de la región 2, [m].
L_{c3}	Longitud característica de la región 3, [m].
m	Pendiente del fondo.
p	Presión hidrostática, Pa .
T	Período del oleaje, [s].
u	Velocidad horizontal, [m/s].
U	Velocidad media del agua en el eje longitudinal x , [m/s].
w	Velocidad vertical [m/s].
x	Coordenada horizontal.
y	Coordenada lateral.
z	Coordenada vertical.

α	Parámetro adimensional geométrico.
ε	Parámetro adimensional de profundidades relativas.
$\eta(x, t)$	Superficie libre del oleaje, [m].
$\bar{\eta}(x)$	Superficie libre del oleaje en la región 1, [m].
$\hat{\eta}_2(x)$	Superficie libre del oleaje en la región 2, [m].
$\hat{\eta}_3(x)$	Superficie libre del oleaje en la región 3, [m].
κ	Parámetro adimensional cinemático.
λ	Longitud de onda, [m].
$\bar{\xi}(\bar{\chi})$	Superficie libre adimensional del oleaje en la región 1.
$\hat{\xi}_2(\hat{\chi}_2)$	Superficie libre adimensional del oleaje en la región 2.
$\hat{\xi}_3(\hat{\chi}_3)$	Superficie libre adimensional del oleaje en la región 3.
ρ	Densidad del agua, [kg/m ³].
ϕ	Potencial de velocidad.
$\bar{\chi}$	Variable adimensional longitudinal en la región 1.
$\hat{\chi}_2$	Variable adimensional longitudinal en la región 2.
$\hat{\chi}_3$	Variable adimensional longitudinal en la región 3.
ω	Frecuencia angular del oleaje, s ⁻¹ .

Subíndices

I, R, T	Oleaje incidente, reflejado y transmitido respectivamente.
$-, +$	Región izquierda y derecha respectivamente.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

El 70 % de la superficie de la tierra esta cubierta de agua, el 30 % restante la ocupan los continentes. A pesar de que las costas marcan los límites visibles entre la tierra y el mar, los continentes en realidad no terminan en las costas, éstos se extienden en los márgenes continentales, como se ilustra en la Fig. 1.1.

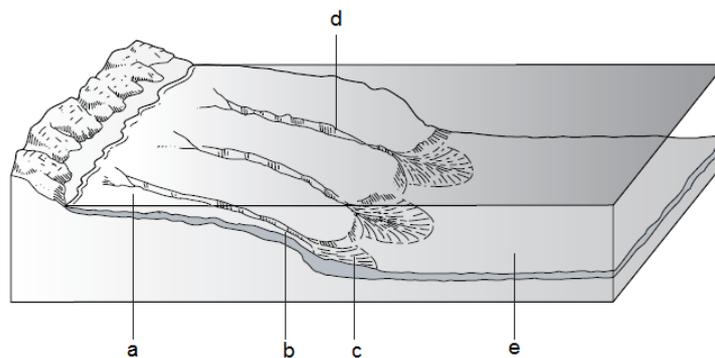


Fig. 1.1: Representación esquemática de los límites entre una costa y el mar: (a) plataforma continental, (b) pendiente continental, (c) incremento de la plataforma continental, (d) desfiladero submarino, (e) llanura abisal.

El margen continental se divide en tres regiones: la plataforma continental, la pendiente continental y el crecimiento continental que se describe en el libro de Walker y Wood (2005). En cuanto a la primera región, el agua es poco profunda comparada con el resto del océano y cerca de la costa el efecto del fondo sobre el oleaje representa uno de los mecanismos más importantes en la hidrodinámica costera (nearshore). El cambio de profundidades en el fondo de la región de costa o litoral genera transformaciones en la propagación del oleaje proveniente del mar, el oleaje perturbado puede provocar la erosión de playas por el transporte de sedimentos y la resonancia de las estructuras costeras causando el deterioro en sus componentes físicos, incluso la destrucción de éstas. Un ejemplo de este fenómeno es la playa de Cancún, México que debido al oleaje y corrientes maríneas ha perdido más de 10 metros de playas por el transporte de sedimento, como se ilustra en la Fig. 1.2.



Fig. 1.2: Erosión de playas.

Con la finalidad de recuperar la playa se diseñaron y construyeron estructuras rompeolas, diques de abrigo y otras estructuras marítimas para la conservación y retención de sedimentos en las playas de Cancún, como se ilustra en la Fig. 1.3.



Fig. 1.3: Estructuras rompeolas.

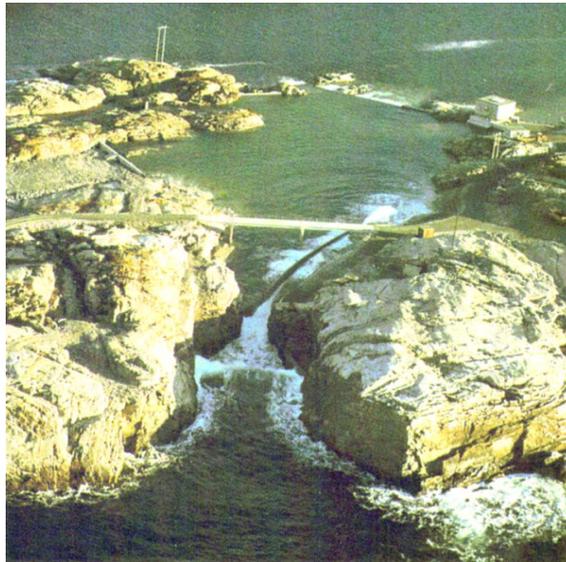


Fig. 1.4: Concentrador de oleaje tipo Tapchan.

En otras situaciones las estructuras costeras también se pueden utilizar como sistema de amplificación del oleaje, por ejemplo el canal de oleaje conocido como TAPCHAN. La finalidad del concentrador de energía es transformar la energía cinética del oleaje en energía potencial, ver Fig. 1.4.



Fig. 1.5: Propagación de tsunamis.

Uno de los principales tópicos de investigación en la hidrodinámica del oleaje, es el estudio de la generación, propagación y evolución de tsunamis y sus efectos en aguas costeras y puertos. Los tsunamis se generan debido a un desplazamiento vertical del fondo marino, el volumen desplazado de agua se propaga sobre el océano dando origen a una onda dispersa que puede convertirse en un tren de ondas, este oleaje puede alcanzar longitudes de onda en un rango de 50 km a 250 km, la velocidad de propagación de esta energía es de alrededor de 650-760 km/h. Las ondas solitarias en la región costera amplifican el desplazamiento de la superficie libre produciendo ondas devastadoras con altura superiores a los 20 m al llegar a la zona de playas, Wu (1981). El tsunami en Japón fue producto de un terremoto ocurrido a las 14:46:23 hora local del viernes 11 de marzo de 2011 que se ubicó en el mar, frente a la costa de Honshu, 130 km al este de Sendai, en la prefectura de Miyagi, Japón. Este terremoto generó ondas de maremoto de hasta 10 m de altura y las consecuencias de este fenómeno en la zona costera fueron devastadoras, como se ilustra en la Fig. 1.5.

El estudio científico de los mecanismos de la hidrodinámica de la propagación del oleaje ha sido de suma importancia en el diseño y optimización de estructuras marítimas de mitigación o amplificación del oleaje.

1.2. Antecedentes

La propagación del oleaje en aguas poco profundas son conocidas en la literatura especializada como ondas largas y cumplen la siguiente relación $h/\lambda < 1/20$ o $kh < \pi/10$ donde h es la profundidad del agua, λ es la longitud de onda y $k = 2\pi/\lambda$ Rahman (2003). A su vez, Svendsen (2006) clasificó las ondas largas como: ondas largas de amplitud moderada cuya relación es $\delta = O(\mu^2) \ll 1$, ondas largas de amplitud pequeña y admite la relación $(\delta/\mu^2) = (A\lambda^2/h^3) \ll O(1)$ y ondas largas de amplitud larga $\delta = O(1) \gg O(\mu^2)$, donde δ es un parámetro de amplitud y relaciona $\delta = H/h$ donde $H = 2A$ y A es la amplitud de la onda, μ es el parámetro de longitud de onda y está dado por $\mu = h/\lambda$. Una de las principales dificultades para obtener una solución analítica de la hidrodinámica del oleaje, se localiza en geometrías complicadas de estuarios naturales, sin embargo, para algunas geometrías simplicadas es posible determinar una solución analítica aproximada.

Los estudios analíticos de la hidrodinámica del oleaje cerca de la región de costa probablemente se iniciaron por Stokes (1647), quien desarrolló la primera teoría de ondas lineal y no-lineal. En la actualidad, esta teoría se refiere como ondas de Stokes. Durante el siguiente siglo, los distintos fenómenos de ondas se analizaron desde el punto de vista matemático, obteniéndose resultados favorables. De importancia particular, desde la perspectiva actual fue el desarrollo de Boussinesq (1847), Korteweg y De Vries (1895), quienes aproximaron una solución para ondas no lineales que se propagan en aguas poco profundas. Debido a la complejidad geométrica que presenta la batimetría del fondo del mar, en la actualidad se hace uso de computadoras digitales, ya

que éstas reducen significativamente las dificultades numéricas que surgen al analizar geometrías complejas, admitiendo variaciones en la profundidad y amplitud. Con base en las teorías establecidas por Stokes, Boussinesq, Korteweg y De Vries surgen constantemente nuevos modelos analíticos, numéricos y experimentales que toman en cuenta efectos geométricos de la región de propagación de las ondas y las características cinemáticas y dinámicas propias del oleaje. La fricción es un efecto a considerar en la propagación de ondas largas en aguas poco profundas. Con la finalidad de estudiar este efecto en el oleaje, usando métodos de perturbación Kreiss (1957) investigó la propagación de ondas periódicas en un canal cerrado por una pared vertical e introdujo el término de fricción a la ecuación clásica de velocidad de Lamb lo cual permitió obtener la solución de primer y segundo orden. En la solución de primer orden se percató que la oscilación está fuertemente influenciada por la fricción del fondo del canal. Considerando esta contribución importante, Gallagher y Munk (1971) analizaron la distorsión no lineal de las ondas largas en aguas poco profundas causada por los efectos siguientes: la amplitud finita del oleaje, la pendiente en el fondo y la fricción. La solución de la ecuación de gobierno se determinó empleando métodos de perturbación y métodos numéricos. Por su parte, Filloux y Snyder (1971) estudiaron la perturbación de las ondas de marea provocada por el viento y fricción del fondo del estuario para diferentes condiciones de oleaje. Basados en los resultados de Filloux y Snyder (1971), Aubrey y Speer (1985) estudiaron experimentalmente la distorsión de mareas astronómicas en sistemas de estuarios poco profundos que se encuentran unidos al océano por un río estrecho. Sus observaciones se fundamentaron en la elevación de la superficie del mar y corrientes horizontales en un tiempo de observación de 29 días, identificando las interacciones no lineales asociadas con el equilibrio del océano. Posteriormente, Speer y Aubrey (1985) obtuvieron la solución de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento tomando en cuenta efectos geométricos y de fricción en el fondo del canal. Los autores determinaron la influencia que tiene la fricción y geometría del canal en la asimetría de la elevación de la superficie libre y

distorsión de la velocidad de las partículas del agua.

La aplicación de la dinámica de fluidos computacional en las últimas décadas ha tenido una relevancia significativa. En este contexto, investigadores como Ouahsine y Bois (2001) modelaron matemáticamente las ecuaciones de Boussinesq con un gradiente de densidad discontinuo. Para simular el movimiento del oleaje, adimensionalizaron las ecuaciones de Navier-Stokes, obteniendo parámetros cinemáticos y dinámicos que permiten que el problema derive en un problema de perturbación singular. Por otro lado, Mead (2004) propuso un método analítico en coordenadas de lagrange con el propósito de trazar la trayectoria de las partículas para evitar tener que generar mallas complejas. En algunos casos, las discontinuidades de flujo se presentan en ondas largas, dando origen a un problema de Riemann. La solución de las ecuaciones de conservación se determinan mediante el método de Godunov y su desarrollo se presenta en otro trabajo por Toro (2001). En esta dirección, Lauter et al., (2005) presentaron una solución analítica de las ecuaciones de aguas poco profundas, transformadas de un sistema cartesiano fijo a un sistema cartesiano rotatorio, donde modelaron el campo de velocidades de las partículas del agua. Guinot (2005) y Baghlani et al., (2008) determinaron la solución del problema de Riemann para un sistema de ecuaciones en dos dimensiones. Por otro lado, Camassa et al., (2006) estudiaron la dinámica del oleaje en aguas someras basados en la estructura Hamiltoniana e implementaron un algoritmo moderno, donde el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias tienen solución en un tiempo finito. Al mismo tiempo, George (2008) desarrolló una aproximación de Riemann para determinar la solución de las ecuaciones de flujo somero, tomando en cuenta las discontinuidades del fondo en la región de propagación del oleaje. El modelo se implementó para la caracterización de amplificación de tsunamis. Wang et al., (2011) obtuvieron la solución de las ecuaciones lineales de conservación de flujo somero para determinar la perturbación del oleaje producida por la geometría del canal de propagación.

La interacción de las ondas largas con estructuras costeras, es un problema clásico en la ingeniería de costas. La deformación y reflexión del oleaje en estructuras naturales (arrecifes de coral, plataforma continental) y artificiales (rompeolas, diques de abrigo) es un importante tópico en el diseño de estructuras costeras. Lamb (1932), fue uno de los pioneros en desarrollar una solución aproximada de las ondas largas para la reflexión y transmisión de una onda incidente que se propaga en un escalón infinito. Posteriormente, Ohare y Davies (1992) propusieron un modelo analítico aproximado de la propagación del oleaje sobre un fondo variable en una dimensión y estimaron el coeficiente de reflexión para distintas topografías. Usando un modelo de flujo potencial, Rhee (1997) obtuvo los coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje que se propaga sobre la pendiente de una plataforma.

Por otro lado, muchos trabajos de investigación estudian la generación, propagación y amplificación de ondas solitarias en el litoral. Por citar algunos, Sugimoto et al., (1987) transformaron las ecuaciones de Boussinesq a un problema de valores iniciales usando el método de Korteweg y De Vries (K-dV), en el que caracterizaron la deformación de una onda solitaria que incide una barrera sumergida. Posteriormente, Silva et al., (2000) presentaron una solución lineal de la deformación de la superficie libre para la interacción de tsunamis con estructuras de defensa y estimaron los efectos de reflexión, transmisión y disipación para rompeolas permeables e impermeables respectivamente, argumentaron que los resultados obtenidos pueden considerarse para el diseño de rompeolas en zonas altamente sísmicas. Por otro lado, Bender y Dean (2003) estudiaron la propagación de las ondas largas sobre trincheras asimétricas y determinaron los coeficientes de reflexión y transmisión con tres métodos distintos: el método del escalón, método de la pendiente y un método numérico. En paralelo, Li et al., (2003) desarrollaron un modelo numérico para determinar el coeficiente de reflexión de un tren de ondas que incide de forma oblicua en un rompeolas impermeable. Usando un modelo

de turbulencia, Lin (2004) determinó los coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje que se propaga sobre obstáculos sumergidos, analizó distintas geometrías del obstáculo y concluyó que el caso particular de un escalón consume hasta un 60 % de la energía total.

En otros trabajos se presenta la solución analítica aproximada, para la ecuación de ondas largas con diferentes condiciones de propagación, basados en las funciones de Bessel. Lin y Liu (2005) usaron las funciones de Bessel para calcular la solución de las ecuaciones de gobierno de ondas largas que se propagan sobre un obstáculo sumergido con forma trapezoidal. Combinando los parámetros geométricos, determinaron el coeficiente de reflexión para un obstáculo con geometría rectangular, escalón infinito y una pendiente lineal. Por otro lado Chang y Liou (2005) y Didenkulova et al., (2002) usaron el método de acoplamiento y funciones de Bessel, para estimar los coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje incidente que se propaga sobre una serie de rompeolas con forma trapezoidal. En particular Jung et al., (2008) propusieron dos soluciones de la ecuación hidrodinámica de la propagación del oleaje en una trinchera y obtuvieron una solución empleando teoría de ondas largas. Considerando ondas oblicuas, Wang et al., (2008) emplearon un método numérico para determinar el coeficiente de reflexión del oleaje, considerando que las ondas inciden en una estructura con pendiente suave. Por otro lado Jung y Cho (2009) propusieron un modelo lineal para calcular los coeficientes de reflexión de ondas largas que se propagan a través de una pendiente constante. La solución de la ecuación de flujo somero fue determinada usando funciones de Bessel. Recientemente, Bautista et al., (2011) propusieron un análisis de perturbación singular, para estudiar el comportamiento hidrodinámico del oleaje, que se propaga sobre un canal de ancho variable y fondo constante.

1.3. Propuesta

El fenómeno de propagación de las ondas largas sobre estructuras sumergidas en el fondo del mar, se ilustran en la Fig. 1.6. Como se observa en la Fig. 1.6(a), el oleaje proveniente del océano se propaga sobre la región 2, donde el fondo es constante. En este contexto, la solución de las ecuaciones de gobierno en esta región ha sido resuelta por Lamb (1932). Con lo que respecta a la región 1, el oleaje se deforma a lo largo de la pendiente de la rampa como se ilustra en la Fig. 1.6(b). Esto genera que la onda incidente se divida en dos ondas: una onda reflejada que viaja hacia la izquierda de la rampa y una onda transmitida que viaja hacia la derecha de ésta, sobre la plataforma en la región 3, como se ilustra en la Fig. 1.6(c). En la literatura especializada presentada en el estado del arte de este trabajo, nos hemos percatado que en la mayoría de las investigaciones se ha resuelto la hidrodinámica del oleaje que corresponde a la región 1 mediante el uso de funciones de Bessel, Frobenius y otras funciones trascendentales, tomando en cuenta variaciones lineales en el ancho y fondo de las estructuras de defensa. En este contexto, en este trabajo se propone un modelo lineal analítico adimensional, que describe la propagación de ondas largas sobre una estructura con pendiente constante. Con el propósito de resolver el presente modelo se aplica el método de perturbación WKB (Wentzel, Kramers y Brillouin) reportado por Bender y Orszag (1978), debido a que permite analizar diferentes geometrías del obstáculo, como la que se presenta en la Fig. 1.6. Por otro lado, si usáramos funciones de Bessel, Frobenius y otras funciones trascendentales, el grado de manipulación matemática y solución es más compleja que el método propuesto en este trabajo.

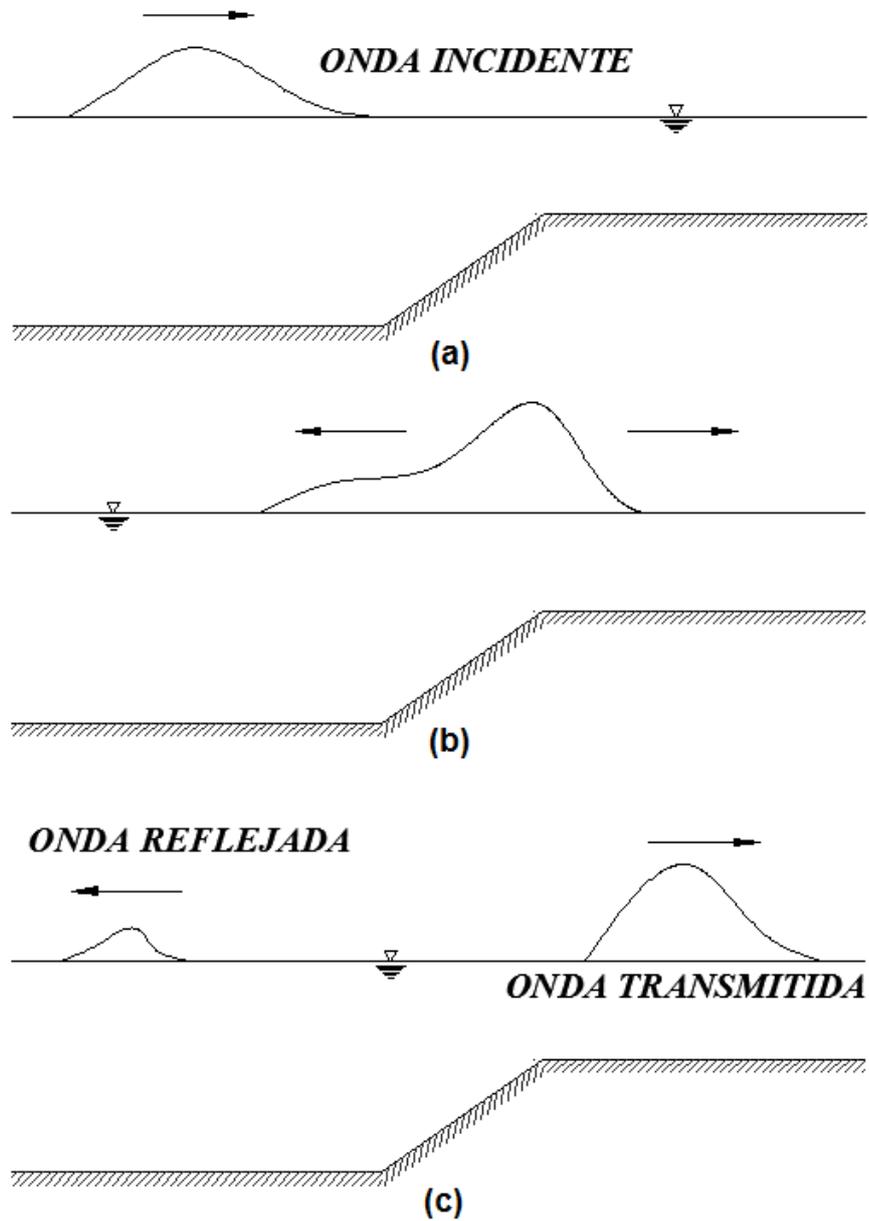


Fig. 1.6: Representación esquemática de la propagación del oleaje sobre un fondo variable: (a) propagación del oleaje hacia la plataforma, (b) transformación del oleaje sobre la pendiente, (c) oleaje reflejado y transmitido

1.4. Objetivos

Objetivo general:

Caracterizar la hidrodinámica del oleaje, en condición de teoría lineal, usando una técnica de perturbación singular WKB.

Objetivos particulares:

Proponer un modelo matemático adimensional de la propagación del oleaje sobre una plataforma con pendiente constante.

Identificar la influencia de los parámetros geométricos y cinemáticos en la hidrodinámica del oleaje.

Determinar una solución analítica aproximada de la variación de la superficie libre del oleaje, que se propaga sobre un fondo con transición lineal.

Obtener los coeficientes de transmisión y reflexión del oleaje para distintos valores de los parámetros adimensionales.

1.5. Aproximación asintótica de ondas extremadamente largas

Las velocidades, la presión de la columna de agua y el perfil de la superficie libre, para el caso de amplitudes pequeñas, se obtiene mediante la teoría de flujo potencial, Dean y Dalrymple (1991).

$$u = \frac{H}{2} \frac{gk}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t), \quad (1.1)$$

$$w = \frac{H}{2} \frac{gk}{\omega} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t), \quad (1.2)$$

$$p = -\rho g z + \frac{\rho g H \cosh k(h+z)}{2 \cosh kh} \cos(kx - \omega t). \quad (1.3)$$

Para una onda progresiva, el desplazamiento de la superficie libre en el mar está dada por

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t), \quad (1.4)$$

En las Ecs. (1.1)-(1.4), u, w, p y η representan las componentes de velocidad de las partículas del agua en dirección horizontal, vertical, la presión de la columna de agua y el perfil de la superficie libre respectivamente. ρ, g, ω, h, z y t describen la densidad del agua, la gravedad, la frecuencia del oleaje, la profundidad del mar, el eje vertical y el tiempo respectivamente; H es la altura de la onda; k es el número de onda y está dado por $2\pi/\lambda$. Para establecer las velocidades u, w y la presión p en el límite de ondas largas donde $kh \ll \pi/10$, se linealizan las Ecs. (1.1)-(1.3), en el límite $z \rightarrow 0$, es decir, para la componente horizontal de la velocidad se tiene

$$u = \frac{H g k}{2 \omega} \cos(kx - \omega t), \quad (1.5)$$

con el propósito de simplificar la componente de velocidad en dirección del flujo, se sustituye la Ec. (1.4) en la Ec. (1.5) y se obtiene:

$$u = \frac{\eta c}{h} \quad (1.6)$$

Donde $c = \sqrt{gh}$ es la velocidad de fase, $\eta(x, t)$ es el perfil de la superficie libre. La expresión anterior muestra que la velocidad horizontal es uniforme en la profundidad.

Por otro lado, para determinar la componente de velocidad vertical de las partículas del agua la Ec. (1.2) se linealiza y se obtiene

$$w = -c \left(1 + \frac{z}{h}\right) \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (1.7)$$

se observa en la igualdad anterior que la componente de velocidad vertical varía linealmente, desde el fondo del mar hasta la superficie libre y es mucho menor en magnitud que u , la proporción de sus valores máximos es

$$\frac{u}{w} = \frac{1}{kh}, \quad (1.8)$$

donde $kh \ll 1$.

Y para el caso de la presión, la Ec. (1.3) se presenta en su forma lineal como

$$p = -\rho gz + \rho g\eta. \quad (1.9)$$

Se observa en la expresión anterior, que la presión bajo las ondas largas es hidrostática y la aceleración vertical de las partículas es pequeña, Dean y Dalrymple (1991).

1.6. Teoría de Airy para ondas muy largas

Tomando en cuenta que el fluido es no viscoso, incompresible y de movimiento irrotacional, la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x se simplifica en la forma siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.10)$$

Para canales esbeltos, la variación lateral de la amplitud es despreciable comparada con la variación longitudinal, Mei et al., (1982), tomando en cuenta que la velocidad horizontal u es uniforme en la profundidad, la Ec. (1.10), se reduce a una ecuación no lineal, como sigue

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.11)$$

tomando en cuenta la Ec. (1.9) que establece que la presión es hidrostática $p = \rho g(\eta - z)$. La Ec. (1.11) se escribe de la forma siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (1.12)$$

La ecuación de conservación de masa bidimensional para un flujo incompresible es la Ec. (1.13).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.13)$$

Condiciones de frontera. Las solución de las Ecs. (1.12) y (1.13) en condiciones de flujo somero requiere de condiciones de frontera específicas, las cuales son de carácter cinemático y dinámico, Dean y Dalrymple (1991).

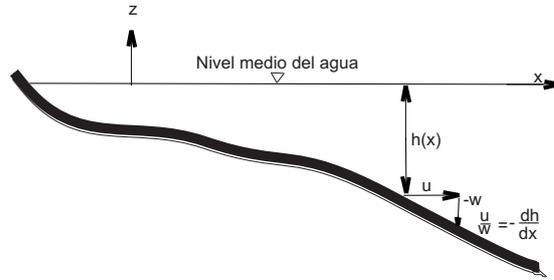


Fig. 1.7: Representación esquemática del fondo del mar y de las condiciones de frontera en dos dimensiones.

Una de éstas condiciones de frontera se ilustra en la Fig. 1.7 y se presenta en el fondo del mar donde la velocidad se expresa de la siguiente forma

$$z = -h(x) \quad w(-h) = -u(-h) \frac{dh}{dx}. \quad (1.14)$$

La condición de frontera cinemática de la superficie libre del mar, relaciona la velocidad de las partículas del agua al aproximarse a la superficie libre y se describe por la siguiente relación

$$z = 0 \quad w(\eta) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (1.15)$$

Asumiendo que la velocidad horizontal no es una función de la profundidad, la Ec. (1.13) se integra en toda la profundidad desde $z = -h$ hasta la superficie libre del océano $z = \eta$, y se obtiene la siguiente relación

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + w(\eta) - w(-h) = 0, \quad (1.16)$$

el primer término de la Ec. (1.16) puede integrarse usando la regla de Leibniz,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} Q(x, y) dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) dy \quad (1.17)$$

$$+ Q(x, \beta(x)) \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} - Q(x, \alpha(x)) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x},$$

y se obtiene la siguiente relación

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + u(-h) \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (1.18)$$

Despejando el primer término de la derecha de la igualdad anterior, se tiene

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz - u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - u(-h) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (1.19)$$

sustituyendo la Ec. (1.19) en la Ec. (1.16) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz - u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - u(-h) \frac{\partial h}{\partial x} + w(\eta) - w(-h) = 0, \quad (1.20)$$

sustituyendo las condiciones de frontera de las Ecs. (1.14) y (1.15) en la Ec. (1.20), se consigue una nueva relación

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz - u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - u(-h) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (1.21)$$

$$+u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + u(-h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Sumando los términos semejantes en la Ec. (1.21), la expresión se reduce

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz = 0. \quad (1.22)$$

Considerando que la componente horizontal de la velocidad es constante sobre la profundidad, la velocidad u puede escribirse como un valor promedio

$$U = \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} u dz, \quad (1.23)$$

sustituyendo la Ec. (1.23) en la Ec. (1.22). La ecuación de continuidad promediada en la profundidad es

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [U(h + \eta)] = 0, \quad (1.24)$$

finalmente, tomando en cuenta que en ondas de amplitud pequeña $h \gg \eta$, la Ec. (1.24) se puede escribir como

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [Uh]. \quad (1.25)$$

De forma análoga la ecuación de cantidad de movimiento, dada por la Ec. (1.12) se integra en la vertical desde $z = -h$ hasta $z = \eta$, considerando amplitudes pequeñas, la componente horizontal de la velocidad ($u \partial u / \partial x$) = 0

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} dz = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} dz, \quad (1.26)$$

la integrales de la Ec. (1.26) se resuelven usando la regla de Leibniz y sustituyendo las condiciones de frontera Ecs. (1.14) y (1.15) dando como resultado

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz = -g(h) \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (1.27)$$

La velocidad u es promediada por la Ec.(1.23), la cual sustituida en la Ec.(1.27) se obtiene

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (1.28)$$

Las Ecs. (1.25) y (1.28) corresponden a las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento promediadas, para el límite de flujo somero.

Capítulo 2

Planteamiento del problema

2.1. Descripción del problema físico

El modelo físico en estudio se muestra en la Fig. 2.1. El eje z es positivo en el sentido vertical, con origen en la superficie libre del agua y el eje horizontal x es positivo hacia la derecha. El modelo físico se divide en tres regiones diferentes R1, R2 y R3 y las profundidades para cada región tienen una distribución lineal de la forma siguiente.

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{ll} R2 : h_2 & x \leq 0 \\ R1 : h_2 - \left(\frac{h_2-h_3}{L}x\right) & 0 \leq x \leq L \\ R3 : h_3 & x \geq L \end{array} \right\}$$

donde h_2 y h_3 son las profundidades correspondientes a las regiones R2 y R3 respectivamente, L es la proyección horizontal de la pendiente en la región R1 y para la regiones R2 y R3 la variable espacial x se extiende de $-\infty \leq x \leq 0$ y $L \leq x \leq \infty$, respectivamente. Se asume que la superficie del fondo es impermeable, lo cual significa que no hay transferencia de masa. El oleaje se propaga desde la región R2 con una amplitud física A_I . Debido al efecto que tiene la pendiente del fondo en la hidrodinámica del oleaje, un porcentaje de

esta energía se refleja con una amplitud A_R y otro se transmite a la región R3 con una amplitud A_T .

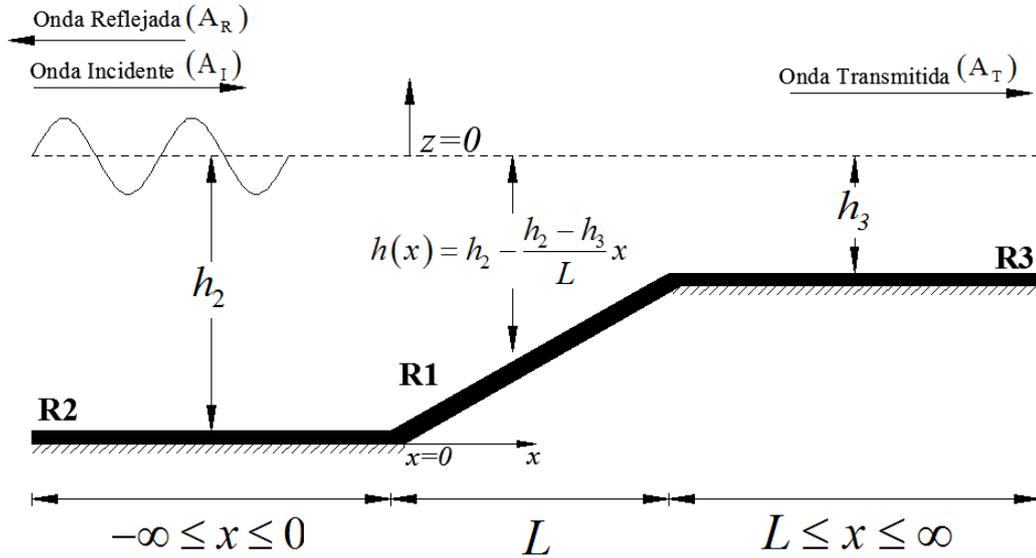


Fig. 2.1: Esquema del modelo físico en estudio.

2.2. Hipótesis

A continuación se presentan las siguientes consideraciones:

1. El flujo es irrotacional.
2. El oleaje que incide en la rampa posee una amplitud natural conocida A_I .
3. La velocidad en dirección vertical es despreciable comparada con la velocidad en dirección horizontal, como se aprecia en la Ec. (1.8) del límite asintótico.
4. En un canal esbelto no existen variaciones en la velocidad transversal como se muestra, Mei et al., (1982).

5. El oleaje perturbado se debe únicamente al efecto de la geometría del fondo del mar con el oleaje.
6. La longitud del oleaje es mucho mayor que la profundidad $h/\lambda \ll 1$.
7. Las amplitudes del oleaje son pequeñas con relación a la profundidad del agua $\eta/h \ll 1$.

De acuerdo con las hipótesis anteriormente señaladas, las ecuaciones de gobierno que describen la hidrodinámica del oleaje en condición de flujo somero, están dadas por

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [Uh]. \quad (2.2)$$

La Ec. (2.1) representa la conservación de cantidad de movimiento y la Ec. (2.2) es la ecuación de conservación de masa, donde $U(x, t)$ es la velocidad media del agua en el canal, $\eta(x, t)$ es el desplazamiento de la superficie del agua con respecto al nivel medio del mar, t es el tiempo, g es la aceleración de la gravedad y $h(x)$ es la variación del fondo en la región R1. Derivando la Ec. (2.2) con respecto al tiempo se tiene

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[h \frac{\partial U}{\partial t} \right], \quad (2.3)$$

sustituyendo la Ec. (2.1) en la Ec. (2.3) resulta

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left[h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right], \quad (2.4)$$

desarrollando la derivada con respecto a x , la Ec. (2.4) se reescribe en la forma siguiente

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \left\{ h \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right\}, \quad (2.5)$$

tomando en cuenta que la variación del fondo en la región R1 en el intervalo $0 \leq x \leq L$ es $h = h_2 - [(h_2 - h_3)/L]x$. La Ec. (2.5) se expresa de la forma siguiente

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \left\{ \left[h_2 - \left(\frac{h_2 - h_3}{L} x \right) \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \left(\frac{h_2 - h_3}{L} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\}. \quad (2.6)$$

La ecuación anterior puede simplificarse a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, considerando que $\eta(x, t)$ es periódica y modulada por una amplitud variable a lo largo de eje longitudinal x

$$\eta = \bar{\eta} \cos(\omega t). \quad (2.7)$$

Donde $\bar{\eta}(x)$ es el desplazamiento de la superficie del agua en cualquier sección transversal en la región R1 y varía en x , $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia angular del oleaje y T es el período de oscilación. Sustituyendo la Ec. (2.7) en la Ec. (2.6) se obtiene la ecuación

$$g \left\{ \left[h_2 - \left(\frac{h_2 - h_3}{L} x \right) \right] \frac{d^2 \bar{\eta}}{dx^2} - \left(\frac{h_2 - h_3}{L} \right) \frac{d\bar{\eta}}{dx} \right\} + \omega^2 \bar{\eta} = 0. \quad (2.8)$$

Con las siguientes condiciones de frontera

$$x = 0 \quad \bar{\eta} = A_I + A_R, \quad (2.9)$$

y

$$x = L \quad \bar{\eta} = A_T. \quad (2.10)$$

El problema de valores en la frontera descrito por la Ec. (2.8) corresponde a una ecuación diferencial lineal ordinaria, de segundo orden, homogénea y con coeficientes variables que describe la hidrodinámica del oleaje en la región R1.

Para las regiones R2 y R3, donde las profundidades son constantes en los intervalos $x \leq 0$ y $x \geq L$ respectivamente, la ecuación de gobierno está dada por la siguiente expresión

$$\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2} = gh_{2(3)} \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.11)$$

donde $h_{2(3)}$ es la profundidad correspondiente a la región R2 y R3, respectivamente. La Ec. (2.11) puede expresarse como un problema de valores en la frontera, considerando que la amplitud del oleaje es periódica y modulada por la siguiente ecuación

$$\eta = \hat{\eta}_{2(3)} \cos(\omega t). \quad (2.12)$$

Sustituyendo la Ec. (2.12) en la Ec. (2.11), se obtiene

$$\frac{d^2 \hat{\eta}_{2(3)}}{dx^2} + k_{2(3)}^2 \hat{\eta}_{2(3)} = 0. \quad (2.13)$$

Donde $\hat{\eta}_{2(3)}$ es el desplazamiento de la superficie libre del agua en cualquier sección transversal de las regiones R2 y R3, respectivamente y $k = \omega/(gh_{2(3)})^{1/2}$.

La Ec.(2.13) tiene como solución general

$$\hat{\eta}_2(x) = A_I e^{ik_2 x} + A_R e^{-ik_2 x}. \quad (2.14)$$

$$\hat{\eta}_3(x) = A_T e^{ik_3 x}. \quad (2.15)$$

La Ec. (2.14) representa la amplitud total en la región R2 y está compuesta por la suma de la onda incidente más la reflejada. El signo negativo en la función exponencial que multiplica a A_R , indica que la onda se propaga en sentido opuesto al eje x .

En el caso de la Ec. (2.15) la amplitud únicamente es función de la amplitud transmitida debido a que no existe ningún obstáculo o cambio en la sección transversal del canal que pudiera reflejar el oleaje en esa región. Cabe

precisar que las incógnitas A_R y A_T son amplitudes de reflexión y transmisión, que se determinarán empleando condiciones de frontera apropiadas, Mei et al., (1982).

2.3. Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno

Con el propósito de resolver el problema de la hidrodinámica del oleaje considerando flujo potencial y amplitudes pequeñas, en esta sección se presenta las ecuaciones de gobierno adimensionales introduciendo las siguientes variables adimensionales

$$\bar{\xi} = \frac{\bar{\eta}}{h_2}, \quad \bar{\chi} = \frac{x}{L_c}, \quad (2.16)$$

donde $L_c = \sqrt{L^2 + (h_2 - h_3)^2}$. Sustituyendo las variables adimensionales anteriores en la Ec. (2.8) y mediante simplificaciones algebraicas se obtiene la siguiente expresión

$$\kappa \frac{d^2 \bar{\xi}}{d\bar{\chi}^2} - \frac{\kappa \alpha}{(1 - \alpha \bar{\chi})} \frac{d\bar{\xi}}{d\bar{\chi}} + \frac{\bar{\xi}}{(1 - \alpha \bar{\chi})} = 0, \quad (2.17)$$

el parámetro adimensional cinemático κ y geométrico α están dados por

$$\kappa = \frac{gh_2}{\omega^2 [L^2 + (h_2 - h_3)^2]} \quad y \quad \alpha = \sqrt{1 + m^2} (1 - \varepsilon),$$

los parámetros m y ε son,

$$m = \frac{h_2 - h_3}{L} \quad y \quad \varepsilon = \frac{h_3}{h_2}.$$

Y representan la pendiente de la rampa y la profundidad relativa, respectivamente.

Para valores pequeños del parámetro κ es posible obtener una solución aproximada de la Ec. (2.17), usando técnicas de perturbación. El parámetro κ representa la competencia entre el efecto potencial, gh_2 , y el efecto cinemático, $\omega^2[L^2 + (h_2 - h_3)^2]$ asociado a la frecuencia ω del oleaje en aguas poco profundas. Desde el punto de vista físico, cuando el límite $\kappa \ll 1$, se interpreta como la propagación de una onda en flujo somero donde los efectos cinemáticos prevalecen. Desde el punto de vista geométrico, el límite $\kappa \ll 1$ corresponde a considerar una pendiente inclinada con una proyección horizontal, L , muy larga comparada con la profundidad h_2 para valores finitos de la frecuencia ω y la altura h_3 . En la siguiente sección se determina una solución asintótica de la Ec. (2.17) considerando la relevancia de los casos prácticos en el límite anterior.

Capítulo 3

Teoría WKB: límite asintótico

$$\kappa \ll 1$$

3.1. Solución asintótica

En esta sección, se determina la solución analítica aproximada de la Ec. (2.17), mediante la técnica de perturbación WKB (Wenzel, Kramers y Brillouin), en el límite asintótico $\kappa \ll 1$.

La técnica WKB puede aplicarse cuando la ecuación diferencial que describe el fenómeno en estudio es lineal y la derivada de orden superior está multiplicada por el parámetro pequeño. Cabe precisar que para usar esta técnica, no importa si la ecuación diferencial está expresada en variables físicas o en forma adimensional. Desde el punto de vista físico, el parámetro pequeño κ establece que los efectos gravitatorios son dominados por los efectos cinemáticos.

Para aplicar la técnica de perturbación WKB, la Ec. (2.17) se transforma a su forma canónica, usando la transformación de Liouville, presentada por Milson (1998).

$$\phi''(\bar{\chi}) + I(\bar{\chi})\phi(\bar{\chi}) = 0, \tag{3.1}$$

donde $\phi(\bar{\chi})$ corresponde a un cambio de variable de la forma,

$$\phi(\bar{\chi}) = \bar{\xi}(\bar{\chi}) e^{\frac{1}{2\kappa} \int_0^{\bar{\chi}} b(\bar{\chi}) d\bar{\chi}}, \quad (3.2)$$

el coeficiente variable $I(\bar{\chi})$ en la Ec. (3.1) se calcula mediante la siguiente relación matemática,

$$I(\bar{\chi}) = \frac{4\kappa c - 2\kappa b' - b^2}{4\kappa^2}. \quad (3.3)$$

Las Ecs. (3.2) y (3.3), los coeficientes b, b' y c , corresponden a los factores del segundo y tercer termino del miembro izquierdo de la Ec. (2.17)

$$b = -\frac{\kappa\alpha}{1 - \alpha\bar{\chi}}, \quad b' = -\frac{\kappa\alpha^2}{(1 - \alpha\bar{\chi})^2}, \quad c = \frac{1}{(1 - \alpha\bar{\chi})}.$$

Sustituyendo los términos anteriores en las Ecs. (3.2) y (3.3)

$$\phi(\bar{\chi}) = \sqrt{(1 - \alpha\bar{\chi})} \bar{\xi}(\bar{\chi}), \quad (3.4)$$

y

$$I(\bar{\chi}) = \frac{1}{\kappa(1 - \alpha\bar{\chi})} + \frac{\alpha^2}{4(1 - \alpha\bar{\chi})^2}. \quad (3.5)$$

Sustituyendo la Ec. (3.5) en la Ec. (3.1) y multiplicando la ecuación resultante por el parámetro adimensional κ , se obtiene

$$\kappa\phi''(\bar{\chi}) + \left[\frac{1}{(1 - \alpha\bar{\chi})} + \frac{\kappa\alpha^2}{4(1 - \alpha\bar{\chi})^2} \right] \phi(\bar{\chi}) = 0. \quad (3.6)$$

La Ec. (3.6) representa la forma canónica de la Ec. (2.17). La solución de la Ec. (3.6) se propone como una serie de potencias de la forma

$$\phi(\bar{\chi}) \sim \exp \left[\frac{1}{\varsigma} \sum_{n=0}^{\infty} \varsigma^n S_n(\bar{\chi}) \right], \quad \varsigma \rightarrow 0; \quad (3.7)$$

con primera y segunda derivadas, dadas por

$$\phi'(\bar{\chi}) \sim \left[\frac{1}{\varsigma} \sum_{n=0}^{\infty} \varsigma^n S'_n(\bar{\chi}) \right] \exp \left[\frac{1}{\varsigma} \sum_{n=0}^{\infty} \varsigma^n S_n(\bar{\chi}) \right], \quad \varsigma \rightarrow 0; \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \phi''(\bar{\chi}) \sim & \left[\frac{1}{\varsigma^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varsigma^n S'_n(\bar{\chi}) \right)^2 + \frac{1}{\varsigma} \sum_{n=0}^{\infty} \varsigma^n S''_n(\bar{\chi}) \right] \\ & \exp \left[\frac{1}{\varsigma} \sum_{n=0}^{\infty} \varsigma^n S_n(\bar{\chi}) \right], \quad \varsigma \rightarrow 0; \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde S_n es la fase no constante y de lenta variación en la región analizada, por otro lado ς se entiende como una función de fase y es una variable adimensional desconocida, ésta puede obtenerse como una función del parámetro κ , donde $\varsigma \rightarrow O(\kappa)$, ver Bender y Orszag (1978).

Teniendo en cuenta las Ecs. (3.7)-(3.9) y sustituyéndolas en la Ec. (3.6), se obtiene la siguiente ecuación, que es válida hasta el orden uno de S

$$\frac{\kappa}{\varsigma^2} S_0'^2 + \frac{\kappa}{\varsigma} 2S_0' S_1' + \kappa S_1'^2 + \frac{\kappa}{\varsigma} S_0'' + \kappa S_1'' + \left[\frac{1}{(1 - \alpha\bar{\chi})} + \frac{\kappa\alpha^2}{4(1 - \alpha\bar{\chi})} \right] = 0. \quad (3.10)$$

El término dominante de la Ec. (3.10), es $\kappa S_0'^2/\varsigma^2$, por lo tanto mediante un balance dominante éste debe tener el mismo orden de magnitud que la unidad, Holmes (1995), con lo cual se puede proponer la siguiente relación

$$\frac{\kappa}{\varsigma^2} \sim 1,$$

obteniéndose

$$\varsigma = \kappa^{1/2}. \quad (3.11)$$

Reemplazando la relación anterior en la Ec. (3.10) y agrupando términos de la misma potencia de κ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \kappa^0 \left[S_0'^2 + \frac{1}{(1 - \alpha\bar{\chi})} \right] + \kappa^{1/2} [2S_0'S_1' + S_0''] & \quad (3.12) \\ + \kappa^1 \left[S_1'^2 + S_1'' + \frac{\kappa\alpha^2}{4(1 - \alpha\bar{\chi})} \right] & = 0. \end{aligned}$$

Agrupando los términos de orden κ^0 y $\kappa^{1/2}$ de la Ec. (3.12) se tiene

$$\kappa^0 : S_0'^2 + \frac{1}{(1 - \alpha\bar{\chi})} = 0, \quad (3.13)$$

y

$$\kappa^{1/2} : 2S_0'S_1' + S_0'' = 0. \quad (3.14)$$

Despejando S_0' de la Ec. (3.13), se obtiene

$$S_0' = \pm \frac{i}{(1 - \alpha\bar{\chi})}, \quad (3.15)$$

donde $i = (-1)^{1/2}$; integrando la ecuación anterior con respecto a la variable $\bar{\chi}$, la solución de S_0 resulta

$$S_0 = \pm \frac{2i}{\alpha} (1 - \alpha\bar{\chi})^{1/2} + C. \quad (3.16)$$

El procedimiento de solución para el orden $\kappa^{1/2}$ es de forma similar al que se desarrolló en la solución del orden κ^0 . Despejando a S_1' de la Ec. (3.14) y teniendo en cuenta la primera y segunda derivada de S_0 , resulta

$$S_1' = -\frac{\alpha}{4(1 - \alpha\bar{\chi})^{1/2}}, \quad (3.17)$$

la solución de S_1 está dada por;

$$S_1 = \frac{1}{4} \ln(1 - \alpha\bar{\chi}) + D. \quad (3.18)$$

Las constantes C y D en las Ecs. (3.16) y (3.18), se determinan con condiciones de frontera apropiadas. Sustituyendo los valores de S_0 y S_1 en la Ec. (3.7) se obtiene la solución analítica aproximada de la Ec. (3.6)

$$\phi(\bar{\chi}) = (1 - \alpha\bar{\chi})^{1/4} \left(Ce^{\frac{2(1-\alpha\bar{\chi})^{1/2}}{\kappa^{1/2}\alpha}i} + De^{-\frac{2(1-\alpha\bar{\chi})^{1/2}}{\kappa^{1/2}\alpha}i} \right). \quad \kappa \rightarrow 0. \quad (3.19)$$

Finalmente, reemplazando la Ec.(3.19) en la Ec. (3.4), se obtiene la solución analítica aproximada de la Ec. (2.17)

$$\bar{\xi}(\bar{\chi}) = \frac{1}{(1 - \alpha\bar{\chi})^{1/4}} \left(Ce^{\frac{2(1-\alpha\bar{\chi})^{1/2}}{\kappa^{1/2}\alpha}i} + De^{-\frac{2(1-\alpha\bar{\chi})^{1/2}}{\kappa^{1/2}\alpha}i} \right). \quad \kappa \rightarrow 0. \quad (3.20)$$

Con el propósito de adimensionalizar las ecuaciones de gobierno de la regiones R2 y R3, se presentan las variables adimensionales

$$\hat{\xi} = \frac{\hat{\eta}_2}{h_2}, \quad \hat{\chi} = \frac{x}{(gh_2)^{1/2}/\omega} \quad y \quad \tilde{\xi} = \frac{\hat{\eta}_3}{h_3}, \quad \tilde{\chi} = \frac{x}{(gh_3)^{1/2}/\omega}. \quad (3.21)$$

Sustituyendo las variables adimensionales anteriores en las Ecs. (2.14) y (2.15), se obtienen las soluciones en su forma adimensional

$$\hat{\xi}(\hat{\chi}) = \beta_I e^{\hat{\chi}i} + \beta_R e^{-\hat{\chi}i}, \quad (3.22)$$

y

$$\tilde{\xi}(\tilde{\chi}) = \beta_T e^{\tilde{\chi}i}. \quad (3.23)$$

Donde $\beta_I = A_I/h_2$, $\beta_R = A_R/h_2$ y $\beta_T = A_T/h_3$. Las constantes complejas β_R y β_T se determinan con las condiciones de frontera apropiadas. En la siguiente sección se muestra el procedimiento para estimar las constantes C , D , β_R y β_T de las Ecs. (3.20), (3.22) y (3.23).

Capítulo 4

Coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje

4.1. Coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje

Desde un punto vista energético, en la hidráulica marítima se definen los coeficientes de reflexión C_R y transmisión C_T del oleaje, éstos representan el porcentaje de energía que se refleja o se transmite, respectivamente, como una consecuencia de las variaciones geométricas en la zona de propagación, la suma de éstos debe corresponder a la energía total del oleaje incidente.

Desde un punto de vista de ingeniería, la importancia de estos coeficientes radica, en que permiten cuantificar la amplitud del oleaje que se refleja y que se transmite, con lo cual es posible obtener alturas de oleaje que permitan, en una primera aproximación, diseñar estructuras marítimas, eficientes y seguras.

Con el propósito de determinar los coeficientes de reflexión y transmisión, se considera que la elevación y la pendiente de la superficie libre del agua en la fronteras entre cada región, deben prevalecer. Para cumplir la condición anterior se aplican las condiciones de frontera acopladas.

Para las regiones R2 y R1

$$\hat{\xi}|_{\hat{\chi}=0} = \bar{\xi}|_{\bar{\chi}=0} \quad y \quad \left. \frac{d\hat{\xi}}{d\hat{\chi}} \right|_{\hat{\chi}=0} = \kappa^{1/2} \left. \frac{d\bar{\xi}}{d\bar{\chi}} \right|_{\bar{\chi}=0}, \quad (4.1)$$

similarmente, para las regiones R1 y R3

$$\bar{\xi}|_{\bar{\chi}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}} = \varepsilon \tilde{\xi}|_{\tilde{\chi}=\frac{\omega L}{(gh_3)^{1/2}}} \quad y \quad \kappa^{1/2} \left. \frac{d\bar{\xi}}{d\bar{\chi}} \right|_{\bar{\chi}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}} = \varepsilon^{1/2} \left. \frac{d\tilde{\xi}}{d\tilde{\chi}} \right|_{\tilde{\chi}=\frac{\omega L}{(gh_3)^{1/2}}} \quad (4.2)$$

sustituyendo las Ecs. (3.20) y (3.22) en la Ec. (4.1) se obtiene las siguientes relaciones algebraicas,

$$-\beta_R + e^{\frac{2}{\kappa^{1/2}\alpha}i}C + e^{-\frac{2}{\kappa^{1/2}\alpha}i}D = \beta_I \quad (4.3)$$

y

$$\beta_R - e^{\frac{2}{\kappa^{1/2}\alpha}i} \left[1 + \frac{\kappa^{1/2}\alpha}{4}i \right] C + e^{-\frac{2}{\kappa^{1/2}\alpha}i} \left[1 - \frac{\kappa^{1/2}\alpha}{4}i \right] D = \beta_I. \quad (4.4)$$

Análogamente, sustituyendo las Ecs. (3.20) y (3.23) en la Ec. (4.2) se obtiene

$$e^{\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\kappa^{1/2}\alpha}i}C + e^{-\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\kappa^{1/2}\alpha}i}D - \varepsilon^{5/4}e^{\frac{\omega L}{(gh_3)^{1/2}i}}\beta_T = 0, \quad (4.5)$$

y

$$-e^{\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\kappa^{1/2}\alpha}i}C \left[1 + \frac{\kappa^{1/2}\alpha}{4\varepsilon^{1/2}}i \right] + e^{-\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\kappa^{1/2}\alpha}i}D \left[1 - \frac{\kappa^{1/2}\alpha}{4\varepsilon^{1/2}}i \right] - \varepsilon^{5/4}e^{\frac{\omega L}{(gh_3)^{1/2}i}}\beta_T = 0. \quad (4.6)$$

Las Ecs. (4.3)-(4.6) se puede expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} -1 & e^{\frac{2}{\kappa^{1/2}\alpha}i} & & e^{-\frac{2}{\kappa^{1/2}\alpha}i} & & 0 \\ 1 & -e^{\frac{2}{\kappa^{1/2}\alpha}i} \left(1 + \frac{\kappa^{1/2}\alpha}{4}i\right) & & e^{-\frac{2}{\kappa^{1/2}\alpha}i} \left(1 + \frac{\kappa^{1/2}\alpha}{4}i\right) & & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\kappa^{1/2}\alpha}i} & & e^{\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\kappa^{1/2}\alpha}i} & & -\varepsilon^{5/4}e^{\frac{\omega L}{(gh_3)^{1/2}}i} \\ 0 & -e^{\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\kappa^{1/2}\alpha}i} \left(1 + \frac{\kappa^{1/2}\alpha}{4\varepsilon^{1/2}}i\right) & & -e^{\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\kappa^{1/2}\alpha}i} \left(1 + \frac{\kappa^{1/2}\alpha}{4\varepsilon^{1/2}}i\right) & & -\varepsilon^{5/4}e^{\frac{\omega L}{(gh_3)^{1/2}}i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_R \\ C \\ D \\ \beta_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_I \\ \beta_I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la solución del sistema de ecuaciones, expresada en su forma matricial, se obtiene mediante la regla de Cramer, como sigue

$$\frac{\beta_R}{\beta_I} = \frac{\left[\frac{-\kappa^{1/2}\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} + 1\right) \sin(\varphi) + i \left[\kappa^{1/2}\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} - 1\right) \cos(\varphi) - \frac{\kappa\alpha^2}{4\varepsilon^{1/2}} \sin(\varphi) \right]}{-8 \cos(\varphi) + \kappa^{1/2}\alpha \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\right) \sin(\varphi) + i \left[\kappa^{1/2}\alpha \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\right) \cos(\varphi) + \left(\frac{\kappa\alpha^2}{4\varepsilon^{1/2}} + 8\right) \sin(\varphi) \right]} \right]}{\left[\frac{-\kappa^{1/2}\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} + 1\right) \sin(\varphi) + i \left[\kappa^{1/2}\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} - 1\right) \cos(\varphi) - \frac{\kappa\alpha^2}{4\varepsilon^{1/2}} \sin(\varphi) \right]}{-8 \cos(\varphi) + \kappa^{1/2}\alpha \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\right) \sin(\varphi) + i \left[\kappa^{1/2}\alpha \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\right) \cos(\varphi) + \left(\frac{\kappa\alpha^2}{4\varepsilon^{1/2}} + 8\right) \sin(\varphi) \right]} \right]}. \quad (4.7)$$

$$\frac{\beta_T}{\beta_I} = \frac{-e^{-\theta i}}{\varepsilon^{5/4} \left[\frac{-\cos(\varphi) + \frac{\kappa^{1/2}\alpha}{8} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\right) \sin(\varphi) + i \left[\frac{\kappa^{1/2}\alpha}{8} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\right) \cos(\varphi) + \left(\frac{\kappa\alpha^2}{32\varepsilon^{1/2}} + 1\right) \sin(\varphi) \right]} \right]}. \quad (4.8)$$

Donde $\varphi = 2(1 - \varepsilon^{1/2})/(\kappa^{1/2}\alpha)$ y $\theta = \omega L/(gh_3)^{1/2}$. Adicionalmente las constantes C y D están dadas por

$$C = \frac{\beta_I \left(\varepsilon^{-1/2}\kappa^{1/2}\alpha i\right) e^{\frac{-2\varepsilon^{1/2}}{\kappa^{1/2}\alpha}i}}{\frac{\kappa\alpha^2}{8\varepsilon^{1/2}}e^{\varphi i} - \left[8 + \frac{\kappa\alpha^2}{8\varepsilon^{1/2}} + \kappa^{1/2}\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} - 1\right) i\right] e^{-\varphi i}} \quad (4.9)$$

y

$$D = \frac{-4\beta_I \left(1 + \frac{\kappa^{1/2}\alpha}{8\varepsilon^{1/2}}i\right) e^{\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\kappa^{1/2}\alpha}i}}{\frac{\kappa\alpha^2}{16\varepsilon^{1/2}}e^{\varphi i} - \left[4 + \frac{\kappa\alpha^2}{16\varepsilon^{1/2}} + \frac{\kappa^{1/2}\alpha}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} - 1\right) i\right] e^{-\varphi i}}. \quad (4.10)$$

Con la finalidad de calcular los coeficientes de reflexión y transmisión de las ondas largas que inciden a través de una superficie inclinada en el límite

$\kappa \ll 1$, se considera que la energía total de la onda incidente es la suma de la energía total reflejada y transmitida. Este argumento ha sido utilizado por otros autores Lin (2004); Chang y Liou (2005). La hipótesis anterior, en términos de nuestra variable, puede escribirse como

$$C_2 E_{OR} + C_3 E_{OT} = C_2 E_{OI}. \quad (4.11)$$

Donde $E_{OI} = \rho g A_I^2 / 2$, $E_{OR} = \rho g A_R^2 / 2$ y $E_{OT} = \rho g A_T^2 / 2$, son las energías de incidencia, reflejada y transmitida del oleaje, respectivamente. Por otro lado, para ondas largas no dispersivas, las velocidades de fase están dadas por $C_2 = \sqrt{gh_2}$ y $C_3 = \sqrt{gh_3}$. Tomando en cuenta las relaciones anteriores la Ec. (4.11) se puede escribir como

$$\frac{\rho g A_R^2}{2} \sqrt{gh_2} + \frac{\rho g A_T^2}{2} \sqrt{gh_3} = \frac{\rho g A_I^2}{2} \sqrt{gh_2}, \quad (4.12)$$

dividiendo la Ec. (4.12) por el factor $(\rho g A_I^2 / 2) \sqrt{gh_2}$, se obtiene

$$\left(\frac{A_R}{A_I} \right)^2 + \varepsilon^{1/2} \left(\frac{A_T}{A_I} \right)^2 = 1. \quad (4.13)$$

Los términos del lado izquierdo de la Ec. (4.13), representan el porcentaje de energía reflejada y transmitida, respectivamente. Estos valores siempre son cantidades positivas, por lo cual la Ec. (4.13) puede definirse en términos de valores absolutos

$$\left| \frac{A_R}{A_I} \right|^2 + \varepsilon^{1/2} \left| \frac{A_T}{A_I} \right|^2 = 1. \quad (4.14)$$

De una forma simplificada la ecuación anterior se puede escribir como

$$C_R^2 + C_T^2 = 1. \quad (4.15)$$

Donde C_R y C_T son los coeficientes de reflexión y transmisión, respectivamente. Considerando el concepto de conservación de energía, los coeficientes de la Ec. (4.15) son

$$C_R = \left| \frac{A_R}{A_I} \right| \quad (4.16)$$

y

$$C_T = \varepsilon^{1/2} \left| \frac{A_T}{A_I} \right|. \quad (4.17)$$

Sustituyendo los valores de $\beta_I = A_I/h_2$, $\beta_R = A_R/h_2$ y $\beta_T = A_T/h_3$ en las Ecs. (4.16) y (4.17) los coeficientes de reflexión y transmisión se reescriben de la forma siguiente

$$C_R = \left| \frac{\beta_R}{\beta_I} \right| \quad (4.18)$$

y

$$C_T = \varepsilon^{5/4} \left| \frac{\beta_T}{\beta_I} \right|. \quad (4.19)$$

Finalmente, sustituyendo las Ecs. (4.7) y (4.8) en las expresiones anteriores y tomando en cuenta que el valor absoluto de un número complejo está dado por su módulo, los coeficientes adimensionales de reflexión y transmisión, Ecs. (4.18) y (4.19) están dadas por;

$$C_R = \frac{\sqrt{\left[\kappa^{1/2} \alpha \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} + 1 \right) \sin(\varphi) \right]^2 + \left[\kappa^{1/2} \alpha \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} - 1 \right) \cos(\varphi) - \frac{\kappa \alpha^2}{4\varepsilon^{1/2}} \sin(\varphi) \right]^2}}{\sqrt{\left[-8 \cos(\varphi) + \kappa^{1/2} \alpha \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \right) \sin(\varphi) \right]^2 + \left[\kappa^{1/2} \alpha \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \right) \cos(\varphi) + \left(\frac{\kappa \alpha^2}{4\varepsilon^{1/2}} + 8 \right) \sin(\varphi) \right]^2}} \quad (4.20)$$

y

$$C_T = \frac{1}{\sqrt{\left[-\cos(\varphi) + \frac{\kappa^{1/2} \alpha}{8} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \right) \sin(\varphi) \right]^2 + \left[\frac{\kappa^{1/2} \alpha}{8} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \right) \cos(\varphi) + \left(\frac{\kappa \alpha^2}{32\varepsilon^{1/2}} + 1 \right) \sin(\varphi) \right]^2}}. \quad (4.21)$$

Por otro lado, sustituyendo las Ecs. (4.9) y (4.10) en la Ec. (3.20) se obtiene

$$\bar{\xi}(\bar{\chi}) = \frac{1}{(1-\alpha)^{1/4}} \left[\begin{array}{c} \frac{\beta_I (\varepsilon^{-1/2} \kappa^{1/2} \alpha i) e^{-\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\kappa^{1/2} \alpha} i}}{\frac{\kappa \alpha^2}{8\varepsilon^{1/2}} e^{\varphi i} - \left[8 + \frac{\kappa \alpha^2}{8\varepsilon^{1/2}} + \kappa^{1/2} \alpha \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} - 1 \right) i \right] e^{-\varphi i}} e^{\frac{2(1-\alpha\bar{\chi})^{1/2}}{\kappa^{1/2} \alpha} i} - \\ \\ \frac{4\beta_I \left(1 + \frac{\kappa^{1/2} \alpha i}{8\varepsilon^{1/2}} \right) e^{\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\kappa^{1/2} \alpha} i}}{\frac{\kappa \alpha^2}{16\varepsilon^{1/2}} e^{\varphi i} - \left[4 + \frac{\kappa \alpha^2}{16\varepsilon^{1/2}} + \frac{\kappa^{1/2} \alpha}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} - 1 \right) i \right] e^{-\varphi i}} e^{-\frac{2(1-\alpha\bar{\chi})^{1/2}}{\kappa^{1/2} \alpha} i} \end{array} \right]$$

La solución anterior describe la deformación de la ondas largas, cuando éstas se propagan sobre la plataforma inclinada.

Capítulo 5

Resultados

Los resultados analíticos de este modelo matemático se muestran en las Figs. 5.1-5.13. Para el desarrollo del presente trabajo se consideran dos límites físicos: 1) la propagación del oleaje es paralela al eje longitudinal x , por lo que la solución matemática no toma en cuenta la incidencia del oleaje oblicuo, y 2) el modelo matemático se basa en la teoría lineal de ondas largas, es decir $\eta/h(x) \ll 1$ y $(h/\lambda) \ll 1$. Partiendo del concepto de conservación de energía, la magnitud de los coeficientes de reflexión y transmisión se encuentran en un intervalo $0 \leq C_R \leq 1$ y $0 \leq C_T \leq 1$, respectivamente. Para el caso de un canal con pendiente suave donde $\varepsilon \rightarrow 1$ y $m \rightarrow 0$, las Ecs. (4.20) y (4.21) toman el valor $C_R = 0$ (no existe reflexión) y $C_T = 1$ (la transmisión es completa). En estas condiciones la Ec. (2.17) se transforma en

$$\kappa \frac{d^2 \bar{\xi}}{d\bar{\chi}^2} + \bar{\xi} = 0. \quad (5.1)$$

La ecuación anterior describe un problema de valores en la frontera para la propagación de ondas largas sobre una región con fondo plano y es similar a las ecuaciones obtenidas de las regiones R_2 y R_3 . Para valores de $m \rightarrow \infty$ y profundidad relativa $\varepsilon \ll 1$, la rampa tiende a un escalón infinito, el cual ha sido ampliamente estudiado mediante diferentes técnicas establecidas por Lamb (1932), Sugimoto et al., (1987) y Lin (2004), entre otros autores.

La propagación del oleaje sobre un escalón infinito es un problema singular que debe ser estudiado como un caso particular; en éste trabajo, para valores de $\varepsilon \ll 1$ y $m \rightarrow \infty$, las Ecs. (4.20) y (4.21) toman los valores de $C_R = 1$ y $C_T = 0$.

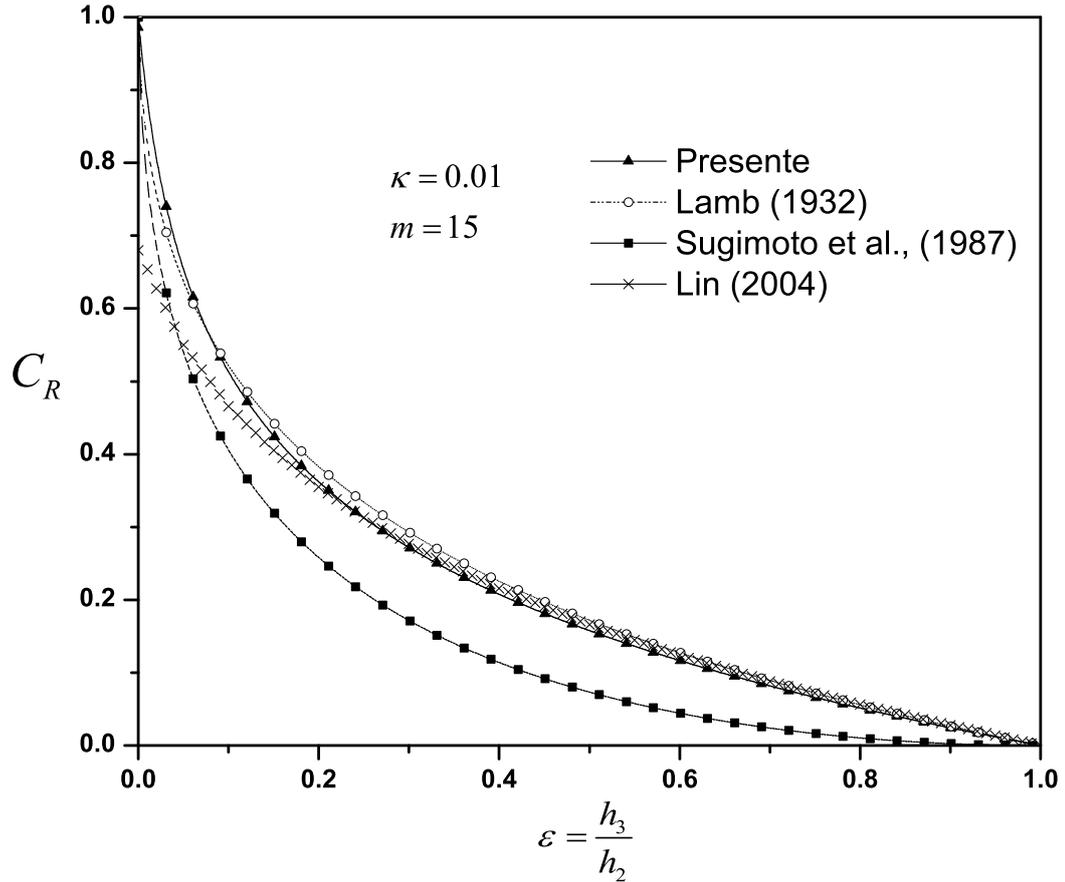


Fig. 5.1: Comparación del coeficiente de reflexión del oleaje en un escalón infinito usando el modelo presente con resultados obtenidos en Lamb (1932), Sugimoto et al., (1987) y Lin (2004).

Debido a la singularidad que presenta un escalón infinito, en este trabajo se considera una pendiente grande en la rampa ($m \rightarrow 90^\circ$). En la Figs. 5.1 y 5.2 se muestra la comparación del coeficiente de reflexión y transmisión en función del parámetro adimensional ε para un escalón in-

finito, con una $m \rightarrow \infty$ obtenida por Lamb (1932), la cual está dada por $C_R = (1 - \varepsilon^{1/2})/(1 + \varepsilon^{1/2})$. Para Sugimoto et al., (1987) el coeficiente de reflexión es $C_R = \frac{1}{4} \left[\sqrt{1 + 8(1 - \varepsilon^{1/2})/(1 + \varepsilon^{1/2})} - 1 \right]^2$ y la solución numérica obtenida por Lin (2004). Para este modelo, la pendiente no puede ser $m \rightarrow \infty$ por la singularidad generada, los resultados mostrados en las Figs. 5.1 y 5.2, consideran una pendiente constante finita $m = 15$, equivalente a 86.2° . Como se puede apreciar los resultados ajustan adecuadamente con los publicados en la literatura especializada.

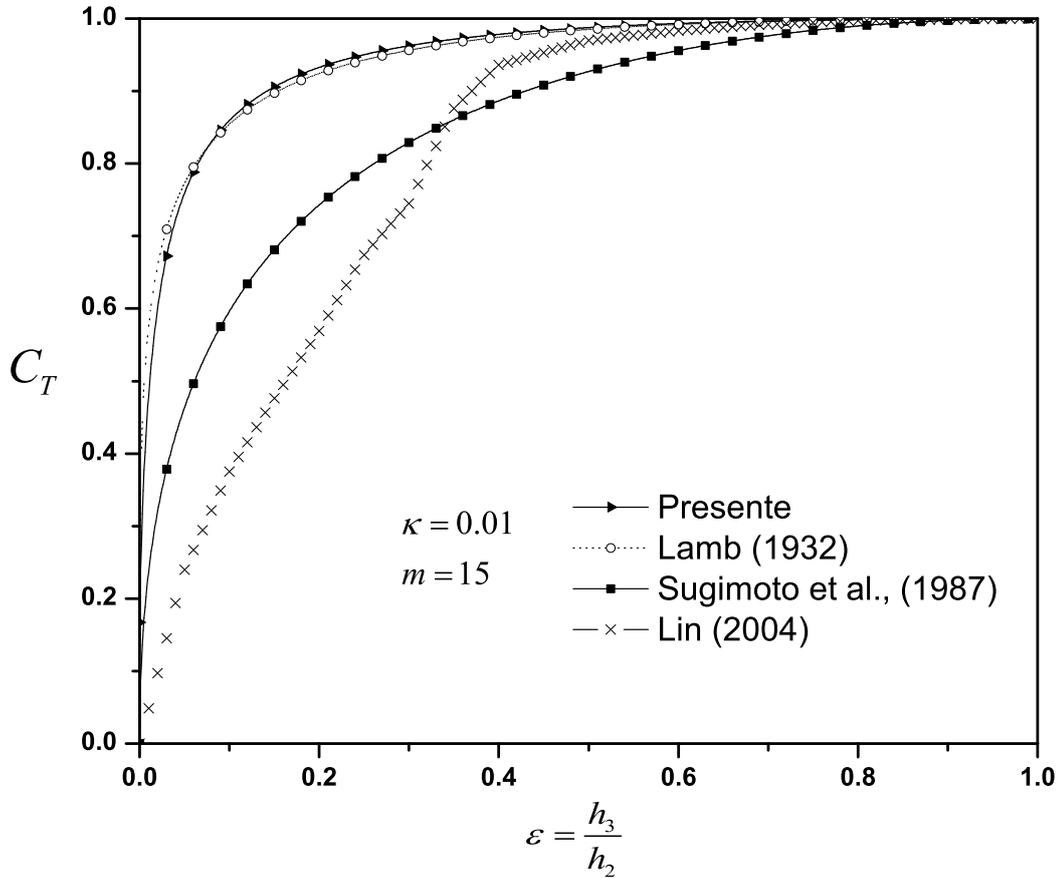


Fig. 5.2: Comparación del coeficiente de transmisión del oleaje en un escalón infinito usando el modelo presente con resultados obtenidos por Lamb (1932), Sugimoto et al., (1987) y Lin (2004).

En referencia a las Figs. 5.1 y 5.2, se aprecia que Sugimoto et al., (1987) subestima significativamente los coeficientes de reflexión y transmisión. La solución del presente modelo diverge considerablemente de la propuesta por Lin (2004), debido a que este modelo se determinó empleando teoría de flujo potencial. Por su parte Lin (2004) consideró efectos de turbulencia en el escalón. En la Fig. 5.1., para valores de $\varepsilon < 0.2$, ambas soluciones tienen una diferencia aproximada de 1.7 %, pero para valores de $\varepsilon > 0.2$, las soluciones son casi idénticas. Similarmente, en la Fig. 5.2, se presenta la comparación de los resultados obtenidos por; Lamb (1932), Sugimoto et al., (1987), Lin (2004) y el modelo aquí propuesto. Se observa que la solución determinada del presente modelo es una buena aproximación al resultado de Lamb (1932).

Para demostrar que las Ecs. (4.20) y (4.21) satisfacen la conservación de energía de un tren de ondas, donde el oleaje incidente es igual al reflejado más el transmitido, para el caso en que $\varepsilon = 0.5$, en las Figs. 5.1 y 5.2, los coeficientes de reflexión y transmisión son $C_R = 0.17157$ y $C_T = 0.99924$ y el balance de energía está dado por la relación $C_R^2 + C_T^2 = 1.027$; como se aprecia existe una diferencia de 0.027, lo cual puede deberse a que no se están considerando efectos disipativos. No obstante, los resultados obtenidos son del mismo orden en magnitud que los reportados en Chang y Liou (2005).

En las Figs. 5.3 y 5.4 se muestran los coeficientes de reflexión y transmisión en función del parámetro ε y tres diferentes valores del parámetro cinemático $\kappa (= 0.0001, 0.001 \text{ y } 0.01)$. Para este caso, se asume que la proyección horizontal L del plano inclinado permanece constante y la pendiente de la plataforma m sólo cambia en función del parámetro de profundidades relativas ε , a través de la relación $m = (1 - \varepsilon)\gamma$, donde $\gamma = h_2/L$ y para $h_2 \sim L$ se tiene $\gamma = 1$.

En la Fig. 5.3, se ilustra el efecto que tiene el parámetro κ en la reflexión del oleaje. En esta gráfica se presentan tres casos. El primero para una

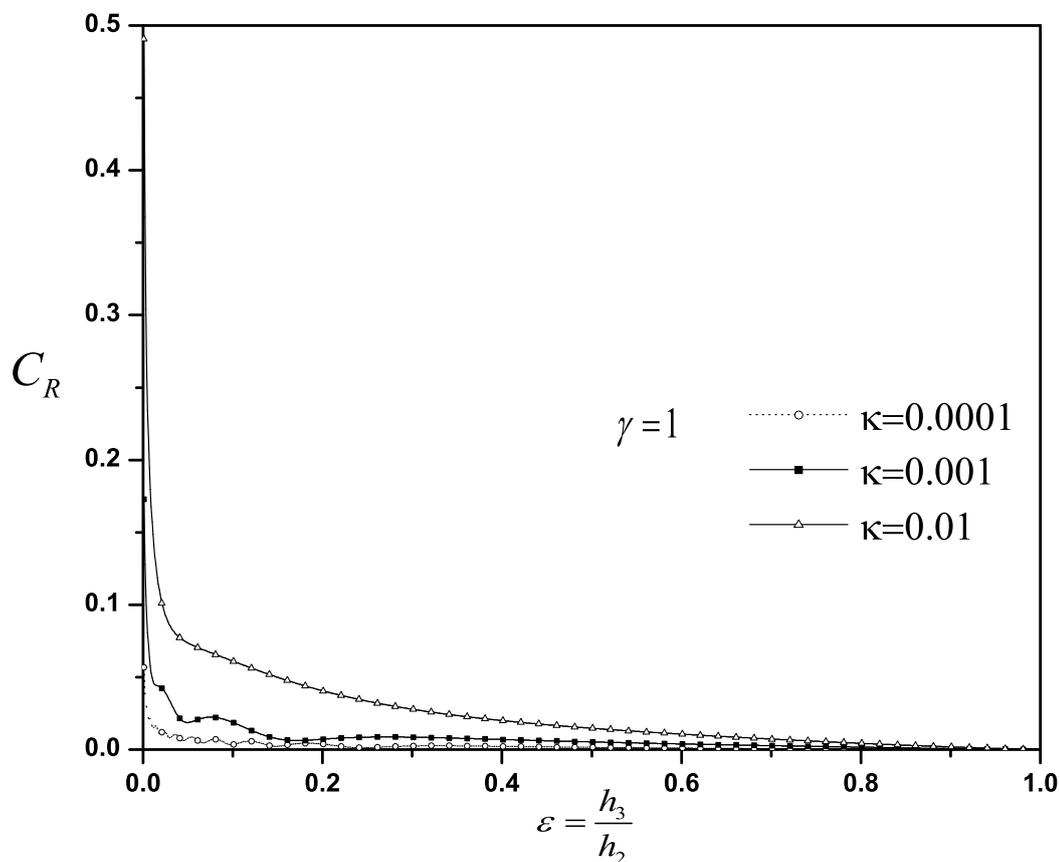


Fig. 5.3: Coeficiente de reflexión C_R como una función del parámetro relativo de profundidades ε con un $\gamma = 1$ para distintos valores del parámetro cinemático κ .

condición de oleaje $\kappa = 0.01$, donde el coeficiente de reflexión crece considerablemente cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Para el segundo caso donde $\kappa = 0.001$, el valor mínimo del coeficiente de reflexión se presenta cerca de $\varepsilon = 0.2$. Finalmente, para el tercer caso en $0.001 < \varepsilon < 0.21$ la reflexión crece ligeramente y presenta menor reflexión comparado con los casos anteriores. Cabe mencionar que la solución aproximada de las Ecs. (4.20) y (4.21) del modelo actual sólo es válida en el rango $0 < \varepsilon < 1$, como se observa en las figuras anteriores. Basados en el comportamiento del coeficiente de transmisión, en la Fig. 5.4 se muestra que para una mayor frecuencia del oleaje donde el parámetro $\kappa = 0.0001$, el

coeficiente de transmisión crece. Por otro lado para $\kappa=0.01$, el coeficiente de transmisión decrece. Es importante destacar que las variaciones significativas del coeficiente de transmisión se presentan en el dominio aproximadamente $0.001 < \varepsilon < 0.1$.

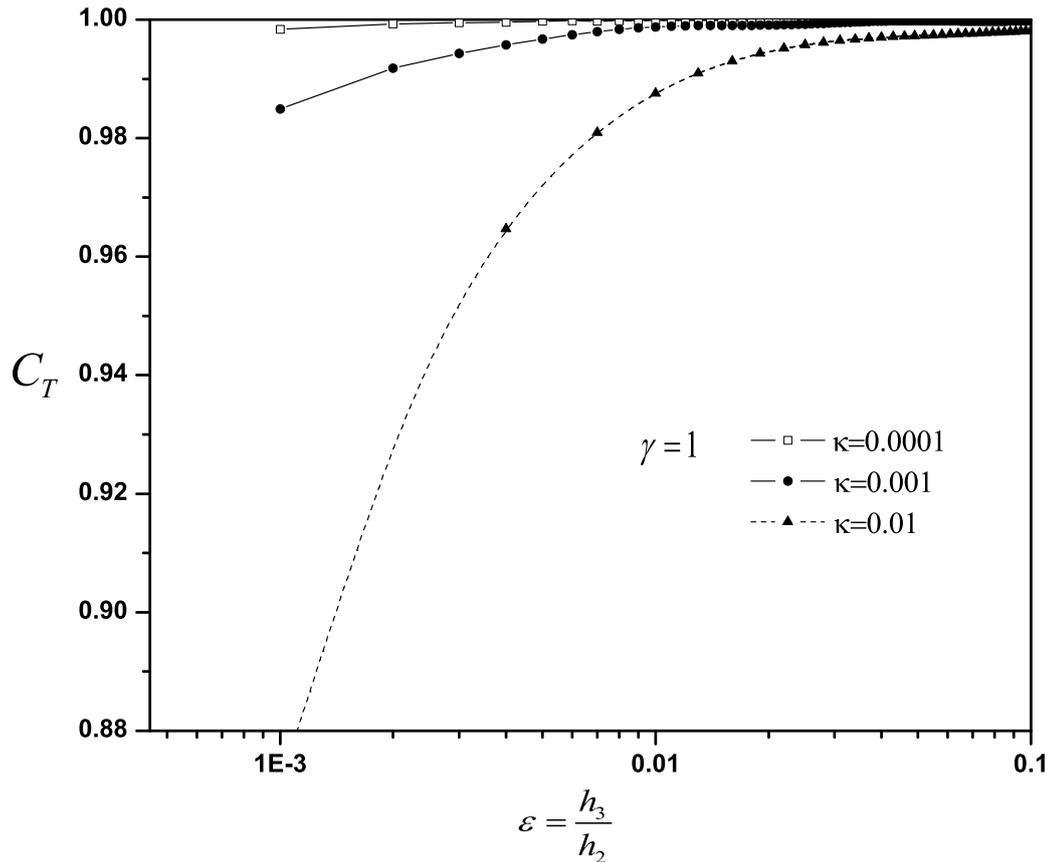


Fig. 5.4: Coeficiente de transmisión C_T como una función del parámetro relativo de profundidades ε con un $\gamma = 1$ para distintos valores del parámetro cinemático κ .

Con el objetivo de determinar el efecto que tiene la pendiente en el comportamiento de los coeficientes correspondientes, en las Figs. 5.5 y 5.6 se muestran los coeficientes de reflexión y transmisión para diferentes pendientes del obstáculo $m = (5, 10, 15 \text{ y } 100)$, en función del parámetro ε y con un parámetro cinemático $\kappa = 0.02$, respectivamente. En este caso, para valores

crecientes de ε , el coeficiente de reflexión decrece, además en esta misma figura, se observa que la pendiente m tiene un mayor efecto en la reflexión del oleaje, ya que para una transición decreciente de la pendiente $m=5$ (78.70°), el incremento en la reflexión del oleaje es más pronunciado.

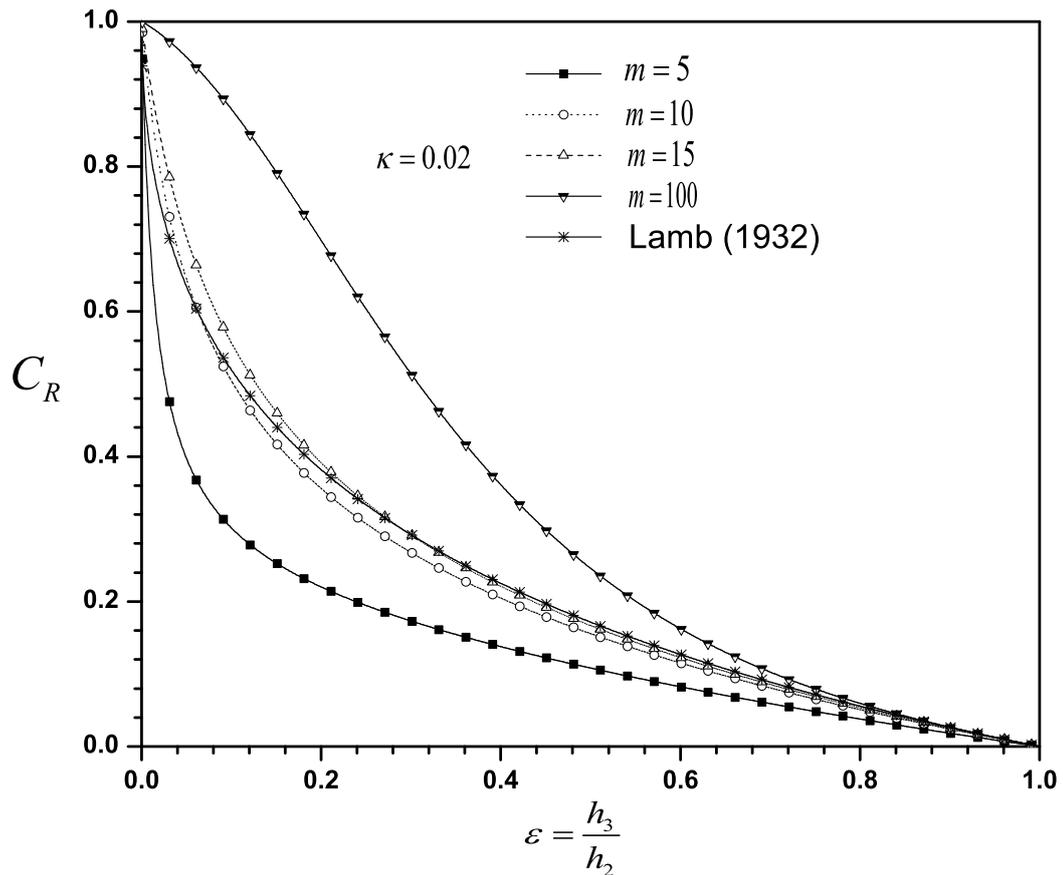


Fig. 5.5: Coeficiente de reflexión C_R , como una función del parámetro relativo de profundidades ε , con un $\kappa=0.02$, para distintos valores de la pendiente m .

Cuando la pendiente $m=15$ (86.16°), el coeficiente de reflexión se incrementa y se aproxima a la reflexión del escalón infinito estudiado por Lamb (1932). En particular, se incluye el caso de un valor muy grande de la pendiente de la rampa ($m = 100$) y se observa que la solución describe una curva concava invertida, lo cual significa que en esta condición el modelo analítico

no es válido.

En la Fig. 5.6 se aprecia que al incrementar el valor de la pendiente m , el coeficiente de transmisión decrece de manera importante, y para valores de $m = 5$, el coeficiente de transmisión crece exponencialmente. Por otro lado, para $m = 15$, la solución se aproxima al coeficiente de transmisión del escalón infinito de Lamb (1932). En la misma figura, se observa que para valores $\varepsilon \rightarrow 1$, la pendiente m no altera la transmisión del oleaje.

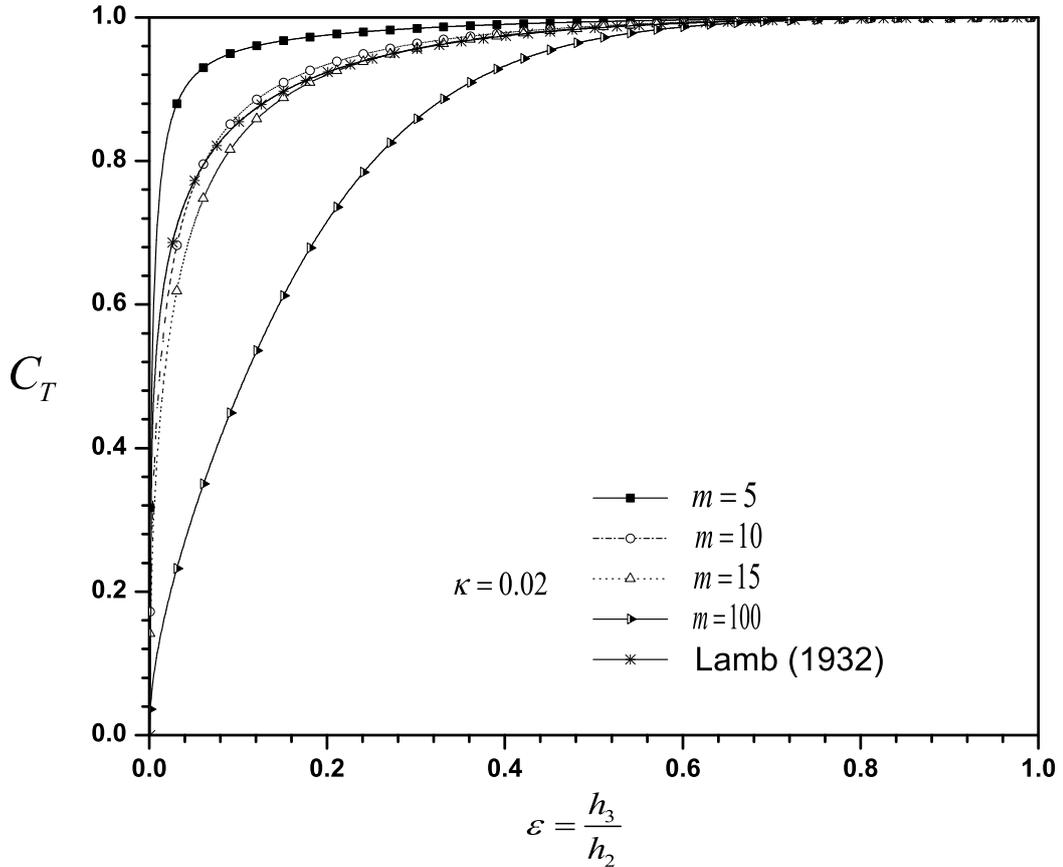


Fig. 5.6: Coeficiente de transmisión C_T , como una función del parámetro relativo de profundidades ε , con un $\kappa = 0.02$, para distintos valores de la pendiente m .

En el contexto de explicar la influencia que tiene el parámetro adimensional κ en la propagación del oleaje, en las Figs. 5.7 y 5.8 se muestra en escala

logarítmica la variación del coeficiente de reflexión y transmisión en función del parámetro κ para tres valores distintos de ε ($=0.2, 0.4$ y 0.6). Aquí se considera que la pendiente de la plataforma toma un valor constante $m = 1$.

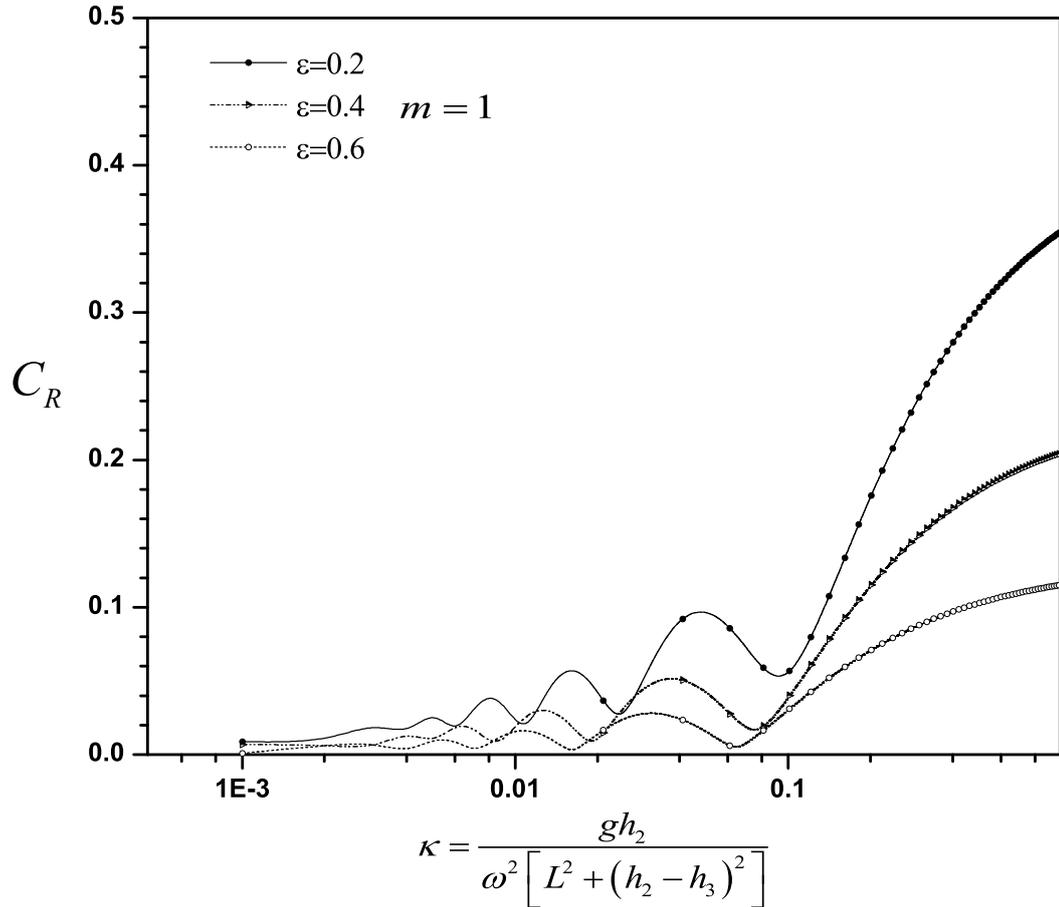


Fig. 5.7: Coeficiente de reflexión C_R , como una función del parámetro cinemático κ con un $m = 1$, para distintos valores del parámetro relativo de profundidades ε .

En la Fig. 5.7 se observa que para valores pequeños de κ , los coeficientes de reflexión son pequeños y presentan oscilaciones en el intervalo aproximado $0.001 \leq \kappa < 0.10$. Además, se percibe que para valores grandes de κ , el coeficiente de reflexión crece constantemente.

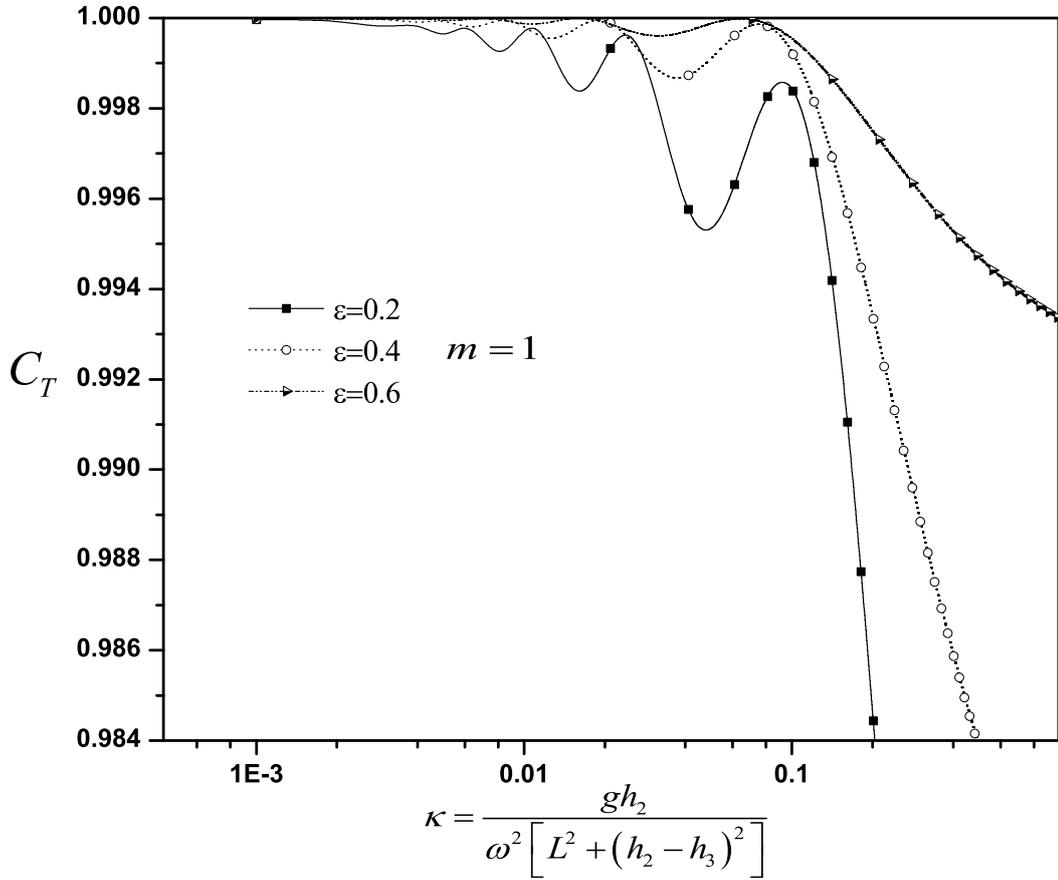


Fig. 5.8: Coeficiente de transmisión C_T , como una función del parámetro cinemático κ con un $m=1$, para distintos valores del parámetro relativo de profundidades ε .

Por otro lado, en la Fig. 5.8 se observa que para valores pequeños de κ , los coeficientes de transmisión son grandes y presentan oscilaciones en el intervalo aproximado $0.001 \leq \kappa < 0.10$. Además se aprecia que para valores grandes de κ , el coeficiente de transmisión cae progresivamente.

Las oscilaciones de los coeficientes de reflexión C_R y transmisión C_T , que se desarrollan para $\kappa \ll 1$ en la Figs. 5.7 y 5.8, pueden explicarse analizando las Ecs. (4.20) y (4.21), el argumento $\varphi = 2(1 - \varepsilon^{1/2})/(\kappa^2 \alpha)$ es el responsable de derivar oscilaciones de la función de los coeficientes C_R y C_T , se puede

apreciar que para valores pequeños de m y $0 < \varepsilon < 1$, el valor de $\varphi \sim O(1/\kappa^{1/2})$, recordando que $\kappa = gh_2/(\omega L_c)^2$, lo cual implica que los efectos cinemáticos dominan sobre los gravitatorios, desde un punto de vista físico, en ondas largas la frecuencia es una condición natural del oleaje, por lo tanto la única relación que puede desarrollar el límite anterior está dado por $L_c/h_2 \ll 1$.

Variando el parámetro cinemático κ , resulta interesante determinar el comportamiento del coeficiente de reflexión C_R y transmisión C_T para una pendiente de la plataforma $m = 10$ (ver las Figs. 5.9 y 5.10). En el primer caso se observa que para valores pequeños de κ , la solución no oscila. Sin embargo, el coeficiente de reflexión va en aumento en forma asintótica para valores de $\varepsilon = (0.2, 0.4 \text{ y } 0.6)$. De manera similar, en la Fig. 5.10 se muestra que para valores pequeños de ε y $\kappa \rightarrow 0$ la solución no oscila y el coeficiente de transmisión cae en forma asintótica. Sin embargo, para valores grandes de ε , el coeficiente de transmisión decrece ligeramente.

Análogamente al caso de valores pequeños de m , para valores de $m \gg 1$, $\varphi \sim O(1/m^2)$, lo cual implica que $\varphi \ll 1$. A partir de las Ecs. (4.20) y (4.21), los términos $\sin(\varphi) \rightarrow 0$ y $\cos(\varphi) \rightarrow 1$, tomando en cuenta ésto, los términos responsables de generar oscilaciones en los coeficiente de reflexión C_R y de transmisión C_T , desaparecen, por lo tanto se reducen en

$$C_R = \frac{\sqrt{[\kappa^{1/2}\alpha((1/\varepsilon)) - 1]^2}}{\sqrt{64 + [\kappa^{1/2}\alpha(1 - (1/\varepsilon^{1/2}))]^2}} \quad (5.2)$$

y

$$C_T = \frac{1}{\sqrt{1 + [\kappa^{1/2}\alpha/8(1 - (1/\varepsilon^{1/2}))]^2}}. \quad (5.3)$$

Con el objetivo de determinar el efecto que tiene la pendiente de la plataforma en la deformación y amplificación de oleaje a lo largo de la coordenada $\bar{\chi}$, se consideran los siguientes datos físicos; $h_2 = 10$ m, $h_3 (= 2, 4 \text{ y } 6)$ m, la proyección horizontal de la pendiente de la plataforma es $L = 500$ m y un período $T = 10$ s. Los parámetros adimensionales resultantes son; $\varepsilon (= 0.2, 0.4$

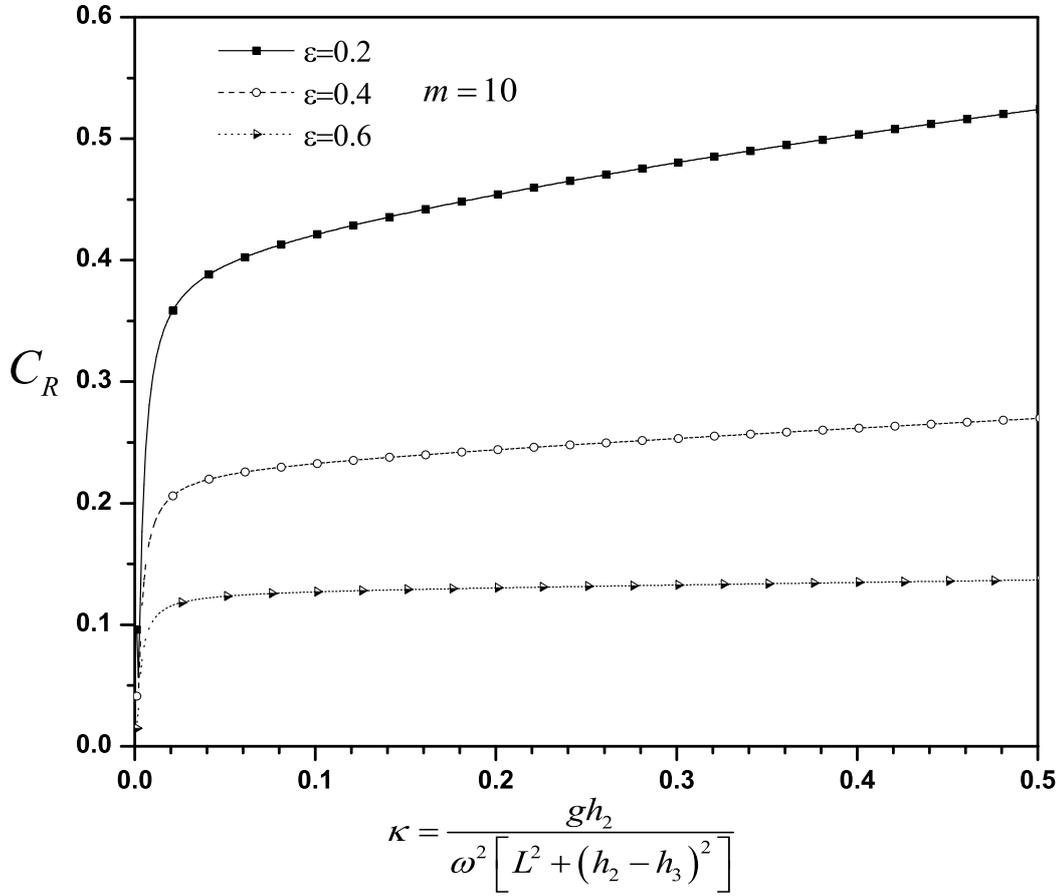


Fig. 5.9: Coeficiente de reflexión C_R , como una función del parámetro cinemático κ , con un $m = 10$, para distintos valores del parámetro relativo de profundidades ε .

y 0.6) con sus respectivas pendientes $m(=0.016, 0.012$ y $0.008)$.

Se consideraron los siguientes valores para la amplitud incidente del oleaje $\beta_I = A_I/h_2 = 0.2/10 = 0.02$. Con la finalidad de validar que se cumplen la teoría de ondas largas, se debe seleccionar cuidadosamente la profundidad h_3 correspondiente a la región R3. Bajo esta consideración se tiene una profundidad $h_3 = 2.0$ m. En estas condiciones, la celeridad es $C = \sqrt{gh_3} = 4.43$ m/s y la longitud de onda es $\lambda = 44.3$ m, para ondas largas $h_3/\lambda \leq 1/20$, que es $h_3/\lambda = 2/44.3 = 0.045$, lo cual satisface la teoría de ondas largas.

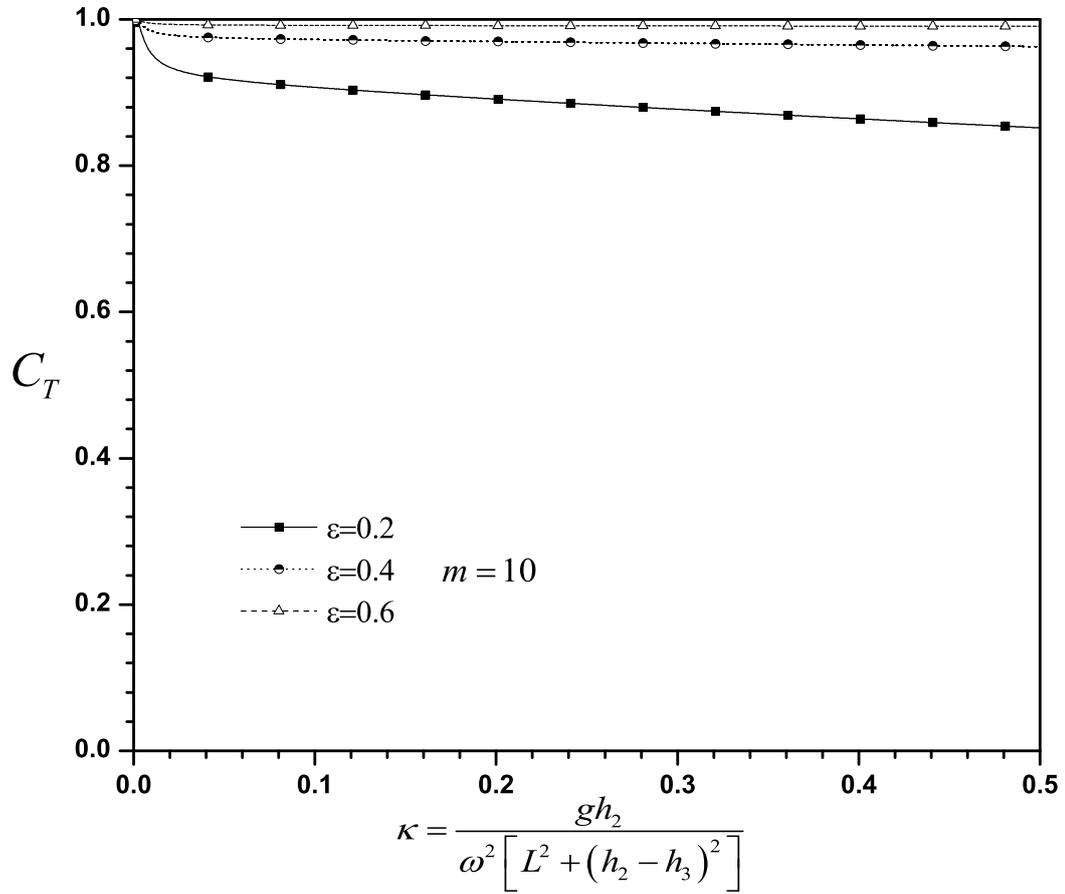


Fig. 5.10: Coeficiente de transmisión C_T , como una función del parámetro cinemático κ , con un $m = 10$, para distintos valores del parámetro relativo de profundidades ε .

En las Figs. 5.11, 5.12 y 5.13 se presenta el efecto que tienen los parámetros cinemáticos y geométricos en la deformación del oleaje en función de la variable adimensional espacial $\bar{\chi}$, que para una larga proyección horizontal de la rampa donde la pendiente es pequeña, la variable $\bar{\chi}$ es de orden unidad. En esta dirección, en la Fig. 5.11 se observa que para valores de $\varepsilon \rightarrow 1$, la solución deriva a la propagación del oleaje sobre un fondo horizontal donde la amplitud permanece constante. La variación de la pendiente de la plata-

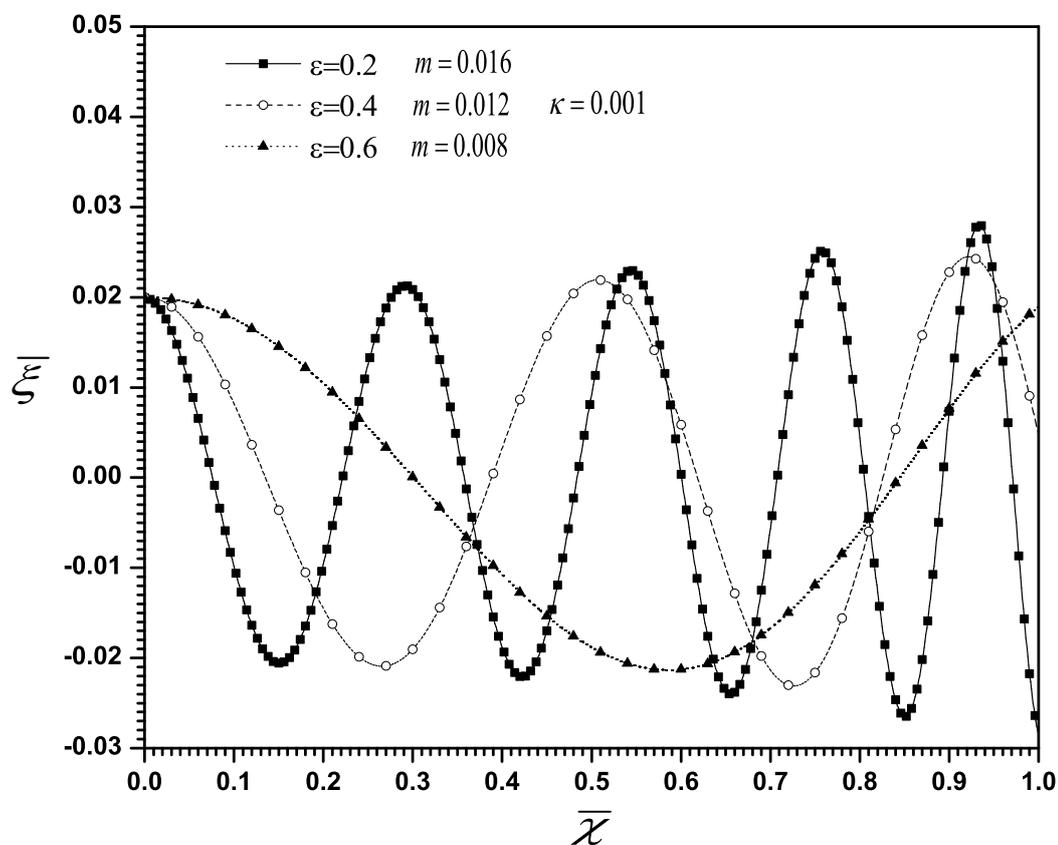


Fig. 5.11: Amplitud adimensional de las ondas del océano $\bar{\xi}$ en función de la coordenada adimensional \bar{x} , con un $\kappa = 0.001$, para distintos valores de ε y m , respectivamente.

forma y del parámetro ε genera una perturbación finita en la amplitud del oleaje: por ejemplo, para un valor de $\varepsilon = 0.2$ con una pendiente $m = 0.016$ y un parámetro cinemático $\kappa = 0.001$, la amplitud adimensional crece 0.008 milésimas de unidad con respecto a la amplitud de incidencia $\bar{\xi} = 0.02$ y la longitud de onda λ decrece.

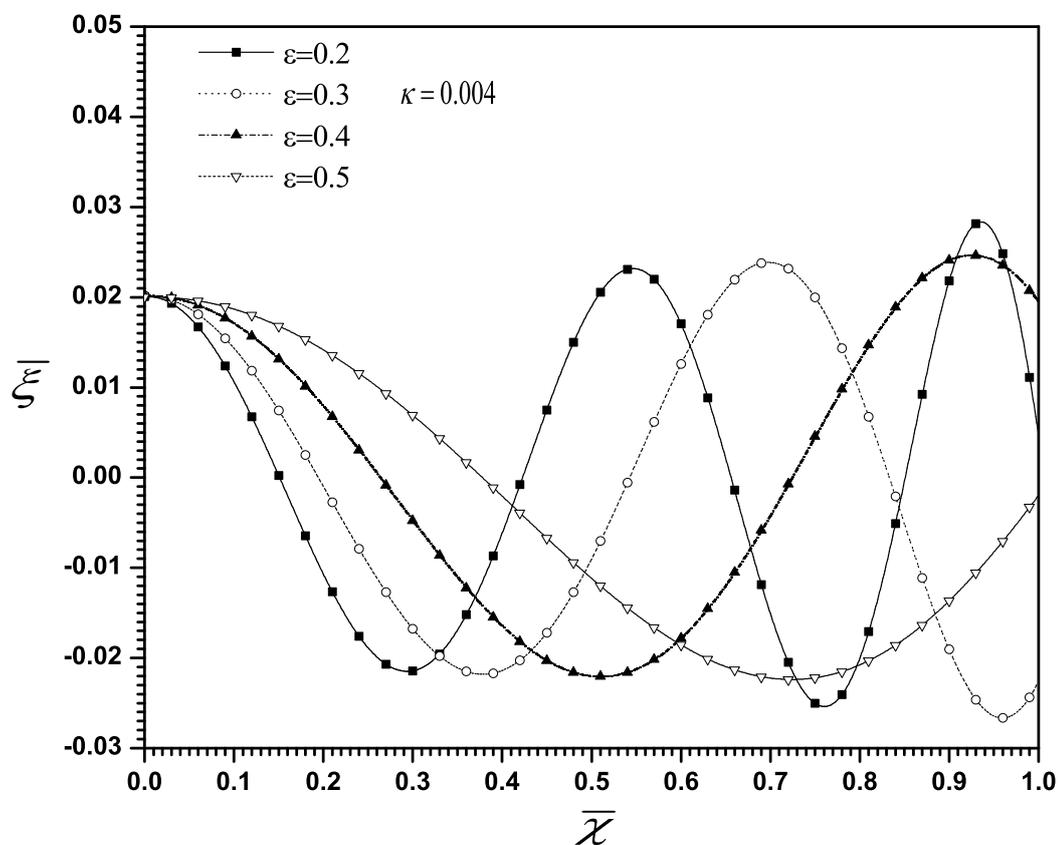


Fig. 5.12: Amplitud adimensional de las ondas del océano $\bar{\xi}$ en función de la coordenada adimensional $\bar{\chi}$, con un $\kappa = 0.004$, para distintos valores de ε .

En la Fig. 5.12, se muestra la deformación del oleaje para valores de $\varepsilon = (0.2, 0.3, 0.4 \text{ y } 0.5)$ y un parámetro cinemático $\kappa = 0.004$. Se observa que para valores de κ grandes, la amplificación del oleaje crece ligeramente y la longitud de onda disminuye. Por otro lado, cuando $\varepsilon \rightarrow 1$, la solución se aproxima a la de un fondo horizontal donde el desplazamiento de la superficie libre del mar se mantiene constante.

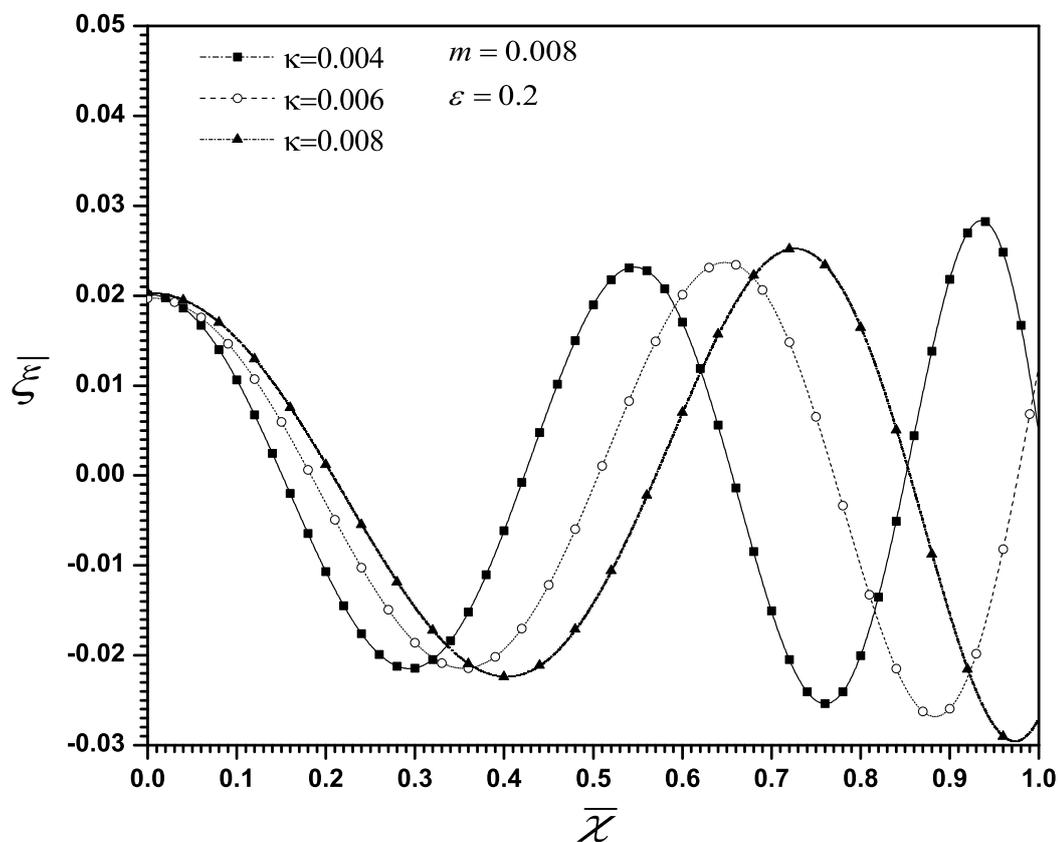


Fig. 5.13: Amplitud adimensional de las ondas del océano $\bar{\xi}$ en función de la coordenada adimensional $\bar{\chi}$, con un $\varepsilon = 0.2$ y $m = 0.008$, para distintos valores del parámetro cinemático κ .

Finalmente en la Fig. 5.13 se presenta la deformación del oleaje para diferentes valores del parámetros cinemático κ . En este caso, se considera una pendiente de $m = 0.008$ y un valor de $\varepsilon = 0.2$. Para un valor de $\kappa = 0.004$, la superficie libre del agua se amplifica considerablemente, mientras que para valores de $\kappa = 0.008$ la amplitud decrece.

Conclusiones

En este trabajo se propone un modelo analítico en forma adimensional basado en la técnica de perturbación WKB. La pendiente de la plataforma en el presente estudio toma diferentes valores. En particular, se recupera el límite de un fondo plano donde $\varepsilon \rightarrow 1$, y los coeficientes de reflexión y transmisión respectivamente son $C_R = 0$ y $C_T = 1$. Por otra parte, con el propósito de validar el modelo analítico, se obtuvo el coeficiente de reflexión y transmisión del oleaje en el límite de $\varepsilon \ll 1$ y una pendiente finita de la plataforma $m = 15$. Este caso, tiende a la hidrodinámica de un escalón infinito. Los resultados del análisis se compararon con la solución analítica, y numérica para el caso particular de un escalón infinito reportado por Lamb (1932), Sugimoto et al., (1987) y Lin (2004), obteniéndose una buena aproximación.

Los resultados muestran que la influencia que la pendiente puede tener en los coeficientes de C_R y C_T , es significativa, como pudo apreciarse, en el caso de pendientes pequeñas variando el coeficiente ε , los C_R y C_T muestran oscilaciones que deben tomarse en cuenta en el análisis del diseño de estructuras costeras, cabe precisar que el fenómeno anterior no se presenta en el caso de pendientes grandes.

El modelo analítico asintótico propuesto, permitió obtener una solución analítica aproximada de la variación de la superficie libre del agua, los resultados mostraron que la amplitud del oleaje crece a medida que la pendiente de la rampa aumenta y que para valores del parámetro $\varepsilon \rightarrow 1$, se recupera la propagación del oleaje sobre un fondo con pendiente horizontal. Adicionalmente cabe mencionar, que si el parámetro κ disminuye, la longitud de onda

decrece, caso contrario aumenta. Este modelo puede ser utilizado con el fin de analizar en una primera aproximación los efectos de la plataforma continental en la propagación de las ondas largas con período largo, además de caracterizar el efecto hidrodinámico al interactuar el oleaje con estructuras de mitigación de energía (diques sumergidos). Por otra parte el presente estudio se puede usar para optimizar geometrías de colectores de oleaje que permitan amplificar el oleaje y posteriormente concentrar la energía en dispositivos de conversión.

Bibliografía

Aubrey D. G., and P. E. Speer (1985), “A study of non-linear tidal propagation in shallow inlet/Estuarine systems Part I: Observations,” *J. Woods Hole Oceanography Inst.*, vol. 21, pp. 185-205.

Baghlani, A., N. Talebbeydokhti and M. J. Abedini (2008), “A shock-capturing model based on flux-vector splitting method in boundary-fitted curvilinear coordinates,” *J. Appl Math Model.*, vol. 32, pp. 249-266.

Bautista, E. G., F. Méndez., O. Bautista, and A. Mora (2011), “Propagation of shallow water waves in an open parabolic channel using the WKB perturbation technique,” *J. Appl Ocean Res.*, vol. 33, pp. 186-192.

Bender, C. J., and R. G. Dean (2003), “Wave transformation by two-dimensional bathymetric anomalies with sloped transitions,” *J. Coastal. Eng.*, vol. 50, pp. 61-84.

Bender, C. M., and S. A. Orszag (1978), *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, McGraw-Hill, USA.

Boussinesq, J. (1847), “Theorie des onde et des resous qui se propagent le long d un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond,” *J. Trans Cambridge Phil Soc.*, vol. 8, pp. 441-473.

Camassa, R., J. Huang and L. Lee (2006), "Integral an integrable algorithms for a nonlinear shallow-water wave equation," *J. Comput. phys.*, vol. 216, pp. 547-572.

Chang, H. K., and J. C. Liou (2005), "Long wave reflection from submerged trapezoidal breakwaters," *J. Ocean Eng.*, vol. 34, pp. 185-191.

Dean, R.G., and R. A. Dalrymple (1991), *Water wave mechanics for engineers and scientists*, World Scientific, Singapore.

Didenkulova, I. I., N. Zahibo, and E. N. Pelinovsky, (2002), "Reflection of long waves from a Nonreflecting bottom profile," *J. Fluid Dynamics.*, pp. 22-29.

Filloux, J. H., and R. L. Snyder (1971), "A study of tides, setup an bottom friction in a shallow semi-enclosed basin. Part I: Field experiment and harmonic analysis," *J. Ocean Phys.*, vol. 9, pp. 158-169.

Gallagher, B. S., and W. H. Munk (1971), "Tides in shallow water: Spectroscopy," *J. Phys.*, vol. 3, pp. 347-363.

George, D. L. (2008), "Aumented Riemann solver for the shallow water equations over variable topography with steady state and inundation," *J. Comput. phys.*, vol. 227, pp. 3089-3113.

Guinot, V. (2005), "An aproximation two-dimentional Riemann solver for hyperbolic systems of conservation laws, " *J. Comput phys.*, vol. 205, pp. 292-314.

Holmes, M. H. (1995), *Introduction to perturbation methods*, Springer, New York.

Jung, T. H., K. D. Suh., S. O. Lee, and C. Yong-Sik (2008), "Linear wave reflection by trench with various shapes," *J. Ocean Eng.*, vol. 35, pp. 1226-1234.

Jung, T., and C. Yong-Sik (2009), "Analytical approach for long wave solution to an arbitrarily varying topography," *J. Ocean Eng.*, vol. 25, pp. 216-223.

Korteweg, D.J., and G. J. De Vries (1895), "On the change of form of long waves advancing in a canal, and on a new type of long stationary waves," *J. Phil Mag.*, vol. 5, pp. 422-443.

Kreiss, H. (1957), "Some remarks about nonlinear oscillations in tidal channels," *J. Tellus.*, vol. 9, pp. 53-68.

Lamb, H. (1932), *Hydrodynamics*, Dover, New York.

Lauter, M., D. Handorf, and K. H. HDethloff (2005), "Unsteady analytical solutions of the spherical shallow water equation," *J. Comput. phys.*, vol. 210, pp. 535-553.

Li, J., and D. S. Jeng (2007), "Note on the propagation of a shallow water wave in water of variable depth," *J. Ocean Eng.*, vol. 34, pp. 1336-1343.

Li, Y., G. Dong., H. Liu, and D. Sun (2003), "The reflection of oblique incident waves by breakwater with double-layered perforated wall," *J. Coastal Eng.*, vol. 50, pp. 47-60.

Lin, P. (2004), "A numerical study of solitary wave interaction with rectangular obstacles," *J. Coastal Eng.*, vol. 51, pp. 35-51.

Lin, P., and H. W. Liu (2005), "Analytical study of linear long-wave reflection by a two-dimensional obstacle of general trapezoidal shape," *J. Eng Mech.*, vol. 8, pp. 822-830.

Mead, J. L. (2004), "The shallow water equation in lagrangian coordinates," *J. Comput. phys.*, vol. 200, pp. 654-669.

Mei, C. C., M. Stiassnie., K. Dick, and P. J. L. Yue (1982), *Theory and applications of ocean surface waves*, World Scientific, USA.

Milson, R. (1998), "Liouville transformation and exactly solvable schrödinger equations," *J. Theor. Phys.*, vol. 37, pp. 1735-1752.

Ohare, T. J., and A. G. L. Davies (1992), "A new model for surface wave propagation over undulating topography," *J. Coastal. Eng.*, vol. 18, pp. 251-266.

Ouahsine, A and P. A. Bois (2001), "Mathematical modelling of long ocean waves with a discontinuous density gradient," *J. Eng. Math.*, vol. 40, pp. 141-158.

Rahman, M. (2003), *Relating modern theory to advanced engineering practice*, Oxford Science, New York.

Rhee, J. P. (1997), "On the transmission of water waves over a shelf," *J. Coastal. Eng.*, vol. 19, pp. 161-169.

Speer, P. E., and D. G. Aubrey (1985), "A study of non-linear tidal propagation in shallow inlet/Estuarine systems Part II: Theory," *J. Woods Hole Oceanography Inst.*, vol. 21, pp. 207-224.

Silva, R., I. J. Losada, and M. A. Losada (2000), "Reflection and transmission of tsunami waves by coastal structures," *J. Appl. Ocean. Res.*, vol. 22, pp. 215-223.

Stokes, G. G. (1647), "On the theory of oscillatory waves," *J. Trans. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 8, pp. 441-473.

Sugimoto, N., N. Nakajima, and T. G. G. Kakutani (1987), "Edge-layer theory for shallow-water waves over a step-reflection and transmission of a soliton," *J. Phis. Soc. Jpn.*, vol. 56, pp. 1717-1730.

Svendsen, Ib. A. (2006), *Introduction to nearshore hydrodynamics*, World Scientific, Singapore.

Toro, E. F. (2001), *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*, Wiley, New York.

Walker, P., and E. Wood (2005), *The Continental Shelf*, Facts on File. Inc, United States of America.

Wang, G., G. Dong., M. Perlin., X. Ma and Y. Ma (2011), "An analytic investigation of oscillations withing a harbor of constant slope," *J. Ocean. Eng.*, vol. 38, pp. 479-486.

Wang, S. K., T. W. Hsu., and W. K. Weng, and S. H. Ou (2008), "A three-point method for estimating wave refelction of obliquely incident waves over a sloping bottom," *J. Coastal Eng.*, vol. 55, pp. 125-138.

Wu, T. Y. (1981), "Long waves in ocean and coastal waters," *J. Eng Mech.*, vol. 107, pp. 501-522.

