



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

---

---

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
UNIDAD CULHUACAN

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

SINTONIZACIÓN DE CONTROLADORES TIPO  
PROPORCIONAL - DERIVATIVO PARA SISTEMAS  
LINEALES CON RETARDO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS DE INGENIERÍA EN  
MICROELECTRÓNICA

PRESENTA:  
ING. ELEAZAR OLVERA OLVERA

DIRECTORES DE TESIS:  
DR. BASILIO DEL MURO CUÉLLAR  
DR. JUAN CARLOS SÁNCHEZ GARCÍA



MÉXICO D.F., NOVIEMBRE 2011









**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

En la Ciudad de México D.F. el día 29 del mes Noviembre del año 2011, el que suscribe Eleazar Olvera Olvera alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias de Ingeniería en Microelectrónica con número de registro B091772, adscrito a SEPI-ESIME-CULHUACAN, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Basilio del Muro Cuéllar y Dr. Juan Carlos Sánchez García y cede los derechos del trabajo intitulado SINTONIZACIÓN DE CONTROLADORES TIPO PROPORCIONAL - DERIVATIVO PARA SISTEMAS LINEALES CON RETARDO, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones bdelmuro@yahoo.com o bien eleozal@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

---

Eleazar Olvera Olvera

Nombre y firma



# *AGRADECIMIENTOS*



# *Mi Ángel*

*Mujer perfecta esa eres tú  
Como no luchar, cuando tú me apoyas  
Eres el ángel que Dios me envió  
Eres a quien amo con todo mi corazón*

*Sufres cuando estoy enfermo  
Me animas cuando estoy caído  
Me motivas sin cesar  
Me alientas a continuar...*

*Tú que tanto has luchado  
Que por mí todo lo has dado  
Esfuerzo no desperdiciado  
Hoy he llegado a este logro anhelado*

*Te amo, no lo olvides  
Siempre tenlo presente...*

*A MI MADRE*

*Magdalena Irma Olvera Cortes*

# *Caballero Honorable*

*Por ser hombre perseverante  
Aferrado a tú convicción  
Por sostener en alto tus ideas  
Sin perder la serenidad o razón*

*Caballero honorable,  
Me instruiste a luchar  
Pretender siempre lo mejor  
Ya mis sueños no dejar.*

*Aprendí de tí lo mejor papá  
Tus ejemplos complicados  
Tus palabras confusas  
A mejorar me han llevado sin parar*

*Gracias te doy  
Por guiarme y amarme como soy...*

*A MI PADRE*

*José Trinidad Olvera Olvera*

# *Segmentos de mi Corazón*

*Las apoyo*

*Las regaño*

*Solo para verlas mejorar,*

*No se enojen, ni reclamen solo piensen en triunfar*

*¡Las amo!*

*¡Con todo el corazón!*

*Con estrujos y besos,*

*¡Con sueños y vigor!*

*Regalo adorado*

*Que dios me dio*

*Mujeres lindas*

*Las cuidare con todo mi amor...*

*A Mis Hermanas*

*Lucero y Nancy*

# *Montañas Acanzaré*

*Diseñar mi vida,*

*Para triunfar*

*Complicado al iniciar*

*Encontrar en mi vida nuevos rumbos*

*Me llevan siempre a mejor*

*Una montaña más alcance,*

*Con este logro acrecentare,*

*Mis ideales que por los que me quieren trace*

*Llorar y caer*

*Reír y continuar*

*Concentrarme al fallar*

*Reflexionar al ganar*

*Mucho que mejorar*

*Entusiasmo no me falta*

*Amor y honestidad he de emplear*

*Para así continuar...*

*EM*

*Eleazar Olvera Olvera*

# AGRADECIMIENTOS

*Agradezco a Dios por cuidarme y rodearme de toda esta gente que me quiere tanto como yo a ellos. Por el soporte, confianza y cariño que me han brindado, por todo el amor y aliento con el que me han embriagado, a lo largo de este bonito objetivo, a todas aquellas personas que me rodearon para obtener este nuevo reto, este gran objetivo en mi carrera.*

*A todos mis profesores de la SEPI-ESIME CULHUACAN  
En especial a los profesores:*

*Dr. Basilio del Muro Cuéllar*

*Dr. Héctor Pérez Meana*

*Dr. Juan Carlos Sánchez García*

*Dr. Gonzalo Isaac Duchén Sánchez*

*Gracias a los doctores Domingo de Jesús Cortés, Martín Velasco y Enrique Escamilla por sus valiosos comentarios y observaciones oportunas, que fueron muy constructivos para concluir mi trabajo de tesis.*

*A las instituciones que me brindaron apoyo económico y soporte, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), al Instituto Politécnico Nacional, a la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica y sobre todo a la Sección de Estudios de Posgrado de ESIME CULHUACAN.*

*Agradezco también a Kelsey Alejandra Ramírez por todo el amor paciencia y apoyo que me ha regalado a lo largo de este tiempo, de igual forma a su familia por la confianza que depositaron en mí.*

*Y a todos mis amigos compañeros y familiares que estuvieron conmigo:*

*Agustín Olvera*

*Jazmín Rodríguez*

*Agustina Olvera*

*Leonardo Mendoza*

*Antonia Olvera*

*Manuel Aguilar*

*Belén Reyes*

*Oscar Espinosa*

*Carlos Santiago*

*Ramiro Perrusquia*

*Carmen Cortes*

*Rosalía Olvera*

*David Novella*

*Sabino Herrera*

*Dhayan García*

*Sergio Reyes*

*Francisco González*

*Sonia Olvera*

*Gabriela A. Hernández*

*Victoria Olvera*

*J. Francisco Márquez*

*Sin todos ustedes nada sería posible, no me resta nada más que decir  
MIL GRACIAS por acompañarme en este camino.*

<b>Resumen</b>	<b>XXIII</b>
<b>Abstract</b>	<b>XXV</b>
<b>Objetivos</b>	<b>XXVII</b>
<b>Prefacio</b>	<b>XXIX</b>
<b>I Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción a la teoría del control . . . . .	3
1.2. Control Retroalimentado . . . . .	4
1.2.1. Sistemas a Lazo cerrado . . . . .	5
1.3. Controladores . . . . .	6
1.3.1. Controlador Proporcional . . . . .	6
1.3.2. Controlador Proporcional-Derivativo . . . . .	6
1.3.3. Controlador Proporcional-Integral . . . . .	10
1.3.4. Controlador Proporcional-Integral-Derivativo . . . . .	13
1.4. Sistemas con retardo . . . . .	13

1.4.1. Ecuaciones características para sistemas con retardo . . . . .	14
1.4.2. Retardo de tiempo y algunos ejemplos . . . . .	15
1.5. Conclusiones . . . . .	19
1.6. Referencias . . . . .	19
<b>II Estado Del Arte</b>	<b>21</b>
<b>2. Estado del Arte</b>	<b>23</b>
2.1. Predictor de Smith . . . . .	23
2.2. Aproximación de Padé . . . . .	27
2.3. Teorema de Hermite-Biehler . . . . .	28
2.3.1. Aplicaciones a la teoría del control . . . . .	32
2.4. Conclusiones . . . . .	38
2.5. Referencias . . . . .	38
<b>III Preliminares</b>	<b>39</b>
<b>3. Controladores P, PI, PID y PD</b>	<b>41</b>
3.1. Sistemas de primer orden con tiempo de retardo . . . . .	41
3.2. Controlador Proporcional P . . . . .	42
3.2.1. Control P para plantas inestables de primer orden . . . . .	44
3.3. Controlador Proporcional Integral PI . . . . .	46
3.3.1. Control PI para plantas inestables de primer orden . . . . .	47
3.4. Controlador Proporcional Integral Derivativo PID . . . . .	49
3.4.1. Control PID para plantas inestables de primer orden . . . . .	51
3.5. Controlador Proporcional Derivativo PD . . . . .	54
3.6. Conclusiones . . . . .	57
3.7. Referencias . . . . .	57
<b>IV Resultado Principal:</b>	

<b>Controlador Proporcional-Derivativo</b>	<b>59</b>
<b>4. Controlador PD</b>	<b>61</b>
4.1. Control PD . . . . .	61
4.2. Caracterización de los parámetros del controlador PD . . . . .	67
4.3. Conclusiones . . . . .	70
4.4. Referencias . . . . .	70
<b>V Resultados en Simulación</b>	<b>71</b>
<b>5. Aplicación de Resultados</b>	<b>73</b>
5.1. Ejemplos . . . . .	74
5.2. Conclusiones . . . . .	85
5.3. Notas y Referencias . . . . .	85
<b>VI Conclusiones</b>	<b>87</b>
<b>6. Conclusiones Generales</b>	<b>89</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	90
6.2. Perspectivas Futuras . . . . .	91
<b>Apéndice A</b>	
Artículo publicado en el congreso de la Asociación Mexicana de Control Automático, AMCA 2011	<b>95</b>
<b>Apéndice B</b>	
Artículo publicado en el "8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control", CCE 2011	<b>103</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>113</b>
<b>Índice Alfabético</b>	<b>119</b>



---

## Índice de figuras

---

1.1. Planta general . . . . .	4
1.2. Lazo cerrado . . . . .	5
1.3. Control Proporcional . . . . .	7
1.4. Control Proporcional-Derivativo . . . . .	7
1.5. Circuito con dos amplificadores operacionales del controlador PD . . . . .	7
1.6. Circuito con tres amplificadores operacionales del controlador PD . . . . .	8
1.7. Formas de onda de $y(t)$ , $e(t)$ , y $d_e(t)/dt$ que muestran el efecto del control derivativo. (a) Respuesta al escalón unitario. (b) Señal de error. (c) Tasa de cambio de la señal de error. . . . .	9
1.8. Control Integral . . . . .	11
1.9. Circuito con dos amplificadores operacionales del controlador PI . . . . .	11
1.10. Circuito con tres amplificadores operacionales del controlador PI . . . . .	12
1.11. Controlador PID . . . . .	13
1.12. Representación del retardo . . . . .	14
1.13. Sistema retroalimentado con retardo . . . . .	14
1.14. Sistema con retardo a la entrada . . . . .	15
1.15. Esquema del sistema de comunicaciones . . . . .	16
1.16. Cámara de calentamiento con un tubo largo . . . . .	17

2.1. Configuración clásica de un sistema incorporando el predictor de Smith . . . .	25
2.2. Control por Modulo Interno(IMC) para el Predictor de Smith. . . . .	26
2.3. Predictor de Smith simplificado . . . . .	26
2.4. Gráfica de la parte real e imaginaria de $\delta^*(s)$ . . . . .	35
2.5. Distribución de raíces de $\hat{\delta}_i(\hat{\omega})$ . . . . .	37
3.1. Sistema con respuesta a un escalón . . . . .	42
3.2. Sistema de control . . . . .	42
3.3. Gráfica de la parte real e imaginaria de $\delta^*(jw)$ para el ejemplo (3.2.1) . . . .	45
3.4. Respuesta en el tiempo del sistema a lazo cerrado con el controlador P . . . .	45
3.5. Conjunto de valores de $(k_p$ y $k_i)$ para el ejemplo (3.4.1) . . . . .	49
3.6. Respuesta en el tiempo del sistema a lazo cerrado con el controlador PI . . .	49
3.7. Región de Estabilidad $(k_i, k_d)$ . . . . .	52
3.8. Conjunto de valores de $(k_i$ y $k_d)$ para $k_p = -1.0033$ . . . . .	53
3.9. Respuesta en el tiempo del sistema a lazo cerrado con el controlador PID . .	54
3.10. Control Proporcional-Derivativo . . . . .	55
4.1. Diagrama de bloques del Control PD . . . . .	62
4.2. Lugar de las Raíces de la ecuación (4.6) . . . . .	63
4.3. Diagrama de Nyquist: Sistema que cumple la condición de estabilidad $(\tau < \frac{2}{a})$ y toma valores dentro del rango de la conjetura. . . . .	69
4.4. Diagrama de Nyquist: Sistema que NO cumple la condición de estabilidad $(\tau < \frac{2}{a})$ . . . . .	69
5.1. Diagrama de Nyquist del sistema con tiempo de retardo de $\tau = 0.3$ . . . . .	74
5.2. Diagrama de Nyquist del sistema con tiempo de retardo de $\tau = 1.9$ . . . . .	75
5.3. Diagrama de Nyquist del sistema con tiempo de retardo de $\tau = 3$ . . . . .	76
5.4. Controlador PD usando una función propia . . . . .	77
5.5. Salida $y(t)$ del sistema con el Controlador PD usando una función propia . .	78
5.6. Salida $y(t)$ del sistema con el Controlador PD . . . . .	79
5.7. Region $(k_i, k_d)$ . . . . .	80
5.8. Respuesta con el Controlador PID . . . . .	80

5.9. Configuración PID de dos grados de libertad . . . . .	81
5.10. Respuesta con la configuración PID de dos grados de libertad . . . . .	82
5.11. Respuesta con el Controlador PD . . . . .	83
5.12. Salida $y(t)$ del sistema implementado con dispositivos electrónicos . . . . .	84



---

## Resumen

---

Los tiempos de retardo son la propiedad física que se presenta al aplicar una fuerza (acción) que se retarda en su efecto, o bien cuando se transmite físicamente material, energía o información de un lugar a otro, entonces existe un retardo asociado con la transmisión. Los retardos en el tiempo son útiles para modelar sistemas de ingeniería, químicos, de comunicación, entre otros. También son usados para aproximar sistemas de alto orden por sistemas de orden reducido con retardo. Los sistemas retardados inducen frecuentemente a sistemas con oscilaciones, inestabilidad o un mal desempeño, por ello se han elaborado numerosos trabajos de análisis y desarrollo de estrategias de control. El análisis y estudio de estos sistemas en lazo cerrado se vuelve más complejo debido a la aparición del tiempo de retardo en el denominador de la función de transferencia, esto nos lleva a tener sistemas con un número infinito de polos.

Esta tesis presenta las condiciones necesarias y suficientes para la existencia del controlador estabilizante Proporcional Derivativo (PD) para sistemas de primer orden con retardo. Además una vez cumplidas las condiciones para la existencia del controlador se presenta un método sencillo para el cálculo de los parámetros del controlador PD y una conjetura que proporciona la caracterización de los parámetros del controlador estabilizante. También se muestran una serie de simulaciones numéricas que nos ayudarán a comprender un poco más el funcionamiento y cambios que sufre un sistema cuando el tiempo de retardo es mayor, observando así la respuesta satisfactoria del controlador propuesto. Para finalizar se implementa el controlador PD en una planta real construida con amplificadores operacionales, comprobando su desempeño ante variaciones paramétricas ocasionadas por estos dispositivos.



---

## Abstract

---

Time delay is the property of a physical system so that the response to an applied force (action) is delayed in its effect. Whenever material, information or energy is physically transmitted from one place to another, there is a delay associated to the transmission. Time delays are useful for modeling engineering systems, chemical systems, communication systems among others. They are also used to approximate higher order systems by reduced order with delay systems. Delayed systems often induce oscillations, instability or poor performance; so many works have been developed for analysis and development of control strategies. The analysis and study of these closed loop systems become more complex due the time delay in the denominator of the transfer function, this leave us dealing with systems with infinite number of poles.

This thesis presents necessary and sufficient conditions to the existence of the stabilizing Proportional Derivative (PD) to control first order linear systems with time delay. In addition, once the condition for the existence of the controller are given, a simple method to compute the parameters of the PD controller is introduced, as well as a conjecture that provides the characterization of stabilizing controller parameters. Also shows a set of numerical simulations to help us understand a little bit more about the performance and the changes occurred on the system when time delay is greater, observing the satisfactory response of the proposed controller. Finally PD controller is implemented in a real plant built with operational amplifiers, showing its performance against parametric variations caused by the use of electronic devices.



## Objetivo General

Encontrar las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un controlador proporcional derivativo (PD) que establezca un sistema de primer orden inestable con retardo en el lazo directo, simularlo e implementarlo con dispositivos electrónicos.

## Objetivos Particulares

1. Encontrar las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un controlador PD estabilizante de sistemas de primer orden con retardo.
2. Proveer como mínimo un conjunto de parámetros del controlador que estabilicen el sistema.
3. Experimentar en simulación el controlador.
4. Compararlo con otro controlador.



---

## Prefacio

---

En nuestro entorno así como en un proceso industrial los retardos se presentan con frecuencia a la entrada o salida del proceso. Las demoras en el transporte, medición, comunicación y cómputo provocan retardos en los lazos de control. Los retardos también han sido usados en la reducción de modelos, donde sistemas de alto orden son modelados por representaciones de bajo orden con retardo, la dificultad en el trato de estos sistemas se presenta al cerrar el lazo.

Los retardos de tiempo producen comportamientos poco deseados en los sistemas dinámicos (un pobre desempeño, oscilaciones, inestabilidad), por lo que se ha prestado atención especial al estudio y diseño de estrategias para los sistemas retardados.

En algunos sistemas el tamaño del retardo es tal que sus efectos se pueden despreciar, sin embargo hay otros en los cuales su magnitud es tal que no es posible omitirlo y complican el análisis y diseño de controladores para tales sistemas.

Entre las soluciones presentadas podemos encontrar la aproximación del tiempo de retardo con series de Padé, la implementación del predictor de Smith, sus modificaciones en distintos trabajos y los enfoques utilizando distintos controladores como son el control Proporcional (P), Proporcional Derivativo (PD), Proporcional Integral (PI) y el Proporcional Integral Derivativo (PID).

El trabajo presentado a continuación está dedicado al problema de la estabilización de sistemas de primer orden con retardo inestables, se estructura de la siguiente forma:

- El capítulo 1 está dedicado a proporcionar una breve introducción a la teoría de control, al control retroalimentado, controladores del tipo Proporcional (P), Proporcional Derivativo (PD), Proporcional Integral (PI) y Proporcional Integral Derivativo (PID), y a los sistemas con retardo.
- El capítulo 2 presenta el estado del arte donde podemos encontrar algunos enfoques existentes para el análisis de estabilidad de los sistemas con tiempo de retardo, como son: El Predictor de Smith (SP), Aproximación de Padé y Taylor, el teorema de Hermite-Bhieler, con aplicaciones a la teoría de control.
- El capítulo 3 despliega un análisis existente de controladores del tipo  $P$ ,  $PI$  y  $PID$  basados en el teorema de Hermite-Bhieler, dichos controladores aplicados a sistemas de primer orden con retardo inestables, y la posible forma de realizar este estudio haciendo uso del controlador  $PD$ .
- El capítulo 4 presenta el controlador propuesto en este trabajo, así como las condiciones de estabilidad necesarias y suficientes para la existencia del mismo, realizando el análisis en lazo cerrado de sistemas de primer orden inestables.
- El capítulo 5 presenta simulaciones numéricas, así como una implementación con dispositivos electrónicos.
- El capítulo 6 presenta las conclusiones generales, así como posibles trabajos futuros.

# **CAPÍTULO I**

## **Introducción**



# CAPÍTULO 1

---

## Introducción

---

En este capítulo se dará una breve introducción de teoría del control, explicando cómo funciona el control retroalimentado, una descripción de los controladores Proporcional (P), Proporcional Derivativo (PD) (a mayor detalle), Proporcional Integral (PI) y el controlador Proporcional Integral Derivativo (PID); y a los sistemas con retardo, su representación y algunos ejemplos que nos ayudarán a comprender donde podemos encontrar sistemas retardados. Esto servirá como el marco teórico para encaminarnos al resultado de este trabajo presentado en los capítulos siguientes.

### 1.1. Introducción a la teoría del control

La **teoría del control** así como la ingeniería en control trabaja con sistemas dinámicos entre los que podemos mencionar: automóviles, trenes, barcos, aviones, naves espaciales, procesos químicos e industriales, sistemas eléctricos, entre otros. En estos casos el problema de control es que:

1. Existen **variables dependientes** llamadas salidas que pueden ser controladas. En algunos casos es necesario establecer la temperatura y presión de varios puntos en un proceso o la posición y velocidad de un vehículo para alcanzar algún valor determinado,

sin importar variaciones inciertas en el sistema.

2. **Variables independientes** llamadas entradas, como son voltaje aplicado a las terminales de un motor, una válvula de posición, están disponibles para controlar y regular el desempeño de un sistema. Otras variables dependientes como la posición, velocidad o temperatura, son las accesibles como mediciones dinámicas en el sistema.
3. Existen **perturbaciones** desconocidas y en algunos casos impredecibles que impactan el sistema; ejemplo de estas pueden ser, la fluctuación en el nivel de energía de un sistema, perturbaciones como aire muy fuerte en un vehículo, condiciones de humedad y aire en una planta, entre otros.
4. Las ecuaciones dinámicas que describen una planta y los parámetros que contienen dichas ecuaciones, no son conocidas del todo o suelen ser impredecibles.

Estas consideraciones sugieren la siguiente representación general de la planta de un sistema a ser controlado, figura (1.1).

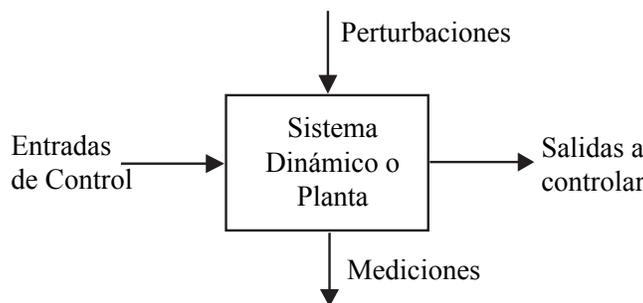


Figura 1.1: Planta general

En la siguiente sección se presenta una breve explicación de como funciona el control retroalimentado, así como las características de los controladores P (Proporcional), PD (Proporcional-Derivativo), PI (Proporcional-Integral) y PID (Proporcional-Integral-Derivativo).

## 1.2. Control Retroalimentado

Un sistema de control en su configuración estándar, compuesto por una planta y un controlador forman un bucle cerrado en el que cada parte juega un papel importante sobre el

otro. La entrada a la planta  $u$  depende a través del controlador de la variable controlada  $y$ , la cuál a su vez depende de la entrada por la dinámica de la planta. Este fenómeno se llama realimentación o retroalimentación.

### 1.2.1. Sistemas a Lazo cerrado

La **retroalimentación** se considera un concepto general para controlar sistemas, las plantas químicas, por ejemplo tienen ciertos bucles para hacer que la temperatura, presión o flujo permanezcan en los niveles deseados a pesar de la influencia que ejercen señales externas (medibles o no).

En este documento veremos los sistemas retroalimentados desde el punto de vista de control ingenieril, el cual tiene como propósito encontrar un controlador para conseguir o mantener la estabilidad. Un sistema realimentado consta de un proceso dado con unas propiedades físicas dadas y un controlador que podrá ser elegido de manera libre.

El principal beneficio de la realimentación no puede deducirse sin la consideración de las incertidumbres en el comportamiento de la planta. Hay dos razones por las que la salida de la planta  $y$ , para una entrada dada  $u$ , produce una trayectoria que no está totalmente determinada previamente. Primero, la dinámica de la planta no se conoce completamente, por lo que el modelo de la planta sólo puede considerarse como una aproximación más que como una descripción exacta. Segundo, perturbaciones desconocidas pueden influir en el comportamiento del sistema. En este caso, la salida  $y$  no es sólo la respuesta a la señal de control  $u$ , sino a las perturbaciones denotada por  $d$ , que es generalmente indeterminada en el sentido que puede ser cualquier cosa dentro de un conjunto de posibles señales de perturbación, como se muestra en la figura (1.2).

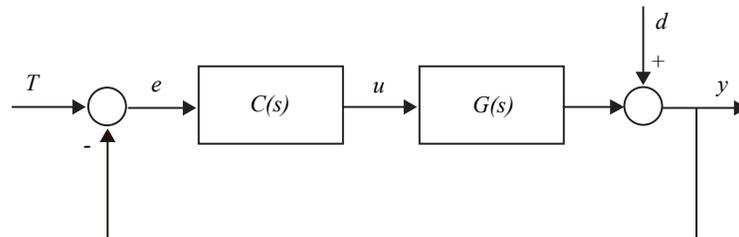


Figura 1.2: Lazo cerrado

Indeterminaciones de esta clase ocurren en menor o mayor medida en todos los problemas de control, debido al proceso de modelado y diseño, el sistema a ser controlado tiene que ser considerado fuera de su entorno. Usualmente no es fácil saber que fenómenos tienen que ser considerados como parte de la planta o como conexiones entre la planta y su entorno, y cuales no. [17]

### 1.3. Controladores

En general, la dinámica de un **proceso lineal** controlado puede representarse por el diagrama mostrado en la figura (1.2).

El objetivo de diseño es que las variables controladas, representadas por el vector de salida  $y(t)$ , se comporte en cierta forma deseada. El problema esencialmente involucra determinar la señal de control  $u(t)$  dentro de un intervalo prescrito para que todos los objetivos de diseño sean satisfechos.

#### 1.3.1. Controlador Proporcional

Existen varias formas de configurar un controlador, la configuración más comúnmente utilizada es; colocar el controlador en serie con el proceso controlado, ésta configuración es llamada compensación en serie o en cascada, la cual utilizaremos en este trabajo.

El **control P** (proporcional) es el más simple, como se muestra en la figura (1.3), que es la representación del diagrama de bloques de un sistema de control retroalimentado que tiene un proceso prototipo y un controlador del tipo proporcional, el control en serie "P" puede ser representado con la función de transferencia:

$$C(s) = k_p \quad (1.1)$$

En donde  $k_p$  es la constante proporcional.

#### 1.3.2. Controlador Proporcional-Derivativo

La figura (1.4) muestra el diagrama de bloques de un sistema de control realimentado que tiene un proceso prototipo y un controlador del tipo Proporcional-Derivativo, el **control PD** en serie puede ser representado con la función de transferencia:

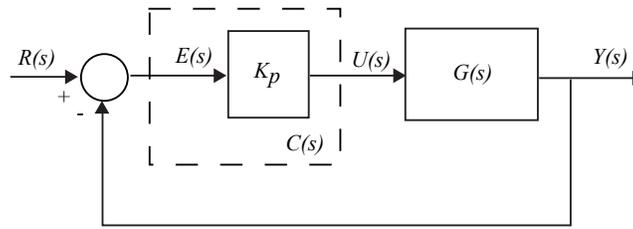


Figura 1.3: Control Proporcional

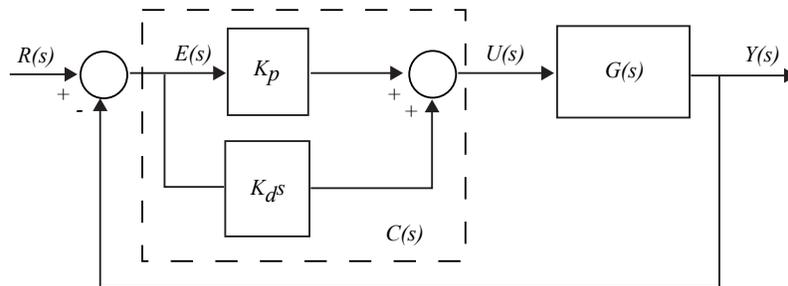


Figura 1.4: Control Proporcional-Derivativo

$$C(s) = k_p + k_d s \quad (1.2)$$

En donde  $k_p$  y  $k_d$  son las constantes proporcional y derivativa, respectivamente. Empleando componentes electrónicos dicho controlador podría realizarse de dos formas. La función de transferencia del circuito de la figura (1.5) es:

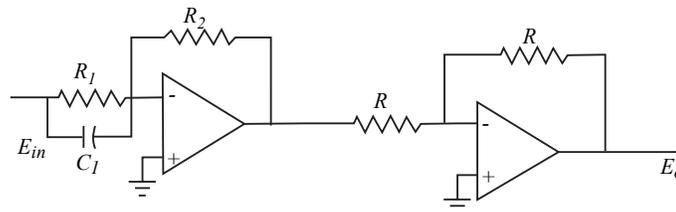


Figura 1.5: Circuito con dos amplificadores operacionales del controlador PD

$$C(s) = \frac{E_0(s)}{E_{in}(s)} = \frac{R_2}{R_1} + R_2 C_1 s \quad (1.3)$$

Al comparar la ecuación (1.2) con la ecuación (1.3) se tiene:

$$k_p = \frac{R_2}{R_1} \quad y \quad k_d = R_2 C_1 \quad (1.4)$$

La función de transferencia del circuito de la figura (1.6) es:

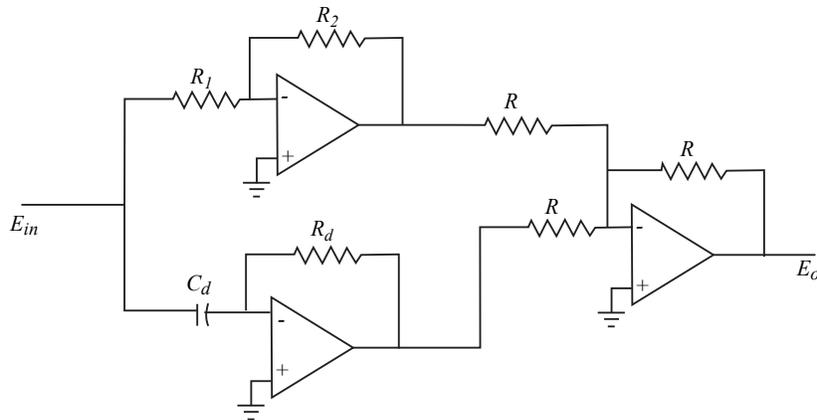


Figura 1.6: Circuito con tres amplificadores operacionales del controlador PD

$$C(s) = \frac{E_0(s)}{E_{in}(s)} = \frac{R_2}{R_1} + R_d C_d s \quad (1.5)$$

Al comparar la ecuación (1.2) con la ecuación (1.5), se tiene:

$$k_p = \frac{R_2}{R_1} \quad y \quad k_d = R_d C_d \quad (1.6)$$

La diferencia del circuito de la figura (1.5) con el de la figura (1.6) es que el primero sólo emplea un amplificador operacional, pero no permite la selección de  $k_p$  y  $k_d$  de forma independiente, ya que son comúnmente dependientes de  $R_2$ , cosa que es posible en el segundo caso, un hecho importante del controlador PD es que si el valor de  $K_d$  es grande, se requiere un capacitor  $c_1$  grande. En el segundo caso esto puede ser contrarrestado seleccionando un valor grande para  $R_d$  lo que podría producir un valor más realista de  $C_d$ , aunque el enfoque dado no incluye todos los temas prácticos involucrados en la implementación de funciones de transferencia, estos temas son de suma importancia en la práctica.

El controlador PD equivale a añadir un cero simple en la función de transferencia en la trayectoria directa. El efecto del control PD sobre la respuesta transitoria de un sistema de control se puede investigar al referirse a la respuesta en el tiempo mostrada en la figura (1.7).

Se supone que la respuesta escalón unitario de un sistema estable con el control proporcional es como la representación en la figura (1.7(a)), la cual tiene un sobrepaso máximo relativamente grande y es un poco oscilatorio. La señal de error correspondiente, que es la diferencia entre la entrada escalón unitario y la salida  $y(t)$ , y su derivada en tiempo  $d_e(t)/dt$  se muestran en la figura (1.7 (b) y (c)) respectivamente. Las características de sobrepaso y oscilación también se reflejan en  $e(t)$  y  $d_e(t)/dt$ .

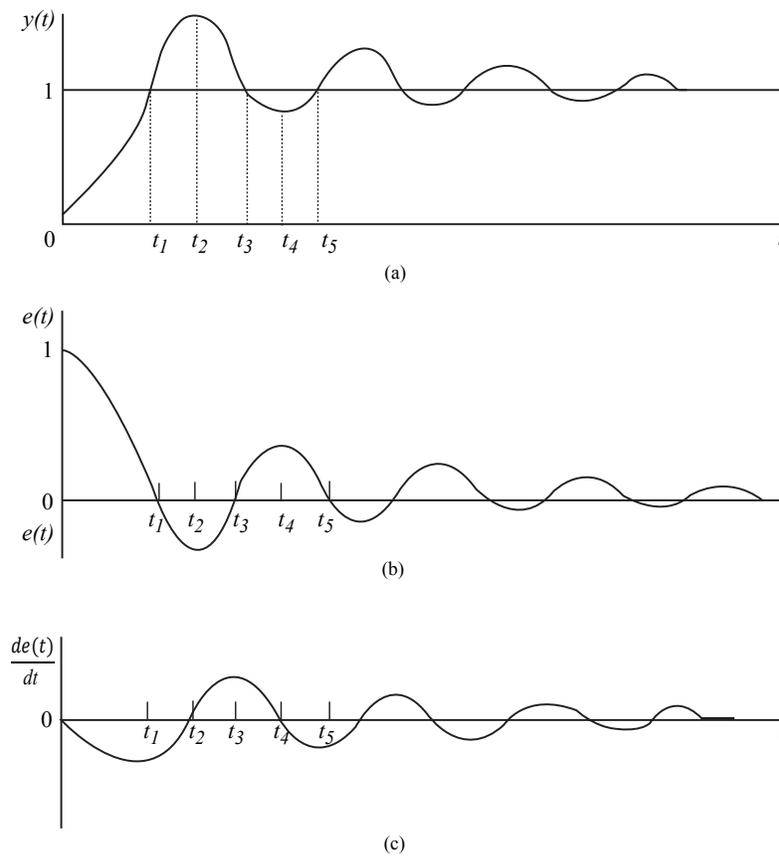


Figura 1.7: Formas de onda de  $y(t)$ ,  $e(t)$ , y  $d_e(t)/dt$  que muestran el efecto del control derivativo. (a) Respuesta al escalón unitario. (b) Señal de error. (c) Tasa de cambio de la señal de error.

Otra forma de ver el control derivativo debido a que  $d_e(t)/dt$  representa la pendiente de  $e(t)$ , el control  $PD$  es esencialmente un control anticipativo. Esto es, al conocer la pendiente, el controlador puede anticipar la dirección del error y emplearla para controlar mejor el

proceso. Normalmente, en sistemas lineales si la pendiente de  $e(t)$  o  $y(t)$  debida a la entrada escalón es grande, subsecuentemente ocurrirá un sobrepaso alto. El control derivativo mide la pendiente instantánea de  $e(t)$ , predice el sobrepaso grande adelante en tiempo, y hace un esfuerzo correctivo antes de que el sobrepaso excesivo ocurra.

En forma intuitiva, el control derivativo afecta el error en estado estable de un sistema sólo si el error en estado estable varía con el tiempo. Si el error en estado estable de un sistema es constante con respecto al tiempo, la derivada con respecto al tiempo de este error es cero, y la porción derivativa del controlador no provee ninguna entrada al proceso. Pero si el error en estado estable incrementa con el tiempo, se genera otra vez un par en proporción a  $d_e(t)$ , lo cual reduce la magnitud del error.

### Efectos de un control PD

Un control PD diseñado adecuadamente afectará el desempeño de un sistema de control en las formas siguientes:

1. Mejora el amortiguamiento y reduce el sobrepaso máximo.
2. Reduce el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento.
3. Incrementa el ancho de banda BW.
4. Mejora el margen de ganancia, el margen de fase y el pico de resonancia  $M_r$ .
5. Puede acentuar el ruido en altas frecuencias.
6. Puede requerir un capacitor muy grande en la implementación del circuito.

### 1.3.3. Controlador Proporcional-Integral

La figura (1.8) ilustra un sistema con un **controlador PI** (proporcional-integral) en serie. La función del controlador PI es:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} \quad (1.7)$$

En donde  $k_p$  y  $k_i$  son las constantes proporcional e integral, respectivamente. Empleando componentes electrónicos dicho controlador podría realizarse de dos formas mediante circuitos electrónicos. La función de transferencia del circuito de la figura (1.9) es:

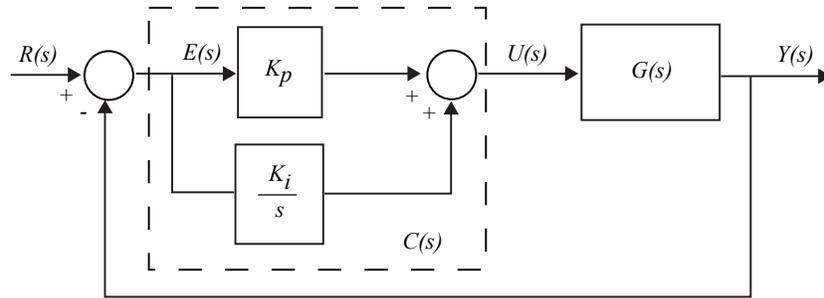


Figura 1.8: Control Integral

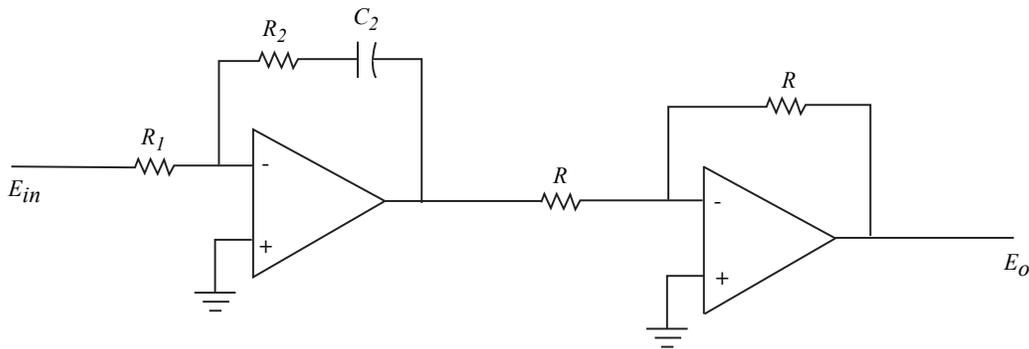


Figura 1.9: Circuito con dos amplificadores operacionales del controlador PI

$$C(s) = \frac{E_o(s)}{E_{in}(s)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 C_2 s} \quad (1.8)$$

Al comparar la ecuación (1.7) con la (1.8), se tiene:

$$k_p = \frac{R_2}{R_1} \quad y \quad k_i = \frac{R_2}{R_1 C_2 s} \quad (1.9)$$

La función de transferencia del circuito de tres amplificadores operacionales de la figura (1.10) es:

$$C(s) = \frac{E_o(s)}{E_{in}(s)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_i C_i s} \quad (1.10)$$

Por lo tanto, los parámetros del controlador PI están relacionados con los parámetros del circuito como:

$$k_p = \frac{R_2}{R_1} \quad y \quad k_i = \frac{1}{R_i C_i} \quad (1.11)$$

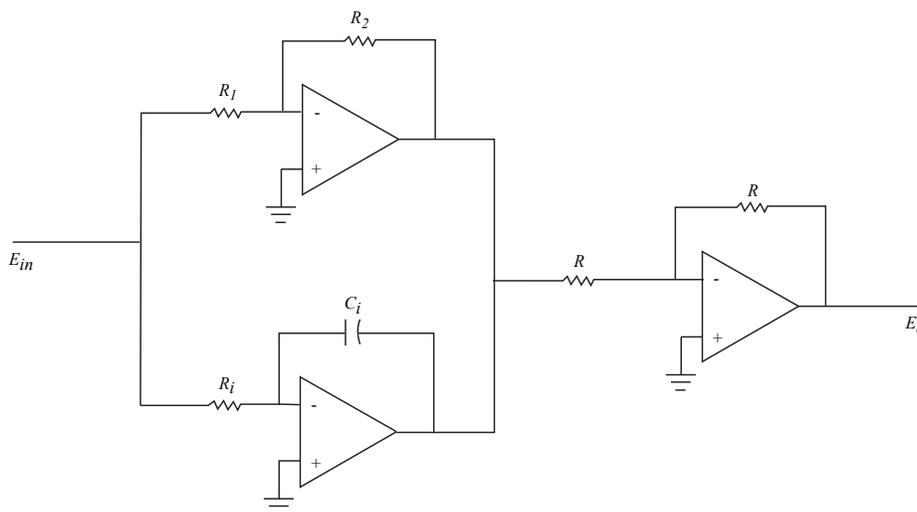


Figura 1.10: Circuito con tres amplificadores operacionales del controlador PI

La ventaja con el circuito de la figura (1.10) es que los valores de  $k_p$  y  $k_i$  están relacionados en forma independiente de los parámetros del circuito. Sin embargo,  $k_i$  es inversamente proporcional al valor del capacitor. Desafortunadamente, los diseños efectivos del control *PI* resultan en valores pequeños de  $k_p$  y por tanto, se debe tener cuidado con los valores reales del capacitor.

Un control PI diseñado adecuadamente afectará el desempeño de un sistema de control en las formas siguientes:

1. Realiza seguimiento de señales de tipo escalón.
2. Rechaza perturbaciones de tipo escalón.
3. Mejora el amortiguamiento y reduce el sobrepasó máximo.
4. Incrementa el tiempo de levantamiento.
5. Disminuye el ancho de banda.
6. Mejora el margen de ganancia, el margen de fase y el pico de resonancia  $M_r$ .
7. Filtra el ruido de alta frecuencia.

8. El problema en la combinación adecuada de  $k_i$  y  $k_p$  para que el capacitor en la implementación del circuito no sea excesivamente grande, podría resultar más agudo que en el control PD.

### 1.3.4. Controlador Proporcional-Integral-Derivativo

De lo anterior es posible ver que el controlador *PD* puede añadir amortiguamiento a un sistema, pero no afecta la respuesta en estado estable. El controlador *PI* puede mejorar la estabilidad relativa y el error en estado estable al mismo tiempo, pero el tiempo de levantamiento se incrementa, esto conduce a emplear un controlador *PID* para hacer uso de las mejores características de los controladores *PD* y *PI*.

La figura (1.11) ilustra un sistema con un **controlador PID** en serie. La función del controlador PID es:

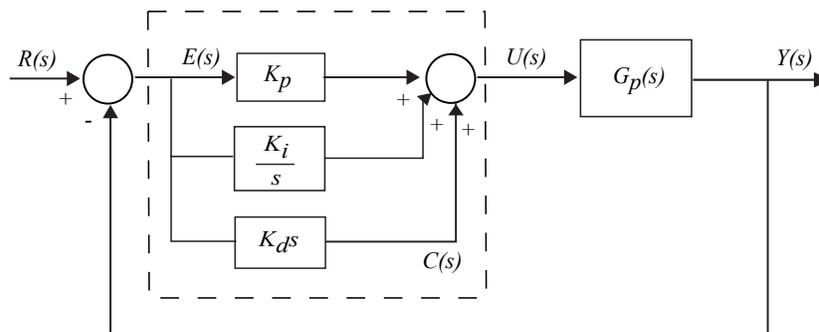


Figura 1.11: Controlador PID

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (1.12)$$

En donde  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$  son las constantes proporcional, diferencial e integral, respectivamente.

## 1.4. Sistemas con retardo

Los **sistemas con retardo** con frecuencia aparecen en ingeniería, la mayoría de las reacciones de sistemas reales (en ingeniería) a acciones de señales externas, por lo general no operan instantáneamente. Las mismas propiedades se cumplen para sistemas reales interconectados o procesos en los que la transferencia de (materiales, energía o información) puede ocurrir debido a leyes físicas o químicas [12]. En otros casos (biológicos o de dinámicas

de población), el supuesto de que el estado futuro del sistema es independiente de los estados pasados y sólo depende de la actualidad parece ser insuficiente para describir la evolución de estos sistemas. Una de las maneras para superar estos problemas consiste en incluir en el modelo matemático de la dinámica del sistema información sobre lo pasado. La presencia de retardos de tiempo (en especial largos) hacen el análisis y diseño de controladores sea una tarea más complicada. Esta sección está enfocada en presentar una breve introducción a los sistemas con retardo, así como ejemplos donde se presentan; observaremos que esto es un evento más común de lo que pareciera [28, 14].

#### 1.4.1. Ecuaciones características para sistemas con retardo

El diagrama de bloques mostrado en la figura (1.12) puede representar un tiempo de retardo:

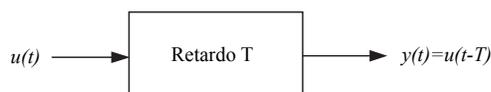


Figura 1.12: Representación del retardo

En un sistema dinámico con retroalimentación que contiene tiempo de retardo, la ecuación del sistema toma la forma mostrada en la ecuación(1.13):

$$\dot{y}(t) + ay(t - T) = u(t) \quad (1.13)$$

El diagrama de bloques de la representación anterior es mostrada en la figura (1.13).

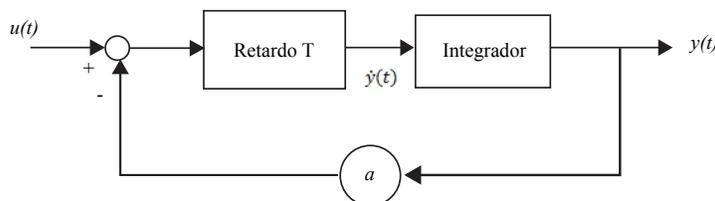


Figura 1.13: Sistema retroalimentado con retardo

Si el retardo se encuentra en la entrada, la ecuación del sistema toma la forma mostrada

en la ecuación (1.14):

$$\dot{y}(t) + ay(t) = u(t - T) \quad (1.14)$$

Con su representación en bloques mostrada en la figura (1.14).

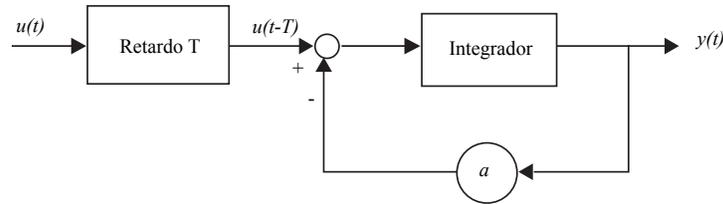


Figura 1.14: Sistema con retardo a la entrada

En algunos otros casos podemos encontrar el retardo en el lazo directo, que se puede representar con la ecuación. (1.15):

$$\dot{y}(t) = -ay(t - T) + u(t - T) \quad (1.15)$$

### 1.4.2. Retardo de tiempo y algunos ejemplos

Los **retardos de tiempo** son una propiedad que presentan una numerosa cantidad de sistemas físicos, biológicos y de comunicación en los que se aplica una acción y ésta es retardada en su efecto final. El valor numérico atribuido a un retardo es determinado directamente por la distancia y la velocidad de transmisión. Los sistemas con retardo (en especial retardos largos) complican el análisis cuando se cierra el lazo, así como el diseño de controladores apropiados.

Los sistemas con retardo, llamados también hereditarios o con memoria, de acción posterior o de efecto rezagado, pueden presentarse en un sinnúmero de situaciones de las que citaremos algunos ejemplos:

- Los sistemas de comunicación presentan inevitablemente tiempo de retardo. Un ejemplo de esto es el control remoto de vehículos, por ejemplo el robot lunar "the Lunokhod 1". Cuando es necesario transmitir instrucciones de la tierra a un robot móvil en la luna el tiempo de retardo es el tomado por la señal en viajar de al tierra a la luna y viceversa, lo cual debe ser tomado en cuenta en los sistemas de comunicación, en este ejemplo

depende de la velocidad de la señal y la distancia entre la tierra y la luna, como se muestra en la figura (1.15).

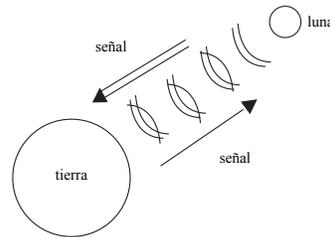


Figura 1.15: Esquema del sistema de comunicaciones

- En los procesos químicos es frecuente encontrar tiempos de retardo un ejemplo es una cámara de calentamiento con un tubo largo como el mostrado en figura (1.16), el agua es calentada mediante una resistencia eléctrica e inyectada por una bomba a lo largo de un tubo de aislamiento térmico para la salida del sistema. La entrada de control es la potencia  $W$  en la resistencia y la producción de la planta es la temperatura  $T$  al final de la tubería. Un modelo lineal del proceso se puede obtener con un procedimiento de prueba de identificación cercano a un punto de funcionamiento  $W_0, T_0$ . Cuando un paso positivo se aplica a  $W$ , la temperatura dentro del tanque comienza a incrementarse. A medida que el tubo está lleno de agua con temperatura inicial  $T_0$ , este cambio no se percibe de inmediato en la salida y es necesario esperar hasta que el agua caliente llega al final de la tubería antes de que se note. Por lo tanto, después de un tiempo muerto, definido por el flujo y la longitud de la tubería, la temperatura de salida  $T$  comienza a subir con la misma dinámica que la temperatura dentro del tanque. Cuando un flujo constante de agua  $F$  es utilizado, el tiempo muerto  $\tau$  se puede estimar con  $F$  y el volumen  $V$  de la tubería de la siguiente manera:

$$\tau = \frac{V}{F}$$

Supongamos que el modelo lineal es usado para representar la relación de las dinámicas entre las variaciones de  $T_i(\Delta T_i)$  y las variaciones de  $W(\Delta W)$ .

La función de transferencia entre  $T_i(\Delta T_i)$  y  $W(\Delta W)$  ésta dada por:

$$G(S) = \frac{\Delta T_i(s)}{\Delta W(s)} \Rightarrow \Delta T_i(s) = G(s)\Delta W(s)$$

Si es considerado un tiempo de retardo genérico  $\tau$ , y usando la transformada de Laplace ( $\mathcal{L}[x(t + \tau)] = e^{\tau s} \mathcal{L}[x(t)]$ ), esto es:

$$\Delta T_i(s) = e^{\tau s} \Delta T(s) \Rightarrow \Delta T(s) = \Delta T_i(s) e^{-\tau s}$$

En consecuencia obtenemos:

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta W(s)} = G(s) e^{-\tau s} \quad \tau > 0$$

Que es el modelo lineal más usado para representar el comportamiento del proceso. [14]



Figura 1.16: Cámara de calentamiento con un tubo largo

- Los sistemas de ingeniería no son los únicos con retardos, en las últimas décadas ha habido importantes avances en el modelado de sistemas ecológicos, de dinámicas de población o biomédicos, en estos sistemas se utilizan retardos para su representación.

En un sistema biológico, la transmisión de una señal de control está asociada a algún tiempo excesivo como puede ser procesos de reproducción, desarrollo o extinción, Además, el principio de interconexión y los retrasos relacionados con la transmisión son características naturales de cualquier estructura biológica compleja, visto de otra forma la evolución de los sistemas biológicos dependen esencialmente de toda la historia, en conclusión, estamos tratando con sistemas retardados.

Un ejemplo un poco más concreto y simple que podemos mencionar es el crecimiento de población. Denote  $x(t)$  como el número de individuos en un tiempo dado  $t$  en una bien definida población. Asuma que todo miembro de la población tiene un tiempo de vida  $\tau$ , y que el número de cumpleaños por unidad de tiempo depende solamente de

$x(t)$ . En términos generales tendríamos un modelo de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) - f(x(t - \tau)) \quad (1.16)$$

Sin embargo, este tipo de sistemas son difíciles de modelar debido al número de parámetros y factores a considerar, como son: heterogeneidad de la población en edad (población dinámica), la competencia (ecología), la interacción de otros entornos [12].

## 1.5. Conclusiones

Este capítulo se presentó una breve introducción a la teoría de control, como funciona el control retroalimentado, la descripción de una variedad de controladores como son el control  $P$ ,  $PD$ ,  $PI$  y  $PID$ , con lo cual el lector podrá comparar y evaluar las características del controlador que se propondrá en capítulos posteriores, así como situarse dentro del mundo de los retardos y en que lugares podemos encontrar sistemas de estas características.

## 1.6. Referencias

Los temas abordados en este capítulo pueden ser complementados con la revisión de los autores y distintos títulos presentados con anterioridad, donde podemos ahondar en el tema como son; [16] donde el lector podrá indagar más sobre teoría de control, [7] en este una completa descripción de las características de los controladores  $P$ ,  $PD$ ,  $PI$  y  $PID$ , [12, 9, 14] dentro de estos textos conseguirá conocer más sobre sistemas con tiempo de retardo.



## CAPÍTULO II

# Estado Del Arte



En este capítulo se presenta un breve resumen de algunos teoremas y algunos enfoques de control utilizados para los sistemas retardados. A partir de la década de 1950, el control de sistemas con retardo ha sido ampliamente estudiado, sobre todo en los últimos años. Entre las técnicas de control empleadas para abordar los sistemas con retardo, podemos mencionar el predictor de Smith, así como algunos enfoques basados en métodos de aproximación, y algunos haciendo uso de los controladores mencionados en el capítulo anterior como son control P, PI, y PID, estos basados en el teorema de Hermite-Biehler.

### 2.1. Predictor de Smith

El **Predictor de Smith (SP)**, propuesto en 1957 por Otto J. M. Smith, tiene como principal objetivo diseñar un controlador para sistemas con una entrada y una salida (SISO) lineales invariantes en el tiempo con retardo tal que, como resultado se obtenga una respuesta retardada de un sistema libre de retardo. En otras palabras, el retardo es trasladado hacia afuera del lazo de retroalimentación. Gracias a esto, el diseño y el análisis del sistema son simplificados considerablemente [8, 28].

Los primeros intentos por aplicar e implementar el SP demostraron que los métodos

clásicos de análisis y diseño no eran adecuados para el estudio del SP o esquemas similares de control. Investigaciones teóricas desarrolladas a finales de la década de 1970 y comienzos de la década de 1980 aclararon algunas de las propiedades del SP y ofrecieron herramientas que permitieron entenderlo de mejor forma. A lo largo de los últimos años, han sido realizados numerosos estudios acerca de las características del SP, tanto en la industria como en el ámbito académico. Diversas modificaciones han sido desarrolladas con el fin de extender los alcances del SP a sistemas de múltiple entrada y múltiple salida (MIMO), incluso con múltiples retardos.

Un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI), con una entrada una salida (SISO), con un retardo en la entrada es representado en el espacio de estados de la siguiente manera:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Donde  $x \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de estados,  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada de control y la variable  $y \in \mathbb{R}$  representa la salida.  $A, B, C$  son matrices de dimensiones adecuadas y  $\tau$  es el tiempo de retardo. Del mismo modo, un sistema LTI, SISO con retardo en la salida es representado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.2)$$

$$y(t) = Cx(t - \tau)$$

La función de transferencia para ambos casos, ya sea con retardo en la entrada (2.1) o con retardo en la salida (2.2) está dada por:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = P(s) = P_o(s)e^{-\tau s} \quad (2.3)$$

Donde:

$$P_o(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2.4)$$

Siendo  $P_o(s)$  una función de transferencia racional de orden "n". La presencia del retardo  $\tau$  en el lazo de control complica el análisis de estabilidad y el diseño de control para tales sistemas, el retardo degrada la calidad del control debido a una inevitable reducción en el valor de las ganancias de control.

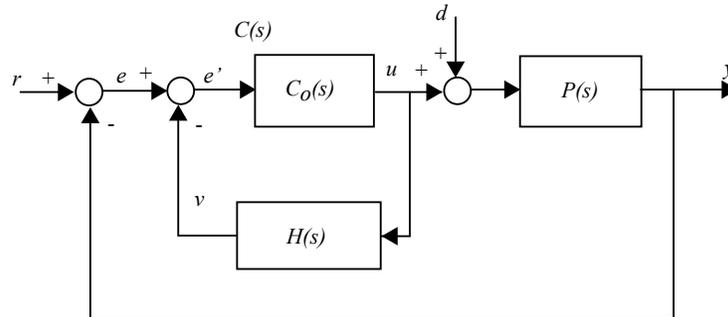


Figura 2.1: Configuración clásica de un sistema incorporando el predictor de Smith

La configuración clásica del predictor de Smith implementada a un proceso es mostrada en la figura (2.1)

La principal idea básica del SP es implementar un lazo de retroalimentación local al controlador principal  $C_o(s)$  usando el predictor de Smith  $H(s)$ , aquí, la planta  $P(s) = P(s)e^{-\tau s}$  se asume estable, y el SP representado por la ecuación (2.6) es implementando utilizando los modelos de la parte libre de retardo del sistema  $P_o(s)$ , y de la planta  $P_o(s)e^{-\tau s}$ .

$$H(s) = P(s) - P(s)e^{-\tau s} \quad (2.5)$$

Suponga que  $d = 0$  y que no existen errores en el modelado del sistema, entonces tenemos:

$$y + v = P(s)u(s) + H(s)u(s) \quad (2.6)$$

$$= P(s)u(s) \quad (2.7)$$

$$= P(s)e^{-\tau s}u(s)e^{\tau s}$$

$$= ye^{-\tau s}$$

La señal de retroalimentación para el controlador  $C_o(s)$  es una versión adelantada  $\tau$  unidades de tiempo de la salida  $y$  del sistema. Esto explica el nombre de Predictor de Smith. Siendo  $P(s)$  estable, el sistema mostrado en la figura (2.1) es equivalente al sistema mostrado en la figura (2.2), el cual es una versión del SP dada como modelo de control interno (IMC). Cuando el modelo utilizado en el Predictor es exactamente el mismo que en la planta, (el caso

ideal), la perturbación  $d = 0$  y la señal  $y_o = 0$ , así que el lazo de retroalimentación externo puede ser considerado como abierto, por lo tanto la función de transferencia del sistema en lazo cerrado resultante es:

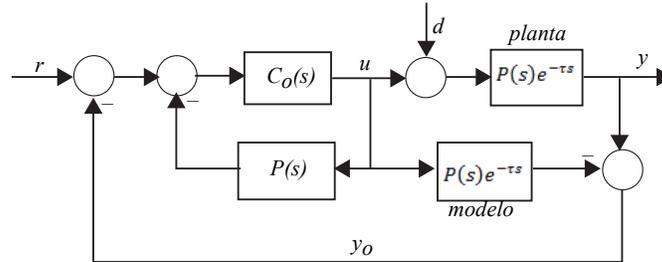


Figura 2.2: Control por Modulo Interno(IMC) para el Predictor de Smith.

$$P_r = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C_o(s)P(s)e^{-\tau s}}{1 + C_o(s)P(s)} \quad (2.8)$$

En este caso, el sistema en lazo cerrado puede ser simplificado al sistema mostrado en la figura (2.3), es fácil observar que el retardo ha sido desplazado fuera del lazo de retroalimentación, gracias a esto el controlador principal  $C_o(s)$  puede ser diseñado tomando en cuenta solamente la parte del sistema libre de retardo  $P(s)$ . Esto implica que la restricción antes mencionada en el tamaño de las ganancias en el controlador no exista más, al menos explícitamente. Mientras que la eliminación del término de retardo en la ecuación característica

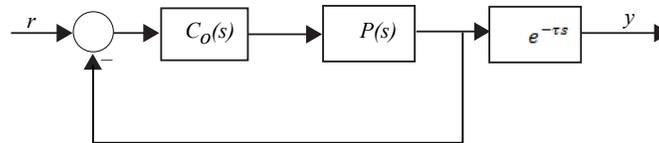


Figura 2.3: Predictor de Smith simplificado

del sistema es la principal mejora que se obtiene al implementar el SP, el diseño del controlador no debe basarse en la ecuación (2.8) o en el sistema equivalente mostrado en la figura (2.3). Esto es debido a que, mientras los dos sistemas son equivalentes en cuanto a la relación entrada-salida, poseen propiedades de sensibilidad completamente distintas. Esto quiere decir

que, el sistema en lazo cerrado con un SP, puede perder estabilidad bajo diferencias en el modelo infinitésimales. Debido a esto, una desventaja que presenta el SP clásico es que sólo puede ser aplicado a sistemas estables [8], [28].

## 2.2. Aproximación de Padé

En el control de procesos, a menudo encontramos sistemas que pueden ser descritos por funciones de transferencia con retardos de tiempo, como lo vimos en el capítulo anterior. Para propósitos de diseño y análisis, estos retrasos por lo general son aproximados por funciones de transferencia racionales. Existen muchas formas de aproximar  $e^{-\tau s}$  por una función racional. Una forma de aproximar la función exponencial es mediante una **serie de Maclaurin**; esto es:

$$e^{-\tau s} \cong 1 - \tau s + \frac{\tau^2 s^2}{2}$$

o

$$e^{-\tau s} \cong \frac{1}{1 + \tau s + \tau^2 s^2 / 2}$$

En donde sólo se utilizan tres términos de la serie. Entre más grande sea el orden de la aproximación, será más parecida la aproximación a la representación exponencial del retardo. Una aproximación mejor es la de **Padé**, la cual está dada por una aproximación de dos términos.

$$e^{-\tau s} \cong \frac{N_r(s\tau)}{D_r(s\tau)}$$

Donde:

$$N_r(s\tau) = \sum_{k=0}^r \frac{(2r-k)!}{k!(r-k)!} (-s\tau)^k$$

$$D_r(s\tau) = \sum_{k=0}^r \frac{(2r-k)!}{k!(r-k)!} (s\tau)^k$$

Aquí  $r$  representa el orden de la aproximación. La aproximación de **Padé** de primer orden del término de retardo es:

$$e^{-s\tau} \cong \frac{2 - \tau s}{2 + \tau s} \quad (2.9)$$

Debido a que la aproximación de Padé es una función de orden específico, es más sencillo utilizar herramientas analíticas, tales como el criterio de Routh Hurwitz, que están restringidas a funciones de transferencia racionales, otra podría ser el lugar geométrico de las raíces.

La característica de la aproximación de la ecuación (2.9) es que la función de transferencia contiene un cero en el semiplano derecho "s", por lo que la respuesta al escalón del sistema aproximado puede representar un sobrepaso negativo pequeño cercano a  $t = 0$ .

Note que un modelo de orden muy elevado dará lugar a complicados análisis y posiblemente a controladores de muy alto orden.

### 2.3. Teorema de Hermite-Biehler

La estabilización de sistemas lineales libres de tiempo de retardo son relativamente fáciles de estudiar, debido a que en su ecuación característica presentan un número finito de raíces. Sin embargo cuando un tiempo de retardo se introduce en el sistema, esta facilidad cambia; el número de raíces no es finito, haciendo que la estabilidad de un sistema retardado se convierta en una tarea más compleja.

En esta sección estudiaremos funciones de la forma  $f(s, e^s)$ , donde  $f(s, t)$ , es un polinomio en dos variables, llamado cuasi-polinomio. Antes de presentar el resultado al que llegaron en [21], se mostrarán notaciones y teoremas utilizados en el mismo.

Tenemos que  $f(s, t)$  es un polinomio en dos variables con coeficientes reales y complejos definido como sigue:

$$f(s, t) = \sum_{h=0}^M \sum_{k=0}^N a_{hk} s^h t^k$$

**Definición 2.3.1** *Se dice que  $f(s, t)$  tiene un término principal si contiene un coeficiente diferente de cero  $a_{hk}$ , donde ambos términos contienen un valor máximo. Sin perder generalidad, denotaremos el término principal como  $a_{MN} s^M t^N$ . Esto significa que para cada término  $a_{hk} s^h t^k$  para  $a_{hk} \neq 0$ , tenemos entonces  $M > h$ ,  $N > k$ ; ó  $M = h$ ,  $N > k$ ; ó  $M > h$ ,  $N = k$ .*

**Ejemplo 2.3.1** *Este ejemplo demuestra la definición anterior:*

$$f(s, t) = 5s + 4t^2$$

*No contiene un término principal. En contra parte el polinomio del ejemplo siguiente si contiene un término principal:*

$$f(s, t) = s^3 + t + 3s^3 t$$

**Teorema 2.3.1** *Si el polinomio  $f(s, t)$  no contiene un término principal, entonces la función  $F(s) = f(s, e^s)$  tiene un número infinito de polos con arbitrariamente grandes partes reales positivas.*

Si  $f(s, t)$  tiene término principal, el principal resultado de Pontryagin muestra que el teorema de Hermite-Biehler se extiende a funciones de la clase  $F(s) = f(s, e^s)$ . Antes de presentar la generalización del **teorema de Hermite-Biehler**, primero necesitamos analizar los polos de la función de la forma  $g(s, \cos(s), \sin(s))$ .

Teniendo  $g(s, u, v)$  es un polinomio con coeficientes reales en las variables  $s, u$  y  $v$  que podemos representar de la siguiente forma:

$$g(s, u, v) = \sum_{h=0}^M \sum_{k=0}^N s^h \phi_h^{(k)}(u, v) \quad (2.10)$$

Aquí  $\phi_h^{(k)}(u, v)$  es un polinomio de grado  $k$ , homogéneo en  $u$  y  $v$ . Asumimos que  $\phi_h^{(k)}(u, v)$  no es divisible por  $u^2 + v^2$ , por ejemplo:

$$\phi_h^{(k)}(1, \pm j) \neq 0 \quad (2.11)$$

El término principal en el polinomio de la ecuación(2.10) es el término  $s^M \phi_M^{(N)}(u, v)$ , para las que  $h$  y  $k$  simultáneamente alcanzan un valor máximo, que es, para toda  $h$  y  $k$ , tenemos que  $M > h, N > k$ ; ó  $M = h; N > k$ ; ó  $M > h, N = k$ . Además, tenemos  $\phi^{*(N)}(u, v)$  denota el coeficiente de  $s^M$  en la ecuación(2.10), por ejemplo:

$$\phi^{*(N)}(u, v) = \sum_{k=0}^N \phi_M^{(k)}(u, v)$$

Ahora considerando una función trascendental:

$$G(s) = g(s, \cos(s), \sin(s))$$

que asume los valores reales de los verdaderos valores del argumento. Se darán condiciones necesarias y suficientes para la función  $G(s)$  teniendo sólo polos reales en términos del comportamiento en el dominio real. Con este fin, tenemos:

$$\Phi^{*(N)}(s) := \phi^{*(N)}(\cos(s), \sin(s))$$

es una función que es claramente periódica con período  $2\pi$ .

**Teorema 2.3.2** Sea  $g(s, u, v)$  un polinomio con término principal dado por  $s^M \phi_M^{(N)}(u, v)$ . Si  $\eta$  es tal que  $\Phi^{*(N)}(\eta + jw)$  no toma el valor de cero para un  $w$  real, entonces iniciamos con un valor suficientemente largo de  $l$ , la función  $G(s)$  tiene exactamente  $4lN + M$  polos en la tira  $-2l\pi + \eta \leq \text{Re}[s] \leq 2l\pi + \eta$ . Así para la función  $G(s)$  tiene solamente raíces reales, esto es necesario y suficiente en el intervalo

$$-2l\pi + \eta \leq \text{Re}[s] \leq 2l\pi + \eta$$

Tiene exactamente  $4lN + M$  raíces reales que empiezan con algún valor suficientemente largo de  $l$ .

Ahora regresemos a la función  $F(s) = f(s, e^s)$  en la presencia de un término principal. Recalquemos que la función  $f(s, t)$  fue dada por:

$$f(s, t) = \sum_{h=0}^M \sum_{k=0}^N a_{hk} s^h t^k \quad (2.12)$$

y el término principal es  $a_{MN} s^M t^N$ , la cual rescribiremos como sigue:

$$f(s, t) = s^M X^{*(N)}(t) + \sum_{h=0}^{M-1} \sum_{k=0}^N a_{hk} s^h t^k \quad (2.13)$$

Donde  $X^{*(N)}(t)$  es el coeficiente de  $s^M$ . Por lo tanto  $X^{*(N)}(t)$  está dada por:

$$X^{*(N)}(t) = \sum_{k=0}^N a_{Mk} t^k$$

Ahora se introduce la siguiente definición para el entrelazado.

**Definición 2.3.2** Sea  $F(s) = f(s, e^s)$ , donde  $f(s, t)$  es un polinomio con un término principal, y se escribe de la forma:

$$F(jw) = F_r(w) + jF_i(w)$$

Donde  $F_r(w)$  y  $F_i(w)$  representan respectivamente, la parte real e imaginaria de  $F(jw)$ . Sea  $w_{r_1}, w_{r_2}, w_{r_3}, \dots$  denotan los polos reales de  $F_r(w)$ , y sea  $w_{i_1}, w_{i_2}, w_{i_3}, \dots$ , denotan los polos reales de  $F_i(w)$ , ambos arreglos en orden ascendente de magnitud. Entonces se dice que los polos de  $F_r(w)$  y  $F_i(w)$  se entrelazan si satisfacen la siguiente propiedad:

$$w_{r_1} < w_{i_1} < w_{r_2} < w_{i_2}, \dots$$

En esta definición tenemos:

$$F_r(w) = g_r(w, \cos(w), \sin(w)), \quad F_i(w) = g_i(w, \cos(w), \sin(w))$$

Donde  $g_r(w, u, v)$  y  $g_i(w, u, v)$  son polinomios. Después de estos preliminares, se presenta la generalización del teorema de Hermite-Biehler para cuasi-polinomios  $F(s) = f(s, e^s)$ .

**Teorema 2.3.3** *Sea  $F(s) = f(s, e^s)$  donde  $F(s, t)$  es un polinomio con término principal escrito de la forma:*

$$F(jw) = F_r(w) + jF_i(w)$$

Donde  $F_r(w)$  y  $F_i(w)$  representan respectivamente, la parte real e imaginaria de  $F(jw)$ . Si todos los polos de  $F(s)$  se encuentran en el semi plano izquierdo, entonces los polos de  $F_r(w)$  y  $F_i(w)$  son reales, simples, se entrelazan y cumplen con:

$$F'_i(w)F_r(w) - F_i(w)F'_r(w) > 0 \quad (2.14)$$

Para cada  $w$  en  $(-\infty, \infty)$ , donde  $F'_r(w)$  y  $F'_i(w)$  denota la primera derivada con respecto de  $w$  de  $F_r(w)$  y  $F_i(w)$ , respectivamente. Por otra parte, con el fin de que todas las raíces de  $F(s)$  se encuentren en el semi plano izquierdo, es suficiente que una de las siguientes condiciones se cumplan:

1. Todas las raíces de  $F_r(w)$  y  $F_i(w)$  son reales, simples y entrelazan, y la desigualdad (2.14), se satisface por al menos un valor de  $w$ ;
2. Todas las raíces de  $F_r(w)$  son reales y por cada raíz  $w = w_r$ , la condición (2.14) se satisface, por ejemplo,  $F_i(w_r)F'_r(w_r) < 0$
3. Todas las raíces de  $F_i(w)$  son reales y por cada raíz  $w = w_i$ , la condición (2.14) se satisface, por ejemplo,  $F'_i(w_i)F_r(w_i) > 0$

Tomemos en cuenta que la condición (2.14), es análoga a la propiedad de incremento de fase, la cual puede ser consultada por el lector interesado en [21].

**Teorema 2.3.4** *Sea  $F(s) = f(s, e^s)$ , donde  $F(s, t)$  es el polinomio definido en (2.12). Si la función  $X^{*(N)}(e^s)$  tiene raíces en el semiplano derecho, entonces la función  $F(s)$  tiene un ilimitado conjunto de polos en el semiplano derecho. Si todos los polos de la función  $X^{*(N)}(e^s)$  se encuentran en el semiplano izquierdo, entonces la función  $F(s)$  puede sólo contener un conjunto de polos en el semiplano derecho.*

### 2.3.1. Aplicaciones a la teoría del control

Muchos procesos en ingeniería de control involucran tiempo de retardo. Como ya se vio en el capítulo anterior. Estos sistemas inducen a un modelo dinámico con ecuación característica de la forma:

$$\delta(s) = d(s) + e^{-s\tau_1}n_1(s) + e^{-s\tau_2}n_2(s) + \dots + e^{-s\tau_m}n_m(s) \quad (2.15)$$

Donde  $d(s)$ ,  $n_i(s)$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ , son polinomios con coeficientes reales y

- (A1) El grado de  $[d(s)] = q$  y el grado de  $[n_i(s)] \leq q$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ ;
- (A2)  $0 < L_1 < L_2 < \dots < L_m$
- (A3)  $L_i = \alpha_i L_1$ ,  $i = 2, \dots, m$ , y  $\alpha_i$  son integradores no negativos.

Basados en los resultados de Pontryagin's, es una extensión adecuada del teorema (2.3.3) puede ser desarrollado para estudiar la estabilidad de esta clase de cuasi-polinomios. En lugar de (2.15) consideraremos el cuasi-polinomio

$$\begin{aligned} \delta^*(s) &= e^{s\tau_m} \delta(s) \\ \delta^*(s) &= e^{s\tau_m} d(s) + e^{s(\tau_m - \tau_1)} n_1(s) + e^{s(\tau_m - \tau_2)} n_2(s) \\ &\quad + \dots + n_m(s) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Note que el nuevo cuasi-polinomio  $\delta^*(s)$  se convierte en la forma  $f(s, e^s)$  desde la condición vista en (A3), el sistema exhibe un retardo proporcional, por ejemplo, retardos que son relativos a integradores. Ya que  $e^{s\tau_m}$  no tiene un número finito de polos en el plano complejo, los polos de  $\delta(s)$  son idénticos a los de  $\delta^*(s)$ . Además en la revisión de (A1) y (A2), el cuasi-polinomio  $\delta^*(s)$  tiene un término principal debido a que el coeficiente del término contiene el más alto poder de  $s$  y  $e^s$  es distinto de cero.

Como ya se mencionó anteriormente, el cuasi-polinomio  $\delta^*(s)$  tiene un número infinito de raíces. Sin embargo, una región acotada del plano complejo contiene sólo un número finito de sus raíces. Raíces que son lejanas del origen pueden ser asignadas a un número de cadenas asintóticas. La geometría de estas cadenas deben ser estudiadas cuidadosamente en el pasado y estas determinan las siguientes clases de cuasi-polinomios.

1. Cuasi-polinomio tipo retardado; este primer tipo consiste en un cuasi-polinomio cuya cadena asintótica profundiza en el semi plano izquierdo.
2. Cuasi-polinomio tipo neutral; esta segunda clase consiste en un cuasi-polinomio que a lo largo de la cadena retardada contiene al menos una cadena asintótica en la banda vertical del plano complejo.
3. Cuasi-polinomio del tipo anticipativo; esta tercera clase consiste en un cuasi-polinomio con al menos una cadena asintótica que profundiza en el semi plano derecho.

Ahora para cuasi-polinomios de tipo retardado o neutral, la estabilidad está definida como sigue:

**Definición 2.3.3** *Un cuasi-polinomio del tipo retardado será estable si y sólo si todas las raíces tienen parte real negativa.*

**Definición 2.3.4** *Un cuasi-polinomio del tipo neutral será estable si existen números positivos  $\sigma$  que la parte real de todas estas raíces son menores que  $-\sigma$ .*

La razón por la que tengamos una condición tan fuerte para la estabilidad de los cuasi-polinomios del tipo neutral es debido a que hay que excluir para este caso la posibilidad de que una cadena asintótica de raíces converja al eje imaginario. Sin embargo note que siempre podemos hacer un cambio en la variable independiente  $s \rightarrow \bar{s} = s + \sigma$  de modo que la negatividad de la parte real de las raíces del cuasi-polinomio  $\bar{\delta}^*(\bar{s}) = \delta^*(\bar{s} - \sigma)$  con respecto a  $\bar{s}$  implicaría la estabilidad de los sistemas invariantes originales en el tiempo con retardo.

Con esta definición, la estabilidad del sistema con ecuación característica (2.15) es equivalente a que todos los polos de  $\delta^*(s)$  estén en el semiplano izquierdo. Es decir el equivalente  $\delta^*(s)$  es Hurwitz o es estable. El siguiente teorema, que es una inmediata consecuencia del teorema (2.3.3), da las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de  $\delta^*(s)$ .

**Teorema 2.3.5** *Sea  $\delta^*(s)$  está dado por (2.16) y escrito:*

$$\delta^*(jw) = \delta_r(w) + j\delta_i(w)$$

*Donde  $\delta_r(w)$  y  $\delta_i(w)$  representa respectivamente la parte real e imaginaria de  $\delta^*(jw)$ . Bajo las condiciones (A1) y (A2),  $\delta^*(s)$  es estable si y sólo si*

1.  $\delta_r(w)$  y  $\delta_i(w)$  tienen sólo raíces reales simples y su entrelazo.

2.  $\delta'_i(w_o)\delta_r(w_o) - \delta_i(w_o)\delta'_r(w_o) > 0$ , para algún  $w_o$  de  $(-\infty, \infty)$

Donde  $\delta'_r$  y  $\delta'_i$  denotan la primera derivada con respecto a  $w$  para  $\delta_r(w)$   $\delta_i(w)$ , respectivamente.

**Observación 2.3.1** En el teorema (2.3.5) sobre el requerimiento en la condición 1 que  $\delta_r(w)$  y  $\delta_i(w)$  tiene solamente raíces reales simples, no es una condición excesiva. Esta será probada en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.3.2** Considere el sistema de primer orden dado por:

$$G(s) = \frac{0.5}{s + 0.5}$$

y un controlador (PI) utilizado en la configuración a lazo cerrado, como se muestra en la figura(1.8). Recordemos que el controlador PI tiene la siguiente función de transferencia:

$$C(s) = \frac{k_p s + k_i}{s}$$

Si los parámetros del controlador son  $k_p = 2$  y  $k_i = 0.5$ , obtenemos la ecuación característica del sistema a lazo cerrado de la siguiente forma:

$$\delta(s) = s^2 + 1.5s + 0.25$$

y el sistema es estable.

Ahora consideremos el mismo modelo de primer orden pero con tiempo de retardo  $\tau = 7$  segundos por ejemplo:

$$G(s) = \frac{0.5}{s + 0.5} e^{-7s}$$

Como en el caso libre de retardo, consideraremos los mismos valores de los parámetros del control (PI):  $k_p = 2$  y  $k_i = 0.5$ , con estos valores, la ecuación característica del control a lazo cerrado está dada por:

$$\delta(s) = s^2 + 0.5s + (s + 0.25)e^{-7s}$$

Para el análisis de estabilidad consideremos:

$$\delta^*(s) = e^{7s}\delta(s) = (s^2 + 0.5s)e^{7s} + s + 0.25$$

Por lo tanto la parte real e imaginaria de  $\delta^*(s)$  está dada por:

$$\delta_r(w) = 0.25 - 0.05w \sin(7w) - w^2 \cos(7w)$$

$$\delta_i(w) = w[1 + 0.5 \cos(7w) - w \sin(7w)]$$

Usando estas expresiones es posible verificar si el cuasi-polinomio  $\delta^*(s)$  satisface la propiedad de entrelazo. La figura(2.4) muestra la parte real e imaginaria de  $\delta^*(jw)$ . Es claro en esta gráfica que las raíces de la parte real e imaginaria se entrelaza para toda  $w > 0$ . Note que la condición de entrelazo necesita ser comprobada solamente a frecuencias finitas.

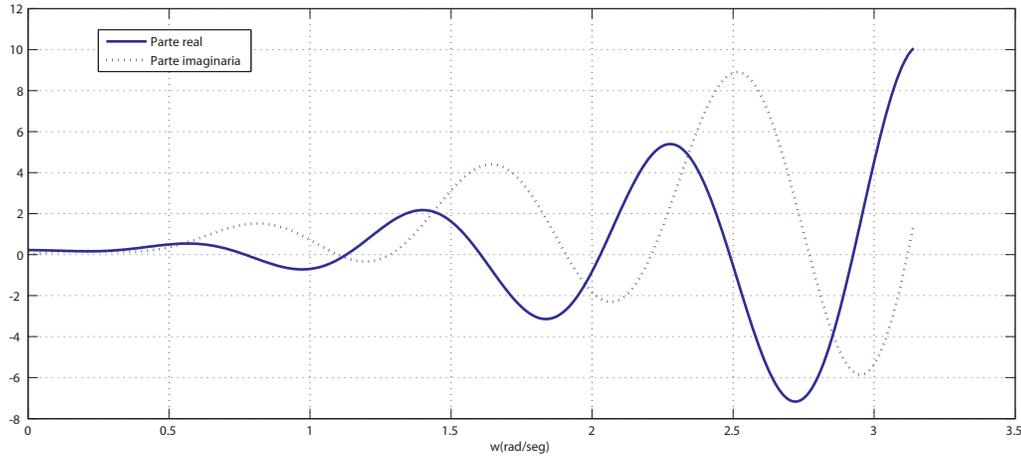


Figura 2.4: Gráfica de la parte real e imaginaria de  $\delta^*(s)$

**Teorema 2.3.6** Sea  $M$  y  $N$  las variables que denotan el más alto valor de  $s$  y  $e^s$ , respectivamente en  $\delta^*(s)$ . Sea  $\eta$  una constante apropiada tal que el coeficiente de más alto orden en  $\delta_r(w)$  y  $\delta_i(w)$  no se desvanezcan en  $w = \eta$ . Entonces para las ecuaciones  $\delta_r(w) = 0$  ó  $\delta_w(s) = 0$  tenga sólo raíces reales, es necesario y suficiente que en cada uno de los intervalos

$$-2l\pi + \eta \leq w \leq 2l\pi + \eta, l = l_o, l_o + 1, l_o + 2, \dots$$

$\delta_r(w)$  ó  $\delta_w(s)$  tengan exactamente  $4lN + M$  raíces reales para un valor suficientemente largo de  $l_o$

Ahora se mostrará como utilizar el teorema (2.3.6) para determinar la naturaleza de las raíces de  $\delta_r(w)$  ó  $\delta_w(s)$  en el ejemplo (2.3.2).

Realizaremos un cambio de variables:  $\hat{s} = 7s$ . Entonces la expresión de  $\hat{\delta}^*(j\hat{w})$  se puede reescribir como:

$$\hat{\delta}^*(\hat{s}) = (0.01\hat{s}^2 + 0.05\hat{s})e^{\hat{s}} + 0.1\hat{s} + 0.25$$

Observe que para el nuevo cuasi-polinomio en  $\hat{s}$ ,  $M = 2$  y  $N = 1$ . Además, la parte real e imaginaria de  $\hat{\delta}^*(j\hat{w})$  están dadas por:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_r(\hat{w}) &= 0.25 - 0.05\hat{w} \sin(\hat{w}) - 0.01\hat{w}^2 \cos(\hat{w}) \\ \hat{\delta}_i(\hat{w}) &= \hat{w}[0.1 + 0.05 \cos(\hat{w}) - 0.01\hat{w} \sin(\hat{w})]\end{aligned}$$

Ahora prestemos atención en la parte imaginaria de  $\hat{\delta}^*(j\hat{w})$ . De la expresión previa podemos obtener las raíces de  $\hat{\delta}_i(j\hat{w}) = 0$ , por ejemplo:

$$\hat{w}[0.1 + 0.05 \cos(\hat{w}) - 0.01\hat{w} \sin(\hat{w})] = 0$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\hat{w} &= 0 \\ 0.1 + 0.05 \cos(\hat{w}) - 0.01\hat{w} \sin(\hat{w}) &= 0\end{aligned}$$

De aquí podemos observar que una de las raíces de la parte imaginaria es  $\hat{w} = 0$ . La raíz real positiva de (2.17) son:

$$\begin{aligned}\hat{w}_1 &= 13.69 & \hat{w}_2 &= 15.34 \\ \hat{w}_3 &= 19.61 & \hat{w}_4 &= 21.74 \\ \hat{w}_5 &= 25.72 & \hat{w}_6 &= 28.09 \\ & \vdots & & \vdots\end{aligned}$$

Ahora seleccionamos  $\eta = \frac{\pi}{4}$ , para satisfacer el requerimiento impuesto por el teorema (2.3.6) que es:  $\sin(\eta) \neq 0$ . La figura (2.5) muestra la distribución de raíces de  $\hat{\delta}_i(\hat{w})$  y esto hace posible la aplicación del teorema (2.3.6) en este ejemplo.

En esta figura (2.5) se pueden observar las ubicaciones de las raíces. Debido a que  $\hat{\delta}_i(\hat{w})$  es una función impar de  $\hat{w}$ , podemos observar el número de raíces en los intervalos

$$-2\pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

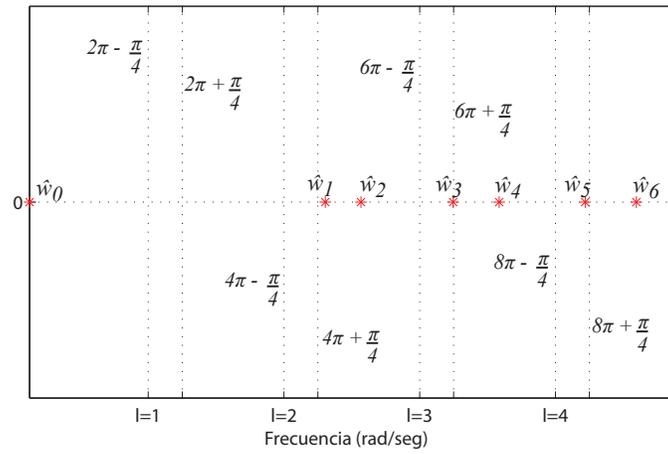


Figura 2.5: Distribución de raíces de  $\hat{\delta}_i(\hat{\omega})$

no suma el número de raíces necesarias que indica el teorema  $4N + M = 6$  para  $l_0 = 1$ . Ahora con  $l_0 = 2$  el requerimiento de raíces reales es  $8N + M = 10$ , de la figura (2.5) podemos observar el intervalo

$$-4\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}$$

la función  $\hat{\delta}_i(\hat{\omega})$  tiene únicamente una raíz real. Así sucesivamente con el incremento de  $l = 3, 4, \dots$ , podemos observar que el número siempre es menor que las raíces necesarias por el teorema (2.3.6), con lo que concluimos que las raíces de  $\hat{\delta}_i(\hat{\omega})$  no son todas reales.

## 2.4. Conclusiones

Este capítulo presentó una breve introducción a los enfoques existentes de control para tratar con sistemas con retardo, como el predictor de Smith, el cual tiene la desventaja de estar diseñado para trabajar con sistemas estables, caso que no está en análisis en este trabajo, la aproximación de Padé al no tener una forma adecuada de calcular cuál es el orden de la aproximación ideal, podemos caer en una mala selección o bien tomar una aproximación muy grande que conlleve a dificultar el trato del sistema o quizá a trabajar con un controlador de orden alto, se presentó el teorema de Hermite Biehler que será una base importante de los controlador propuesto por [21] y mostrados en los capítulos posteriores.

## 2.5. Referencias

Los temas abordados en este capítulo pueden ser complementados con la revisión de los autores y distintos títulos presentados con anterioridad, el predictor de Smith, el que puede ser estudiado con mayor profundidad en [8, 28], la aproximación de Padé, se da más a detalle en [3, 19], y el teorema de Hermite-Biehler que se presenta con mayor detenimiento en [21] y las referencias incluidas en él.

## CAPÍTULO III

### Preliminares



En aplicaciones de control industrial las plantas o procesos son usualmente modelados como sistemas de primer o segundo orden con tiempo de retardo y regulados utilizando los controles del tipo, P, PI, PID y PD. En este capítulo utilizaremos el teorema de Hermite-Biehler para cuasi-polinomios y la metodología propuesta en [20, 21], para obtener los parámetros de los controladores, Proporcional (P), Proporcional Integral (PI), Proporcional Integral Derivativo (PID), y realizaremos un breve análisis del posible procedimiento para el uso de esta teoría para el cálculo de los parámetros del control (PD). También se presentarán algunos ejemplos de sistemas a lazo abierto inestables de primer orden con tiempo de retardo, los cuales serán estabilizados con los controladores mencionados, mostrando la utilización de las condiciones necesarias y suficientes presentadas.

### 3.1. Sistemas de primer orden con tiempo de retardo

Sistemas con **respuesta escalón** como la mostrada en la figura(3.1) son comúnmente modelados como procesos de primer orden con tiempo de retardo, los cuales pueden ser representados matemáticamente por la función de transferencia de la ecuación(3.1).

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts} e^{-\tau s} \quad (3.1)$$

Donde  $k$  representa la ganancia estática de la planta,  $\tau$  el tiempo de retardo y  $T$  la constante de tiempo. Considere el sistema a lazo cerrado como se muestra en la figura(3.2).

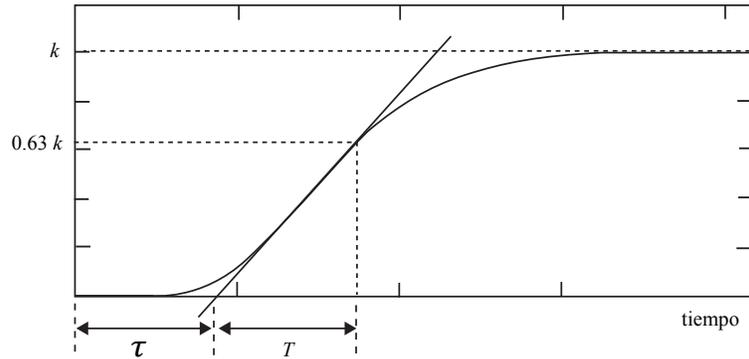


Figura 3.1: Sistema con respuesta a un escalón

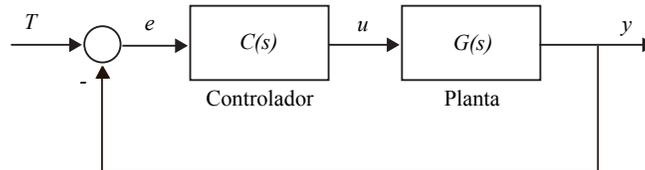


Figura 3.2: Sistema de control

Donde:  $R$  es la señal de entrada,  $Y$  la salida de la planta,  $G(s)$  es la planta o proceso a controlar, y  $C(s)$  es el controlador.

### 3.2. Controlador Proporcional P

En esta sección se presentará la solución al problema de estabilización de sistemas de primer orden inestables con tiempo de retardo utilizando un **control (P)**. Esta solución construida basada en los resultados vistos en las secciones anteriores. Se presentaran algunos ejemplos para ilustrar la aplicación de estos resultados.

En esta sección consideraremos  $C(s)$  como el control P definido por:

$$C(s) = k_p$$

El objetivo es determinar el conjunto de valores para el parámetro  $k_p$  para los cuales el sistema en lazo cerrado sea estable.

Ahora bien cuando el tiempo de retardo de la planta es igual a cero, esto es  $\tau = 0$ , el sistema a lazo cerrado tiene una ecuación característica dada por:

$$\delta(s) = k k_p + 1 + T s$$

Este polinomio tiene una raíz simple en  $s = -\frac{1+k k_p}{T}$ . Por ejemplo, si asumimos que la ganancia estática del sistema es positiva y  $T > 0$  entonces, la planta que es a lazo abierto estable, obtenemos que para asegurar la estabilidad del sistema a lazo cerrado con  $\tau = 0$ , debemos tener:

$$k_p > -\frac{1}{k}$$

En el otro caso cuando la planta a lazo abierto es inestable, por ejemplo  $T < 0$ , para asegurar la estabilidad del sistema a lazo cerrado con  $\tau = 0$ , debemos tener:

$$k_p < -\frac{1}{k} \tag{3.2}$$

Ahora consideremos el caso cuando el tiempo de retardo del modelo es diferente de cero, determinaremos el conjunto de parámetros que estabilicen el sistema. La ecuación a lazo cerrado del sistema está dado por:

$$\delta(s) = k k_p e^{-\tau s} + 1 + T s$$

Para el estudio de la estabilidad del sistema a lazo cerrado, necesitamos determinar si todas las raíces de la expresión anterior se encuentran en el semi plano izquierdo. Debido a la presencia del término exponencial  $e^{-\tau s}$ , el número de raíces de la expresión  $\delta(s)$  es infinita, lo que hace esta tarea complicada por lo que recurriremos al teorema (2.3.5) para determinar el conjunto de ganancias  $k_p$  estabilizantes de la siguiente forma:

Como primer paso consideremos el cuasi-polinomio  $\delta^*(s)$  definido por:

$$\delta^*(s) = e^{\tau s} \delta(s) = k k_p + (1 + T s) e^{\tau s}$$

Sustituimos  $s = jw$  con lo que obtenemos:

$$\delta^*(jw) = \delta_r(w) + j\delta_i(w)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\delta_r(w) &= \cos(\tau w) - Tw \sin(\tau w) + kk_p \\ \delta_i(w) &= \sin(\tau w) + Tw \cos(\tau w)\end{aligned}$$

### 3.2.1. Control P para plantas inestables de primer orden

En esta sección presentaremos el teorema que soluciona el problema del conjunto de ganancias estabilizantes para una planta de primer orden inestable con retardo, esto es  $T < 0$ , se asume también que  $k > 0$  y  $\tau > 0$ .

**Teorema 3.2.1** *Bajo la suposición de  $k$  y  $\tau$ , una condición necesaria para la ganancia  $k_p$  que estabilice la planta con tiempo de retardo es  $|\frac{T}{\tau}| > 1$ . Si esta condición se satisface, entonces el conjunto de valores para la ganancia  $k_p$  para una planta a lazo abierto inestable con retardo y una función de transferencia  $G(s)$  como en la ecuación(3.1) está dado por:*

$$\frac{T}{k\tau} \sqrt{z_1^2 + \frac{\tau^2}{T^2}} < k_p < -\frac{1}{k} \quad (3.3)$$

Donde  $z_1$  es la solución a la ecuación:

$$\tan(z) = -\frac{T}{\tau}z$$

en el intervalo de  $(0, \frac{\pi}{2})$

**Ejemplo 3.2.1** *Considere de nueva cuenta el problema del valor de ganancia  $k_p$  para un sistema descrito por un modelo de primer orden con tiempo de retardo como en la ecuación(3.1) Donde los parámetros de la planta son:  $k = 2$   $\tau = 0.7$  y  $T = -2$ . La planta a lazo abierto es inestable. Cumple con la condición  $|\frac{-2}{0.7}| = 1.1765 > 1$ , por lo que la estabilización utilizando una ganancia  $k_p$  es posible. Usaremos el teorema (3.2.1) para obtener el conjunto de ganancias estabilizantes. Primero obtenemos  $z_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$*

$$\tan(z) = 1.1765z$$

*Solucionando la ecuación obtenemos  $z_1 = 0.6608$ . Entonces usando la ecuación(3.3) el conjunto de ganancias  $k_p$  que estabilizan el sistema están en el rango dado por:*

$$-0.5000 < k_p < -0.6333$$

### 3.2 Controlador Proporcional P

Para un parámetro de  $k_p$  dado en el rango anterior por ejemplo  $-0.52$  la ecuación característica del cuasi-polinomio  $\delta^*(s)$  del sistema está dada por:

$$\delta^*(j\omega) = \cos(1.7\omega) + 2\omega \sin(1.7\omega) - 1.04 + j[\sin(1.7\omega) - 2\omega \cos(1.7\omega)]$$

La figura(3.3) muestra la gráfica de la parte real e imaginaria de  $\delta^*(j\omega)$ . Es claro que las raíces de esta gráfica, la parte real e imaginaria se entrelazan.

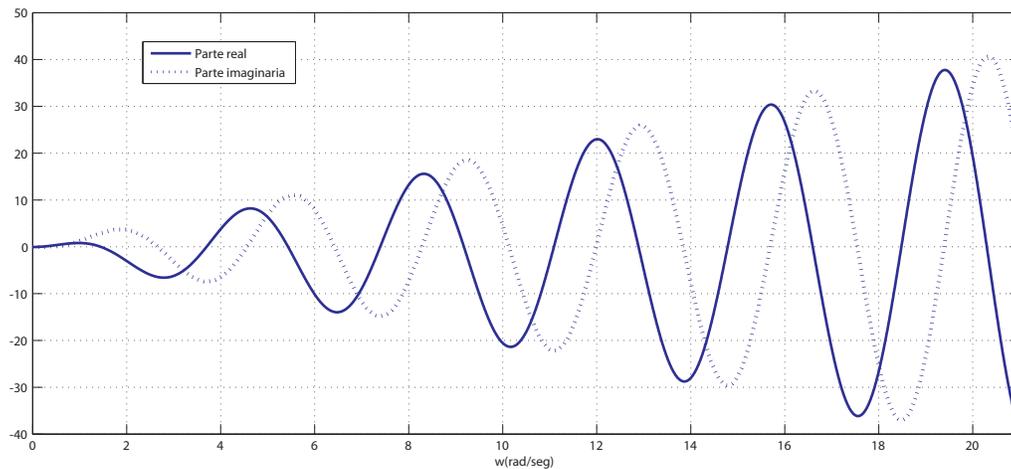


Figura 3.3: Gráfica de la parte real e imaginaria de  $\delta^*(j\omega)$  para el ejemplo (3.2.1)

La figura(3.4) muestra la respuesta en el tiempo a un escalón unitario del sistema a lazo cerrado, lo que verifica que el sistema es estable.

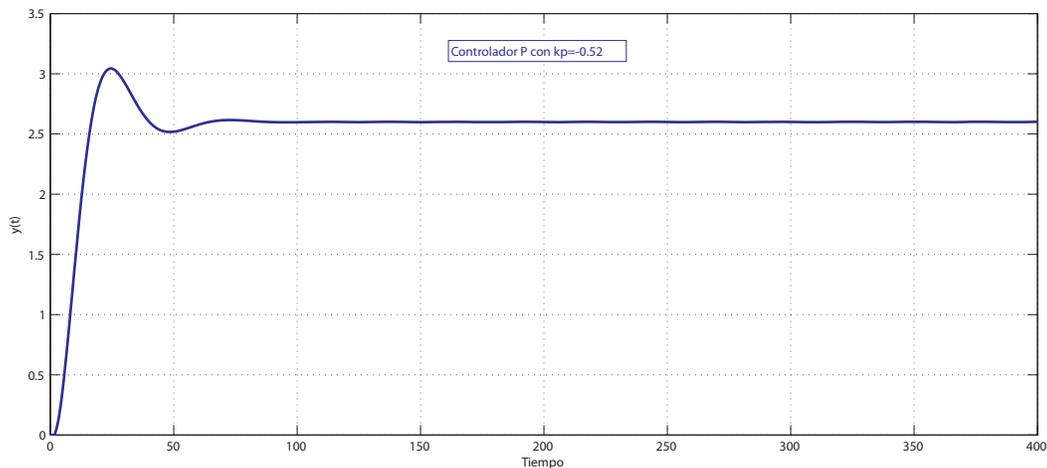


Figura 3.4: Respuesta en el tiempo del sistema a lazo cerrado con el controlador P

### 3.3. Controlador Proporcional Integral PI

Los **controladores PI** son adecuados para un sinnúmero de procesos donde las dinámicas son esencialmente de primer orden. Como ejemplo de estos podemos citar controles de nivel en tanques simples, mezcladores de reactores químicos, entre otros. Es importante seleccionar los parámetros del controlador PI para obtener y mantener la estabilidad del sistema en lazo cerrado. En esta sección veremos como fue solucionado el problema de estabilidad de sistemas de primer orden con tiempo de retardo usando un Controlador Proporcional Integral (PI), así como algunos ejemplos que ilustran la funcionalidad de la sección calculada y los resultados ofrecidos por este controlador.

Consideremos el sistema retroalimentado mostrado en la figura(3.2). La planta  $G(s)$  está dada por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts} e^{-\tau s}$$

Donde  $k$  representa la ganancia estática de la planta,  $\tau$  el tiempo de retardo y  $T$  la constante de tiempo. El controlador  $C(s)$  es del tipo PI, por ejemplo;

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$$

$k_p$  y  $k_i$  son las ganancias proporcional e integral respectivamente, el objetivo de esta sección es presentar como se determina la región de parámetros  $k_p - k_i$  con los que la planta es estable.

Cuando el tiempo de retardo  $\tau$  del modelo de la planta es cero, la ecuación característica del sistema a lazo abierto está dada por:

$$\delta(s) = Ts^2 + (kk_p + 1)s + kk_i$$

De esta ecuación, podemos concluir que para la estabilidad del sistema libre de retardo en lazo cerrado, debemos tener:

$$kk_i > 0, \quad kk_p + 1 > 0, \quad T > 0 \quad (3.4)$$

$$kk_i < 0, \quad kk_p + 1 < 0, \quad T < 0 \quad (3.5)$$

Es claro que la condición (3.4) debe ser cumplida para la planta estable a lazo abierto mientras que para la planta inestable a lazo abierto se debe cumplir la condición (3.5). Asumiendo que

la ganancia estática  $k$  de la planta es positiva, obtenemos las siguientes condiciones para el sistema libre de retardo a lazo cerrado:

$$k_p > -\frac{1}{k}, \quad k_i > 0 \quad (3.6)$$

(Planta estable a lazo abierto, por ejemplo  $T > 0$ )

$$k_p < -\frac{1}{k}, \quad k_i < 0 \quad (3.7)$$

(Planta inestable a lazo abierto, por ejemplo  $T > 0$ )

Ahora el modelo con tiempo de retardo. En este caso el sistema a lazo cerrado tiene una ecuación característica de la forma:

$$\delta(s) = (kk_i + kk_p s)e^{-\tau s} + (1 + Ts)s$$

Como ya se vio en las secciones anteriores, haremos uso del Teorema (2.3.5) para encontrar el conjunto de parámetros estabilizantes  $k_p$  y  $k_i$ . Como primer paso se construye el cuasi-polinomio  $\delta^*(s)$  por ejemplo:

$$\delta^*(s) = e^{\tau s}\delta(s) = kk_i + kk_p s + (1 + Ts)se^{\tau s}$$

Sustituyendo  $s = jw$ , tenemos:

$$\delta^*(jw) = \delta_r(w) + j\delta_i(w)$$

Donde:

$$\delta_r(w) = kk_i - w \sin(\tau w) - Tw^2 \cos(\tau w)$$

$$\delta_i(w) = w[kk_p \cos(\tau w) - Tw \sin(\tau w)]$$

### 3.3.1. Control PI para plantas inestables de primer orden

Cuando la planta es inestable a lazo abierto tiene  $T < 0$ . Sin embargo, asumiremos que  $k > 0$  y  $L > 0$ . Recordemos la condición (3.7) para los sistemas a lazo cerrado de los sistemas libres de retardo, requieren cumplir

$$k_p < -\frac{1}{k}, \quad k_i < 0$$

La solución del control PI estabilizante en este caso también envuelve el barrido de todos los  $k_p$  reales y la solución de un problema del aumento constante de la estabilización en cada etapa. El rango de valores de  $k_p$  en el que las necesidades de barrido se lleva a cabo, puede ser reducido mediante el uso de la siguiente teorema.

**Teorema 3.3.1** *Bajo la suposición de  $k$  y  $\tau$ , una condición necesaria para un controlador PI que simultáneamente estabiliza el sistema libre de retardo y la planta con retardo es;  $|\frac{T}{\tau}| > 1$ . Si esta condición necesaria se satisface, entonces el rango de valore de  $k_p$  para una planta de primer orden inestable con retardo con función de transferencia  $G(s)$  como en la ecuación(3.1) está dado por:*

$$\frac{T}{k\tau} \sqrt{\alpha_1^2 + \frac{\tau^2}{T^2}} < k_p < \frac{1}{k} \quad (3.8)$$

Donde  $\alpha_1$  es la solución de la ecuación:

$$\tan(\alpha) = -\frac{T}{\tau}\alpha$$

En el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

**Ejemplo 3.3.1** *Considere el problema de obtener el conjunto de valores estabilizantes de ganancias  $k_p$  y  $k_i$  para un sistema descrito por un modelo de primer orden con tiempo de retardo como en la ecuación(3.1) Donde los parámetros de la planta son:  $k = 1$ ,  $\tau = 0.8$  y  $T = -6$ . La planta a lazo abierto es inestable. Cumple con la condición  $|\frac{-6}{0.8}| = 7.5 > 1$ , por lo que la estabilización utilizando ganancias  $k_p$  y  $k_i$  es posible. Usaremos el teorema (3.3.1) para obtener el conjunto de ganancias estabilizantes. Primero obtenemos  $\alpha_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$*

$$\tan(\alpha) = 1.1765\alpha$$

Solucionando la ecuación obtenemos  $\alpha_1 = 1.4810$ . Entonces usando la ecuación(3.8) el conjunto de ganancias  $k_p$  que estabilizan el sistema están en el rango dado por:

$$-11.1525 < k_p < -1$$

Mediante el barrido del rango de los valores de  $k_p$  se puede determinar el rango de valores de  $K_i$  en cada etapa. La figura(3.5) muestra la región estabilizante obtenida en el plano  $k_p - k_i$ .

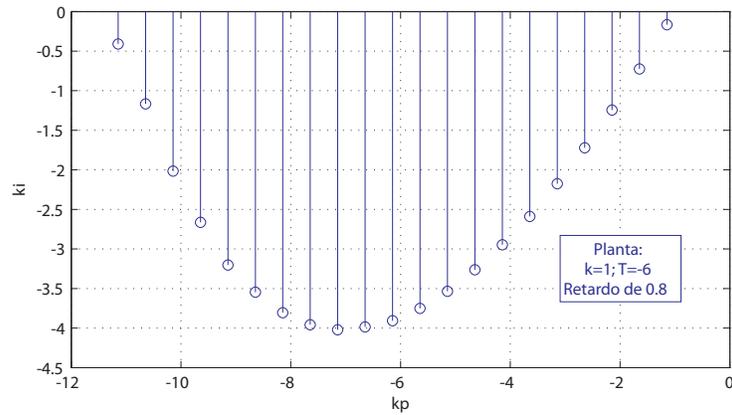


Figura 3.5: Conjunto de valores de  $(k_p$  y  $k_i$ ) para el ejemplo (3.4.1)

La figura(3.6) muestra la respuesta en el tiempo a un escalón unitario del sistema a lazo cerrado, lo que verifica que el sistema es estable.

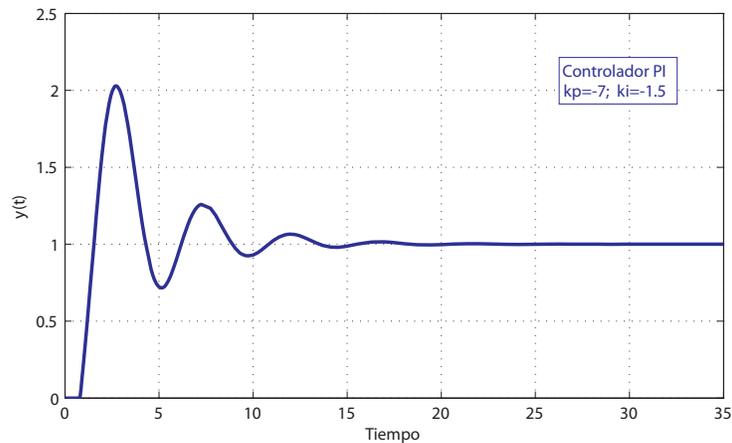


Figura 3.6: Respuesta en el tiempo del sistema a lazo cerrado con el controlador PI

### 3.4. Controlador Proporcional Integral Derivativo PID

Los **controladores PID** son ampliamente utilizados, debido a sus características, presentan la capacidad del rechazo de perturbaciones y seguimiento de señales debido a la acción integral y pueden anticiparse debido a la acción derivativa.

El problema de estabilización con el controlador PID es considerablemente más compli-

cado que el control PI o P ya antes revisados, la solución aquí presentada consiste en calcular el rango de ganancias  $k_p$  admisibles en forma cerrada. Después para dicho rango de ganancias, se calcula el rango de valores para las ganancias  $k_i$  y  $k_d$ , que puede ser un trapecio, un triángulo o un cuadrilátero, dependiendo del sistema analizado. En esta sección veremos como fue solucionado el problema de estabilidad de sistemas de primer orden con tiempo de retardo usando un Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID), presentado en [21] así como algunos ejemplos que ilustran la funcionalidad de las regiones calculadas y los resultados ofrecidos por este controlador.

Consideremos el sistema retroalimentado mostrado en la figura(3.2), la planta  $G(s)$  está dada por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts} e^{-\tau s}$$

Donde  $k$  representa la ganancia estática de la planta,  $\tau$  el tiempo de retardo y  $T$  la constante de tiempo. El controlador  $C(s)$  es del tipo PID, por ejemplo;

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

$k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$  son las ganancias proporcional, integral y derivativa respectivamente, el objetivo de esta sección es presentar como se determina la region de parámetros  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$  con los que la planta es estable.

Cuando el tiempo de retardo  $\tau$  del modelo de la planta es cero, la ecuación característica del sistema a lazo abierto está dada por:

$$\delta(s) = (T + k k_d) s^2 + (1 + k k_p) s + k k_i \quad (3.9)$$

De esta ecuación observamos que es un polinomio de segundo orden, la estabilidad del sistema libre de retardo en lazo cerrado es equivalente a que todos los coeficientes tengan el mismo signo. Asumiendo que la ganancia estática de la planta  $k$  es positiva, las condiciones son:

$$k_p > -\frac{1}{k}, \quad k_i > 0 \quad y \quad k_d > -\frac{T}{k} \quad (3.10)$$

ó

$$k_p < -\frac{1}{k}, \quad k_i < 0 \quad y \quad k_d < -\frac{T}{k} \quad (3.11)$$

Un requerimiento mínimo de cualquier diseño de control es que el sistema libre de retardo en lazo cerrado sea estable. Consecuentemente a partir de ahora asumimos en esta sección que las ganancias PID usadas para estabilizar la planta con retardo siempre cumplen con la condición (3.10) ó (3.11).

**Nota 1** Analizando las condiciones (3.10,3.11) se observa que no es posible considerar el controlador PD utilizando el controlador PID como un caso particular de nuestro objeto de estudio (sistemas de primer orden inestables con retardo) con  $k_i = 0$ .

Ahora considere el modelo con tiempo de retardo diferente de cero. En este caso el sistema a lazo cerrado tiene una ecuación característica de la forma:

$$\delta(s) = (kk_i + kk_p s + kk_d) e^{-\tau s} + (1 + Ts)s$$

Como ya se vio en las secciones anteriores, haremos uso del Teorema (2.3.5) para encontrar el conjunto de parámetros estabilizantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ . Como primer paso se construye el cuasi-polinomio  $\delta^*(s)$  por ejemplo:

$$\delta^*(s) = e^{\tau s} \delta(s) = kk_i + kk_p s + kk_d s^2 + (1 + Ts) s e^{\tau s}$$

Sustituyendo  $s = jw$ , tenemos:

$$\delta^*(jw) = \delta_r(w) + j\delta_i(w)$$

Donde:

$$\delta_r(w) = kk_i - kk_d w^2 - w \sin(\tau w) - Tw^2 \cos(\tau w) \quad (3.12)$$

$$\delta_i(w) = w[kk_p + \cos(\tau w) - Tw \sin(\tau w)] \quad (3.13)$$

### 3.4.1. Control PID para plantas inestables de primer orden

Cuando la planta es inestable a lazo abierto tiene  $T < 0$ , de la ecuación. (3.1). Asumiremos que  $k > 0$  y  $\tau > 0$ . En esta sección encontraremos los parámetros del conjunto completo de ganancias ( $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ ), haciendo uso del Teorema (2.3.5).

**Teorema 3.4.1** La condición necesaria y suficiente para la existencia de un controlador PID estabilizante para una planta a lazo abierto inestable (3.1) es  $|\frac{T}{L}| > 0.5$ . Si esta condición

se satisface, entonces el rango de valores de  $k_p$  para los cuales la planta inestable a lazo abierto, con función de transferencia  $G(s)$  como en (3.1), puede ser estabilizada usando un controlador PID esta dada por:

$$\frac{1}{k} \left[ \frac{T}{\tau} \alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1) \right] < k_p < -\frac{1}{k} \quad (3.14)$$

Donde  $\alpha_1$  es la solución de la ecuación:

$$\tan(\alpha) = -\frac{T}{T + \tau} \alpha \quad (3.15)$$

En el intervalo  $(0, \pi)$ . En el caso especial de  $|\frac{T}{\tau}| = 1$ , tenemos  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ . Para valores fuera de este rango, no existe controlador PID estabilizante. La región estabilizante completa es la mostrada en la figura(3.7).

Para cada  $k_p \in (k_l := \frac{1}{k} [\frac{T}{L} \alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1)], -\frac{1}{k})$ , la sección transversal de la región estabilizante en el espacio  $(k_i, k_d)$  es el cuadrilátero Q.

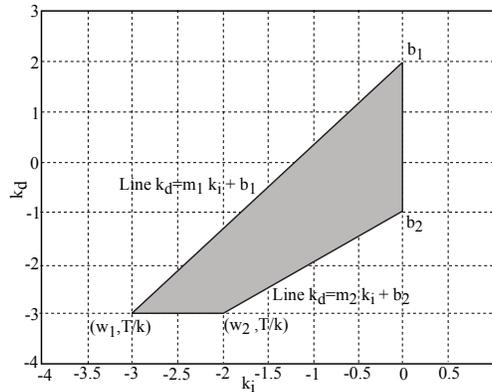


Figura 3.7: Región de Estabilidad  $(k_i, k_d)$

**Nota 2** El PID se restringe a la misma condición de estabilidad que el controlador PD que proponemos en este trabajo, que es  $|\frac{T}{\tau}| > 0.5$ , que puede ser vista como  $\tau < \frac{2}{a}$ , lo que mostraremos mas adelante.

**Ejemplo 3.4.1** Considere el problema de obtener el conjunto de valores estabilizantes de ganancias  $k_p$ ,  $k_d$  y  $k_i$  para un sistema descrito por un modelo de primer orden con tiempo de

retardo como en la ecuación(3.1) Donde los parámetros de la planta son:  $k = 1$   $\tau = 7$  y  $T = -4$ . La planta a lazo abierto es inestable. Cumple con la condición  $|\frac{-4}{7}| = 0.5714, 0.5714 > 0.5$  por lo que la estabilización utilizando un controlador PID es posible. Usaremos el teorema (3.4.1) para obtener el conjunto de ganancias estabilizantes. Primero obtenemos  $\alpha_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\tan(\alpha) = 1.3333\alpha$$

Solucionando la ecuación obtenemos  $\alpha_1 = 1.4810$ . Entonces usando la ecuación.(3.14) el conjunto de ganancias  $k_p$  que estabilizan el sistema están en el rango dado por:

$$-1.0249 < k_p < -1$$

Ahora graficando un cuadrilátero para un valor dentro de los parámetros  $k_p$  posibles, obtenemos la regio  $(k_i, k_d)$  mostrada en la siguiente figura, que corresponde a un  $k_p = -1.0033$ :

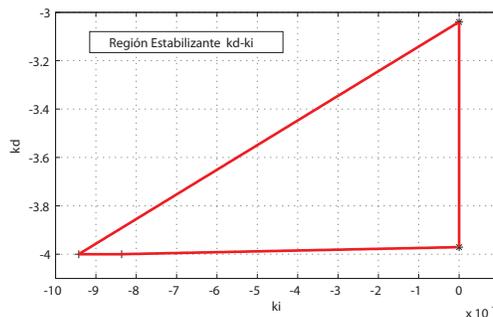


Figura 3.8: Conjunto de valores de  $(k_i$  y  $k_d)$  para  $k_p = -1.0033$

La figura(3.9) muestra la respuesta en el tiempo a un escalón unitario del sistema a lazo cerrado, lo que verifica que el sistema es estable.

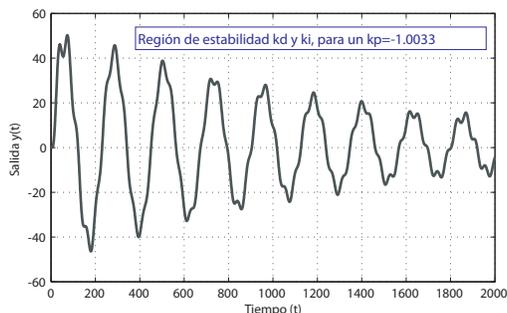


Figura 3.9: Respuesta en el tiempo del sistema a lazo cerrado con el controlador PID

### 3.5. Controlador Proporcional Derivativo PD

En esta sección se presentara el posible análisis para la obtención del controlador PD estabilizante haciendo uso de la teoría revisada anteriormente, con lo que buscamos la diferencia en los análisis con el controlador PD y PID mostrado en [21].

Considere el sistema de control retroalimentado mostrado en la figura (3.10), la planta  $G(s)$  está dada por la siguiente función de transferencia.

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts} e^{-\tau s}$$

Donde " $k$ " representa la ganancia estática de la planta, " $\tau$ " representa el tiempo de retardo, y " $T$ " representa la constante de tiempo de la planta. El controlador  $C(s)$  es del tipo PD, tiene un término proporcional y un término derivativo.

$$C(s) = k_p + k_d s$$

El objetivo es determinar la diferencia que se genera al hacer uso de los controladores  $PI$  y  $PD$  para realizar el calculo de la región de valores para el parámetro  $k_p$  y  $k_d$  para los cuales el sistema en lazo cerrado es estable.

Ahora bien cuando el tiempo de retardo de la planta es igual a cero, esto es  $\tau = 0$ , el sistema a lazo cerrado tiene una ecuación característica dada por:

$$\delta(s) = (T + k k_d) s + 1 + k k_p \quad (3.16)$$

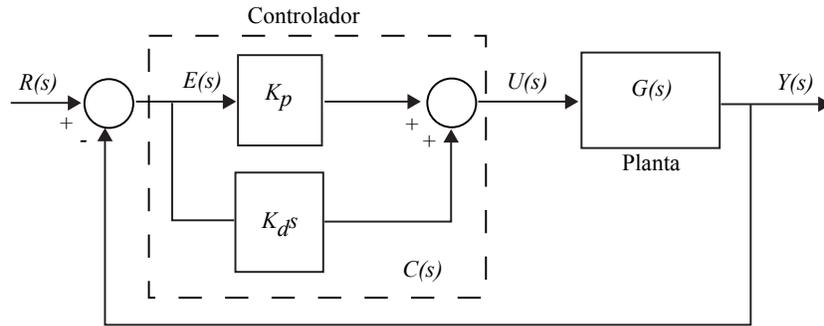


Figura 3.10: Control Proporcional-Derivativo

De esta ecuación, se puede concluir que para la estabilidad en lazo cerrado del sistema libre de retardo, debemos tener:

$$T + kk_d > 0 \quad kk_p + 1 > 0 \quad (3.17)$$

$$T + kk_d < 0 \quad kk_p + 1 < 0 \quad (3.18)$$

Es claro que la condición dada por la ecuación (3.17) debe ser satisfecha para la planta a lazo abierto estable, mientras (3.18) debe ser satisfecha para plantas inestables a lazo abierto. Asumimos que la ganancia estática  $k$  de la planta es positiva, se obtienen las siguientes condiciones para la estabilidad del sistema a lazo cerrado de la planta inestable libre de retardo:

$$k_d > -\frac{T}{k} \quad k_p > -\frac{1}{k} \quad (\text{Planta a lazo abierto estable, } T > 0) \quad (3.19)$$

$$k_d < -\frac{T}{k} \quad k_p < -\frac{1}{k} \quad (\text{Planta a lazo abierto inestable, } T < 0) \quad (3.20)$$

Ahora el caso del sistema con retardo a lazo cerrado está dado por la ecuación característica:

$$\delta(s) = 1 + Ts + (kk_p + kk_d s)e^{-\tau s}$$

Haciendo uso del teorema (2.3.5) para encontrar el conjunto de valores estabilizantes del controlador PD, como primer paso consideramos el cuasi-polinomio  $\delta^*(s)$ , por ejemplo:

$$\delta^*(s) = e^{\tau s} \delta(s) = (1 + Ts)e^{\tau s} + (kk_p + kk_d s)$$

Sustituimos  $s = jw$  con lo que obtenemos:

$$\delta^*(jw) = \delta_r(w) + j\delta_i(w)$$

Donde:

$$\delta_r(w) = \cos(\tau w) - Tw \sin(\tau w) + kk_p \quad (3.21)$$

$$\delta_i(w) = \sin(\tau w) + Tw \cos(\tau w) + kk_d w \quad (3.22)$$

De las ecuaciones (3.9) y (3.16) es fácil observar que el cuasi-polinomio haciendo uso del controlador PID es de segundo orden y para el caso de análisis con el control PD este cuasi-polinomio es de orden uno respectivamente.

Debido a esto, la parte real e imaginaria queda modificada en diferente forma, haciendo uso del controlador PID, la parte real puede ser modificada con el uso de las ganancias  $k_i$  y  $k_d$  de la ecuación(3.12) y la parte imaginaria con el uso de la ganancia  $k_p$ , esto es posible verlo en la ecuación(3.13), por otro lado con el uso del controlador PD, la parte real puede ser modificada por  $k_p$  en la ecuación(3.21), mientras que la parte imaginaria por  $k_d$ , lo que se puede observar en la ecuación(3.22), de esta forma es evidente la diferencia al emplear estos controladores, a partir de aquí se debe llevar a cabo un análisis detallado de qué es lo que sucede con las raíces en la parte imaginaria hasta poder calcularlas y determinar que todas ellas son reales en cierto intervalo, para así garantizar que es posible el uso de este controlador empleando esta metodología.

### 3.6. Conclusiones

Este capítulo presentó una breve introducción de la respuesta de los sistemas de primer orden con retardo a una señal escalón, así como los controladores  $P$ ,  $PI$  y  $PID$ , como utilizar estos controladores para plantas inestables de primer orden y un ejemplo de los resultados que se pueden obtener al emplearlos, cabe mencionar que la condición establecida con el controlador  $PID$  es la misma que se establece con el controlador  $PD$  y para finalizar el capítulo se mostró el posible camino para el estudio del controlador  $PD$  y el por qué no puede ser un caso particular del controlador  $PID$  para el caso de plantas a lazo abierto inestables de primer orden con retardo.

### 3.7. Referencias

Los temas abordados en este capítulo pueden ser complementados con la revisión de los autores y distintos títulos presentados con anterioridad, donde podemos ahondar en esto como son; [21], [20] y las referencias en estas obras incluidas.



## **CAPÍTULO IV**

**Resultado Principal:**

**Controlador**

**Proporcional-Derivativo**



Como se mostró en el capítulo anterior, el controlador proporcional derivativo no es un caso particular del controlador PID [21, 20] para el caso que nos ocupa en este trabajo (sistemas inestables con tiempo de retardo), en otras palabras, el controlador PD no puede ser caracterizado haciendo uso del controlador PID, estableciendo la ganancia integral  $k_i = 0$ . En este capítulo se presentará una solución alternativa para el caso PD, con el cual se establecerán condiciones necesarias y suficientes para estabilizar sistemas de primer orden con retardo con el uso de este controlador y por último una conjetura con respecto a la posible caracterización de la región de parámetros que estabilizan el sistema.

### 4.1. Control PD

Considere el sistema de control retroalimentado mostrado en la figura(4.1), la planta  $G(s)$  está representada por la siguiente función de transferencia.

$$G(s) = \frac{b}{s - a} e^{-\tau s} \quad (4.1)$$

y considerando el **controlador PD** como:

$$C(s) = k_p + k_d s = k_d \left( s + \frac{k_p}{k_d} \right) \quad (4.2)$$

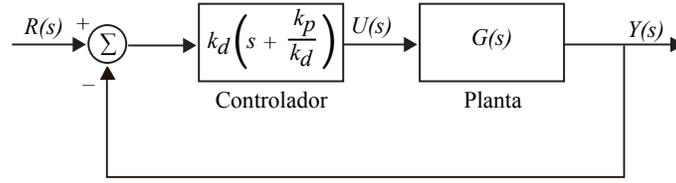


Figura 4.1: Diagrama de bloques del Control PD

Las condiciones de estabilidad del sistema dado en la figura(4.1) se muestra en el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.1** *Considere el sistema con retardo dado por la ecuación (4.1) y el esquema de retroalimentación dado en la Figura (4.1). Existen ganancias  $k_p$  y  $k_d$  tales que el sistema a lazo cerrado:*

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{bk_d(s + \frac{k_p}{k_d})e^{-\tau s}}{(s - a) + bk_de^{-\tau s}(s + \frac{k_p}{k_d})} \quad (4.3)$$

es estable si y sólo si  $\tau < \frac{2}{a}$ .

La demostración del teorema (4.1.1), consiste en analizar el problema al hacer control por computadora usando un período de muestreo  $T$  y un retenedor de orden cero ROC. Al discretizar el sistema y resolver el problema se obtiene un resultado que puede ser extrapolado al caso continuo al considerar el limite cuando  $T$  tiende a cero ( $\lim_{T \rightarrow 0}$ ).

**Nota 3** *Cabe mencionar que esta prueba es muy similar a la presenta en [6], pues si bien la estructuras de control en el mencionado artículo es muy diferente al PD, las ecuaciones características son similares en ambas estructuras.*

Discretizando el sistema de la ecuación (4.3), considerando un período de muestreo  $T$  y un retenedor de orden cero ROC, así como el retardo  $\tau = nT$ , obtenemos:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{k_db(z - 1) + ((\frac{k_pb}{-a})(1 - e^{a\tau}))}{z^n(z - e^{a\tau}) + k_db(z - 1) + (\frac{k_pb}{a})(-1 + e^{a\tau})} \quad (4.4)$$

Considerando la ecuación (4.4) y un cambio de variable obtenemos la ecuación característica del sistema discretizado dado por:

$$p_1(z) = (z - e^{a\tau})(z^n + k_k) + (k_\alpha)(\frac{b}{a})(e^{a\tau} - 1) = 0 \quad (4.5)$$

Donde:

$$k_k = k_d b$$

$$k_\alpha = (k_p + k_d a)$$

La demostración consiste en probar que todas las raíces de la ecuación(4.5) se encuentran dentro del círculo unitario cuando consideramos,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau}{n} = T$ , si y sólo si  $\tau < \frac{2}{a}$ .

Iniciamos considerando como primer paso a  $k_k = 0$  en la ecuación (4.5), obteniendo:

$$p_1(z) = (z - e^{a\tau})z^n + (k_\alpha)\left(\frac{b}{a}\right)(e^{a\tau} - 1) = 0 \quad (4.6)$$

Considere ahora el análisis del diagrama mostrado en la figura(4.2) del lugar geométrico de las raíces de la ecuación (4.6) [4]. El sistema a lazo cerrado tiene  $n$  polos en el origen y uno en  $z = e^{aT}$ , dado que no existen polos finitos, tenemos  $n + 1$  trayectorias hacia el infinito,  $n - 1$  que inician en el origen y las otras dos trayectorias restantes empiezan en un punto localizado entre el origen y  $z = e^{aT}$ . Este punto lo localizamos considerando:

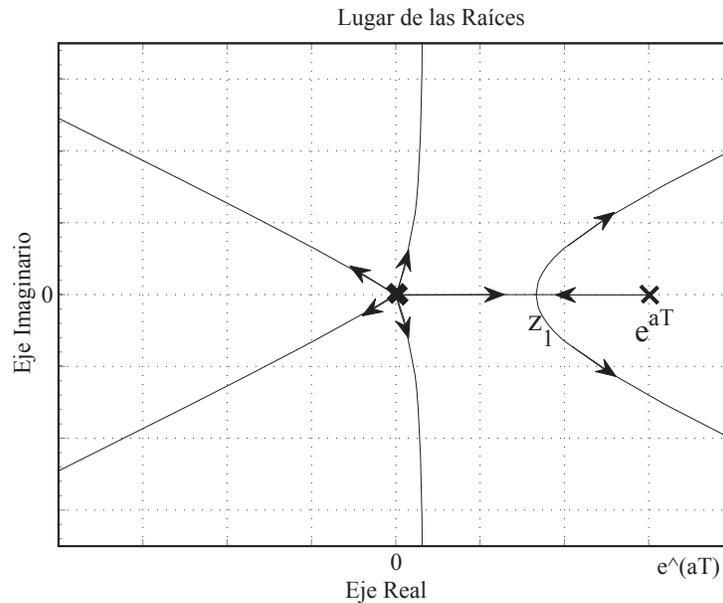


Figura 4.2: Lugar de las Raíces de la ecuación (4.6)

$$\frac{dk_\alpha}{dz} = \frac{d}{dz} \left[ -\frac{z^n(z - e^{a\tau})}{\frac{b}{a}(1 - e^{a\tau})} \right] = 0$$

Lo que produce:

$$(n+1)z^n - nz^{n-1}e^{a\tau} = 0$$

Entonces tenemos  $n - 1$  raíces en el origen y una en:

$$z_1 = \frac{n}{n+1}e^{a\frac{\tau}{n}}$$

Si el punto de ruptura sobre el eje real se encuentra dentro del círculo unitario, entonces el sistema tiene una región de estabilidad, de lo contrario el sistema es inestable para cualquier  $k_\alpha$ .

Las propiedades de estabilidad para el sistema continuo (4.3) se obtiene considerando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  o su equivalente, cuando  $T \rightarrow 0$  esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}e^{a\frac{\tau}{n}} = 1 \quad (4.7)$$

Debido a que el límite de este punto está localizado dentro de la región de estabilidad, no es difícil deducir que si  $a\tau < 1$  entonces existe una ganancia  $k_\alpha$  que estabilice el sistema a lazo cerrado (el límite tiende a uno por la izquierda). En el caso contrario cuando  $a\tau \geq 1$ , (siempre considerando  $k_k = 0$ ) no es posible obtener  $k_\alpha$  que estabilice el sistema.

Consideramos ahora el caso cuando  $k_k \neq 0$ , aplicamos de nueva cuenta el lugar geométrico de las raíces para el sistema (4.4) y su ecuación característica (4.5), como  $k_k$  crece desde cero, el punto de ruptura sobre el eje real se mueve en el lugar geométrico de las raíces (hacia la derecha). Este punto puede ser obtenido como:

$$\frac{dk_\alpha}{dz} = \frac{d}{dz} \left[ -\frac{(z - e^{a\tau})(z^n + k_k)}{\left(\frac{b}{a}\right)(e^{a\tau} - 1)} \right] = 0 \quad (4.8)$$

Esto produce:

$$p_2(z) = (n+1)z^n - nz^{n-1}e^{a\tau} + k_k \quad (4.9)$$

La expresión (4.9) corresponde a la ecuación característica de un sistema ficticio de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{V(z)} &= G(z) \\ &= \frac{1}{z^n - \frac{z^{n-1}e^{a\tau}n}{n+1}} \\ &= \frac{1}{z^{n-1}\left(\frac{z-e^{a\tau}n}{n+1}\right)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

En lazo cerrado con la retroalimentación se tiene:

$$V(z) = U(z) - k_k Y(z) \quad (4.11)$$

El sistema de la ecuación (4.10) tiene  $n - 1$  raíces en el origen y una en:

$$z = \frac{n}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}}$$

Si el punto de ruptura está ubicado dentro del círculo unitario, el sistema a lazo cerrado (4.10-4.11) puede tener región de estabilidad (probando que las otras dos  $n - 2$  estén dentro del círculo unitario), de otra forma el sistema será inestable para cualquier  $k_k$ . Este punto puede ser ubicado de la siguiente forma:

$$\frac{dk_k}{dz} = \frac{d}{dz} \left[ -\frac{z^{n-1} \left[ \frac{z - e^{a\tau/n}}{(n+1)} \right]}{\frac{1}{n+1}} \right] = 0 \quad (4.12)$$

Lo que produce:

$$z^{n-2} \left( z - \frac{n-1}{n+1} e^{a\tau} \right)$$

Donde tenemos  $n - 2$  raíces en el origen y una en:

$$z = \left( \frac{n-1}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}} \right)$$

Como en el caso anterior las propiedades de estabilidad del sistema continuo (4.3) son obtenidas considerando  $n \rightarrow \infty$ , o su equivalente, cuando  $T \rightarrow 0$  esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}} = 1 \quad (4.13)$$

De igual forma, debido a que este límite está localizado en la región de estabilidad, en este caso es posible ver que si  $a\tau \leq 2$  (el límite tiende a uno desde la izquierda), entonces existe ganancia  $k_k$  que da lugar al punto de ruptura dentro del círculo unitario en el diagrama del lugar geométrico de las raíces, entonces las  $n - 1$  raíces restantes se encuentran dentro del círculo unitario, entonces el sistema a lazo cerrado es estable. En el caso que  $a\tau > 2$  no es posible obtener una región de estabilidad por este medio (el límite tiende a uno por la derecha). La demostración finaliza señalando que, cuando el punto de ruptura está dentro del círculo unitario ( $a\tau \leq 2$ ), tomando en cuenta el caso continuo la ecuación característica (4.6) se modifica teniendo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_1(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(z - e^{a\frac{\tau}{n}})(z^n + k_k) + k_\alpha \left(\frac{b}{a}\right) (e^{a\frac{\tau}{n}} - 1)] \\ &= (z - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} (z^n + k_k) \end{aligned}$$

De donde tenemos que mientras el polo esté en una región cercana a  $z = 1$  el resto de polos se encontraran dentro de la región cercana al punto  $(k_k)^{\frac{1}{n}}$ . Dentro del círculo unitario, produciendo un sistema a lazo cerrado estable, si como vimos previamente, se satisface la condición  $k_k < 1$  de la ecuación (4.12);

$$k_k = -\frac{\frac{z^n [z - e^{a\tau} n]}{(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)}}$$

Entonces si  $z = 1$ ,

$$\begin{aligned} k_k &= -\frac{\frac{1 - e^{a\tau} n}{(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)}} \\ &= -(n + 1 - ne^{a\tau}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el caso continuo anteriormente visto tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} k_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} -(n + 1 - ne^{a\tau}) \\ &= a\tau - 1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Como  $k_k < 1$  es una condición necesaria para la estabilidad,  $a\tau - 1 < 1$ , entonces  $a\tau < 2$ . Finalmente, podemos afirmar que para el sistema discreto en el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , todos los polos se encuentran dentro del círculo unitario si y sólo si  $a\tau < 2$ .

Un Resultado que permite calcular los parámetros del controlador Proporcional Diferencia PD, puede ser calculado de la siguiente manera.

**Corolario 4.1.1** *Considere el esquema de control dado en la Figura (4.1) Si  $\tau < \frac{2}{a}$ , Entonces los parámetros  $k_p$  y  $k_d$  tales que el sistema a lazo cerrado dado por la ecuación (4.3) sea estable satisfacen:*

$$\frac{a}{b} < k_p < \beta \quad (4.15)$$

$$\frac{a\tau - 1}{b} < k_d < \gamma \quad (4.16)$$

Donde:

$$\beta \in \mathbb{R}$$

y

$$\gamma \in \mathbb{R}$$

A continuación presentaremos la demostración del corolario (4.1.1) Tomando en consideración que  $k_k = k_d b$  y  $k_\alpha = k_p + k_d a$  de la demostración del teorema (4.1.1), de la ecuación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1 - n e^{\frac{a\tau}{n}}) = a\tau - 1.$$

Por lo tanto si  $\tau < \frac{2}{a}$ , existen ganancias  $k_p$  y  $k_d$  que estabilicen el sistema dado por la ecuación (4.3):

$$a\tau - 1 < k_k \leq a\tau - 1 + \sigma$$

Para constantes  $\sigma > 0$

De la ecuación (4.8)

$$k_\alpha = -\frac{(z - e^{a\tau})(z^n + k_k)}{\left(\frac{b}{a}\right)(e^{a\tau} - 1)}$$

Entonces si  $z = 1$ :

$$k_\alpha = \frac{k_k + 1}{\frac{b}{a}} = \left(\frac{a}{b}\right)(k_k + 1)$$

La ganancia puede ser entonces calculada como:

$$\frac{a}{b}(k_k + 1) < k_\alpha \leq \frac{a}{b}(k_k + 1) + \bar{\sigma},$$

Para constantes  $\bar{\sigma} > 0$

## 4.2. Caracterización de los parámetros del controlador PD

En esta sección se presentara una conjetura que concierne a la posible caracterización de parámetros de controladores PD que pueden ser establecidos para controlar el sistema inestable tratado en este capítulo en la ecuación(4.1) y mostrado en la figura (4.1).

En base a la experiencia adquirida con el manejo de sistemas inestables con retardo, y con una serie de simulaciones numéricas, así como análisis realizados a estos sistemas hemos llegado a la siguiente conjetura, en la cual estamos trabajando para su demostración matemática.

Considere el sistema de control retroalimentado mostrado en la figura(4.1), la planta  $G(s)$  representada mediante la función de transferencia dada por la ecuación(4.1) y con el uso del controlador PD representado por la ecuación(4.17), mostrada a continuación

$$G(s) = \frac{b}{s-a} e^{-\tau s}$$

y considerando el controlador Proporcional derivativo como:

$$C(s) = k(s + \alpha) \quad (4.17)$$

Donde:

$$k = k_d$$

$$\alpha = \frac{k_p}{k_d}$$

llegamos a la conjetura siguiente:

**Conjetura 1** *Teniendo en cuenta la planta y el controlador anterior y un retardo entre ( $\frac{1}{a} < \tau < \frac{2}{a}$ ), entonces, existirá un conjunto de posiciones para la ganancia derivativa (posición del cero ( $\alpha$ )) en el siguiente rango*

$$a < \alpha < \frac{1}{\tau - \frac{1}{a}} \quad (4.18)$$

*y un rango de ganancias proporcionales  $k$  tales que estabilicen el sistema a lazo cerrado.*

**Nota 4** *Observe que la conjetura anterior cumple con el teorema (4.1.1) que es  $\tau < \frac{2}{a}$ , recordemos que si  $\tau < \frac{1}{a}$  es posible estabilizar el sistema con un control proporcional ( $k_d=0$ ).*

La conjetura a la que se ha llegado se debe al uso del criterio de estabilidad de Nyquist, para nuestro caso de análisis establece que al cerrar el lazo con un controlador PD, el sistema en lazo cerrado será estable si  $Z = 0$  en la ecuación:

$$Z = N + P$$

Dónde  $P$  es el número de polos de  $G(s)$  en el semiplano derecho del sistema en lazo abierto ( $P = 1$  en este caso) y  $N$  el número de rodeos a el punto  $(-1, j0)$  en sentido horario y  $N$  negativa en sentido contrario a las manecillas del reloj (sentido anti-horario) en el diagrama de Nyquist, este rodeo existe con el uso del controlador lo cual ha sido demostrado en el teorema principal (4.1.1), y con el uso del corolario (4.1.1) se propone a partir de donde este rodeo sucede si se cumple con la condición  $\tau < \frac{2}{a}$ .

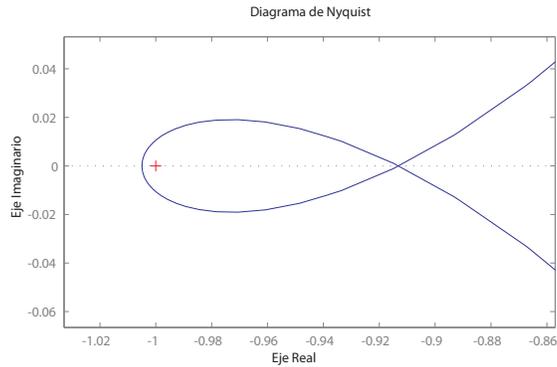


Figura 4.3: Diagrama de Nyquist: Sistema que cumple la condición de estabilidad ( $\tau < \frac{2}{a}$ ) y toma valores dentro del rango de la conjetura.

La figura(4.3) muestra el caso cuando cumplimos con la condición de estabilidad ( $\tau < \frac{2}{a}$ ) y la posición del cero pertenece a un valor dentro del rango propuesto en la conjetura (1).

Al contrario cuando la condición de estabilidad para el sistema no se cumple, es decir cuando ( $\tau > \frac{2}{a}$ ) y la conjetura (1) no se cumple, no existen rodeos en sentido anti-horario como se ilustra en la figura(4.4).

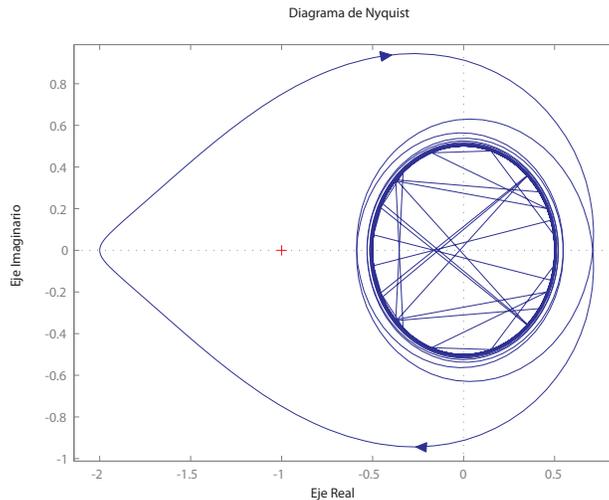


Figura 4.4: Diagrama de Nyquist: Sistema que NO cumple la condición de estabilidad ( $\tau < \frac{2}{a}$ ).

### 4.3. Conclusiones

Este capítulo se presentó el resultado principal de este trabajo, que consiste en establecer la condición necesaria y suficiente ( $\tau < \frac{2}{a}$ ) para la existencia de un controlador PD y un método sencillo para obtener los valores del controlador PD estabilizante basados en un método alternativo que consiste en tratar con un modelo discreto (control por computadora) y sacar conclusiones sobre el modelo en tiempo continuo al considerar el límite cuando el periodo de muestreo tiende a cero, también se presentó la conjetura de la posible caracterización de los parámetros del controlador PD en la que se seguirá trabajando hasta demostrarla matemáticamente, de forma que entregue los valores del rango para los cuales el controlador estabilizará el sistema.

### 4.4. Referencias

Los temas abordados en este capítulo pueden ser complementados con la revisión de los autores y distintos títulos presentados con anterioridad, donde podemos ahondar en esto como son; [15] dentro de este texto conseguirá conocer más sobre sistemas discretos (control por computadora), [16, 7] donde el lector podrá indagar más sobre el diagrama de Nyquist.

## CAPÍTULO V

# Resultados en Simulación



## CAPÍTULO 5

---

### Aplicación de Resultados

---

En este capítulo se presentará la utilidad del resultado principal acerca del control PD de este trabajo analizándolo con un conjunto de simulaciones numéricas así como una implementación electrónica, utilizando circuitos operacionales resistencias capacitores entre otros dispositivos electrónicos. Mostraremos como se comporta el diagrama de Nyquist con el incremento del tiempo de retardo, un ejemplo utilizando el control PD utilizando una función propia (donde el polo del sistema es de alta frecuencia), una simulación que nos muestra el comportamiento de la respuesta  $y(t)$ , un comparativo con la respuesta obtenida con el uso del control PID, y por ultimo la implementación usando la tarjeta SENSOREY626.

Todas estas simulaciones numéricas así como la implementación electrónica, se realizaron haciendo uso de MATLAB y el entorno de programación visual SIMULINK.

## 5.1. Ejemplos

**Ejemplo 5.1.1** Considere el sistema de primer orden inestable con retardo en el tiempo dado por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{b}{s - a} e^{-\tau s}$$

Donde:

$$a = 2$$

$$b = 3$$

y considerando el controlador Proporcional derivativo como:

$$C(s) = k(s + \alpha)$$

Ahora, mostraremos los cambios que sufre el diagrama de Nyquist con el incremento del tiempo de retardo, las siguientes dos gráficas, figuras(5.1,5.2) nos muestran el diagrama cuando el sistema cumple con la condición establecida en el teorema principal (4.1.1), que dice; ( $\tau < \frac{2}{a}$ ).

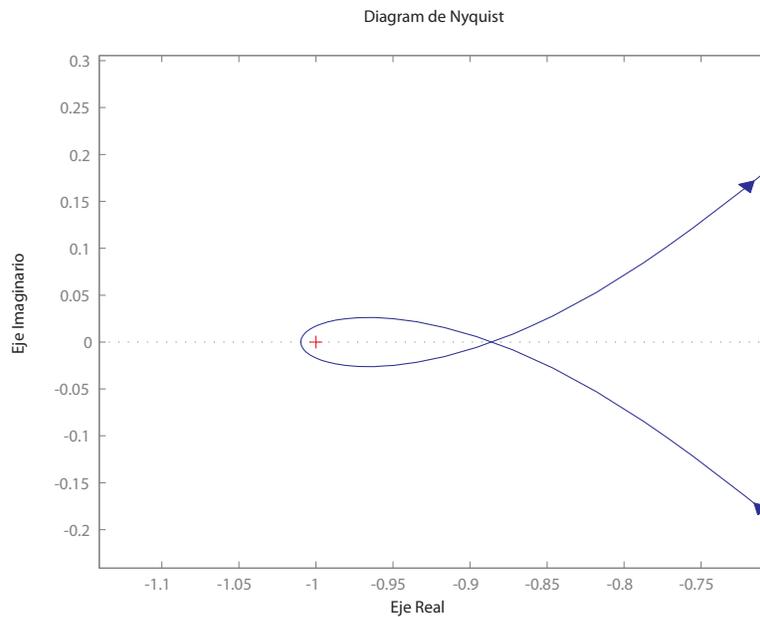


Figura 5.1: Diagrama de Nyquist del sistema con tiempo de retardo de  $\tau = 0.3$

## 5.1 Ejemplos

La figura(5.1), presenta el diagrama de Nyquist cuando  $\tau = 0.3$ , podemos observar el rodeo anti-horario, con el que tenemos las ganancias:

$$k = -0.6$$

$$\alpha = -1.683$$

Con las cuales el sistema será estable.

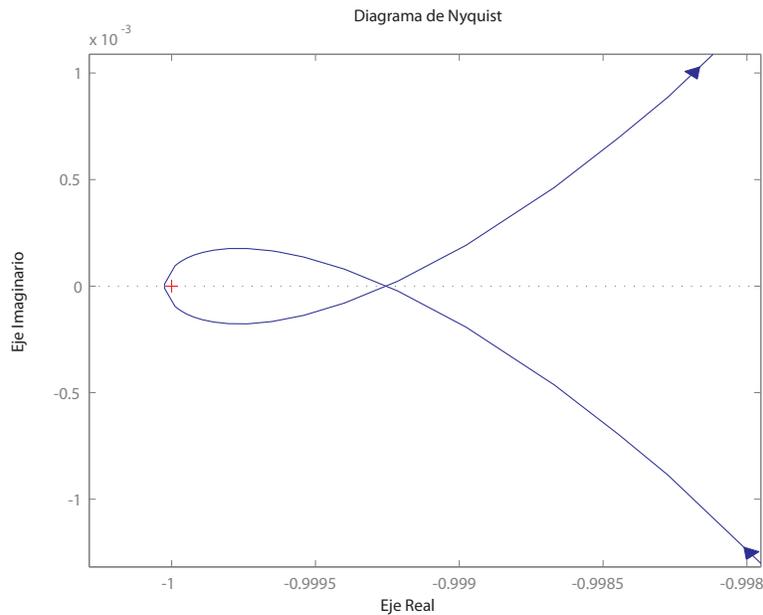


Figura 5.2: Diagrama de Nyquist del sistema con tiempo de retardo de  $\tau = 1.9$

La figura(5.2), presenta el diagrama de Nyquist cuando  $\tau = 1.9$ , podemos observar el rodeo anti-horario, con el que tenemos las ganancias:

$$k = 0.905$$

$$\alpha = 1.105$$

En la figura(5.2), es posible observar lo pequeño que es el rodeo al punto  $(-1, 0j)$ , con lo que es posible observar que encontrar las ganancias con las cuales el sistema es estable se vuelve complicado, y corroborar que con nuestra condición necesaria y suficiente presentada en el teorema (4.1.1) y con el uso del corolario (4.1.1), la tarea de la búsqueda de ganancias se vuelve más sencilla.

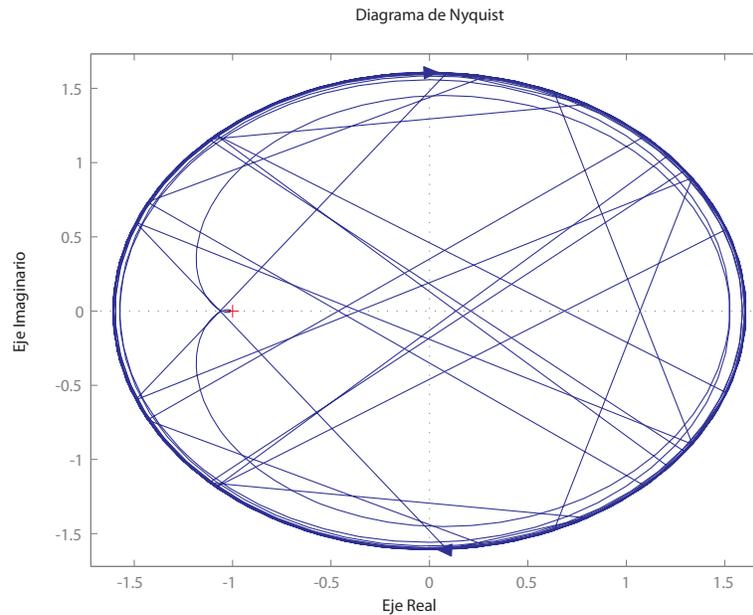


Figura 5.3: Diagrama de Nyquist del sistema con tiempo de retardo de  $\tau = 3$

En la figura(5.3) se puede observar que el rodeo anti-horario desaparece con lo que no existe conjunto de ganancias que puedan estabilizar el sistema con el uso de un controlador PD.

Para realizar los cálculos utilizamos los valores de  $\sigma = 0.10$   $\bar{\sigma} = 0.0033$ .

**Ejemplo 5.1.2** Considere el sistema de primer orden inestable con retardo en el tiempo dado por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{b}{s - a} e^{-\tau s}$$

y considerando el controlador Proporcional derivativo como:

$$C(s) = k(s + \alpha)$$

Donde:

$$a = 2$$

$$b = 3$$

$$\tau = 0.9$$

El sistema cumple con la condición establecida en el teorema principal (4.1.1), que dice,

$$\tau < \frac{2}{a}$$

$$0.9 < 1.0$$

Por lo tanto es posible, obtener un controlador PD estabilizante, haciendo uso del corolario(4.1.1)

$$k = 0.9$$

$$\alpha = 2.233$$

Para realizar los cálculos utilizamos los valores de  $\sigma = 0.10$   $\bar{\sigma} = 0.0033$ .

La simulación se llevó acabo con una función propia con el uso de un polo de alta frecuencia como se muestra a continuación:

$$C(s) = \left[ k + \alpha \left( \frac{Ns}{s + N} \right) \right]$$

Donde:

$k$  : es la ganancia proporcional

$\alpha$  : es la ganancia derivativa

$N$  : es la posición del polo de alta frecuencia

Con las notas anteriores el controlador se implementa de la forma mostrada en la figura (5.4).

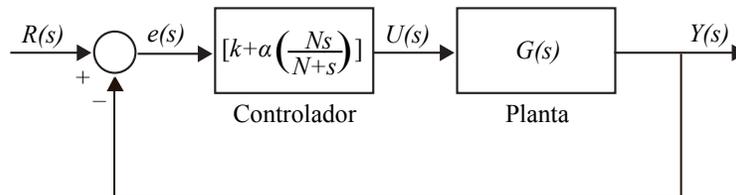


Figura 5.4: Controlador PD usando una función propia

En la figura(5.5), podemos observar la respuesta  $y(t)$ , que es estable y en aproximadamente 50 seg. obtiene el valor final, corroborando la función propia del controlador PD.

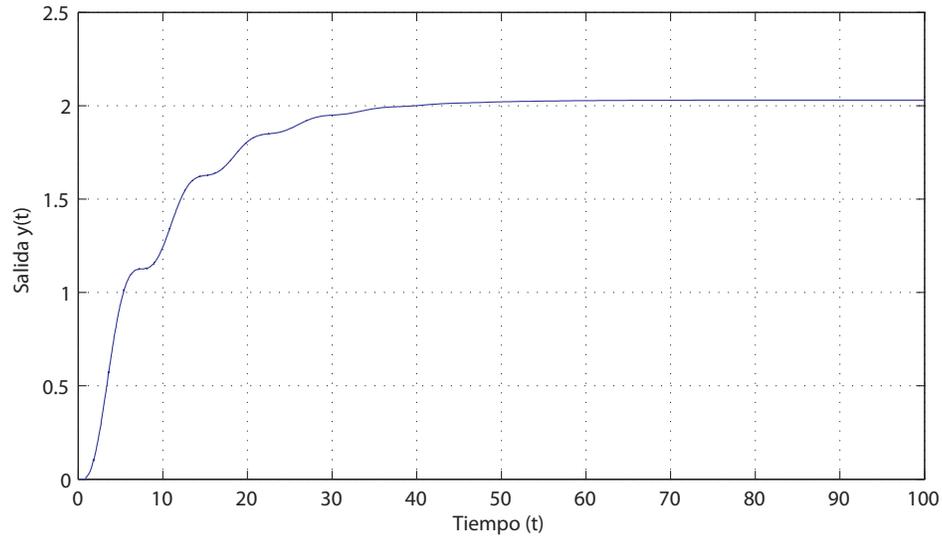


Figura 5.5: Salida  $y(t)$  del sistema con el Controlador PD usando una función propia

**Ejemplo 5.1.3** Considere el sistema de primer orden inestable con retardo en el tiempo dado por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{b}{s - a} e^{-\tau s}$$

y considerando el controlador Proporcional derivativo como:

$$C(s) = k(s + \alpha)$$

Donde:

$$a = 2.5$$

$$b = 4$$

$$\tau = 0.7$$

El sistema cumple con la condición establecida en el teorema principal(4.1.1), que dice,

$$\tau < \frac{2}{a}$$

$$0.7 < 0.8$$

Por lo tanto es posible, obtener un controlador PD estabilizante, haciendo uso del corolario (4.1.1)

$$k = 0.85$$

$$\alpha = 2.957$$

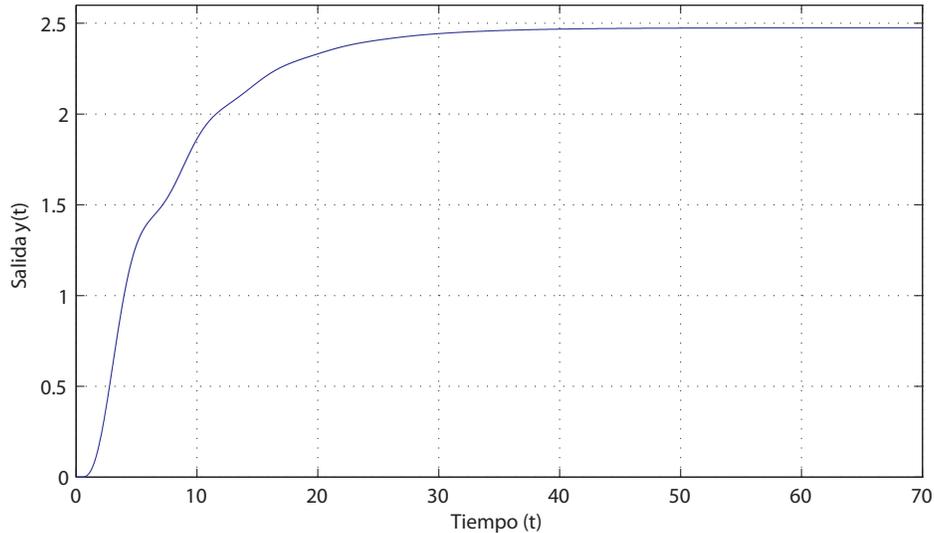


Figura 5.6: Salida  $y(t)$  del sistema con el Controlador PD

En la figura (5.6), podemos observar la respuesta  $y(t)$ , que es estable y en aproximadamente 40seg. obtiene el valor final. Esta simulación se llevó a cabo con el controlador PD utilizando una función impropia en MATLAB.

Para realizar los cálculos utilizamos los valores de  $\sigma = 0.10$   $\bar{\sigma} = 0.0033$ .

**Ejemplo 5.1.4** Considere el sistema de primer orden inestable con retardo en el tiempo dado por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s - 0.25} e^{-7s}$$

El control propuesto por [21], se inicia probando la existencia de ganancias para el controlador PID, cumpliendo con la condición  $|\frac{-4}{7}| = 0.5714$  de aquí tenemos que  $0.5714 > 0.5$  (que es equivalente a  $7 < 8$ ) por lo que sugiere estabilizar el problema utilizando un valor para la ganancia  $k_p$  que se encuentre dentro del siguiente rango:

$$-1.0249 < k_p < -1$$

Y haciendo uso de la región propuesta para  $k_p$  se obtiene la región para  $k_d$  y  $k_i$  mostrado en la figura(5.7):

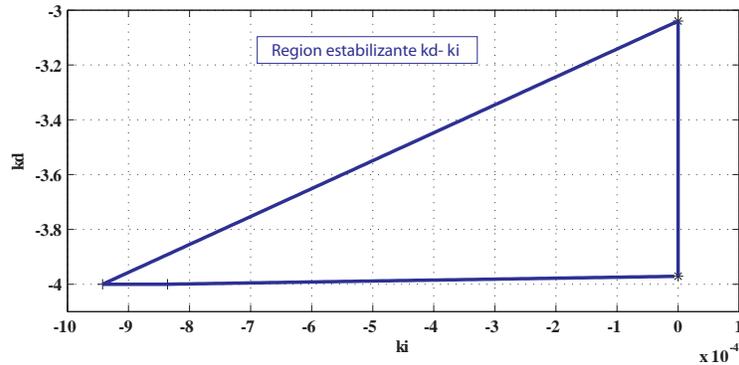


Figura 5.7: Region  $(k_i, k_d)$

De aquí podemos seleccionar los parámetros del controlador que proponen como:  $k_p = -1.0033$ ;  $k_i = -0.0002$  y  $k_d = -3.4$ , con lo que obtenemos la respuesta mostrada en la figura(5.8):

De la región  $Q$ , dada en la figura(5.7), se puede observar que la ganancia  $k_i$  para el control integral es del orden  $10^{-4}$ , lo que muestra que la ganancia es pequeña con respecto a la ganancia diferencial.

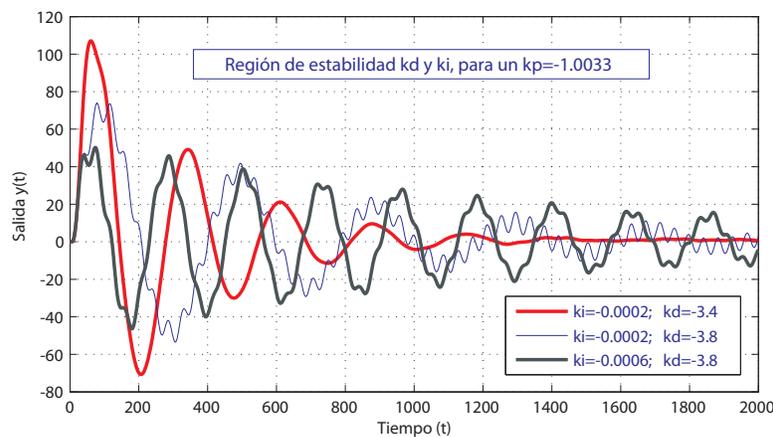


Figura 5.8: Respuesta con el Controlador PID

En la figura(5.8), podemos observar que aún con un valor muy pequeño de la ganancia  $k_i$ , la respuesta obtenida no favorece la salida  $y(t)$ , al tener un sobrepulso de más de cien veces el valor final deseado, con lo que el seguimiento de referencia del controlador PID no es

funcional para una aplicación práctica. Se muestran simulaciones con tres valores diferentes tomados de la región propuesta de valores  $k_d-k_i$ , los cuales fueron tomados dentro de la región en dos orillas opuestas y un punto central, con lo que podemos corroborar que el uso de la ganancia integral perjudica la respuesta del sistema, obteniendo resultados poco favorables. Cabe mencionar que la región de valores posibles para  $k_i$  es  $-9.5 \times 10^{-4} < k_i < 0$ .

Es posible analizar el sistema con estructuras de control más completas como lo es el arreglo en **compensación directa con compensación en serie** (dos grados de libertad), el arreglo se muestra en la figura(5.9)

$$D_f(s) = k_p(b + \frac{1}{sK_i} + csk_d)$$

$$D_c(s) = k_p(1 + \frac{1}{sK_i} + sk_d)$$

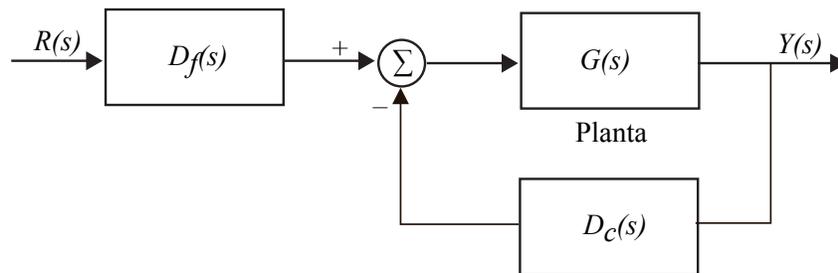


Figura 5.9: Configuración PID de dos grados de libertad

Con lo que conseguimos reducir el sobreimpulso considerablemente aunque el tiempo de asentamiento es grande y el valor final es conseguido lentamente y con oscilaciones, lo cual podemos observar en la figura(5.10).

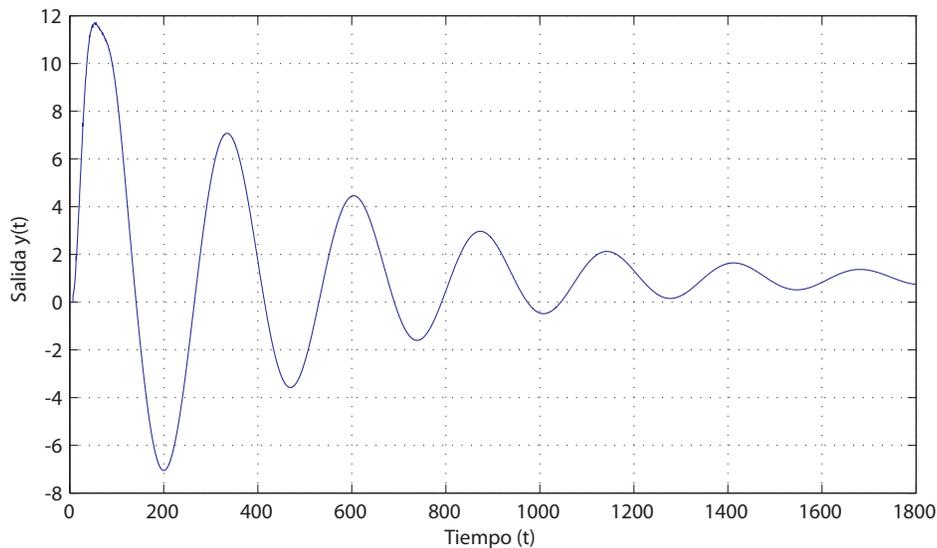


Figura 5.10: Respuesta con la configuración PID de dos grados de libertad

Ahora se realiza el análisis haciendo uso de la metodología propuesta en este trabajo, con uso del controlador PD.

Se prueba la existencia de ganancias  $k_p$  y  $k_d$ , corroborando se cumpla la condición dada por el Teorema (4.1.1), que es  $\tau < \frac{2}{a}$ , entonces tenemos  $\frac{2}{a} = 8$  de esa forma tenemos  $7 < 8$ , se cumple con la condición, procedemos a utilizar el método de sintonización del controlador PD.

Del teorema (4.1.1) es claro que existe ganancia  $k_p$  y  $k_d$  que estabilizan el sistema a lazo cerrado con el uso de un esquema como es mostrado en la figura(4.1), debido a que el retardo cumple la condición  $\tau < \frac{2}{a}$ . Existen ganancias  $k_p$  y  $k_d$  que pueden ser calculadas utilizando el Corolario (4.1.1), para las simulaciones se considera  $\sigma = 0.10$  y  $\bar{\sigma} = 0.0033$  de esta forma obtenemos  $k_p = -1.0033$  y  $K_d = -3.4$ . En la Figura (5.11), se evalúa la respuesta en la salida  $y(t)$  con el uso del controlador PD propuesto. Para llevar a cabo este experimento asumimos el conocimiento exacto de los parámetros de la planta.

La respuesta en la salida  $y(t)$  del sistema con la implementación del controlador PD, muestra una respuesta sin oscilaciones en la que se llega más rápido a el valor final, en comparación al tiempo que tarda el control PID.

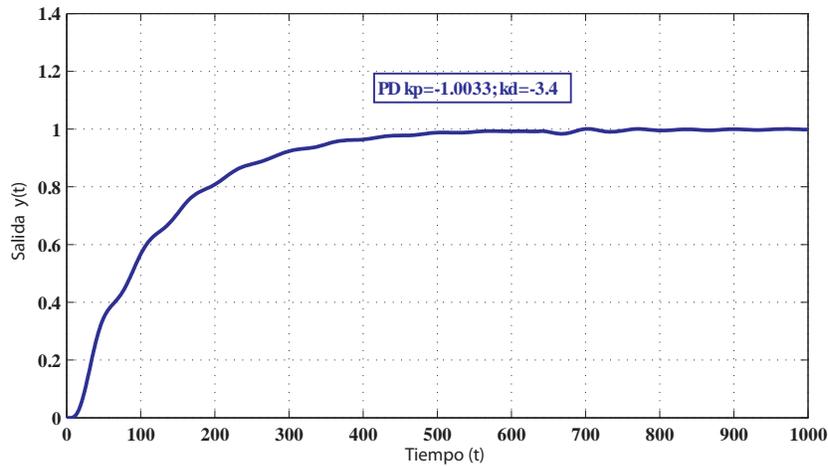


Figura 5.11: Respuesta con el Controlador PD

**Ejemplo 5.1.5** Considere el sistema de primer orden inestable con retardo en el tiempo dado por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{b}{s - a} e^{-\tau s}$$

y considerando el controlador Proporcional Derivativo como:

$$C(s) = k(s + \alpha)$$

Donde:

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$\tau = 1.2$$

El sistema cumple con la condición establecida en el teorema principal (4.1.1), que dice,

$$\tau < \frac{2}{a}$$

$$1.2 < 2$$

Por lo tanto es posible, obtener un controlador PD estabilizante, haciendo uso del corolario (4.1.1)

$$k = 0.5033$$

$$\alpha = 0.15$$

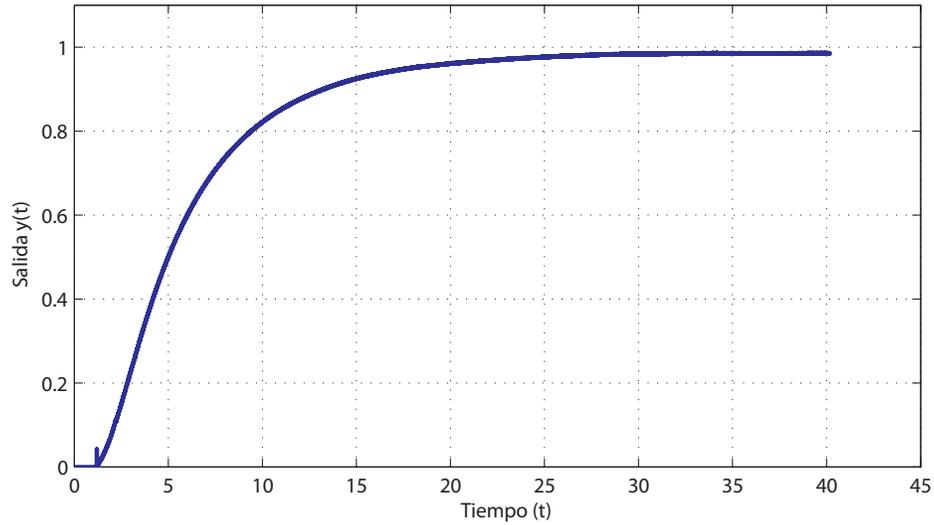


Figura 5.12: Salida  $y(t)$  del sistema implementado con dispositivos electrónicos

*La implementación de la planta se llevó a cabo con dispositivos electrónicos, la obtención de datos se realizó con la tarjeta de adquisición de datos **SENSOREY626**, y el control por medio de MATLAB en su modo de programación visual SIMULINK. En la figura(5.6), podemos observar la respuesta  $y(t)$ , que es estable y en aproximadamente 25seg. obtiene el valor final. Con esto corroboramos que el controlador soporta variaciones paramétricas las cuales son causadas por el uso de dispositivos electrónicos comerciales.*

## 5.2. Conclusiones

Este capítulo presentó resultados en simulación, En el primer ejemplo observamos las complicaciones en la obtención de ganancias para un controlador PD, cuando el retardo es considerablemente grande, muy cercano a la condición establecida para la existencia del control estabilizante, observamos la disminución de las dimensiones del rodeo anti-horario, hasta exceder el retardo donde este no existe. En el segundo ejemplo se aplicó una función propia con un polo de alta frecuencia obteniendo como resultado un sistema estable. El tercer ejemplo es realizado con una función impropia aproximando el efecto derivativo mediante MATLAB, el retardo es próximo al límite soportado dentro de nuestra restricción, la respuesta es estable y se establece en un tiempo corto. El cuarto ejemplo es el comparativo con el controlador *PID*, obtenemos un resultado favorable, el control PD se establece en un tiempo menor sin oscilaciones considerables, además utilizando una estructura de control de dos grados de libertad para el controlador *PID*, reducimos el sobreimpulso sin desaparecerlo, mostrando que con nuestra estructura el resultado es interesante y de un cálculo sencillo, cabe mencionar que el controlador *PD* propuesto no sigue referencias ni rechaza perturbaciones como el *PID*. El ejemplo cinco es la simulación con la implementación de la planta con dispositivos electrónicos que presentan variaciones paramétricas, en este observamos que el controlador las soporta y trabaja de manera adecuada.

## 5.3. Notas y Referencias

Los temas abordados en este capítulo pueden ser complementados con la revisión de los autores y distintos títulos presentados con anterioridad, donde podemos ahondar en esto como son; [1] donde el lector podrá indagar más sobre el controlador PID de dos grados de libertad.

NOTA: Estos textos son sólo sugeridos, existen un sinnúmero de publicaciones donde el lector podrá referirse si lo considera conveniente.



## **CAPÍTULO VI**

### **Conclusiones**



## CAPÍTULO 6

---

### Conclusiones Generales

---

En la actualidad los sistemas de comunicación así como los procesos químicos presentan tiempo de retardo debido a la transmisión de información o materiales, debido a esto, esta clase de sistemas han sido analizados ya en numerosos trabajos, para presentar las condiciones en las cuales los sistemas son estables y con respuestas deseadas según los procesos en los que estén aplicados.

## 6.1. Conclusiones

En este trabajo de tesis se presentó un controlador proporcional derivativo con la finalidad de estabilizar sistemas lineales invariantes en el tiempo de primer orden inestables con tiempo de retardo, presentando condiciones necesarias y suficientes para la existencia de las ganancias del controlador PD estabilizante, se demuestra su existencia haciendo uso de un método alternativo, que es el enfoque digital debido a que con una representación discreta, los retardos pueden ser expresados como retardos unitarios múltiples del período de muestreo (si se utiliza un tiempo de muestreo  $T = \frac{\tau}{n}$ , donde  $\tau$  es el retardo y  $n$  es un número entero), dando como resultado funciones racionales en el dominio de la variable compleja  $z$ , sin ningún término trascendente y una ecuación característica con un número finito de raíces. Además considerando dicha representación discreta, se obtiene una representación exacta, en el sentido que describe perfectamente la respuesta en los instantes de muestreo del proceso ante una señal de entrada arbitraria continua entre instantes de muestreo.

Quizá la conclusión más importante de este trabajo es que si bien el controlador *PD* como el *PID* tienen la misma cota que es  $\tau < \frac{2}{a}$ , para retardos cercanos a este límite el desempeño del controlador *PID* deja mucho que desear a diferencia del controlador *PD* que tiene un buen desempeño transitorio, también es importante tomar en cuenta que de los resultados mostrados en [21] no tiene la posibilidad de extenderse al resultado del controlador *PD* haciendo  $k_i = 0$ .

Se presentan tanto simulaciones numéricas, como implementaciones electrónicas del esquema de control, mediante una planta construida con amplificadores operacionales, con la finalidad de ilustrar el desempeño obtenido con la estrategia de control propuesta, mostrando que el sistema es confiable incluso ante variaciones paramétricas presentadas en la planta a controlar.

## 6.2. Perspectivas Futuras

- Demostrar la conjetura sobre la caracterización de la región completa de parámetros del control PD estabilizantes.
- Extender este tipo de controladores a plantas de diferente orden con tiempo de retardo.
- Estudiar sistemas con ecuaciones características similares a la obtenida con el control PD en sistemas de primer orden, en otras palabras, el estudio de un control P, cuando el sistema es propio pero no estrictamente propio (contiene un cero y un polo fijos).



# Apéndices



---

Apéndice A

Artículo publicado en el congreso de la Asociación Mexicana de Control Automático, AMCA 2011

---

Estabilización de sistemas de primer orden inestables con retardo utilizando un controlador

PD

E. Olvera, J.F. Márquez, B. del Muro, J.C. Sánchez, y G.I. Duchén.

Congreso de la Asociación Mexicana de Control Automático, AMCA 2011.



# Estabilización de sistemas de primer orden inestables con retardo utilizando un controlador PD.

E. Olvera, J.F. Márquez, B. del Muro, J.C. Sánchez, y G.I. Duchén  
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.  
Unidad Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional  
Santa Ana 1000 México DF 04430, México  
eleozal@hotmail.com; jfcomr23@yahoo.com.mx  
bdelmuro@yahoo.com; jcsanchezgarcia@gmail.com  
gduchen@ipn.mx  
Teléfono: (52)-55-56562058

**Resumen**—Este trabajo considera el problema de estabilización de sistemas lineales de primer orden con retardo. Para resolver este problema primero presentamos las condiciones necesarias y suficientes que aseguran la estabilidad del sistema a lazo cerrado con el uso de un controlador Proporcional-Derivativo, posteriormente se propone un método de sintonización del controlador.

**Palabras clave:** Sistemas lineales, Controladores PD, Sistemas con retardo.

## I. INTRODUCCIÓN

La interconexión entre dos o más sistemas físicos está siempre acompañado de fenómenos de transferencia como son transporte y propagación. Matemáticamente hablando, los fenómenos de transporte y propagación pueden ser representados por elementos de retardo (material, energía, información) (Niculescu, 2007).

Desde la perspectiva de control, los retardos son un caso desafiante que debe ser superado diseñando estrategias de control que propicien un comportamiento aceptable del sistema en lazo cerrado y por supuesto estable. Se han desarrollado diversas estrategias de control para tratar a los retardos. El enfoque más simple consiste en ignorar el término de retardo. Es claro que esto solo es funcional en el caso de procesos que cuentan con un retardo pequeño.

Cuando se considera el caso en tiempo continuo el operador puede ser aproximado utilizando series de expansión de Taylor o Padé. De ésta forma el sistema puede ser analizado como un sistema de fase no mínima con una función de transferencia racional en la variable compleja  $s$  (Marshall, 1979).

Otra clase de estrategia de compensación consiste en contrarrestar los efectos del tiempo de retardo a través de estrategias que intentan predecir los efectos de la entrada actual para una salida futura. La estrategia conocida como Predictor de Smith (SPC) (Smith, 1957) (Palmer, 1996) es la estrategia de predicción más utilizada, por medio de un

tipo de esquema observador a lazo abierto. La principal limitación del SPC original consiste en que el esquema de predicción no contiene un paso de estabilización, lo que lo restringe a aplicaciones de plantas a lazo abierto estables. Para resolver sistemas de primer orden inestables se han presentado distintas modificaciones de la estructura original del (SPC), ver por ejemplo (Torricco and Normey-Rico, 2004), (Márquez, Muro, Velasco and Alvarez, 2010) y las referencias ahí incluidas.

Una motivación para trabajar con sistemas de bajo orden con retardo esta basada en el hecho, que en algunos casos sistemas de alto orden pueden ser aproximados por sistemas de primer o segundo orden con tiempo de retardo, como un primer paso hacia la estabilización de plantas de mayor orden inestables con retardo (Skogestad., 2004) y (Seshagiri R.A., 2007). El caso de plantas inestables de primer orden con retardo también ha sido analizado por (Silva, Datta and Bhattacharyya, 2002) y (Guillermo J. Silva, 2004), utilizando un controlador Proporcional Integral Derivativo (PID), usando una versión del teorema de Hermite-Biehler aplicable a cuasipolinomios, presentando el conjunto completo de parámetros del controlador PID. En dicho trabajo se dan los detalles sobre la sintonización del controlador PID que asegura la estabilidad del sistema en lazo cerrado cuando el retardo  $\tau$  es estrictamente inferior a dos veces la constante de tiempo  $1/a$  (inestable) del sistema en lazo abierto, i.e.,  $\tau < 2/a$ . Cabe mencionar que en el trabajo referido no se contempla el caso con constante integral nula, es decir, no se muestra como sintonizar un controlador PD.

Con una perspectiva diferente (Ya-Gang Wang, 2010) propone un controlador Proporcional Integral (PI) adaptivo para procesos con tiempo de retardo largo, con especificaciones sensitivas, en base a sistemas de entrada-salida en operación normal, la respuesta en frecuencia importante es estimada con descomposición de señales y análisis de

Laplace.

Este trabajo se enfoca en el problema de estabilización y control de sistemas de primer orden inestables con retardo en el lazo directo. Se dan condiciones necesarias y suficientes para garantizar la estabilización del sistema en lazo cerrado, encontrando de nuevo que el límite es  $\tau < 2/a$ , pero ahora usando un controlador proporcional-derivativo PD. Así mismo, se propone un método simple de sintonización de los parámetros  $k_p$  y  $k_d$ . La principal motivación para abordar este problema surge al constatar que para sistemas con un retardo  $\tau$  considerable, cercanos al límite  $2/a$ , al usar el controlador PID propuesto en (Silva et al., 2002), el termino integral es muy pequeño pero diferente de cero, lo que induce a que el desempeño del sistema sea muy pobre. Por el contrario, al usar un controlador PD el desempeño mejora considerablemente.

Este artículo está organizado de la siguiente forma: En la Sección 2 se presenta la clase de sistemas a considerar. En la Sección 3 se hace un breve resumen sobre los resultados propuestos por (Silva et al., 2002) cuando se trata de la estabilización de sistemas usando un controlador PID. La Sección 4 presenta el resultado principal de esta trabajo: la estabilización de un sistema de primer orden con tiempo de retardo en el lazo directo usando un controlador Proporcional Derivativo (PD), la respuesta del sistema con el control PD se evalúa en la Sección 5 mediante ejemplos en simulación numérica. Finalmente en la Sección 6: Se presentan algunas conclusiones.

## II. CLASE DE SISTEMAS

Consideremos la clase de sistemas lineales de una entrada una salida (SISO) con tiempo de retardo en el lazo directo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\tau s} = G(s) e^{-\tau s} \quad (1)$$

$U(s)$  y  $Y(s)$  son la señal de entrada y salida respectivamente,  $\tau$  es el tiempo de retardo y  $N(s)$  y  $D(s)$  son los polinomios en la variable compleja  $s$ . Donde:

$$G(s) = \frac{b}{s - a} \quad (2)$$

Es la función de transferencia libre de retardo, con  $a > 0$ . Note que  $\tau_{un} = 1/a$ , puede ser vista como la constante de tiempo inestable del proceso. Observé que con respecto a esta clase de sistemas dados por la ecuación (1) una estrategia de control tradicional basada en una retroalimentación de la salida de la forma:

$$U(s) = H(s)[R(s) - Y(s)] \quad (3)$$

Produce un sistema a lazo cerrado de la forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{H(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + H(s)G(s)e^{-\tau s}} \quad (4)$$

Donde el término  $H(s)$  representa el controlador PD, mientras el término  $e^{-\tau s}$  localizado en el denominador de la función de transferencia (4) dificulta el análisis de estos

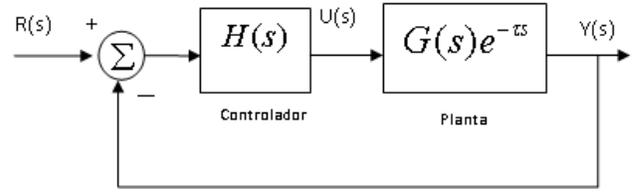


Figura 1. Sistema a lazo cerrado

sistemas debido al número infinito de polos del sistema a lazo cerrado. La función de transferencia de lazo cerrado del sistema mostrado en la Figura (1), es de la forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{H(s)G(s)}{1 + H(s)G(s)} e^{-\tau s} \quad (5)$$

En este trabajo consideraremos la noción clásica de estabilidad relacionada con la función de transferencia i.e., la estabilidad del sistema depende de la posición de los polos en el semiplano izquierdo del plano complejo para el caso continuo y dentro del círculo unitario para el caso discreto.

## III. RESULTADOS EXISTENTES

El problema de estabilización de sistemas con tiempo de retardo en el lazo directo fue abordado por (Silva et al., 2002), el cual basados en una versión del teorema de Hermite-Biehler aplicable a cuasipolinomios presentan la sintonización de un control Proporcional Integral y Derivativo. En esta sección se hace un breve resumen de la metodología detallada en (Guillermo J. Silva, 2004).

Considerando la clase de sistemas de la forma descrita por la ecuación (1) donde conservando la nomenclatura usada por (Silva et al., 2002) tenemos:

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts} e^{-Ls} \quad (6)$$

Donde:  $k = Tb$ ,  $L = \tau$  y  $T = \frac{1}{a}$ . Considerando el sistema de control retroalimentado mostrado en la Figura (1).

En este caso  $H(s)$  representa el controlador del tipo Proporcional Integral Derivativo que representaremos de la siguiente forma:

$$H(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

Donde  $k_p$  es la ganancia proporcional,  $k_i$  es la ganancia integral y  $k_d$  es la ganancia derivativa, las cuales se determinaron en (Guillermo J. Silva, 2004), como primer paso, analizaron el sistema sin tiempo de retardo, obteniendo la ecuación característica a lazo cerrado de la forma:

$$\delta(s) = (T + k k_d) s^2 + (1 + k k_p) s + k k_i$$

Debido a que es un polinomio de segundo orden, la estabilidad a lazo cerrado es equivalente a que todos los coeficientes tengan el mismo signo. Asumiendo que la

ganancia constante de la planta es positiva se tiene:

$$k_p > -\frac{1}{k}, k_i > 0 \quad y \quad k_d > -\frac{T}{k} \quad (7)$$

$$o$$

$$k_p < -\frac{1}{k}, k_i < 0 \quad y \quad k_d < -\frac{T}{k} \quad (8)$$

Un requerimiento en el diseño del control es que el sistema libre de retardo en lazo cerrado se estable. Por consecuencia a partir de esta condición se asume que las ganancias del control PID usadas para estabilizar la planta con retardo siempre deben cumplir las condiciones (7) o (8). Después se considera la planta con retardo distinto de cero, la ecuación característica queda de la siguiente forma:

$$\delta(s) = (kk_i + kk_p s + kk_d s^2)e^{-Ls} + (1 + Ts)s.$$

Para el caso de análisis en este artículo tenemos:  $T > 0$ ,  $k > 0$  y  $L > 0$ , la condición necesaria y suficiente para la existencia del controlador PID estabilizante es  $|\frac{T}{L}| > 0,5$ , si esta condición se satisface, existe rango de ganancia  $k_p$  tal que establezca el sistema de la siguiente forma:

$$\frac{1}{k} \left[ \frac{T}{L} \alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1) \right] < k_p < -\frac{1}{k}$$

Donde  $\alpha_1$  es la solución de la ecuación:

$$\tan(\alpha) = -\frac{T}{T+L} \alpha \quad (9)$$

En el intervalo  $(0, \pi)$ , De esta forma para valores de  $k_p$  fuera de este rango, no existen valores para el control PID, el conjunto de valores completo para el controlador está dado en la Figura (2).

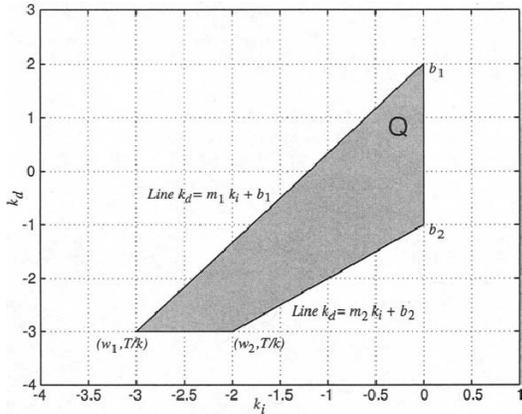


Figura 2. Región de Estabilidad  $(k_i, k_d)$

Para cada valor de  $k_p \in (k_l := \frac{1}{k} [\frac{T}{L} \alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1)], -\frac{1}{k})$ , la sección transversal de la región transversal en el espacio  $(k_i, k_d)$  es el cuadrilátero  $Q$ . Los parámetros  $m_j$ ,  $b_j$  y  $w_j$ ,  $j = 1, 2$  son necesarios para determinar el límite de  $Q$ . Para mayor detalle se puede consultar (Guillermo J. Silva, 2004).

#### IV. RESULTADO PRINCIPAL: CONTROLADOR PD

Considere el sistema inestable dado por la ecuación (1) y considerando el controlador Proporcional derivativo como:

$$H(s) = k(s + \alpha)$$

$$H(s) = k_p + k_d s = k_d (s + \frac{k_p}{k_d}) \quad (10)$$

Las condiciones de estabilidad del sistema dado por la Figura (1) se muestra en el resultado siguiente.

**Teorema 1:** Considere el sistema con retardo dado por la ecuación (2) y el esquema de retroalimentación dado en la Figura (1). Existen ganancias  $k_p$  y  $k_d$  tales que el sistema a lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{bk(s + \alpha)e^{-\tau s}}{(s - a) + bke^{-\tau s}(s + \alpha)} \quad (11)$$

es estable si y solo si  $\tau < \frac{2}{a}$ .

La demostración del teorema 1 se presenta en el apéndice A.

Un Resultado que permite calcular los parámetros del controlador Proporcional Diferencia PD, puede ser calculado de la siguiente manera.

**Corolario 1:** Considere el esquema de control dado en la Figura (1) Si  $\tau < \frac{2}{a}$ , Entonces los parámetros  $k_p$  y  $k_d$  tales que el sistema a lazo cerrado dado por la ecuación (11) sea estable satisfacen:

$$k_p = \frac{a}{b} + \bar{\sigma} \quad (12)$$

$$k_d = \frac{a\tau - 1 + \sigma}{b} \quad (13)$$

Donde  $\sigma$  y  $\bar{\sigma}$  son constantes mayores que cero.

La demostración del Corolario 1, se presenta en el apéndice B.

#### V. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

La metodología propuesta se evalúa a través de un ejemplo comparativo con (Guillermo J. Silva, 2004), se considera el caso en el que el retardo se encuentra cerca del límite en el que existe rango de estabilidad que cumpla la condición necesaria y suficiente de  $|\frac{T}{L}| > 0,5$ , i.e.,  $\tau < \frac{2}{a}$ .

**Ejemplo:** Considere el sistema inestable con retardo dado por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s - 0,25} e^{-7s} \quad (14)$$

El control propuesto por (Guillermo J. Silva, 2004), se inicia probando la existencia de ganancias para el controlador PID, cumpliendo con la condición  $|\frac{-4}{7}| = 0,5714$  de aquí tenemos que  $0,5714 > 0,5$  por lo que sugiere estabilizar el problema utilizando un valor para la ganancia  $k_p$  que se encuentre dentro del siguiente rango:

$$-1,0249 < k_p < -1 \quad (15)$$

Y haciendo uso de la región propuesta para  $k_p$  se obtiene la region para  $k_d$  y  $k_i$  mostrado en la figura (3):

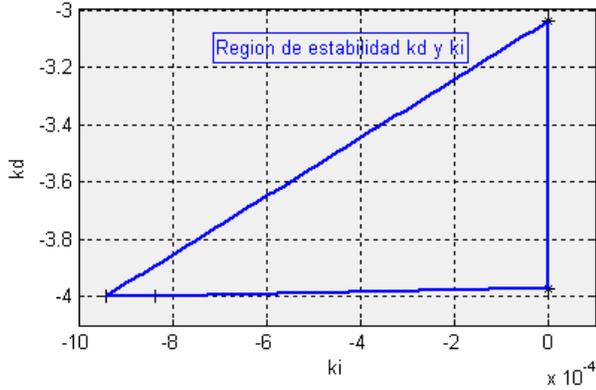


Figura 3. Regiones  $k_i$  y  $k_d$

De aquí podemos seleccionar los parámetros del controlador que proponen como:  $k_p = -1,0033$ ;  $k_i = -0,0002$  y  $k_d = -3,4$ , con lo que obtenemos la respuesta mostrada en la Figura (4):

De la región Q, dada en la Figura (3), se puede observar que la ganancia  $k_i$  para el control integral es del orden  $10^{-4}$ , lo que muestra que la ganancia es pequeña con respecto a la ganancia diferencial, aún con un valor muy pequeño, la respuesta obtenida no favorece la respuesta de salida al tener un sobre impulso de mas de cien veces el valor final deseado, con lo que el seguimiento de referencia del controlador PID no es funcional para una aplicación práctica.

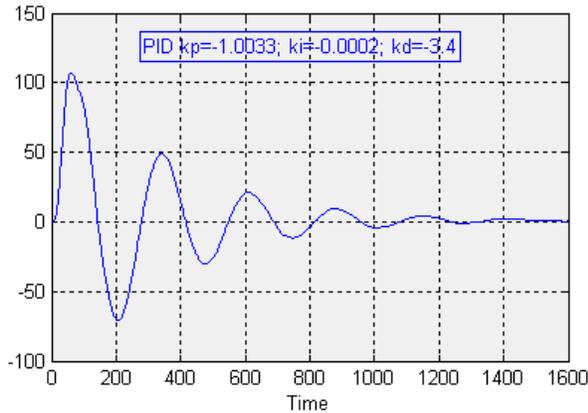


Figura 4. Respuesta con el Controlador PID

Ahora se realiza el análisis haciendo uso de la metodología propuesta en este trabajo, con uso del controlador PD.

Se prueba la existencia de ganancias  $k_p$  y  $k_d$ , corroborando se cumpla la condición dada por el Teorema 1, que es  $\tau < \frac{2}{a}$ , entonces tenemos  $\frac{2}{a} = 8$  de esa forma tenemos  $7 < 8$ , cumplimos con la condición, procedemos a utilizar el método de sintonización del controlador PD.

Del teorema 1 es claro que existe ganancia  $k_p$  y  $k_d$  que estabilizan el sistema a lazo cerrado con el uso de un esquema como es mostrado en la Figura 1, debido a que el retardo cumple la condición  $\tau < \frac{2}{a}$ . Existen ganancias  $k_p$  y  $k_d$  que pueden ser calculadas utilizando el Corolario 1 de la siguiente forma:

$$k_p = \frac{a}{b} + \bar{\sigma}$$

$$k_d = \frac{a\tau - 1 + \sigma}{b}$$

Para las simulaciones se considera  $\sigma = 0,10$  y  $\bar{\sigma} = 0,0033$  de esta forma obtenemos  $k_p = -1,0033$  y  $K_d = -3,4$ . En la Figura (5), se evalúa la respuesta en la salida  $y(s)$  con el uso del controlador PD propuesto. Para llevar a cabo este experimento asumimos el conocimiento exacto de los parámetros de la planta.

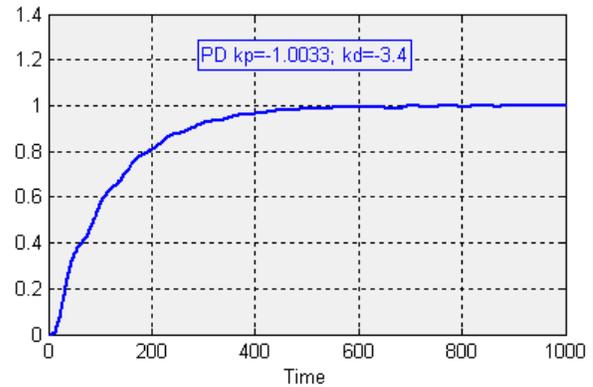


Figura 5. Respuesta con el Controlador PD

La respuesta en la salida  $y(s)$  del sistema con la implementación del controlador PD, muestra una respuesta sin oscilaciones en la que se llega mas rápido al valor final, en comparación a el tiempo que tarda el control PID.

## VI. CONCLUSIONES

La existencia de un retardo de tiempo suficientemente grande en el lazo directo puede ser visto como el peor escenario de trabajo en el caso de estabilización y regulación de sistemas. En este trabajo se presentaron condiciones explícitas que garantizan la existencia de ganancias  $k_p$  y  $k_d$  para la existencia de un controlador Proporcional-Derivativo estabilizante de plantas de primer orden inestables con retardo.

El control (PD) propuesto da como resultado un mejor desempeño al compararse con el (PID) propuesto en (Guillermo J. Silva, 2004), al tratarse con sistemas con retardos grandes, cercanos al límite admisible. Es importante señalar que en el resultado referido en (Guillermo J. Silva, 2004) no se dan las condiciones para la estabilización usando un PD. Al aplicar los resultados de dicho trabajo explícitamente se debe usar el término integral.

## VII. APÉNDICE A

La prueba del teorema (1), es muy similar a la presentada en (J.F. Márquez-Rubio and Alvarez-Ramirez, 2010). La idea básica es analizar el problema al hacer control por computadora usando un periodo de muestreo  $T$  y un retendor de orden cero ROC. Al discretizar el sistema y resolver el problema se obtiene un resultado que puede ser extrapolado al caso continuo al considerar el  $\lim_{T \rightarrow 0}$ .

Discretizando el sistema de la ecuación (11), considerando un periodo de muestreo  $T$  y un retendor de orden cero ROC, así como el retardo  $\tau = nT$ , obtenemos:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{kb(z-1) + ((\frac{\alpha kb}{-a})(1 - e^{a\tau}))}{z^n(z - e^{a\tau}) + kb(z-1) + (\frac{\alpha kb}{a})(-1 + e^{a\tau})} \quad (16)$$

Considerando la ecuación (16) y un cambio de variable ( $k_k = k_d b$  y  $k_\alpha = (k_p + k_d a)$ ) obtenemos la ecuación característica del sistema discretizado dado por:

$$p_1(z) = (z - e^{a\tau})(z^n + k_k) + (k_\alpha)(\frac{b}{a})(e^{a\tau} - 1) = 0 \quad (17)$$

La demostración consiste en probar que todas las raíces de la ecuación (17) se encuentran dentro del círculo unitario cuando consideramos,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau}{n} = T$ , si y solo si  $\tau < \frac{2}{a}$ . Iniciamos considerando como primer paso a  $k_k = 0$  en la ecuación (17), obteniendo:

$$p_1(z) = (z - e^{a\tau})z^n + (k_\alpha)(\frac{b}{a})(e^{a\tau} - 1) = 0 \quad (18)$$

Considere ahora el análisis del diagrama 6 del lugar geométrico de las raíces mostrado en la Figura (6) de la ecuación (18) (Evans, 1954). El sistema a lazo cerrado tiene  $n$  polos en el origen y uno en  $z = e^{a\tau}$ , dado que no existen polos finitos, tenemos  $n + 1$  trayectorias hacia el infinito,  $n - 1$  que inician en el origen y las otras dos trayectorias restantes empiezan en un punto localizado entre el origen y  $z = e^{a\tau}$ . Este punto lo localizamos considerando:

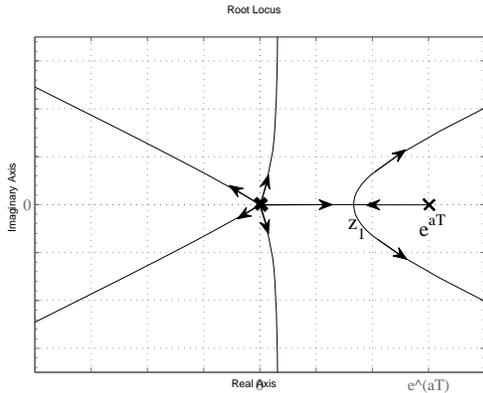


Figura 6. Lugar de las Raíces de la ecuación (18)

$$\frac{dk_\alpha}{dz} = \left[ -\frac{z^n(1 - e^{a\tau})}{\frac{b}{a}(1 - e^{a\tau})} \right]$$

Entonces tenemos  $n - 1$  raíces en el origen y una en:

$$z_1 = \frac{n}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}}$$

Si el punto de ruptura sobre el eje real se encuentra dentro del círculo unitario, entonces el sistema tiene una región de estabilidad, de lo contrario el sistema es inestable para cualquier  $k_\alpha$ . Las propiedades de estabilidad para el sistema continuo 11 se obtiene considerando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  o su equivalente, cuando  $T \rightarrow 0$  esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}} = 1 \quad (19)$$

Consideramos ahora el caso cuando  $k_k \neq 0$ , aplicamos de nueva cuenta el lugar geométrico de las raíces para el sistema 16 y su ecuación característica 17, como  $k_k$  crece desde cero, el punto de ruptura sobre el eje real se mueve en el lugar geométrico de las raíces (de hecho hacia la derecha). Este punto puede ser obtenido como:

$$\frac{dk_\alpha}{dz} = \left[ -\frac{(z - e^{a\tau})(z^n + k_k)}{(\frac{b}{a})(e^{a\tau} - 1)} \right] = 0 \quad (20)$$

Esto produce:

$$p_2(z) = (n+1)z^n - nz^{n-1}e^{a\tau} + k_k \quad (21)$$

La expresión 21 corresponde a la ecuación característica de un sistema ficticio de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{V(z)} &= G(z) \\ &= \frac{1}{z^n - \frac{z^{n-1}e^{a\tau}n}{n+1}} \\ &= \frac{1}{z^{n-1}(\frac{z - e^{a\tau}n}{n+1})} \end{aligned} \quad (22)$$

En lazo cerrado con la retroalimentación se tiene:

$$V(z) = U(z) - k_k Y(z) \quad (23)$$

El sistema de la ecuación 22 tiene  $n - 1$  raíces en el origen y una en:

$$z = \frac{n}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}}$$

Si el punto de ruptura está ubicado dentro del círculo unitario, el sistema a lazo cerrado 22-23 puede tener región de estabilidad (probando que las otras dos  $n - 2$  estén dentro del círculo unitario), de otra forma el sistema será inestable para cualquier  $k_k$ . Este punto puede ser ubicado de la siguiente forma:

$$\frac{dk_k}{dz} = \frac{d}{dz} \left[ -\frac{z^{n-1}[\frac{z - e^{a\tau}n}{n+1}]}{\frac{1}{n+1}} \right] = 0 \quad (24)$$

Lo que produce:

$$z^{n-2} \left( z - \frac{n-1}{n+1} e^{a\tau} \right)$$

Donde tenemos  $n - 2$  raíces en el origen y una en:

$$z = \left( \frac{n-1}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}} \right)$$

Como en el caso anterior las propiedades de estabilidad del sistema continuo 11 son obtenidas considerando  $n \rightarrow \infty$ , o su equivalente, cuando  $T \rightarrow 0$  esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}} = 1$$

De igual forma, debido a que este limite esta localizado en la region de estabilidad, en este caso es posible ver que si  $a\tau \leq 2$  (el limite tiende a uno desde la izquierda), entonces existe ganancia  $k_k$  que da lugar al punto de ruptura dentro del circulo unitario en el diagrama del lugar geométrico de las raíces, entonces las  $n - 1$  raíces restantes se encuentran dentro del circulo unitario, entonces el sistema a lazo cerrado es estable. En el caso que  $a\tau > 2$  no es posible obtener una region de estabilidad por este medio (el limite tiende a uno por la derecha). La demostración finaliza señalando que, cuando el punto de ruptura esta dentro del circulo unitario ( $a\tau \leq 2$ ), tomando en cuenta el caso continuo la ecuación característica 18 se modifica teniendo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_1(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(z - e^{a\frac{\tau}{n}})(z^n + k_k) \\ &\quad + k_\alpha \left(\frac{b}{a}\right) (e^{a\frac{\tau}{n}} - 1)] \\ &= (z - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} (z^n + k_k) \end{aligned}$$

De donde tenemos que mientras el polo este en una region cercana a  $z = 1$  el resto de polos se encontraran dentro de la region cercana al punto  $(k_k)^{\frac{1}{n}}$ . Dentro del circulo unitario, produciendo un sistema a lazo cerrado estable, si como vimos previamente, se satisface la condición  $k_k < 1$  de la ecuación 24;

$$k_k = - \frac{\frac{z^n [z - e^{a\tau n}]}{(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)}}$$

Entonces si  $z = 1$ ,

$$\begin{aligned} k_k &= - \frac{\frac{1 - e^{a\tau n}}{(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)}} \\ &= -(n + 1 - n e^{a\tau}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el caso continuo anteriormente visto tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} k_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} -(n + 1 - n e^{a\frac{\tau}{n}}) \\ &= a\tau - 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Como  $k_k < 1$  es una condición necesaria para la estabilidad,  $a\tau - 1 < 1$ , entonces  $a\tau < 2$ . Finalmente, podemos afirmar que para el sistema discreto en el limite cuando  $n \rightarrow \infty$ , todos los polos se encuentran dentro del circulo unitario si y solo si  $a\tau < 2$ .

## VIII. APÉNDICE B

A continuacion presentaremos la demostración del corolario 1 Tomando en consideración que  $k_k = k_d b$  y  $k_\alpha = k_p + k_d a$  De la demostracion del teorema 1 la ecuación 26:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} k_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} -(n + 1 - n e^{a\frac{\tau}{n}}) \\ &= a\tau - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto si  $\tau < \frac{2}{a}$ , existen ganancias  $k_p$  y  $k_d$  que estabilicen el sistema dado por la ecuación 11:

$$a\tau - 1 < k_k \leq a\tau - 1 + \sigma$$

Para constantes  $\sigma > 0$

De la ecuación 20

$$\frac{a}{b}(k_k + 1) < k_\alpha \leq \frac{a}{b}(k_k + 1) + \bar{\sigma},$$

Para constantes  $\bar{\sigma} > 0$

De esta forma realizando las sustituciones algebraicas correspondientes, obtenemos:

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{a}{b} + \bar{\sigma} \\ k_d &= \frac{a\tau - 1 + \sigma}{b} \end{aligned}$$

## REFERENCIAS

- Evans, W. R. (1954), *Control-Systems Dynamis*, New York.
- Guillermo J. Silva, Aniruddha Datta, S. B. (2004), *PID Controllers for Time-Delay Systems*, William S. Levine, Birkhauser.
- J.F. Márquez-Rubio, B. del Muro-Cuellar, M. V.-V. and Alvarez-Ramirez, J. (2010), 'Stabilization strategy for unstable first order linear systems with large time-delay', *Submitted Asian Journal of Control*.
- Márquez, J., Muro, B. D., Velasco, M. and Alvarez, J. (2010), 'Control Based in an Observer Scheme for First-Order Systems with Delay', *Revista Mexicana de Ingeniería Química* **9**(1), 43–52.
- Marshall, J. E. (1979), *Control of Time Delay Systems*, Peter Peregrinus LTD, New York.
- Niculescu, W. M. S.-L. (2007), 'Stability and stabilization of time-delay systems', *siam* pp. 3–31.
- Palmor, Z. J. (1996), 'Time delay compensation smith predictor and its modifications', *The control Handbook* pp. 224–237.
- Seshagiri R.A., Rao, V. E. a. (2007), 'Simple analytical design of modified smith predictor with improved performance for unstable first-order plus time delay process.', *Ind. Eng. Chem. Res.* **46**(13), 4561–4571.
- Silva, G. J., Datta, A. and Bhattacharyya, S. (2002), 'New results on the syntesis of pid controllers', *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL* **47**(2), 241–252.
- Skogestad., S. (2004), 'Simple analytic rules for model reduction and pid controller tuning.', *Journal of Process Control.* (13), 291–309.
- Smith, O. J. M. (1957), 'Close Control of Loops with Dead Time', *Chem. Eng. Prog.* **53**, 217–219.
- Torrico, B. and Normey-Rico, J. (2004), '2dof discrete dead time commpensator for stable and integrative processes with dead time.', *Journal of Process Control* **15**, 341–352.
- Ya-Gang Wang, X.-M. X. E. a. (2010), Robust adaptive pi controller for large dead-time processes with sensitivity specification., in IEEE, ed., 'Industrial electronics and applications (ICIEA)', Vol. 5th, pp. 724–729.

---

Apéndice B

Artículo publicado en el "8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control", CCE 2011

---

Stabilization of unstable first order linear systems with time delay using a PD controller  
E. Olvera Olvera, B. Del Muro Cuellar, J. C. Sánchez García and G. I. Duchén Sánchez  
"8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control", CCE 2011



# Stabilization of unstable first order linear systems with time delay using a PD controller

E. Olvera Olvera, B. Del Muro Cuellar, J. C. Sánchez García and G. I. Duchén Sánchez

Postgraduate Section, ESIME-Culhuacán, National Polytechnic Institute.

Av. Santa Ana 1000. 04430 México D.F., México, Phone/Fax (52) 55-56562058

E-mail:eleozal@hotmail.com; bdelmuro@ipn.mx, jcsanchez@gmail.com; gduchen@ipn.mx

**Abstract**—This work considers the stabilization problem of a class of unstable first order linear systems with time delay. A methodology is proposed to tune a proportional-derivative (PD) controller. Necessary and sufficient conditions are stated in order to guarantee the stability of the delayed closed loop system. The main motivation for studying this problem arises when checking for systems with a considerable delay. The system performance when using a PID controller is poor because of the integral term.

**Keywords:** Linear systems, PD controllers, time delay systems.

## I. INTRODUCTION

Time delay is the property of a physical system so that the response to an applied force (action) is delayed in its effect. Whenever material, information or energy is physically transmitted from one place to another, there is a delay associated with the transmission. In recent years, communication networks have been among the fastest growing areas in engineering and there has been increased interest in controlling systems over communication networks. Thanks to high-speed networks, control-over-Internet is now available. These systems are frequently modeled from the control point of view as time-delay systems because of the inherent propagation delays. These delays are crucial to the system stability [1].

From the perspective of control, delays are challenges that must be overcome by designing control strategies that provide acceptable behavior of closed loop systems. Several strategies have been developed to deal with time delay systems. The simplest one consist in ignoring the effects of the time delay, designing a compensator for the delay free systems and apply the controller obtained to the delayed process, it is clear that this method works only in the case of stable process with sufficiently small delay. Another approach consist in the approximation of the delay operator using Taylor or Padé series expansions which lead to non-minimum phase process with rational transfer function representation [2].

A second class of compensation strategy consist in counteracting the time delay effects of current inputs in the future outputs. The Smith prediction compensator (SPC), [3], [4] is the most used prediction strategy considered in the literature that provide a future output estimation

by means of a type of open-loop observer scheme. The main limitation of the original SPC is the fact that the prediction scheme has not a stabilization step, which restricts its application to open-loop stable plants. To solve this problem, there are some modifications of the original structure able to handle processes with an integrator and large time delay, which have been reported in [5], [6], [7] and the reference included there.

With a different perspective, authors in [8] propose an adaptive proportional integral (PI) controller for large dead time processes with sensitivity specification, on the basis of process input and output data of normal operation in the control loop, the important frequency responses of the process are estimated with signal decomposition and Laplace analysis.

The case of first order plus dead time unstable processes has been analyzed in [9],[10] considering the use of a proportional-Integral-Derivative (PID) controller, using a version of the Hermite-Biehler theorem applicable to quasi-polynomials. Necessary and sufficient conditions on the time delay size is determined for the existence of a stabilizing PID controller. The main advantage of the proposed controller is that it allow to stabilize delayed systems with considerable large time delay when compared with the unstable time constant, i.e.,  $\tau < 2/\tau_{un}$ , where  $\tau_{un}$  is the unstable time constant of the system. The complete set of stabilizing PID parameters is characterized for unstable plants. It is important to note that this work does not allow to use a PD controller, i.e., to eliminate the integral gain. The methodology is based in the analysis of a second order system, considering the plant and the controller. Obviously, this is not the case when using a PD controller.

This work focuses on the PD stabilization problem of linear first-order unstable systems with time delay in the input-output path. Necessary and sufficient conditions are stated in order to guarantee the stability of the closed-loop systems, finding again the limit  $\tau < 2/\tau_{un}$  using a PD controller. Also, a simple methodology is presented for the sintonization of the  $k_p$  and  $k_d$  parameters.

The main motivation to deal with the PD controller arises from the fact that for systems with significant time delay  $\tau$ , close to the limit  $2/\tau_{un}$ , by using the PID controller proposed in [10],[9], the integral term is very

small but different from zero, which leads to systems with a very poor performance. In contrast, using a PD controller the performance is improved considerably.

This paper is organized as follows: Section II presents the systems class; Section III presents a brief resume about the proposed results in [9] when dealing with first order unstable systems with time delay; Section IV shows the main result in this paper, the stability of first order unstable systems with time delay in the direct path using a proportional derivative controller (PD). The performance of the PD controller is evaluated in Section V by numerical simulation. Finally, Section VI presents some conclusions.

## II. CLASS OF SYSTEMS

Consider the class of single input-output (SISO) linear systems with time delay at the input:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\tau s} = G(s) e^{-\tau s} \quad (1)$$

Where  $U(s)$  and  $Y(s)$  are the input and output signals respectively,  $\tau$  is the time delay,  $N(s)$  and  $D(s)$  are polynomials in the complex variable  $s$  and  $G(s)$  is the delay free transfer function. Where:

$$G(s) = \frac{b}{s-a} \quad (2)$$

Notice that with respect to the class of systems (1) a traditional control strategy based on an output feedback of the form:

$$U(s) = H(s)[R(s) - Y(s)] \quad (3)$$

produces a closed loop system given by:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{H(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + H(s)G(s)e^{-\tau s}} \quad (4)$$

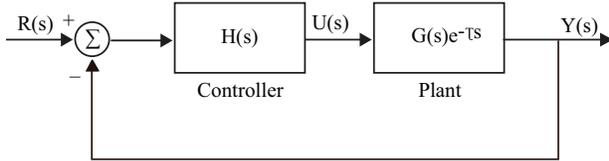


Fig. 1: Close loop system

Where the term  $H(s)$  represent the PD or PID controller. The term  $e^{-\tau s}$  located at the denominator of the transfer function in equation (4) leads to a system with an infinite number of roots. Consequently, it is obtained a system where the stability properties should be carefully stated. The close-loop transfer function is shown in Fig. (1).

In this work is used the notion of stability in the classical sense, i.e., it is assumed that a continuous system is stable when all the roots of its characteristic equation are on the left half complex plane or inside the unitary circle when considering the corresponding property for discrete time systems.

## III. PREVIOUS RESULTS

The problem of stabilizing a first-order plant with dead-time using a proportional-integral-derivative (PID) controller was analyzed in [9], based on a version of the Hermite-Biehler Theorem applicable to quasi-polynomials.

This work presents the complete set of stabilizing PID parameters. This section presents a brief summary of the results in [9] about this methodology. Consider the class of SISO linear systems with delay used in [9],

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts} e^{-Ls} \quad (5)$$

Note that it is the same system in equation (1), with  $k = Tb$ ,  $L = \tau$  and  $T = \frac{1}{a}$ . Consider the feedback control system show in Fig. (1). In this case  $H(s)$  represents the PID controller, i.e.

$$H(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

Where  $k_p$ ,  $k_i$  and  $k_d$  represents the proportional, integral and derivative gains respectively.

Let us consider the system without delay i.e.,  $L = 0$ . In this case, the close loop characteristic equation is given by

$$\delta(s) = (T + kk_d)s^2 + (1 + kk_p)s + kk_i$$

Since this is a second-order polynomial, close-loop stability is equivalent to ask for all the coefficients to have the same sign. Assuming that the steady-state gain  $k$  of the plant is positive, these conditions are:

$$k_p > -\frac{1}{k}, k_i > 0 \quad \text{and} \quad k_d > -\frac{T}{k} \quad (6)$$

or

$$k_p > -\frac{1}{k}, k_i < 0 \quad \text{and} \quad k_d < -\frac{T}{k} \quad (7)$$

Now, a necessary condition for a control design is that the delay-free close-loop system be stable. Then, it will be assumed in this methodology that the PID gains used to stabilize the plant with delay always satisfy one of the conditions (6) or (7). Let us consider now that the time delay of the plant model is different from zero. The close-loop characteristic equation of the system is then:

$$\delta(s) = (kk_i + kk_p s + kk_d s^2) e^{-Ls} + (1 + Ts)s.$$

In this case, we have:  $T > 0$ ,  $k > 0$  and  $L > 0$ . A necessary and sufficient condition for the existence of a stabilizing PID controller for the open-loop unstable plant is  $|\frac{T}{L}| > 0.5$ , (see [10] Theorem 2.2). If this condition is satisfied, then the range of  $k_p$  values for which a given open-loop unstable plant, with transfer function  $G(s)$  as in equation (1), can be stabilized using a PID controller is given by:

$$\frac{1}{k} \left[ \frac{T}{L} \alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1) \right] < k_p < -\frac{1}{k}$$

Where  $\alpha_1$  is the solution of the equation:

$$\tan(\alpha_1) = -\frac{T}{T+L} \alpha_1 \quad (8)$$

In the interval  $(0, \pi)$ . For  $k_p$  outside this range, there are no stabilizing PID controllers. The complete stabilizing region is given by: (See Fig (2)).

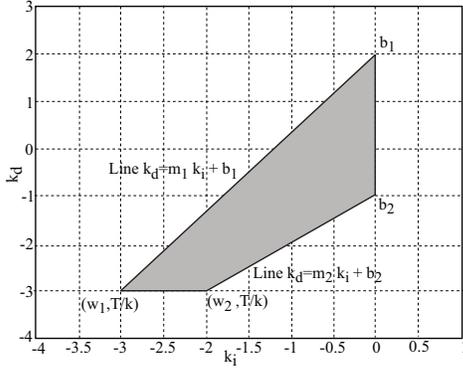


Fig. 2: The stabilizing region  $(k_i, k_d)$

For each  $k_p \in (k_l := \frac{1}{k}[(\frac{T}{L})\alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1)], -(\frac{1}{k}))$ , The cross section of the stabilizing region in the  $(k_i, k_d)$  space is the quadrilateral  $Q$ .

Due to the space limitations, we omit the details and refer the interested reader to [9].

#### IV. MAIN RESULT: PD CONTROLLER

Consider the class of linear systems with delay at the input given in equation (1). We focus on the case when the controller is of the PD type , i.e.,

$$H(s) = k_p + k_d s = k_d (s + \frac{k_p}{k_d}) \quad (9)$$

The complete stability condition for the overall control scheme given in Fig. (1) is stated in the following result.

*Theorem 1:* Consider the delay system in equation (1) and the feedback scheme show in Fig. (1). There exist gains  $k_p$  and  $k_d$  such that the corresponding closed-loop system

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{bk_d(s + [k_p/k_d])e^{-\tau s}}{(s - a) + bk_d e^{-\tau s}(s + [k_p/k_d])} \quad (10)$$

it is stable if and only if:  $\tau < \frac{2}{a}$ .

The result is proven in Appendix A.

A useful practical result in order to compute the parameters involved on the control scheme is the following.

*Corollary 1:* Consider the control scheme described in Fig.(1) If  $\tau < \frac{2}{a}$ , then the parameters  $k_p$  and  $k_d$  that stabilize the close loop system (10) satisfy:

$$\frac{a}{b} < k_p \leq \frac{a}{b} + \bar{\sigma}$$

for some  $\bar{\sigma} > 0$ , and

$$\frac{a\tau - 1}{b} < k_d \leq \frac{a\tau - 1 + \sigma}{b},$$

for some  $\sigma > 0$ .

The proof of Corollary (1) is presented in Appendix B.

#### V. SIMULATION RESULTS

The proposed methodology will be now illustrated by means of the following numerical example. The PD controller is compared with the PID controller proposed in [9]. To carry out this experiment, in both cases was assumed the exact knowledge of the plant parameters.

##### A. Numerical Example

Consider the unstable system given by:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s - 0.25} e^{-7s} \quad (11)$$

Let us consider the controller proposed in [9]. As  $|\frac{T}{L}| = 0.5714 > 0.5$  then there exist an stabilizing PID controller. Then the range of  $k_p$  is given by;

$$-1.0249 < k_p < -1 \quad (12)$$

We now sweep over the above range of  $k_p$  values and determine the stabilization set of  $(k_d$  and  $k_i)$  values at each stage. These regions are sketched in Fig. (3):

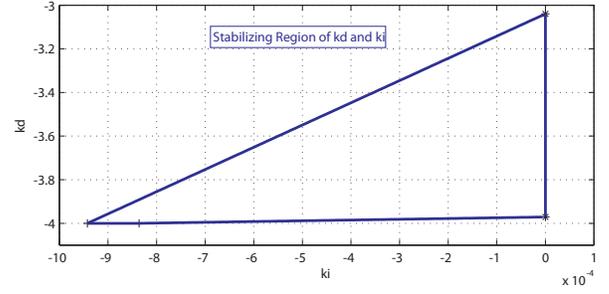


Fig. 3: Region of  $k_i$  and  $k_d$

Now choose the PID parameter i.e.

$k_p = -1.0033$ ;  $k_i = -0.0002$  and  $k_d = -3.4$ .

With this values we obtain the output  $y(t)$  shown in Fig. (4).

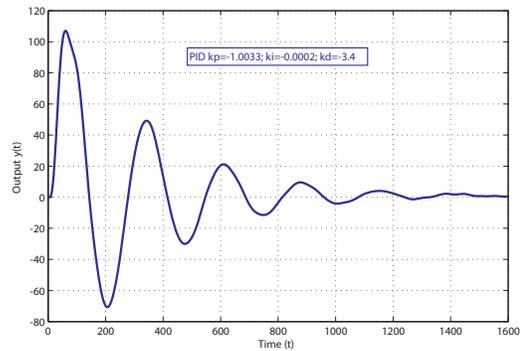


Fig. 4: Response using PID controller

We see that the output  $y(t)$  has oscillations and an overshoot of hundred times the desired (unitary) final value,

so this PID controller is not functional for practical application.

The region Q are sketched in Fig. (3). We can see that for this  $k_p$ , the  $k_i$  gain is about  $10^{-4}$ . This is at the origin of that long setting time. It is not difficult to verify that any  $k_p$  parameter induces a  $k_i$  producing the same performance.

Now the analysis is performed using the methodology proposed in this paper, i.e., the PD controller.

From Theorem (1), it is clear that there exist an stabilizing PD controller as  $\tau < \frac{2}{a}$ . Therefore, gains  $k_p$  and  $k_d$  can be calculated by consider Corollary (1) as;

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{a}{b} + \bar{\sigma} \\ k_d &= \frac{a\tau - 1 + \sigma}{b} \end{aligned}$$

For the simulation experiments are considered  $\sigma = 0.10$  and  $\bar{\sigma} = 0.0033$  and therefore it is obtained  $k_p = -1.0033$  and  $K_d = -3.4$ . In Fig. (5) is depicted the behavior of the stabilized system by means of the evolution of the output signal  $y(t)$ . It can be seen the output  $y(t)$  without oscillations and also a fast approximation to the final value compered with the PID controller. It should be notice that the PD controller do not provide step tracking.

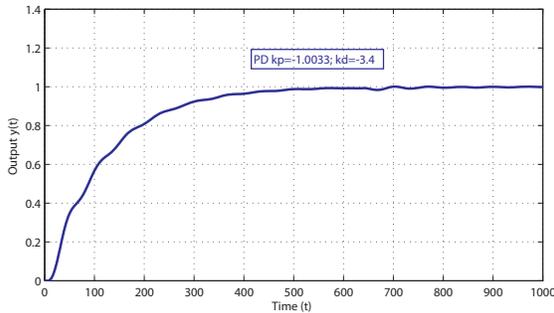


Fig. 5: Response using a PD controller

In addition to the above example, we present now an example performed on a physical plant implemented with analogical devices and a data acquisition card SENSORAY 626.

### B. Analogical Example:

Let us consider the delayed unstable system

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2}{s-1} e^{-1.2s} \quad (13)$$

This plant is implemented using operational amplifiers and electronic devices.

Additionally, the PD controller is implemented on the data acquisition card SENSORAY 626. The analysis is performed using the methodology proposed in this paper, using the PD controller. It is obtained  $k_p = 0.5033$  and  $K_d = 0.15$ . In Fig. (6) is depicted the behavior of the

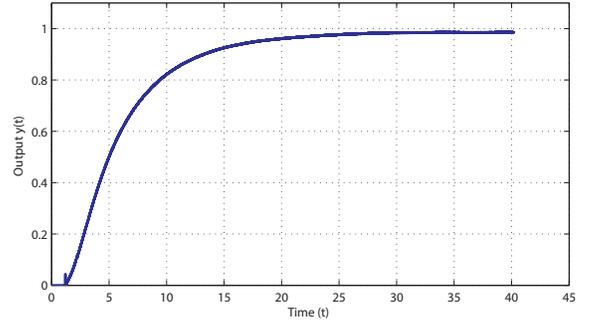


Fig. 6: Response using a PD controller and Sensoray 626

stabilized system by means of the evolution of the output signal  $y(t)$ . It is important to note that in the analogical implementation of the plant it was used commercial electronic devices then uncertainties in the model are present and this fact does not affected the performance of the controlled system.

## VI. CONCLUSION

The existence of large input delay represents the worst scenario in the case of regulation problem due to the instability problems associated with this phenomenon as it can be seen in literature. This paper shows necessary and sufficient conditions for the stabilization of unstable first order systems with large time delay at the input-output path. The problem is solved by considering a proportional derivative controller conditions. This work presents an easy way to compute the gains ( $k_p$  and  $k_d$ ) for the existence of stabilized PD controller. The proposed PD controller gives us good performance when compared with the PID controller proposed in [9] when dealing with large delay systems close to the permissible limit. It is important to note that [9] does not shows how to tune PD controllers. When applying the results of such work should explicitly be used the integral term different from zero.

## APPENDIX A

In order to improve the stability properties of system (1) whit respect to a proportional derivative controller with time delay in the direct path. This particular array is depicted in Figure (1). Consider now a discrete time version of the original system (14) with the PD controller scheme given in Fig.(1). To carry out with this task, it assumed that exists a sampling period  $T$  that satisfies the condition  $T = \frac{\tau}{n}$  for an integer  $n$  and that a zero order hold is located at the input of the system. Under these conditions, it is obtained:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{kb(z-1) + ((\frac{\alpha kb}{a})(1 - e^{a\tau}))}{z^n(z - e^{a\tau}) + kb(z-1) + (\frac{\alpha kb}{a})(-1 + e^{a\tau})} \quad (14)$$

Considering the equation (14) and a variable change ( $k_k = k_d b$  y  $k_\alpha = (k_p + k_d a)$ ), it is produced a characteristic equation given as:

$$p_1(z) = (z - e^{a\tau})(z^n + k_k) + (k_\alpha)\left(\frac{b}{a}\right)(e^{a\tau} - 1) = 0 \quad (15)$$

The proof of the theorem is based on demonstrating that all the roots in equation (15) lie inside the unit circle when it is consider  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau}{n} = T$ , if and only if  $\tau < \frac{2}{a}$ .

First, consider first the simple case when  $k_k = 0$  in equation (15); this produces:

$$p_1(z) = (z - e^{a\tau})z^n + (k_\alpha)\left(\frac{b}{a}\right)(e^{a\tau} - 1) = 0 \quad (16)$$

The root locus diagram Fig. (7) associated to (16) shows that the open-loop system has  $n$  poles at the origin and one at  $z = e^{a\tau}$ . Then exist  $n+1$  branches to infinity,  $n-1$  of them starting at the origin and going directly to infinity. The two remaining branches start at a breaking point  $z_1$  located over the real axis between the origin and  $z = e^{a\tau}$ . This situation is illustrated in Fig. (7) with  $n = 5$ .  $z_1$  can be found by considering the equation:

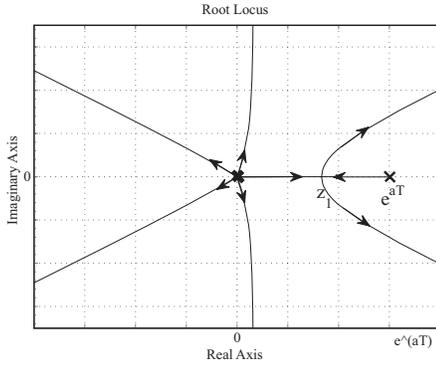


Fig. 7: Root locus of equation (16) for  $n = 5$

$$\frac{dk_\alpha}{dz} = \left[ -\frac{z^n(1 - e^{a\tau})}{\frac{b}{a}(1 - e^{a\tau})} \right]$$

that produces

$$(n+1)z^n - nz^{n-1}e^{a\tau} = 0$$

which has  $n-1$  roots at the origin and one at:

$$z_1 = \frac{n}{n+1}e^{a\frac{\tau}{n}}$$

If the breaking point  $z_1$  over the real axis is located inside the unit circle, the close-loop system could have a region of stability, otherwise it will be unstable for any  $k_\alpha$ . The stability properties of the continuous system in equation

(10) are obtained considering the limit as  $n \rightarrow \infty$  or equivalently, when  $T \rightarrow 0$ , this is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}e^{a\frac{\tau}{n}} = 1 \quad (17)$$

It is important to note that any point  $s = \theta$ , over the real axis on the complex plane  $s$  is mapped to  $z = e^{\theta T}$  on the  $z$  plane and as a consequence this point converge to  $z = 1$  when  $T$  tends to zero. Notice also that any real point  $s = \theta$  on the left half side of the complex plane ( $\theta < 0$ ) is mapped to a point  $e^{\theta T}$  that tends to one over the stable region of the  $z$  plane. On the contrary if  $\theta$  is on the right side of the complex plane over the real axis ( $\theta > 0$ ), the point  $e^{\theta T}$  tends to one over the unstable region. Then, from (16), it is not difficult to see that if  $a\tau < 1$  (i.e.,  $\tau < \frac{1}{a}$ ), exists gain  $k_\alpha$  that stabilizes the closed loop system (i.e. the limit tends to one from the left). In the case that  $a\tau \geq 1$  (always considering  $k_k = 0$ ) it is imposible to get  $k_\alpha$  that stabilize the system.

Consider now the case  $k_k \neq 0$ , applying again a root locus analysis for system (14) and its characteristic equation (15), as  $k_k$  grows from zero, the breaking point over the real axis moves in the root locus diagram (indeed, goes to the left). This point can be found by taking into account the equation,

$$\frac{dk_\alpha}{dz} = \left[ -\frac{(z - e^{a\tau})(z^n + k_k)}{\left(\frac{b}{a}\right)(e^{a\tau} - 1)} \right] = 0 \quad (18)$$

yielding:

$$p_2(z) = (n+1)z^n - nz^{n-1}e^{a\tau} + k_k = 0 \quad (19)$$

Expression (19) corresponds to the characteristic equation of a fictitious system of the form,

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{V(z)} &= G(z) \\ &= \frac{\frac{1}{(n+1)}}{z^n - \frac{z^{n-1}e^{a\tau}n}{n+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{(n+1)}}{z^{n-1}\left(\frac{z-e^{a\tau}n}{n+1}\right)} \end{aligned} \quad (20)$$

in close-loop with the feedback,

$$V(z) = U(z) - k_k Y(z) \quad (21)$$

The open loop system (20) has  $n-1$  root at the origin and one at:

$$z = \frac{n}{n+1}e^{a\frac{\tau}{n}}$$

If the breaking point over the real axis is located inside the unit circle, the closed loop system (20)-(21) could have a region of stability (once proved that the others  $n-2$  poles are inside the unitary circle), otherwise the system will be unstable for any  $k_k$ . This point can be found considering,

$$\frac{dk_k}{dz} = \frac{d}{dz} \left[ -\frac{z^{n-1}\left[\frac{z-e^{a\tau}n}{(n+1)}\right]}{\frac{1}{n+1}} \right] = 0 \quad (22)$$

that produces:

$$z^{n-2} \left( z - \frac{n-1}{n+1} e^{a\tau} \right)$$

which has  $n-2$  roots at the origin and one at,

$$z = \left( \frac{n-1}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}} \right)$$

As before, the stability properties of the equivalent continuous system (10) are obtained considering the limit as  $n \rightarrow \infty$ , or equivalently, when  $T \rightarrow 0$  this is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}} = 1$$

Again, since this limit point is located on the stability boundary, in this case it is possible to see that if  $a\tau \leq 2$  (i.e., the limit tends to one from the left), exists gain  $k_k$  that place the breaking point inside the unit circle in the original discrete root locus diagram. Then if the remaining  $n-1$  roots are into the unit circle, the close-loop system is stable. In the case that  $a\tau > 2$  it is not possible to stabilize the system (i.e., the limit goes to one from the right).

Then, the proof ends by noting that, when the breaking point is inside the unit circle ( $a\tau \leq 2$ ), to take into account the continuous case, the characteristic equation (16) is modified as,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_1(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(z - e^{a\frac{\tau}{n}})(z^n + k_k) \\ &\quad + k_\alpha \left(\frac{b}{a}\right) (e^{a\frac{\tau}{n}} - 1)] \\ &= (z-1) \lim_{n \rightarrow \infty} (z^n + k_k) \end{aligned}$$

From where it is stated that while one pole is on the neighborhood of  $z = 1$ , the remaining poles are in a neighborhood of the points  $(k_k)^{\frac{1}{n}}$ . Inside the unit circle producing a stable closed loop system if, as it was previously stated, it is satisfied  $k_k < 1$  From equation

$$k_k = - \frac{\frac{z^n [z - e^{a\tau/n}]}{(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)}}$$

Then if  $z = 1$ ,

$$\begin{aligned} k_k &= - \frac{\frac{1 - e^{a\tau/n}}{(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)}} \\ &= -(n+1 - ne^{a\tau}). \end{aligned}$$

Taking into account the continuous case as previously done, it is obtained,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} k_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} -(n+1 - ne^{a\frac{\tau}{n}}) \\ &= a\tau - 1. \end{aligned} \quad (23)$$

As  $k_k < 1$  is a necessary condition for the stability  $a\tau - 1 < 1$ , then  $a\tau < 2$ . Finally, we can state that for the discrete system, in the limit when  $n \rightarrow \infty$ , all the poles are inside the unitary circle if and only if  $a\tau < 2$ .

## APPENDIX B

Now, it presents the proof of corollary (1) Taking into account that  $k_k = k_d b$  and  $k_\alpha = k_p + k_d a$  from the equation (24) in the proof of the theorem (1) we have:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} k_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} -(n+1 - ne^{a\frac{\tau}{n}}) \\ &= a\tau - 1. \end{aligned}$$

Therefore if  $\tau < \frac{2}{a}$ , there exist  $k_p$  and  $k_d$  that stabilizes the closed loop system (10) with:

$$\frac{a}{b} < k_p \leq \frac{a}{b} + \bar{\sigma}$$

for some  $\bar{\sigma} > 0$  Now, from the equation (24).

$$\frac{dk_\alpha}{dz} = - \frac{(z - e^{a\tau})(z^n + k_k)}{\left(\frac{b}{a}\right)(e^{a\tau} - 1)} \quad (24)$$

The gain  $k_d$  can be compute as,

$$\frac{a\tau - 1}{b} < k_d \leq \frac{a\tau - 1 + \sigma}{b}$$

for some  $\sigma > 0$

## REFERENCES

- [1] Qing-Chang Zhong. *Robust control of time-delay systems*. Springer-Verlag, 2006.
- [2] J. E. Marshall. *Control of Time Delay Systems*. Peter Peregrinus LTD, New York, 1979.
- [3] O. J. M. Smith. Close Control of Loops with Dead Time. *Chem. Eng. Prog.*, 53:217–219, 1957.
- [4] Z. J. Palmor. Time delay compensation smith predictor and its modifications. *The control Handbook*, pages 224– 237, 1996.
- [5] B.C. Torrico and J.E. Normey-Rico. 2dof discrete dead time compensator for stable and integrative processes with dead time. *Journal of Process Control*, 15:341–352, May 2004.
- [6] M. Velasco-Villa J.F. Márquez-Rubio, B. del Muro-Cuellar and J. Alvarez-Ramirez. Stabilization strategy for unstable first order linear systems with large time-delay. *Submitted Asian Journal of Control.*, 2010.
- [7] J.F. Márquez Rubio, B del Muro Cuellar, M. Velasco Villa, and Álvarez Ramírez. Control base in an observer scheme for first-order systems with delay. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 9(1):43–52, Marzo 2010.
- [8] Xiao-Ming Xu Et. al. Ya-Gang Wang. Robust adaptive pi controller for large dead-time processes with sensitivity specification. In IEEE, editor, *Industrial electronics and applications (ICIEA)*., volume 5th, pages 724–729, 2010.
- [9] S.P. Bhattacharyya Guillermo J. Silva, Aniruddha Datta. *PID Controllers for Time-Delay Systems*. William S. Levine. Birkhauser, Dec 2004.
- [10] Aniruddha Datta Guillermo J. Silva and S.P. Bhattacharyya. New results on the syntesis of pid controllers. *IEEE Transactions on Automatic control*, 47(2):241–252, February 2002.

# Bibliografía



---

## Bibliografía

---

- [1] K. Åström and T. Hägglund. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. Instrument Society of America, 2nd edition, 1995.
- [2] John Doyle, Bruce Francis, and Allen Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. MacMillan Publishing Co., 1990.
- [3] Marshall J. E., Gorecki H., Koritowski A., and Walton K. *Time Delay Systems: Stability and performance criteria with applications*. Prentice Hall, Octubre 1992.
- [4] W. R. Evans. *Control-Systems Dynamics*. New York, 1954.
- [5] H. Hu and Z. Wang. *Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [6] M. Velasco-Villa J.F. Márquez-Rubio, B. del Muro-Cuellar and J. Alvarez-Ramirez. Stabilization strategy for unstable first order linear systems with large time-delay. *Submitted Asian Journal of Control.*, 2010.
- [7] Benjamin C. Kuo. *Sistemas de Control Automatico*. University of Illinois, septima edición edition, 1996.
- [8] William S. Levine. *The control handbook*, volume 1. Jaico Publishing House, 1999. A CRC Press Handbook published in Cooperation with IEEE Press.

- 
- [9] J. E. Marshall. *Control of Time Delay Systems*. Peter Peregrinus LTD, New York, 1979.
- [10] J.F. Márquez, B. Del Muro, M. Velasco, and J. Alvarez. Control based in an observer scheme for first-order systems with delay. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 9(1):43–52, 2010.
- [11] B. Del Muro, J.F. Márquez, M. Velasco, and J. Alvarez. Stabization strategy for unstable first order linear systems with large time delay. *ICMIC*, 2008.
- [12] Silviu-Iulian Niculescu. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*. Springer, 2001.
- [13] Wim Michels Silviu-Lulian Niculescu. Stability and stabilization of time-delay systems. *siam*, pages 3–31, 2007.
- [14] J.E Normey-Rico and E.F. Camacho. *Control of Dead Time Processe*. Springer, 1st edition, June 2001.
- [15] Katsuhiko Ogata. *Discrete-Time Control Systems*. Prentice Hall, 2nd edition, 1996.
- [16] Katsuhiko Ogata. *Ingenieria de Control Moderna*. University of Minnesota, tercera edicion edition, 1998.
- [17] Francisco Rodríguez Rubio and Manuel Jesús López Sánchez. *Control Adaptivo y Robusto*. Number 9 in Ingenieria. Universidad de Sevilla, Sevilla, 1996.
- [18] V.S.R. Et al. Seshagiri R.A., Rao. Simple analytical design of modified smith predictor with improved performance for unstable first-order plus time delay process. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 46(13):4561–4571., 2007.
- [19] Guillermo J. Silva, Aniruddha Datta, and S.P. Bhattacharyya. Controller design via padé approximation can lead to instability’. *Proceedings of the 40th IEEE Conference an Decision and Control Orlando, Florida USA*, pages 4733–4737, Diciembre 2001.
- [20] Guillermo J. Silva, Aniruddha Datta, and S.P. Bhattacharyya. New results on the syntesis of pid controllers. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, 47(2):241–252, February 2002.

- [21] Guillermo J. Silva, Aniruddha Datta, and S.P. Bhattacharyya. *PID Controllers for Time-Delay Systems*. William S. Levine. Birkhauser, Dec 2004.
- [22] S. Skogestad. Simple analytic rules for model reduction and pid controller tuning. *Journal of Process Control*, 1(13):291–309., 2004.
- [23] O. J. M. Smith. Close control of loops with dead time. *Chem. Eng. Prog.*, 53:217–219, 1957.
- [24] B.C. Torrico and J.E. Normey-Rico. 2dof discrete dead time compensator for stable and integrative processes with dead time. *Journal of Process Control*, 15:341–352, May 2004.
- [25] Harry L. Trentelman, Anton A. Stoorvogel, and Malo Hautus. *Control Theory for Linear Systems*. 1 edition, 2001.
- [26] E. Umez-Eronini. *Dinámica de sistemas y control*. 2001.
- [27] Xiao-Ming Xu Et. al. Ya-Gang Wang. Robust adaptive pi controller for large dead-time processes with sensitivity specification. In IEEE, editor, *Industrial electronics and applications (ICIEA)*., volume 5th, pages 724–729, 2010.
- [28] Qing-Chang Zhong. *Robust control of time-delay systems*. Springer-Verlag, 1st edition, 2006.



# Índice Alfabético



---

## Índice alfabético

---

aproximación de Padé, 27

compensación, 81

Conclusiones, 90

control P, 6, 42

control PD, 6

controlador PD, 61

controlador PI, 10, 46

controlador PID, 13, 49

Perspectivas Futuras, 91

perturbaciones, 4

Predictor de Smith, 23

proceso lineal, 6

respuesta escalón, 41

retardos de tiempo, 15

retroalimentación, 5

SENSOREY626, 84

serie de Maclaurin, 27

sistemas con retardo, 13

teoría del control, 3

teorema de Hermite-Biehler, 29

variables dependientes, 3

variables independientes, 4