



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
UNIDAD PROFESIONAL “ADOLFO LOPEZ MATEOS”
UNIDAD ZACATENCO**

**PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO FLUIDO INMERSO EN UN
SÓLIDO ELÁSTICO AGRIETADO, UTILIZANDO EL MÉTODO DE
DIFERENCIAS FINITAS”**

Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias en Estructuras

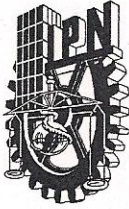
Presenta

JOSUÉ DAVID CRUZ MEDINA

DIRECTOR DE TESIS: DR. ESTEBAN FLORES MENDEZ



México D.F., diciembre del 2010



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México D. F., siendo las 18:00 horas del día 26 del mes de octubre del 2010 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.A. – U. Z. para examinar la tesis titulada:

“PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO FLUIDO INMERSO EN UN SÓLIDO ELÁSTICO AGRIETADO, UTILIZANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS”.

Presentada por el alumno:

Cruz	Medina	Josué David						
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)						
		Con registro:						
		B	0	6	1	3	3	0

aspirante de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN ESTRUCTURAS

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

Dr. Esteban Flores Méndez

Dr. Héctor Aureliano Sánchez Sánchez

Dr. Ernesto Pineda León

Dr. Norberto Domínguez Ramírez



Dr. Sergio Cruz León

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

M. en C. Pino Durán Escamilla

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 16 del mes de Noviembre del año 2010, el (la) que suscribe Josué David Cruz Medina alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Estructuras con número de registro B061330, adscrito a la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura , U.Z., manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Esteban Flores Méndez y cede los derechos del trabajo intitulado “Propagación de Ondas en un Medio Fluido Inmerso en un Sólido Elástico Agrietado, Utilizando el Método de Diferencias Finitas”, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección “cruz_chis@hotmail.com”. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Josué David Cruz Medina

Agradecimientos

A dios

Por permitirme llegar a este momento tan especial en mi vida. Por los triunfos y los momentos difíciles que me han enseñado a valorarte cada día más.

¡Gracias!

A mi familia

Para mis padres Rey David y Rosalva, por su comprensión y ayuda en momentos malos y difíciles. Me han enseñado a encarar las adversidades sin perder nunca la dignidad ni desfallecer en el intento. Me han dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi perseverancia y mi empeño, y todo ello con una gran dosis de amor y comprensión.

¡Gracias!

A mis hermanos Daniel y Fernando, porque siempre he contado con ellos para todo, gracias a la confianza que siempre nos hemos tenido; por su amor, por su apoyo y amistad.

¡Gracias!

A mis Familiares

Gracias a todos que directamente me impulsaron para llegar hasta aquí y haber hecho realidad un sueño personal.

¡Gracias!

A mis Maestros

De la Maestría en Ciencias en Estructuras, por brindarme sus experiencias y conocimientos para mi formación académica.

En especial, al Dr. Esteban Flores Méndez, por su infinita paciencia y apoyo en el desarrollo de mi trabajo de Tesis y llegar así a la culminación del mismo. A su manera, ha sido capaz de ganarse mi lealtad y admiración, así como sentirme en deuda con él por todo lo recibido durante el periodo de tiempo que ha durado esta Tesis.

A mis profesores sinodales:

- *Dr. Héctor A. Sánchez Sánchez.*
- *Dr. Norberto Domínguez Ramírez.*
- *Dr. Ernesto Pineda León*
- *Dr. Sergio Cruz León.*

Gracias por su tiempo, dedicación y sus consejos.

A mi Escuela

Mi agradecimiento sincero y profundo al Instituto Politécnico Nacional, principalmente a la S.E.P.I. – E.S.I.A. U.ZAC, por ofrecerme la oportunidad de formarme en un nivel de posgrado.

*Por todos y para todos
Muchas Gracias*

Josué David Cruz Medina

PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO FLUIDO, INMERSO EN UN SÓLIDO ELÁSTICO AGRIETADO, UTILIZANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

CONTENIDO GENERAL

	Pág.
Lista de figuras	
Lista de Símbolos	
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Resumen	2
1.2 Abstract	3
1.3 Sinopsis	4
1.4 Estado del arte	5
1.5 Objetivo	7
1.6 Metas	7
1.7 Justificación	7
1.8 Planteamiento del problema	8
1.9 Generalidades	9
CAPÍTULO 2. TEORÍA DE LA ELASTICIDAD Y LA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS ELÁSTICOS	10
2.1 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	11
2.2 TEORÍA DE LA ELASTICIDAD LINEAL	11
2.2.1 Esfuerzo	12
2.2.2 Tracción	13
2.2.3 Deformación	14
2.2.4 Ecuaciones de equilibrio	15
2.2.5 Ecuaciones de movimiento	16
2.2.6 Ecuación de Navier	19
2.3 ECUACIONES DE ONDAS P Y SV	22
CAPÍTULO 3. FORMULACIÓN DEL FENOMENO MEDIANTE EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS	24
3.1 Método de diferencias finitas	25
3.2 Formulación pseudo espectral	25
3.3 Formulación matemática mediante el método de diferencias finitas	27
3.4 Análisis de fourier	30
3.5 Esquema en desplazamientos para el problema P-SV	32
3.6 Condiciones de frontera. Fronteras absorbentes	36
3.7 Superficie Libre	40
CAPÍTULO 4. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARTICULARES DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS ELÁSTICOS	47
4.1 La Fuente	48
4.2 Pulso de Ricker	48
4.3 Modelo del Problema	50
4.4 Resultados del problema de la propagación de ondas en un medio elástico agrietado (estrato sólido – estrato líquido).	51
4.5 Estabilidad del programa.	53
4.6 Pruebas y resultados de los ejemplos propuestos.	56

CONCLUSIONES	71
TRABAJOS A FUTURO	72
ANEXO 1. Ondas mecánicas	75
ANEXO 2. Serie de Taylor	79
ANEXO 3. Número de Courant y Ondas de Interfase	82
REFERENCIAS	

LISTA DE FIGURAS

Número	Nombre	Página
Capítulo 1		
I.1	Modelo de propagación.	7
Capítulo 2		
II.1	Representación de esfuerzos en un volumen elemental.	12
II.2	Tracción.	13
II.3	Incidencia de una Onda SH.	21
Capítulo 3		
III.1	Esquema de malla alternada en espacio y tiempo.	28
III.2	Esquema de malla alternada en 3D.	29
III.3	Esquema de discretización para el caso P-SV en 2D mediante Diferencias finitas.	36
III.4	Representación gráfica de los tipos de bordes.	37
III.5	Matriz de unos y ceros de las fronteras absorbentes.	41
III.6	Matriz de clasificación de los diferentes puntos del modelo.	41
III.7	Puntos ficticios para los desplazamientos.	43
III.8	Esquema para el cálculo de los desplazamientos.	44
III.9	Esquema hacia delante para aproximar la derivada de x.	45
III.10	Esquema para una solución alterna.	46
Capítulo 4		
IV.1	Distribución de fuerzas correspondientes a una onda P.	48
IV.2	Distribución de fuerzas correspondientes a una onda S.	48
IV.3	Pulso de Ricker en el dominio del tiempo.	49
IV.4	Pulso de Ricker en el dominio de la frecuencia.	49
IV.5	Modelo del Problema.	50
IV.6	Programa elastic_cyl.	51
IV.7	Programa elastic_cyl. Grieta.	52
IV.8	Programa de modelación de ondas en MATLAB.	53
IV.9	Gráfica del valor de la difusión numérica.	56
IV.10	Propagación de una onda.	57
IV.11	Ondas y bordes de contorno.	57
IV.12	Propagación en el último incremento de tiempo.	58
IV.13	Ondas de Stoneley-Scholte.	59
IV.14	Archivo de datos Ej. 2.	60
IV.15	Esquema de propagación en 2 una grieta.	61
IV.16	Tiempos de propagación en el medio agrietado.	62
IV.17	Esquema de propagación T40.	62
IV.18	Esquema de propagación T60.	62
IV.19	Esquema de propagación T90.	63
IV.20	Tiempos de propagación en el medio estratificado.	63
IV.21	Esquema de propagación T25.	64
IV.22	Esquema de propagación T70.	64
IV.23	Esquema de propagación T90.	64
IV.24	Archivo de datos Ej. 3. (Formación Rápida – Agrietada).	65
IV.25	Tiempos de propagación en el medio agrietado Ej. 3.	65
IV.26	Esquema de propagación T6.	66
IV.27	Esquema de propagación T15.	66
IV.28	Esquema de propagación T60.	67
IV.29	Esquema de propagación T60 (rotado).	67
IV.30	Archivo de datos Ej. 4. (Formación Lenta – Agrietada).	68
IV.31	Tiempos de propagación en el medio agrietado Ej. 4.	68

IV.32	Esquema de propagación T10.	69
IV.33	Esquema de propagación T20.	69
IV.34	Esquema de propagación T60.	70
IV.35	Esquema de propagación T60 (rotado).	70

ANEXO 1

1.1	Representación de una onda longitudinal.	75
1.2	Representación de una onda transversal.	75
1.3	Representación de una onda tipo Rayleigh.	76
1.4	Representación de una onda tipo Love.	77

ANEXO 2

2.1	Representación de la serie de Taylor.	80
-----	---------------------------------------	----

ANEXO 3

3.1	Número de Courant	82
3.2	Ondas de Stoneley.	83

Lista de Símbolos

σ_{ij}	Esfuerzos normales
C_{ijkl}	Tensor de esfuerzos de cuarto orden.
ε	Deformación
E	Modulo de elasticidad
σ_{xx}	Esfuerzo en el lado x y dirección x
ν	Modulo de Poisson
Δt	Incremento de tiempo
Σ	Sumatoria
G	Modulo de Rigidez
T	Tensor tensión
L_f	Longitud final
L_i	Longitud inicial
n_x	Vector normal dirección x
f_x, f_y, f_z	Fuerzas en las tres direcciones x,y,z
Δx	Incremento en el eje x
$a_i b_i$	Sumatoria de índices repetidos
$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$	Divergencia del tensor de esfuerzos
ρ	Densidad
x_i	Coordenadas espaciales
F_i	Fuerza de cuerpo
u_i	Desplazamiento eje x(u)
λ y μ	Constantes de Lamé
δ_{ij}	Delta de Kronecker
e_{ij}	Tensor de deformaciones infinitesimales.
∇	Gradiente

$\nabla \cdot \bar{u}$	Divergencia de u
∇^2	Laplaciano
$\nabla \times \bar{u}$	Rotacional de u
$\nabla \Phi$ y $\nabla_x \bar{\Psi}$	Componentes de onda P y de onda S
α	Velocidad de propagación de las ondas de compresión (P)
β	Velocidad de propagación de las ondas de corte (S)
\dot{m}_{xx} , \dot{m}_{yy} y \dot{m}_{xy}	Derivadas de esfuerzos con respecto al tiempo
π	Pi(3.1416)
t	Tiempo
t_s	Centro del pulso
t_p	Período característico del pulso
$\sqrt{\quad}$	Raíz cuadrada
f_p	Frecuencia característica

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 RESUMEN

La presencia de irregularidades (grietas) en materiales elásticos provoca dispersión y difracción durante la propagación de ondas. Este campo difractado producido durante la propagación de ondas proporciona valiosa información para la detección y caracterización de grietas u otras heterogeneidades.

Se estudia la propagación de ondas elásticas en una configuración 2D. Estas son producidas por una fuente sónica (Pulso de Ricker) en un fluido, en contacto con un medio elástico sólido. La solución de las ecuaciones de movimiento se obtienen en el dominio del tiempo, utilizando el método de diferencias finitas.

Las formulaciones se basan en las ecuaciones de movimiento y equilibrio del sistema, para después llegar a la ecuación de onda, mediante el uso de diferencias finitas se logran los esquemas en términos de velocidades y esfuerzos para reducir el grado de las ecuaciones diferenciales. En la formulación pseudo espectral las derivadas con respecto a las variables espaciales se realizan con la transformada rápida de Fourier.

Para contar con una precisión más clara de las derivadas, se utilizó mallas de tipo alternadas. Se introdujo una grieta en la configuración, para observar y estudiar la propagación de ondas que se tiene con estas formaciones.

Mediante el lenguaje Fortran se obtuvieron los cálculos de presiones y desplazamientos, y se modela la propagación tomando el programa Matlab como herramienta. Se hizo la simulación de 4 casos: Formación primaria de propagación, formación lenta (velocidad de la onda de corte del sólido es menor), formación rápida y propagación de ondas en un medio agrietado.

Las formulaciones numéricas muestran estabilidad del método, por lo que se plantean y discuten posibles trabajos a futuro mediante casos más complejos en geometría y materiales.

En este trabajo se implementó una técnica para resolver problemas relacionados con la propagación de ondas en 2D, en sistemas con discontinuidades a través del método de diferencias finitas.

1.2 ABSTRACT

The presence of irregularities (cracks) in elastic materials leads to dispersion and diffraction during propagation of waves. This diffracted field produced during the propagation of waves provides valuable information for the detection and characterization of cracks or other heterogenetys.

It is study the propagation of elastic waves in a 2D configuration. These are produced by a sonic source (Ricker pulse) in a fluid, in contact with an elastic solid. The solution of the equations of motion are obtained in the time domain using the finite difference method.

The formulations are based on the equations of motion and equilibrium of the system, then get to the wave equation, using finite difference schemes are achieved in terms of speed and stresses to reduce the degree of differential equations. In formulating the spectral pseudo derivatives with respect to spatial variables are done with the fast Fourier transform.

To have a clearer accuracy of the derived type mesh was used staggered. The crack was introduced in the configuration, to observe and study the propagation of waves we have with these formations.

Through language Fortran calculations were obtained pressure and movement, and propagation is modeled by taking the Matlab program as a tool. It was the simulation of four cases: primary formation of propagation, slow formation (velocity of shear wave of solid is less), rapid formation and propagation of waves in half cracked.

The formulations are stable numerical method, which are presented and discussed possible future work with more complex cases in geometry and materials.

This work implemented a technique for solving problems associated with the propagation of waves in 2D, in systems with discontinuities of the finite difference method.

1.3 SINOPSIS.

El contenido de esta tesis está formado por cuatro capítulos. El **capítulo 1** contiene una introducción a la problemática planteada; se menciona la justificación de la realización de esta investigación y los trabajos previos que han tratado el tema sobre la propagación de ondas mediante el método de Diferencias Finitas. El objetivo y las metas están comprendidos en esta parte del trabajo.

En el **capítulo 2** se presenta la formulación matemática del fenómeno de propagación de ondas, basándose en la mecánica del medio continuo, resolviendo las ecuaciones de la elasticidad, leyes de movimiento y ecuaciones de propagación de ondas.

En el **capítulo 3** se presenta la formulación del fenómeno de propagación de ondas mediante los esquemas del Método de diferencias finitas, el cual permitirá la aproximación de las derivadas para el análisis numérico y esto de cómo resultado la resolución de las ecuaciones diferenciales y se puedan obtener los esquemas de esfuerzos y desplazamientos para la modelación.

Y por último en el **capítulo 4** se presenta la modelación numérica del fenómeno de la propagación de ondas en un medio elástico y agrietado, utilizando 4 ejemplos de propagación. Tanto para un medio estratificado como uno con discontinuidad (grieta).

Por último se presenta el análisis de resultados de los problemas planteados, así como las conclusiones del trabajo y las recomendaciones para trabajos futuros.

1.4 ESTADO DEL ARTE.

En este tipo de métodos (Diferencias finitas) se aproximan las ecuaciones de onda mediante diferencias. Las derivadas que aparecen en estas ecuaciones son transformadas en diferencias finitas, creando un conjunto de ecuaciones que pueden ser resueltas de forma iterativa.

Durante la segunda mitad del siglo XX, muchos autores han trabajado en este método, llegando a nuestros días mucho más desarrollado, los pioneros en esta técnica fueron los trabajos de Alterman y Karal(1968), Boore(1972) y Kelly(1976), quienes comienzan a trabajar con esta técnica. Viriux(1986) quien presenta uno de los primeros esquemas en velocidad-esfuerzos, Levander(1988) trabaja con un esquema de cuarto orden de error (véase anexo I). Zahradnik *et al.* (1993) presenta un artículo en el que analiza y compara las soluciones de cuatro esquemas distintos de diferencias finitas.

Algunos de los resultados más realistas de la propagación de ondas elásticas hasta nuestros días han sido realizados usando el Método de Diferencias Finitas, como se ve en los trabajos de Olsen(2000), quien calcula la respuesta de la cuenca de Los Ángeles en 3D, y de los más recientes Moczo *et al* (2004) quien empleó esta técnica para calcular el movimiento del suelo en modelos con discontinuidades laterales del material y superficial libre horizontal.

Alterman y Karal (1968) resuelven el problema de una capa sobre un semispacio aplicando las ecuaciones de contorno (encontrando los esfuerzos y desplazamientos en la interfaz entre ambos medios). Boore (1972) y Kelly *et al.* (1976) hacen evolucionar un algoritmo para medios heterogéneos e introducen la idea de promediar los parámetros del medio. Boore introdujo el llamado formalismo del vacío, para el problema *SH* en 2D, donde los parámetros de Lamé y las densidades igualan a cero para simular la superficie libre. Ilan (1977) y Rong-Song *et al* (1988) usaron el método de diferencias finitas para simular la propagación de ondas P-SV en un medio elástico con superficie libre de tipo poligonal. Levander (1988) desarrolla la técnica de imágenes para los esfuerzos, en la cual era necesario conocer los valores de las componentes del tensor de esfuerzos sobre la superficie libre.

El uso de mallas alternadas en las diferencias finitas disminuyó el trabajo de cómputo ya que en vez de trabajar con ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas de segundo orden se redujeron un orden, transformando el esquema de desplazamiento de segundo orden a uno de esfuerzo-velocidad de primer orden (Virieux, J., 1984).

La década de los 90s se caracterizó por la implantación del esquema antes mencionado en grandes problemas de modelación numérica, como la modelación sísmica de una región dada (Furumura T. y H. Takenaka, 1996), donde se desarrollaron modelos tridimensionales que involucraban las propiedades físicas del subsuelo de Japón y así modelar la propagación de ondas sísmicas.

Ohminato y Chouet (1997) discretizan la topografía de un problema 3D realizando la superposición de celdas unitarias en un esquema de velocidad-esfuerzos mediante una malla desplazada. Kristek *et al.* (2002) usaron una técnica diferente para modelar la superficie libre, la llamada técnica AFDA, basada en el ajuste de la aproximación en Diferencias Finitas. Moczo *et al.* (2004) empleó esta técnica (AFDA) para calcular el movimiento del suelo en modelos con discontinuidades laterales del material y superficie libre horizontal.

En cuanto al fenómeno de agrietamiento, las ideas fundamentales sobre el comportamiento de sólidos agrietados se deben a A. Griffith, quien las introdujo mediante un planteamiento energético (1921). Años más tarde Irwin (1948) y Orowan (1948) sentaron las bases para establecer a la mecánica de la fractura como una disciplina de la ingeniería. Irwin (1957) introdujo un concepto fundamental en la mecánica de la fractura, relacionando la energía de deformación liberada, propuesta por Griffith, con el factor de intensidad de esfuerzos (FIE). El FIE es determinante en el crecimiento de las grietas en los sólidos.

Al mismo tiempo fueron introducidos, conceptos como velocidades de propagación de ondas en sólidos, evaluación de la energía cinética en un cuerpo agrietado y velocidades límite de propagación de grietas (Mott (1948), Roberts y Wells (1954) y Stroh (1957), respectivamente).

Se han desarrollado métodos numéricos para la solución de problemas en dinámica de la fractura y específicamente para aquellos relacionados con la interacción de ondas en medios agrietados. Estos métodos han servido para simular componentes o sistemas agrietados. Chen (1975) fue quién inicialmente aplicó el método de diferencias finitas a problemas de propagación de ondas en medios agrietados. En su trabajo reporta la solución del problema de una placa con dimensiones finitas, que posee una grieta central, sujeta a una carga de tensión. Chen comparó sus resultados con los reportados por Baker (1962), quién solucionó analíticamente el mismo problema pero formulado en un medio infinito.

En este trabajo se modela el fenómeno de propagación de ondas tomando en cuenta una configuración estratificada de sólido y líquido, utilizando le técnica de las diferencias finitas y transformadas de Fourier para una mejor aproximación de las derivadas, se modela también una grieta dentro de la estratigrafía para conocer los efectos de propagación y comportamiento que se tiene en la configuración (estrato sólido – estrato líquido – estrato sólido) debido a la presencia de esta discontinuidad (grieta).

1.5 OBJETIVO.

Implementación de un modelo numérico que determine la propagación de ondas en un medio elástico, inmerso en un semi-espacio infinito agrietado, basado en el método de diferencias finitas.

1.6 METAS.

- Resolver las ecuaciones de la elasticidad dinámica utilizando métodos numéricos.
- Implementación de una malla alternada a través del método de diferencias finitas para lograr la discretización del modelo.
- Introducir una grieta en el modelo para observar la propagación de las ondas y su comportamiento
- Realizar el modelo computacional del fenómeno de la propagación de ondas en un medio agrietado.

1.7 JUSTIFICACIÓN.

El fenómeno de la propagación de ondas y su difracción son centrales en el mundo que nos rodea, estos fenómenos implican muchas interacciones y por ello las observaciones suelen complicarse. Para lograr un entendimiento de una forma más amplia se implementará el estudio de la propagación de ondas elásticas.

Una de estas interacciones nos la representa el fenómeno de la propagación de ondas en medios con discontinuidades (grietas), las cuales se presentan en materiales elásticos (suelo), las cuales provocarán fenómenos de dispersión y difracción de estas ondas. El estudio de estos fenómenos nos proporciona la caracterización del medio, así como su comportamiento ante la presencia de estas irregularidades.

Se utilizará el método de diferencias finitas para modelar el medio en estudio (3 estratos), y observar la propagación de las ondas que se dan en los cuatro ejemplos propuestos, además se introducirá una grieta para observar la modelación del problema con esta clase de discontinuidad en el sistema propuesto.

1.8 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se presenta un sistema de tres estratos (sólido – líquido – sólido) el cual será sometido a una excitación (Pulso de Ricker) para tener la propagación de ondas que se tiene en el sistema con estas características, así mismo es introducida una grieta para conocer el comportamiento de la propagación de las ondas cuando estas se encuentran con la grieta.

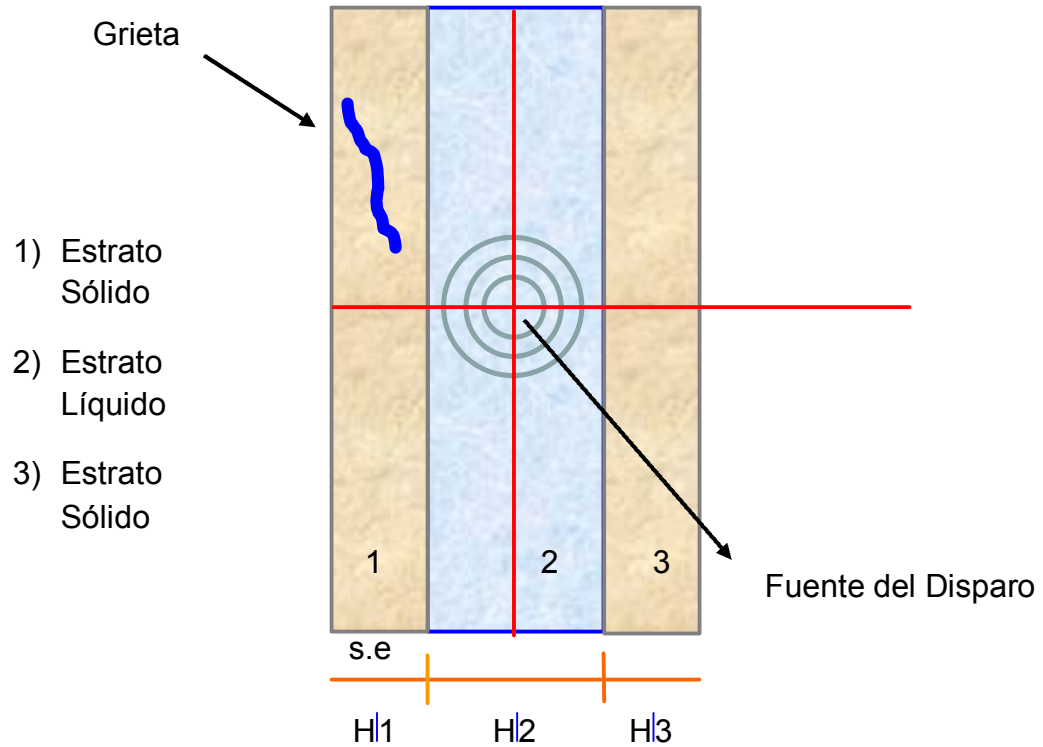


Fig. I.1 Modelo del problema

Los modelos de propagación de los cuatro ejemplos propuestos y comentarios se presentan en el capítulo 4.

1.9 GENERALIDADES.

Una onda (ver anexo 1) es una perturbación que se propaga desde el punto en que se produjo hacia el medio que rodea ese punto. Las ondas materiales requieren un medio elástico para propagarse. El medio elástico se deforma y se recupera vibrando al paso de la onda.

Una onda transporta energía y cantidad de movimiento pero no transporta materia. En función del tipo de soporte que requieren para su propagación las ondas se clasifican en mecánicas y electromagnéticas. Las mecánicas requieren un medio elástico para propagarse y las electromagnéticas no, se pueden propagar en el vacío.

Una onda longitudinal es aquella en la que el movimiento de oscilación de las partículas del medio es paralelo a la dirección de propagación de la onda. Las ondas longitudinales (ondas P), reciben también el nombre de ondas de presión u ondas de compresión. Algunos ejemplos que de ondas longitudinales son el sonido y las ondas sísmicas de tipo P generadas en un terremoto.

Las ondas P, son ondas longitudinales o de compresión, lo cual significa que el medio en que se propagan (suelo) es alternadamente comprimido y dilatado en la dirección de la propagación. Estas ondas generalmente poseen una velocidad 1.73 veces de las ondas S y pueden viajar a través de cualquier tipo de material. Las velocidades típicas son 330 m/s en el aire, 1450 m/s en el agua y cerca de 5000 m/s en el granito.

Las ondas transversales (ondas S), son aquellas que propagarse, las partículas del medio en que se dispersan se mueven transversalmente en la dirección de propagación de la onda. Un ejemplo de ello son las ondas en el agua ya que avanzan en una dirección sobre la superficie del agua, las partículas suben y bajan. Al igual las ondas electromagnéticas en este sentido no hay medio de propagación (puede ser el vacío) sin embargo los campos eléctricos y magnéticos oscilan perpendicularmente a la dirección de la propagación, es decir, transversalmente.

Las ondas S o de corte, lo cual significa que el medio en que se propagan (suelo) es desplazado perpendicularmente a la dirección de propagación alternadamente hacia un lado y hacia el otro.

Las ondas S pueden viajar únicamente a través de sólidos debido a que los líquidos no pueden soportar esfuerzos de corte. Su velocidad es alrededor de 58% de la de una onda P para cualquier material sólido. Usualmente la onda S tiene mayor amplitud que la P y se siente más fuerte que ésta.

Es por ello, que desarrollar herramientas que permiten evaluar este tipo de efectos, tiene una gran importancia a la fecha.

Una vez planteado lo que contiene el presente trabajo, es necesario conocer la teoría del fenómeno de la propagación de ondas, así como algunos de los temas mas importantes que hacen posible un entendimiento de una mejor forma, todo esto se ve en el capítulo 2.

CAPÍTULO 2

TEORÍA DE LA ELASTICIDAD Y DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS ELÁSTICOS.

Se presenta la formulación matemática para resolver el fenómeno de propagación de ondas, basándose en la mecánica del medio continuo, analizando las ecuaciones de la elasticidad, leyes de movimiento y ecuaciones de propagación de ondas.

2.1 Fundamentación teórica.

La elasticidad (ver Hughes 1983), es parte de la mecánica de sólidos deformables. Tanto la teoría de la elasticidad (TE) como la mecánica de sólidos (MS) deformables, describe la deformación y movimiento de un sólido o fluido como respuesta a fuerzas exteriores. La diferencia entre la TE y la MS es que la primera sólo trata sólidos donde las deformaciones juegan un papel mucho muy importante.

La propiedad elástica de los materiales está relacionada, como se ha mencionado, con la capacidad de un sólido a sufrir transformaciones. Cuando se presenta que sobre un sólido actúan fuerzas exteriores y éste pierde su forma original, se producirá un trabajo que se almacenará en el cuerpo en forma de energía potencial elástica y por tanto se producirá un aumento de la energía interna. El sólido se comportará elásticamente, si este incremento de energía puede realizarse de forma reversible, en este caso decimos que el sólido es elástico.

2.2 Teoría de la Elasticidad Lineal

Un caso particular de sólido elástico se presenta cuando los esfuerzos y las deformaciones están relacionadas linealmente, mediante la siguiente ecuación constitutiva:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.1)$$

cuando eso sucede decimos que tenemos un sólido elástico lineal. Por lo que, la teoría de la elasticidad lineal representa el estudio de sólidos elásticos lineales sometidos a pequeñas deformaciones de tal manera que los desplazamientos y deformaciones sean "lineales" (es decir, que las componentes del campo de desplazamientos u sean aproximadamente una combinación lineal de las componentes del tensor deformación del sólido). En general un sólido elástico lineal sometido a grandes desplazamientos no cumplirá esta condición. Por tanto la teoría de la elasticidad lineal sólo es aplicable a:

- Sólidos elásticos lineales, en los esfuerzos y deformaciones están relacionadas linealmente (linealidad material).
- Deformaciones pequeñas, en ese caso las deformaciones y desplazamientos están relacionados linealmente. En el caso contrario puede usarse el tensor de deformación lineal de Green-Lagrange para representar el estado de deformación no lineal de un sólido (no linealidad geométrica).

Debido a los pequeños desplazamientos y deformaciones a los que son sometidos los cuerpos, se usan las siguientes simplificaciones y aproximaciones para sistemas estables:

- Los esfuerzos se relacionan con las superficies no deformadas
- Las condiciones de equilibrio se presentan para el sistema no deformado

Para determinar la estabilidad de un sistema se deben presentar las condiciones de equilibrio para el sistema deformado.

Por otra parte (2.1) también llamada ecuación constitutiva Lamé – Hooke, se puede presentar como el caso de un problema unidimensional, entonces, $\sigma = \sigma_{11}$, $\varepsilon = \varepsilon_{11}$, $C_{11} = E$ y la ecuación anterior se reduce a:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.2)$$

donde E es el módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young. Para caracterizar el comportamiento de un sólido elástico lineal e isótropo se requieren además del módulo de Young (2.9) otra constante elástica, llamada coeficiente de Poisson (ν) y el coeficiente de temperatura (α). Por otro lado, las ecuaciones de Lamé para un sólido elástico lineal e isótropo pueden ser deducidas del teorema de Rivlin-Ericksen, que pueden escribirse en la forma:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \alpha\Delta T) \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) + \alpha\Delta T) \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha\Delta T) \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G} \quad (2.8)$$

Ciertos materiales muestran un comportamiento sólo aproximadamente elástico, mostrando por ejemplo variación de la deformación con el tiempo o fluencia lenta. Estas deformaciones pueden ser permanentes o tras abandonar el cuerpo pueden desaparecer (parcial o completamente) con el tiempo. Además algunos materiales pueden presentar plasticidad, es decir pueden llegar a exhibir pequeñas deformaciones permanentes, sin embargo las ecuaciones anteriores constituyen una buena aproximación al comportamiento de estos materiales.

2.2.1 Esfuerzo

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo material pueden ser de dos tipos. Las del primer tipo surgen en el seno del material y son proporcionales a la masa de la sustancia (por ejemplo gravedad, fuerza centrífuga, fuerza magnética). Estas fuerzas se conocen como fuerzas másicas y se miden en unidades de fuerza por unidad de volumen. Las del segundo tipo se conocen como fuerzas de superficie, actúan sobre la superficie del cuerpo y se miden en unidades de fuerza por unidad de superficie. Esta fuerza por unidad de superficie se denomina esfuerzo y da una medida de la intensidad de la reacción del material que se apoya sobre un lado de la superficie (ver Fig.II.1).

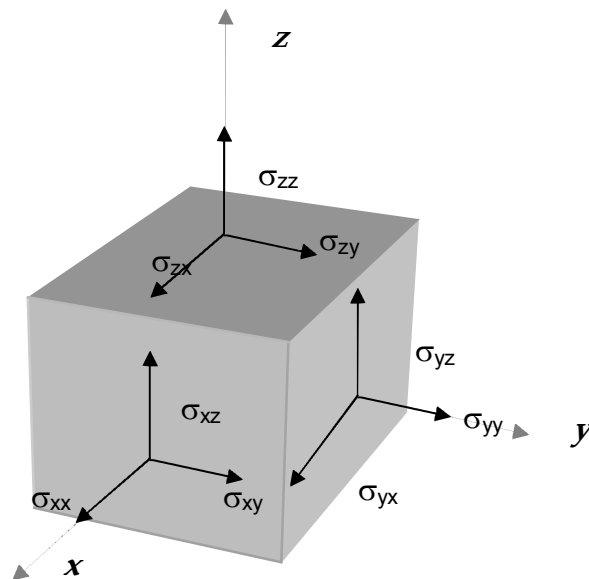


Figura II.1. Representación de esfuerzos en un volumen elemental (Fung 1977). El primer subíndice indica la cara del paralelepípedo rectangular en la que actúa el esfuerzo y el segundo la dirección de dicho esfuerzo. Las caras indicadas son positivas y los esfuerzos representados tienen direcciones positivas. En las caras negativas, los esfuerzos positivos tendrán direcciones contrarias.

En el tensor de esfuerzos (Fung, 1977), los esfuerzos normales están contenidos en la diagonal principal, mientras que en la triangular superior e inferior se localizan los esfuerzos de cortante, así, se tiene:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Donde σ_{ij} = tensor de esfuerzos, σ_{xx} = fuerzas lado x , σ_{yy} = fuerzas lado y , σ_{zz} = fuerzas lado z .

2.2.2 Tracción

La tracción en un punto se define como el límite de la fuerza aplicada sobre una pequeña región sobre un plano π que contenga al punto (ver figura II.2) dividida entre el área de la región, es decir, la tensión es la fuerza aplicada por unidad de superficie y depende del punto elegido, del estado de esfuerzos del sólido y de la orientación del plano escogido para calcular el límite. La normal al plano escogido n_{π} y la tensión t_{π} en un punto están relacionadas por:

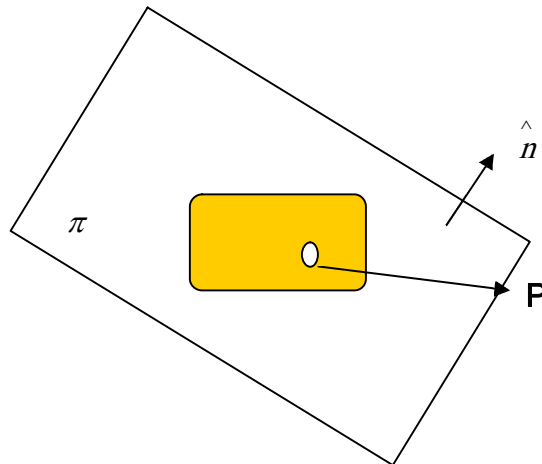


Figura II.2. Tracción.

Y se puede considerar mediante la siguiente expresión:

$$t_{\pi} = \mathbf{T}(n_{\pi}) \quad (2.10)$$

donde \mathbf{T} es el llamado tensor tensión, también llamado tensor de tensiones, que fijada una base vectorial ortogonal viene representado por una matriz simétrica 3x3:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

donde la primera matriz de la ecuación de (2.11) es la forma común de escribir el tensor de esfuerzos en física y la segunda forma usa las convenciones comunes en ingeniería. Dada una región en forma de ortoedro (ver Fig. II.1) con caras paralelas a los ejes coordenados situado en el interior un sólido elástico, las componentes σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{zz} producen los cambios de longitud en las tres direcciones, pero no distorsionan los ángulos del ortoedro, mientras que las componentes σ_{xy} , σ_{yz} y σ_{zx} están relacionadas con la distorsión angular que convertiría el ortoedro en un paralelepípedo.

2.2.3 Deformación

En la teoría lineal de la elasticidad la pequeñez de las deformaciones es una condición necesaria para asegurar que existe una relación lineal entre los desplazamientos y las deformaciones. Normalmente, se le llama deformación al cambio de longitud entre dos puntos (L) de un cuerpo cuando se somete a un estado de esfuerzos; sin embargo, este cambio de longitud no es una medida propia de la deformación, ya que es dependiente de la longitud misma. Para eliminar esta dependencia debe normalizarse al cambio de longitud con la longitud inicial, es decir:

$$e = \frac{L_f - L_i}{L_i} \quad (2.12)$$

donde L_f es la longitud final, L_i es la longitud inicial y e es la deformación unitaria.

Bajo esas condiciones la deformación puede representarse adecuadamente mediante el tensor deformación infinitesimal (véase 2.14) que viene dada por:

$$\epsilon_{\mathbf{ik}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Los componentes de la diagonal principal contienen los alargamientos (dilataciones), mientras que el resto de los componentes del tensor son los medios desplazamientos. Las componentes están linealmente relacionadas con los desplazamientos mediante esta relación:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.14)$$

analizando (2.14), se tiene lo siguiente:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.20)$$

Donde:

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ representa el campo vectorial de desplazamientos del cuerpo, es decir, la diferencia entre la posición final e inicial de cada punto y $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = z$ son las coordenadas tomadas sobre la forma geométrica original del cuerpo.

$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ son las coordenadas de cada punto material del cuerpo.

ε_i , representa los cambios relativos de longitud en la dirección i , dirección dada por el eje X_i). La suma $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ es igual al cambio de volumen relativo del cuerpo.

2.2.4 Ecuaciones de equilibrio

Equilibrio interno del sólido.

Cuando las deformaciones no varían con el tiempo, el campo de esfuerzos dado por el tensor de esfuerzos representa un estado de equilibrio con las fuerzas de volumen

$b = (b_x, b_y, b_z)$ en todo punto del sólido, lo cual implica que el campo de esfuerzos satisface estas condiciones de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0 \quad (2.23)$$

Equilibrio en el contorno

Además de las últimas ecuaciones deben cumplirse las condiciones de contorno, sobre la superficie del sólido, que relacionan el vector normal a la misma $n = (n_x, n_y, n_z)$ (dirigido hacia el exterior) con las fuerzas por unidad de superficie que actúan en el mismo punto de la superficie $f = (f_x, f_y, f_z)$:

$$\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z = f_x \quad (2.24)$$

$$\sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z = f_y \quad (2.25)$$

$$\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z = f_z \quad (2.26)$$

Teniendo el estudio de las ecuaciones (2.21 a 2.26), se dice que el sistema se encuentra en equilibrio y el contorno del mismo cumple con las condiciones para poder analizar las ecuaciones de movimiento.

2.2.5 Ecuaciones de Movimiento.

Por lo anterior se plantean las ecuaciones de movimiento que serán:

$$f(x + \Delta_x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta_x \quad (2.27)$$

$$f(x, y + \Delta_y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta_y \quad (2.28)$$

$$f(x + \Delta_x, y + \Delta_y, z + \Delta_z) = f(x, y, z) + \nabla f \cdot dr \quad (2.29)$$

$$f(x, y, z + \Delta z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \quad (2.30)$$

Por lo tanto las fuerzas que actúan a lo largo de x y y en el elemento dx , dy , dz , que se muestra en la Fig. (II.1) son:

$$-\sigma_{xx} \Delta y \Delta z + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - \sigma_{yx} \Delta x \Delta z + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z \quad (2.31)$$

↑
↑
 Lado X Lado Z

$$-\sigma_{zx} \Delta y \Delta x + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \Delta z \right) \Delta y \Delta x + F_x \Delta x \Delta y \Delta z = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.32)$$

↑
↑
↑
 Lado z Fuerza de cuerpo Fuerza de inercia

donde decimos que el lado X y Z están representadas como fuerzas de corte.

Simplificando la siguiente ecuación, se llega a la segunda ley de Newton la cual establece que $F = ma$. Al expresarse la ecuación en notación tensorial, y considerando la suma sobre índices repetidos, se tiene:

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.33)$$

Por otra parte, las fuerzas por unidad de volumen son:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.34)$$

donde $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ es la divergencia del tensor de esfuerzos, ρ = densidad de masa, x_i = coordenadas espaciales, F_i = fuerza de cuerpo, u_i = desplazamiento (generalmente se emplea u para referirse al movimiento en el eje x , v para el movimiento en el eje y , y w para el movimiento en el eje z en el sistema cartesiano), y se utiliza la convención de que índices repetidos se suman.

La segunda ley de Newton puede ser escrita en términos de los desplazamientos utilizando la ley de Hooke que establece que las deformaciones son proporcionales a los esfuerzos que las producen, esto es:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.35)$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé, específicamente μ es el módulo de rigidez cortante del suelo, δ_{ij} es la delta de Kronecker que toma el valor de 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$, ε_{ij} es el tensor de deformaciones infinitesimales.

Al sustituir el tensor de deformaciones en la ley de Hooke se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \varepsilon_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}) + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.36)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) \delta_{ij} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.37)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_m} \right) \delta_{ij} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.38)$$

Simplificando, se reduce a:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2.39)$$

que se puede expresar igualmente, en la forma vectorial:

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + \bar{f} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (2.40)$$

$$\nabla^2 \bar{u} = \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{u}) \quad (2.41)$$

2.2.6 Ecuación de Navier.

Se trata de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido. Con base en las deducciones anteriores, la ecuación de Navier se expresa como:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.42)$$

Considérese la ecuación de Navier (2.42) , si el campo de desplazamiento $\bar{u}(\bar{x},t)$ satisface la ecuación (2.38) así como la fuerza de cuerpo \bar{f} y los valores iniciales de \bar{u} y $\dot{\bar{u}}$ se expresan en términos de potenciales de Helmholtz (nos representará un tiempo independiente de la ecuación original, resultados de aplicar la técnica de separación de variables para reducir la complejidad del análisis) , mediante:

$$\bar{u} = \nabla \phi + \nabla \times \bar{\psi} \quad (2.43)$$

$$\bar{u}(\bar{x},0) = \nabla A + \nabla \times \bar{B} \quad (2.44)$$

$$\dot{\bar{u}}(\bar{x},0) = \nabla C + \nabla \times \bar{D} \quad (2.45)$$

con las condiciones $\nabla \cdot \bar{\Psi} = \nabla \cdot \bar{B} = \nabla \cdot \bar{D} = 0$, entonces existen ϕ y $\bar{\Psi}$ con las propiedades siguientes:

$$\bar{u} = \nabla \phi + \nabla \times \bar{\psi} \quad (2.46)$$

$$\nabla \cdot \bar{\Psi} = 0 \quad (2.47)$$

$$\alpha^2 \nabla^2 \phi + \frac{\phi}{\rho} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad ; \text{ donde } \alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.48)$$

$$\beta^2 \nabla^2 \bar{\psi} + \frac{\bar{\psi}}{\rho} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} \quad ; \text{ donde } \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.49)$$

a esto se le conoce como el teorema de Lamé (véase 2.35). En la ecuación anterior $\nabla \phi$ y $\nabla \times \bar{\psi}$ son llamados los componentes de onda P y de onda S, respectivamente, del campo de desplazamiento.

Entonces (2.49) se puede expresar como:

$$\nabla^2 \vec{u} = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times \nabla \times \vec{u} \quad (2.50)$$

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu\nabla^2 \vec{u} + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.51)$$

O bien:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \mu\nabla \times \nabla \times \vec{u} + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.52)$$

En ausencia de fuerzas de cuerpo ($\vec{f} = \mathbf{0}$) se tendrá que:

$$\vec{u} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{\psi} \quad (2.53)$$

Es solución de la ecuación de Navier si ϕ y $\vec{\psi}$ son soluciones de las ecuaciones de onda.

Considerando que el movimiento se produce sin rotación de partículas, de manera que el rotacional que aparece en la ecuación se anula, se obtiene que:

$$\nabla \times \vec{u} = \mathbf{0}, \text{ y } \vec{f} = \mathbf{0}, \text{ por lo que:} \quad \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix}$$

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \cancel{\mu\nabla \times (\nabla \times \vec{u})} + \cancel{\vec{f}} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.54)$$

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.55)$$

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2 \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.56)$$

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{1}{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.57)$$

Esto nos dará:

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2 \phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.58)$$

donde α es la velocidad de propagación de las ondas de compresión, también llamadas como ondas P. En este caso el campo de desplazamientos es paralelo a la dirección en la que se propaga la onda.

cuando $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, $\vec{f} = \mathbf{0}$ de la ec. (2.52), por lo tanto se tiene que:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.59)$$

$$\mu \nabla^2 \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.60)$$

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.61)$$

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.62)$$

Las ecuaciones anteriores darán como resultado la siguiente expresión:

$$\nabla^2 \vec{\psi} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} \quad (2.63)$$

donde β es la velocidad con la que se van a propagar las ondas de corte, estas son las denominadas ondas S, también llamadas ondas secundarias o de cizalla. En esta ecuación el vector de desplazamiento es normal a la dirección de propagación. Este tipo de ondas se clasifican según su polarización en ondas SH y ondas SV(ver 2.3), ambas contenidas en el plano perpendicular a la dirección de propagación del frente de ondas. Las ondas SH están polarizadas en el plano horizontal, y las ondas SV están polarizadas en el plano vertical.

2.3 Ecuaciones de Ondas P - SV

El caso P-SV consiste en un problema que presenta cierto grado de dificultad debido a que se trata de un problema vectorial.

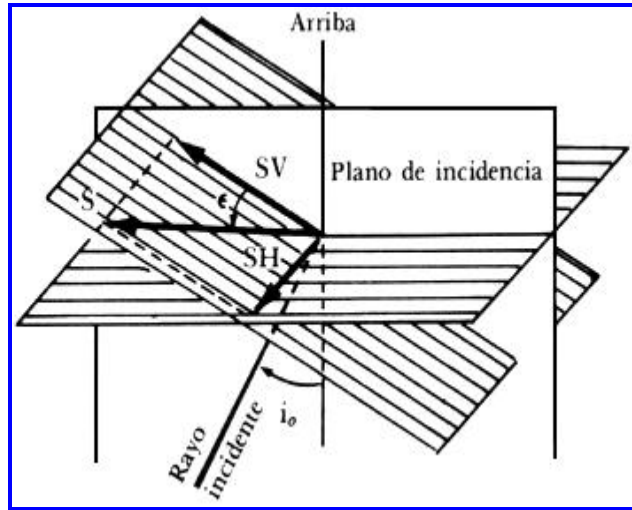


Figura II.3 La onda S y sus componentes SV y SH.

Como en (II.3), el movimiento se desarrolla en el plano X - Z , mientras no existe desplazamiento en la dirección Y . teniendo presente estas premisas, se pueden escribir las ecuaciones que rigen el problema P-SV en la representación de desplazamientos en coordenadas cartesianas, como:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + f_x \quad (2.64)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + f_x \quad (2.65)$$

y las ecuaciones de onda que deben ser satisfechas por los potenciales serán, en el caso de las ondas P:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.66)$$

y

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.67)$$

para las ondas S. (en este caso $\psi = \psi_y$ pues $\psi_z = \psi_x = 0$). Se tiene que:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.68)$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.69)$$

los componentes del tensor esfuerzo que al ser evaluado en la libre no nos proporcionara valores significativos, deben anularse y esto nos dará como resultado las siguientes expresiones:

$$\sigma_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \quad (2.70)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (2.71)$$

ya que $\sigma_{xy} = 0$

En este capítulo se planteó la teoría que abarca al fenómeno de propagación de ondas, así como de las formulas para resolverlo de forma analítica, se estudiaron las ecuaciones de esfuerzo, deformación, tracción para emplearlas en las ecuaciones constitutivas de Lamé-Hooke y poder llegar a la formula de Navier (ondas), que es la ecuación que nos describe el fenómeno de propagación.

Teniendo la formula de Navier,, en el capítulo 3 se empleará el método de diferencias finitas para obtener una discretización, para ello se utilizará una malla de tipo alternada para las configuraciones.

Las condiciones de contorno y de bordes del sistema también serán descritos y analizados en la siguiente parte del trabajo.

CAPÍTULO 3

PROPAGACIÓN DE ONDAS MEDIANTE EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Se presenta la formulación del fenómeno de propagación de ondas mediante los esquemas del Método de diferencias finitas, el cual permitirá la aproximación de las derivadas del análisis numérico para la resolución de las ecuaciones diferenciales del medio continuo y poder realizar la caracterización (propagación) del fenómeno.

3.1 Método de diferencias finitas

Muchos de los problemas físicos que nos rodean en nuestra vida se rigen según una ecuación diferencial. Este tipo de ecuaciones presentan dificultad para ser resueltas de una manera analítica. El método de diferencias finitas (Luzón 2005) usa esta razón como una característica principal, es decir nos aporta una solución en este tipo de problemas con geometrías complejas.

Una de las geometrías nos la proporciona el fenómeno de la propagación de ondas en medios con discontinuidades (grieta) ya que las ecuaciones y la modelación varía con respecto a las demás, por lo que este trabajo proporcionará un desarrollo de este método vinculado a resolver la ecuación de propagación de ondas mediante esta técnica.

El proceso para la aplicación del método será:

- 1) Aproximación de las derivadas de las ecuaciones que rigen el comportamiento del problema mediante esquemas de diferencias finitas.
- 2) Discretización del dominio del problema mediante una malla.

Se pueden clasificar los métodos de diferencias finitas según el tipo de discretizado que se emplea, es decir: métodos de mallado regular o métodos de mallado irregular. Los primeros son aquellos que conllevan la resolución de un sistema de ecuaciones, mientras que los de mallado irregular evitan la resolución de sistemas y permiten el cálculo de la solución de una manera iterativa.

También nos podemos encontrar con diferentes tipos de mallas, las mallas convencionales y las mallas desplazadas. La malla convencional se suele emplear con datos dados como desplazamientos, mientras que la malla desplazada se emplea con formulaciones en términos de desplazamientos-esfuerzos o velocidad-esfuerzos.

3.2 Formulación pseudo espectral.

También llamado método de Fourier, las ecuaciones de derivadas espaciales de las ecuaciones diferenciales son evaluadas a lo largo de una fila o una columna de la malla, en un tiempo dado, mientras que las derivadas temporales son calculadas mediante el método de diferencias finitas.

Para esta formulación se toma como base las ecuaciones de equilibrio en términos de velocidades (J.J. Pérez Gavián E., Martha Suárez, Esteban Flores y José Francisco Sánchez Sésma), las cuales son:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = \rho \ddot{u} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = \rho \dot{v} \quad (3.2)$$

tomando la derivada con respecto al tiempo, de la ley de Hooke, se tiene la relación constitutiva en términos de velocidades y esfuerzos:

Aplicando la Ley Hooke, se tiene:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} + m_{ij} \quad (3.3)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \right) + m_{ij} \quad (3.4)$$

$$\sigma_{xx} = \lambda \delta_{xx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + m_{xx} \quad (3.5)$$

$$\sigma_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + m_{xx} \quad (3.6)$$

Con lo anterior se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \dot{m}_{xx} \quad (3.7)$$

Por lo que para $\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t}$ y $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t}$ nos queda:

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \dot{m}_{yy} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \dot{m}_{xy} \quad (3.9)$$

Donde \dot{m}_{xx} , \dot{m}_{yy} y \dot{m}_{xy} son derivadas de esfuerzo con respecto al tiempo y que pueden utilizarse para representar a la fuente (Pulso de Ricker).

3.3 Formulación matemática mediante el método de diferencias finitas.

Las derivadas en el tiempo pueden escribirse en un esquema centrado de diferencias finitas como:

$$\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial t}\right)^k = \frac{\dot{u}^{k+1/2} - \dot{u}^{k-1/2}}{\Delta_t} \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial t}\right)^k = \frac{\dot{v}^{k+1/2} - \dot{v}^{k-1/2}}{\Delta_t} \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t}\right)^{k+1/2} = \frac{\sigma_{xx}^{k+1} - \sigma_{xx}^k}{\Delta_t} \quad (3.12)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t}\right)^{k+1/2} = \frac{\sigma_{yy}^{k+1} - \sigma_{yy}^k}{\Delta_t} \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t}\right)^{k+1/2} = \frac{\sigma_{xy}^{k+1} - \sigma_{xy}^k}{\Delta_t} \quad (3.14)$$

Una vez teniendo las configuraciones en diferencias finitas, podemos aplicar la discretización del dominio del tiempo mediante una malla como lo muestra la siguiente figura.

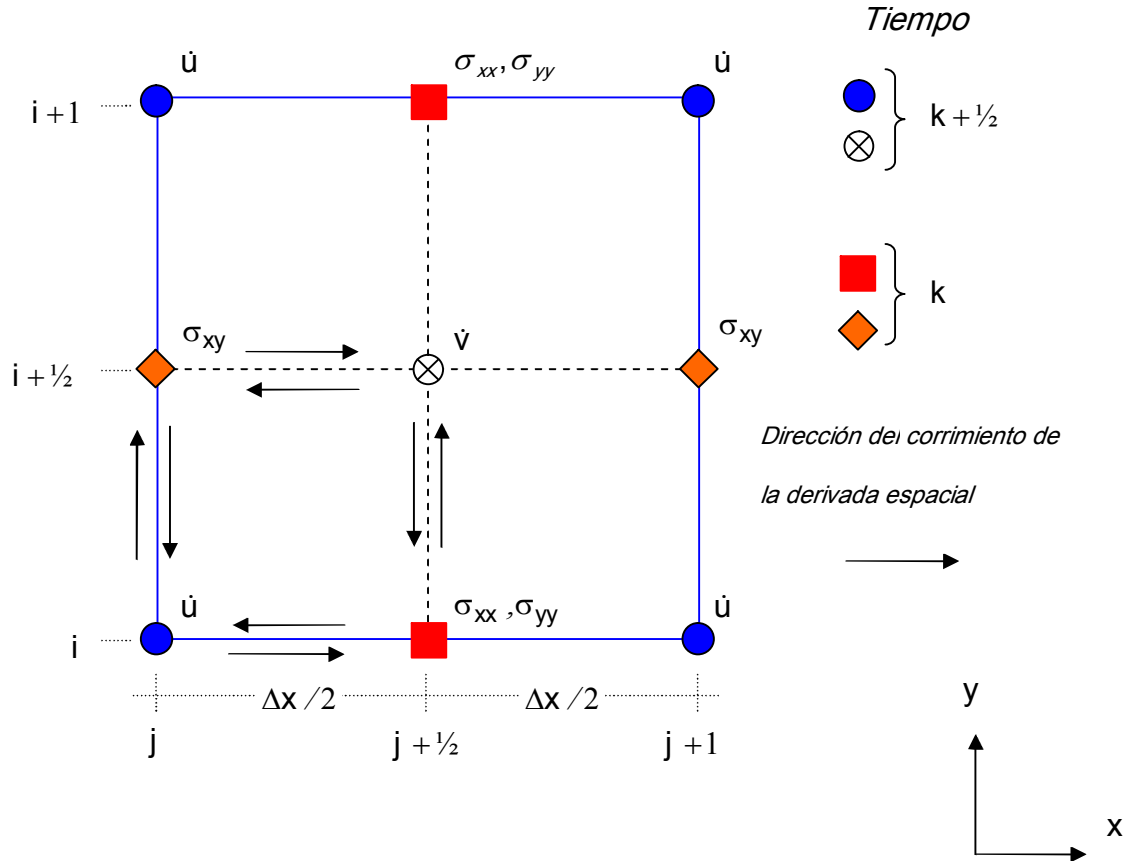


Figura III.1 Esquema de malla alternada en espacio y tiempo: el esquema muestra la posición espacial solamente, la posición en el tiempo de cada elemento de la malla se indique en la parte derecha del esquema

Cabe destacar que los puntos del espacio están dados por los índices i, j (Fig. III.1), donde j será el índice para el eje X e i lo será para el eje Y. El sentido de la discretización con respecto al tiempo se da mediante $t_k = K\Delta t$ las cuales se irán actualizando (pasos de tiempo) dependiendo de las derivadas que se calculen tanto para las componentes de los esfuerzos como de las velocidades (ver 3.31 y 3.32).

Cada celda o espacio contendrá las constantes homogéneas de un material homogéneo, caracterizado por la densidad (ρ) y las constantes de Lamé (λ y μ), las cuales también dependerán de i, j .

Las propiedades del material se definen entre los puntos de frontera y los puntos de la malla mediante un promedio de estos. Se tendrá que encontrar las constantes efectivas del material mediante promedios aritméticos de las densidades.

Al igual para una formulación en 3D, la formulación es enteramente similar. Se requerirá en este caso una malla en dirección de z y aparecerán términos en posiciones alternadas. El nuevo esquema de la malla se muestra en la figura III.2.

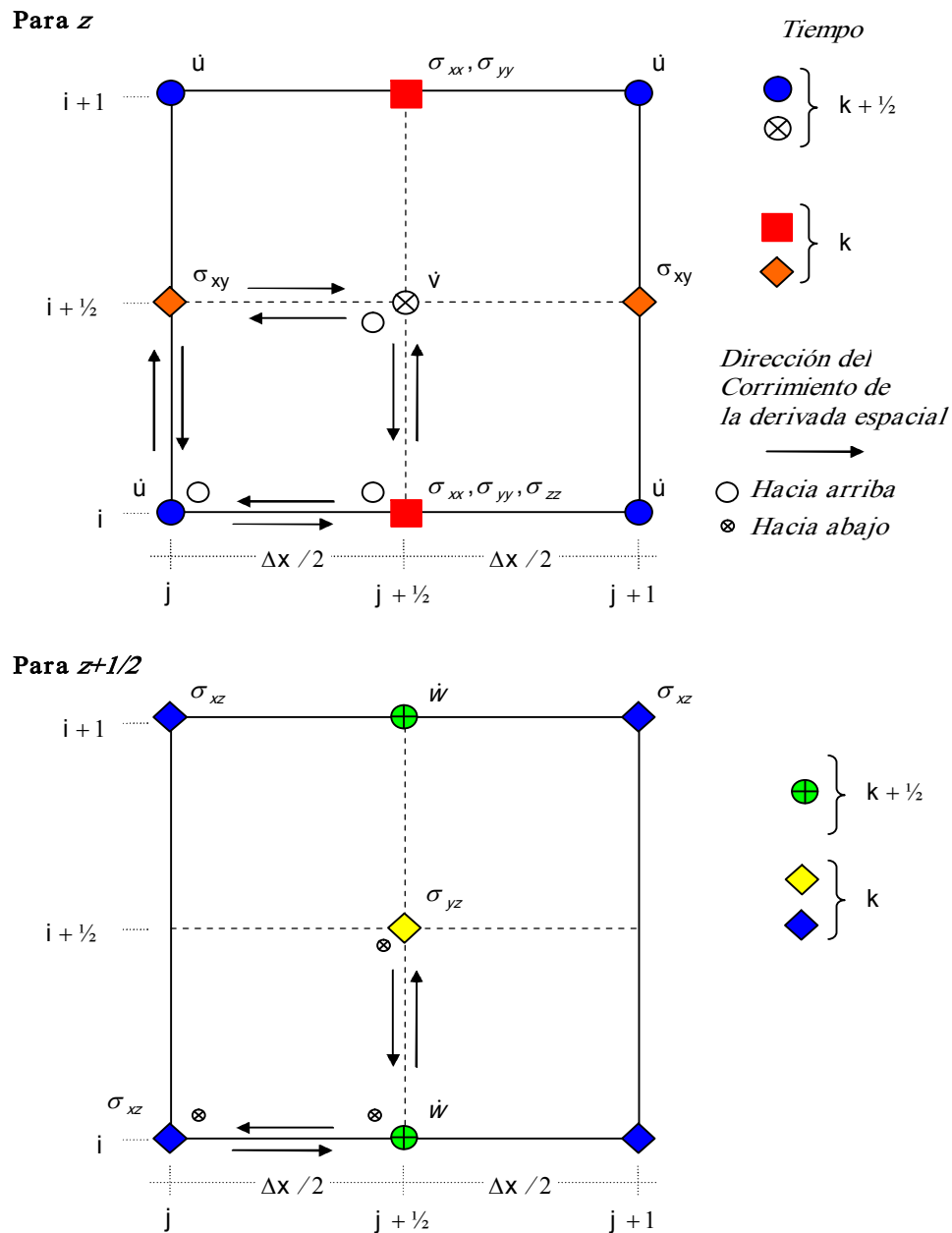


Figura III.2 Esquema de malla alternada en 3D.

Sustituyendo las ecuaciones (3.10) y (3.11) en (3.1) y (3.2) respectivamente, pueden expresarse explícitamente las velocidades en el instante $k+1/2$ en términos de cantidades en tiempos anteriores. Debe entenderse que todas las cantidades de la ecuación se plantean en el mismo punto en el espacio, incluyendo el material.

$$\dot{u}_{i,j}^{k+1/2} = \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right)^k + \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \downarrow \right)^k + \frac{\Delta t}{\rho} (f_x)^k + u^{k-1/2} \quad (3.15)$$

$$\dot{v}_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} = \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} \right)^k + \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \uparrow \right)^k + \frac{\Delta t}{\rho} (f_y)^k + v^{k-1/2} \quad (3.16)$$

En forma similar sustituyendo (3.12), (3.13) y (3.14) en (3.7), (3.8) y (3.9), estas tres últimas planteadas en el tiempo $k+1/2$ se pueden obtener ecuaciones explícitas, para los esfuerzos en el tiempo $k+1$ en términos de cantidades en tiempos previos así:

$$(\sigma_{xx})_{i,j+1}^{k+1} = \Delta_t \rho \alpha^2 \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right)^{k+1/2} + \Delta_t \rho (\alpha^2 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \downarrow \right)^{k+1/2} + \Delta_t \dot{m}_{xx} + (\sigma_{xx})^{k-1} \quad (3.17)$$

$$(\sigma_{yy})_{i,j+1}^{k+1} = \Delta_t \rho \alpha^2 \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \rightarrow \right)^{k+1/2} + \Delta_t \rho (\alpha^2 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \downarrow \right)^{k+1/2} + \Delta_t \dot{m}_{yy} + (\sigma_{yy})^{k-1} \quad (3.18)$$

$$(\sigma_{xy})_{i+1,j}^{k+1} = \Delta_t \rho \beta^2 \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \uparrow \right)^{k+1/2} + \Delta_t \rho \beta^2 \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \leftarrow \right)^{k+1/2} + \Delta_t \dot{m}_{xy} + (\sigma_{xy})^{k-1} \quad (3.19)$$

Las fechas que aparecen en las ecuaciones indican la dirección del corrimiento de las derivadas. Ver esquema, Fig. III.1. α y β son las velocidades de propagación de las ondas P y S respectivamente.

3.4 Análisis de Fourier.

Para obtener las derivadas espaciales, se utiliza la transformada de Fourier, El análisis de Fourier (Kosloff and Baysal 1982), permite descomponer la señal, originalmente en el dominio del tiempo, en una serie de ondas armónicas, considerar cada onda armónica por separado y luego recombinarlas. Esta metodología se usa para analizar los casos donde los efectos de la tierra o de un sismograma pueden ser explicados al

filtrar los datos. Este análisis se utiliza también para filtrar una señal cuando la parte que nos interesa, en el dominio del tiempo o el espacio, se traslapa con otra parte que no interesa.

- Transformada de Fourier

La transformada de Fourier (Abramowitz e Stegun, 1964) de una señal temporal permite expresar a la señal como una superposición continua de señales armónicas de frecuencias variables con amplitud dependiente de cada frecuencia. Matemáticamente en el dominio del tiempo, se define como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.20)$$

O bien, en el dominio del tiempo y espacio:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (3.21)$$

donde $F(\omega)$ o $F(k)$ es la transformada de Fourier de la función $f(t)$ o $f(x)$. La transformada inversa se define como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.22)$$

Para comprender mejor la importancia de la transformada de Fourier al analizar las ondas conviene examinar los argumentos de ambas funciones, $F(\omega)$ y $f(t)$.

Se había señalado que la ecuación de onda plana admite soluciones de la forma $f(t - x/c)$, si aplicamos este corrimiento en el tiempo a la definición de la transformada inversa de Fourier se tiene

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} d\omega \quad (3.23)$$

Como $\exp(i\omega[t - x/c]) = \exp(-i\omega x/c) \exp(i\omega t)$ se suele llamar al primer término propagador o función de transferencia. La función $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de la señal que perturba el medio. Existe una metodología que seguir para encontrar el campo de desplazamientos o esfuerzos en el medio a partir de soluciones en el dominio de la frecuencia. Una vez que se tiene la función de transferencia, ésta debe

convolucionarse con la excitación (representada en el dominio de la frecuencia). La convolución de funciones es un concepto matemático que se define como:

$$h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (3.24)$$

Al aplicarse este teorema a la definición de la transformada de Fourier, se encuentra que si $F(\omega)$ y $H(\omega)$ son las transformadas de Fourier de $f(t)$ y $h(t)$ respectivamente, entonces la convolución de ambas funciones tiene como transformada de Fourier al producto $F(\omega) H(\omega)$, es decir, la convolución de dos funciones en el dominio del tiempo se transforma en una multiplicación (en números complejos) punto a punto en el dominio de la frecuencia.

Una vez hecha la convolución entre la función de transferencia y la señal de excitación, basta con aplicar a dicho producto la transformada inversa de Fourier, la función que se obtenga será la respuesta del medio en el punto de estudio, a este resultado se le conoce como *sismograma sintético* y representa la respuesta del medio en el dominio del tiempo.

La ecuación es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(x \pm \frac{\Delta x}{2} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) i k e^{ik(x \pm \Delta x/2)} dk \quad (3.25)$$

3.5 Esquema en desplazamientos para el problema P-SV

Esta combinación trata de un problema vectorial, el cual puede resolverse mediante la aproximación de sus ecuaciones a través de un esquema de diferencias finitas.

Para lo cual se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + f_x \quad (3.26)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + f_z \quad (3.27)$$

Este sistema presenta dos ecuaciones diferenciales que están relacionadas entre sí, mediante los desplazamientos u y w , además de derivadas de segundo orden, tanto en el tiempo como en el espacio, apareciendo nuevas derivadas mixtas (contienen 2

variables en una misma ecuación). Estas derivadas tendrán que ser aproximadas mediante el esquema de diferencias finitas, entonces:

$$(a\psi_x)_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[a(x, z) \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} \right] \quad (3.28)$$

Se define una función $\phi = a\psi_x$, la cual por otro lado facilita escribir, $\phi_z = (a\psi_x)_z$

aproximando ϕ_z mediante este esquema de diferencias finitas centrado de orden 1, y la ecuación siguiente variará con respecto de z , entonces se tendrá:

$$\phi_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{i,j} = \frac{\phi_{i+\frac{1}{2},j} - \phi_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta z} \quad (3.29)$$

Ahora buscamos aproximaciones para $\phi_{i+\frac{1}{2},j}$ y para $\phi_{i-\frac{1}{2},j}$. Para ello integramos en ambos miembros de la igualdad, pero en este caso se considera a la componente z ; de esta manera nos queda:

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\phi(x_j, z)}{a(x_j, z)} \cdot dz = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \psi_x(x_j, z) \cdot dx \quad (3.30)$$

Entonces se procederá a aproximar esa derivada mediante este esquema de diferencias finitas centrado, de esta forma queda:

$$\psi_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\psi_{i+\frac{1}{2},j+1} - \psi_{i+\frac{1}{2},j-1}}{2 \cdot \Delta x} \quad (3.31)$$

Se observa que:

$$\psi_{i+\frac{1}{2},j+1} = \frac{\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i,j+1}}{2} \quad (3.32)$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2},j-1} = \frac{\psi_{i+1,j-1} + \psi_{i,j-1}}{2} \quad (3.33)$$

Por lo que el término de la derecha (D) se expresa de la siguiente forma:

$$D = \frac{1}{4} \frac{\Delta Z}{\Delta X} (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) \quad (3.34)$$

y por tanto,

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{4} \frac{\Delta Z}{\Delta X} a_{i,j}^{z^+} (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) \quad (3.35)$$

De manera análoga

$$\phi_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{4} \frac{\Delta Z}{\Delta X} a_{i,j}^{z^-} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1} + \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1}) \quad (3.36)$$

Si se sustituyen los valores anteriores de la ecuación (3.29), llegamos al esquema general en diferencias finitas para la derivada mixta de la siguiente forma:

$$(a\psi_x)_z \Big|_{i,j} = \frac{1}{4\Delta x\Delta z} \left\{ \frac{a_{i,j}^{z^+} (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})}{-a_{i,j}^{z^-} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1} + \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1})} \right\} \quad (3.37)$$

Realizando un cambio de subíndices podemos obtener la aproximación para la otra derivada mixta, en la forma:

$$(a\psi_z)_x \Big|_{i,j} = \frac{1}{4\Delta z\Delta x} \left\{ \frac{a_{i,j}^{x^+} (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})}{-a_{i,j}^{x^-} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1})} \right\} \quad (3.38)$$

De esta manera se puede expresar el esquema de diferencias finitas para el problema de las ondas P-SV (ver Fig.II.3) como:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{(\Delta t)^2}{\rho_{i,j}} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \left[(\lambda + 2\mu)_{i,j}^{x^+} (u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k) - (\lambda + 2\mu)_{i,j}^{x^-} (u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k) \right] + \frac{1}{(\Delta x)^2} \right. \\ & \left. \left[\mu_{i,j}^{y^+} (u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k) - \mu_{i,j}^{z^-} (u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\Delta z \Delta x} \left\{ \begin{aligned} & \lambda_{i,j}^{x^+} (v_{i+1,j+1}^k - v_{i-1,j+1}^k + v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k) \\ & - \lambda_{i,j}^{x^-} (v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k + v_{i+1,j-1}^k - v_{i-1,j-1}^k) \end{aligned} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\Delta x \Delta z} \left\{ \begin{aligned} & \mu_{i,j}^{y^+} (v_{i+1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k + v_{i,j+1}^k - v_{i,j-1}^k) \\ & - \mu_{i,j}^{y^-} (v_{i,j+1}^k - v_{i,j-1}^k + v_{i-1,j+1}^k - v_{i-1,j-1}^k) \end{aligned} \right\} \right. \\ & \left. + 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1} + fx \right\} + \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

Para la componente horizontal u , y :

$$v_{i,j}^{k+1} = \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \left[\mu_{i,j}^{x^+} (v_{i,j+1}^k - v_{i,j}^k) - \mu_{i,j}^{x^-} (v_{i,j}^k - v_{i,j-1}^k) \right] + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right. \\ & \left. \left[(\lambda + 2\mu)_{i,j}^{y^+} (v_{i+1,j}^k - v_{i,j}^k) - (\lambda + 2\mu)_{i,j}^{y^-} (v_{i,j}^k - v_{i-1,j}^k) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\Delta z \Delta x} \left\{ \begin{aligned} & \mu_{i,j}^{x^+} (u_{i+1,j+1}^k - u_{i-1,j+1}^k + u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k) \\ & - \mu_{i,j}^{x^-} (u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j-1}^k - u_{i-1,j-1}^k) \end{aligned} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\Delta x \Delta z} \left\{ \begin{aligned} & \lambda_{i,j}^{y^+} (u_{i+1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k + u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k) \\ & - \lambda_{i,j}^{y^-} (u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k + u_{i-1,j+1}^k - u_{i-1,j-1}^k) \end{aligned} \right\} \right. \\ & \left. + 2v_{i,j}^k - v_{i,j}^{k-1} + fy \right\} + \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Para la componente vertical v , donde los parámetros de Lamé (cte. material) serán introducidos mediante medias geométricas (raíz n -ésima del producto de los valores). Esto se debe a que el empleo de las medias geométricas proporciona mejores resultados frente a las medias aritméticas (ver Moczo *et al.* 2004), ya que nos puede considerar todos los valores de nuestra distribución y son menos sensibles a los valores extremos, situaciones que las medias aritméticas no tolerarían.

Por ello definimos a modo de ejemplo algunas de estas medias aritméticas, las ecuaciones (3.41 a 3.44)

$$(\lambda + 2\mu)_{i,j}^{x^+} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)_{i,j+1}} \cdot (\lambda + 2\mu)_{i,j} \quad (3.41)$$

$$(\lambda + 2\mu)_{i,j}^{x^-} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)_{i,j}} \cdot (\lambda + 2\mu)_{i,j-1} \quad (3.42)$$

$$\lambda_{i,j}^{x^+} = \sqrt[4]{\lambda_{i+1,j+1} \cdot \lambda_{i-1,j+1} \cdot \lambda_{i+1,j} \cdot \lambda_{i-1,j}} \quad (3.43)$$

$$\mu_{i,j}^{x\bar{}} = \sqrt[4]{\mu_{i,j+1} \cdot \mu_{i,j-1} \cdot \mu_{i-1,j+1} \cdot \mu_{i-1,j-1}} \tag{3.44}$$

Gráficamente el esquema que se acaba de plantear quedaría de la siguiente manera representada en la figura (III.3).

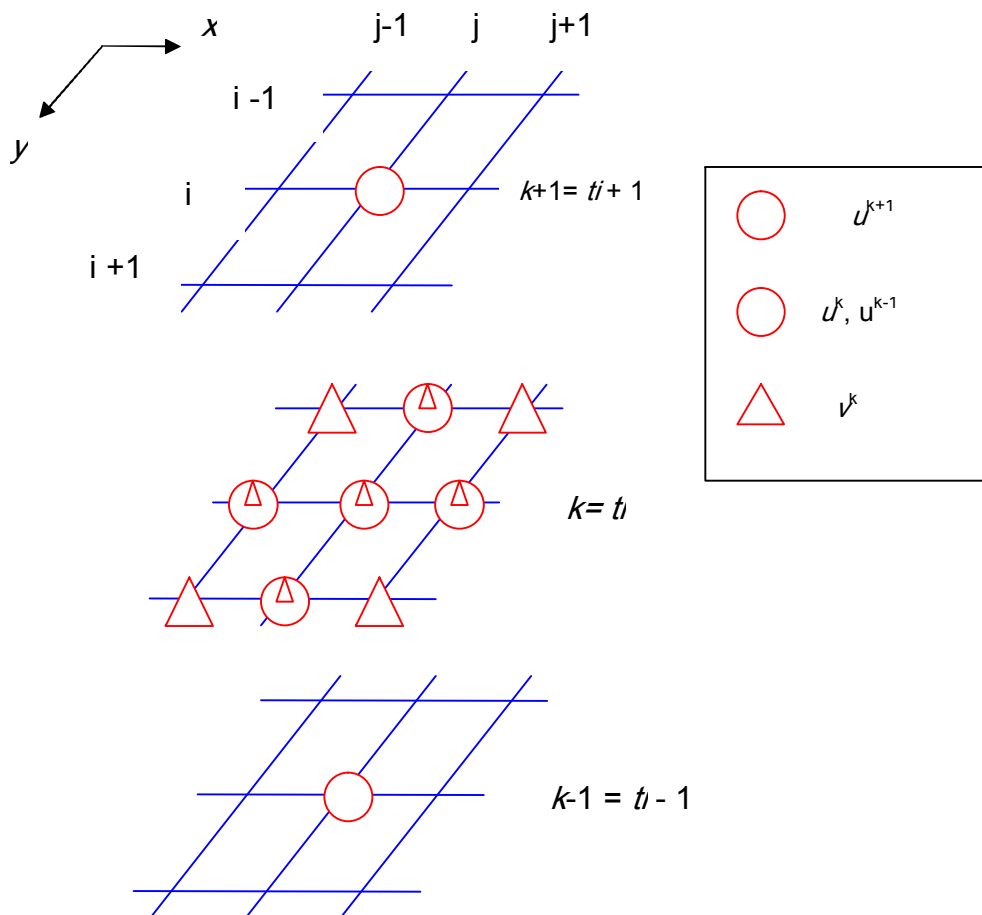


Figura III.3 Esquema de discretización para el caso P-SV en 2D mediante Diferencias finitas.

Se puede observar como se emplean desplazamientos tanto horizontales u , como verticales v , en el tiempo k . Esta gráfica es válida para las dos ecuaciones (esfuerzos y desplazamientos), simplemente cambiando las $u \rightarrow w$ y las $w \rightarrow u$.

3.6 Condiciones de frontera. Fronteras absorbentes

La mayoría de los problemas que se verán son de propagación de ondas en modelos cuyas dimensiones espaciales son muy grandes, cuando no ilimitadas. Se debe discretizar este modelo mediante una malla, la cual viene representada por una matriz. En la práctica consiste en una serie de matrices de datos que albergan los parámetros que caracterizan al modelo en cada punto.

Se dispone de esquemas tanto para el problema SH como para el problema $P-SV$. Con estos esquemas se puede aproximar la solución de la ecuación de ondas. El caso ideal sería que cuando las ondas incidían en los bordes (Sanchez Sesma 2004), estos actúen absorbiendo en su totalidad tales ondas, de manera que simulen la continuidad del modelo. En caso contrario, aparecerían ondas reflejadas irreales que aparecerían en la solución.

Este no es un problema sencillo de resolver. Se pueden plantear dos maneras de afrontar el problema. Se puede ver una representación gráfica de estos procedimientos en la siguiente figura (III.4).

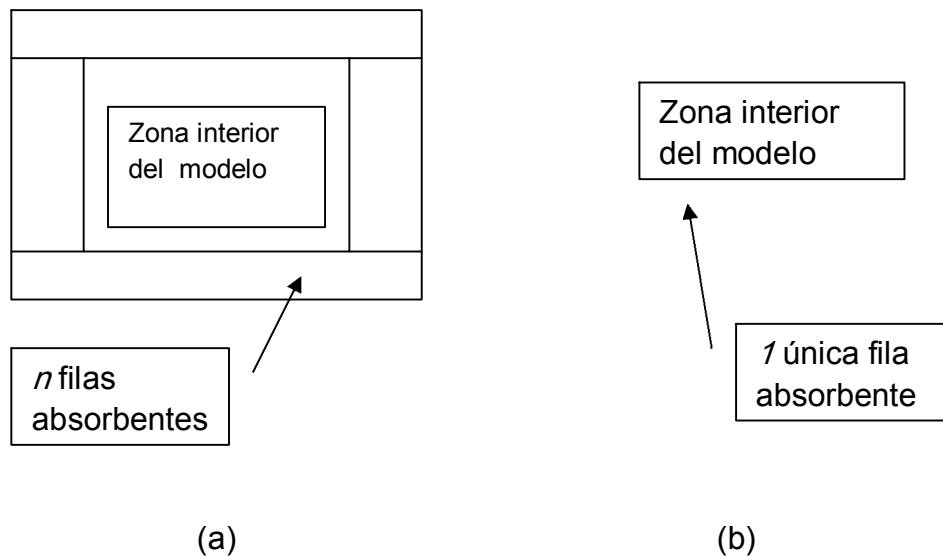


Figura III.4 A la izquierda bordes absorbentes de anchura n , a la derecha bordes absorbentes mediante un solo dato.

Otra forma de solucionar el problema es emplear una sola línea de puntos en los bordes. Estos puntos (ver figura (III.4. (b))) se actualizan en cada iteración, y actúan absorbiendo la onda que incide sobre ellos, partiendo de la hipótesis que no hay influencias entre nodos colaterales.

Esta segunda manera de trabajar tiene algunas ventajas. La más importante es sin duda, que no es necesario agrandar la matriz de forma excesiva. El agrandar el tamaño de las matrices, equivale a un mayor costo computacional. Y por tanto menor eficiencia del código computacional.

La metodología que se va a implementar se basa en un desarrollo que tiene en cuenta ciertos ángulos de incidencia, ver Higdon (1991).

De forma general, se puede plantear la representación de algunas de estas condiciones absorbentes de la siguiente manera, (ver Moczo *et al.*, 2004). Para el problema en dos dimensiones, el desplazamiento horizontal u a lo largo del borde superior absorbente se calcula como;

$$\begin{aligned}
u_{o,j}^{k+1} &= \gamma_{00} \cdot u_{0,j}^{k+1} + \gamma_{01} \cdot u_{i,j}^{k+1} + \gamma_{02} \cdot u_{2,j}^{k+1} \\
&+ \gamma_{10} \cdot u_{0,j}^k + \gamma_{11} \cdot u_{i,j}^k + \gamma_{12} \cdot u_{2,j}^k \\
&+ \gamma_{20} \cdot u_{0,j}^{k-1} + \gamma_{21} \cdot u_{i,j}^{k-1} + \gamma_{22} \cdot u_{2,j}^{k-1}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

donde la variable u representa el desplazamiento en cada caso, el superíndice indica el tiempo, y los subíndices indican la posición espacial en la rejilla, por otro lado γ_{ij} son una serie de parámetros que definiremos posteriormente (3.56).

Para evitar las reflexiones debidas a fronteras ficticias se utiliza el método de D. Kosloff. En el método de Kosloff, se busca que la solución al problema sea de la forma el cual es un parámetro, que determina que tan rápido se disipa la respuesta. No es difícil ver que la expresión anterior es solución a la ecuación diferencial.

$$\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma^2 u \tag{3.46}$$

que equivale a que, en la ecuación de onda, la derivada con respecto al tiempo se reemplace por un nuevo operador de la forma:

$$\frac{\tilde{\partial}}{\partial t} \leftarrow \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \quad \text{i.e.} \quad \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\tilde{\partial}^2 u}{\partial t^2} \tag{3.47}$$

si tomamos esta nueva definición de derivada, la ecuación anterior queda:

$$\frac{\tilde{\partial}}{\partial t} \dot{u} = \frac{\partial}{\partial t} \dot{u} + \gamma \dot{u} \tag{3.48}$$

En diferencias finitas:

$$\left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial t} \dot{u} \right)^k = \frac{\dot{u}^{k+1/2} - \dot{u}^{k-1/2}}{\Delta t} + \gamma \frac{\dot{u}^{k+1/2} + \dot{u}^{k-1/2}}{2} = \frac{Q^+ \dot{u}^{k+1/2} - Q^- \dot{u}^{k-1/2}}{\Delta t} \tag{3.49}$$

donde:

$$Q^+ = (1 + \Delta_t \gamma / 2) \quad (3.50)$$

$$Q^- = (1 - \Delta_t \gamma / 2)$$

en forma similar se pueden representar el resto de las derivadas. Es evidente que si $\gamma = 0$ no habrá ningún efecto de atenuación. Sustituyendo las nuevas definiciones de derivadas en las ecuaciones (3.10) a la (3.14) como anteriormente, se obtienen las ecuaciones finales:

$$u_{i,j}^{k+1/2} = \frac{1}{Q^+} \left(\frac{\Delta_t}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right)^k + \frac{\Delta_t}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \downarrow \right)^k + \frac{\Delta_t}{\rho} (f_x)^k + Q^- u^{k-1/2} \right) \quad (3.51)$$

$$v_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} = \frac{1}{Q^+} \left(\frac{\Delta_t}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \right)^k + \frac{\Delta_t}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \uparrow \right)^k + \frac{\Delta_t}{\rho} (f_y)^k + Q^- v^{k-1/2} \right) \quad (3.52)$$

$$(\sigma_{xx})_{i,j+1}^{k+1} = \frac{1}{Q^+} \left(\Delta_t \rho \alpha^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{k+1/2} + \Delta_t \rho (\alpha^2 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \downarrow \right)^{k+1/2} + \Delta_t \dot{m}_{xx} + Q^- \sigma_{xx}^{k-1} \right) \quad (3.53)$$

$$(\sigma_{yy})_{i,j+1}^{k+1} = \frac{1}{Q^+} \left(\Delta_t \rho \alpha^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^{k+1/2} + \Delta_t \rho (\alpha^2 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \downarrow \right)^{k+1/2} + \Delta_t \dot{m}_{yy} + Q^- \sigma_{yy}^{k-1} \right) \quad (3.54)$$

$$(\sigma_{xy})_{i+1,j}^{k+1} = \frac{1}{Q^+} \left(\Delta_t \rho \beta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \uparrow \right)^{k+1/2} + \Delta_t \rho \beta^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \leftarrow \right)^{k+1/2} + \Delta_t \dot{m}_{xy} + Q^- \sigma_{xy}^{k-1} \right) \quad (3.55)$$

Determinación del parámetro γ

Una función que puede utilizarse para determinar γ es la siguiente,

$$\gamma(x,y) = \left(\gamma_1^{x/a_x} + \gamma_1^{-(x-c_x)/a_x} + \gamma_1^{y/a_y} + \gamma_1^{-(y-c_y)/a_y} \right) \gamma_0 \quad (3.56)$$

Donde a_x y a_y son los márgenes de atenuación y con valor igual a 100.

3.7 Superficie Libre

Cuando se produce la incidencia de las ondas sobre la superficie libre (Luzón 2005), se llegan a producir efectos importantes, entre ellos se dice que cuando se presenta una onda P, se reflejará una onda P, pero también una onda S, y viceversa. Por lo que la existencia de la superficie libre originan las llamadas ondas superficiales. La condición de superficie libre viene impuesta por la nulidad de los esfuerzos normales a la superficie. y viene dada por la siguiente ecuación:

$$T_j(\bar{u}, \bar{n}) = \sigma_{ij} n_i = 0 \quad (3.57)$$

donde la superficie libre $z=0$, con \bar{n} vector unitario normal a la superficie.

Para problemas P-SV, se pueden considerar cuatro casos generales, que a continuación se mencionan.

a) Superficie libre horizontal:

$$\sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.58)$$

$$\sigma_{zx} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3.59)$$

b) Superficie libre vertical:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.60)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.61)$$

c) Esquinas externas:

$$\sigma_{xx} - \sigma_{xz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} - \mu \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.62)$$

$$-\sigma_{zz} + \sigma_{zx} = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.63)$$

d) Esquinas internas:

$$\sigma_{xx} - \sigma_{xz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} - \mu \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.64)$$

$$-\sigma_{zz} + \sigma_{zz} = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.65)$$

Las ecuaciones generales mencionadas (3.58 – 3.65), son las que gobiernan el comportamiento de la superficie libre. Por lo que estas son las ecuaciones que se deberán aproximar mediante esquemas de diferencias finitas.

Posteriormente se implementa este esquema a diferencias finitas en una topografía arbitraria, definiendo una matriz rellena de unos (1) ceros (0) y los contornos absorbentes (B), los unos representan donde existe material y los ceros donde hay ausencia de los mismos, como se muestra en la siguiente figura (III.5).

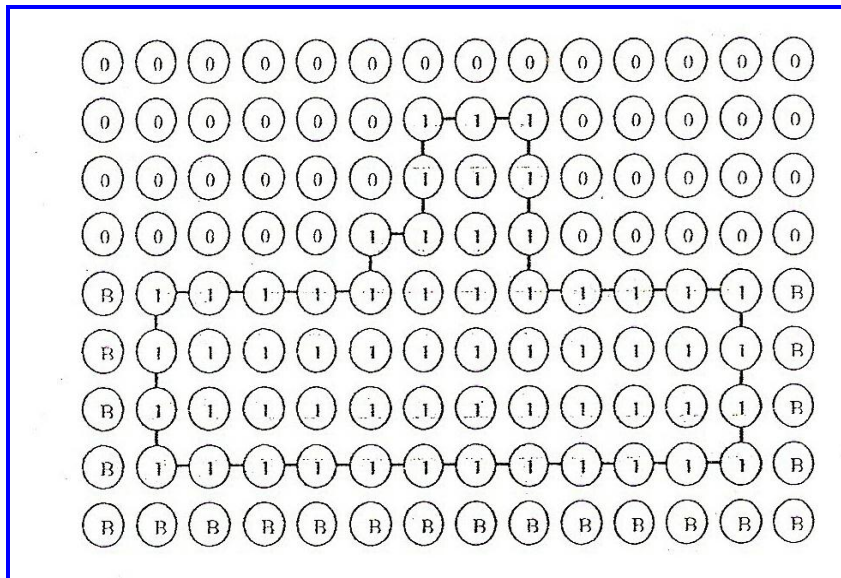


Figura III.5 Matriz de unos, ceros y puntos de las fronteras absorbentes la cual define el modelo, junto con los bordes absorbentes.

La condición de superficie libre será la misma para todos los casos, diferentes esquemas de diferencias finitas serán necesarios para asegurar que el método sea explícito. Por lo que se muestra esta clasificación, en la siguiente figura (III.6).

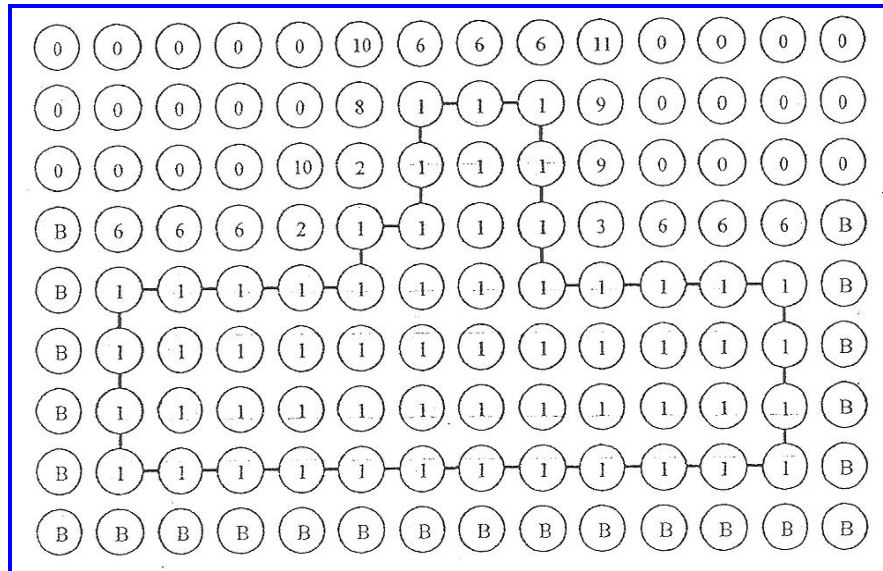


Figura III.6 Matriz en la que se observa una clasificación de los diferentes puntos que definen el modelo y son clasificados de acuerdo a la forma de la superficie libre.

Por lo tanto para tratar un esquema explícito es necesario seguir un orden de cálculo concreto. Primero se calculan los puntos interiores 1, debido a que los desplazamientos en estos puntos se aproximan con los esquemas generales de diferencias finitas. Una vez que se tiene estos puntos, se calcularán en el orden que indica la numeración mostrada en la Fig. III.6, por lo que primero será las esquinas interiores, 2, 3, 4 y 5, después de éstas, los puntos que pertenecen a superficies horizontales y verticales, 2, 3, 4 y 5, después las esquinas exteriores, 10, 11, 12 y 13. Es importante tener presente que los puntos que conforman la línea ficticia deben tener los mismos parámetros que los puntos del interior del modelo.

Cada uno de los puntos de la superficie libre debe satisfacer una ecuación particular. A continuación se presenta un ejemplo de cómo se procede para aproximar estas ecuaciones en diferencias finitas. En el caso de los puntos que pertenecen a una superficie libre horizontal con material debajo de ella, sería de la siguiente manera:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = 0 \quad (3.66)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.67)$$

$$\sigma_{zx} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3.68)$$

Desarrollando estas ecuaciones mediante esquemas de diferencias finitas centrados de segundo orden que:

$$\lambda_{\text{czz}} \left[\frac{u(i, j+1, k) - u(i, j-1, k)}{2\Delta x} \right] + (\lambda + 2\mu)_{\text{czz}} \left[\frac{w(i+1, j, k) - w(i-1, j, k)}{2\Delta z} \right] = 0 \quad (3.69)$$

$$\mu_{\text{czz}} \left[\frac{w(i, j+1, k) - w(i, j-1, k)}{2\Delta x} \right] + \mu_{\text{czz}} \left[\frac{u(i+1, j, k) - u(i, j, k)}{2\Delta z} \right] = 0 \quad (3.70)$$

y despejando los desplazamientos en el punto $(i-1, j, k)$, las ecuaciones finales para este tipo de puntos de la línea ficticia serán:

$$w(i-1, j, k) = w(i+1, j, k) + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x} \right) \left[\frac{\lambda_{\text{czz}}}{(\lambda + 2\mu)_{\text{czz}}} \right] [u(i, j+1, k) - u(i, j-1, k)] \quad (3.71)$$

$$u(i-1, j, k) = u(i+1, j, k) + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x} \right) \left(\frac{\mu_{\text{czz}}}{\mu_{\text{czz}}} \right) [w(i, j+1, k) - w(i, j-1, k)] \quad (3.72)$$

donde los parámetros de Lamé se definen como:

$$\lambda_{\text{czz}}(i, j) = \sqrt{\lambda(i, j+1) \cdot \lambda(i, j-1)} \quad (3.73)$$

$$(\lambda + 2\mu)_{\text{czz}}(i, j) = \sqrt{(\lambda + 2\mu)(i+1, j) \cdot (\lambda + 2\mu)(i-1, j)} \quad (3.74)$$

$$\mu_{\text{czz}}(i, j) = \sqrt{\mu(i, j+1) \cdot \mu(i, j-1)} \quad (3.75)$$

$$\mu_{\text{czz}}(i, j) = \sqrt{\mu(i+1, j) - \mu(i-1, j)} \quad (3.76)$$

En la figura siguiente se presenta el esquema para las ecuaciones (3.70) y (3.72), dependiendo del desplazamiento que se desee calcular. En donde se observa en la figura para calcular un punto ⑥ de la línea ficticia son necesarios tres puntos internos

①, dos de los cuales son de superficie libre.

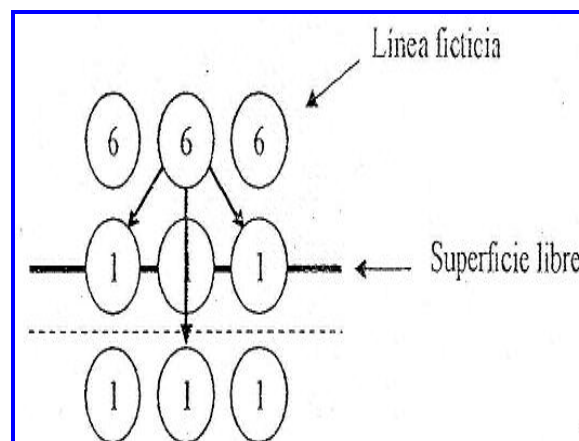


Figura III.7 El punto ⑥ de la línea ficticia requiere para ser actualizado el desplazamiento en los tres puntos ① indicados mediante un color grisáceo.

Para este caso podemos obtener la expresión para los desplazamientos de los diferentes tipos de puntos que forman la línea ficticia. Pero una vez hecho este paso, nos encontramos con un problema. Analizando el proceso nos damos cuenta de que existen algunos casos en los que para actualizar el desplazamiento en un punto de la línea ficticia se recurre a otros puntos que aun no han sido calculados, y por tanto el esquema se vuelve implícito. Y esto no interesa, pues lo que se requiere desarrollar un esquema explícito, para evitar la resolución de sistemas de ecuaciones. En la figura siguiente se pueden ver dos casos: el caso (a) hace referencia a un punto 6 de la línea ficticia que esta situado junto a una esquina externa 10; en este caso vemos que si empleamos el esquema que se ha desarrollado anteriormente para calcular el desplazamiento en este punto, es necesario el desplazamiento en un punto 8 que aún no ha sido calculado. El caso (b) presenta el esquema para calcular el desplazamiento en los puntos adyacentes 6 y 8 los cuales han sido calculados con este esquema explícito.

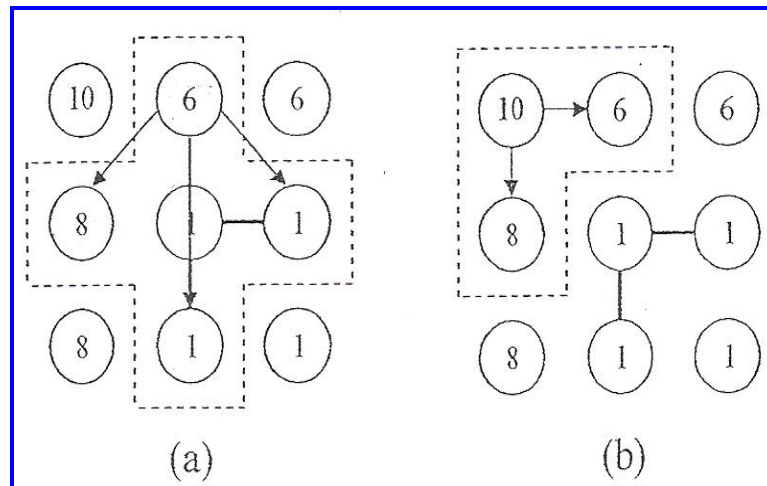


Figura III.8 Esquema para calcular el desplazamiento de un punto 6 que se sitúa adyacente a una esquina externa. En este caso se comprueba que aún no se ha actualizado el punto [8]. (b) Esquema para actualizar un punto 10 correspondiente a una esquina externa.

Los esquemas para calcular los desplazamientos en la esquina exterior 10, necesita los puntos adyacentes 6 y 8, tal y como se mencionan:

$$\begin{aligned}
 u(i, j, k) = & \left[\frac{\mu(i, j)}{2(\lambda + 2\mu)(i, j)} \right] \{u(i + 1, j, k) + u(i, j + 1, k) - w(i + 1, j, k) \\
 & + w(i, j + 1, k) + \left[\frac{\lambda(i, j) + \mu(i, j)}{(\lambda + 2\mu)(i, j)} \right] u(i, j + 1, k) \}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
 w(i, j, k) = & \left[\frac{\mu(i, j)}{2(\lambda + 2\mu)(i, j)} \right] \{w(i + 1, j, k) - w(i, j + 1, k) + u(i + 1, j, k) \\
 & + u(i, j + 1, k) + \left[\frac{\lambda(i, j) + \mu(i, j)}{(\lambda + 2\mu)(i, j)} \right] w(i + 1, j, k) \}
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

y para los puntos (6) y los dos puntos (7) de la superficie libre horizontal adyacentes a las esquinas exteriores. Empleando esquemas de diferentes finitas hacia adelante para aproximar la derivada espacial en x , las ecuaciones para un punto (6) vista en la figura anterior son:

$$w(i-1, j, k) = w(i+1, j, k) + \left(\frac{2\Delta z}{12\Delta x}\right) \left[\frac{\lambda_{cxz}}{(\lambda + 2\mu)_{cz}}\right] [-u(i, j+2, k) + 4u(i, j+1, k) - 3u(i, j, k)] \quad (3.78)$$

$$u(i-1, j, k) = u(i+1, j, k) + \left(\frac{2\Delta z}{12\Delta x}\right) \left(\frac{\mu_{cxz}}{\mu_{cz}}\right) [-w(i, j+2, k) + 4w(i, j+1, k) - 3w(i, j, k)] \quad (3.79)$$

Por lo tanto permite actualizar los desplazamientos en este punto (6) de la línea ficticia. Una vez que tengamos estos puntos se puede seguir con el orden previamente establecido para el resto de puntos de una manera totalmente explícita. Podemos ver en la siguiente figura, la primera de estas soluciones esquemáticamente:

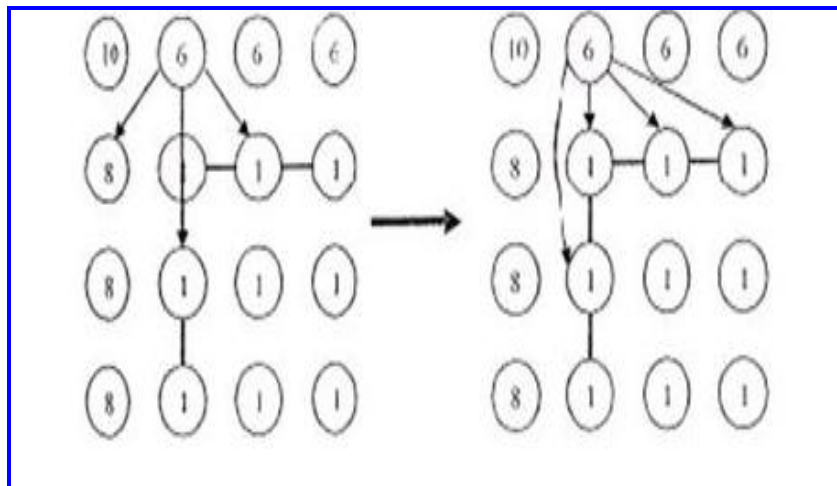


Figura III.9 Posible solución al problema implícito, mediante la utilización de un esquema hacia adelante para aproximar la derivada en x de la ecuación correspondiente

Otra manera de resolver este problema es realizar una reclasificación de algunos puntos de la malla, por lo que la modificación se puede observar en la figura, la esquina exterior (10) se convierte en un punto externo (0). Los puntos conflictivos (6) y (8), pasan a ser esquinas exteriores (10), y un punto interno (1) lo transformamos en una esquina interior (2). Si nos fijamos en la nueva clasificación de la parte derecha de la figura, podemos comprobar sin mucho esfuerzo que cuando seguimos el orden establecido y los esquemas inicialmente planteados obtenemos un método totalmente explícito.

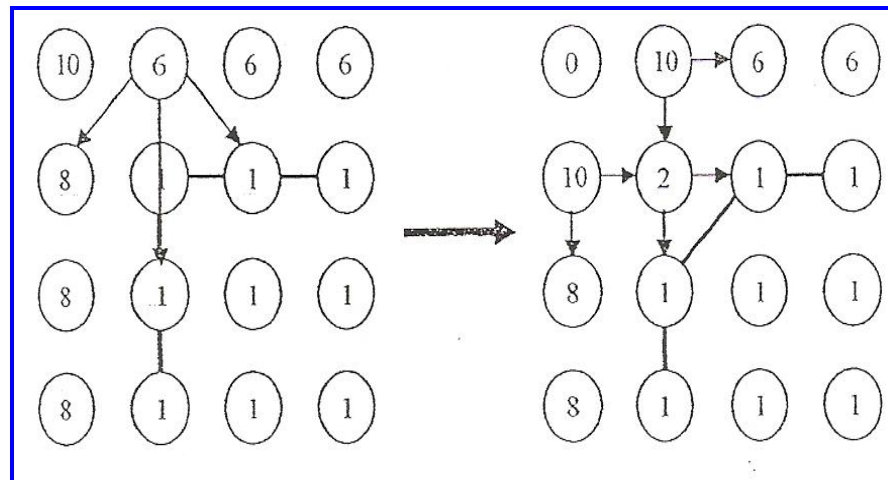


Figura III.10 Otra solución alternativa al problema implícito. En este caso se procede a realizar una modificación de la clasificación de los puntos de la malla.

En este capítulo se presentó la formulación del fenómeno de propagación de ondas mediante los esquemas del Método de diferencias finitas, el cual permitió la aproximación de las derivadas del análisis numérico para la resolución de las ecuaciones diferenciales. Se introdujo la malla que se utilizó para observar la discretización del tiempo y en el estudio de las derivadas espaciales fue necesario la utilización de potenciales.

En el siguiente capítulo serán estudiados 4 casos para observar el comportamiento que se da mediante el uso de la técnica de las diferencias finitas, aplicado al fenómeno de la propagación de ondas.

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARTICULARES DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS ELÁSTICOS

Se presenta los resultados obtenidos y comentarios del fenómeno de propagación de ondas en un medio elástico estratificado y agrietado.

4.1 La Fuente

En el capítulo 3, se plantearon las herramientas necesarias para poder aproximar los desplazamientos en cualquier punto de la malla (Fig. III.1), que se ha usado para discretizar nuestro modelo. Pero ahora la interrogante será ¿Y la onda?. De alguna forma se tendrá que introducir la onda en el modelo. Aboudi, J. (1971) presenta un tratamiento numérico de las fuerzas internas a fuentes sísmicas en medios elásticos.

El caso más sencillo que se puede plantear sería el de una sola fuerza. Sin embargo es importante la dirección y el sentido de esta fuerza, ya que de ello dependerá el tipo de onda que se va a generar. En el problema *P-SV* (ver 3.4) podemos hablar de una fuerza puntual horizontal o una fuerza puntual vertical, en el mismo plano donde se produce el movimiento (ver Fig. IV.1 y IV.2).

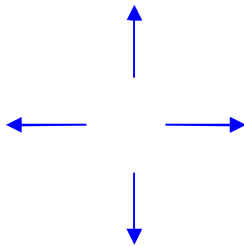


Fig. IV.1 Distribución de fuerzas para obtener el patrón de radiación correspondiente a una explosión que genera onda P.

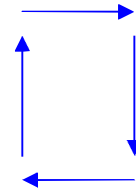


Fig. IV.2 Distribución de fuerzas para obtener el patrón de radiación correspondiente a una explosión que genera onda S.

Las figuras anteriores (IV.1 y IV.2) son las distribuciones de fuerzas para representar la fuente, a continuación, se verá uno de los pulsos que suele emplearse en el fenómeno de propagación de ondas, las fuerzas podrán tener una dependencia temporal que se expresara como pulsos.

4.2 Pulso de Ricker

Cuando se calcula la respuesta dinámica de sistemas, se utilizan como excitación, funciones analíticas que dependen del tiempo, generalmente dichas funciones son de forma sencilla y requieren de pocos parámetros para su graficación. En particular, el *Pulso de Ricker* es de utilidad pues permite un control directo sobre la eficiencia del muestreo y además, se puede identificar de manera sencilla el pulso apropiado para excitar un modelo con énfasis en una determinada frecuencia.

Analíticamente el pulso de Ricker (ver Wikipedia) se define de la forma:

$$r(t) = (a^2 - 1/2) e^{-a^2} \quad (3.69)$$

donde $a = \pi(t - t_s) / t_p$, $T_p =$ *periodo característico* del pulso y t_s define el centro del pulso. La duración de la parte central del pulso será : $\sqrt{6} t_p / \pi$

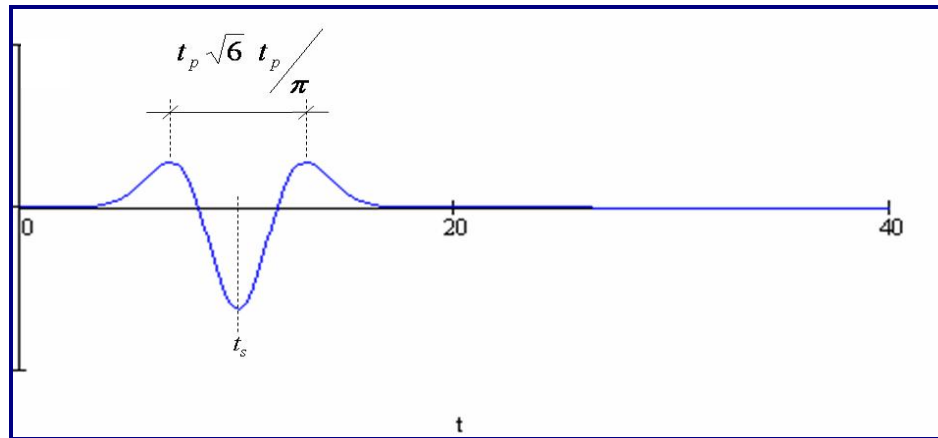


Figura IV.3 Pulso de Ricker en el dominio del tiempo.

En el dominio de la frecuencia, el pulso de Ricker se expresa mediante:

$$R(\omega) = -\frac{T_p}{\sqrt{\pi}} b^2 e^{-b^2} e^{-i\omega t_s} \quad (3.70)$$

donde $b = \omega / \omega_p$, $\omega_p = 2\pi f_p = 2\pi / T_p$; f_p es la frecuencia de energía máxima conocida como *frecuencia característica*. Para que la respuesta de un sistema sea significativa, es necesario que la función de transferencia del modelo y el pulso que lo excita presenten energía en el mismo intervalo de frecuencias.

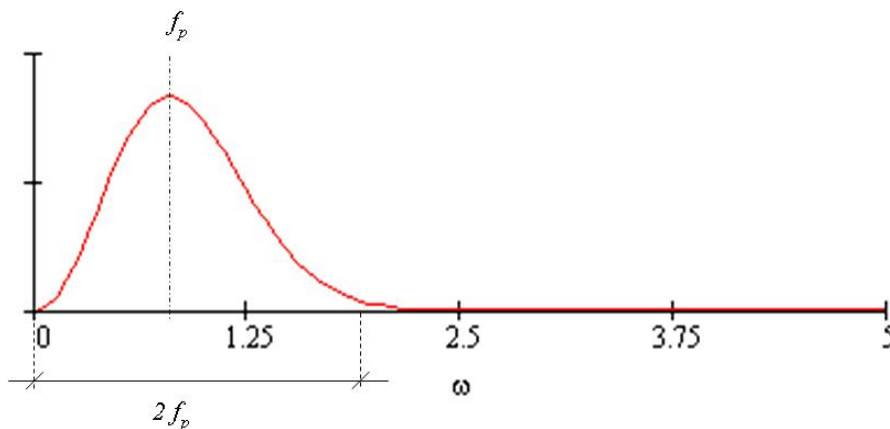


Figura IV.4 Pulso de Ricker en el dominio de la frecuencia, el pulso tiene energía significativa hasta dos veces l

4.3 Modelo del Problema

El problema en estudio consta de una representación de tres estratos (Fig. IV.5), compuesta por 3 zonas, 1) Estrato sólido, 2) Estrato líquido y 3) Estrato sólido, todas ellas inmiscuidas en un semiespacio elástico. Cada capa tiene sus propias características dependiendo del material en estudio (altura, densidad, etc.).

Dentro de la composición estratificada, específicamente en la parte líquida, es donde se tendrá la fuente del disparo (Pulso de Ricker), el cual hará posible la propagación de ondas en este medio con y sin discontinuidades (grieta).

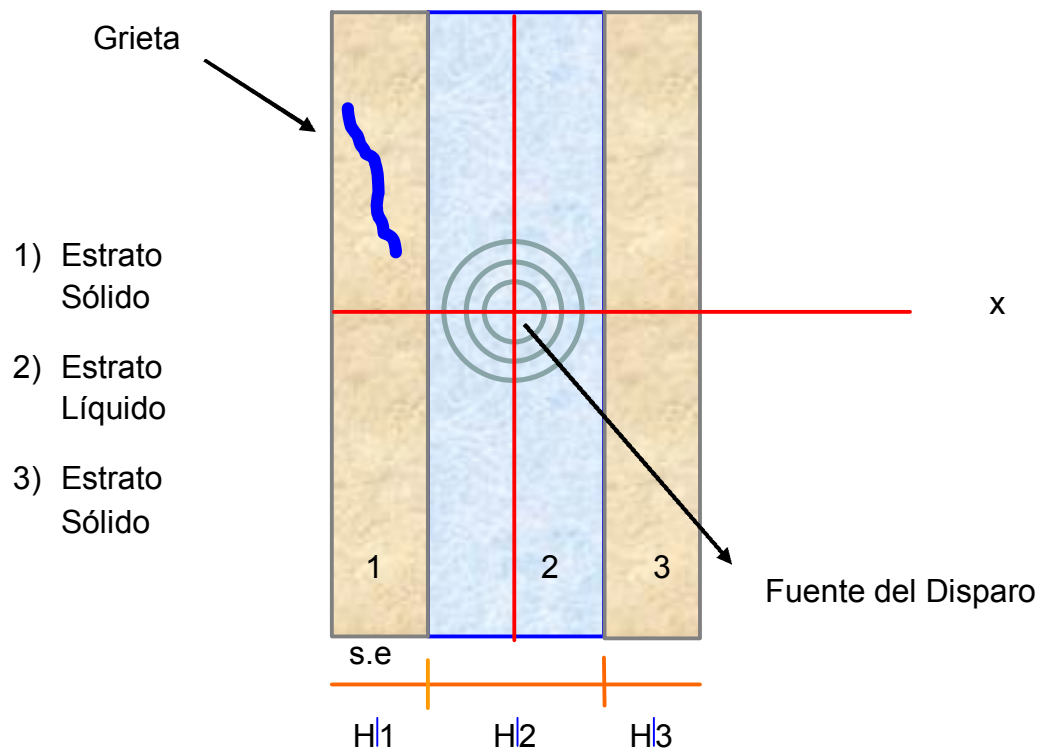


Figura IV.5 Sistema de 3 estratos y el semiespacio.

4.4 Resultados de la propagación de ondas en un medio elástico agrietado (estrato sólido – estrato líquido).

Para la modelación de la propagación de ondas en un medio estratificado compuesto por (estrato sólido – estrato líquido – estrato sólido), se utilizó el programa de computo hecho en el lenguaje FORTRAN denominado “ elastic_cyl”, realizado por el personal de modelación sísmica de la UNAM, encabezado por el Dr. Sanchez-Sesma y a su vez modificado por el Dr. Esteban Flores Méndez y el autor de este trabajo, a continuación se ilustra la parte inicial del programa.

```

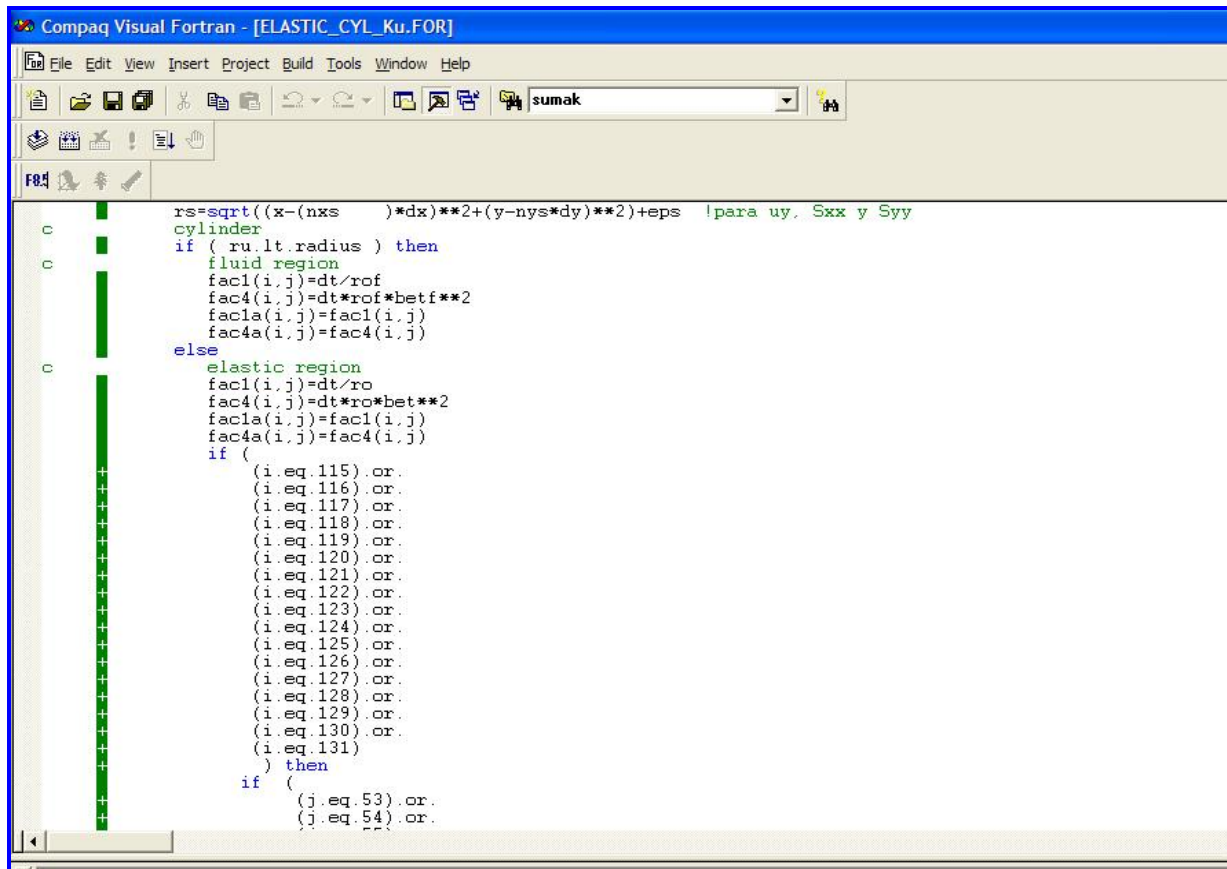
c
c   program elastic_cyl
c
c   metodo pseudoespectral con formulacion velocidad-esfuerzo
c   se agregaron fronteras absorbentes de tipo kosloff
c
c   Fuente: linea dilatacional en un espacio elastico
c   variacion triangular en tiempo con momento maximo
c   dado por Mo = factor * pi * ro * alf**2
c   [F*L]/[L]=[L**2]*[F/L**2]
c
c   por F J Sanchez-Sesma, R Madariaga
c   Modificado para su uso por Esteban Flores Méndez y Josué David Cruz Medina (2009)
c   fronteras absorbentes j j Perez Gavilan (nov 2006)
c   se quitó la normalización para usar unidades (dic 2006)
c   se asume que la frontera del liquido coincide con la malla
c   se el promedio del au en un punto solo se calcula si todos
c   los vecinos son de material sólido, de lo contrario se toma = 0
c
parameter(ndimx=512)
parameter(ndimy=512)
dimension u(ndimx,ndimy), v(ndimx,ndimy)           !VELS
dimension uint(ndimx,ndimy), vint(ndimx,ndimy)    !DESPLS
dimension dxu(ndimx,ndimy), dxv(ndimx,ndimy)     !DERIVADAS
dimension dyu(ndimx,ndimy), dyv(ndimx,ndimy)     !DERIVADAS
dimension sxx(ndimx,ndimy), sxy(ndimx,ndimy)     !ESFUERZOS
dimension syy(ndimx,ndimy), srr(ndimx,ndimy)     !ESFUERZOS
dimension sxxint(ndimx,ndimy),sxyint(ndimx,ndimy)
dimension syyint(ndimx,ndimy)                    !ESFS INTEG
dimension dxsxx(ndimx,ndimy), dxsxy(ndimx,ndimy) !DERIVADAS
dimension dysyy(ndimx,ndimy), dysxy(ndimx,ndimy) !DERIVADAS
dimension facly(ndimx,ndimy),faclay(ndimx,ndimy)
dimension fac1(ndimx,ndimy),fac2(ndimx,ndimy)
dimension fac3(ndimx,ndimy),fac4(ndimx,ndimy)
dimension fac1a(ndimx,ndimy),fac2a(ndimx,ndimy)
dimension fac3a(ndimx,ndimy),fac4a(ndimx,ndimy)

```

Figura IV.6 Programa elastic_cyl

El programa antes descrito sirvió para el cálculo de presiones y desplazamientos que se dan en el estrato con la configuración (sólido-líquido), en este trabajo la matriz de presiones que calculó, fue la que se tomó en cuenta para realizar la modelación mediante el programa Compaq Visual Fortran V6.6.

A continuación muestro la parte del programa en el cual se encuentra el arreglo computacional, esto me permitió realizar la propagación del fenómeno con una grieta, la cual se verá más adelante en los ejemplos propuestos.



```

Compaq Visual Fortran - [ELASTIC_CYL_Ku.FOR]
File Edit View Insert Project Build Tools Window Help
sumak
rs=sqrt((x-(nxs) )*dx)**2+(y-nys*dy)**2)+eps !para uy. Sxx y Syy
cylinder
if ( ru.lt.radius ) then
  fluid region
  fac1(i,j)=dt/rof
  fac4(i,j)=dt*rof*betf**2
  fac1a(i,j)=fac1(i,j)
  fac4a(i,j)=fac4(i,j)
else
  elastic region
  fac1(i,j)=dt/ro
  fac4(i,j)=dt*ro*bet**2
  fac1a(i,j)=fac1(i,j)
  fac4a(i,j)=fac4(i,j)
  if (
    (i.eq.115).or.
    (i.eq.116).or.
    (i.eq.117).or.
    (i.eq.118).or.
    (i.eq.119).or.
    (i.eq.120).or.
    (i.eq.121).or.
    (i.eq.122).or.
    (i.eq.123).or.
    (i.eq.124).or.
    (i.eq.125).or.
    (i.eq.126).or.
    (i.eq.127).or.
    (i.eq.128).or.
    (i.eq.129).or.
    (i.eq.130).or.
    (i.eq.131)
  ) then
    if (
      (j.eq.53).or.
      (j.eq.54).or.

```

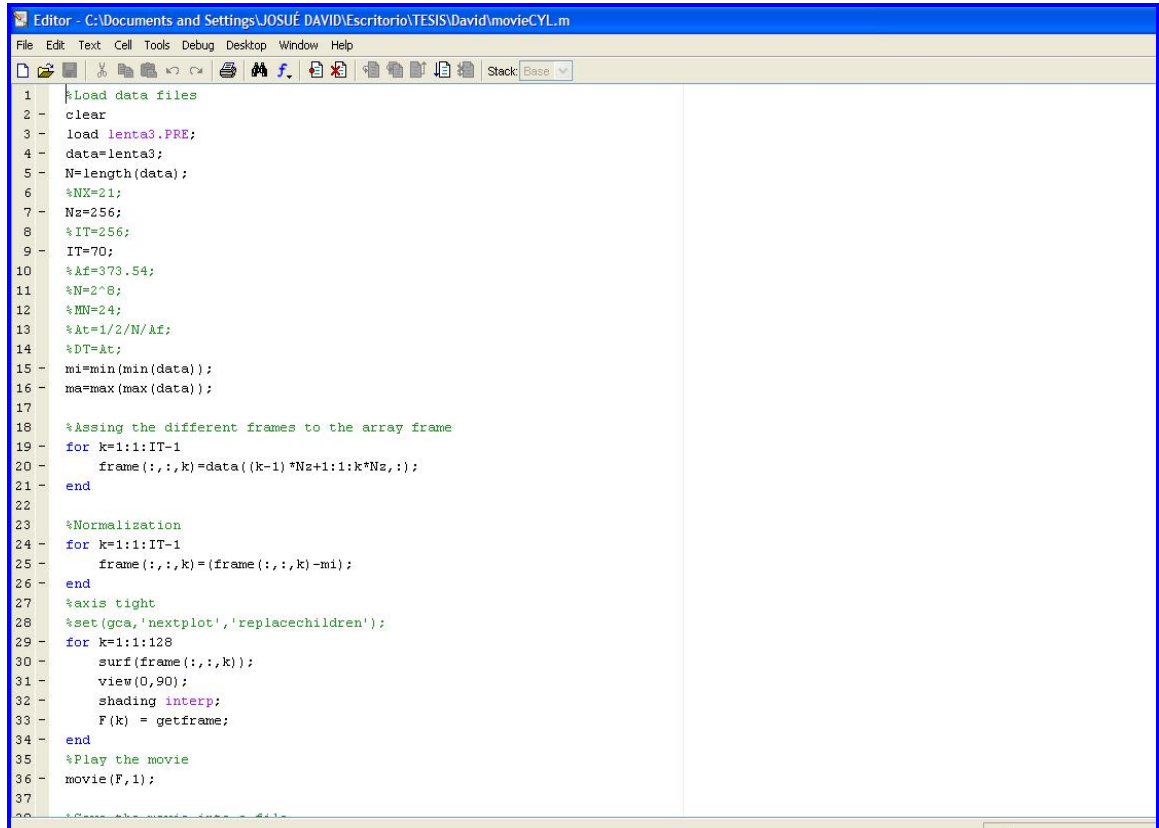
Figura IV.7 Programa elastic_cyl. Grieta

En el programa Compaq Visual Fortran V6.6 se implementan las ecuaciones que establecen el comportamiento de la propagación de ondas en los medios que se consideran. En los resultados de la propagación se pueden identificar las ondas P y las ondas S, así como las ondas de interfase (ver anexo 3).

Las ondas de interfase para fronteras entre composiciones de sólidos y líquidos también son llamadas ondas de Scholte, y resultan de la superposición de múltiples modos de vibración de los medios, cuando se tiene una geometría cilíndrica se denominan ondas de Stoneley (ver anexo 3).

Será necesario mediante otra herramienta computacional que en este trabajo se trató del software denominado Matlab 7, observar mediante graficas el problema del fenómeno de la propagación de ondas.

Para esto fue necesario elaborar el programa llamado “MovieCyl” (Fig. IV.8). El archivo contendrá la matriz de presiones calculada en Fortran y los datos de entrada de cada ejercicio a resolver, el pulso de Ricker también está analizado en esta parte. El archivo se muestra a continuación:



```

1 |Load data files
2 - clear
3 - load lenta3.PRE;
4 - data=lenta3;
5 - N=length(data);
6 - %NX=21;
7 - Nz=256;
8 - %IT=256;
9 - IT=70;
10 - %df=373.54;
11 - %N=2^8;
12 - %MN=24;
13 - %dt=1/2/N/df;
14 - %DT=dt;
15 - mi=min(min(data));
16 - ma=max(max(data));
17
18 %Assing the different frames to the array frame
19 - for k=1:1:IT-1
20 -     frame(:,k)=data((k-1)*Nz+1:k*Nz,:);
21 - end
22
23 %Normalization
24 - for k=1:1:IT-1
25 -     frame(:,k)=(frame(:,k)-mi);
26 - end
27 %axis tight
28 %set(gca,'nextplot','replacechildren');
29 - for k=1:1:128
30 -     surf(frame(:,k));
31 -     view(0,90);
32 -     shading interp;
33 -     F(k) = getframe;
34 - end
35 %Play the movie
36 - movie(F,1);
37

```

Figura IV.8 Programa de modelación de ondas en MATLAB.

4.5 ESTABILIDAD DEL PROGRAMA Y RESULTADOS.

En el programa “elastic_cyl” hecho mediante el lenguaje Compaq Visual Fortran V6.6, fue incluido la prueba de estabilidad para tener certidumbre que la propagación de ondas cumplen perfectamente, para evitar fenómenos como la difusión numérica, ya que el método será estable cuando una perturbación en los valores iniciales de los problemas planteados permanezcan estables a lo largo de toda la evolución.

La expresión de difusión es:

$$|E| < 1.0 \quad (3.71)$$

Entonces (3.71) nos permite asegurar que el método va a converger a la solución correcta de una forma estable. Con la ayuda de la formulación Pseudo-espectral (ver cap. 2) nos permite lograr con mayor eficiencia que el problema de la difusión numérica sea nulo, ya que el empleo de esta formulación proporciona derivadas en términos del espacio y tiempo, por lo que las ondas del DWN (number wave discrete) no incurran en el fenómeno de la difusión numérica.

Para encontrar una relación entre los distintos parámetros característicos tanto del modelo como de la malla, Courant (ver anexo 3), propuso la siguiente expresión de estabilidad y convergencia hacia la solución correcta:

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta x / u} \leq \frac{1}{2} \quad (3.72)$$

En donde:

- C es el número de Courant.
- Δt es el intervalo de tiempo.
- Δx es el intervalo de espacio.
- u es la velocidad de la onda (α y νf).

A continuación se calcula este parámetro para los ejemplos 2, 3, 4, en el caso del ejemplo 1 no es necesario ya que no es analizado mediante el método de diferencias finitas y no tiene que convergir a un método específico.

1) Para el ejemplo 2 y 4:

$$\Delta t = .000001$$

$$dx = .01$$

$$\alpha = 3000$$

$$\nu f = 1500$$

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta x / \alpha}$$

$$C = \frac{.000001}{.01 / 3000}$$

$$C = 0.33$$

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta x / \nu f}$$

$$C = \frac{.000001}{.01 / 1500}$$

$$C = 0.15$$

2) Para el ejemplo 3:

$$\Delta t = .000001$$

$$dx = .01$$

$$\alpha = 4000$$

$$vf = 1500$$

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta x / \alpha}$$

$$C = \frac{.000001}{.01 / 4000}$$

$$C = 0.4$$

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta x / vf}$$

$$C = \frac{.000001}{.01 / 1500}$$

$$C = 0.15$$

A continuación se muestra la grafica realizada en Matlab 7, para observar el comportamiento del método de diferencias finitas y el número discreto de onda para revisar que no exista difusión numérica.

La línea roja representa el método de diferencias finitas y la de color negra es el número discreto de onda (DWN), se observa que el método de diferencias finitas nos proporciona un rango de inestabilidad en el valor de la frecuencia más alta, sin embargo al emplear la transformación a la formulación de Fourier nos dará la certeza que con el valor del número discreto de onda en su frecuencia más alta que el método es estable, ya que no sobrepasa los valores (ver 3.71) que establece la difusión numérica.

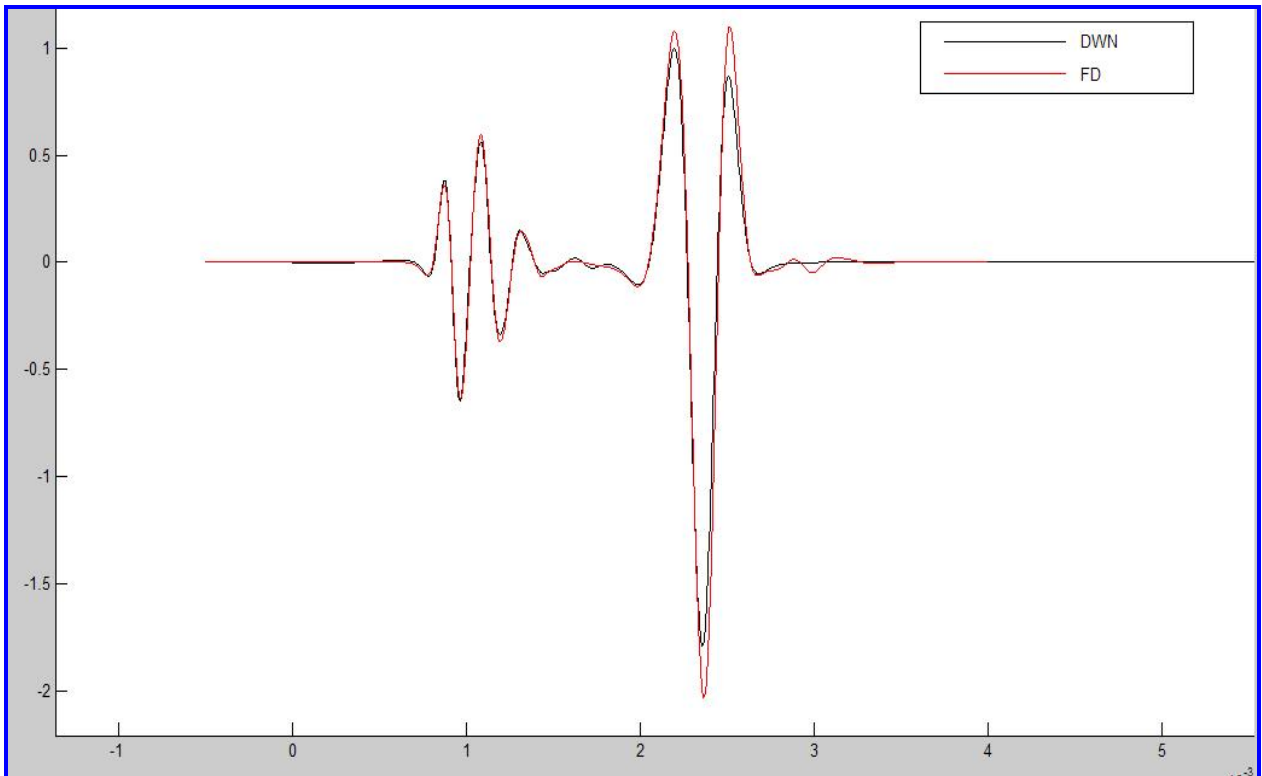


Figura IV.9 Gráfica del valor de la difusión numérica.

Teniendo el programa de modelación y los datos necesarios, se presentan 4 ejemplos para este trabajo, las configuraciones y los modelos de propagación se muestran en cada ejemplo.

4.6 PRUEBAS Y RESULTADOS DE LOS EJEMPLOS PROPUESTOS.

* **Ejemplo 1(Formación Primaria):** en la figura siguiente representa la propagación de una onda en un instante de tiempo 20, con el rectángulo se indica lo que se conoce como el centro del disparo y se puede observar la presencia de la interfase entre el sólido y el fluido (líneas inclinadas). Se anexa una vista en 3D para una mejor visión del fenómeno, y en la cual se puede observar también los bordes o fronteras del contorno con los que la señal va rebotando.

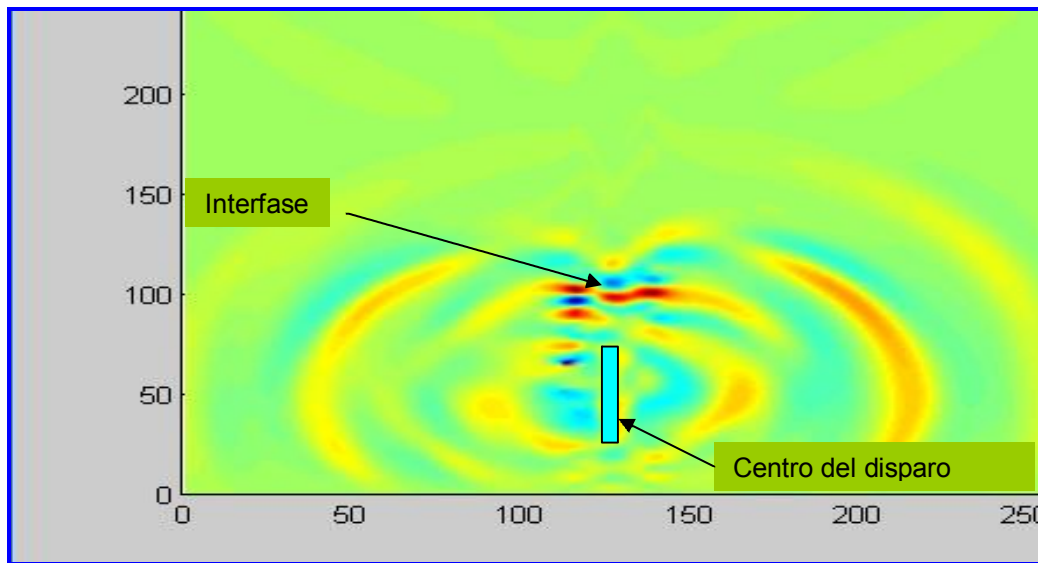


Figura IV.10 Propagación de una onda

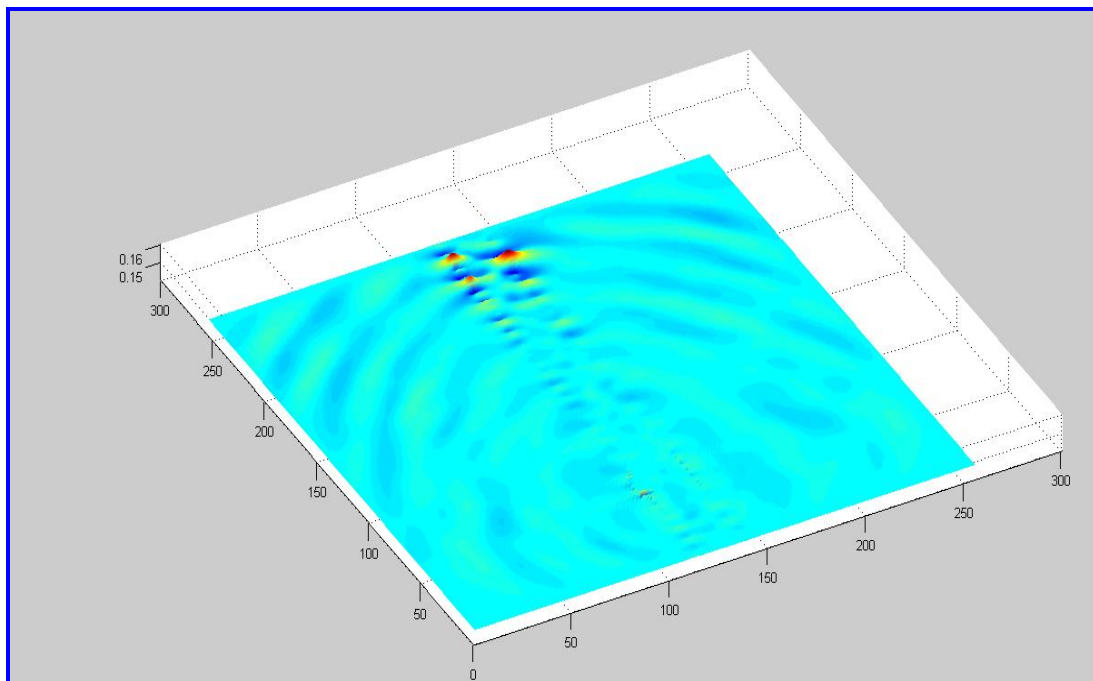


Figura IV.11 Onda y bordes de contorno

En la figura siguiente representa la propagación de una onda en el instante de tiempo final, se puede observar la configuración de las ondas de interfase (ondas de Stoneley).

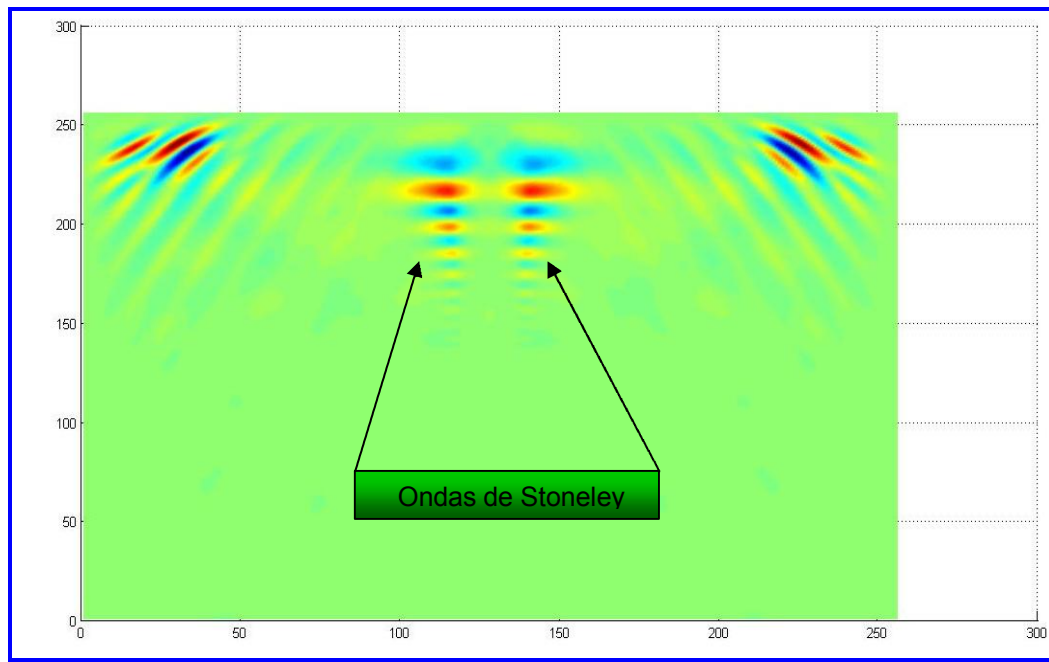


Figura IV.12 Propagación en el último incremento de tiempo

En la siguiente se muestra la propagación en el último instante de tiempo, observándolo a 60° de inclinación, se notan las ondas de interfase (círculos en azul y rojo).

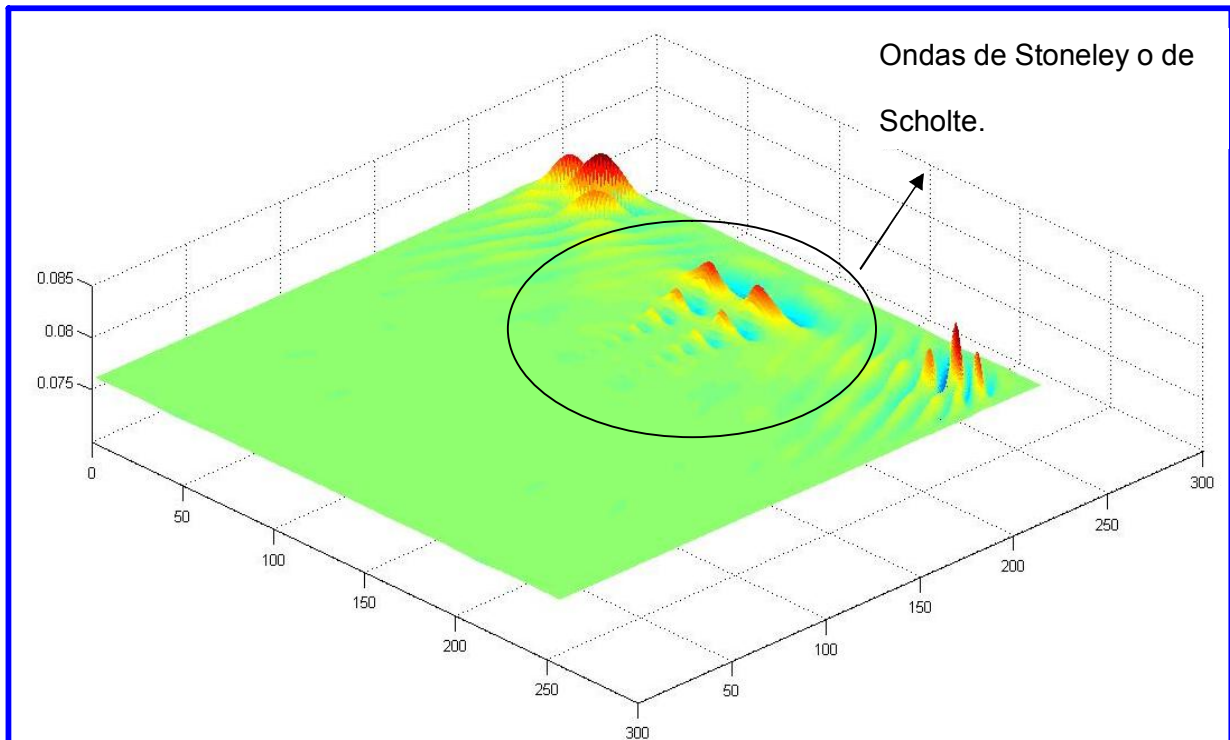


Figura IV.13. Ondas de Stoneley – Scholte.

Los siguientes 3 ejemplos de propagación a partir del programa Elastic_Cyl, en el cual se propaga una onda en un semiespacio elástico infinito y agrietado.

El ejemplo 2 (Formación agrietada) se toman en cuenta las velocidades típicas de propagación para las ondas P y S.

El ejemplo 3 (Formación rápida-agrietada) la velocidad de la onda P es mayor, y

El ejemplo 4 (Formación lenta-agrietada) el valor de la densidad es modificada en comparación al ejemplo 2.

Los datos de los ejemplos están dados a continuación:

* **Ejemplo 2 (Formación agrietada).** Se basa en características normales de propagación de las ondas, es decir las velocidades dadas tanto para las ondas P y S son las que suelen ser captadas por los receptores.

```

Archivo Edición Formato Ver Ayuda
nt      dt      alf      bet      betf     ro      vf      rof      dx      ts      tp      factor
1750    0.1111e-5  3000    1200    0.00    2.5    1500    1.0    0.01    0.0001  0.0001  1.0
nx      nx1     nxs     nx2     nr      radius  dy
256     1      128    256     8       0.1     0.0
ny      ny1     nys     ny2
256     1      50     256
estaciones (nr)
128     100
128     115
128     130
128     145
128     160
128     175
128     190
128     205
nshot(1 a 60)
1 25 1750

```

Figura IV.14 Archivo de datos Ej. 2.

Donde:

alf: Velocidad de ondas P en el sólido.

bet: Velocidad de ondas S en el sólido.

betf: Velocidad de ondas en el líquido.

ro: Densidad del sólido.

vf: Velocidad de onda P en el líquido.

rof: Densidad del fluido.

dx: Ancho de malla.

nt: Número de tiempo.

Δt : Número de intervalos.

nxs(1): Punto de disparo de la fuente (en x).

nxy(2): Punto de disparo de la fuente (en y).

nr: Número de registros.

radius: Longitud de la apertura (radio).

El programa se ejecuta, el tiempo de cálculo es alrededor de 35 min. Los resultados de las señales en cada punto se escriben y se aloja en una matriz. La matriz arrojada en FORTRAN se lee con MATLAB para que pueda observarse la propagación del fenómeno. En la figura IV.14 se muestra la propagación en un medio **estratificado agrietado**:

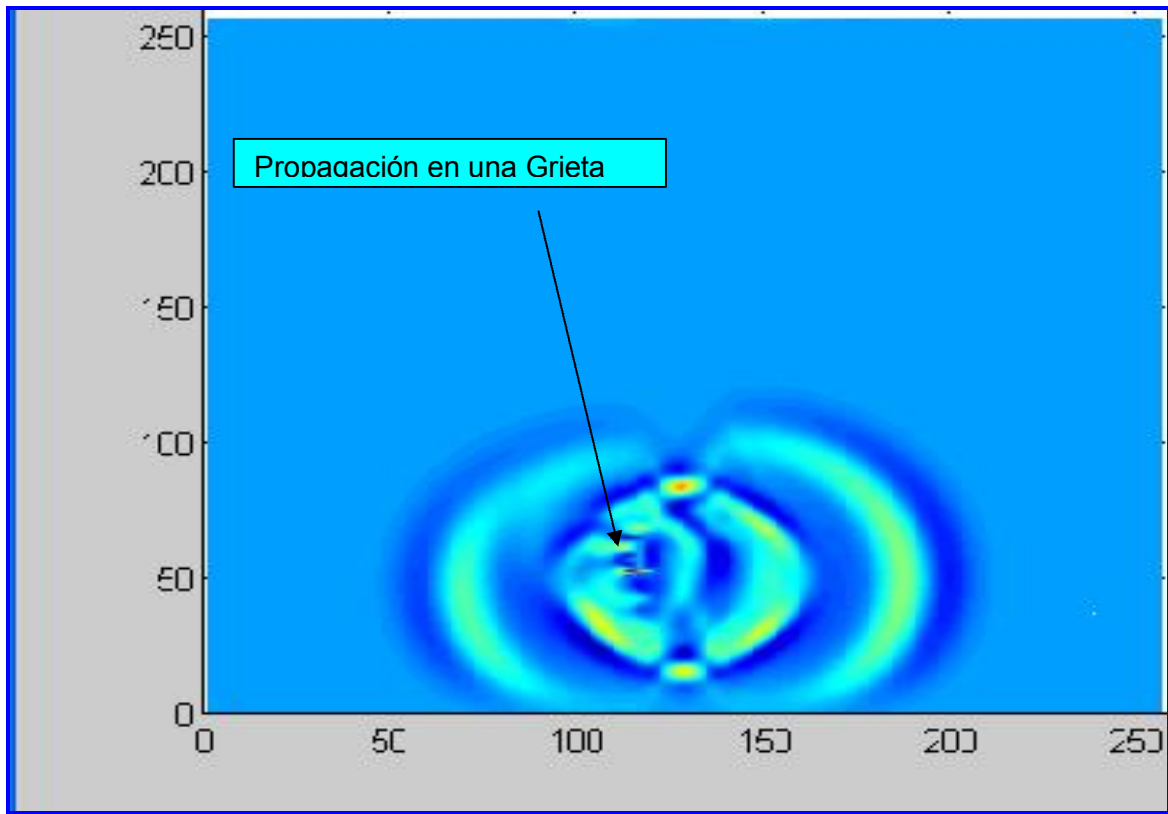


Figura IV.15 Esquema de propagación en una grieta.

En las siguientes figuras (IV.16 – IV.19) muestran 4 instantes de tiempo distintos de la propagación, las ondas se encuentran en un lapso de tiempo ($T_1 - T_9$), se observa la configuración de las ondas P y S, además de la discontinuidad ocasionada por la presencia de una grieta, las ondas rebotan con la discontinuidad y se generan nuevas ondas.

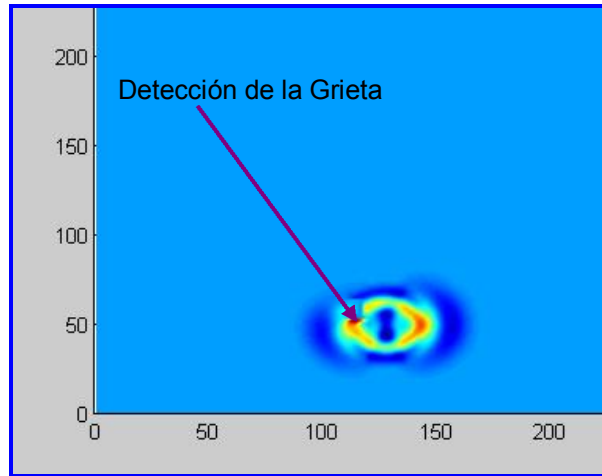


Figura IV.16 Esquema de propagación en una grieta con T20.

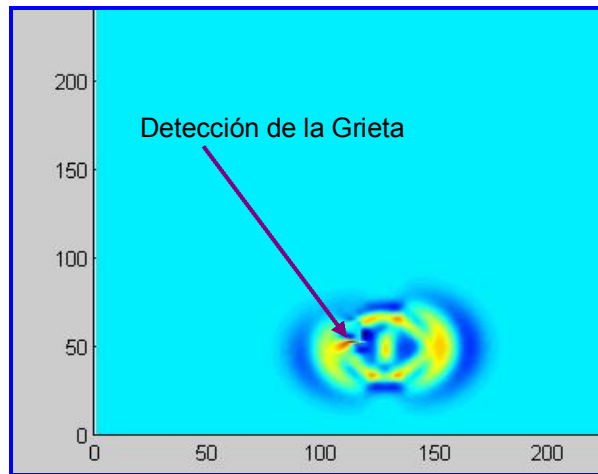


Figura IV.17 Esquema de propagación en una grieta con T40.

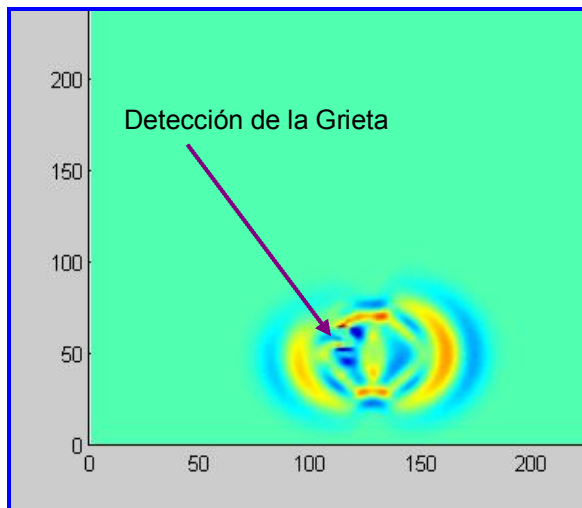


Figura IV.18 Esquema de propagación en una grieta con T60.

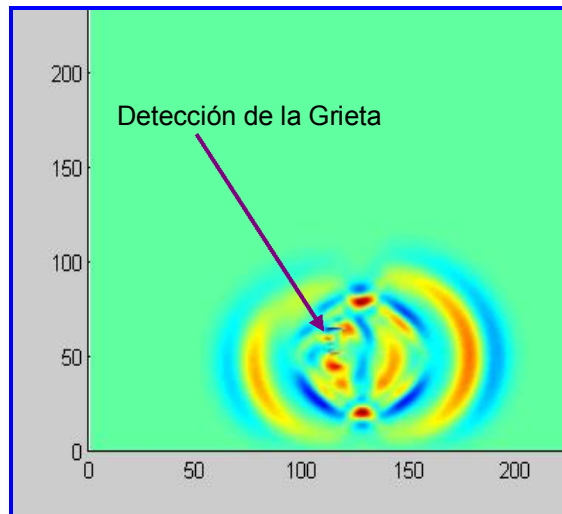


Figura IV.19 Esquema de propagación en una grieta con T90.

Las siguientes figuras tratan del mismo ejemplo, con las mismas características, pero **no se trata de un medio agrietado**. Se analiza como un medio estratificado en el mismo semiespacio elástico.

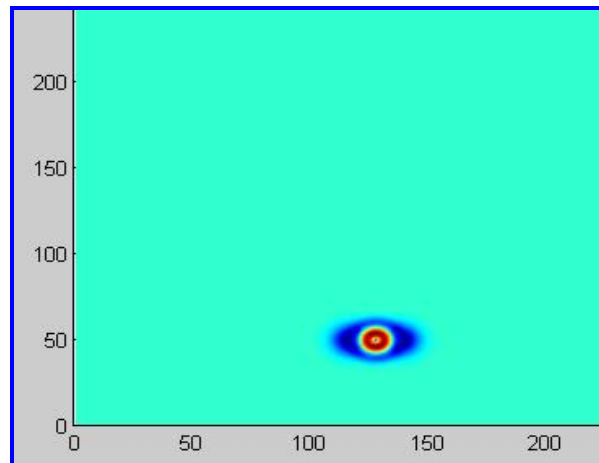


Figura IV.20 Tiempo de propagación 10, en el medio estratificado.

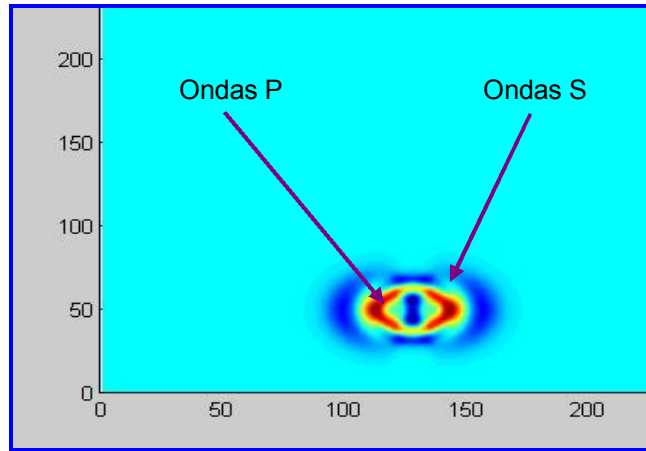


Figura IV.21 Esquema de propagación T25 en el medio estratificado.

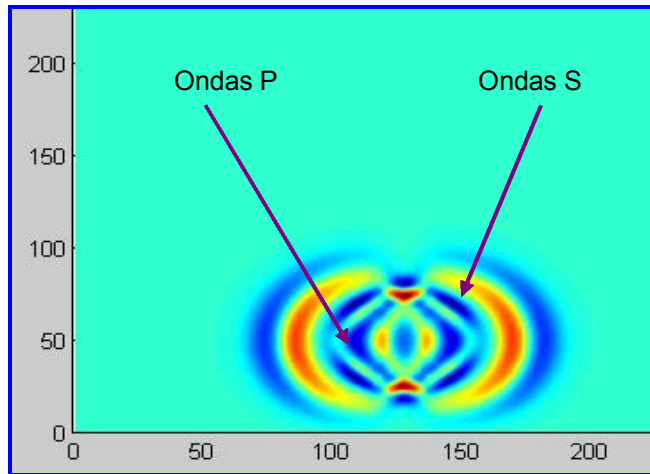


Figura IV.22 Esquema de propagación T70 en el medio estratificado.

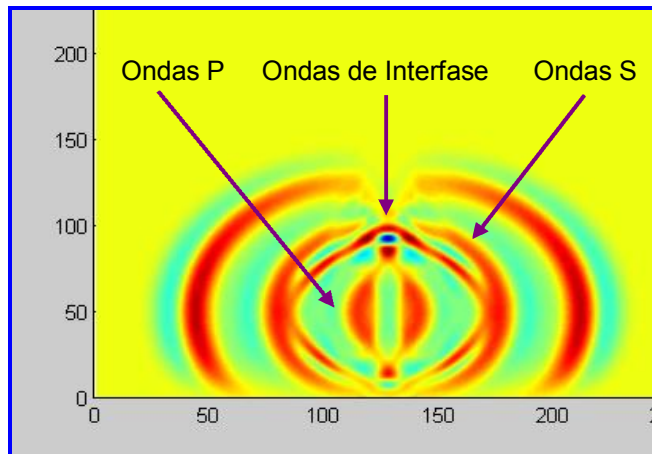


Figura IV.23 Esquema de propagación T90 en el medio estratificado.

* **Ejemplo 3 (Formación rápida-agrietada).** Se lleva a cabo con velocidades de ondas distintas y también con valores de densidad distinta al ejemplo 2. Se procuró que las velocidades fueran mayores tanto en las ondas P como en las S, al igual en el valor de la densidad.

```

Archivo  Edición  Formato  Ver  Ayuda
ht      dt      alf      bet      betf     ro      vf      rof      dx      ts      tp      factor
1750    0.1111e-5  4000    2500    0.00    3.0    1500    1.0    0.01    0.0001  0.0001  1.0
nx      nx1     nxs     nx2     nr      radius  dy
256    1      128    256     8       0.1     0.0
ny      ny1     nys     ny2
256    1      50     256
estaciones (nr)
128    100
128    115
128    130
128    145
128    160
128    175
128    190
128    205
nshot(1 a 60)
1 25 1750

```

Figura IV.24 Archivo de datos Ej. 3.

Las figuras de la propagación se muestran a continuación:

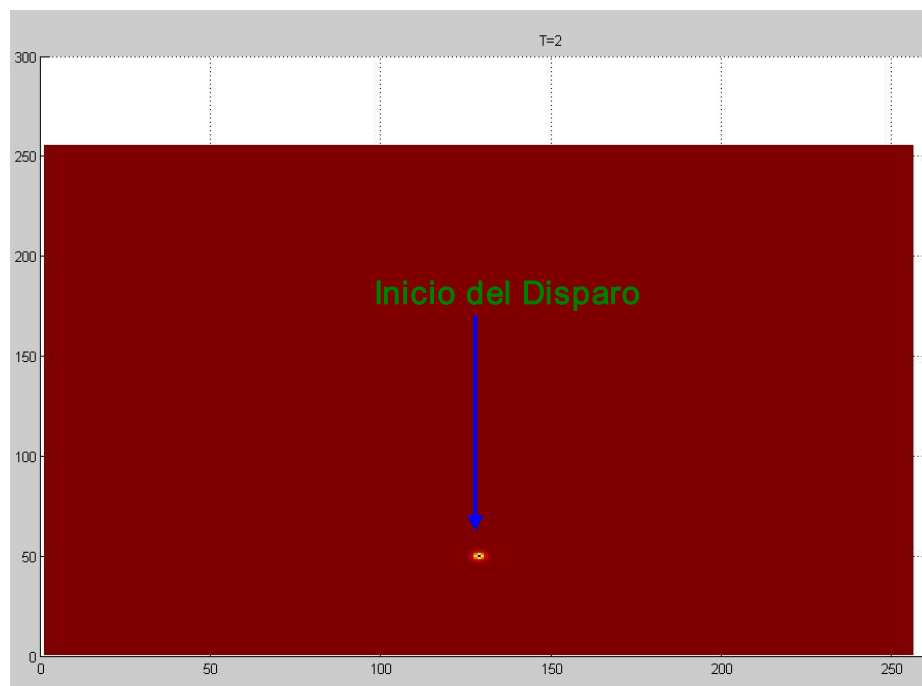


Figura IV.25 Esquema de propagación T2 en el medio estratificado-agrietado Ej. 3.

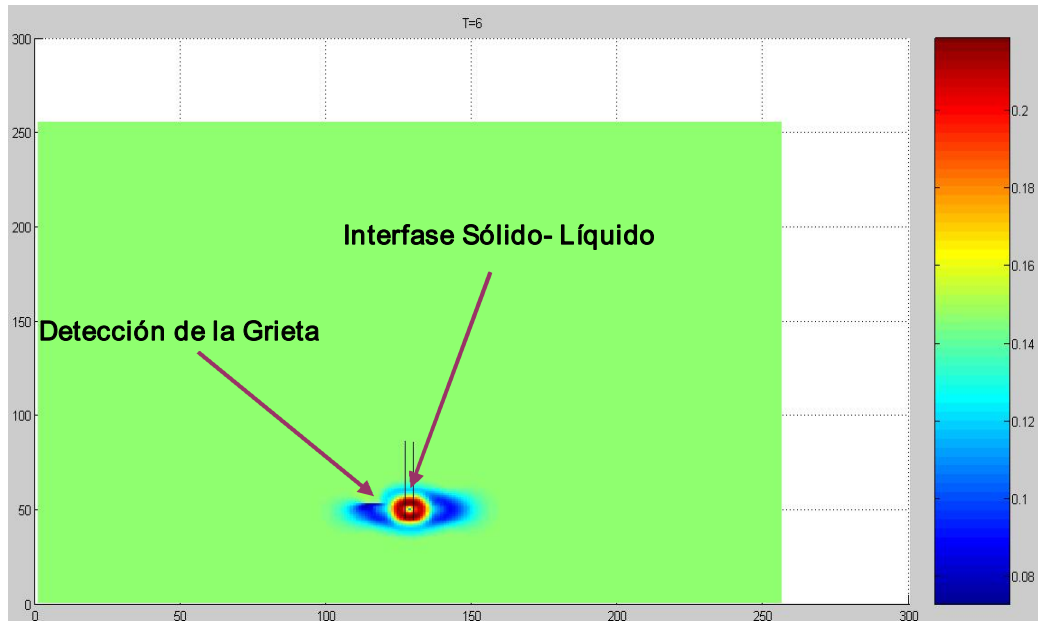


Figura IV.26 Esquema de propagación T6 en el medio estratificado-agrietado Ej. 3.

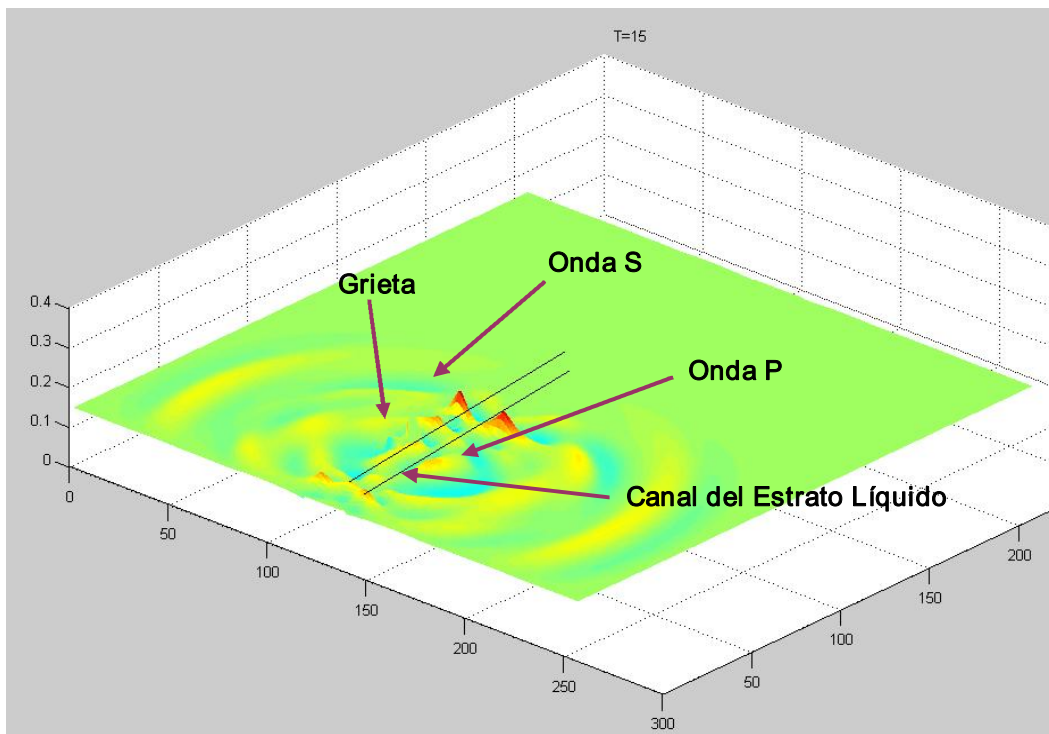


Figura IV.27 Esquema de propagación T15 en el medio estratificado-agrietado Ej. 3.

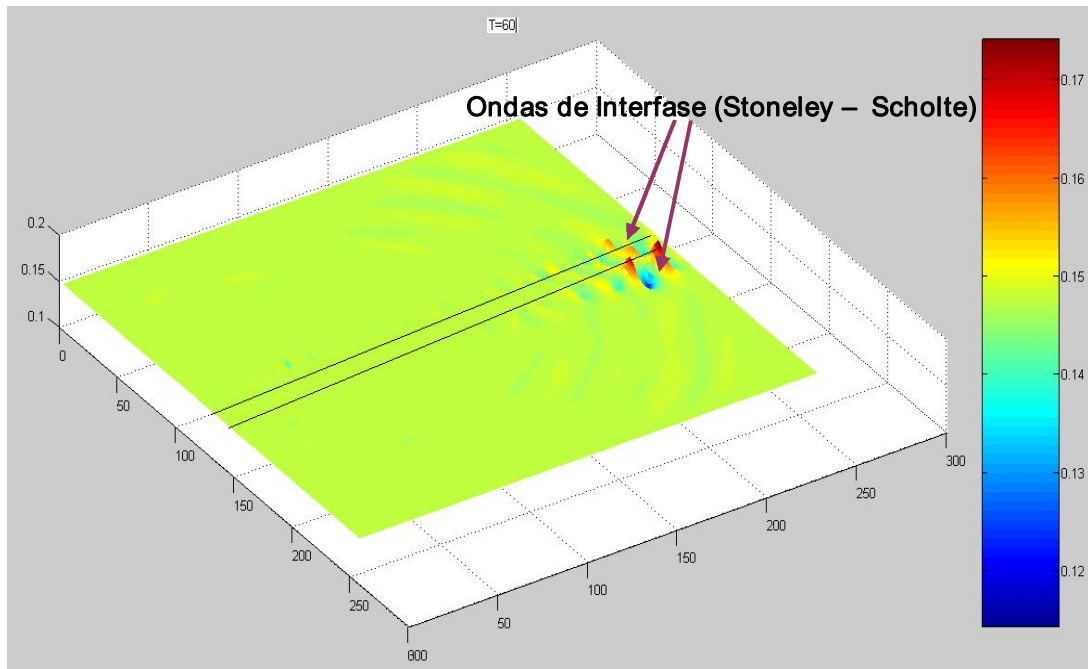


Figura IV.28 Esquema de propagación T60 en el medio estratificado-agrietado Ej. 3.

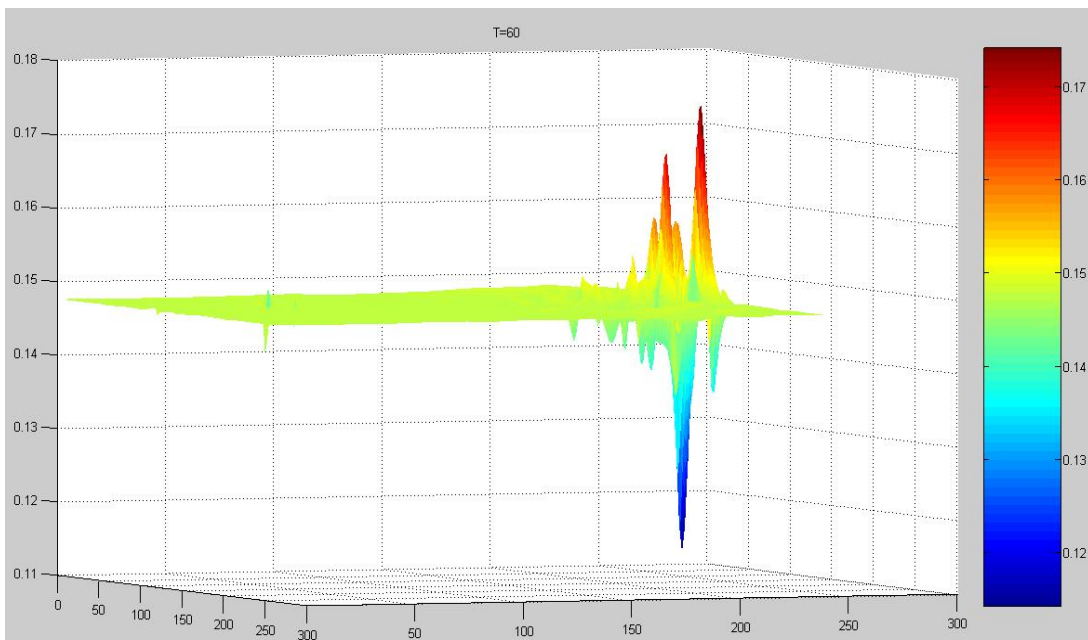


Figura IV.29 Esquema de propagación T60 (rotado) en el medio estratificado-agrietado Ej. 3.

* **Ejemplo 4 (Formación lenta).** Se lleva a cabo con las velocidades del ejemplo 2. Sin embargo se disminuyó el valor de la densidad.

```

lenta3 - Bloc de notas
Archivo Edición Formato Ver Ayuda
nt      dt      alf      bet      betf     ro      vf      rof      dx      ts      tp      factor
1750    0.1111e-5  3000    1200    0.00     2.0    1500    1.0     0.01   0.0001 0.0001  1.0
nx      nx1     nxs     nx2     nr      radius  dy
256    1      128    256     8       0.1     0.0
ny      ny1     nys     ny2
256    1      50     256
estaciones (nr)
128    100
128    115
128    130
128    145
128    160
128    175
128    190
128    205
nshot(1 a 60)
1 25 1750
    
```

Figura IV.30 Archivo de datos Ej. 4.

Las figuras de la propagación se muestran a continuación:

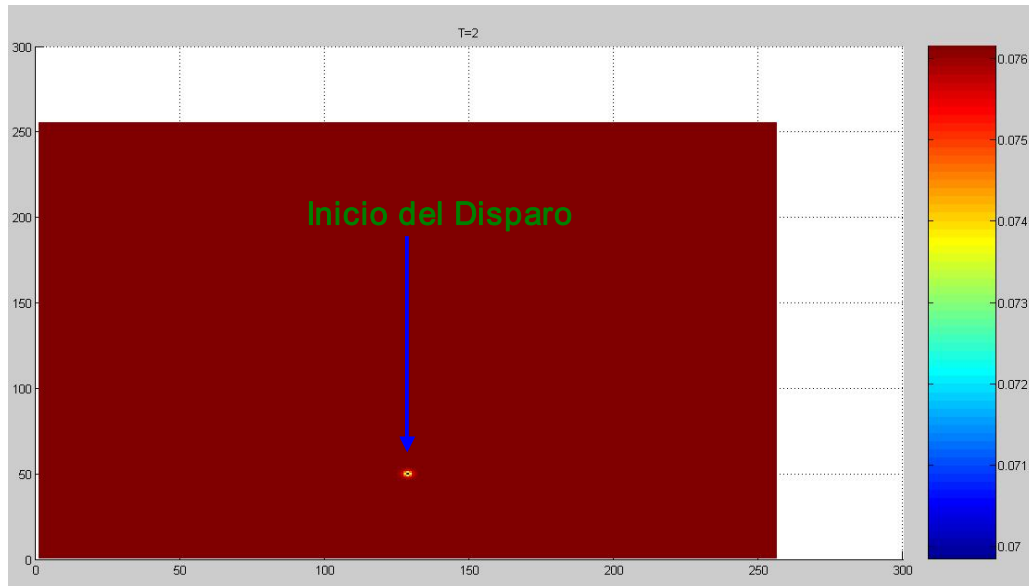


Figura IV.31 Tiempo de propagación 2 en el medio estratificado-agrietado Ej. 4.

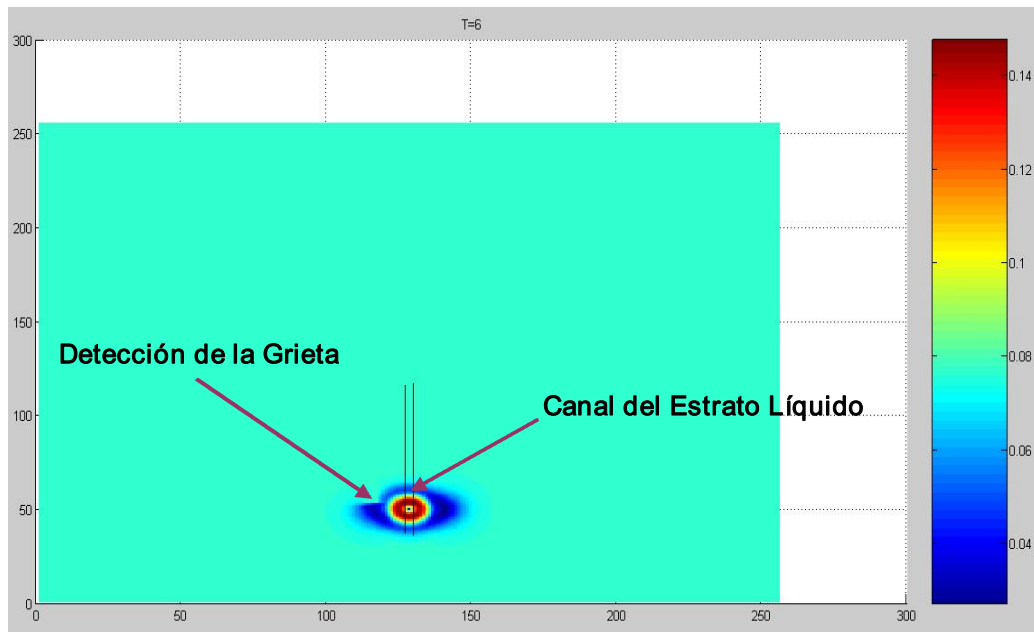


Figura IV.32 Esquema de propagación T10 en el medio estratificado-agrietado Ej. 4.

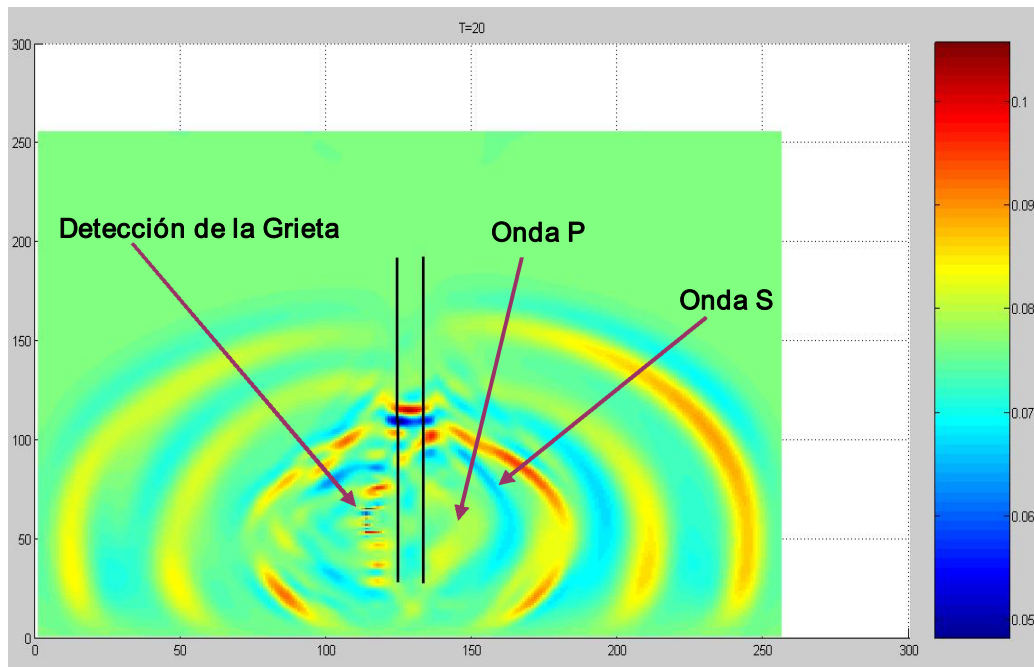


Figura IV.33 Esquema de propagación T20 en el medio estratificado-agrietado Ej. 4.

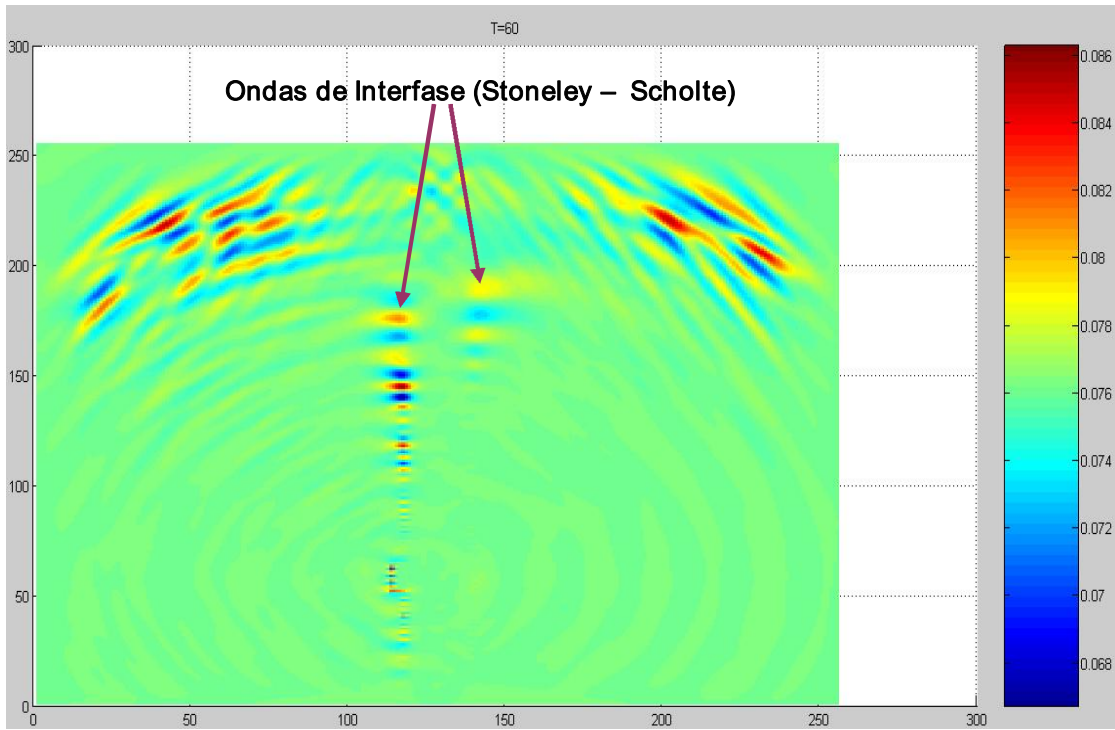


Figura IV.34 Esquema de propagación T60 en el medio estratificado-agrietado Ej. 4.

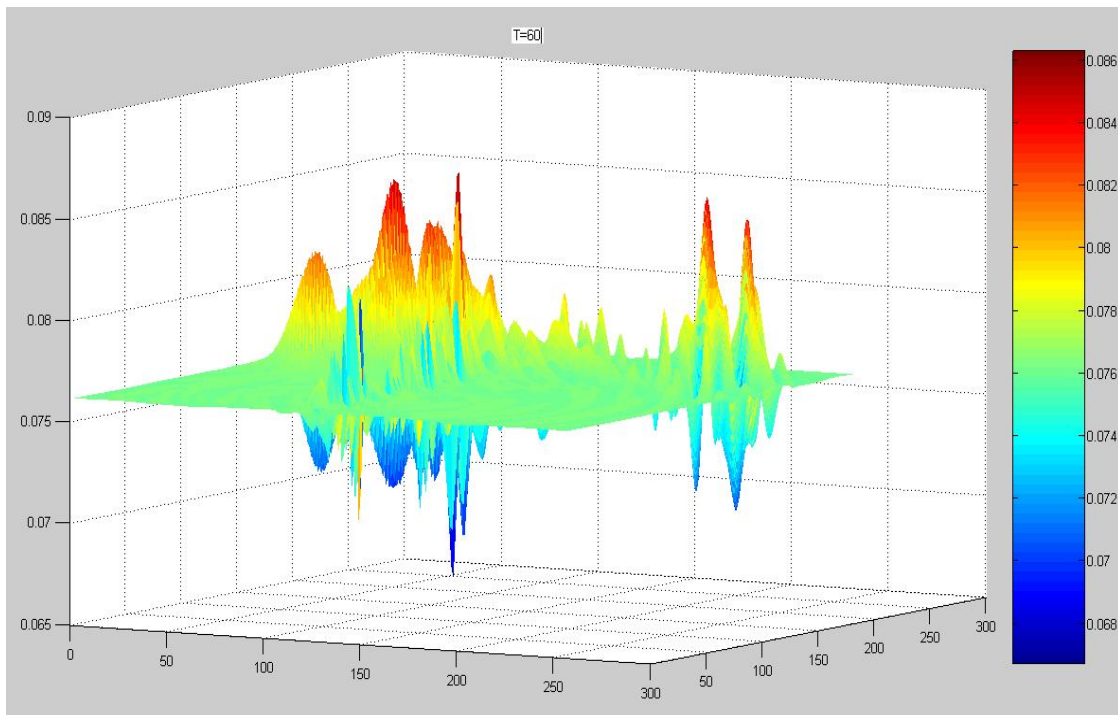


Figura IV.35 Esquema de propagación T60 (rotado) en el medio estratificado-agrietado Ej. 4.

CONCLUSIONES

- 1) Se mostró que los esquemas de diferencias finitas para mallas alternadas (staggered), trabajan eficientemente en el dominio del tiempo, la mayor ventaja de las diferencias finitas es que se pueden resolver fácil y rápidamente dominios homogéneos y heterogéneos muy grandes.
- 2) El esquema de malla empleado en este trabajo (Staggered) resulto adecuado, ya que en el método de diferencias finitas se utilizan datos provenientes de puntos vecinos, lo que sugiere de un procedimiento más eficiente para los análisis, además este tipo de mallas representó un ahorro considerable en tiempo de cálculo y con ello se pudo reducir el problema de separación de la solución. Se ajustaron las condiciones de frontera para que no existieran en los modelos de propagación problemas relacionados con el fenómeno de reflexión.
- 3) El programa permite observar la propagación de las ondas y la detección de la grieta. Se observaron las ondas de interfase (Stoneley), tal como se explica en la literatura, las ondas de Stoneley se observaron perfectamente, su velocidad de propagación es menor a la de las ondas S y su dispersión fue apreciada en los ejemplos propuestos, de manera que diferentes frecuencias se propagan a diferentes velocidades.
- 4) La grieta se introdujo debido a un cambio en el valor de la densidad del medio sólido. $\rho = \text{agua}, \rho = \text{aire}$
- 5) Para poder observar la grieta en las configuraciones propuestas, se tuvo que adecuar el tamaño de la malla a un tamaño que permitiera observar la distribución del fenómeno acompañado de la oquedad, como el contenido de las frecuencias del disparo inicial.
- 6) Para poder observar las configuraciones de las ondas en los modelos, se deben tener como mínimo $6 \Delta x \times 1$ longitud de onda.
- 7) En el ramo de la Ingeniería y específicamente de las Estructuras, la técnica utilizada en este trabajo proporciona varias aplicaciones en diversos problemas del ramo:
 - Estudio de Losas: se puede llegar a conocer mediante esta técnica si una losa estructural tiene grietas. Si se produce una excitación en la frontera, con el contenido de frecuencia adecuado y se dispone de un correcto arreglo de receptores, es posible determinar la ubicación de discontinuidades en el material, al igual que para el estudio de losas, la explicación anterior puede llevarse a cabo en el estudio de Columnas y Muros de Carga.

- En el estudio de Tuberías, esta técnica puede ser interesante, ya que al someterlas a una posible excitación se podrá conocer su comportamiento y así podremos saber que estos elementos no han sufrido algún daño estructural, como podría ser la presencia de grietas.

10) Otra aplicación, es el estudiar los efectos de la difracción causados por una fuente dentro de un pozo fluido que está rodeado de un medio elástico y así poder obtener información relacionada como (estimación de permeabilidad, isotropía transversal, velocidad de la onda de corte y posibles fracturas).

TRABAJOS A FUTURO

1) Se tendrían que realizar en el futuro otras modelaciones con la misma formulación pero en el dominio de tres dimensiones. De igual forma tomando en cuenta problemas más complejos (diferentes configuraciones de estratigrafía y condiciones iniciales).

2) Estudiar la grieta propuesta en este trabajo para poder conocer su dimensión y posible dirección de propagación.

3) Comparación de los resultados obtenidos en este trabajo con otros métodos, como podría ser el de Elementos de Frontera o Elemento Finitos, para poder comparar las soluciones y modelos de propagación.

ANEXO 1

1.1 Onda mecánica

Una onda mecánica es una perturbación que se propaga a lo largo de un medio material para propagarse. Todas las ondas mecánicas requieren:

- 1) alguna fuente que cree la perturbación.
- 2) un medio que reciba la perturbación.
- 3) algún medio físico a través del cual elementos del medio puedan influir uno al otro.

1.2 Propagación

El movimiento sísmico se propaga mediante ondas elásticas (similares al sonido), a partir del hipocentro. Las ondas sísmicas se presentan en tres tipos principales:

- 1) *Ondas longitudinales, primarias o P*: tipo de ondas de cuerpo que se propagan a una velocidad promedio de 8 y 13 km/s y en el mismo sentido que la vibración de las partículas. Circulan por el interior de la Tierra, atravesando tanto líquidos como sólidos. Son las primeras que registran los aparatos de medida o sismógrafos, de ahí su nombre "P".

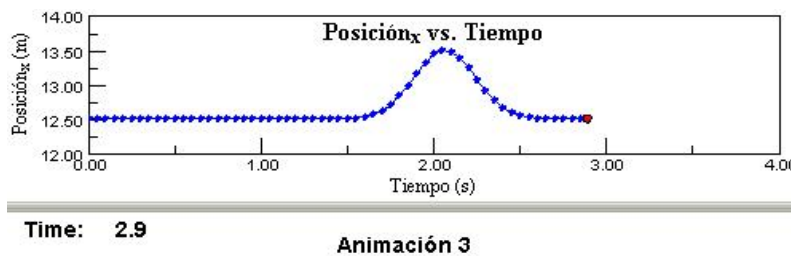


Figura I.1 Representación de una onda longitudinal.

- 2) *Ondas transversales, secundarias o S*: son ondas de cuerpo más lentas que las anteriores (entre 4 y 8 km/s) y se propagan perpendicularmente en el sentido de vibración de las partículas. Atraviesan únicamente los sólidos y se registran en segundo lugar en los aparatos de medida.



Figura I.2 Representación de una onda transversal.

3) *Ondas superficiales*: son las más lentas de todas (3,5 km/s) y son producto de la interacción entre las ondas P y S a lo largo de la superficie de la Tierra. Son las que producen más daños. Se propagan a partir del epicentro y son similares a las ondas que se forman sobre la superficie del mar. Este tipo de ondas son las que se registran en último lugar en los sismógrafos.

Las Ondas (L), se manifiestan después de las ondas P y las ondas S, se propagan sólo por la superficie mediante períodos vibratorios más largos que los anteriores. Desarrollan una velocidad más lenta, 3.5 km./seg., y son las responsables de producir los desplazamientos en la superficie., que producen los efectos más catastróficos en el epicentro de un terremoto de fuerte intensidad, siguiendo el sentido de propagación de forma parecida a las ondas que se producen en el agua de un estanque después de arrojar una piedra.

A su vez, las ondas (L) se dividen en dos clases, ondas de Rayleigh y ondas de Love. La primera de estas ondas la predijo el tercer Lord Rayleigh en 1887, veinte años antes de que se identificaran en sismógrafos.

Las Ondas (R), o de Rayleigh(véase Figura I.3), El movimiento de las partículas se desarrolla de forma circular, elípticas sobre el plano de propagación; son ondas de periodo largo, que producen en las partículas afectadas movimientos elípticos sobre planos verticales y en sentido opuesto a la dirección de propagación

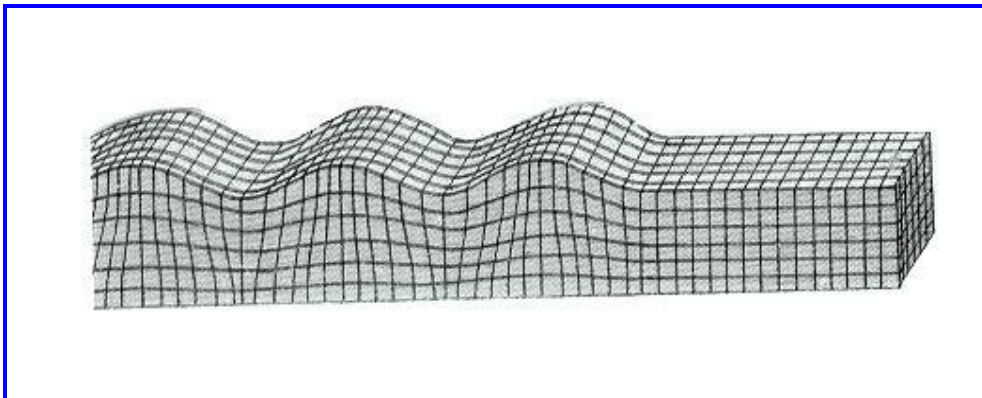


Figura I.3 Representación de una onda tipo Rayleigh.

Las Ondas (V), u ondas de Love(véase Figura I.4). El movimiento es horizontal y perpendicular a la dirección de propagación. El paso de este tipo de ondas produce una dislocación en las masas de la superficie o lugar donde se desarrollan, debido a la compresión y expansión alternativa del medio que atraviesan.

Estas ondas se identificaron en los sismogramas antes de que se hubiera descubierto su existencia. Las explicó un matemático de Oxford, E. H. Love, como una extensión de la teoría de Rayleigh y desde entonces se las conoce como ondas de Love.

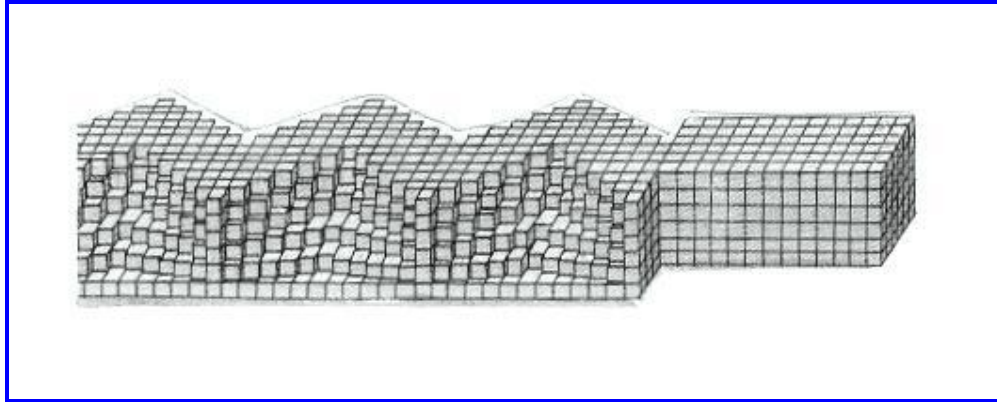


Figura 1.4 Representación de una onda tipo Love.

1.3 Error por truncamiento

Los errores de truncamiento tienen relación con el método de aproximación que se usará ya que generalmente frente a una serie infinita de términos, se tenderá a cortar el número de términos, introduciendo en ese momento un error, por no utilizar la serie completa (que se supone es exacta). En una iteración, se entiende como el error por no seguir iterando y seguir aproximándose a la solución. En un intervalo que se subdivide para realizar una serie de cálculos sobre él, se asocia al número de paso, resultado de dividir el intervalo "n" veces.

ANEXO 2

2.1 Serie de Taylor

La serie de Taylor de una función $f(x)$ infinitamente derivable (real o compleja) definida en un intervalo abierto $(a-r, a+r)$ se define como la siguiente suma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Aquí, $n!$ es el factorial de n y $f^{(n)}(a)$ indica la n -ésima derivada de f en el punto a .

Si esta serie converge para todo x perteneciente al intervalo $(a-r, a+r)$ y la suma es igual a $f(x)$, entonces la función $f(x)$ se llama analítica. Para comprobar si la serie converge a $f(x)$, se suele utilizar una estimación del resto del teorema de Taylor.

Una función es analítica si y solo si se puede representar con una serie de potencias; los coeficientes de esa serie son necesariamente los determinados en la fórmula de la serie de Taylor.

Si $a = 0$, a la serie se le llama serie de Maclaurin.

Esta representación tiene tres ventajas importantes:

La derivación e integración de una de estas series se puede realizar término a término, que resultan operaciones triviales. Se puede utilizar para calcular valores aproximados de la función. Es posible demostrar que, si es viable la transformación de una función a una serie de Taylor, es la óptima aproximación posible.

Algunas funciones no se pueden escribir como serie de Taylor porque tienen alguna singularidad. En estos casos normalmente se puede conseguir un desarrollo en serie utilizando potencias negativas de x (véase Serie de Laurent). Por ejemplo $f(x) = \exp(-1/x^2)$ se puede desarrollar como serie de Laurent.

La serie de Taylor de una función f de números reales o complejos que es infinitamente diferenciable en un entorno de números reales o complejos a , es la serie de potencias:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots$$

que puede ser escrito de una manera más compacta como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n,$$

donde $n!$ es el factorial de n y $f^{(n)}(a)$ denota la n -ésima derivada de f en el punto a ; la derivada cero de f es definida como la propia f y $(x - a)^0$ y $0!$ son ambos definidos como uno.

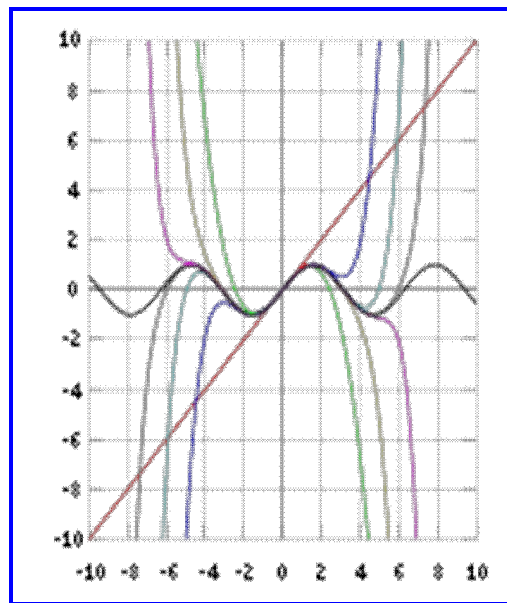


Figura II.1 Representación de la serie de Taylor.

ANEXO 3

3.1 NÚMERO DE COURANT

El Número de Courant (C) es el cociente entre el intervalo de tiempo y el tiempo de residencia en un volumen finito. Se aplica en la solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta x/u}$$

En donde:

- C es el número de Courant.
- Δt es el intervalo de tiempo.
- Δx es el intervalo de espacio.
- u es la velocidad.

El número de Courant marca el límite superior del intervalo de tiempo interno utilizado por ciertos algoritmos.

En matemáticas, la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (condición CFL) es una condición de convergencia de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales solucionadas mediante ciertos algoritmos (no confundir con estabilidad numérica). Como consecuencia de esta condición, el paso de tiempo debe ser inferior a un cierto valor sino la simulación producirá resultados incorrectos.

Por ejemplo, si una onda está cruzando una malla discreta, entonces el intervalo de tiempo debe ser inferior que el tiempo necesario para que la onda atraviese los puntos de la malla adyacentes. Como corolario, cuando la separación entre los puntos de la malla se reduce, el límite superior para el intervalo de tiempo es inferior.

La condición CFL se representa comúnmente para esquemas de advección puros (es decir ignorando los términos de difusión y reacción) como:

$$\frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} < C$$

En un caso bidimensional la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{u_x \cdot \Delta t}{\Delta x} + \frac{u_y \cdot \Delta t}{\Delta y} < C$$

3.2 ONDAS DE INTERFASE

Después de las ondas P y S, las siguientes ondas que arriban a los receptores desde una fuente son las ondas directas y reflejadas. A éstas a su vez le siguen los modos de propagación guiados y las ondas de interfaz que deben su existencia a la naturaleza cilíndrica del pozo.

Los últimos arribos provenientes de una fuente son las ondas de interfaz o de superficie. Las ondas de superficie fueron propuestas por primera vez por Lord Rayleigh en 1885. Lord Rayleigh investigó la respuesta de un material elástico en contacto con un vacío en la superficie laminar y observó que una onda se propagaba a lo largo de la superficie con un movimiento de partículas, cuya amplitud se reducía con la distancia a la superficie; propiedad conocida como evanescencia.

En 1924, Stoneley observó las ondas que se propagaban en la interfaz existente entre dos sólidos y notó un tipo similar de onda de superficie. El caso particular correspondiente a un pozo lleno de fluido, es decir la interfase entre un sólido y un líquido fue descrito sino por Scholte. Sin embargo, las ondas que viajan en la interfase fluido-pozo, se conocen como ondas de Stoneley. En otras áreas de la geofísica, las ondas que viajan en una interfase fluido-sólido se denominan ondas de Scholte o de Scholte-Stoneley.

La onda de Stoneley aparece en casi todos los registros sínicos. Su velocidad es menor que las velocidades de las ondas de corte y es levemente dispersiva, de manera que diferentes frecuencias se propagan a diferentes velocidades.

La onda de Stoneley de baja frecuencia es sensible a la permeabilidad de la formación. Cuando la onda encuentra fracturas o formaciones permeables, el fluido vibra respecto del sólido, causando disipación viscosa en estas zonas, lo que atenúa la onda y reduce su velocidad.

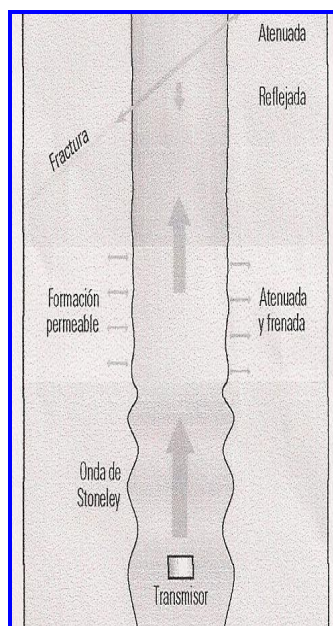


Figura III.1 Ondas de Stoneley.

REFERENCIAS

- * Aboudi, J. ,Modelling of seismic wave propagation and interaction with discontinuities.
- * Abramowitz, *Handbook of Mathematical Functions*, edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series: 55, (1964).
- * Achenbach, J. D., 1976. Wave propagation in elastic solids. North-Holland Publishing Company, New York, N. Y. 10017.
- * Aki K. y Richards P. G. (1980). Quantitative Seismology. W. H. Freeman and Co. New York.
- * Aliadadi, M. H. (1997). Boundary element formulations in fracture mechanics, *Appl. Mech. Rev.*,50, 83-96.
- * Alterman, Z. S.. y Karal, (1968). Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods, *Bull. Seism. Soc. Am*, 58, 367-398.
- * Atkin R. J. & Fox N.: *An Introduction to the Theory of Elasticity*, Ed. Dover, London, 1980, ISBN 0-486-44241-1.
- * Ávila C. R., Suarez M. y Sánchez-Sesma F. J. (1993). Simulación de la propagación de ondas sísmicas en configuraciones irregulares con un método pseudoespectral.
- * Avila-Carrera R., F. J. Sánchez-Sesma y R. Madariaga, Introducción al Métodos Pseudo-espectral para la simulación de la propagación de ondas elásticas., Unión Geofísica Mexicana, Monografía 2, pp 76-88,(1995).
- * Bard, P. Y. (1982). Diffracted waves and displacement field over two-dimensional elevated topographies, *Gephys. J. R. Astr. Soc.*, 71, 731-760.
- * Boole, George, *A Treatise On The Calculus of Finite Differences*, 2ª Ed., Macmillan and Company, 1872. [También: Edición Dover de 1960].
- * Boore, D. M. (1972). Finite differences methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials, *Methods in Computational Physics*, B. A. Bolt (Editor), Vol 11, Academic Press, New York, 1-37.
- * Boore, D.M. (1972). Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials, Vol 11, Academic Press, New York, pages. 1-37.
- * Bouchon, M., Campillo, M. y Gaffet, S. (1989). A boundary integral equation-discrete wavenumber representation method to study wave propagation in multilayered media having irregular interfaces, 1134-1140.
- * Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R. y Reshef, M. (1985). A non-reflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations, 705-708.
- * Chen, P-L (1992). The local effects of curved and parallel soil medium to seismic waves, Madrid, Spain, Vol 2, 917-922.

- * Dravinski, M. y Mossessian, T. K. (1987). Scattering of harmonic P, SV and Rayleigh waves by dipping layers of arbitrary shape, *Bull. Seismics. Soc.*, 212-235.
- * Fung, Y. C. (1977). A first course in continuum mechanics. Second Edition, Prentice Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
- * Fururama, T. y Takenaka (1996). Modeling of elastic waves using the pseudospectral method. *Geophysic Journal International* 124, 820-832.
- * George, T., Virieux, J. Madariaga, R. (1987). Seismic wave synthesis by gaussian beams summation : A comparison with finite differences, 1065-1073.
- * Graves, R. W. (1996). Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences, *Bull. Seism. Soc. Am.* 86. 1091-1106.
- * Higdon, R. L (1992). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic waves in stratified media, *J. Comput. Phys.*, 101, 386-418.
- * Higdon, R. L (1991). Absorbing boundary conditions for elastic waves, *Geophysics*, 56, 231-241.
- * Horike, M., Uebayashi, (1990). Seismic Response in three-dimensional sedimentary basin due to plane S wave incidence, 261-284.
- * Ilan, A., (1977). Finite difference modelling for P-pulse propagation in elastic media with arbitrary polygonal surface, *J Geophys.*,43, 41-58.
- * Iturrarán, U., F.J. Sánchez-Sesma, y F. Janod (2004). Scattering of elastic waves in heterogeneous media using the direct solution method. *Geophys. J. Int.* 156, 222-236.
- * J.E. Marsden, T.J. Hughes (1983), *Fundaciones matemáticas de la elasticidad*, Dover.
- * Kelly, Ward, *et al* (1976). Synthetic seismograms: A finite-difference approach. *Geophysics* 41, 2-27.
- * Kosloff D. y Baysal E. (1982). Forward modeling by a Fourier method. *Geophysics Res. Vol. 47*, pags. 1402-1412.
- * Kosloff R. y Kosloff D. (1986). Absorbing boundaries for wave propagation problems. *J. Comp. Phos.* , Vol. 63, pags. 363-376.
- * Kristek, J., Moczo, P. y Archuleta R. J.,(2002). Efficient methods to simulate planar free surface in the 3D 4th order staggered-grid finite-difference schemes, *Stud. Geod.*, 46, 355-381.
- * Levander, A.R. (1988). Fourth-Order finite-difference P-SV seismograms, 1425-1436.

* Luzón, F., Pérez J.A. (2005). Modelado de la propagación de ondas sísmicas mediante un método de diferencias finitas.

* Marfurt, K.J.(1984). Accuracy of finite-difference and finite-element modelling of the escalar and elastic wave equations, *Geophys*, 49, 533-549.

* Min, D. J., Shin, Ch. y Yoo, (2004). Free-Surface boundary condition in finite-difference elastic wave modelling, *Bull. Seism. Soc. Am.*,94, 237-250.

* Moczo, P., M. Lucká, *et al* (1999). 3D displacement finite differences and a combined memory optimization. Bulletin of the Seismological Society of America 89, 69-79.

* Moczo, P., Kristek, J. y Halada, L., (2000). 3D Fourth-Order Staggered-grid Finite-Difference schemes: Stability and grid dispersión, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 90, 587-603.

* Moczo, P., Kristek, J. y Halada, L., (2004). The finite-difference method for seismologists. An introduction. Comenius University, Bratislava.

* Ohminato. T. y Bernard A. Chouet, (1997). A free-surface boundary condition for including 3D topography in the finite-difference method.. 494-515.

* Olsen, K.B. (2000). Site Amplification in the Los Angeles Basin from 3D Modelling of Ground Motion, *Bull. Seis. Soc. Am.*, 90, 77-94.

* Pérez-Ruiz., J.A. y Luzón, F., (2004). A finite-difference method for the propagation of elastic P-SV waves. Portugal, 293-294.

* Pérez-Ruiz., J.A. y Luzón, F., (2005). Simulation of an irregular free surface with a displacement finite difference scheme, *Geophysical Reserch Abstracts*, Vol. 7.

* Pitarka, A. (1999). 3D elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered grids with nonuniform spacing. *Bull of the Seismological Society of America* 89, 54-68.

* R. Courant, K. Friedrichs y H. Lewy, dado de Über partiellen el der de Differenzengleichungen mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, el vol. 100, no 1, pagina 32-74, 1928.

* R. Courant, K. Friedrichs y H. Lewy, “en las ecuaciones de diferencia parciales de la física matemática”, *Diario de IBM*, El marzo de 1967, pp. 215-234.

* Randall, C. J. (1988). Absorbing boundary condition for the elastic wave equation, *Geophysics*, 53, 611-624.

* Ricker, N. (1945). The computation of output disturbances from amplifiers for true wavelet inputs, *Geophysics*, 43, 1099-1110.

- * Rong-Song, Jih, y Zoltan, A. D., (1988). Free –boundary conditions of arbitrary topography in a two-dimensional explicit elastic finite-difference scheme, *Geophysics*,53,1045-1055.
- * Sanchez-Sesma. F.J. (1983). Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 73, 1621-1636.
- * Sanchez-Sesma. F.J, Chavez Pérez, S. y Avilés, J.(1984). Scattering of elastic waves by three dimensional topographies, *Proc. World Conf. Earthq. Eng. San Francisco, Cal.. Vol. 2* 729-738.
- * Sanchez-Sesma. F.J, Herrera, I. y Avilés, J.(1982). A boundary method for elastic wave diffraction: aplication to scattering *SH* waves by surface irregularities, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 72, 473-490.
- * Sanchez-Sesma. F.J. y Iturrarán-Viveros, U. (2001). Scattering and diffraction of *SH* waves by a finite crack: an analytical solution, *Geophys. J. Int.*, 145, 749-758.
- * Virieux, J. (1984). *SH*-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics* 49, 1933-1942.
- * Virieux, J. (1986). *P-SV* wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics* 51, 889-901.
- * X. M. Tang, A. Cheng, *Quantitative Borehole Acoustic Methods*, Elsevier, Seismic Exploration series Vol 24, 2004.
- * Wikipedia, Enciclopedia libre, Pulso de Ricker.