



# **INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

---

**Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Unidad Azcapotzalco**

**Sección de Estudios de Posgrado e Investigación**

## **Penetración Capilar Anular en Conos**

---

**T E S I S PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN CIENCIAS EN TERMOFLUIDOS PRESENTA:  
FERNANDO ARAGÓN RIVERA**

---

**DIRECTOR: DR. ABRAHAM MEDINA OVANDO  
MÉXICO D. F. JULIO 2011**





# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

## ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México D.F siendo las 12 horas del día 25 del mes de Julio del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de ESIME UA para examinar la tesis titulada:

### Penetración capilar en espacios anulares cónicos

Presentada por el alumno:

<u>Aragón</u>	<u>Rivera</u>	<u>Fernando</u>
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)
		Con registro:
		A 0 9 0 3 0 7

aspirante de:

### Maestro en Ciencias en Termofluidos

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

### LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

Dr. Abraham Medina Ovando  
Primer vocal

Dr. Alejandro Zacarías Santiago  
Secretario

Dr. Abel López Villa  
Segundo vocal

Dra. Guadalupe Juliana Gutiérrez Paredes  
Presidente

M. en C. José Rubén Aguilar Sánchez  
Tercer vocal

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. Jaime Pacheco Martínez  
LA SUPERINTENDENCIA DE INGENIERÍA PROFESIONAL DEL ESTADO DE MÉXICO  
AZCAPOTZALCO  
SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION

6



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

En la Ciudad de México, D. F. el día 01 del mes de Julio del año 2011, el que suscribe Fernando Aragón Rivera alumno del Programa Maestría en Ciencias en Termofluidos con número de registro A090307, adscrito a SEPI-ESIME-UA, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Abraham Medina Ovando y cede los derechos del trabajo intitulado "Penetración Capilar Anular en Conos", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección amedinao@ipn.mx; o faragonr0801@ipn.mx; Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Fernando Aragón Rivera

## *Agradecimientos*

*Al Dr. Abraham Medina Ovando, por su apoyo confianza y asesoría.*

*A Dulce por brindarme siempre su apoyo confianza y amistad.*

*Al IPN por su apoyo en el programa de beca*

*Al Proyecto SIP-IPN Inbibición en espacios delgados Complejos.*

*Al Proyecto CONACyT-IPN INFR-2009-124304.*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Conceptos básicos de hidrodinámica [10]</b>	<b>4</b>
2.1. Definición de Capilaridad . . . . .	4
2.2. Definición de Presión Capilar . . . . .	4
2.3. Ecuación fundamental de la hidrostática . . . . .	5
2.4. Tensión superficial. Capilaridad. Ley de Jurin . . . . .	5
2.5. Ángulo de contacto de un fluido . . . . .	7
<b>3. Flujo de Pouseuille</b>	<b>9</b>
3.1. Corriente plana de Poiseuille . . . . .	12
3.2. Corriente de Poiseuille en un tubo . . . . .	13
3.3. Corriente de Poiseuille en un tubo . . . . .	13
<b>4. Teoría de la lubricación</b>	<b>15</b>
4.1. Flujo en laminas, efecto cuña . . . . .	16
4.2. Fuerzas viscosas sobre la placa . . . . .	20
4.3. Ecuación de Reynolds en coordenadas generalizadas [9] . . . . .	23
<b>5. Penetración capilar en celdas de Hele-Shaw</b>	<b>28</b>
5.1. Penetración capilar en celdas verticales planas (Celda de Hele-Shaw) . . . . .	28
5.2. Penetración capilar en celdas de Hele-Shaw radiales . . . . .	30
5.3. Celda de Hele-Shaw no uniforme . . . . .	33
<b>6. Penetración capilar en la celda de Hele-Shaw anular cónica</b>	<b>39</b>
6.1. Espacio anular de ancho uniforme . . . . .	39
6.2. Celdas con espacio anular no uniforme . . . . .	42
<b>7. Conclusiones Generales</b>	<b>45</b>

# Índice de figuras

1.1.	Perfil exterior de la punta de un bolígrafo. Nótese que el espacio anular interior puede verse en primera aproximación como dos conos concéntricos.	3
1.2.	Esquema idealizado de la punta de un bolígrafo. La fuente de líquido está en la parte inferior y el espacio anular tiene ancho $h$ .	3
2.1.	Definición del ángulo de contacto, $\theta_c$ .	7
2.2.	Ángulos de contacto $\alpha$ para el caso de mal ( $\alpha \geq 90^\circ$ ) y buen mojado ( $\alpha < 90^\circ$ )	8
3.1.	Representación esquemática de una corriente de Poiseuille en un tubo circular de radio $a$ .	11
4.1.	Esquema de un cojinete hidrodinámico en el cual se observa que existe una capa lubricante entre la pista y los rodamientos que en este son cilíndricos.	16
4.2.	Esquema del flujo a través de una cuña, $h(x)$ es la separación variable entre las dos superficies sólidas.	16
4.3.	Esquema de la distribución de fuerza en una geometría tipo cuña.	22
4.4.	Geometría de la capa tridimensional	24
4.5.	Volumen de control para construir la ecuación de Reynolds	25
5.1.	Esquema de la celda Hele-Shaw con placas planas y separación uniforme.	29
5.2.	Gráfica de la altura adimensional del frente del líquido durante el ascenso capilar, $\xi$ vs $\tau$ , en una celda de placas planas, Ec. (5.11).	31
5.3.	Bosquejo de la penetración capilar en una celda de Hele Shaw radial horizontal. El flujo inicia a partir de un radio inicial $R_0$ . El frente del flujo está en $r = R(t)$ y la separación de las placas es $2H$ .	31
5.4.	Gráfica adimensional del frente de líquido en la celda radial en función del tiempo. la línea continua corresponde al caso radial dado por la Ec. (??) mientras que la línea punteada corresponde a la ley de Washburn, Ec. (??).	33
5.5.	Gráfica de la velocidad del frente del líquido en función del tiempo. La línea continua corresponde a la velocidad radial, mientras que la línea punteada corresponde a la velocidad dada por la ley radial de Washburn.	34

5.6. Celda no uniforme de Hele-Shaw. Aquí las placas no son paralelas, sino que forma entre si un ángulo $\alpha$ pequeño. En este caso la sección transversal disminuye con el avance del flujo de líquido. La altura instantánea del frente de líquido es $H(t)$ , su profundidad es $b$ y la longitud total de la celda es $L$ . . . . .	34
5.7. Gráficas adimensionales de la altura de del frente como función del tiempo. Las curvas fueron construidas con la Ec. (5.30) ( $Bo = 0,2$ ) y con la Ec. (5.33). Nótese que el efecto de la gravedad no es importante en esta celda. . . . .	37
5.8. Gráficas adimensionales de la velocidad del frente del líquido como función del tiempo construida a partir de la solución de la Ec. (5.30) ( $Bo = 0,2$ ). . . . .	38
6.1. Esquema del espacio anular lleno de líquido por la acción capilar. El espacio anular tiene tamaño $h$ y los conos tienen un angulo de apertura $\alpha$ . El sistema coordinado usado es en coordenadas polares $(r,\theta)$ y es definido esquematicamente en el dibujoi . . . . .	40
6.2. Evolución del frente del líquido como una función del tiempo para agua (línea continua), aceite de silicon con $\mu = 50$ cP (- - - -) y aceite de silicon con $\mu = 100$ cP ( $\cdot \cdot \cdot \cdot$ ). . . . .	43
6.3. Velocidad del frente de penetración capilar como función del tiempo. En la gráfica interior se muestra la velocidad para el agua y la duracuón del fenómeno es muy corta, relativa . . . . .	44
6.4. Diferentes configuraciones posibles de espacios anulares cónicos en donde la separación es no uniforme, es decir, $h=h(r)$ es una función de la coordenada $r$ . . . . .	44

### **Resumen**

El objetivo de este trabajo consiste en analizar teóricamente el comportamiento del ascenso capilar espontáneo y las alturas de equilibrio, en espacios anulares cónicos, de flujos de líquidos de diferentes viscosidades, utilizando la teoría de la lubricación. Este problema es un modelo simple del funcionamiento de un bolígrafo, y también ayuda a comprender aspectos fundamentales de los flujos capilares, por ejemplo, cuando compiten entre sí las fuerzas de gravedad, viscosas y de tensión superficial a medida que el área local de flujo se reduce.

### **Abstract**

The main objective of this thesis is the theoretical analysis of the spontaneous capillary rise and the equilibrium heights in capillary annular conical spaces of viscous liquids. Here the lubrication theory was used in order to understand the behavior of a rollerball pen and fundamental aspects of the capillary flows when the capillary, viscous and gravity forces compete among them and the local cross-section of the capillary is reduced.



# Capítulo 1

## Introducción

En este trabajo se analiza como aspecto principal el comportamiento de un flujo de fluido viscoso, usando la teoría de lubricación, debido al ascenso capilar bajo el campo de la gravedad, dentro de un espacio anular formado por dos conos coaxiales y la existencia de las posibles alturas de equilibrio.

Este tipo de problemas permiten entender la captación de líquidos en plantas [1], la penetración de pintura en papel y los flujos de película en los medios porosos fracturados que sirven como almacenadores de petróleo. El ascenso capilar también ocurre en estructuras muy estrechas como micro y nano canales [2, 3] y en espacios con estructuras muy complejas en los cuales el ascenso del fluido se da cuando el espacio capilar es menor que la longitud capilar [4, 5, 6]. Un tipo especial de penetración aparece en celdas de Hele-Shaw radiales horizontales, en las que los líquidos penetran espontáneamente fuera de la influencia de la gravedad.

En este trabajo la estructura capilar (el cambio en la geometría) tiene un fuerte impacto en el comportamiento de las fuerzas capilares y viscosas y curiosamente ambas compiten con la fuerza de gravedad. La celda de Hele-Shaw cónica se forma mediante dos conos concéntricos, teniendo un pequeño espacio uniforme entre éstos Fig. (1.2). En este caso el frente del líquido penetra debido por la acción de la presión capilar, esto puede verse como una delgada película que fluye, lo cual hace posible el uso de la teoría de la lubricación como la herramienta para modelar el comportamiento de este flujo [8, 7, 9]. El resultado principal de la solución del modelo del flujo en el espacio anular cónico es la evolución del frente de penetración capilar que es inicialmente lenta, después se mueve a velocidad constante y finalmente se acelera muy intensamente. Estas son las características típicas de un bolígrafo y que observamos de manera cotidiana.

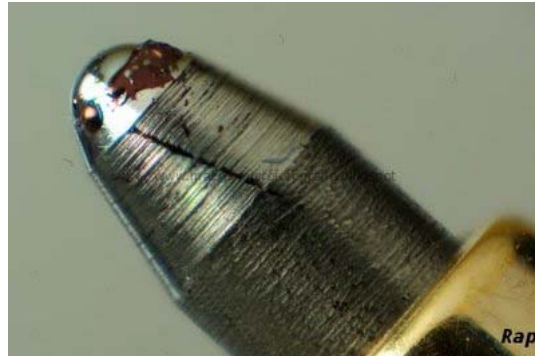


Figura 1.1: Perfil exterior de la punta de un bolígrafo. Nótese que el espacio anular interior puede verse en primera aproximación como dos conos concéntricos.

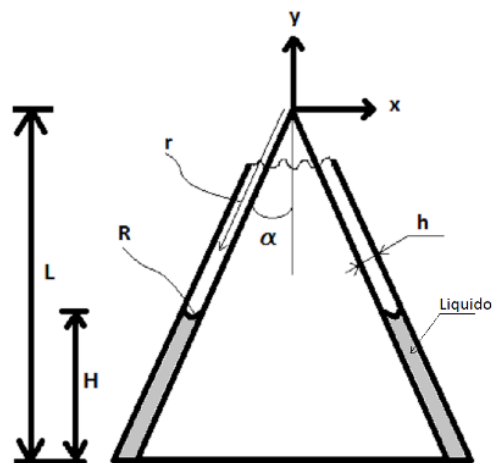


Figura 1.2: Esquema idealizado de la punta de un bolígrafo. La fuente de líquido está en la parte inferior y el espacio anular tiene ancho  $h$ .

## Capítulo 2

# Conceptos básicos de hidrodinámica [10]

Ya que el problema que aquí se estudia está dominado por las fuerzas capilares, es conveniente primero dar algunas definiciones que sean útiles para comprender mejor la formulación del modelo teórico.

### 2.1. Definición de Capilaridad

Considerese un recipiente con un líquido y a su vez se colocan varios tubos de cristal con diferentes diámetros. Inmediatamente el líquido empieza a subir por estos tubos hasta llegar a una altura determinada. Con esto se puede observar, que mientras menor sea el diámetro del tubo el líquido llega a una altura mayor, y a su vez ésta será tal que el peso del líquido que quede dentro del tubo sea igual a la tensión superficial de dicho líquido. Consecuentemente, la tensión capilar se define como una propiedad física del agua, principalmente, por la que puede avanzar a través de un canal minúsculo, siempre y cuando se encuentre en contacto con ambas paredes de dicho tubo y estas paredes se encuentren suficientemente juntas. Así pues, esta misma propiedad es la que distribuye el agua por los espacios de aire que quedan entre las partículas del suelo. Allí queda el agua retenida hasta que es encontrada por las raíces de las plantas siendo absorbida por los capilares que tienen las mismas, que son los encargados de cumplir con esta absorción.

### 2.2. Definición de Presión Capilar

Siempre que dos o más fluidos inmiscibles coexistan dentro de un sistema poroso o un tubo capilar, la combinación entre la tensión superficial y la curvatura debido a los

tubos capilares. Hace que estas fases experimenten diferentes presiones. La presión del fluido mojable y el fluido no mojable, siendo la una mayor que la otra respectivamente. A medida que las saturaciones relativas sufren cambios, las diferencias de presión también lo hacen. Estas presiones se determinan para sistemas de dos fases de diferentes clases.

La fórmula de la diferencia de presión capilar es

$$P_c = P_{nm} - P_m, \quad (2.1)$$

donde,  $P_c$  es la presión capilar,  $P_{nm}$  se define como la presión fase no mojante y  $P_m$  es la presión de la fase que moja.

### 2.3. Ecuación fundamental de la hidrostática

Supongamos dos alturas  $H$  y  $z$  en un fluido; la ecuación fundamental de la hidrostática es

$$P(z) + \rho gz = P(H) + \rho gH, \quad (2.2)$$

Donde  $\rho$  es la densidad del líquido constante, y donde  $g$  es el valor de la aceleración de la gravedad,  $z$  y  $H$  las correspondientes alturas. Una expresión más general de esta ecuación es

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g. \quad (2.3)$$

Este principio también explica porqué para un objeto sumergido en el agua, su peso aparente es menor que si lo pesamos en el aire. En la deducción de este principio, la fuerza neta de la presión sólo depende de la posición (geometría del objeto y de la profundidad). En el caso del fluido dentro del mismo fluido (equilibrio), la fuerza neta de la presión tiene que ser igual al peso del fluido contenido en el volumen considerado.

### 2.4. Tensión superficial. Capilaridad. Ley de Jurin

Se denomina tensión superficial cuando alrededor de una molécula actúan fuerzas de atracciones simétricas y, cuando esta se encuentra rodeada de otras moléculas también existen fuerzas que actúan a su alrededor, dichas fuerzas tienden a arrastrar a las moléculas de la superficie hacia el interior del líquido. Cuando esto ocurre en un líquido, este se comporta como si tuviese una película invisible en su superficie.

La tensión superficial a su vez es responsable de la resistencia que un líquido presenta a la penetración de su superficie, de la tendencia a la forma esférica de las gotas de un líquido, del ascenso de los líquidos en los tubos capilares y de la flotación de objetos u organismos en la superficie de los líquidos. Termodinámicamente la tensión superficial es un fenómeno de superficie y es la tendencia de un líquido a disminuir su superficie hasta que su energía potencial superficial es mínima, condición necesaria para que el equilibrio sea estable. En el interior del líquido, la molécula está rodeada de otras moléculas en todas las direcciones, de manera en que la fuerza neta es nula. Cerca de la superficie, la molécula sólo está rodeada parcialmente de otras moléculas del líquido, de manera que esto provoca una fuerza atractiva neta hacia dentro del líquido.

Para extraer la molécula, hace falta hacer un trabajo (**tensión superficial**), si la llevamos a la superficie; si la extraemos del todo ocurre la evaporación.

Sea  $\delta$  es el alcance de la fuerza, y  $F$  la fuerza molecular mediana, el trabajo será igual al producto de estos,

$$W = F\delta. \quad (2.4)$$

Ampliar el área superficial de un líquido, también cuesta energía

$$\text{Tensión superficial} \equiv \sigma = \frac{W}{A} \left( \frac{\text{N}}{\text{m}} \right), \quad (2.5)$$

donde  $W$  es el trabajo y  $A$  el área.

Ejemplos de valores de tensión superficial en diferentes líquidos

Agua a 273 K:	$75,5 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$
Agua a 373 K:	$58,9 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$
Etanol:	$22,3 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$
Aceite de oliva:	$32,0 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$
Mercurio:	$465,0 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$

Los líquidos poseen las propiedades de cohesión y adhesión debido a la atracción molecular. Debido a la propiedad de cohesión, los líquidos pueden resistir pequeñas fuerzas de tensión en la interfase entre el líquido y aire, conocida como **tensión superficial**. La cohesión permite al líquido resistir esfuerzos de tracción, mientras que la adhesión permite que se adhiera a otros cuerpos.

Si las moléculas líquidas tienen mayor adhesión que cohesión, entonces el líquido se pega a las paredes del recipiente con el cual está en contacto, resultando en un aumento (elevación) de la capilaridad de la superficie del líquido; un predominio de la cohesión causa por el contrario una depresión de la capilaridad.

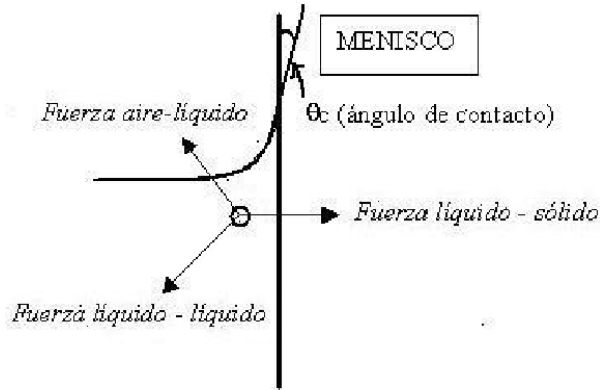


Figura 2.1: Definición del ángulo de contacto,  $\theta_c$ .

La Fig.(2.1) muestra la imagen de un menisco. Las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido contenido en un recipiente son: la fuerza de líquido - sólido, la fuerza del aire - líquido, y la fuerza de líquido

El ángulo de contacto  $\theta_c$  (depende exclusivamente de las fuerzas adhesivas y cohesivas). Como ejemplos se pueden mencionar el ángulo de contacto del sistema agua-vidrio:  $0^\circ$ , y el ángulo de contacto del sistema mercurio-vidrio:  $140^\circ$ .

Para estudiar el ascenso o el descenso de líquidos en conductos finos, conviene preguntar primeramente a que distancia puede subir o bajar el líquido. Las fuerzas que intervienen, hacia arriba y hacia abajo son

$$F_{\text{arriba}} = 2\pi r \sigma \cos \theta_c, \quad (2.6)$$

$$F_{\text{abajo}} = \text{Peso} = \pi r^2 h \rho g, \quad (2.7)$$

al igualar las dos fuerzas se obtiene que

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta_c}{\rho g r}. \quad (2.8)$$

Esta es la ley de Jurin y muestra que a menor radio del tubo  $r$ , mayor es la altura de equilibrio.

## 2.5. Ángulo de contacto de un fluido

La penetración capilar de un líquido con buen o mal mojado de las paredes de un tubo capilar vertical o, en el caso más general, a las diversas paredes de un espacio capilar, es un fenómeno muy común en diversos procesos de la ingeniería química, la

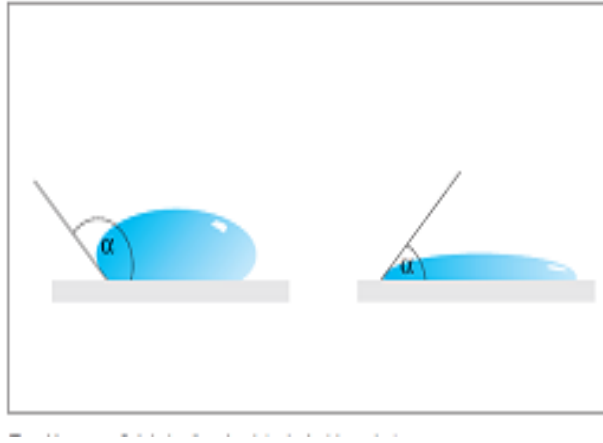


Figura 2.2: Ángulos de contacto  $\alpha$  para el caso de mal ( $\alpha \geq 90^\circ$ ) y buen mojado ( $\alpha < 90^\circ$ )

ingeniería petrolera y la ingeniería agrícola. En la ingeniería química el movimiento espontáneo de un líquido de una región a otra, debido a la acción de la presión capilar, es de gran utilidad en la cromatografía de líquidos y los reactores de lecho empacado. En ambos casos el líquido asciende a través de los poros debido a la presión capilar de manera que es posible alcanzar alturas de equilibrio cuando el peso iguala a la fuerza capilar.

En la mayoría de los casos cuando una gota líquida se aplica a un material sólido, se forma un ángulo en el punto de contacto entre la gota y el material sólido, denominado ángulo de mojado o ángulo de contacto. Este ángulo de contacto es un índice de la capacidad de humectación de los líquidos aplicados sobre sólidos. El ángulo de contacto se mide como el ángulo entre la base y la tangente a la gota, en el punto de contacto entre el líquido y la superficie. Se dice que el líquido moja bien a una superficie sólida cuando  $\alpha < 90$  y se tiene un mal mojado si  $\alpha \geq 90$ . Este valor corresponde al nivel de energía superficial en el sistema de equilibrio sólido líquido, con la condición de que la superficie sea lisa, no porosa, no absorbente y homogénea. Además, el líquido no debe reaccionar químicamente con el substrato. Se produce un mojado eficaz cuando el ángulo de contacto es de  $90^\circ$  o inferior.

La figura (2.2) muestra el ángulo de contacto para mal mojado (izquierda) y para buen mojado (derecha)

## Capítulo 3

# Flujo de Pouseuille

En los fluidos reales, compresibles o incompresibles, que circulan por un conducto, la viscosidad causa una pérdida de energía mecánica que depende del caudal, el coeficiente de viscosidad dinámica  $\mu$ , el régimen de flujo y la geometría del conducto.

La ley de Poiseuille <sup>1</sup> permite calcular y relacionar la pérdida energética con el caudal, el coeficiente  $\mu$  y las dimensiones de un tubo cilíndrico de paredes rígidas, en condiciones de flujo laminar. Poiseuille demostró experimentalmente en 1846 que el caudal  $Q$  se relaciona con la diferencia de presión entre los extremos del tubo  $\Delta P$ , su diámetro interno  $D$  y su longitud  $L$ , según la siguiente Ec. (3.1):

$$Q = \frac{kPD}{L} \quad (3.1)$$

La rigurosidad de los experimentos de Poiseuille puede apreciarse con un simple ejemplo. La viscosidad del agua a  $10^\circ\text{C}$  calculada con el valor que él estimó para la constante  $k$  es de 1,3084 cP. El valor aceptado actualmente es de 1,3077 cP. Si en lugar del diámetro se emplea el radio interno  $r$  del tubo, simplemente varía la constante  $k$ :

$$Q = \frac{k\Delta P r^4}{L} \quad (3.2)$$

Poiseuille halló que la constante  $k$  disminuía con la temperatura (hoy sabemos que esto es debido a la influencia de ésta sobre la viscosidad de los líquidos) pero era independiente del caudal y del radio y longitud del tubo. Poco después Wiedeman (1856) e independientemente Hagenbach (1860) modificaron la ecuación a su forma actual, que incluye la viscosidad como un factor independiente:

---

<sup>1</sup>Jean-Louis-Marie Poiseuille (1799-1869), médico y fisiólogo francés, primero en utilizar el manómetro de mercurio para medir la presión arterial (por canulación de arterias en animales). Interesado en la circulación de la sangre pero carente de un anticoagulante adecuado, Poiseuille estudió entonces el flujo laminar de agua en tubos cilíndricos. A partir de sus resultados formuló la ley que lleva su nombre.



$$Q = \frac{\Delta P \pi x^4}{8L\mu}. \quad (3.3)$$

Se recordará que según la ecuación de Bernoulli, la energía mecánica total por unidad de volumen,  $EMT(V)$  de un fluido en movimiento, está determinada por la siguiente expresión

$$EMT(V) = \frac{1}{2}\delta v^2 + Pe.h. \quad (3.4)$$

El flujo viscoso es disipativo, porque parte de la  $EMT(V)$  se pierde en forma de calor debido a la fricción intermolecular. Cuando un fluido viscoso circula con caudal constante por un tubo horizontal de radio uniforme, su energía cinética  $\frac{1}{2}\delta v^2$  y su energía potencial gravitatoria  $Pe.h$  son constantes, de modo que la única forma en que la  $EMT(V)$  puede reducirse es a expensas de la presión lateral  $P$ . Dicho de otro modo, la diferencia de presión entre los extremos del tubo,  $\Delta P$ , representa la transformación en calor de la energía mecánica necesaria para sustentar el caudal observado. La ecuación de Poiseuille puede, por tanto, expresarse como

$$\Delta P = \frac{8QL\mu}{\pi r^4}. \quad (3.5)$$

Estrictamente, la ecuación de Poiseuille supone además de la constancia del caudal, del radio del tubo y de la viscosidad del líquido, la existencia de flujo laminar y de un frente de avance parabólico. La velocidad máxima en tal frente de avance se localiza en el eje del tubo, donde la tasa de corte es máxima

$$V_{MAX} = \frac{\Delta P(r^2)}{4L\mu}. \quad (3.6)$$

De la ecuación de Poiseuille puede despejarse la velocidad media  $v$  del fluido teniendo en cuenta que  $Q = Sv$ , donde  $S = \pi x^2$  es la sección transversal del tubo (Ley del Caudal)

$$Q = \frac{\Delta P \pi r^4}{8L\mu}, \quad (3.7)$$

$$\pi r^2 v = \frac{\Delta P \pi r^4}{8L\mu}, \quad (3.8)$$

por lo tanto resolviendo para  $v$ :

$$v = \frac{\Delta P \pi r^2}{8L\mu}. \quad (3.9)$$

Lo que equivale a decir que la velocidad media de avance  $v$ , despejada de la ecuación de Poiseuille, es exactamente la mitad de  $v_{MAX}$ , la velocidad en el eje del tubo. Para

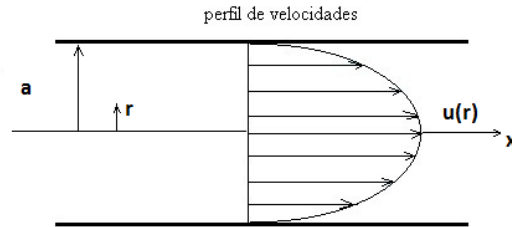


Figura 3.1: Representación esquemática de una corriente de Poiseuille en un tubo circular de radio  $a$ .

analizar las implicaciones de esta ecuación, supondremos un modelo simple, representado por un frasco de Mariotte conectado a un tubo rígido provisto de manómetros a distancias iguales de su origen, por el que circula un líquido newtoniano con régimen laminar Fig.(3.1). La presión de perfusión es la diferencia entre la presión del reservorio al nivel de la boca del tubo y la presión en la desembocadura. El gradiente de presión corresponde a la variación que sufre la presión con la distancia a lo largo del tubo. Como el descenso de presión es lineal, el gradiente es constante y puede calcularse como la diferencia de presión entre dos puntos, por ejemplo un punto a la entrada y un punto a la salida dividida la distancia de que separa ambos puntos Fig. (3.1):

Dado que en este sistema la presión de perfusión es constante, todo cambio de radio, de longitud o del coeficiente de viscosidad  $\mu$  resultara en una modificación del caudal. Por ejemplo, si la longitud del tubo se duplica, el caudal se reduce a la mitad; si  $\mu$  disminuye a la mitad, el caudal aumenta al doble.

La dependencia del radio es más compleja, porque se encuentra elevado a la cuarta potencia. Bastaría un aumento de aprox. 20 en el diámetro para duplicar el caudal con una presión de perfusión constante.

En el caso del frasco de Mariotte, la presión de perfusión es la variable independiente, cuyo valor queda fijado por las características del sistema, mientras que el caudal es la variable dependiente. Si, por el contrario, la variable independiente es el caudal, la presión de perfusión cambiará según sea  $r^4$ , la longitud y el coeficiente de viscosidad. Experimentalmente es posible diseñar un sistema de caudal constante mediante una bomba capaz de modificar la presión de perfusión al valor que sea necesario para mantener el caudal fijado.

En el panel superior se indican las variables para el caso de un liquido de  $\mu = 1$  cP. La presion de perfusion es de 50929 dina/cm2 (aprox. 5,1 kPa). En el panel inferior se muestra que si el liquido tiene el doble de viscosidad, la presion de perfusion debe duplicarse para mantener el caudal constante. Los ejemplos de las Fig. (3.1) omiten considerar (por razones didácticas) el problema del establecimiento del frente parabólico. En efecto, en la salida del reservorio Fig. (3.1) el frente de avance es plano, ya que todas las moléculas se desplazan a igual velocidad. Sin embargo, la viscosidad del líquido retrasa la velocidad de las láminas de fluido en diferente medida: las láminas más próximas a la pared sufren mayor retardo que las más próximas al eje.

Existe una transicion entre el frente plano inicial y el frente parabolico plenamente establecido. En dicha transicion, el perfil parabolico comienza a establecerse desde la pared hacia el eje del tubo, y persiste una parte central del frente de avance que continua siendo plano. Se denomina lamina limite a la que se la porcion donde se esta estableciendo el frente parabolico. Se llama longitud de entrada  $L_e$  a la distancia a lo largo del tubo en la cual El radio  $c$  de la lamina limite es aproximadamente igual a  $(\eta x/v_c\delta)^{-2}$ , donde  $x$  es la distancia desde la entrada y  $V_c$  la velocidad del nucleo central (mas rapido) del frente de avance. Cuando se establece el frente parabolico,  $c$  es igual al radio  $r$  del tubo, y  $x$  es igual a  $L_e$ .

$$r^2 = \frac{z\mu L_e}{V_c\delta}, \quad (3.10)$$

donde  $z$  es una constante. De esta ecuación puede despejarse la longitud de entrada  $L_e$ :

$$L_e = r^2 v_c \delta / z \mu, \quad (3.11)$$

la longitud de entrada puede asimismo expresarse en funcion del número de Reynolds  $Re = r v_c \delta / z \mu$

$$L_e = Re r / z. \quad (3.12)$$

### 3.1. Corriente plana de Poiseuille

Consideramos el caso en que no hay movimiento relativo entre de las placas pero existe un gradiente de presión motriz  $P_l$  constante. el movimiento resultante se llama corriente plana de poiseuille.

La ecuación de cantidad de movimiento y las condiciones de frontera son:

$$P_l + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (3.13)$$

$$u(0) = u(h) = 0, \quad (3.14)$$

cuya solución es

$$u = -\frac{P_l}{2\mu}y(y-h). \quad (3.15)$$

### 3.2. Corriente de Poiseuille en un tubo

Flujo unidireccional axisimetrico de un fluido incompresible en un tubo recto infinito de sección circular y radio  $a$ , bajo la acción de un gradiente de presión motriz  $P_l$  constante.

La ecuación de cantidad de movimiento es:

$$0 = p_l + \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right), \quad (3.16)$$

donde  $r$  es la distribución al eje del tubo Fig (11) con condiciones de frontera  $u = 0$ ,  $r = a$  y  $u$  finito para  $r < a$  la solución del problema es:

$$u = \frac{p_l}{4\mu}(a^2 - r^2) = u_{max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (3.17)$$

siendo  $u_{max} = a^2 p_l / 4\mu$  en la Ec.(3.17)

### 3.3. Corriente de Poiseuille en un tubo

Flujo unidireccional axisimetrico de un fluido incompresible en un tubo recto infinito de sección circular y radio  $a$ , bajo la acción de un gradiente de presión motriz  $P_l$  constante.

La ecuación de cantidad de movimiento es:

$$0 = p_l + \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right), \quad (3.18)$$

donde  $r$  es la distribución al eje del tubo fig (11) con condiciones de frontera  $u = 0$ ,  $r = a$  y  $u$  finito para  $r < a$  la solución del problema es:

$$u = \frac{p_l}{4\mu}(a^2 - r^2) = u_{max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (3.19)$$

siendo  $u_{max} = a^2 p_l / 4\mu$  en la Ec. (3.17)

#### ●Número de Reynolds

Cuando la velocidad de flujo de un fluido resulta que es suficientemente grande, se rompe el flujo laminar y se establece la turbulencia. La velocidad crítica por encima

de la cual el flujo a través de un tubo resulta turbulenta depende de la densidad y de la viscosidad del fluido y del radio del tubo. para el ejercicio que estamos desarrollando estaremos unimante en un flujo laminar

El flujo de un fluido puede caracterizarse mediante un número **adimensional** al que denominamos **número de Reynolds**  $Re$  que se define

El número de Reynolds relaciona la densidad, viscosidad, velocidad y dimensión típica de un flujo en una expresión adimensional, que interviene en numerosos problemas de dinámica de fluidos. Dicho número o combinación adimensional aparece en muchos casos relacionado con el hecho de que el flujo pueda considerarse laminar (número de Reynolds pequeño) o turbulento (número de Reynolds grande). Desde un punto de vista matemático el número de Reynolds de un problema o situación concreta se define por medio de la siguiente fórmula:

$$Re = \frac{\rho v_s D}{\mu},$$

o equivalentemente por

$$Re = \frac{v_s D}{\nu},$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $v_s$  es la velocidad característica del fluido,  $D$  es el diámetro de la tubería a través de la cual circula el fluido o longitud característica del sistema,  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido y  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Se observa que cuando en una tubería ocurre que

$$Re < 2000 \Rightarrow \text{el flujo es laminar} \quad (3.20)$$

$$Re > 3000 \Rightarrow \text{el flujo es turbulento} \quad (3.21)$$

Y cuando  $2000 < \text{Número de Reynolds} < 3000$  el régimen del flujo puede ser laminar o turbulento, es decir, es un flujo en transición.

## Capítulo 4

# Teoría de la lubricación

Se conoce desde muy antiguo que la presencia de una película de lubricante que se mueve una respecto a la otra reduce apreciablemente la fricción entre ambas [8, 7, 9].

A primera vista se podría pensar que el problema principal de la teoría de lubricación consiste en predecir la fricción resultante para una configuración dada. Sin embargo, el problema real es muy diferente. las películas de lubricación se encuentran, normalmente, entre dos superficies sólidas sometidas a fuerzas que tienden a juntarlas. Para soportar esta fuerza que tienden a juntarlas. Para soportar esta fuerza, sin que exista contacto entra ambas superficies, la película de lubricante debe desarrollar un esfuerzo normal que, salvo casos triviales, es la parte más significativa del tensor de esfuerzos. esta capacidad de soportar esfuerzos normales está generada por la propia viscosidad del fluido.

Hay muchos tipos de cojinetes lubricados con fluidos, pero básicamente se dividen en dos: los cojinetes de empuje, también llamados hidrostáticos y los cojinetes hidrodinámicos.

Los cojinetes de empuje son, en principio los más simples. la capacidad de carga de la película del fluido se crea y se mantiene por medios externos. la superficie que soporta la carga está flotando respecto del resto del sistema y normalmente no hay movimiento relativo entre las superficies, aunque puede haberlo la Fig. (4.1) representa un esquema de este tipo de cojinetes.

Los cojinetes de empuje con lubricante líquido se utilizan para soportar sistemas muy pesados como es el telescopio del monte palomar con 500 toneladas de peso. Los gases se usan como lubricantes en sistemas poco pesados como puede ser un giroscopio.

Los cojinetes hidrodinámicos obtienen su capacidad de carga por el movimiento relativo de sus superficies. los tipos básicos de estos cojinetes son los deslizantes (o patines) en los que el movimiento relativo consiste en el desplazamiento de una superficie sobre otra; otras veces el movimiento relativo es un desplazamiento normal

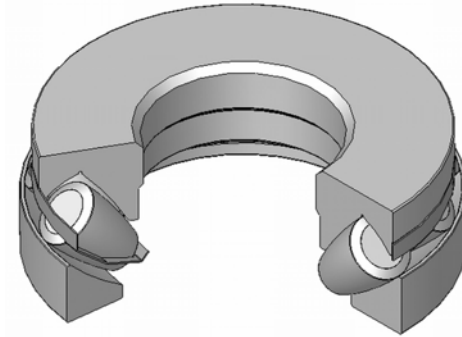


Figura 4.1: Esquema de un cojinete hidrodinámico en el cual se observa que existe una capa lubricante entre la pista y los rodamientos que en este son cilíndricos.

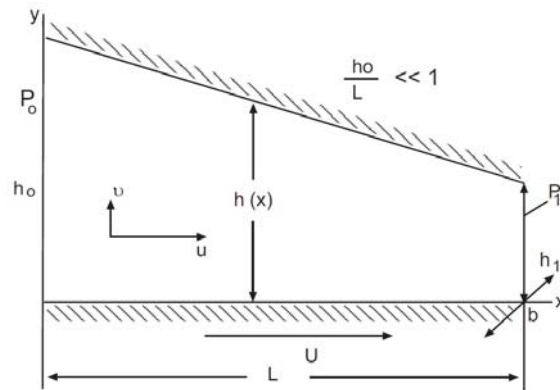


Figura 4.2: Esquema del flujo a través de una cuña,  $h(x)$  es la separación variable entre las dos superficies sólidas.

de ambas superficies (a veces pulsante); y en general es un movimiento transversal y longitudinal de una superficie relativa a otra como lo es el caso de cojinetes formados por un eje que gira en el interior de una carcasa.

#### 4.1. Flujo en laminas, efecto cuña

Una pequeña divergencia de las dos placas de la Fig. (4.2) hace que el flujo no se ha estrictamente unidireccional y, por lo tanto, que las fuerzas de inercia no sean nulas. Bajo ciertas restricciones (a precisar) éstas serán mucho menores que las fuerzas viscosas y, de nuevo, se tratara de un flujo dominado por las últimas.

El movimiento relativo de las dos placas genera, debido a la falta de paralelismo, un gradiente de presión "efecto cuña" que es esencial en la lubricación fluido dinámica. La hipótesis de lámina fluida delgada implica  $h_0/L \ll 1$ .

Las ecuaciones con ordenes de magnitud de cada término para el flujo 2-D con densidad constante  $\rho$  y viscosidad dinámica  $\mu$  son

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{U}{L}\right) + \left(\frac{V}{h_0}\right) = 0,$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.2)$$

$$\left(\rho \frac{U}{\tau_0}\right) \left(\rho \frac{U^2}{L}\right) \left(\rho V \frac{U}{h_0}\right) \left(\frac{\Delta_x P}{L}\right) \left(\mu \frac{U}{L^2}\right) \left(\mu \frac{U}{h_0^2}\right)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (4.3)$$

$$\left(\rho \frac{V}{\tau_0}\right) \left(\rho U \frac{V}{L}\right) \left(\rho \frac{V^2}{h_0}\right) \left(\frac{\Delta_y P}{h_0}\right) \left(\mu \frac{V}{L^2}\right) \left(\mu \frac{V}{h_0^2}\right)$$

Nótese que se emplean dos escalas de velocidad,  $U$  (horizontal) y  $V$  (vertical), así como dos escalas de longitud,  $L$  (en dirección  $x$ ) y  $h_0$  (en dirección  $y$ ) como lo indica la física del problema.

De la ecuación de continuidad:  $V \sim Uh_0/L$ . Para  $h_0/L \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ ,  $V$  es mucho menor que  $U$ .

En las ecuaciones de cantidad de movimiento  $\mu U/L^2 \ll \mu U/h_0^2$  y  $\mu V/L^2 \ll \mu V/h_0^2$ , siendo los penúltimos términos despreciables en comparación con los últimos.

Los dos términos de fuerzas de inercia en las ecuaciones de cantidad de movimiento son del mismo orden

$$\rho V \frac{U}{h_0} \sim \rho \frac{U^2}{L}, \rho U \frac{V}{L} \sim \rho \frac{V^2}{h_0}. \quad (4.4)$$

Las condiciones para que las fuerzas de inercia sean despreciables frente a las viscosas son: en el eje  $x$ :  $\rho U^2/L \ll \mu U/h_0^2 \rightarrow \rho U h_0^2/\mu L \ll 1$ , y en el eje  $y$ :  $\rho UV/L \ll \mu V/h_0^2$ , es decir, se obtiene lo mismo que el eje  $x$ . Dado que  $h_0/L \ll 1$  el número de Reynolds,  $\rho U h_0/\mu$ , puede ser bastante mayor que la unidad. La condición para que los términos no estacionarios sean despreciables frente a los viscosos es

$$\rho \frac{U}{\tau_0} \ll \mu \frac{U}{h_0^2} \rightarrow \frac{h_0^2/v}{\tau_0} \ll 1, \quad (4.5)$$

$$\rho \frac{V}{\tau_0} \ll \mu \frac{U}{h_0^2}, \quad (4.6)$$

Excepto para frecuencias elevadas ( $\tau_0$  pequeñas) la condición anterior se cumplirá.



Sí los términos de la izquierda de las ecuaciones de cantidad de movimiento son despreciables, entoces

$$\frac{\Delta_x P}{L} \sim \mu \frac{U}{h_0^2}, \quad \frac{\Delta_y P}{h_0} \sim \mu \frac{V}{h_0^2}, \quad (4.7)$$

y por lo tanto

$$\frac{\Delta_x P}{\Delta_y P} \sim \left( \frac{L}{h_0} \right)^2 \gg 1. \quad (4.8)$$

De los anterior se deduce que  $\Delta_y P \ll \Delta_x P$ , es decir,  $\partial P / \partial y \approx 0$ ; con lo cual  $P = P(x)$ . El sistema de ecuaciones a considerar es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.9)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.10)$$

con las condicones de frontera

$$y = 0 \quad u = U, \quad v = 0 \quad (4.11)$$

$$y = h(x) \quad u = 0 = v \quad (4.12)$$

$$x = 0 \quad P(0) = P_0 \quad (4.13)$$

$$x = L \quad P(L) = P_1 \quad (4.14)$$

El objetivo es obtener  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  y  $P(x)$ , mientras el flujo de Hagen -Poiseuille entre dos placas paralelas  $-dp/dx$  es conocido y  $P(x)$  cae linealmente con  $x$ , en el caso presente  $-dP/dx$  es desconocido.

La ecuación de cantidad de movimiento se integra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (4.15)$$

de aquí se obtiene que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} y + C_1 \quad (4.16)$$

y una segunda integración da

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (4.17)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  se obtienen con las condiciones de frontera  $u(x, 0)$ ,  $u(x, h(x)) = 0$ . La solución bajo estas condiciones es

$$u(x, y) = \underbrace{\frac{1}{2\mu} \left( -\frac{dP}{dx} \right) y(h-y)}_{\text{Flujo de Poiseuille}} + \underbrace{U \left( 1 - \frac{y}{h} \right)}_{\text{Flujo de Couette}} \quad (4.18)$$

A continuación se calcula  $P(x)$  ó  $(-dp/dx)$ , Integrando la ecuación de continuidad desde  $y = 0$  hasta  $y = h(x)$  se tiene

$$\int_0^{h(x)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = 0 = \int_0^{h(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{h(x)} \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (4.19)$$

$$0 = \frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} u(x, y) dy - u(x, h(x)) \frac{dh}{dx} + v(x, h(x)) - v(x, 0) \quad (4.20)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} u(x, y) dy = 0 \rightarrow \int_0^{h(x)} u(x, y) dy = \text{constante} = q \quad (4.21)$$

$q = Q/b$  es el caudal pro unidad de anchura perpendicular al plano  $x - y = x - y$  que es desconocido. Sustituye la expresión obtenida para  $u(x, y)$

$$q = \frac{1}{2\mu} \left( -\frac{dP}{dx} \right) \int_0^{h(x)} (hy - y^2) dy + U \int_0^{h(x)} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) dy = \quad (4.22)$$

$$= \frac{1}{2\mu} \left( -\frac{dP}{dx} \right) \left( h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right)_0^h + U \left( y - \frac{y^2}{2h} \right)_0^h =$$

$$q = - \underbrace{\frac{h^3}{12\mu} \frac{dP}{dx}}_{\text{Caudal de Poiseuille}} + \underbrace{\frac{Uh}{2}}_{\text{Caudal de Couette}} \quad (4.23)$$

despejando  $dP$

$$dp = 6\mu U \frac{dx}{h^2} - 12\mu q \frac{dx}{h^3}. \quad (4.24)$$

Integrando entre  $h_0$  donde  $x = 0$  y  $h(x)$  (donde  $x = x$ ) obtenemos

$$P(x) - P_0 = \frac{6\mu UL}{h_0 - h_1} \left( \frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h_0} \right) - \frac{6\mu q L}{h_0 - h_1} \left( \frac{1}{h^2(x)} - \frac{1}{h_0^2} \right). \quad (4.25)$$

El caudal por unidad de área,  $q$ , no es conocido y se puede determinar imponiendo  $P(x = L) = P_1$  es decir

$$P_1 - P_0 = \frac{6\mu UL}{h_0 - h_1} \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right) - \frac{6\mu qL}{h_0 - h_1} \left( \frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) = \frac{6\mu UL}{h_0 h_1} - 6\mu qL \frac{h_0 + h_1}{h_0^2 - h_1^2}, \quad (4.26)$$

de donde se puede despejar  $q$ , Para el caso particular  $P_1 = P_0$ ,

$$q = U \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1}, \quad (4.27)$$

con  $q$  calculado,  $P(x)$  y  $dp/dx$  son conocidos y tambien los es  $u(x, y)$ . Para calcular  $v(x, y)$  se integra la ecuación de continuidad desde  $y = 0$  hasta  $y$ , o sea

$$\int_0^y \left( \frac{\partial u(x, y')}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y')}{\partial y} \right) dy' = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u(x, y') dy' + v(x, y) - v(x, 0) \quad (4.28)$$

$$v(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2\mu} \left( -\frac{dP}{dx} \right) \left( h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) + U \left( y - \frac{y^2}{2h} \right) \right\} \quad (4.29)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2\mu} \left( -\frac{dP}{dx} \right) y^2 \left( \frac{h}{2} - \frac{y}{3} \right) + U y \left( 1 - \frac{y}{2h} \right) \right\} \quad (4.30)$$

## 4.2. Fuerzas viscosas sobre la placa

Para calcular la resultante de las fuerzas sobre las placas se obtiene el tensor de esfuerzos viscosos:

$$\tau' = \begin{pmatrix} \tau'_{xx} & \tau'_{xy} \\ \tau'_{xy} & \tau'_{yy} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

donde

$$\tau'_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \tau'_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \tau'_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (4.32)$$

como

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U}{h_0} \gg \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{V}{L}, \quad \tau'_{xy} \approx \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4.33)$$

con

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( -\frac{dP}{dx} \right) (h - 2y) - \mu \frac{U}{h} = \tau'_{xy}, \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2\mu} \left( -\frac{d^2P}{dx^2} \right) y(h - 2y) + \frac{1}{2\mu} \left( -\frac{dP}{dx} \right) y \frac{dh}{dx} + \frac{U y dh}{h^2 dx}, \quad (4.35)$$

$$\tau'_{xx} \sim \mu \frac{U}{h_0} \frac{h_0 - h_1}{L} \sim \mu \frac{U}{L}, \quad (4.36)$$

$$\tau'_{xy} \sim \mu \frac{U}{h_0} \quad (4.37)$$

$$\tau'_{yy} \sim \mu \frac{U}{h_0} \frac{h_0 - h_1}{L} \sim \mu \frac{U}{L} \quad (4.38)$$

Para calcular la fuerza del fluido sobre las placas con  $P_1 = P_2$  se tiene

$$dF^s = \{[P(x) - P_0] n^s - \tau'^s \cdot n^s\} dS \quad (4.39)$$

$$dF^I = \{[P(x) - P_0] n^I - \tau'^I \cdot n^I\} dS \quad (4.40)$$

donde el super índice  $s$  corresponde a la placa superior e  $I$  a la placa inferior. Desarrollando se encuentra que

$$dF^s = [P(x) - P_0] (\text{sen } \alpha, \cos \alpha) dS \quad (4.41)$$

$$-(\tau'^s_{xx} \text{sen } \alpha + \tau'^s_{xy} \cos \alpha, \tau'^s_{xy} \text{sen } \alpha + \tau'^s_{yy} \cos \alpha) dS$$

y por los componentes

$$dF^s_x = [P(x) - P_0] dS \sin \alpha - \tau'^s_{xx} dS \sin \alpha - \tau'^s_{xy} dS \cos \alpha \quad (4.42)$$

$$dF^s_y = [P(x) - P_0] dS \cos \alpha - \tau'^s_{xy} dS \sin \alpha - \tau'^s_{yy} dS \cos \alpha \quad (4.43)$$

con las estimaciones anteriores para los componentes de  $\tau$ , se tiene

$$dF^s_x \approx [P(x) - P_0] dh - \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} dx, \quad (4.44)$$

$$dF^s_y \approx [P(x) - P_0] dx, \quad (4.45)$$

Para la placa inferior

$$dF^I = \{[P(x) - P_0] (0, -1) + (\tau'^I_{xy}, \tau'^I_{yy})\} dS.$$

Por los componentes

$$F^I_x = \tau'^I_{xy} dx \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} dx, \quad (4.46)$$

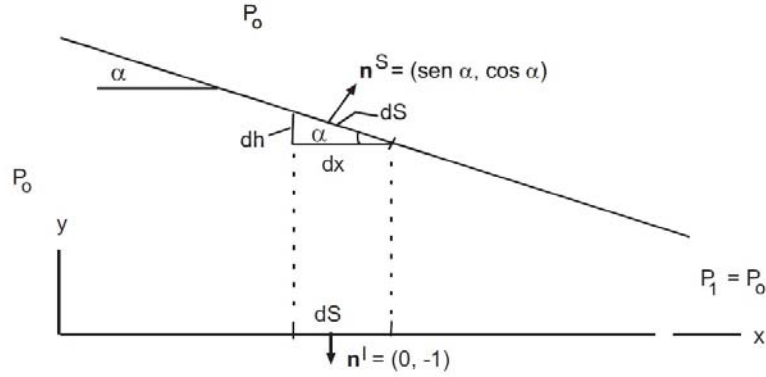


Figura 4.3: Esquema de la distribución de fuerza en una geometría tipo cuña.

$$F_y^I = [P(x) - P_0] dx. \quad (4.47)$$

Además

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{h}{2} \frac{dP}{dx} - \mu \frac{U}{h}, \quad (4.48)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{h}{2} \frac{dP}{dx} - \mu \frac{U}{h}, \quad (4.49)$$

con

$$\frac{dP}{dx} = \frac{6\mu U}{h^2} - \frac{12\mu q}{h^3} yq = U \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1}, \quad (4.50)$$

y

$$P(x) - P_0 = \frac{6\mu U L}{h_0 - h_1} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{h_0} \right) - \frac{6\mu q L}{h_0 + h_1} \left( \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) \quad (4.51)$$

$$dF_y^s = -dF_y^I = [P(x) - P_0] dx = -\frac{L}{h_0 - h_1} [P(x) - P_0] dh. \quad (4.52)$$

Integrando término a término desde  $h = h_0(x = 0)$  hasta  $h = h_1(x = L)$  se llega a que

$$F_y^s = -F_y^I = -6\mu U \left( \frac{L}{h_0 - h_1} \right)^2 \left( \ln \frac{h_0}{h_1} - 2 \frac{h_0 - h_1}{h_0 + h_1} \right). \quad (4.53)$$

Por otro lado

$$dF_x^I = - \left[ \frac{h}{2} \left( \frac{6\mu U}{h^2} - \frac{12\mu q}{h^3} \right) + \mu \frac{U}{h} \right] \frac{L}{h_0 - h_1} dh, \quad (4.54)$$

integrando obtenemos

$$F_x^I = 2\mu U \left( \frac{L}{h_0 - h_1} \right) \left( 2 \ln \frac{h_0}{h_1} - 3 \frac{h_0 - h_1}{h_0 + h_1} \right). \quad (4.55)$$

Para la placa superior

$$F_x^s = [P(x) - P_0] dh + \left[ \frac{h}{2} \left( \frac{6\mu U}{h^2} - \frac{12\mu q}{h^3} \right) - \mu \frac{U}{h} \right] \frac{L}{h_0 - h_1} dh, \quad (4.56)$$

Integrando

$$F_x^s = 2\mu U \left( \frac{L}{h_0 - h_1} \right) \left( 3 \frac{h_0 - h_1}{h_0 + h_1} - 2 \ln \frac{h_0}{h_1} \right). \quad (4.57)$$

Se define el rendimiento fluido- dinámico como Sustentación/Resistencia =  $F_y^s/F_x^s$ . Con las expresiones obtenidas anteriormente se encuentra que

$$\frac{F_y^s}{F_x^s} \sim \frac{L}{h_0 - h_1} \sim \frac{L}{h_0} \gg 1 \quad (4.58)$$

Este valor del rendimiento hace posible la lubricación fluido-dinámica; el rendimiento es una expresión de la fuerza útil de sustentación frente a la fuerza parásita de la resistencia que hay que vencer para mantener el movimiento relativo de las dos placas. La lubricación fluido-dinámica evita el contacto de sólidos en movimiento relativo.

### 4.3. Ecuación de Reynolds en coordenadas generalizadas [9]

Supongamos que dos superficies sólidas curvadas están en movimiento relativo separadas por una capa fluida muy delgada.

Ligaremos el sistema de referencia a una de las superficies y usaremos un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales en el  $\alpha$  y  $\beta$  son las coordenadas sobre la superficie fija y donde  $y$  es la distancia a la misma.

La ecuación de la otra superficie es  $y = h(\alpha, \beta, t)$ , y la película fluida ocupa la region  $0 < y < h$ . Supondremos, además que esta segunda superficie, que puede ser deformable, se mueve respecto a la primera con una velocidad de componentes  $U_\alpha(\alpha, \beta, t)$ ,  $U_\beta(\alpha, \beta, t)$  y  $\partial h/\partial t$  en las direcciones  $\alpha, \beta, t$ . Las funciones  $h, U_\alpha, U_\beta$  están determinadas por el movimiento de la superficie móvil, y se supondrán conocidas a la hora de analizar el movimiento del fluido. por último supondremos que la velocidad

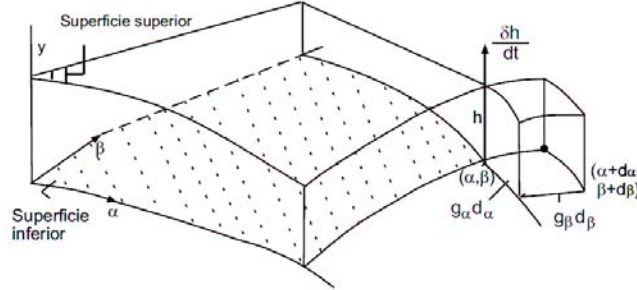


Figura 4.4: Geometría de la capa tridimensional

característica  $U_c$  en el sentido longitudinal de la película y el espesor  $h_c$  característico de la capa satisfacen las relaciones.

$$\frac{\rho_c U_c h_c^2}{\mu L} \ll 1; \frac{h_c^2}{\nu t_c} \ll 1; \frac{h_c}{L} \ll 1. \quad (4.59)$$

Siendo  $L$  la longitud característica de la película y  $\rho_c$  el valor característico de la densidad del fluido. En estas condiciones puede demostrarse que las ecuaciones de cantidad de movimiento toman la forma

$$-\frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \mu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} = 0, \quad (4.60)$$

$$-\frac{1}{g_\beta} \frac{\partial P}{\partial \beta} + \mu \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2} = 0, \quad (4.61)$$

que expresan el equilibrio entre las fuerzas de presión y de viscosidad por unidad de volumen. En estas ecuaciones  $P$  es la presión motriz ( $P = p + \rho U$ ) en el caso del líquido y la presión estática ( $P = p$ ) en el caso de los gases. Además,  $g_\alpha d_\alpha$  y  $g_\beta d_\beta$  son los elementos diferenciales de longitud en las direcciones  $\alpha$  y  $\beta$ . los parámetros  $g_\alpha$  y  $g_\beta$  son funciones conocidas de  $\alpha$ ,  $\beta$  y el tiempo  $t$ .

La ecuación de cantidad de movimiento según el eje  $y$  puede sustituirse por  $\partial P / \partial y = 0$ , de modo que  $P(\alpha, \beta, t)$  es una función a determinar.

Las ecuaciones anteriores con las condiciones de contorno,  $u_\alpha = u_\beta = 0$  en  $y = 0$ ;  $u_\alpha = U_\alpha$  y  $u_\beta = U_\beta$  en  $y = h$ , proporcionan

$$u_\alpha = \frac{1}{2\mu g_\alpha} \frac{\partial P}{\partial \alpha} y(y-h) + U_\alpha \frac{y}{h}, \quad (4.62)$$

$$u_\beta = \frac{1}{2\mu g_\beta} \frac{\partial P}{\partial \beta} y(y-h) + U_\beta \frac{y}{h}. \quad (4.63)$$

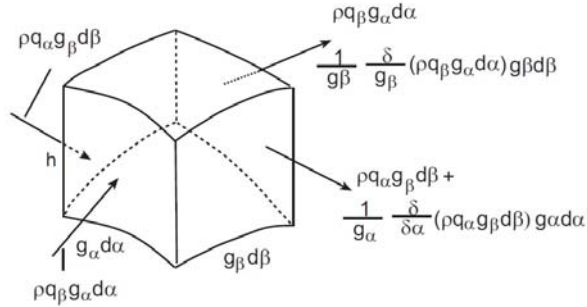


Figura 4.5: Volumen de control para construir la ecuación de Reynolds

Los flujos volumétricos  $q_\alpha$  y  $q_\beta$  a través de secciones transversales a la película en las direcciones  $\alpha$  y  $\beta$  por unidad de longitud en las direcciones  $\beta$  y  $\alpha$ , respectivamente, son

$$q_\alpha = \int_0^h u_\alpha dy = -\frac{h^3}{12\mu g_\alpha} \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \frac{U_\alpha h}{2}, \quad (4.64)$$

$$q_\beta = \int_0^h u_\beta dy = -\frac{h^3}{12\mu g_\beta} \frac{\partial P}{\partial \beta} + \frac{U_\beta h}{2}, \quad (4.65)$$

La ecuación de conservación de la masa aplicada en forma integral al volumen de control representado en la figura anterior, que es el volumen de la película que se erige sobre un elemento rectangular diferencial de área  $g_\alpha g_\beta d_\alpha d_\beta$  de la superficie libre. Este volumen contiene la masa,  $\rho h g_\alpha g_\beta d_\alpha d_\beta$ , cuya variación en la unidad de tiempo, más el flujo de masa de fluido que sale, menos el que entra a través de las caras laterales del volumen de control, debe ser nula; es decir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_v \rho g_\alpha g_\beta d_\alpha d_\beta dy - \int_{A(\alpha)} \rho u_\alpha g_\beta d_\beta dy + \int_{A(\alpha+d_\alpha)} \rho u_\alpha g_\beta d_\beta dy - \\ - \int_{A(\alpha)} \rho u_\beta g_\alpha d_\alpha dy + \int_{A(\beta+d_\beta)} \rho u_\beta g_\alpha d_\alpha dy = 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

el primer termino de esta ecuacion es

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho g_\alpha g_\beta d_\alpha d_\beta dy = d_\alpha d_\beta \frac{\partial}{\partial t} \left( g_\alpha g_\beta \int_0^h \rho dy \right) = d_\alpha d_\beta \frac{\partial (g_\alpha g_\beta \rho h)}{\partial t}, \quad (4.67)$$

mientras que usando las definiciones anteriores de  $q_\alpha$  y  $q_\beta$ , las integrales extendidas a la superficie toman la forma

$$\int_{A(\alpha)} \rho u_\alpha g_\beta d_\beta dy = g_\beta d_\beta \int_{A(\alpha)} \rho u_\alpha dy = g_\beta \rho d_\beta \int_{A(\alpha)} u_\alpha dy = \rho q_\alpha g_\beta d_\beta, \quad (4.68)$$



$$\int_{A(\beta)} \rho u_\beta g_\alpha d\alpha dy = g_\alpha d\alpha \int_{A(\beta)} \rho u_\beta dy = g_\alpha \rho d\alpha \int_{A(\beta)} u_\beta dy = \rho q_\beta g_\alpha d\alpha, \quad (4.69)$$

donde se ha supuesto que la densidad  $\rho$  no varía a través de la película.

En resumen la ecuación de continuidad toma la forma

$$d\alpha d\beta \frac{\partial(g_\alpha g_\beta \rho h)}{\partial t} + d\beta[(\rho q_\alpha g_\beta)_{\alpha+d\alpha} - (\rho q_\alpha + g_\beta)_\alpha] + d\alpha[(\rho q_\beta g_\alpha)_{\beta+d\beta} - (\rho q_\beta + g_\alpha)_\beta] = 0. \quad (4.70)$$

Es decir,

$$\frac{\partial(g_\alpha g_\beta \rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho q_\alpha g_\beta)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(\rho q_\beta g_\alpha)}{\partial \beta} = 0. \quad (4.71)$$

Para un fluido incompresible se reduce a

$$\frac{\partial(g_\alpha g_\beta h)}{\partial t} + \frac{\partial(q_\alpha g_\beta)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(q_\beta g_\alpha)}{\partial \beta} = 0. \quad (4.72)$$

Los gastos volumétricos por unidad de longitud  $q_\alpha$  y  $q_\beta$  están dados en las Ecs. (4.63) y (4.64), respectivamente. Sustituyendo los valores de  $q_\alpha$  y  $q_\beta$  en la Ec. (4.67) se tiene

$$\frac{\partial(g_\alpha g_\beta \rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( -\frac{g_\beta h^3}{12\mu g_\alpha} \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \frac{g_\beta U_\alpha h}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( -\frac{g_\alpha h^3}{12\mu g_\beta} \frac{\partial P}{\partial \beta} + \frac{g_\beta U_\alpha h}{2} \right), \quad (4.73)$$

Que es la ecuación de Reynolds de la lubricación para fluidos incompresibles. Esta ecuación es lineal en derivadas parciales con variables independientes  $\alpha$  y  $\beta$  y variable dependiente  $P$ . El tiempo  $t$  es un parámetro y no necesita condiciones iniciales. Como condiciones de contorno se pueden dar, el valor de la presión a lo largo del contorno de la película

$$P = P_c(\alpha, \beta) \quad \text{en} \quad C(\alpha, \beta) = 0. \quad (4.74)$$

Donde  $C(\alpha, \beta) = 0$  es la ecuación de contorno de la película. En la parte del contorno puede, alternativamente, especificarse el valor del flujo volumétrico  $q_n$ , por unidad de longitud de la película, en la dirección  $\tilde{\mathbf{n}}$  tangente a la película y normal al contorno. Las componentes de  $\tilde{\mathbf{n}}$  en las direcciones de  $\alpha$  y  $\beta$  son, respectivamente.

$$n_\alpha = \frac{\frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial C}{\partial \alpha}}{\sqrt{\left(\frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial C}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{g_\beta} \frac{\partial C}{\partial \beta}\right)^2}}, \quad (4.75)$$

y

$$n_\beta = \frac{\frac{1}{g_\beta} \frac{\partial C}{\partial \beta}}{\sqrt{\left(\frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial C}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{g_\beta} \frac{\partial C}{\partial \beta}\right)^2}},$$

el flujo  $q_n$  es

$$q_n = q_\alpha n_\alpha + q_\beta n_\beta, \quad (4.76)$$

donde  $q_\alpha$  y  $q_\beta$  están dados en las Ecs. (4.63) y (4.64), respectivamente. El gasto volumétrico,  $q_n$  será nulo si el contorno  $C(\alpha, \beta) = 0$  está tapado, por lo tanto

$$g_\beta \frac{\partial C}{\partial \alpha} q_\alpha + g_\alpha \frac{\partial C}{\partial \beta} q_\beta = 0. \quad (4.77)$$

## Capítulo 5

# Penetración capilar en celdas de Hele-Shaw

En este Capítulo se discuten tres configuraciones importantes de la celda de Hele-Shaw en las cuales se analiza la penetración capilar mediante el uso de la teoría de la lubricación de Reynolds. Este tipo de enfoque no es común en estudios de la penetración capilar y es por ello que el estudio de los flujos de película en las celdas analizadas se realiza con detalle. Se analizan tres casos de interés: a) la celda de Hele-Shaw vertical con placas paralelas y separación constante, b) la celda de Hele-Shaw radial y finalmente, la celda de Hele-Shaw no uniforme (las placas tienen un ángulo de inclinación pequeño respecto a la vertical). Estas configuraciones ayudarán a entender los resultados que se encontrarán más adelante en el estudio del ascenso capilar en espacios anulares cónicos.

### 5.1. Penetración capilar en celdas verticales planas (Celda de Hele-Shaw)

Un caso simple de analizar bajo el esquema de la teoría de la lubricación es el de la celda de Hele-Shaw con placas verticales paralelas. En tal caso, se asume que al poner en contacto la celda con un líquido viscoso, este comienza a ascender espontáneamente debido a la acción de la presión capilar. Los experimentos muestran [11], que en primera aproximación, el frente de flujo es plano, y así el flujo se puede describir como unidimensional, con velocidad  $u$ , usando la teoría de la lubricación.

De acuerdo a la Fig. (5.1), la celda tiene un largo  $L$  y separación  $D$  muy pequeña en comparación con  $H$  (altura de la celda), el fluido entra en  $y = 0$  al tiempo  $t = 0$ . En este caso las ecuaciones de la lubricación son

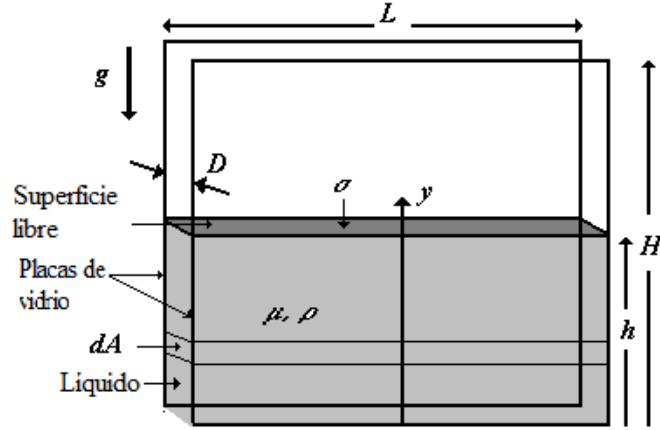


Figura 5.1: Esquema de la celda Hele-Shaw con placas planas y separación uniforme.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (5.1)$$

para masa, y

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{12\mu}{D^2}u - \rho g, \quad (5.2)$$

para el momento (Ec. de Reynolds de la lubricación). En la ecuación anterior  $p$  es la presión y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Las condiciones de frontera para resolver el problema lubricado toman la forma

$$p(0) = 0, \quad (5.3)$$

$$p(h) = \frac{2\sigma \cos \theta_c}{D}. \quad (5.4)$$

La caída de presión desde el fondo hasta la superficie libre (en  $y = h$ ) de este flujo se obtiene de la Ec. (5.2), en la forma

$$\Delta p = -\frac{12}{D^2}u\mu h - \rho gh. \quad (5.5)$$

Además, el salto de la presión en la superficie libre está dado por

$$\Delta p = -\frac{2\sigma \cos \theta}{D}, \quad (5.6)$$

donde se ha usado que la presión capilar es  $p_c = 2\sigma \cos \theta_c / D$  donde  $\theta_c$  es el ángulo de contacto. Finalmente, la ecuación general para determinar la posición de la superficie libre es

$$2\sigma \cos \theta_c - \frac{12}{D} \mu \frac{dh}{dt} h - \rho D g h = 0. \quad (5.7)$$

con la condición inicial  $t = 0, y = h = 0$ . De la Ec. (5.7), se encuentra que la altura de equilibrio es

$$h_{eq} = \frac{2\sigma \cos \theta_c}{\rho D g}, \quad (5.8)$$

dicha altura se da cuando las presiones capilar e hidrostática se igualan [12] o, equivalentemente, cuando  $dh/dt = 0$ .

Es posible adimensionalizar la Ec. (5.7) usando las nuevas variables  $\xi$  y  $\tau$  de manera que  $\xi = h/h_{eq}$ ,  $\tau = t/t_c$ , con  $t_c = 12\mu h_{eq}^2 / (2D\sigma \cos \theta_c) = 24\mu\sigma \cos \theta_c / (\rho D g)^2$ . esto produce la ecuación adimensional de la forma

$$1 - \frac{d\xi}{d\tau} \xi - \xi = 0, \quad (5.9)$$

cuya solución bajo la condición inicial  $\xi = 0$  si  $\tau = 0$ , es

$$-\xi - \ln(1 - \xi) = \tau. \quad (5.10)$$

Nótese que a alturas pequeñas,  $\xi \ll 1$ ,  $\ln(1 - \xi) = -\xi - \frac{1}{2}\xi^2 + O(\xi^3)$  y consecuentemente la ecuación adimensional para altura es

$$\xi = \sqrt{2\tau}, \quad (5.11)$$

la cual es conocida como la ley de Washburn [13, 14, 15, 16]. En la Fig. (5.2) se muestra una gráfica adimensional de la Ec. (5.11) para condiciones de buen mojado o mojado perfecto, *i.e.*,  $\theta_c = 0$ . De acuerdo a la adimensionalización, la altura de equilibrio se alcanza en  $\xi = 1$ .

## 5.2. Penetración capilar en celdas de Hele-Shaw radiales

Una sistema de placas paralelas radiales con pequeña separación entre ellas,  $2H$ , y radio inicial  $R_0$ , se muestra en la Fig. (5.3), el máximo radio es  $r = R_1$ . Esta configuración es conocida como la celda de Hele-Shaw radial y es muy importante para entender el flujo de fluidos capilares en yacimientos de petróleo [17] y en sistemas de aguas subterráneas [18], entre otras aplicaciones. La descripción lubricada se puede realizar en coordenadas cilíndricas  $(r, z, \phi)$  donde el origen de este sistema esta localizado en el centro de las placas circulares.

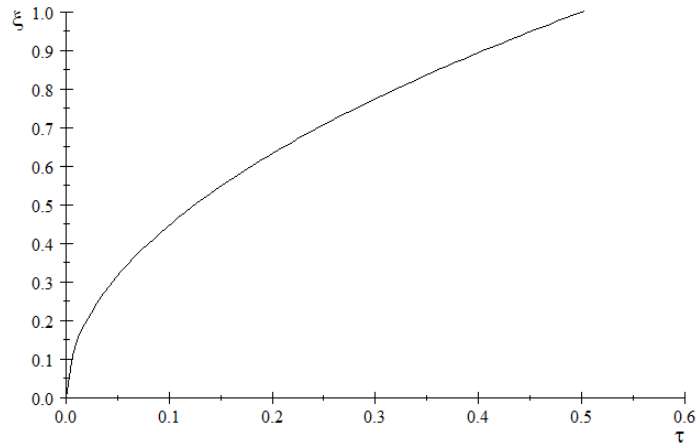


Figura 5.2: Gráfica de la altura adimensional del frente del líquido durante el ascenso capilar,  $\xi$  vs  $\tau$ , en una celda de placas planas, Ec. (5.11).

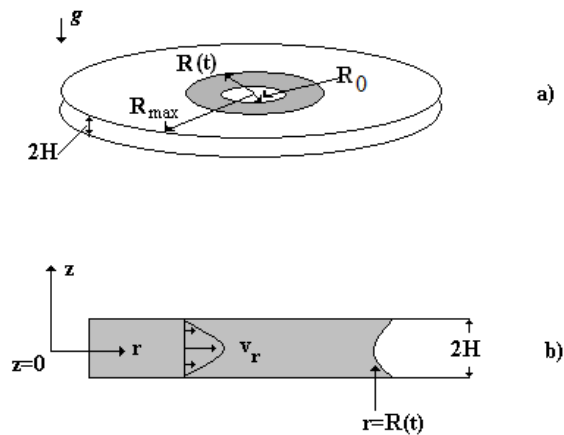


Figura 5.3: Bosquejo de la penetración capilar en una celda de Hele Shaw radial horizontal. El flujo inicia a partir de un radio inicial  $R_0$ . El frente del flujo está en  $r = R(t)$  y la separación de las placas es  $2H$ .

Se asume que durante la imbibición espontánea el líquido se suministra en forma continua el cual penetra en forma radial desde una zona de radio  $R_0$ . En este caso las ecuaciones de la lubricación para la presión  $p$  y la velocidad radial  $v_r$  están dadas por

$$v_r = -\frac{2}{3} \frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (5.12)$$

que expresa la conservación de cantidad de movimiento, y

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0 \quad (5.13)$$

que es la ecuación de conservación de masa. Las Ecs. (5.12) y (5.13) se deben de resolver bajo la condición: en  $t = 0$ ,  $r = R_0$  La Ec. (5.13) tiene una solución de la forma

$$rv_r = \frac{Q}{2\pi} \quad (5.14)$$

donde  $Q$  es el flujo volumétrico. En términos de la posición radial frontal  $R(t)$  se tiene que  $Q = 4\pi HR(t)dR(t)/dt$ . Utilizando la relación anterior en la Ec. (5.14) y la Ec. (5.12), se encuentra que la caída de presión en la zona  $\Delta R = R - R_0$ , es

$$\Delta p = -\frac{3\mu}{H^2} R \frac{dR}{dt} \int_{R_0}^R \frac{1}{r} dr = -\frac{3\mu}{H^2} R \frac{dR}{dt} \ln(R - R_0). \quad (5.15)$$

Por otro lado, el salto en presión en el frente de fluido localizado en  $r = R(t)$  está dado por  $\Delta p = -\sigma(\cos \theta_c/H - 1/R)$ . Igualando ambos cambios en presión se encuentra que la ecuación para el frente de líquido, es

$$\frac{3\mu}{H^2} R \frac{dR}{dt} \ln(R - R_0) = \sigma \left( \frac{\cos \theta_c}{H} - \frac{1}{R} \right). \quad (5.16)$$

El término  $1/R$  en la Ec. (5.16) se puede despreciar virtud de que  $R \gg H$ . De este modo la ecuación del frente puede escribirse como

$$\frac{3\mu R}{H^2} \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) \frac{dR}{dt} = \frac{\sigma \cos \theta_c}{H}. \quad (5.17)$$

En este caso la Ec. (5.17) no da distancias de paro finitas, ya que sí  $dR/dt = 0$ ,  $H \rightarrow \infty$ . La solución adimensional de esta última ecuación es

$$\xi^2 (\ln \xi^2 - 1) + 1 = 4 \cos \theta_c \tau \quad (5.18)$$

donde se usaron las variables adimensionales

$$\xi = \frac{R}{R_0}, \tau = \frac{t}{t_c}$$

con  $t_c = 3\mu/H\sigma$  y condición inicial  $\xi = 1$  en  $\tau = 0$ . El caso límite de pequeñas

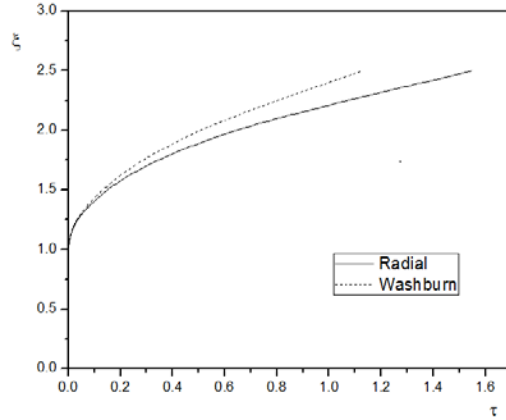


Figura 5.4: Gráfica adimensional del frente de líquido en la celda radial en función del tiempo. la línea continua corresponde al caso radial dado por la Ec. (??) mientras que la línea punteada corresponde a la ley de Washburn, Ec. (??).

distancia de penetración se puede analizar considerando que  $\xi = 1 + \varepsilon$ , ello lleva a que  $\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - (1/2)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ . Usando lo anterior se llega a que

$$\xi = 1 + \sqrt{2 \cos \theta} \tau, \quad (5.19)$$

la cual ahora es la ley de Washburn para celdas radiales.

En la Fig. (5.4) se muestran las gráficas de las Ecs. (5.18) y (5.19) bajo condiciones de mojado perfecto ( $\theta_c = 0$ ). Se aprecia que la solución radial es más lenta que la de Washburn, ello se debe a que la aproximación de Washburn considera que el área del frente de líquido es constante durante el avance del frente del líquido, lo que claramente no ocurre. Las correspondientes velocidades del frente radial se muestran gráficamente en la Fig. (5.5). Se aprecia que ambas velocidades a tiempo largos son muy similares y constantes (finitas).

### 5.3. Celda de Hele-Shaw no uniforme

Un caso simple donde se aprecia el efecto de la reducción de la sección transversal de la zona de flujo bajo el campo gravitatorio, corresponde a una celda vertical de Hele-Shaw con separación no uniforme, como la que se muestra en la Fig. (5.6). Las placas de la celda forman un ángulo pequeño  $\alpha$ , y pueden tocarse o no en el punto  $z = 0$ . En este problema, como en el problema de la cuña horizontal de Taylor [21, 22, 23], ocurre también una fuerte competencia entre las fuerzas gravitacionales, viscosas y superficiales.



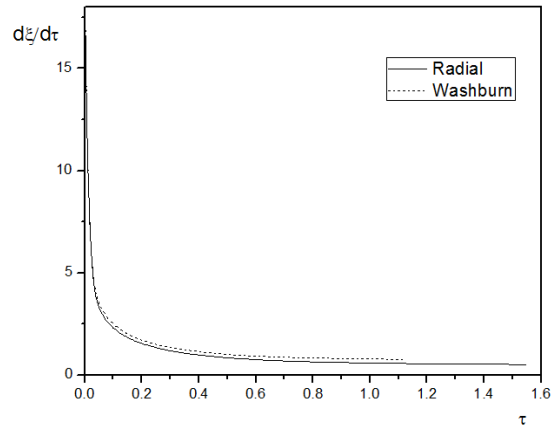


Figura 5.5: Gráfica de la velocidad del frente del líquido en función del tiempo. La línea continua corresponde a la velocidad radial, mientras que la línea punteada corresponde a la velocidad dada por la ley radial de Washburn.

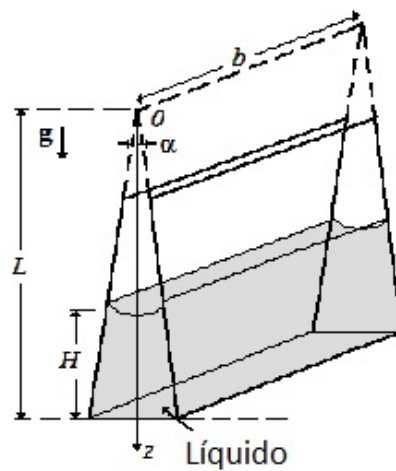


Figura 5.6: Celda no uniforme de Hele-Shaw. Aquí las placas no son paralelas, sino que forma entre si un ángulo  $\alpha$  pequeño. En este caso la sección transversal disminuye con el avance del flujo de líquido. La altura instantánea del frente de líquido es  $H(t)$ , su profundidad es  $b$  y la longitud total de la celda es  $L$ .

En este caso, la teoría de la lubricación Hele-Shaw puede formularse en un sistema generalizado de coordenadas, como el discutido en la Sección 4.3. Aquí se considera que el flujo es unidimensional y que la coordenada  $z$  apunta hacia abajo, en dirección opuesta al vector  $\mathbf{g}$ . Entonces, la ecuación de Reynolds de conservación de la masa es

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0, \quad (5.20)$$

donde  $P$  es la presión y  $h = \alpha z$  es la separación no uniforme entre las placas. De igual manera, la ecuación de momento es en este caso

$$q_z = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (5.21)$$

donde  $q_z$  es el flujo, por unidad de longitud, en la dirección  $z$ . Las ecuaciones (5.20) y (5.21) se deben resolver utilizando las condiciones de frontera

$$\text{en } z = L, \quad P = 0, \quad (5.22)$$

lo que indica que la presión en la zona de entrada del líquido es nula, y

$$\text{en } z = L - H, \quad P = -\frac{2\sigma \cos(\theta_c + \alpha)}{h} + \rho g H. \quad (5.23)$$

que expresa que en el frente del líquido medido desde la arista de la cuña ( $z = 0$ ) actúa la presión capilar y la hidrostática. Más aún, en (5.23)  $H$  es la posición del frente del líquido y en la presión el primer término es la presión capilar, que es válida cuando  $(L - H) \gg h$ , recuerdese que  $\theta_c$  es el ángulo de contacto. En  $z = (L - H)$  la condición cinemática establece que ningún elemento del líquido cruza a la superficie libre, de la cual el campo de la ecuación toma la forma.

$$h \frac{dH}{dt} = -q_z, \quad z = L - H. \quad (5.24)$$

la ecuación (5.20) inmediatamente da

$$\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} = A(t), \quad (5.25)$$

donde  $A(t)$  es una función que depende únicamente de  $t$ . La ecuación (5.25) puede ser integrada desde el fondo hasta la posición del frente del líquido, con lo que obtiene

$$\int_0^{-\frac{2\sigma \cos(\theta_c + \alpha)}{\alpha(L-H)} + \rho g H} dP = \frac{12\mu A}{\alpha^3} \int_L^{(L-H)} \frac{dz}{z^3}, \quad (5.26)$$

La integración permite conocer el valor de  $A$

$$A = -\frac{\sigma \alpha^2 \cos(\theta_c + \alpha)}{3\mu} \frac{L^2 (L - H)}{H(H - 2L)} + \frac{\rho g \alpha^3}{6\mu} \frac{L^2 (L - H)^2}{(H - 2L)}. \quad (5.27)$$

Usando las Ecs. (5.21), (5.25) y (5.27) en la condición cinemática (5.24), se encuentra que la ecuación diferencial del frente de líquido es

$$\frac{dH}{dt} = \frac{L}{(H-2L)} \left[ -\frac{\sigma\alpha \cos(\theta_c + \alpha)}{3\mu} \frac{L}{H} + \frac{\rho g \alpha^2}{6\mu} L(L-H) \right]. \quad (5.28)$$

Las alturas de equilibrio, como ya se ha comentado se alcanzan si  $dH/dt = 0$ . En tal caso, de la Ec. (5.28) se tiene que la altura de equilibrio para el sistema de las placas inclinadas es

$$H_{eq} = \frac{1}{2}L \pm \frac{1}{2}\sqrt{L^2 + 4l^2}. \quad (5.29)$$

donde  $l^2 = 2\sigma \cos(\theta_c + \alpha) / \rho g \alpha$  es una longitud capilar efectiva. Observese que la Ec. (5.28) implica que la altura de equilibrio está fuera del sistema de placas, ya que la cantidad  $\sqrt{L^2 + 4l^2} > L$  si  $l > 0$ . Esto asegura que el flujo tenderá salirse si las condiciones en el vertice lo permiten.

La forma adimensional de las ecuaciones previas se obtiene introduciendo las variables adimensionales  $\xi = H/L$  y  $\tau = t/t_c$  con el tiempo característico  $t_c = 3\mu L/\sigma$ . Así, la Ec. (5.28) se transforma en la ecuación adimensional

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{(\xi-2)} \left[ Bo \frac{\alpha^2}{2} (1-\xi) - \frac{\alpha \cos(\theta_c + \alpha)}{\xi} \right], \quad (5.30)$$

donde el número de Bond es  $Bo = \frac{\rho g L^2}{\sigma}$ . Si  $d\xi/d\tau = 0$ , la altura de equilibrio adimensional es

$$\xi_{eq} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4 \cos(\theta_c + \alpha)}{\alpha Bo}}. \quad (5.31)$$

la cual lleva a que  $\xi_{eq} > 1$  si  $4 \cos(\theta_c + \alpha) / \alpha Bo > 0$ .

Una solución asintótica de (5.30) se obtiene fácilmente cuando  $Bo = 0$ , en tal caso se tiene que

$$(2-\xi)\xi \frac{d\xi}{d\tau} = \alpha \cos(\theta_c + \alpha), \quad (5.32)$$

cuya solución es

$$3\xi^2 - \xi^3 = 3\alpha \cos(\theta_c + \alpha) \tau. \quad (5.33)$$

En el caso de alturas muy pequeñas,  $\xi \ll 1$ , se encuentra que

$$\xi^2 = \alpha \cos(\theta_c + \alpha) \tau, \quad (5.34)$$

lo cual corresponde a la ley de Washburn.

Si  $Bo \neq 0$ , la Ec.(5.30) se debe de resolver numéricamente. Asumiendo que la celda de Hele-Shaw no uniforme se llena de agua ( $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma = 0,072 \text{ N/m}$ ,  $\mu = 1,002 \text{ cP}$ ) y una celda de vidrio con dimensiones  $L = 0,1 \text{ m}$  de altura,  $\alpha = 30^\circ$  de ángulo de

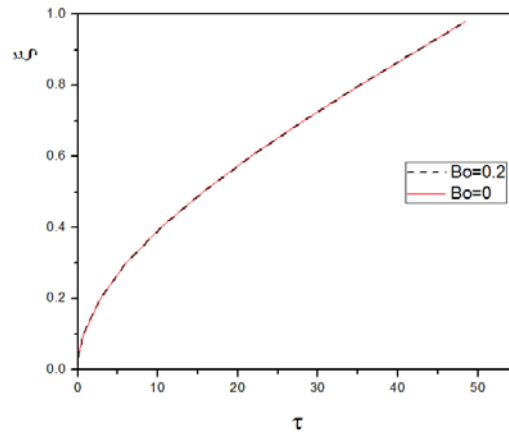


Figura 5.7: Gráficas adimensionales de la altura de del frente como función del tiempo. Las curvas fueron construidas con la Ec. (5.30) ( $Bo = 0,2$ ) y con la Ec. (5.33). Nótese que el efecto de la gravedad no es importante en esta celda.

apertura, y una separación entre placas en el fondo igual a  $h = 0,1$  mm y un mojado perfecto, i.e.,  $\theta_c = 0^\circ$ , se puede realizar la integración numéricamente. La Fig. (5.7) muestra la evolución de la altura adimensional del frente,  $\xi$ , como función del tiempo,  $\tau$ . En esa misma figura se graficó el caso cuando la gravedad está ausente,  $Bo = 0$ . Ya que las curvas tienen el mismo comportamiento se concluye que en este tipo de celda la gravedad no tiene un efecto sustancial.

En la Fig. (5.8) se muestra la gráfica de la velocidad del frente de penetración capilar como función del tiempo, se aprecia que la velocidad alcanza un valor constante, lo cual es deseable que ocurra en un bolígrafo real ya que este cede la tinta a gasto constante.

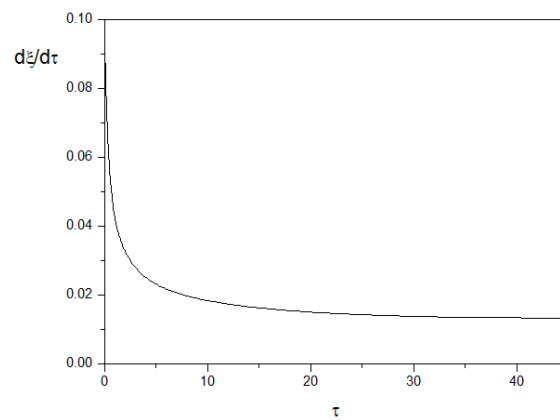


Figura 5.8: Gráficas adimensionales de la velocidad del frente del líquido como función del tiempo construida a partir de la solución de la Ec. (5.30) ( $Bo = 0,2$ ).

## Capítulo 6

# Penetración capilar en la celda de Hele-Shaw anular cónica

### 6.1. Espacio anular de ancho uniforme

No es difícil encontrar en la *Web* que la estructura de una punta de bolígrafo tiene como uno de sus elementos más importantes una región anular cónica a través de la cual pasa la tinta [19]. La configuración anular cónica relacionada con otro tipo de flujo fue estudiada hace relativamente poco tiempo [24]. Considere, por ahora, que la estructura cónica que se analiza es la que se muestra esquemáticamente en la Fig. (6.1), es decir, dos conos huecos con igual ángulo de cono  $\alpha$  y concéntricos entre sí y forman un espacio anular uniforme de tamaño  $h$ .

El ascenso capilar ocurre cuando el líquido viscoso de viscosidad dinámica  $\mu$  y densidad  $\rho$  entra en contacto con el espacio capilar formado por los conos hechos de un material con buen mojado, es decir, el ángulo de contacto  $\theta_c$  entre el líquido y el material del que está hecho el cono es tal que  $\theta_c < \pi/2$ . La presión capilar  $p_c$ , fuerza al líquido a llenar el espacio anular, incluso si está presente el campo gravitatorio. En la Fig. 1 se muestra esquemáticamente el flujo desarrollado en el espacio anular (región gris). En el problema se asume que  $h \ll (L, l_c)$  donde  $L$  es la altura del cono y  $l_c$  es la longitud capilaridad  $l_c = \sqrt{\sigma/\rho g}$ , aquí  $\sigma$  es la tensión superficial del líquido y  $g$  es la aceleración de la gravedad. En general  $l_c$  es del orden de unos cuantos mm.

El flujo desarrollado en el espacio anular es un flujo de película y puede ser descrito usando las ecuaciones de lubricación en coordenadas polares  $(r, \theta)$ , donde  $r$  mide la distancia a lo largo de la superficie del cono desde el vértice ubicado en  $r = 0$ , y  $\theta$  denota el ángulo azimutal medido sobre el cono. Claramente, en este caso el flujo eje-simétrico es, en primera aproximación, puramente radial. El problema consiste en describir la posición del frente el cual a un tiempo  $t$  está a una altura  $H(t)$  respecto a

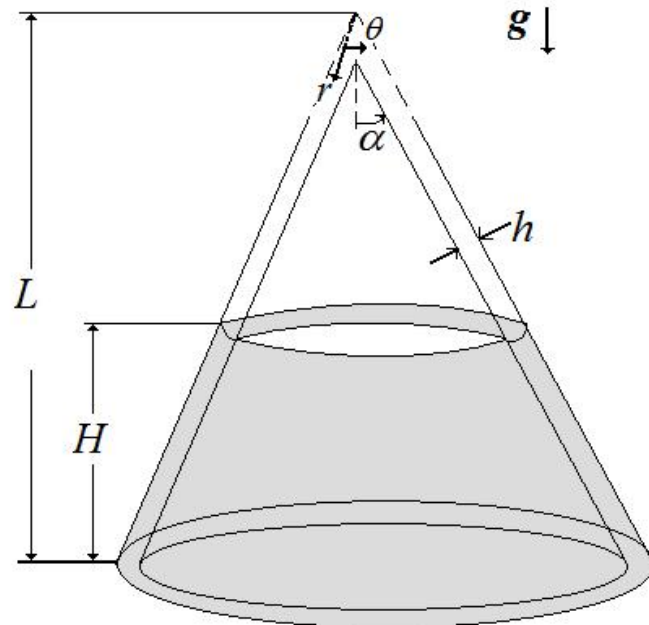


Figura 6.1: Esquema del espacio anular lleno de líquido por la acción capilar. El espacio anular tiene tamaño  $h$  y los conos tienen un ángulo de apertura  $\alpha$ . El sistema coordinado usado es en coordenadas polares  $(r, \theta)$  y es definido esquemáticamente en el dibujo.

la vertical.

En la teoría de la lubricación, la ecuación de conservación de la masa puede ser dada en términos de la ecuación de Reynolds en coordenadas polares, la cual es una ecuación para la presión cuya forma es [9]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h^3}{12\mu} r \sin \alpha \frac{\partial P}{\partial r} \right) = 0. \quad (6.1)$$

El correspondiente flujo volumétrico, por unidad de longitud, a lo largo de la dirección  $r$ ,  $q_r$  es ahora

$$q_r = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (6.2)$$

Las ecuaciones (6.1) y (6.2) deben ser resueltas bajo las condiciones de frontera

$$\text{en } r = \frac{L}{\cos \alpha} : P = 0, \quad (6.3)$$

y

$$\text{en } r = \frac{L-H}{\cos \alpha} : P = \frac{2\sigma \cos \theta_c}{h} - \rho g H. \quad (6.4)$$

En la Ec. (6.4)  $H$  es la posición vertical del frente de líquido y en la ecuación de la presión el primer término es la presión capilar válida cuando  $(L-H) \gg h$ , finalmente  $\theta_c$  es el ángulo de contacto.

Cuando el líquido avanza éste no cruza el frente localizado en  $r = (L-H)/\cos \alpha$ , ésta es la condición cinemática [16], la cual ahora toma la forma

$$h \frac{dH}{dt} = -q_r \Big|_{r=\frac{L-H}{\cos \alpha}}. \quad (6.5)$$

La Ec. (6.1) da inmediatamente que

$$\frac{h^3}{12\mu} r \sin \alpha \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{Q(t)}{2\pi}, \quad (6.6)$$

donde  $Q(t)$  es flujo volumétrico. La Ec. (6.6) puede integrarse a lo largo de la columna de líquido en el espacio anular, esta integración da

$$\int_0^{\frac{2\sigma \cos \theta_c}{h} - \rho g H} dP = \frac{12\mu}{h^3 \sin \alpha} \frac{Q}{2\pi} \int_{\frac{L}{\cos \alpha}}^{\frac{L-H}{\cos \alpha}} \frac{dr}{r}, \quad (6.7)$$

ésto lleva a que conocer a la cantidad  $Q/2\pi$ , o sea

$$\frac{Q}{2\pi} = \frac{h^3 \sin \alpha}{12\mu \ln \left( \frac{L-H}{L} \right)} \left[ \frac{2\sigma \cos \theta_c}{h} - \rho g H \right]. \quad (6.8)$$



Usando la Ec. (6.2) y la ecuación anterior se tiene que en el frente de líquido se satisface que

$$-q_r|_{r=\frac{L-H}{\cos \alpha}} = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial r}|_{r=\frac{L-H}{\cos \alpha}}, \quad (6.9)$$

o

$$-q_r|_{r=\frac{L-H}{\cos \alpha}} = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial r}|_{r=\frac{L-H}{\cos \alpha}} = \frac{h^3}{12\mu \ln\left(\frac{L-H}{L}\right)} \frac{\cos \alpha}{(L-H)} \left[ \rho g H - \frac{2\sigma \cos \theta_c}{h} \right], \quad (6.10)$$

El uso de las Ecs. (6.10) en la condición cinemática (6.5) produce la ecuación

$$(L-H) \ln\left(\frac{L-H}{L}\right) \frac{dH}{dt} = \frac{h^2 \cos \alpha}{12\mu} \left[ \rho g H - \frac{2\sigma \cos \theta_c}{h} \right]. \quad (6.11)$$

$$\int \frac{(L-H) \ln\left(\frac{L-H}{L}\right)}{\left[ \rho g H - \frac{2\sigma \cos \theta_c}{h} \right]} dH = \int \frac{h^2 \cos \alpha}{12\mu} dt \quad (6.12)$$

la cual en su lado izquierdo sólo puede ser obtenida por integración numérica.

En la la Fig. (6.2) mostramos graficamente la posición del frente de líquido como función del tiempo para algunos casos de interés como agua y aceites de silicón de viscosidades 50 cP y 100 cP. De manera general se aprecia que el flujo capilar de agua es muy rápido y que los tres flujos tienen una pendiente casi constante. Esto significa que la velocidad de los flujos es casi constante. Para comprobar ésto en la Fig. (6.3) se muestran las velocidades de los tres flujos en función del tiempo y se aprecia que, en efecto, los tres flujos tienen una amplia zona de velocidad constante y que al acercarse a la punta de los conos la velocidad se incrementa ligeramente. Esas son también cualidades muy deseables en el funcionamiento de un bolígrafo.

## 6.2. Celdas con espacio anular no uniforme

En la sección anterior se analizó el problema del ascenso capilar en conos de espacio anular uniforme, *i.e.*,  $h=\text{cte.}$  o ángulos de cono diferentes. El análisis requirió de la teoría de la lubricación, pero dicha teoría también se puede aplicar a configuraciones más complejas, por ejemplo, en las que la separación sea no uniforme como se muestran en la Fig. (6.4). Este tipo de configuraciones son mucho más complejas de tratar y pueden tener mejores diseños de bolígrafos y una mejor comprensión de los sistemas fracturados como los medios porosos fracturados en donde fracturas de este tipo son frecuentes. Más trabajo en esta dirección se propone como una línea de investigación futura.

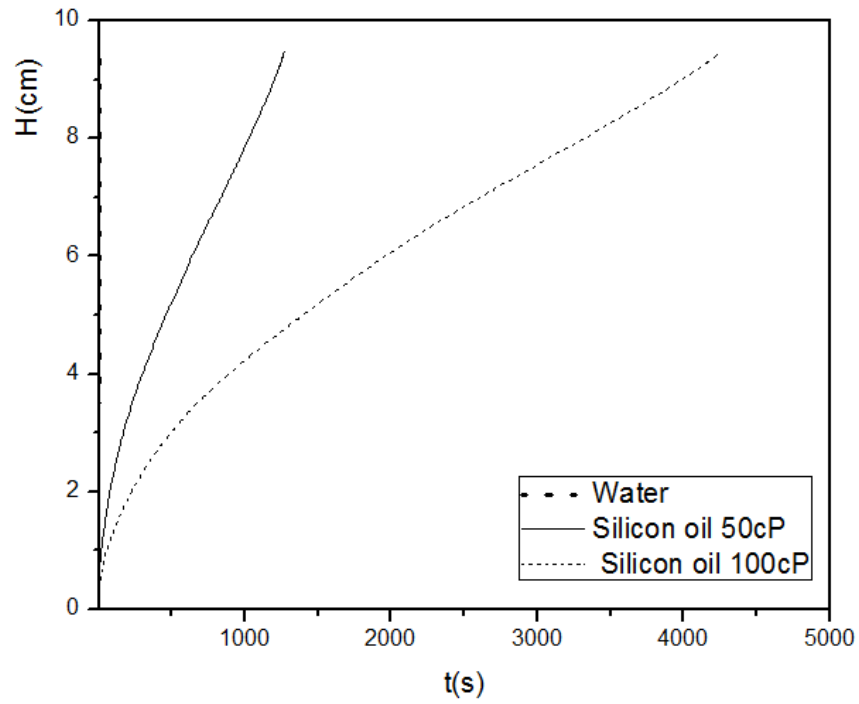


Figura 6.2: Evolución del frente del líquido como una función del tiempo para agua (línea continua), aceite de silicon con  $\mu = 50$  cP (- - - -) y aceite de silicon con  $\mu = 100$  cP ( $\cdot \cdot \cdot \cdot$ ).

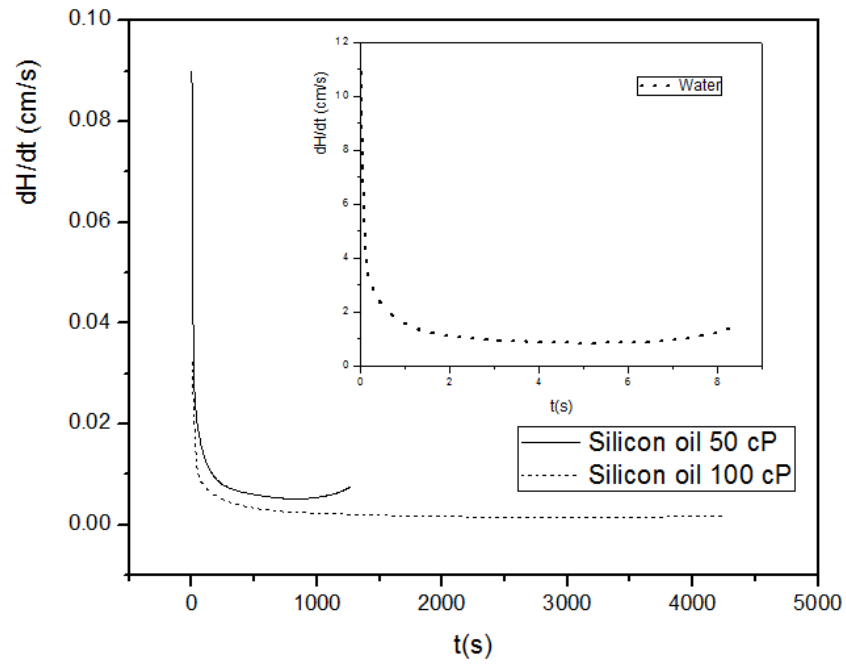


Figura 6.3: Velocidad del frente de penetración capilar como función del tiempo. En la gráfica interior se muestra la velocidad para el agua y la duración del fenómeno es muy corta, relativa

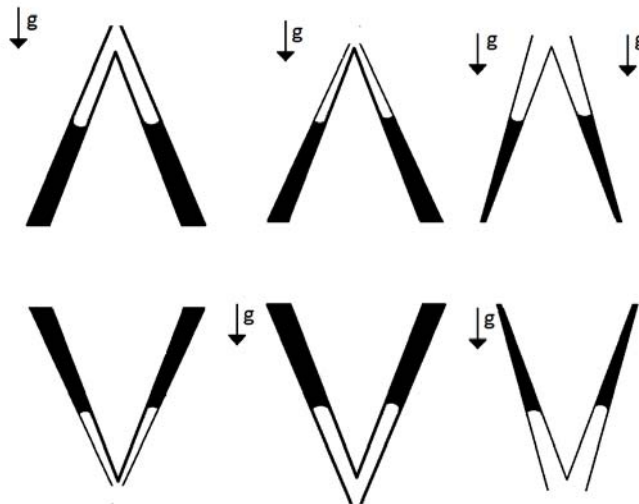


Figura 6.4: Diferentes configuraciones posibles de espacios anulares cónicos en donde la separación es no uniforme, es decir,  $h=h(r)$  es una función de la coordenada  $r$ .

## Capítulo 7

# Conclusiones Generales

Como resultado del uso de la teoría de la lubricación, en este trabajo se han analizado teóricamente configuraciones de ascenso capilar complejas como celdas radiales, celdas de Hele-Shaw con espaciamiento no uniforme, celdas con espacios anulares cónicos, etc. Tales configuraciones pueden ser muy útiles para comprender muchos fenómenos, pero en particular podemos entender muchos fenómenos capilares que se presentan en los yacimientos naturalmente fracturados de agua y aceite y en un bolígrafo, como un ejemplo cotidiano.

El análisis presentado con la teoría de la lubricación permite predecir, en particular, diversos aspectos del flujo anular en un bolígrafo y que observamos muy a menudo en bolígrafos de alta calidad: la tinta siempre fluye a gasto constante y el bolígrafo puede escribir aún cuando la punta este hacia arriba. Este tipo de resultados también pueden ser de enorme utilidad práctica en la explotación de crudo en yacimientos fracturados ya que muchas de las fracturas de los yacimientos son muy esbeltas y mojables al aceite o al agua. La realización de experimentos en las geometrías cónicas es complejo y requiere de cuidados experimentales que por ahora no es posible conseguir en el laboratorio. Sin embargo, actualmente se está haciendo un esfuerzo para alcanzar dicha meta.

# Bibliografía

- [1] A. Ponomarenko, D. Quéré, C. Clanet, A universal law for capillary rise in corners, *J. Fluid Mech.*, **666** (2011) 146.
- [2] A. Han, G. Mondin, N. G. Hegelbach, N. F. de Rooij, U. Staufer, Filling kinetics of liquids in nanochannels as narrow as 27 nm by capillary force, *Jour. Colloid Interface Sci.* **293** (2006) 151.
- [3] M. Pliego, G. J. Gutiérrez and A. Medina, Nano-channels filling flow of arbitrary cross-sections, *Rev. Mex. Fis.* **57** (2011) 1.
- [4] P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves*, Springer, Berlin, 2004.
- [5] G.J. Gutiérrez, A. Medina, F.J. Higuera, Equilibrium height of a liquid in a gap between corrugated walls under spontaneous capillary penetration, *Jour. Colloid Interface Sci.* **338** (2009) 519.
- [6] A.I. Hill, C. Pozrikidis, On the shape of a hydrostatic meniscus attached to a corrugated plate or wavy cylinder, **356**, Issue 2, 15 April 2011, 763.
- [7] O. Reynolds, On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil, *Philos. Trans. Roy. Soc. A* **177** (1886) 157.
- [8] A. Z. Szeri, *Fluid film lubrication*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [9] A. Liñan, M. Rodríguez and F.J. Higuera, *Mecánica de Fluidos (Primera Parte)*, (Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Madrid, 2003).
- [10] F. M. White: *Fluid Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1994).
- [11] M. Sanchez, F. Sanchez, C. Pérez-Rosales, A. Medina, C. Treviño, Imbibition in a Hele-Shaw cell under a temperature gradient, *Phys. Letters A* **324** (2004) 14.

- 
- [12] D. Myshkis et al, *Low Gravity Fluid Mechanics: Mathematical Theory of Capillary Phenomena* (Springer-Verlag, Berlin 1976).
- [13] R. Lucas, Ueber das Zeitgesetz des kapillaren Aufstiegs von Flüssigkeiten, *Kolloid-Zeitschrift*, **23** (1918) 15.
- [14] J. M. Bell and F. K. Cameron, The flow of liquids through capillary spaces, *J. Phys. Chem.* **10** (1906) 658.
- [15] E.W. Washburn, The dynamics of capillary flow, *Phys. Rev.* **17** (1921) 273.
- [16] S. Middleman, *Modeling Axisymmetric Flows: Dynamics of Films, Jets and Drops* (Academic Press, San Diego, 1995), pp. 216.
- [17] M. Sánchez, A. Medina, F. J. Higuera, J. L. Montañés, Spontaneous imbibition into Hele-Shaw cells under temperature differences, Proceedings of HT-FED04, 2004 ASME Heat Transfer/Fluids Engineering Summer Conference. Artículo HT-FED04-56663.
- [18] H. Schütt and H. Spetzler, Capillary crack imbibition: a theoretical and experimental study using a Hele-Shaw cell, *Pure Applied Geophysics* **158** (2001) 627.
- [19] Ver, por ejemplo: [http://en.wikipedia.org/wiki/Rollerball\\_pen](http://en.wikipedia.org/wiki/Rollerball_pen)
- [20] D. Langbein, *Capillary Surfaces* (Springer-Verlag, Berlin 2002).
- [21] B. Taylor, Concerning the ascent of water between two glass plates, *Philos. Trans. R. Soc. London*, **27** (1712) 538.
- [22] F. Hauksbee, An experiment touching the ascent of water between two glass plates in an hyperbolick figure, *Philos. Trans. R. Soc. London* **27** (1712) 539.
- [23] F. J. Higuera, A. Medina and A. Liñán, Capillary rise of a liquid between two vertical plates making a small angle, *Phys. Fluids* **20** (2008) 102102.
- [24] J. A. Miranda, Nonlinear effects due to gravity in a conical Hele-Shaw cell, *Phys. Rev. E* **65** (2002) 036310.
- [25] B. Aadnoy, R. Looyeh, *Petroleum rock mechanics: drilling operations and well design*, (Gulf Professional Publishing, Oxford, 2011).