



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL.

---

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
UNIDAD CULHUACAN.

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN.

DISEÑO DE UN ESQUEMA OBSERVADOR  
CONTROLADOR PARA LA ESTABILIZACIÓN DE  
SISTEMAS CON RETARDO Y CON DOS POLOS  
INESTABLES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS DE INGENIERÍA EN  
MICROELECTRÓNICA.

PRESENTA:

ING. DAVID FERNANDO NOVELLA RODRÍGUEZ.

DIRECTOR DE TESIS:

DR. BASILIO DEL MURO CUÉLLAR.



México D.F., Junio del 2011



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

## ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México D. F., siendo las 12:00 horas del día 15 del mes de junio del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de SEPI-ESIME-CULH. para examinar la tesis titulada:

"DISEÑO DE UN ESQUEMA OBSERVADOR CONTROLADOR PARA LA ESTABILIZACIÓN DE SISTEMAS CON RETARDO Y CON DOS POLOS INESTABLES"

Presentada por el alumno:

<u>Novella</u>	<u>Rodríguez</u>	<u>David Fernando</u>
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro: 

A	0	9	0	4	7	9
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

Maestría en Ciencias de Ingeniería en Microelectrónica

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

### LA COMISIÓN REVISORA

Director de tesis

Dr. Basilio Del Muro Cuellar

Dr. Gonzalo Isaac Duchén Sánchez

Dr. Domingo de Jesús Cortés Rodríguez

Dr. Ismael Araujo Vargas

Dr. Eduardo Aranda Bricaire

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. Gonzalo Isaac Duchén Sánchez





**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

En la Ciudad de México el día 15 del mes de Junio del año 2011, el (la) que suscribe David Fernando Novella Rodríguez alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias de Ingeniería en Microelectrónica con número de registro A090479, adscrito a SEPI, ESIME Culhuacan, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Basilio del Muro Cuéllar y cede los derechos del trabajo intitulado DISEÑO DE UN ESQUEMA OBSERVADOR CONTROLADOR PARA LA ESTABILIZACIÓN DE SISTEMAS CON RETARDO Y CON DOS POLOS INESTABLES, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección dnovellar@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

A handwritten signature in black ink is written over a horizontal line. The signature is stylized and appears to read 'David Novella'.

Nombre y firma

## Agradecimientos

Agradezco de manera especial al Dr. Basilio del Muro Cuéllar por permitirme integrarme a su equipo de trabajo, brindándome su valioso conocimiento y su guía en el desarrollo de este trabajo de tesis, por ser un excelente asesor y una gran persona.

De la misma forma, quisiera agradecer al Dr. Olivier Sename, quien me recibió en el GIPSA Lab, en la ciudad de Grenoble de manera cordial, por los valiosos comentarios con respecto a mi trabajo.

Mis agradecimientos a todos los profesores de esta Sección de Estudios de Posgrado e Investigación (SEPI), ESIME Culhuacan, sobre todo a aquellos profesores con los cuales tomé cursos y formaron parte de mi preparación académica. Gracias a los doctores Domingo Cortés, Gonzalo Duchén, Ismael Araujo, Eduardo Aranda y Martín Velasco por sus valiosos comentarios y observaciones oportunas, que fueron muy constructivos para concluir mi trabajo de tesis.

Agradezco también al Instituto Politécnico Nacional (IPN), por darme la educación necesaria para crecer como profesionista. A la ESIME Zacatenco por ofrecerme los estudios de Ingeniería en Control y Automatización y la ESIME Culhuacan por darme la oportunidad de alcanzar una meta más en mi vida estudiando la Maestría en Ciencias de Ingeniería en Microelectrónica.

También doy gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por otorgarme el apoyo económico para sustentar esta etapa tan importante en mi vida, además de la ayuda para realizar una estancia académica en el extranjero mediante el programa de becas mixtas.

Quisiera agradecer a mi familia por confiar en mí y por apoyarme en todos los aspectos de mi vida, en especial a mi madre por todo su amor y cariño, a mi padre simplemente por ser mi padre, a mi hermano Fabián por hacerme sentir orgulloso, a Andrea por su ejemplo de trabajo y tenacidad y a Ángela por regalarme un gran motivo para seguir adelante: mi sobrino Víctor.

Agradezco también a Denisse Maya por estar siempre a mi lado, por el amor que cada día me brinda y el apoyo que me ha dado durante estos maravillosos años. Igualmente agradezco a toda su familia por la confianza que han depositado en mí.

Debo también agradecer a mi gran amigo el Ing. Héctor Maldonado, por todos los consejos y las grandes aventuras que hemos pasado juntos. Igualmente ofrezco mis agradecimientos a mis compañeros de la SEPI, especialmente al M. en C. Juan Francisco Márquez y a el Ing. Miguel Ángel Hernández. Gracias también a los compañeros con quienes tuve la oportunidad de convivir en mi estancia en Grenoble.

En fin, le doy gracias a la vida por permitirme cumplir mis metas y por la suerte de conocer a toda la gente que me rodea.

DAVID F. NOVELLA RODRÍGUEZ.

*”El secreto de la libertad radica en educar a las personas, mientras que el secreto de la tiranía esta en mantenerlos ignorantes.”*

*Maximilien Robespierre.*

---

---

# Índice general

---

<b>1. INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS CON RETARDO</b>	<b>1</b>
1.1. Definición de retardo . . . . .	1
1.1.1. Clasificación . . . . .	2
1.2. Representación de Sistemas con Retardo . . . . .	3
1.2.1. Función de Transferencia . . . . .	3
1.2.2. Ecuaciones Diferenciales en un Anillo de Operadores . . . . .	3
1.2.3. Ecuaciones Diferenciales sobre Espacios Lineales Abstractos de Dimension Infinita . . . . .	4
1.2.4. Funcionales en Ecuaciones Diferenciales . . . . .	4
1.3. Modelos de Sistemas con Retardo . . . . .	6
<b>2. ANÁLISIS DE SISTEMAS CON RETARDO</b>	<b>10</b>
2.1. Estabilidad . . . . .	10
2.1.1. Dominio de la Frecuencia . . . . .	12
2.1.2. Dominio del Tiempo . . . . .	13
2.2. Controlabilidad . . . . .	21
2.2.1. Controlabilidad sobre el anillo $\mathbb{R}[\nabla]$ . . . . .	22
2.2.2. Controlabilidad sobre el campo $\mathbb{R}(\nabla)$ . . . . .	22
2.3. Observabilidad . . . . .	23
2.3.1. Observabilidad Fuerte . . . . .	24
2.3.2. Observabilidad Espectral . . . . .	24
2.3.3. Observabilidad Débil . . . . .	24
<b>3. CONTROL DE SISTEMAS CON RETARDO</b>	<b>25</b>
3.1. Predictor de Smith (SP) . . . . .	25
3.1.1. Dificultades de control provocadas por el retardo . . . . .	26
3.1.2. Estructura y Propiedades del SP . . . . .	27
3.2. Controladores PID . . . . .	30
3.2.1. Estructura de los Controladores PID . . . . .	31
3.2.2. Sintonización por Prueba y Error . . . . .	31
3.2.3. Método de Ziegler-Nichols . . . . .	32

3.2.4.	Sintonización basada en Márgenes de ganancia y Fase . . . . .	33
3.3.	Recientes Enfoques . . . . .	34
3.3.1.	A. Seshagiri Rao, V. S. R. Rao y M. Chidambaram, 2007 . . . . .	35
3.3.2.	Normey-Rico y Eduardo Camacho, 2009 . . . . .	38
<b>4.</b>	<b>ESTRATEGIA DE CONTROL PROPUESTA</b>	<b>42</b>
4.1.	Clase de Sistemas . . . . .	42
4.1.1.	Formulación del Problema . . . . .	43
4.2.	Resultados Preliminares . . . . .	45
4.2.1.	Sistemas de Primer Orden Inestables con Retardo . . . . .	46
4.2.2.	Sistemas de Segundo Orden con un Polo Inestable y Retardo . . . . .	48
4.2.3.	Sistemas de Alto Orden con un Polo Inestable y Retardo . . . . .	49
4.3.	Estrategia de Control Propuesta . . . . .	52
4.3.1.	Esquema Controlador . . . . .	52
4.3.2.	Esquema Observador . . . . .	54
4.3.3.	Esquema Observador-Controlador . . . . .	55
4.4.	Ejemplos . . . . .	57
<b>5.</b>	<b>APLICACIÓN DEL RESULTADO A DIFERENTES SISTEMAS</b>	<b>65</b>
5.1.	Sistemas Inestables de Segundo Orden con un Cero Estable más Retardo . . . . .	65
5.1.1.	Esquema Controlador. . . . .	65
5.1.2.	Esquema Observador . . . . .	66
5.1.3.	Esquema Observador-Controlador . . . . .	67
5.2.	Sistemas de Alto Orden con dos Polos Inestables y con Retardo . . . . .	69
5.2.1.	Esquema Controlador . . . . .	69
5.2.2.	Esquema Observador . . . . .	71
5.2.3.	Esquema Observador Controlador . . . . .	72
5.3.	Ejemplos . . . . .	75
<b>6.</b>	<b>ANÁLISIS DE ROBUSTEZ CON RESPECTO AL RETARDO</b>	<b>82</b>
6.1.	Normas de Señales y Sistemas . . . . .	82
6.1.1.	Normas de Vectores y Normas de Señales . . . . .	82
6.1.2.	Norma de Sistemas . . . . .	83
6.2.	Modelado de Sistemas con Incertidumbre . . . . .	84
6.2.1.	Incertidumbres no Estructuradas . . . . .	84
6.2.2.	Incertidumbres Paramétricas . . . . .	86
6.3.	Análisis de Robustez al Esquema de Control Propuesto . . . . .	86
6.4.	Ejemplos . . . . .	89
<b>7.</b>	<b>CONCLUSIONES GENERALES</b>	<b>98</b>
<b>A.</b>	<b>Publicaciones</b>	<b>100</b>

---

---

# Índice de figuras

---

1.1. Proceso Químico. . . . .	7
1.2. Sistema de Tele-Operación Aplicado a la Medicina. . . . .	8
1.3. Redes de Comunicación: Diagrama a Bloques. . . . .	8
1.4. Modelo Presa-Cazador. . . . .	9
2.1. Controlabilidad . . . . .	21
3.1. Sistema de Control en Lazo Cerrado. . . . .	26
3.2. Efectos del Retardo en los Sistemas de Control. . . . .	27
3.3. Sistema de Control Basado en el Predictor de Smith. . . . .	28
3.4. Modelo de Control Interno (IMC) para el Predictor de Smith. . . . .	28
3.5. Predictor de Smith Simplificado. . . . .	28
3.6. Respuesta del Predictor de Smith. . . . .	29
3.7. Desempeño del Predictor de Smith ante Sistemas Inestables. . . . .	30
3.8. Control en Lazo Cerrado. . . . .	33
3.9. Desempeño del control PI en Sistemas con Retardo. . . . .	34
3.10. Predictor de Smith Modificado Propuesto por Rao <i>et. al.</i> . . . . .	35
3.11. Desempeño del FSP. . . . .	38
3.12. Predictor de Smith Filtrado. . . . .	39
3.13. Reactor Químico. . . . .	40
3.14. Desempeño del FSP. . . . .	41
4.1. Representación en Espacio de Estados. . . . .	44
4.2. Lugar Geométrico de las Raíces. . . . .	47
4.3. Diagrama de Nyquist: Sistema que cumple las condiciones de estabilidad dadas en el Lema 4.1. . . . .	49
4.4. Diagrama de Nyquist: Sistema que no cumple las condiciones de estabilidad dadas en el Lema 4.1. . . . .	50
4.5. Diagrama de Nyquist: Sistema que cumple las condiciones de estabilidad dadas en el Lema 4.2 al ir decreciendo el parámetro $\phi$ . . . . .	50
4.6. Esquema Controlador. . . . .	52
4.7. Esquema Observador. . . . .	54



4.8. Estrategia de Control Propuesta. . . . .	56
4.9. Ejemplo 4.4.1. Desempeño de la Estrategia de Control Propuesta. . .	60
4.10. Ejemplo 4.4.1. Comparación del Sistema en Lazo Cerrado con Diferen- tes Ganancias . . . . .	61
4.11. Ejemplo 4.4.2. Desempeño de la Estrategia de Control Propuesta. . .	63
5.1. Representación del sistema Polo-Zero. . . . .	66
5.2. Esquema Controlador para Sistemas de Alto Orden. . . . .	69
5.3. Esquema Observador para Sistemas de Alto Orden. . . . .	71
5.4. Esquema Observador-Controlador para Sistemas de Alto Orden. . . .	73
5.5. Ejemplo 5.3.1. Desempeño de la Estrategia de Control Propuesta para Sistemas Con un Zero. . . . .	77
5.6. Ejemplo 5.3.2. Desempeño de la Estrategia de Control Propuesta Apli- cada a Sistemas de Alto Orden. . . . .	80
6.1. Configuración de la Incertidumbre Aditiva. . . . .	85
6.2. Configuración de la Incertidumbre Aditiva Inversa. . . . .	85
6.3. Configuración de la Incertidumbre Multiplicativa a la Entrada. . . . .	85
6.4. Configuración de la Incertidumbre Multiplicativa a la Salida. . . . .	86
6.5. Incertidumbre Parametrica. . . . .	86
6.6. Interpretación Geométrica del Teorema de Rouché. . . . .	88
6.7. Ejemplo 6.4.1. Norma $H_\infty$ de $sde^{-sd}\Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau$ . . . . .	92
6.8. Ejemplo 6.4.1. Análisis de Robustez. . . . .	92
6.9. Ejemplo 6.4.1. Relación entre $d$ y $\delta_{max}$ . . . . .	93
6.10. Ejemplo 6.4.2. Norma $H_\infty$ de $sde^{-sd}\Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau$ . . . . .	94
6.11. Ejemplo 6.4.2. Análisis de Robustez. . . . .	95
6.12. Ejemplo 6.4.2. Relación entre $d$ y $\delta_{max}$ . . . . .	96
6.13. Ejemplo 6.4.3. Norma $H_\infty$ de $sde^{-sd}\Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau$ . . . . .	97
6.14. Ejemplo 6.4.3. Análisis de Robustez. . . . .	97

---

---

# Índice de tablas

---

3.1. Formulas de Ziegler-Nichols. . . . .	33
3.2. Parámetros obtenidos para el Controlador PI. . . . .	34
6.1. Ejemplo 6.4.1. Análisis de Robustez para Diferentes Valores del Retardo.	93
6.2. Ejemplo 6.4.2. Análisis de Robustez para Diferentes Valores del Retardo.	95

## RESUMEN.

En ingeniería, la mayoría de las reacciones de los sistemas a acciones externas no aparecen *instantáneamente*. Este fenómeno está relacionado con la propagación de energía o material, y los sistemas que presentan esta característica son llamados *sistemas con retardo*. Los retardos en el tiempo son útiles para modelar sistemas de ingeniería, sistemas biológicos, sistemas económicos, etc., también son usados para aproximar sistemas de alto orden por sistemas de orden reducido con retardo. Los retardos representan un reto, ya que son frecuentemente fuente de oscilaciones, inestabilidad o mal desempeño. En los últimos años, se han desarrollado diversos trabajos con la finalidad de analizar y diseñar estrategias de control para los sistemas con retardo.

Esta tesis presenta una simple estrategia de control para estabilizar sistemas de segundo orden con dos polos inestables y con retardo. Además, se enuncian las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de este esquema estabilizante de control propuesto. Más aún, la estructura de control propuesta se utiliza para estabilizar diferentes tipos de sistemas con dos polos inestables, (sistemas de alto orden y sistemas con un cero estable). Finalmente se realiza un análisis de robustez para calcular el máximo límite de incertidumbre en el término del retardo.

Se elaboran simulaciones numéricas para ilustrar el desempeño de la estrategia de control propuesta, demostrando una respuesta satisfactoria. De la misma forma, el estudio de robustez se realiza con la ayuda de simulaciones. La estrategia de control propuesta se implementa en una planta real construida con amplificadores operacionales, comprobando su desempeño ante variaciones paramétricas ocasionadas por el uso de dispositivos electrónicos comerciales.

## ABSTRACT.

In engineering, many reactions of the system to external actions do not take place *instantaneously*. This phenomena is linked with propagation and transport of energy or material, and systems that present this feature are so-called *time delay systems*. Time delays are useful to model engineering systems, biological systems, economic systems, etc., they are also used to approximate high order systems to reduced order systems with time delay. Delays represent a challenge because they are often source of oscillations, instability and bad performance. Many works have been developed in last years in order to analyze the stability and design control strategies for time delay systems.

This thesis introduce a simple control strategy in order to stabilize second order systems with two unstable poles plus time delay. Necessary and sufficient conditions for the existence of this stabilizing control scheme are stated. Moreover, the proposed control structure is used to stabilize different kind of systems with two unstable poles, (high order systems and systems with a stable zero). Finally a robustness analysis is presented in order to compute the maximum uncertainty bound of the delay term.

Numerical simulations are presented to illustrate the proposed control strategy performance, demonstrating a satisfactory response. The robustness analysis is studied by mean of numerical simulations also. The control strategy proposed is implemented on electronic plants built with operational amplifiers, proving its performance against parametrical variations due to the use of comercial electronic devices.

---

---

# INTRODUCCIÓN

---

Los retardos en el tiempo son realmente comunes, estos aparecen en diversos sistemas tales como sistemas biológicos, sistemas de ingeniería, sistemas políticos, sistemas económicos, etc. y son ocasionados por diferentes mecanismos tales como transporte de energía o material, lazos de reciclo, entre otros. Además, los sensores, actuadores y las redes de comunicación que usualmente están involucrados en los lazos de control introducen tales retardos [24], [41]. Por otro lado, los retardos pueden utilizarse en la aproximación de sistemas de alto orden por sistemas de orden reducido con retardo [36].

Es bien sabido, que los retardos de tiempo producen comportamientos poco deseados en los sistemas dinámicos, (mal desempeño, oscilaciones, inestabilidad), por lo tanto es necesario prestar atención especial en el análisis de estabilidad y el diseño de controladores para los sistemas con retardo. Así, existe una gran motivación por estudiar los efectos del retardo en los sistemas dinámicos por dos grandes razones: primero, para entender como el retardo puede deteriorar el comportamiento del sistema, y segundo, para controlar dichos efectos y alcanzar un mejor comportamiento de los sistemas en lazo cerrado, [7], [17].

Diferentes estrategias de control se han desarrollado para tratar con los sistemas retardados. Un enfoque común consiste en aproximar el termino de retardo por medio de series de Taylor o de Padé, lo cual puede conducir a sistemas de fase no mínima con una representación racional en función de transferencia [17]. Controladores Proporcional Integral (PI) y Proporcional Integral Derivativos (PID) están incluidos en el estudio de control de sistemas retardados [35].

Un enfoque distinto es el llamado Predictor de Smith Clásico, el cual consiste en contrarrestar los efectos del tiempo de retardo por medio de estrategias dedicadas a estimar los efectos de las entradas presentes sobre las salidas futuras. La principal limitación del predictor de Smith clásico es el hecho de que el esquema de predicción no cuenta con un paso de estabilización, lo cual restringe su uso a plantas estables en lazo abierto.

Sin embargo, existe una gran cantidad de sistemas inestables en lazo abierto con retardo, los cuales, aparecen por ejemplo en procesos químicos y biológicos, y presentan mayor dificultad para su control. Para enfrentar este problema, se han propuesto algunas modificaciones al predictor de Smith original para controlar sistemas inestables con retardo. Por ejemplo, [33] ha presentado una modificación eficiente al predictor de Smith clásico para controlar sistemas de primer orden inestables con retardo. Con una perspectiva diferente, [20] propone una estructura de control para tratar con el mismo tipo de sistemas. Usando una estrategia similar, el mismo resultado es extendido para controlar sistemas de alto orden con retardo, [19]. En los trabajos mencionados anteriormente, es fácil demostrar que la estabilidad interna del sistema no esta garantizada. De hecho, se obtiene una estimación inestable de la señal de

error, por lo tanto, una diferencia mínima entre las condiciones iniciales del sistema y las del predictor provoca un comportamiento inestable del sistema en lazo cerrado.

El trabajo presentado a continuación está dedicado al problema de la estabilización de sistemas con dos polos inestables con retardo. El esquema estabilizante está basado en una estructura observador controlador, así, solo cuatro ganancias proporcionales y el modelo del sistema original son suficientes para lograr un comportamiento estable del sistema en lazo cerrado. Además, se presentan las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la estructura de control estabilizante propuesta. El resultado principal es extendido a sistemas con dos polos inestables y un cero estable con retardo y a sistemas retardados de alto orden con dos polos inestables utilizando la misma estructura de control, enunciando las respectivas condiciones *necesarias y suficientes* de estabilidad. Finalmente se presenta un análisis de robustez con la finalidad de estudiar los efectos de perturbaciones numéricas presentadas en el término del retardo.

El trabajo se organiza de la siguiente manera: El primer capítulo está dedicado a proporcionar una breve introducción a los sistemas con retardo, se proporcionarán algunas definiciones importantes en el estudio de dicha clase de sistemas, así como ejemplos comunes de sistemas con retardo. La segunda parte presenta algunos enfoques existentes para el análisis de estabilidad de los sistemas retardados, además de un estudio de controlabilidad y observabilidad. Algunas estrategias de control utilizadas en el campo de sistemas con retardo se presentarán en el capítulo 3. El capítulo 4 presenta la estrategia de control propuesta en este trabajo, además de las condiciones de estabilidad *necesarias y suficientes* para la existencia de dicha estructura de control. La quinta parte presenta la extensión del resultado principal de esta tesis para diferentes clases de sistemas, tales como sistemas de alto orden y sistemas con ceros estables. El capítulo 6 presenta un análisis de robustez con respecto al término del retardo. Los resultados presentados en la tesis están acompañados de simulaciones numéricas con el propósito de ilustrar el desempeño de la estrategia de control propuesta. Además, el esquema estabilizante se implementa en plantas electrónicas con la finalidad de mostrar la respuesta del sistema en lazo cerrado para sistemas más realistas. Finalmente las conclusiones generales y perspectivas del trabajo para el futuro serán presentadas.

---

# INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS CON RETARDO

---

Los sistemas con retardo, también llamados *sistemas hereditarios*, o *sistemas con memoria*, o *con tiempo-muerto*, etc. , abundan en el mundo. Los retardos de tiempo muchas veces son usados en ingeniería para modelar una gran cantidad de sistemas, donde la propagación y transmisión de material y/o energía se encuentran involucradas. La presencia de retardos hace que el análisis y el diseño de controladores se vuelva mucho más complicado. Este capítulo está enfocado presentar una breve introducción definiciones comunes utilizadas en el ámbito de sistemas con retardo, ofreciendo algunos conceptos importantes

## 1.1. Definición de retardo

Tiempo de retardo es la propiedad de un sistema físico por la cual la respuesta a una fuerza aplicada (acción) es retardada en su efecto. Ya sea material, información o energía son físicamente transmitidos de un lugar a otro, esto es conocido como un retardo por transmisión. El valor numérico atribuido a este retardo es determinado directamente por la distancia y la velocidad de transmisión. Los retardos "*largos*" provocan que el análisis del sistema y el diseño de un controlador adecuado se vuelvan mucho más complejos.

Los retardos abundan en el mundo, aparecen en diversos sistemas tales como sistemas biológicos, sistemas económicos, sistemas ecológicos, sistemas sociales, sistemas de ingeniería, etc , en otros casos los retardos aparecen debido a una simplificación esencial en el modelado del proceso [36]. Por ejemplo, en economía, el banco central de un país muchas veces trata de influenciar a la economía por medio de ajustes a las tasas de interés; el efecto de un cambio en las tasas de interés toma meses para ser traducido como un impacto directo sobre la economía. En política, por dar otro ejemplo, los políticos algunas veces deben tomar decisiones y ellos tendrán que esperar algún tiempo antes de saber si estas decisiones fueron las correctas o no [41]. En ingeniería existe un gran número de sistemas con retardo, más adelante se presentará un listado con algunos ejemplos comunes encontrados en la literatura.

Dentro del marco matemático, los sistemas con retardo pueden describirse de distintas formas, por ejemplo, ecuaciones diferenciales sobre espacios abstractos o funcionales, o sobre "*anillos*" de operadores. En la teoría de sistemas, se pueden usar representaciones de dimension infinita, representaciones  $2D$  (o más general  $nD$ ), o representaciones basadas en el comportamiento del sistema. Independientemente de la representación usada para describir un sistema, el problema que conlleva el *efecto del*

*retardo* sobre la estabilidad de un sistema lineal en lazo cerrado, incluyendo retardos en el estado y/o retardos en la entrada/salida, es un problema de gran interés ya que la presencia del retardo puede introducir comportamientos complejos en el sistema (oscilaciones, inestabilidad, mal desempeño, etc.), [9], [17].

En síntesis, un sistema con un retardo  $\tau \geq 0$  presenta una salida  $y(t)$  para una correspondiente señal de entrada  $u(t)$  :

$$y(t) = u(t - \tau)$$

Así, la función de transferencia de un elemento de retardo está representada por el operador  $e^{-\tau s}$  [41].

### 1.1.1. Clasificación

Es importante tener en mente las diferentes categorías o tipos existentes de retardos, tales como:

- Retardo constante.
- Retardo Variante en el Tiempo.
- Retardo conmesurado.
- Retardo no conmesurado.
- Retardo Distribuido.

**Retardos Constantes:** Son aquellos en los cuales el valor numérico del retardo  $\tau$  no varía con respecto del tiempo, entre estos tenemos dos casos de retardos constantes.

*Retardos Conmesurados:* En un sistema representado por (1):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum A_i x(t - \tau_i) \tag{1.1}$$

Con  $\tau_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . El retardo es conmesurado si existe un  $\tau$  mínimo, tal que todo  $\tau_i/\tau$  es racional, es decir, todos los retardos  $\tau_i$  son múltiplos de  $\tau$ .

*Retardos no Conmesurados:* Son aquellos que no cumplen con la condición de racionalidad de los retardos conmesurados.

**Retardos Variables:** Los retardos variables se caracterizan por que el valor de  $\tau$  está representado como una función del tiempo es decir.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum A_i x(t - \tau_i(t)) \tag{1.2}$$

*Retardos Acotados:* Como su nombre lo dice, la característica de los retardos acotados es que existe un valor mínimo y un valor máximo para el retardo  $\tau(t)$ , es decir,  $0 < \tau_{min} < \tau(t) < \tau_{max}$ .

*Retardos Acotados en su Derivada:* Son aquellos que cuentan con una derivada acotada, es decir,  $\dot{\tau}(t) \geq d < 1$ .

*Retardos Variantes Arbitrariamente:* Son aquellos retardos que no se encuentran acotados ni ellos mismos ni si derivada, es decir,  $\tau$  y  $\dot{\tau}$  no se encuentran acotados.



## 1.2. Representación de Sistemas con Retardo

En general la representación de un sistema significa la forma en la cual un sistema puede ser descrito en términos matemáticos, existen diversas maneras de expresar matemáticamente el modelo de un sistema con retardo, entre las más comunes es posible citar la Función de Transferencia a continuación se presentaran algunas representaciones utilizadas frecuentemente en el modelado matemático de un sistema retardado.

### 1.2.1. Función de Transferencia

En teoría de control, a menudo se usan funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo, así la función de transferencia de un sistema descrito mediante dichas ecuaciones lineales se puede definir como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son iguales a cero.

La entrada  $x(t)$  y la salida  $y(t)$  de un elemento de *retardo de transporte* o *tiempo muerto*, se relacionan mediante:

$$y(t) = x(t - \tau) \quad (1.3)$$

donde  $\tau$  representa el *tiempo muerto*, de acuerdo a esto, la función de transferencia del *retardo de transporte* o *tiempo muerto* se obtiene mediante:

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[x(t - \tau)] \implies Y(s) = X(s)e^{-\tau s} \quad (1.4)$$

Donde el término  $\mathcal{L}$  indica la transformada de Laplace.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-\tau s} \quad (1.5)$$

De esta manera, se puede definir en forma general la función de transferencia para un sistema con retardo como.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}e^{-\tau s} = G(s)e^{-\tau s} \quad (1.6)$$

Donde  $Y(s)$  y  $U(s)$  son las señales de entrada y de salida respectivamente,  $N(s)$  y  $D(s)$  son polinomios expresados en la variable compleja  $s$ ,  $\tau \geq 0$  corresponde al tiempo de retardo y  $G(s)$  es una función racional en la variable compleja  $s$  [21].

### 1.2.2. Ecuaciones Diferenciales en un Anillo de Operadores

Un sistema linear con retardo es gobernado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x}(t) = A(\nabla)x(t) \quad (1.7)$$

Donde en el caso general  $\nabla = \text{col}_i(\nabla_i)$  es el vector de los operadores de retardo tal que  $x(t - \tau_i) = \nabla_i x(t)$ . En este caso, el coeficiente de la matriz  $A$  es un polinomio multivariante en la variable  $\nabla$ . El operador inverso  $\nabla^{-1}$  está dado entonces por  $\nabla^{-1}x(t) = x(t + \tau)$ , por lo tanto corresponde a una predicción sobre  $x(t)$  lo cual queda indefinido por nociones de causalidad, así pues los operadores  $\nabla_i$  de la matriz

A pertenecen a un anillo,  $\mathbb{R}[\nabla]$ . De esta manera, el estudio algebraico de este tipo de modelo conduce a considerar un módulo de estado isomorfo con módulo  $\mathbb{R}^n[\nabla]$ .

Note que el mencionado operador  $\nabla$  cumple con las propiedades clásicas de linealidad:

$$(\lambda_1 \nabla^{\mu_1} + \lambda_2 \nabla^{\mu_2})x(t) = \lambda_1 x(t - \mu_1 \tau) + \lambda_2 x(t - \mu_2 \tau) \quad (1.8)$$

Con  $\lambda_1, \lambda_2$  siendo números reales, y  $\mu_1, \mu_2$  perteneciendo a los números enteros positivos.

Más adelante veremos como esta representación en un anillo de operadores permite realizar un análisis en torno a la controlabilidad y observabilidad de los sistemas con retardo [26] [3].

### 1.2.3. Ecuaciones Diferenciales sobre Espacios Lineales Abstractos de Dimension Infinita

Este tipo de representación se deriva de la teoría de sistemas en dimensión infinita para el caso de sistemas con retardo. Este tipo de sistemas queda completamente caracterizado por el estado:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_t(s) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Para toda  $s \in [-\tau, 0]$  y  $x_t(s) = x(t + s)$ . El espacio de estados es entonces un espacio de Hilbert

$$\mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_2[-\tau, 0] \mathbb{R}^n \quad (1.10)$$

Note que el sistema contiene un punto en un espacio Euclidiano  $x(t)$  y una función de energía acotada,  $x_t(s)$ , esta última perteneciendo a un espacio linear de dimensión infinita. El sistema puede reescribirse

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_t(\cdot) \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_t(\cdot) \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Donde el operador  $\mathcal{A}$  está dado por

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_t(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax(t) + A_\tau x_t(-\tau) \\ \frac{dx_t(\theta)}{d(\theta)} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

El operador  $\mathcal{A}$  es la contraparte en dimensión infinita del operador lineal de dimensión finita  $A$  en un sistema linear descrito por la ecuación  $\dot{x} = Ax$ , [3].

### 1.2.4. Funcionales en Ecuaciones Diferenciales

Una ecuación diferencial es aquella en la que intervienen derivadas de una o más funciones. La representación más difundida de los sistemas con retardo en el transporte son aquellas realizadas por medio de *funcionales en ecuaciones diferenciales*, entre ellas se encuentran diferentes representaciones para los sistemas con retardo.

## Sistemas con retardos discretos

Sistemas con retardos discretos actuando en el estado  $x$ , en la entrada al sistema  $u$ , y/o en la salida del mismo  $y$ , cuya representación matemática está dada por las siguientes ecuaciones.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau_x) + Bu(t) + B_\tau x(t - \tau_u) \quad (1.13)$$

$$y(t) = Cx(t) + C_\tau x(t - \tau_y) \quad (1.14)$$

Donde  $\tau_x$ ,  $\tau_u$  y  $\tau_y$  denotan el retardo en el estado, en la entrada y en la salida respectivamente.

Los sistemas con retardos discretos son sistemas los cuales recuerdan localmente valores de señales pasadas, en algunos instantes específicos del tiempo pasado. El siguiente ejemplo presentado en [17] ilustra el proceso de una reacción química la cual puede ser modelada mediante un sistema con retardos discretos. Considere la reacción química exotérmica e irreversible.

$$A \mapsto B$$

Debido a que, en la práctica, la conversión de  $A$  a  $B$  nunca es completa, una técnica clásica es utilizar una *corriente de reciclo*, la cual incrementa la conversión total, disminuye los costos de producción, etc. Para realizar el reciclo, la salida debe ser separada de la entrada y fluir a través de cierta longitud de una tubería. Este proceso no se produce instantáneamente, esto requiere algún tiempo de transporte desde la salida hasta la entrada, la manera más simple de modelar dicho fenómeno es un *tiempo de retardo discreto*, que es una traslación de la acción correspondiente sobre la escala de tiempo con algún valor finito y bien definido (diferente de cero) de acuerdo con el principio de *causalidad*.

Supongamos ahora que la sustancia sin reaccionar  $A$  tiene una velocidad de flujo de reciclo  $(1 - \lambda)$  y el valor  $\tau$  representa el tiempo de retardo (el cual depende de la longitud de la tubería). Así, el balance de material y energía es descrito por las siguientes ecuaciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA(t)}{dt} = \frac{q}{V} [\lambda A_0 + (1 - \lambda)A(t - \tau) - A(t)] - K_0 e^{-\frac{Q}{T}} A(t) \\ \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{V} [\lambda T_0 + (1 - \lambda)T(t - \tau) - T(t)] \frac{\Delta H}{C_p} - K_0 e^{-\frac{Q}{T}} A(t) - \frac{1}{VC_p} U(T(t) - T_w) \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Donde  $A(t)$  denomina la concentración del componente  $A$ ,  $T(t)$  indica la temperatura, ( $A_0$ ,  $T_0$  corresponden a las condiciones iniciales de dichas variables en el instante  $t = 0$ ), y  $U$  es el coeficiente de reciclo, el cual satisface las condiciones  $\lambda \in [0, 1]$ . Los límites 1 y 0 corresponden al sistema sin corriente de reciclo y al sistema con reciclo completo respectivamente.

## Sistemas con retardo distribuido

Sistemas con retardo distribuido donde el retardo actúa sobre el estado o sobre la salida pero de manera *distribuida*, está caracterizada por las siguientes ecuaciones.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_{-\tau_x}^0 A(\theta) x(t + \theta) d(\theta) + Bu(t) + \int_{-\tau_u}^0 B_\tau u(t + \theta) d(\theta) \quad (1.16)$$

En este caso el retardo no tiene un efecto local como en el caso de los sistemas con retardos discretos, pero se presentan de manera distribuida sobre el intervalo completo de tiempo. Como un ejemplo, considere el siguiente modelo usado en epidemiología:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= -\beta S(t)I(t) \\ \dot{I}(t) &= \beta S(t)I(t) - \beta \int_h^\infty \alpha(\tau)S(t-\tau)I(t-\tau)d\tau \\ \dot{R}(t) &= \beta \int_h^\infty \alpha(\tau)S(t-\tau)I(t-\tau)d\tau\end{aligned}\tag{1.17}$$

Donde  $S$  representa el número de personas susceptibles a contraer la enfermedad,  $I$  describe el número de gente infectada y  $R$  indica la cantidad de personas recuperadas por dicha enfermedad. El retardo distribuido aquí, tomando valores en el intervalo de  $[h, +\infty]$  es el tiempo que demora la gente infectada antes de recuperarse de la enfermedad. Este retardo puede ser diferente entre diferentes individuos pero obedece una densidad de probabilidad representada por la variable  $\alpha(\tau)$  la cual tiende a 0 cuando el tiempo tiende a  $\infty$ , y cuya integral sobre el intervalo  $[h, +\infty]$  es igual a 1 [28], [3].

### Sistemas Neutrales

Sistemas Neutrales con retardo donde el retardo actúa directamente sobre la derivada de más alto orden del estado, cuya representación matemática puede darse de la siguiente forma.

$$\dot{x} - F\dot{x}(t - \tau) = Ax(t)$$

Un ejemplo que nos permite visualizar de manera más amplia los sistemas neutrales con retardo es presentado a continuación, el siguiente modelo representa la evolución de un bosque.

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[ 1 - \frac{x(t - \tau) + c\dot{x}(t - \tau)}{K} \right]\tag{1.18}$$

Donde  $x$  expresa la población total,  $r$  representa la tasa de crecimiento intrínseca y  $K$  determina la capacidad de extensión ambiental.

## 1.3. Modelos de Sistemas con Retardo

### Un Ejemplo *Trivial*

Un ejemplo simple de un sistema con retardo y que se presenta frecuentemente en nuestra vida cotidiana es la regadera de baño, muchos de nosotros hemos experimentado algunas dificultades para ajustar la temperatura del agua al momento de tomar un baño, algunas veces está demasiado fría y otras demasiado caliente. La temperatura del agua sufre algunos *sobre-impulsos* y tenemos que esperar algunos instantes para lograr una temperatura adecuada del agua. Esto se debe a que le toma algún tiempo al agua más caliente (o más fría) llegar desde la tubería hasta la regadera (o hasta el cuerpo humano). Este tiempo es un retardo, el cual depende de la presión de agua y del diámetro de la tubería. El cambio realizado en la posición de los grifos es casi inmediato, sin embargo, el cambio en la temperatura del agua tiene que esperar

hasta que el retardo asociado haya transcurrido. Si la posición de los grifos se ajusta constantemente de acuerdo a la percepción actual de la temperatura, es muy probable que la temperatura tienda a oscilar [41].

Asumiendo que el agua es un fluido incomprensible y el flujo es estacionario, se obtiene el índice de flujo de agua mediante:

$$F = \frac{\pi R^4}{8\mu l} \Delta p \quad (1.19)$$

Donde  $\mu$  representa la viscosidad cinemática del agua,  $R$  es el radio de la tubería,  $l$  es la longitud de la tubería,  $\Delta p$  corresponde a la diferencia de presión entre los finales de tubería. Así el tiempo de retardo puede ser calculado con:

$$\tau = \frac{\pi R^2 l}{F} = \frac{8\mu}{\Delta p} \left( \frac{l}{R} \right)^2 \quad (1.20)$$

## Procesos Químicos

En Química, es constante encontrarse con procesos químicos que cuentan con retardos, el siguiente ejemplo, un reactor químico, es modelado como un sistema de primer orden con retardo (FOPTD por sus siglas en inglés) es ampliamente utilizado para modelar procesos químicos:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s} \quad (1.21)$$

Donde  $K$  es la ganancia estática de la planta,  $T > 0$  es la constante de tiempo de la planta y  $\tau > 0$  es el retardo puro.

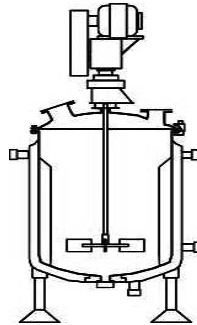


Figura 1.1: Proceso Químico.

## Sistemas Tele-Operados

Un sistema de tele-operación es otro claro ejemplo de sistemas con tiempo de retardo, la idea básica de la tele-operación consiste en un dispositivo *esclavo* siguiendo a un dispositivo *maestro*, el cual es directamente manipulado por un operador humano quien conduce una tarea maniobrando el manipulador *maestro*. El principal interés de este tipo de operadores es la manipulación en ambientes que generalmente se encuentran inaccesibles para el hombre (areas de riesgo, etc). Cuando el maestro es accionado también mediante señales de sensor provenientes del esclavo, entonces el sistema es llamado *tele-operador bilateral* y su principal ventaja consiste en mejorar el desempeño de operador en cuanto a velocidad y seguridad.

Generalmente la interconexión entre maestros y esclavos en tele-operadores es caracterizada por la existencia de algunas señales de transmisión en el canal de comunicación correspondiente, lo cual puede ser descrito matemáticamente por retardos en el modelado. De esta manera, se observan distintas fuentes de retraso: la distancia física entre el maestro y el esclavo, la existencia de un operador humano en el lazo, o el tiempo necesario para medir algunas variables físicas [17].

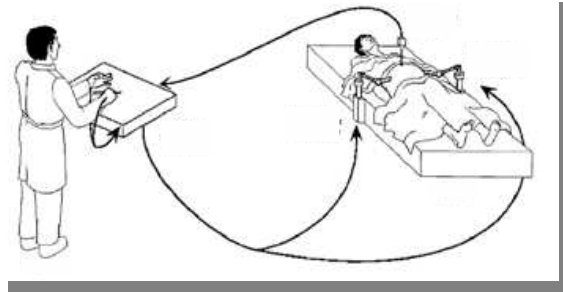


Figura 1.2: Sistema de Tele-Operación Aplicado a la Medicina.

## Telecomunicaciones

Por otro lado, en el área de las comunicaciones, la cual ha estado entre las áreas de la ingeniería que han crecido más rápidamente en los últimos años, creciendo también el por controlar sistemas sobre redes de comunicación. Gracias a las redes de alta velocidad el control via Internet es una posibilidad en la actualidad. Estos sistemas son modelados frecuentemente desde el punto de vista del control como sistemas con retardo debido a la inherente propagación de retardos. El análisis correcto de estos retardos es crucial para garantizar la estabilidad del sistema y la Calidad del Servicio.

Una simple conexión entre una fuente controlada para un regulador de acceso y un nodo de destino lejano con una capacidad constante de transmisión  $\mu$  es presentado como ejemplo en la siguiente figura.

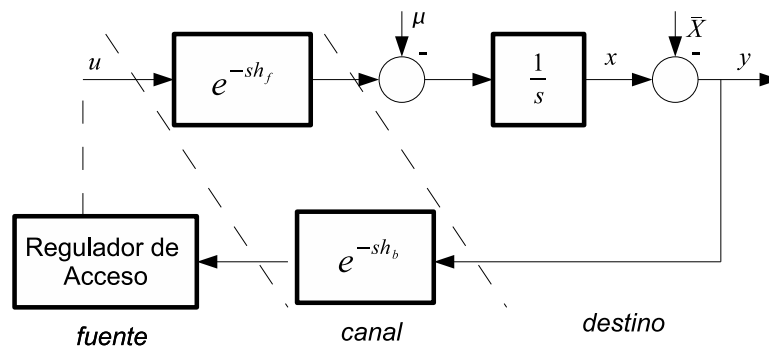


Figura 1.3: Redes de Comunicación: Diagrama a Bloques.

Debido a la propagación del retardo desde el nodo de destino hacia el nodo de la fuente, llamado retardo de regreso  $h_b$ , el estado de congestión  $y(t)$  llega al nodo de la fuente (regulador de acceso) solo después de este periodo de retardo. Aquí también existe un retardo de avance  $h_f$ , para los paquetes que llegan al nodo de destino desde el nodo de fuente. Los paquetes recibidos son almacenados en un buffer y después

enviados con una capacidad de transmisión constante  $\mu$ . El objetivo de control es adaptar dinámicamente una señal  $u(t)$  a  $\mu$  mientras se mantiene un nivel aceptable en el buffer  $x(t)$ .

Las redes de comunicación son mucho más complicadas en realidad, los retardos muchas veces son variantes en el tiempo y estocásticos, la información transmitida via redes de comunicación es cuantificada y en muchas ocasiones hay pérdidas de información [41].

## Sistemas Biológicos

En diferentes ramas de la ciencia podemos encontrarnos con sistemas con retardo, por ejemplo, en biología encontramos el modelo cazador-presa basado en el modelo Lotka-Volterra, siendo  $y$  y  $x$  la población del cazador y la presa respectivamente.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) - \alpha xy \\ \dot{y} &= -cy + \beta xy \end{aligned} \tag{1.22}$$

Siendo los parámetros  $K$  la capacidad de supervivencia de la presa en ausencia del depredador,  $r$  es la tasa intrínseca de crecimiento en la población de la presa,  $c$  es la tasa de mortalidad del depredador si no tuviera presa,  $\alpha$  es un parámetro que indica la proporción del consumo de la presa por el cazador,  $\beta$  es un índice de conversión relacionando el número de presas consumidas en razón al ritmo de reproducción del depredador, finalmente, el retardo  $\tau$  está directamente relacionado con el tiempo de vida de la presa [28].

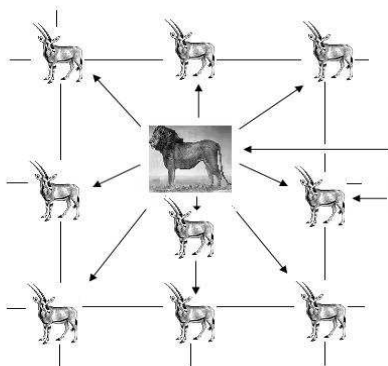


Figura 1.4: Modelo Presa-Cazador.

En resumen, los retardos son verdaderamente útiles para modelar diversos sistemas o procesos existentes en diferentes áreas de la ciencia y la tecnología, desde los sistemas más comunes como una simple regadera hasta procesos más complicados y complejos de redes de comunicación.

---

# ANÁLISIS DE SISTEMAS CON RETARDO

---

Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo poseen ciertas características tales como *estabilidad*, *controlabilidad* y *observabilidad*, los cuales pueden ser determinados mediante diferentes análisis, ya sea en el dominio del tiempo (Lyapunov, matriz de controlabilidad, etc.), o en el dominio de la frecuencia (Diagramas de Nyquist, lugar geométrico de las raíces, etc.). En el caso de los sistemas retardados, algunos de estos análisis presentan ciertas diferencias que hacen de su estudio una tarea más compleja. El presente capítulo es dedicado a dar a conocer parte de los análisis existentes para el estudio de los sistemas con retardo.

## 2.1. Estabilidad

La estabilidad es la especificación más importante de un sistema. Si un sistema es inestable, la respuesta transitoria y los errores en estado estacionario son puntos debatibles. No es posible diseñar un sistema inestable para un requerimiento específico de respuesta transitoria o de error en estado estacionario. Existen numerosas definiciones de estabilidad, dependiendo la clase de sistema o del punto de vista.

Tomando en cuenta que la respuesta total de un sistema es la suma de las respuestas libre y forzada, o sea

$$c(t) = c_{forzada}(t) + c_{libre}(t). \quad (2.1)$$

Con el uso de estos conceptos presentamos las siguientes definiciones de estabilidad, inestabilidad y estabilidad marginal:

Un sistema lineal e invariante en el tiempo es estable si la respuesta libre tiende a cero conforme el tiempo tiende al infinito.

Un sistema lineal e invariante en el tiempo es inestable si la respuesta libre crece sin límite conforme el tiempo tiende al infinito.

Un sistema lineal e invariante en el tiempo es marginalmente estable si la respuesta libre no decae ni crece, si no que permanece constante o varía a medida que el tiempo tiende al infinito.

Entonces, la definición de estabilidad implica que sólo la respuesta forzada permanece a medida que la respuesta libre tiende a cero. Estas definiciones se apoyan solo en una descripción de la respuesta libre. Cuando se ve una respuesta total, puede ser difícil separar la respuesta libre de la respuesta forzada, pero nos damos cuenta que si la entrada es acotada la respuesta total no tiende al infinito a medida que el tiempo tiende al infinito, entonces la respuesta libre obviamente no tiende al infinito.



Si la entrada no es acotada, vemos una respuesta total no acotada y no es posible llegar a ninguna conclusión sobre la estabilidad del sistema: no podemos saber si la respuesta total no es acotada por que la respuesta forzada no es acotada o por que la respuesta libre no es acotada. Entonces, una definición alterna de estabilidad, aquella que considera la repuesta total e implica la primera definición basada en la respuesta libre, es la siguiente: un sistema es estable si toda entrada acotada produce una salida acotada.

A este enunciado se le da el nombre de definición de estabilidad de entrada acotada, salida acotada (BIBO siglas en inglés de *bounded input, bounded output*), [18].

Existen diferentes criterios y análisis para determinar si un sistema lineal e invariante en el tiempo libre de retardo es estable ó no, entre ellos el Criterio de Ruth-Hurwitz, análisis del lugar geométrico de las raíces, criterio de estabilidad de Nyquist, Análisis de Lyapunov, entre otros, (para mayor detalle consultar [21], [18], [39]) de los cuales no todos son aplicables a los sistemas con retardo. El análisis de la estabilidad de sistemas con retardo es un problema muy estudiado y a conducido a diferentes propuestas las cuales pueden ser clasificadas en dos enfoques principales: Análisis en el dominio de la frecuencia y Análisis en el dominio del tiempo. Mientras el primer enfoque trata con el *quasipolinomio* característico del sistema, el segundo considera directamente el dominio del espacio de estados y las matrices del sistema, [28].

Antes de comenzar a citar algunas de las propuestas dedicadas al estudio de la estabilidad para sistemas con tiempo muerto, de definirán dos conceptos importantes. Considere el siguiente sistema.

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau). \quad (2.2)$$

donde  $\tau$  es el valor del retardo y  $x$  se refiere al estado del sistema.

**Definición 2.1** *Si un sistema con retardo es estable para cualquier valor del término del retardo perteneciendo a  $\mathbb{R}_+$ , el sistema es definido como **estable independiente del retardo**.*

**Definición 2.2** *Si un sistema con retardo es estable para todos los valores del término del retardo perteneciendo a un sub-espacio  $D \subsetneq \mathbb{R}_+$ , el sistema es definido como **estable dependiente del retardo**.*

El siguiente teorema proporciona una serie de condiciones suficientes para concluir *estabilidad independiente del retardo*:

**Teorema 2.1** *El sistema (2.2) es **estable independiente del retardo** si se cumple al menos una de las siguientes condiciones [7].*

- $\rho((j\omega I - A_0)^{-1}A_1) < 1, \quad \forall \omega \geq 0$
- Para cualquier norma inducida de la matriz  $\|\cdot\|$ ,

$$\|(j\omega I - A_0)^{-1}A_1\| < 1 \quad \forall \omega \geq 0$$

- $\|(j\omega I - A_0)^{-1}A_1\|_\infty < 1$
- Para cualquier norma inducida de la matriz  $\|\cdot\|$  y su correspondiente  $\nu(\cdot)$ ,  $\|A_1\| < -\nu A_0$ .

## 2.1.1. Dominio de la Frecuencia

### Un análisis simple

Denote  $L(s) = G(s)K(s)$  donde  $K(s)$  es el controlador y  $G(s)$  representa la planta en lazo abierto, se define:

$$L(s) = \frac{N(s)}{D(s)}e^{-\tau s}. \quad (2.3)$$

Donde  $N(s)$  y  $D(s)$  son polinomios en la variable compleja  $s$ ,  $G(s)$  es la función de transferencia libre de retardo y el término  $e^{-\tau s}$  representa el operador del retardo. El criterio de Nyquist es válido también para sistemas con retardo *puro*, es decir, retardo en la entrada o en la salida del sistema, debido a que el término  $e^{-\tau s}$  no introduce polos y zeros adicionales al sistema en lazo cerrado.

$$T(s) = \frac{N(s)e^{-\tau s}}{D(s) + N(s)e^{-\tau s}}. \quad (2.4)$$

La ecuación característica del sistema es:

$$p(s, \tau) = D(s) + N(s)e^{-\tau s}. \quad (2.5)$$

La ecuación característica  $p(s, \tau) = D(s) + N(s)e^{-\tau s}$  es estable sí:

$$p(s, \tau) \neq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}_+. \quad (2.6)$$

### Aproximación del retardo

Una manera diferente de analizar los sistemas retardados es *aproximar* el elemento de retardo  $e^{-\tau s}$  por una función de transferencia apropiada  $H_0(s)$ . El interés principal de hacer esto radica en el hecho de cambiar (con un esfuerzo mínimo) un sistema en dimensión infinita por un sistema en dimensión finita. Cabe mencionar que el uso de *aproximaciones* conduce a otro difícil problema, determinar que tan *bueno* es el modelo aproximado con respecto al sistema original. A continuación se presentan algunas aproximaciones utilizadas en el análisis de sistemas con retardo, [17].

Por razones de sencillez, considere el siguiente sistema:

$$H(s) = H_0 e^{-\tau s}. \quad (2.7)$$

Donde  $H_0$  es una función de transferencia racional, la cual es estable y estrictamente propia. Se define la aproximación *pasa-todo* estable para el término  $e^{-\tau s}$ .

$$e^{-\tau s} \approx \frac{P(-s)}{P(s)}. \quad (2.8)$$

Siendo  $P$  un polinomio real sin zeros en semi-plano derecho del plano complejo  $s$ , con una apropiada  $P$ , se tienen las siguientes aproximaciones.

- Formula de Laguerre:

$$e^{-\tau s} \approx \left( \frac{1 - \frac{s\tau}{2n}}{1 + \frac{s\tau}{2n}} \right)^n. \quad (2.9)$$

- Formula de Katz:

$$e^{-\tau s} \approx \left( \frac{1 - \frac{s\tau}{2n} + \frac{s^2\tau^2}{8n^2}}{1 + \frac{s\tau}{2n} + \frac{s^2\tau^2}{8n^2}} \right)^n. \quad (2.10)$$

- Formula de Padé-2:

$$e^{-\tau s} \approx \left( \frac{1 - \frac{s\tau}{2n} + \frac{s^2\tau^2}{12n^2}}{1 + \frac{s\tau}{2n} + \frac{s^2\tau^2}{12n^2}} \right)^n. \quad (2.11)$$

## 2.1.2. Dominio del Tiempo

### Estabilidad de Lyapunov

En el concepto de estabilidad de Lyapunov se determinó que cuando un origen específico (no el sistema como tal) es estable o no (un sistema determinado puede tener más de un punto de equilibrio con diferentes características de estabilidad). El origen es *estable* si, para pequeñas perturbaciones fuera de éste, el sistema siempre permanece dentro de una región finita que rodea dicho origen. Si además, al final el sistema retorna siempre al origen, se dice que este último es *asintóticamente estable*. El sistema (esto es con respecto a un origen específico) es *inestable* dentro de una región que rodea al punto de equilibrio si existe siempre una perturbación pequeña dentro de esta zona por la cual el sistema se sale de la misma [39].

Todas las definiciones de estabilidad para sistemas en dimensión finita pueden ser generalizadas para los sistemas con *tiempo muerto* al introducir la norma continua  $\|\cdot\|_c$  definida por

$$\|\phi\|_c := \max_{a \leq \theta \leq b} \|\phi(\theta)\|_2. \quad (2.12)$$

Donde  $\phi \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$

Sea  $y(t)$  una solución de la Función Diferencial Retardada **RFDE** (Retarded Functional Differential Equation) presentada a continuación.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t) \\ x_{t_0} &= \phi. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Donde  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ,  $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  es la funcional de condiciones iniciales, y  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La estabilidad de la solución es concerniente al comportamiento del sistema cuando la trayectoria del sistema  $x(t)$  se desvía de  $y(t)$ . Consideremos, sin perder generalidad, que la ecuación diferencial (2.13) admite la solución  $x(t) = 0$ , la cual será referida como *solución trivial*. En efecto, es deseable el estudio de la estabilidad para una solución no trivial  $y(t)$ , entonces es posible recurrir a la transformación de variables  $z(t) = x(t) - y(t)$ , de forma que obtenemos el nuevo sistema

$$\dot{z}(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t). \quad (2.14)$$

Con la solución trivial  $z(t) = 0$ .

**Definición 2.3** Para el sistema descrito por la ecuación diferencial retardada (2.13), la solución trivial  $x(t) = 0$  es llamada estable si para cualquier  $t_0 \in \mathbb{R}$  y cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(t_0, \epsilon) > 0$  tal que  $\|x_{t_0}\|_c < \delta$  implicando que  $\|x(t)\| < \epsilon$  para  $t \geq t_0$ .

Se dice que es asintóticamente estable si es estable, y para cualquier  $t_0 \in \mathbb{R}$  y cualquier  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta_a = \delta_a(t_0, \epsilon) > 0$  tal que  $\|x_{t_0}\|_c < \delta_a$  implicando que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

Es llamado uniformemente estable si es estable y  $\delta = \delta(t_0, \epsilon)$  pueden ser elegidos independientemente de  $t_0$ .

Es uniforme asintóticamente estable si es uniformemente estable y existe una  $\delta_a > 0$  tal que para cualquier  $\eta > 0$  existe un  $T = T(\delta_a, \eta)$ , tal que  $\|x_{t_0}\|_c < \delta_a$  implicando que  $\|x(t)\| < \eta$  para  $t \geq t_0 + T$  y con  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Finalmente, es global (uniforme) asintóticamente estable si es uniforme asintóticamente estable y  $\delta_a$  puede ser un número finito arbitrariamente grande.

Es fácil notar que las nociones de estabilidad enunciadas aquí no son del todo diferentes de las definiciones enunciadas para los sistemas libres de retardo, por otro lado, un sistema asintóticamente estable muchas veces es llamado simplemente estable. Correspondo a esto, es común referirse a sistemas que no son asintóticamente estable como sistemas *estables*, [7], [28], [5].

## Teorema de estabilidad de Lyapunov-Krasovskii

De la misma manera que en los sistemas libres de retardo, el método de Lyapunov es un enfoque efectivo. Para un sistema sin retardo, este método consiste en la construcción de una función de Lyapunov  $V(t, x(t))$ , la cual es, de alguna manera, una medida de potencial cuantificando la desviación del estado  $x(t)$  de la solución trivial 0. Para los sistemas libres de retardo, el estado  $x(t)$  es necesario para especificar la evolución futura del sistema en el tiempo  $t$ , debido a que en un sistema con retardo el estado en el tiempo  $t$  es requerido con el mismo propósito, este estado está representado por  $x(\theta)$  en el intervalo  $\theta \in [t - \tau, t]$ , (i.e.  $x_t$ ), es natural esperar que para un sistema con tiempo muerto, la función de Lyapunov es en realidad una *funcional*  $V(t, x_t)$  dependiendo de  $x_t$ , el cual es también una medida de la desviación de  $x_t$  de la solución trivial 0. Tal funcional es conocida como la *Funcional de Lyapunov-Krasovskii*.

Específicamente, sea  $V(t, \phi)$  diferenciable, y siendo  $x_t(\tau, \phi)$  una solución de (2.13) en el tiempo  $t$  con condiciones iniciales  $x_\tau = \phi$ . Es posible calcular la derivada de la funcional  $V(t, x(t))$  con respecto a  $t$  y evaluarla en el instante  $t = \tau$ . Esto da a lugar a.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tau, \phi) &= \left. \frac{d}{dt} V(t, x_t) \right|_{t=\tau, x_t=\phi} \\ &= \limsup_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [V(\tau + \Delta t, x_{t+\Delta t}(\tau, \phi)) - V(\tau, \phi)] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Intuitivamente, una  $\dot{V}$  no-positiva indica que  $x_t$  no crece conforme crece  $t$ , lo cual significa que el sistema es estable. Una declaración más precisa de esta observación es enunciada en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2** *Suponga  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}([- \tau, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  en (2.13) que mapea  $\mathbb{R} \times$  (el conjunto acotado de  $\mathcal{C}([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ ) hacia el conjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$ , y  $u, v, w : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  son funciones continuas no decrecientes,  $u(s)$  y  $v(s)$  son positivas para toda  $s > 0$ , y  $u(0) = v(0)$ . Si existe una funcional diferenciable continua  $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c) \quad (2.16)$$

y

$$\dot{V}(t, \phi) = -w(\|\phi(0)\|) \quad (2.17)$$

*Así, la solución trivial de (2.13) es uniformemente estable. Si  $w(s) > 0$  para  $s > 0$ , entonces la solución es uniforme asintóticamente estable. Si, además, el  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = +\infty$  entonces la solución es global uniforme asintóticamente estable.*

### Teorema de Estabilidad de Lyapunov-Razumikhin

Debido a que la funcional de Lyapunov-Krasovskii requiere conocer la variable de estado  $x(t)$  en el intervalo  $[t - \tau, t]$ , esto exige la manipulación de funcionales, lo cual convierte la aplicación de el Teorema de Lyapunov-Krasovskii un tanto complicado. Esta dificultad puede ser algunas veces eludida usando el Teorema de Lyapunov-Razumikhin, un resultado alternativo el cual involucra solamente funciones en lugar de funcionales. La idea principal detrás de tal Teorema se enfoca también en una función  $V(x)$  representativa de la dimensión de  $x(t)$ . Para tal función,

$$\overline{V}(x_t) = \max_{\theta \in [-\tau, 0]} V(x(t + \theta)). \quad (2.18)$$

La cual sirve como medida de la dimensión de  $x_t$ . Si  $V(x(t)) < \overline{V}(x_t)$ , entonces  $\dot{V}(x)$  no provoca que  $\overline{V}(x_t)$  crezca. En efecto, para una  $\overline{V}(x_t)$  que no aumenta, solamente es necesario que  $\dot{V}(x(t))$  sea *no-positiva* siempre y cuando  $V(x(t)) = \overline{V}(x_t)$ . A continuación se presenta el enunciado completo.

**Teorema 2.3** *Suponga  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}([- \tau, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  que toma  $\mathbb{R} \times$  (el conjunto acotado de  $\mathcal{C}([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ ) hacia el conjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  y  $u, v, w : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  son funciones continuas no decrecientes,  $u(s)$  y  $v(s)$  son positivas para toda  $s > 0$ , y  $u(0) = v(0)$ , y  $v$  siendo estrictamente creciente.*

*Si existe una función continua y diferenciable  $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:*

$$u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|), ; \text{ para } t \in \mathbb{R}; \text{ y } ; x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.19)$$

*y con la derivada de la función  $V$  a lo largo de la solución  $x(t)$  de (2.13) que satisface*

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(\|x(t)\|); \text{ siempre que } ; V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)) \quad (2.20)$$

*para  $\theta \in [-\tau, 0]$ , entonces el sistema (2.13) es uniformemente estable.*

*Además, si  $w(s) > 0$  para todo  $s > 0$ , y existe una función continua no decreciente  $p(s) > s$  para una  $s > 0$ , tal que la condición (2.20) se convierte en*

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(\|x(t)\|) \text{ si } V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p(V(t, x(t))). \quad (2.21)$$

*para  $\theta \in [-\tau, 0]$ , entonces el sistema (2.13) es uniforme asintóticamente estable. Si, además, el  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = +\infty$  entonces el sistema es global uniforme asintóticamente estable, [3], [7].*

A continuación se presentaran algunas transformaciones del modelo de sistemas con retardo útiles para llevar a cabo un análisis de estabilidad en el marco de Desigualdades Matriciales Lineales (LMI por sus siglas en inglés).

Primero, considere el modelo de un sistema lineal con retardo.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) \\ x_0 &= \phi\end{aligned}\tag{2.22}$$

Donde  $A_0$  y  $A_1$  son matrices reales dadas de dimensión  $n \times n$  y  $\phi$  es la funcional de condiciones iniciales.

**Formula de Newton-Leibniz** Considere

$$x(t - \tau) = x(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta)d\theta$$

Esta transformación permite cambiar el sistema retardado con retardo *discreto* (2.22), en el siguiente sistema con retardo *distribuido*.

$$\dot{x}(t) = (A_0 + A_1)x(t) - A_1 \int_{t-\tau}^t [A_0x(s) + A_1x(s - \tau)] ds$$

**Formula de Newton-Leibniz Parametrizada**

Esta transformación mejora los resultados obtenidos con la Formula de Newton-Leibniz introduciendo un parámetro libre  $C$ , el cual debe ser elegido adecuadamente.

$$Cx(t - \tau) = Cx(t) - C \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta)d\theta$$

Donde el término  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz de parámetros libres, esto permite transformar el sistema retardado con retardo *discreto* (2.22), en el siguiente sistema con retardo *distribuido*.

$$\dot{x}(t) = (A_0 + C)x(t) + (A_1 - C)x(t - \tau) - C \int_{t-\tau}^t [A_0x(s) + A_1x(s - \tau)] ds$$

Note que para ciertos valores particulares de  $C$  los sistemas descritos previamente son recuperados, esto es:

- $C = 0$ : el sistema original es recuperado.
- $C = A_1$ : el sistema obtenido con la fórmula de Newton-Leibniz es recuperado.

### Análisis de estabilidad independiente del retardo vía Teorema de Lyapunov-Razumikhin

Considere un sistema lineal con retardo, caracterizado de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) \\ x(t + \theta) &= \phi(\theta), \quad \theta \in [-\bar{\tau}, 0] \\ \tau &\in [0, \bar{\tau}].\end{aligned}\tag{2.23}$$

Á continuación se presenta un simple análisis de estabilidad independiente del retardo utilizando la función cuadrática de Lyapunov-Razumikhin, [3], [28].

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t). \quad (2.24)$$

La derivada con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de solución del sistema (2.23) está dada por:

$$\dot{V}(x(t)) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 & P A_1 \\ A_1^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Aplicando el teorema de estabilidad de Lyapunov-Razumikhin (2.3),  $\dot{V}(x(t))$  debe ser negativo para  $V(x(t+\theta)) < pV(x(t))$ , para cualquier  $p > 1$  y para toda  $\theta \in [-\tau, 0]$ . Debido a que la desigualdad (2.25) se mantiene para toda  $\theta \in [-\tau, 0]$ , entonces tenemos,  $V(x(t-\tau)) < pV(x(t))$ , aplicando el Procedimiento- $\mathcal{S}$  (para mayor detalle consulte [2]), se obtiene.

$$\begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 + \varsigma p P & P A_1 \\ A_1^T P & -\varsigma P \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.26)$$

Con  $\varsigma > 0$ . Finalmente sea  $p = 1 + \delta$ , para cualquier pequeña  $\delta > 0$ , se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.4** *El sistema (2.23) es asintóticamente estable independiente del retardo si existen, una matriz simétrica definida positiva, i.e.,  $P = P^T \succ 0$  y un escalar  $\varsigma > 0$  tal que*

$$\begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 + \varsigma P & P A_1 \\ A_1^T P & -\varsigma P \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.27)$$

Es claro que la desigualdad matricial (2.27) proporciona una prueba de estabilidad independiente del retardo debido a que la desigualdad matricial no depende del término del retardo. Cabe notar que (2.27) no es una LMI, debido al término bilinear  $\varsigma P$ . Sin embargo, es posible hacer de este un problema *quasi-convexo* fijando el valor de  $\varsigma$ . Esto quiere decir que es posible encontrar un valor adecuado de  $\varsigma$  mediante una búsqueda basada en un método iterativo.

## Análisis de estabilidad dependiente del retardo vía

### Teorema de Lyapunov-Razumikhin

El siguiente resultado está basado en una transformación dada por la fórmula de Newton-Leibniz.

**Teorema 2.5** *El sistema (2.23) dependiente del retardo asintóticamente estable si existen una matriz simétrica definida positiva, i.e.,  $P = P^T \succ 0$  y escalares  $\alpha, \alpha_0, \alpha_1 > 0$  tales que*

$$\begin{bmatrix} M & P(\alpha I - A_1)A_0 & P(\alpha I - A_1)A_1 \\ \star & -\alpha_0 P - \alpha \tau A_0^T P A_0 & -\alpha \tau A_0^T P A_1 \\ \star & \star & -\alpha_1 P - \alpha \tau A_1^T P A_1 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Donde  $I$  representa la matriz identidad,  $\star$  representa el término simétrico, y

$$M = \frac{1}{r} [P(A_0 + A_1) + (A_0 + A_1)^T P] + (\alpha_0 + \alpha_1)P.$$

Una discusión acerca de la correcta elección de los escalares  $\alpha$ ,  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  es presentada en [7]. De la misma manera que en el caso del análisis de estabilidad independiente del retardo via Teorema de Lyapunov-Razumikhin, la desigualdad (2.28) no es una LMI, sin embargo es posible encontrar valores adecuados para los escalares  $\alpha$ ,  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  mediante un proceso iterativo. De cualquier forma, este proceso iterativo representa una dificultad mayor que en el caso independiente del retardo debido a que la búsqueda tiene que ser realizada sobre un espacio tridimensional (en lugar de unidimensional), lo cual es más complicado desde el punto de vista computacional.

### Análisis de estabilidad independiente del retardo vía Teorema de Lyapunov-Krasovskii

A pesar de la simplicidad de las funciones de Lyapunov-Razumikhin, normalmente llevan a Desigualdades Matriciales No-Lineales y a resultados muy conservativos debido al uso de transformaciones de modelo no-equivalentes. Por el contrario, las funcionales de Lyapunov-Krasovskii aún usadas con transformaciones de modelo idénticas, han llevado a resultados más y más exactos en el marco de las LMI's mediante técnicas de acotamiento para los llamados términos cruzados.

Considere la funcional de Lyapunov-Krasovskii dada por.

$$V(x_t) = x(t)^T P x(t) + \int_{t-\tau}^t x(\theta)^T Q x(\theta) d\theta. \quad (2.29)$$

Donde  $P, Q \in \mathbb{S}_{++}^n$  son matrices simétricas constantes de decisión. Calculando la derivada de la funcional de Lyapunov-Krasovskii  $V(x_t)$  a lo largo de las trayectorias de solución del sistema (2.22) nos entrega.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) + x(t)^T Q x(t) - x(t-\tau)^T Q x(t-\tau) \quad (2.30) \\ &= [A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau)]^T P x(t) + x(t)^T P [A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau)] \\ &\quad + x(t)^T Q x(t) - x(t-\tau)^T Q x(t-\tau) \\ &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 + Q & P A_1 \\ A_1^T P & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Teorema 2.6** *El sistema (2.23) es asintóticamente estable para cualquier valor de retardo si existen matrices  $P = P^T \succ 0$  y  $Q = Q^T \succ 0$  tal que*

$$\begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 + Q & P A_1 \\ \star & -Q \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.31)$$

Cabe mencionar que la estructura es bastante parecida a la estructura obtenida mediante la aplicación del teorema de Lyapunov-Razumikhin, la diferencia radica en que, para el teorema de Lyapunov-Krasovskii se obtiene una LMI. Más aún, este análisis es menos conservativo que la prueba de estabilidad vía Lyapunov-Razumikhin debido a que la matriz  $Q$  es libre e independiente de  $P$  en el análisis de Lyapunov-Krasovskii, mientras que el término  $\varsigma P$  en el análisis de Lyapunov-Razumikhin está fuertemente relacionado con  $P$ . Como conclusión, el análisis basado en la funcional de Lyapunov-Krasovskii incluye la prueba de Lyapunov-Razumikhin para el caso independiente del retardo, en el caso particular cuando  $Q = \varsigma P$ , [7], [3], [28].



## Análisis de estabilidad dependiente del retardo vía Teorema de Lyapunov-Krasovskii

Consideremos la siguiente funcional de Lyapunov-Krasovskii.

$$\begin{aligned}
 V(x_t, \dot{x}_t) &= V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t, \dot{x}_t) \\
 V_1(x_t) &= x(t)^T P x(t) \\
 V_2(x_t) &= \int_{t-\tau}^t x(\theta)^T Q x(\theta) d\theta \\
 V_3(x_t, \dot{x}_t) &= \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(\eta)^T Z \dot{x}(\eta) d\eta d\theta
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Con  $P = P^T$ ,  $Q = Q^T$  y  $Z = Z^T \succ 0$ . Usando la transformación de Newton-Leibniz, el sistema (2.22) es cambiado por.

$$\dot{x}(t) = (A_0 + A_1)x(t) - \int_{t-\tau}^t x(\theta) d\theta \tag{2.33}$$

Calculando la derivada de la funcional  $V$  a lo largo de las trayectorias de solución del sistema obtenemos.

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(x_t) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \\
 &= x(t)^T [(A_0 + A_1)^T P + P(A_0 + A_1)] x(t) - 2x(t)^T P A_1 \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta) d\theta \\
 &= x(t)^T [(A_0 + A_1)^T P + P(A_0 + A_1)] x(t) \\
 &\quad - \underbrace{2x(t)^T P A_1 \int_{t-\tau}^t [A_0 x(\theta) + A_1 x(\theta - \tau)] d\theta}_{\text{termino cruzado}} \\
 \dot{V}_2(x_t) &= x(t)^T Q x(t) - x(t - \tau)^T Q x(t - \tau) \\
 \dot{V}_3(x_t, \dot{x}_t) &= \tau \dot{x}(t)^T Z \dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta)^T Z \dot{x}(\theta) d\theta
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Es posible observar ver que un *término cruzado* aparece en  $\dot{V}_1$  y es una unión entre el estado en el instante  $t$  y una integral de  $A_0(\theta) + A_1 x(\theta - \tau)$  sobre el intervalo  $[t - \tau, t]$ . Este término molesto debe ser acotado para desacoplar la integral del estado  $x(t)$ . Un simple acotamiento se proporciona a continuación.

$$\int_{t-\tau}^t \begin{bmatrix} x(t) \\ x(\theta) \\ x(\theta - \tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P A_1 \\ A_0^T \\ A_1^T \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} P A_1 \\ A_0^T \\ A_1^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x(t) \\ x(\theta) \\ x(\theta - \tau) \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Para toda  $Z = Z^T \succ 0$ , por lo tanto

$$\begin{aligned}
-2x(t)^T P A_1 \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta) d\theta &= -2x(t)^T P A_1 \int_{t-\tau}^t A_0 x(\theta) + A_1 x(\theta - \tau) d\theta \quad (2.36) \\
&\leq \int_{t-\tau}^t x(t)^T P A_1 Z^{-1} A_1^T P x(t) d\theta + \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta)^T Z \dot{x}(\theta) d\theta \\
&\leq \tau x(t)^T P A_1 Z^{-1} A_1^T P x(t) + \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta)^T Z \dot{x}(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

Con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq x(t)^T [(A_0 + A_1)^T P + P(A_0 + A_1) + Q] x(t) + \tau x(t)^T P A_1 Z^{-1} A_1^T P x(t) \\
- x(t - \tau)^T Q x(t - \tau) + \tau \dot{x}(t)^T Z \dot{x}(t). \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Finalmente como

$$\tau \dot{x}(t)^T Z \dot{x}(t) = \tau \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_0^T Z A_0 & A_0^T Z A_1 \\ \star & A_1^T Z A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Obtenemos:

$$\dot{V} \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi & \tau A_0^T Z A_1 \\ \star & -Q + \tau A_1^T Z A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Donde  $\Psi = (A_0 + A_1)^T P + P(A_0 + A_1) + Q + \tau A_0^T Z A_0 + \tau P A_1 Z^{-1} A_1^T P$ , con lo que obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.7** *El sistema (2.22) es estable dependiente del retardo, con margen en el retardo  $\tau$  si existen matrices simétricas definidas positivas  $P, Q, Z$  tal que se cumple la siguiente LMI.*

$$\begin{bmatrix} (A_0 + A_1)^T P + P(A_0 + A_1) + Q + \tau A_0^T Z A_0 & \tau A_0^T Z A_1 & \tau P A_1 \\ \star & -Q + \tau A_1^T Z A_1 & 0 \\ \star & \star & -\tau Z \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

A través del uso del Teorema de estabilidad de Lyapunov-Krasovskii y la transformación de Newton Leibniz se proporciona una prueba de estabilidad dependiente del retardo. Dicha transformación introduce un término cruzado el cual debe ser acotado con el fin de eliminar términos molestos para realizar el análisis de estabilidad, [7], [3], [28].

## 2.2. Controlabilidad

Se dice que un sistema lineal invariante en el tiempo (libre de retardo) es controlable si, para cualquier elección de dos vectores de estado,  $x_0$  y  $x_1$ , existe un periodo de tiempo  $T > 0$  y una entrada de control  $u(t) \in [0, T]$ , continua a pedazos, tal que el estado del sistema va desde  $x(0) = x_0$  en el instante  $t = 0$ , hasta  $x(T) = x_1$ , [21].

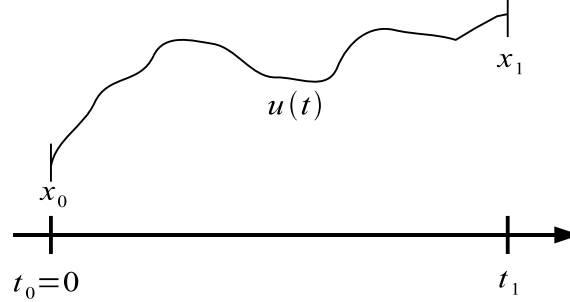


Figura 2.1: Controlabilidad

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo.

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (2.41)$$

Donde

- $x$  = vector de estados.
- $u$  = señal de control.
- $A$  = matriz de dimensión  $n \times n$
- $B$  = matriz de dimensión  $n \times r$

**Definición 2.4** *El sistema (2.41) es completamente controlable si el rango de la matriz de controlabilidad, descrita por*

$$[B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B], \quad (2.42)$$

*sea de rango  $n$ , en otras palabras, que la matriz de controlabilidad contenga  $n$  vectores columna linealmente independientes.*

La controlabilidad para sistemas lineales con retardo es caracterizado a través de muchas definiciones, de acuerdo a la representación del sistema, es decir, la manera en que el retardo es modelado (por ejemplo, sistemas con retardos commensurados, retardos no-commensurados, retardos distribuidos, etc.). A continuación se presentará una definición de controlabilidad para sistemas con retardos commensurados.

Considere un sistema lineal, invariante en el tiempo, con retardos commensurados en el estado, en las entradas y en las salidas (todos los retardos siendo múltiplos de  $\tau$ ).

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + \cdots + A_ax(t - a\tau) \\ \quad + B_0x(t) + B_1x(t - \tau) + \cdots + B_bx(t - b\tau) \\ y(t) = C_0x(t) + C_1x(t - \tau) + \cdots + C_cx(t - c\tau) \end{cases} \quad (2.43)$$

Con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$   $a, b$  y  $c \in \mathbb{N}$ , y  $\tau \in \mathbb{R}$ .

Usualmente este sistema es reescrito usando el operador  $\nabla$  definido por  $\nabla x(t) = x(t - \tau)$ . Consideremos entonces la siguiente representación del sistema  $\Sigma$ .

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\nabla)x(t) + B(\nabla)u(t) \\ y(t) = C(\nabla)x(t) \end{cases} \quad (2.44)$$

Con  $A(\nabla) = A_0 + \nabla A_1 + \cdots + \nabla^a A_a$ ,  $B(\nabla) = B_0 + \nabla B_1 + \cdots + \nabla^b B_b$  y  $C(\nabla) = C_0 + \nabla C_1 + \cdots + \nabla^c C_c$ , son matrices sobre el anillo  $\mathbb{R}[\nabla]$  de polinomios en  $\nabla$  con coeficientes reales, [30], [26].

### 2.2.1. Controlabilidad sobre el anillo $\mathbb{R}[\nabla]$

Primero definimos el submódulo de controlabilidad  $\langle A(\nabla)/ImB(\nabla) \rangle$  del par  $(A(\nabla), B(\nabla))$  del sistema (2.49) dado por.

$$\langle A(\nabla)/ImB(\nabla) \rangle = ImB(\nabla) + A(\nabla)ImB(\nabla) + \cdots + A(\nabla)^{n-1}ImB(\nabla). \quad (2.45)$$

La representación matricial del submódulo de controlabilidad puede escribirse de la siguiente manera.

$$\langle A(\nabla)/ImB(\nabla) \rangle = [B(\nabla) | A(\nabla)B(\nabla) \cdots | A(\nabla)^{n-1}B(\nabla)]. \quad (2.46)$$

**Definición 2.5** *Se dice que el sistema (2.49) es controlable sobre el anillo  $\mathbb{R}[\nabla]$  si y solo si su submódulo de controlabilidad satisface las siguientes caracterizaciones.*

- La Imagen de  $\langle A(\nabla)/B(\nabla) \rangle = \mathbb{R}^n[\nabla]$
- $\langle A(\nabla)/B(\nabla) \rangle$  tiene una inversa  $Q(\nabla)$  sobre  $\mathbb{R}[\nabla]$

Una interpretación de esta noción de controlabilidad es que, al igual que en los sistemas lineales libres de retardo, un sistema (2.49) el cual es controlable sobre el anillo  $\mathbb{R}[\nabla]$  puede alcanzar, desde  $x_0$ , cualquier estado  $x_1$  en un periodo de tiempo dado  $T$ , con  $T$  tan pequeño como sea posible (y una señal de control *ad hoc*  $u(t)t \in [0, T]$ ), esta noción también es conocida como *controlabilidad fuerte*, [26, 30].

### 2.2.2. Controlabilidad sobre el campo $\mathbb{R}(\nabla)$

Ahora se presenta una diferente clase de controlabilidad con una interpretación completamente diferente. En este caso no es posible alcanzar cualquier estado final  $x_1$  desde un estado inicial  $x_0$  en un tiempo dado  $T$ , con  $T$  tan pequeño como sea posible. De hecho, un periodo mínimo de tiempo será necesario para alcanzar el estado final  $x_1$ , esta noción de controlabilidad es también conocida comúnmente como *controlabilidad débil* [26, 30].

**Definición 2.6** *Se dice que el sistema (2.49) es controlable sobre el campo  $\mathbb{R}(\nabla)$  si y solo si su submódulo de controlabilidad satisface las siguientes caracterizaciones.*

- El rango de  $\langle A(\nabla)/B(\nabla) \rangle = n$ ,
- $\langle A(\nabla)/B(\nabla) \rangle$  tiene una inversa  $Q(\nabla)$  sobre  $\mathbb{R}(\nabla)$ .

## 2.3. Observabilidad

Se dice que un sistema lineal, invariante en el tiempo (sin retardo) es observable en el tiempo  $t_0$  si, con el sistema en el estado  $x(t_0)$ , es posible determinar este estado a partir de la salida durante un intervalo en tiempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Por lo tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector salida. El concepto de observabilidad es útil al resolver el problema de reconstruir variables de estado no medibles a partir de variables que sí lo son en el tiempo mínimo posible.

El concepto de observabilidad es muy importante debido a que, en la práctica, la dificultad que se encuentra con el control mediante retroalimentación del estado es que algunas de las variables de estado no son accesibles para su medición directa, por lo que se hace necesario estimar las variables de estado no medibles para construir las señales de control, [21].

Considere el sistema lineal, invariante en el tiempo descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ y &= Cx.\end{aligned}\tag{2.47}$$

Donde

- $x$  = vector de estados.
- $y$  = vector de salidas.
- $A$  = matriz de dimensión  $n \times n$
- $C$  = matriz de dimensión  $m \times n$

**Definición 2.7** *El sistema (2.47) es completamente observable si el rango de la matriz de observabilidad, descrita por*

$$[C^T \mid A^T C^T \mid \cdots \mid (A^T)^{n-1} C^T],\tag{2.48}$$

*sea de rango  $n$ , en otras palabras, que la matriz de observabilidad contenga  $n$  vectores columna linealmente independientes.*

De la misma manera que en el concepto de controlabilidad, la observabilidad para sistemas con retardo debe ser estudiada de manera diferente que para los sistemas libres de retardo. Nuevamente considere un sistema lineal, invariante en el tiempo, con retardos commensurados en el estado, en las entradas y en las salidas (todos los retardos siendo múltiplos de  $\tau$ ).

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + \cdots + A_a x(t - a\tau) \\ \quad + B_0 u(t) + B_1 u(t - \tau) + \cdots + B_b u(t - b\tau) \\ y(t) = C_0 x(t) + C_1 x(t - \tau) + \cdots + C_c x(t - c\tau) \end{cases}$$

Donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $a, b$  y  $c \in \mathbb{N}$ , y  $\tau \in \mathbb{R}$ .

Usualmente este sistema es reescrito usando el operador  $\nabla$  definido por  $\nabla x(t) = x(t - \tau)$ . Consideremos entonces la siguiente representación del sistema  $\Sigma$ .

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\nabla)x(t) + B(\nabla)u(t) \\ y(t) = C(\nabla)x(t) \end{cases}\tag{2.49}$$

Con  $A(\nabla) = A_0 + \nabla A_1 + \cdots + \nabla^a A_a$ ,  $B(\nabla) = B_0 + \nabla B_1 + \cdots + \nabla^b B_b$  y  $C(\nabla) = C_0 + \nabla C_1 + \cdots + \nabla^c C_c$ , son matrices sobre el anillo  $\mathbb{R}[\nabla]$  de polinomios en  $\nabla$  con coeficientes reales, [26], [31], [28].

Como un resultado preliminar para el análisis de observabilidad de sistemas con retardo, se definirá la matriz de observabilidad del sistema (2.49).

$$\left\langle \frac{C(\nabla)}{A(\nabla)} \right\rangle = \begin{bmatrix} C(\nabla) \\ C(\nabla)A(\nabla) \\ \vdots \\ C(\nabla)A^{n-1}(\nabla) \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

### 2.3.1. Observabilidad Fuerte

**Definición 2.8** *Se dice que el sistema (2.49) es fuertemente observable (i. e., observable sobre el anillo  $\mathbb{R}[\nabla]$ ) si satisface las siguientes caracterizaciones.*

- $\left\langle \frac{C(\nabla)}{A(\nabla)} \right\rangle$  tiene una matriz inversa por la izquierda  $\mathbb{R}[\nabla]$ .
- El rango de  $\begin{bmatrix} sI_n - A(z) \\ C(z) \end{bmatrix} = n \quad \forall s, z \in \mathbb{C}$ .

note que esta noción de observabilidad garantiza la re-constructibilidad de  $x(t)$  en el tiempo  $t$ , esta noción de observabilidad es la noción dual de la *controlabilidad fuerte* definida con anterioridad.

### 2.3.2. Observabilidad Espectral

**Definición 2.9** *El sistema (2.49) es espectralmente observable si satisface la siguiente caracterización.*

- El rango de  $\begin{bmatrix} sI_n - A(e^{-s\tau}) \\ C(e^{-s\tau}) \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$ .

Finalmente, la última noción de observabilidad que se presentará es la menos restrictiva, y corresponde a la extensión del subespacio inobservable definida para sistemas con retardo, i. e. para este caso, el submódulo inobservable.

### 2.3.3. Observabilidad Débil

**Definición 2.10** *Se dice que el sistema (2.49) es débilmente observable (i. e., observable sobre el campo  $\mathbb{R}(\nabla)$ ) si satisface las siguientes condiciones.*

- El rango de  $\left\langle \frac{C(\nabla)}{A(\nabla)} \right\rangle = n$
- $\left\langle \frac{C(\nabla)}{A(\nabla)} \right\rangle$  tiene una matriz inversa izquierda sobre  $\mathbb{R}(\nabla)$
- No existe  $x \in \mathbb{R}^n(\nabla)$  tal que:

$$C(\nabla)x = C(\nabla)A(\nabla)x = \cdots = C(\nabla)A^{n-1}(\nabla)x = 0 \text{ y } x \neq 0$$

---

# CONTROL DE SISTEMAS CON RETARDO

---

El presente capítulo está dedicado a dar a conocer un breve repaso acerca de los enfoques de control utilizados para los sistemas retardados. A partir del desarrollo del Predictor de Smith Clásico en la década de los 1950s, el control de sistemas con retardo ha sido ampliamente estudiado, sobre todo en los últimos años. Entre las técnicas de control para los sistemas con retardo, podemos mencionar el control Proporcional-Integral-Derivativo (PID), los ya mencionados predictores de Smith Clásicos, los predictores de Smith modificados, así como algunos enfoques basados en métodos de aproximación.

## 3.1. Predictor de Smith (SP)

El Predictor de Smith (SP), propuesto a finales de la década de 1950s por Otto J. M. Smith, [37], tiene como principal objetivo diseñar un controlador para sistemas con una entrada-una salida (SISO) lineales invariantes en el tiempo con retardo tal que, como resultado se obtenga una respuesta retardada de un sistema libre de retardo. En otras palabras, el retardo es trasladado hacia afuera del lazo de retroalimentación. Gracias a esto, el diseño y el análisis del sistema son simplificados considerablemente [41].

Los primeros intentos por aplicar e implementar el SP demostraron que los métodos clásicos de análisis y diseño no eran adecuados para el estudio del SP o esquemas similares de control. Investigaciones teóricas desarrolladas a finales de la década de 1970s y comienzo de la década de los 1980s aclararon algunas de las propiedades del SP y ofrecieron herramientas que permitieron entenderlo de mejor forma. A lo largo de los últimos años, han sido realizados numerosos estudios acerca de las características del SP, tanto en la industria como en el ámbito académico. Diversas modificaciones han sido desarrolladas con el fin de extender los alcances del SP a sistemas de Múltiple Entrada-Múltiple Salida (MIMO), incluso con múltiples retardos.

El SP contiene un modelo del proceso con retardo, por lo tanto, su implementación en equipos análogos era una tarea complicada y poco práctica. Cuando los controladores de procesos digitales comenzaron a aparecer en el mercado, en el inicio de los 1980s, implementar el SP se convirtió en una tarea relativamente sencilla. De hecho, en la misma década, algunos controladores industriales que contaban con microprocesador ofrecían el SP como un algoritmo standard de control, tal como sucede con el PID, [22].

### 3.1.1. Dificultades de control provocadas por el retardo

Un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI), con una entrada una salida (SISO), con un retardo en la entrada es representado en el espacio de estados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)x + Bu(t - \tau) \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Donde  $x \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de estados,  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada de control y la variable  $y \in \mathbb{R}$  representa la salida.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son matrices de dimensiones adecuadas y  $\tau$  es el tiempo de retardo. Del mismo modo, un sistema LTI SISO con retardo en la salida es representado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)x + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t - \tau).\end{aligned}\tag{3.2}$$

La función de transferencia para ambos casos, ya sea con retardo en la entrada (3.1) o con retardo en la salida (3.2) está dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = P(s)e^{-\tau s}.\tag{3.3}$$

Donde

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B.\tag{3.4}$$

Siendo  $P(s)$  una función de transferencia racional de orden  $n$ . La presencia del retardo  $\tau$  en el lazo de control complica el análisis de estabilidad y el diseño de control para tales sistemas. Más aún, el retardo degrada la calidad del control debido a una inevitable reducción en el valor de las ganancias de control como será demostrado en el siguiente ejemplo.

Assuma que en el lazo de control mostrado en la Figura 3.1, el controlador  $C(s)$  es un control proporcional (*i.e.*,  $C(s) = K$ ), y que  $P(s)$  es un filtro de primer orden, con lo cual obtenemos el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{\alpha s + 1}.\tag{3.5}$$

La función de transferencia obtenida al relacionar la salida  $Y(s)$  con la entrada de referencia  $R(s)$  está dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Ke^{-\tau s}}{\alpha s + 1 + Ke^{-\tau s}}\tag{3.6}$$

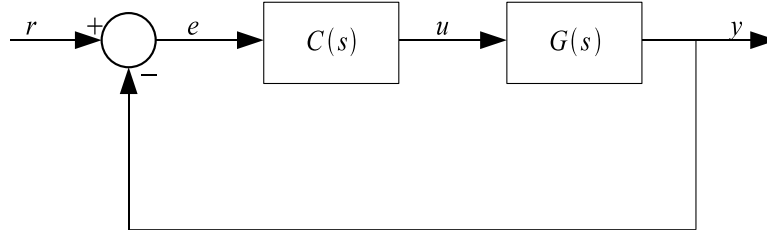


Figura 3.1: Sistema de Control en Lazo Cerrado.



Primero, cabe notar que la ecuación característica del sistema en lazo cerrado contiene el término  $e^{-\tau s}$ . Debido a esto, es una ecuación trascendental en la variable  $s$ , lo cual complica su análisis en comparación con las ecuaciones polinomiales. Por otro lado, cuanto mayor sea la proporción entre el tiempo de retardo ( $\tau$ ), y la constante de tiempo del sistema ( $\alpha$ ), menor será el máximo valor de la ganancia ( $K_{max}$ ), para el cual, la estabilidad del sistema en lazo cerrado es preservada. Cuando  $\tau/\alpha = 0$ , esto es, un sistema libre de retardo,  $K_{max} \rightarrow \infty$ , al menos teóricamente. Cuando  $\tau/\alpha = 1$ , esto es, el tiempo de retardo es igual a la constante de tiempo del sistema, la ganancia  $K_{max}$  se reduce drásticamente de  $\infty$  hasta aproximadamente 2.26, y cuando la relación  $\tau/\alpha \rightarrow \infty$ ,  $K_{max} \rightarrow 1$ , [22]. La Figura 3.2 demuestra una comparación entre un sistema en lazo cerrado cuando  $\tau/\alpha = 0$  y  $\tau/\alpha = 1$ , con una ganancia  $K = 4$ , confirmando la mencionado anteriormente.

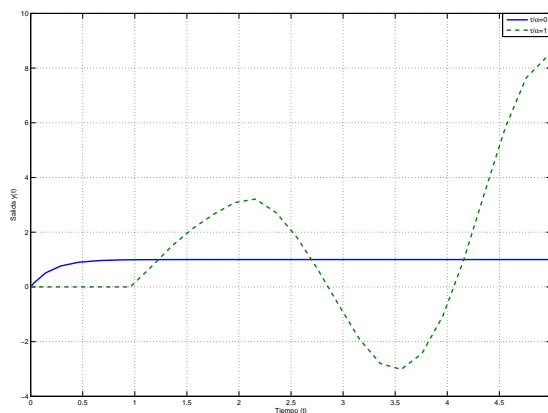


Figura 3.2: Efectos del Retardo en los Sistemas de Control.

### 3.1.2. Estructura y Propiedades del SP

La principal idea del SP es introducir un lazo de retroalimentación local al controlador principal  $C(s)$  usando el SP  $Z(s)$ , como se muestra en la siguiente figura. Aquí, la planta  $G(s) = P(s)e^{-\tau s}$  se asume estable, y el SP representado por la ecuación (3.7) es implementando utilizando los modelos de la parte libre de retardo del sistema,  $P(s)$ , y de la planta,  $P(s)e^{-\tau s}$ .

$$Z(s) = P(s) - P(s)e^{-\tau s}. \quad (3.7)$$

Suponga que  $d = 0$  y que no existen errores en el modelado del sistema, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} y + v &= G(s)u(s) + Z(s)u(s) \\ &= P(s)u(s) \\ &= P(s)e^{-\tau s}u(s)e^{\tau s} \\ &= y \cdot e^{\tau s} \end{aligned} \quad (3.8)$$

La señal de retroalimentación para el controlador  $C(s)$  es una versión adelantada  $\tau$  unidades de tiempo de la salida  $y$  del sistema. Esto explica el nombre de *Predictor*

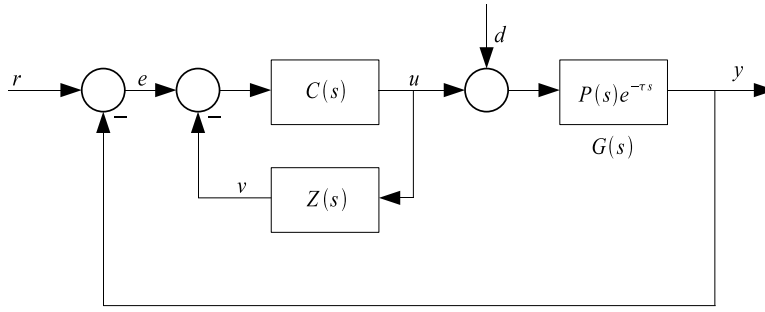


Figura 3.3: Sistema de Control Basado en el Predictor de Smith.

*de Smith*. Siendo  $P(s)$  estable, el sistema mostrado en la Figura 3.3 es equivalente al sistema mostrado en la Figura 3.4, el cual es una versión del SP dada como modelo de control interno (IMC). Cuando el modelo utilizado en el Predictor es exactamente el mismo que en la planta, (el caso ideal), y la perturbación  $d = 0$ , la señal  $y_0 = 0$ , así que el lazo de retroalimentación externo puede ser considerado como abierto, por lo tanto la función de transferencia del sistema en lazo cerrado resultante es:

$$G_r(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)e^{-\tau s}}{1 + C(s)P(s)}. \quad (3.9)$$

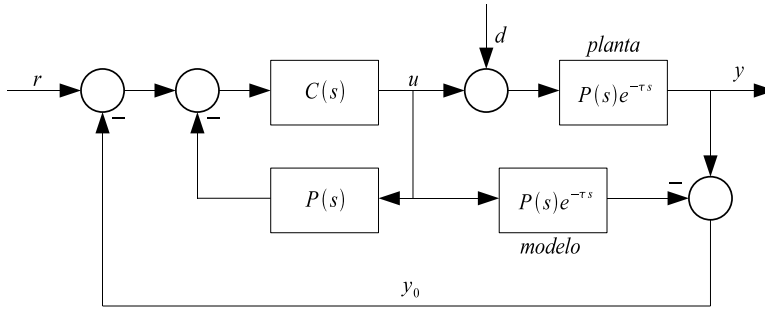


Figura 3.4: Modelo de Control Interno (IMC) para el Predictor de Smith.

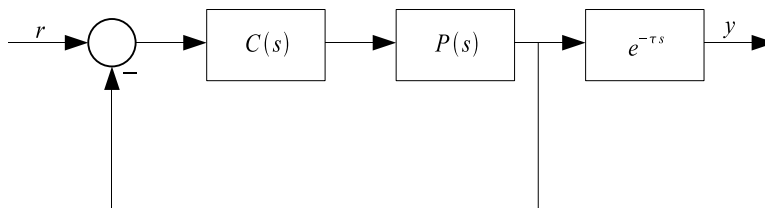


Figura 3.5: Predictor de Smith Simplificado.

En este caso, el sistema en lazo cerrado puede ser simplificado al sistema mostrado en la Figura 3.5, es fácil observar que el retardo ha sido desplazado fuera del lazo de retroalimentación, gracias a esto el controlador principal  $C(s)$  puede ser diseñado tomando en cuenta solamente la parte del sistema libre de retardo  $P(s)$ . Esto implica que la restricción antes mencionada en el tamaño de las ganancias en el controlador no exista más, al menos explícitamente.

Mientras que la eliminación del término de retardo en la ecuación característica del sistema es la principal mejora que se obtiene al implementar el SP, el diseño del controlador no debe basarse en la ecuación (3.9) o en el sistema equivalente mostrado en la Figura 3.5. Esto es debido a que, mientras que los dos sistemas son equivalentes en cuanto la relación entrada-salida, poseen propiedades de robustez y sensibilidad completamente distintas. Esto quiere decir que, el sistema en lazo cerrado con un SP, puede perder estabilidad bajo diferencias en el modelo infinitesimales. Debido a esto, una desventaja que presenta el SP clásico es que este solo puede ser aplicado a sistemas estables, [22], [41].

**Ejemplo 3.1.1** Consideremos la planta estable  $G(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$ , el controlador principal para este ejemplo sera un control de acción proporcional integral de la forma  $C(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$ , con el Predictor de Smith dado por:

$$Z(s) = \frac{1}{s+1}(1 + e^{-2s}). \quad (3.10)$$

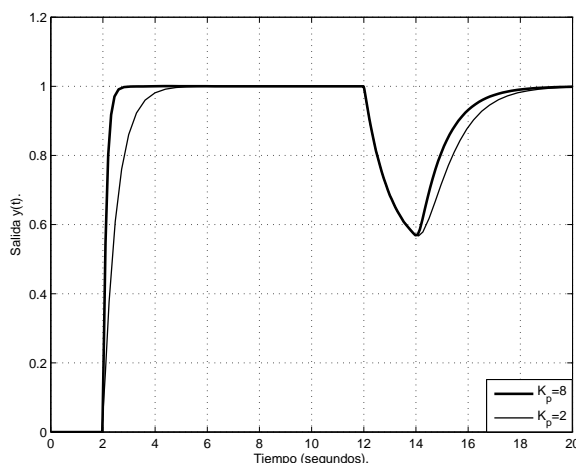


Figura 3.6: Respuesta del Predictor de Smith.

El tiempo de integración  $T_i$  es elegido del mismo valor de la constante de tiempo del sistema, i.e.,  $T_i = 1$ , lo que da como resultado la respuesta de un sistema de primer orden con una constante de tiempo igual a  $\frac{1}{K_p}$ .

La respuesta del sistema nominal es presentada en la Figura 3.6, para ganancias  $K_p = 8$  y  $K_p = 2$ . Una perturbación de tipo escalón es introducida a los 10 segundos. El seguimiento del set-point puede realizarse tan rápido como se desee, por el contrario, la respuesta con respecto a la perturbación es dominada por las dinámicas del sistema en lazo abierto y no puede ser mejorada mucho, al menos para este predictor.

**Ejemplo 3.1.2** El siguiente ejemplo demuestra como se comporta un predictor de Smith ante sistemas inestables. Consideremos el siguiente sistema inestable:

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{s-1}.$$

Con un Predictor de Smith  $Z$  y un controlador principal  $C$  dados por:

$$Z(s) = \frac{1}{s-1}(1 + e^{-2s}), \quad C(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$$

Para estabilizar la planta libre de retardo, los parámetros del controlador elegidos son  $K_p > 8$  y  $T_i = 1$ . La respuesta del sistema es mostrada en la Figura 3.7, la línea continua denota la salida del sistema cuando las condiciones iniciales del predictor y la planta son iguales a cero, La línea punteada indica la respuesta inestable del sistema cuando existe una diferencia infinitesimal entre la planta y el predictor, es decir,  $v(0) - y(0) = 0.001$ . Esto demuestra que en la practica, el predictor de Smith no es un esquema de control recomendado cuando se trata de sistemas inestables.

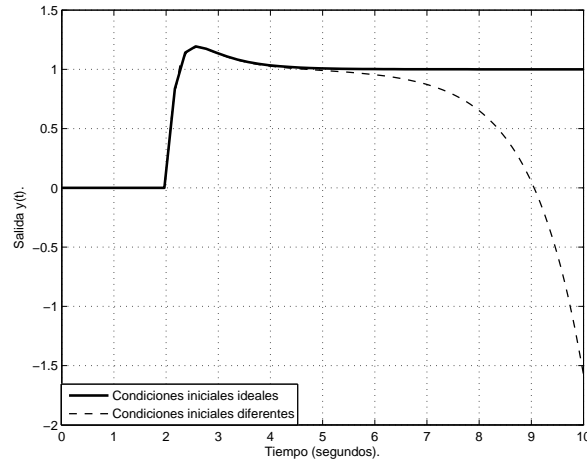


Figura 3.7: Desempeño del Predictor de Smith ante Sistemas Inestables.

## 3.2. Controladores PID

El controlador PID es, por mucho, el algoritmo de control más común utilizado en aplicaciones de control de procesos. La *Japan Electric Measuring Instrument Manufacturers Association* dirigió una investigación acerca del estado de los sistemas de control en el año de 1989. De acuerdo a esta investigación, más del 90 % de los sistemas de control fue del tipo PID. La popularidad del controlador PID puede ser atribuida a diferentes características con las que cuenta, entre estas se puede mencionar la capacidad de eliminar errores en estado estacionario a través de la acción integral y el hecho de poder anticipar el futuro a través de la acción derivativa.

La observación empírica general es que la mayoría de los procesos industriales pueden ser controlado bastante bien mediante controladores PID, siempre que las demandas en las especificaciones de rendimiento no son muy altos. Un controlador PID es suficiente cuando los procesos presentan dinámicas dominantes de primer o segundo orden. En la mayor parte de los casos, no es posible obtener beneficios significativos al implementar un controlador más sofisticado para estos procesos. Con la acción derivativa, el coeficiente de amortiguación puede mejorarse. Además, una ganancia proporcional alta puede ser implementada para aumentar la velocidad en la respuesta transitoria. Sin embargo, la sintonización de la ganancia derivativa debe realizarse cuidadosamente debido a que se puede amplificar el ruido en las frecuencias. Debido

a esto, la mayoría de controladores PID comerciales disponibles en el mercado tienen una limitación en el término de la ganancia derivativa.

A lo largo de las últimas cuatro décadas, se han desarrollado diversas técnicas y métodos para ajustar los parámetros del controlador PID. Algunos de estos métodos han sido basados en caracterizar la respuesta dinámica de la planta mediante un modelo de primer orden con retardo [35].

### 3.2.1. Estructura de los Controladores PID

Un controlador PID consiste en tres términos/acciones/modos/: proporcional, integral y derivativo. Diferentes combinaciones de esos tres términos resultan en diferentes controladores, tales como controladores PI (Proporcional Integral) o PD (Proporcional Derivativo). La forma estándar de los controladores PID es presentada en el dominio de la frecuencia compleja  $s$  de la siguiente forma:

$$C(s) = P + I + D = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s. \quad (3.11)$$

Donde los términos  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  son llamados ganancias proporcional, integral y derivativa respectivamente. En el dominio del tiempo la salida  $u(t)$  del controlador PID es descrita a continuación:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (3.12)$$

Donde  $e(t)$  es la entrada al controlador. La siguiente representación de los controladores PID también es usada frecuentemente:

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i} + T_d s \right). \quad (3.13)$$

Donde  $T_i$  es llamada constante de tiempo integral y  $T_d$  es conocida como constante de tiempo derivativo.

El controlador PID es muy sencillo y puede ser implementado fácilmente usando dispositivos neumáticos, hidráulicos, mecánicos, electrónicos y por supuesto, mediante software. El PID toma en cuenta información acerca del pasado (I), el presente (P) y el futuro (D) de la señal de entrada al controlador, gracias a esto es capaz de ofrecer un desempeño de control satisfactorio. De hecho, más del 90 % de los procesos industriales es controlado mediante un PID, los cuales son también usados ampliamente en el control de sistemas con retardo [41].

Los tres parámetros que contiene el controlador PID pueden ser sintonizados de diferente manera, a continuación se proporcionaran algunos métodos de sintonización enfocados a los sistemas con retardo.

### 3.2.2. Sintonización por Prueba y Error

El impacto de los parámetros proporcional, integral y derivativo sobre el desempeño del sistema de control es muy complicado ya que los tres términos son inter-dependientes. A continuación se presentará una guía práctica, la cual es usada comúnmente para sintonizar manualmente un controlador PID para un sistema estable en lazo abierto [41].

- El término proporcional brinda una acción inmediata en la señal de control. Así, cuanto más alta sea la ganancia proporcional, más rápida será la respuesta del sistema. Más aun, una ganancia proporcional alta produce un error en estado estacionario pequeño. De cualquier manera, una ganancia proporcional demasiado alta podría causar saturación en el actuador. Debido a que la acción de control proporcional está basada en el error, es imposible eliminar el error en estado estacionario utilizando una acción de control puramente proporcional.
- La acción de control integral elimina el error en estado estacionario para entradas o perturbaciones de tipo escalón. El término integral proporciona una acción lenta en la señal de control ya que es proporcional a la acumulación del pasado de la señal de entrada al controlador. Debido a la lentitud de esta acción de control, es común obtener como resultado sobre impulsos en la respuesta del sistema. Para reducir estos sobre impulsos la ganancia integral se debe reducir.
- El término derivativo proporciona una rápida acción conforme a tendencias futuras del error de control. Esto contrarresta los efectos del término integral y mejora el desempeño del sistema. Los sobre impulsos decrecen cuando aumenta el tiempo derivativo, pero es posible que aparezcan sobre impulsos nuevamente si se selecciona un tiempo derivativo demasiado alto. Para sistemas con retardo, especialmente cuando el tiempo de retardo es largo en comparación con la constante de tiempo del sistema, el término derivativo no proporciona mejora alguna, por lo que muchas veces no es utilizado.

### 3.2.3. Método de Ziegler-Nichols

El método de Ziegler-Nichols es un procedimiento empírico para la sintonización de controladores PID bastante conocido. A pesar de que la respuesta obtenida es algunas veces oscilatoria y de que en la actualidad existen métodos de sintonización analíticos, basados en el modelo del sistema, este método es ampliamente utilizado. Este método ha sido propuesto para sistemas de primer orden con retardo ((FOPTD, first order plus time delay) dado por:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s}, \quad (3.14)$$

donde  $K$  es la ganancia estática de la planta,  $T > 0$  es la constante de tiempo del sistema y  $\tau$  es el tiempo de retardo. Este método es válido solo para plantas estable en lazo abierto y la sintonización se lleva a cabo en tres pasos.

1. Ajuste la planta mediante un control proporcional con una ganancia muy pequeña y una entrada de referencia del tipo escalón.
2. Incremente gradualmente la ganancia hasta que la señal de control comience a oscilar. Registre la ganancia correspondiente  $K_u$ , conocida como la ganancia *última*, y el periodo de oscilación  $T_u$ , conocido como el periodo *último*.
3. Ajuste los parámetros de (3.13) de acuerdo a la tabla 3.1.

Como es conocido, cuando el diagrama de Nyquist del sistema anterior cruza el punto crítico  $(-1, 0)$ , el sistema se dice que es críticamente estable. De acuerdo a esto, el procedimiento anterior se basa en encontrar la ganancia proporcional  $K_u$  que lleva al sistema a ser críticamente estable y después determinar los parámetros del controlador. El sistema resultante tiene un coeficiente de amortiguamiento de 0.2, lo cual no es muy satisfactorio para algunos sistemas. De cualquier modo, el método de Ziegler-Nichols ofrece un buen punto de partida para sintonizar el controlador PID [21], [41].

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_u$		
PI	$0.45K_u$	$\frac{1}{1.2}T_u$	
PID	$0.6K_u$	$0.5T_u$	$0.125T_u$

Tabla 3.1: Formulas de Ziegler-Nichols.

### 3.2.4. Sintonización basada en Márgenes de ganancia y Fase

Un sistema de control es comúnmente diseñado con el propósito de cubrir especificaciones en cuanto al margen de fase y de ganancia. Aquí, para sistemas con retardo de la forma (3.14), consideremos un sistema con retroalimentación unitaria (mostrado en la figura 3.8, con el controlador PI:

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right). \quad (3.15)$$

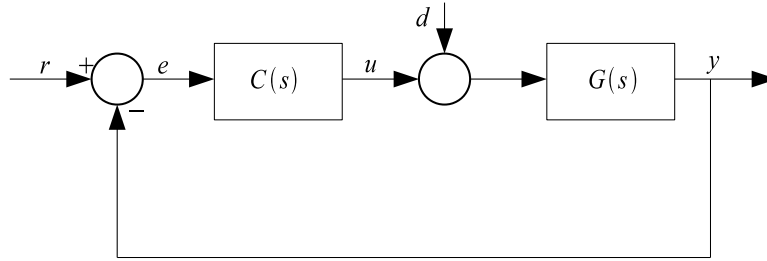


Figura 3.8: Control en Lazo Cerrado.

El margen de ganancia del sistema está dado por:

$$A_m = \frac{1}{|C(j\omega_p)G(j\omega_p)|}, \quad (3.16)$$

donde la frecuencia de cruce de fase  $\omega_p$  satisface la siguiente relación:

$$\arg [C(j\omega_p)G(j\omega_p)] = -\pi. \quad (3.17)$$

El margen de fase  $\phi_m$  del sistema está definido por:

$$\phi_m = \arg [C(j\omega_g)G(j\omega_g)] + \pi, \quad (3.18)$$

donde la frecuencia de cruce de ganancia  $\omega_g$  satisface la siguiente relación:

$$|C(j\omega_g)G(j\omega_g)| = 1. \quad (3.19)$$

Para ciertos márgenes de ganancia y de fase dados, los parámetros del controlador  $C(s)$  están dados por:

$$K_p = \frac{T\omega_p}{A_m K}, \quad T_i = \left(2\omega_p - \frac{4\omega_p^2 \tau}{\pi} + \frac{1}{T}\right)^{-1},$$

donde

$$\omega_p = \frac{A_m \phi_m + 0.5\pi A_m (A_m - 1)}{(A_m^2 - 1)\tau}$$

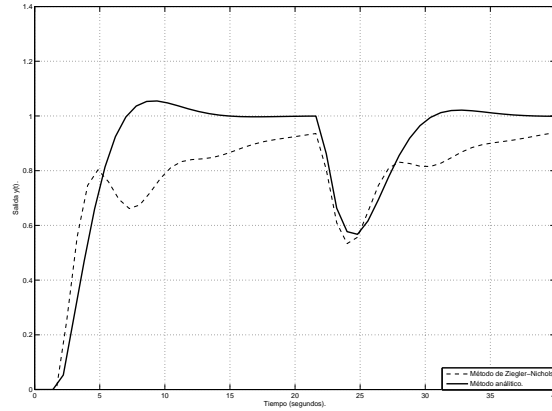


Figura 3.9: Desempeño del control PI en Sistemas con Retardo.

**Ejemplo 3.2.1** *En el siguiente ejemplo mostraremos una comparación entre las metodologías explicadas anteriormente, calculando así un controlador tipo PI mediante el método de Ziegler-Nichols y mediante el método analítico con un margen de ganancia dado  $A_m = 3$  y un margen de fase  $\phi_m = 60^\circ$ . La planta a controlar está dada por la siguiente función de transferencia:*

$$\frac{1}{s + 1} e^{-2s}$$

*En este ejemplo tenemos un sistema de primer orden con retardo donde el tiempo de retardo es dominante, esto es, la constante de tiempo del sistema es menor que el tiempo muerto. Los parámetros calculados para el controlador del tipo PI son presentados en la tabla 3.2. Una perturbación de tipo escalón es introducida al sistema en el tiempo  $t = 20s$ . La respuesta mostrada en la figura 3.9, ilustra los resultados obtenidos por el método de Ziegler-Nichols (línea discontinua) demuestran ser lentos y oscilatorios, mientras que la respuesta que presenta el controlador PI calculado analíticamente (línea continua) es satisfactoria, con esto podemos concluir que el método empírico de Ziegler-Nichols no es conveniente cuando se trabaja con sistemas con retardo grande.*

Método	$K_p$	$T_i$
Ziegler-Nichols	0.68	4.59
Método Analítico.	0.26	1

Tabla 3.2: Parámetros obtenidos para el Controlador PI.

### 3.3. Recientes Enfoques

Los enfoque presentados en secciones anteriores han sido dirigidas al control de sistemas estable con retardo, como se demostró previamente el Predictor de Smith Clásico no es capaz de estabilizar sistemas inestables. En los últimos años se han presentado diferentes trabajos concernientes al control de sistemas con retardo, a continuación presentaremos algunos de ellos, los cuales están basados principalmente



en modificaciones realizadas al Predictor de Smith original, con el propósito principal de controlar sistemas inestables con retardo.

### 3.3.1. A. Seshagiri Rao, V. S. R. Rao y M. Chidambaram, 2007

El trabajo presentado por los autores A. Seshagiri Rao, V. S. R. Rao y M. Chidambaram, en la revista *Industrial & Engineering Chemistry Research* del año 2007, [33], titulado *Simple Analytical Design of Modified Smith Predictor with Improved Performance for Unstable First-Order Plus Time-Delay (FOPTD) Processes*, propone un método que consiste en dos controladores, los cuales tienen diferentes objetivos: estabilización del proceso inestable, seguimiento de referencias y rechazo de perturbaciones.

El diagrama de bloques del predictor de Smith modificado es mostrado en la figura 3.10, donde  $\tilde{G}_p$  es la función de transferencia de la planta inestable,  $\theta_p$  es el tiempo de retardo que presenta la planta,  $\tilde{G}_m$  representa la función de transferencia del modelo de la planta,  $\theta_m$  es el tiempo de retardo modelado. El bloque  $G_{cs}$  es el controlador para seguimiento de referencias, y  $G_{cd}$  representa al controlador diseñado para la estabilización de la planta y para la estabilización del sistema inestable. El filtro de primer orden  $G_f$  es utilizado en el controlador con el propósito de mejorar la robustez del sistema en lazo cerrado. Las funciones de transferencia del sistema, desde la entrada de referencia a la salida y desde la perturbación a la salida, asumiendo que el modelo utilizado en el predictor de Smith modificado es idéntico a la proceso real, son presentadas a continuación.

$$\frac{y}{y_r} = \frac{G_{cs}\tilde{G}_m e^{-\theta_m s}}{1 + G_{cs}\tilde{G}_m} \quad (3.20)$$

$$\frac{y}{y_d} = \frac{(1 + G_{cs}\tilde{G}_m - G_{cs}G_f\tilde{G}_m e^{-\theta_m s})\tilde{G}_m e^{-\theta_m s}}{(1 + G_{cs}\tilde{G}_m)(1 + G_{cd}\tilde{G}_m e^{-\theta_m s})} \quad (3.21)$$

Puede observarse de la ecuaciones (3.20) y (3.21) que la respuesta para el rechazo de perturbaciones está desacoplada de la respuesta para seguimiento de referencias, es decir, la función de transferencia para el rechazo de perturbaciones contiene ambos controladores ( $G_{cs}$  y  $G_{cd}$ ), mientras que la función de transferencia de sistema en lazo cerrado para el seguimiento de referencias contiene solamente el controlador  $G_{cs}$ .

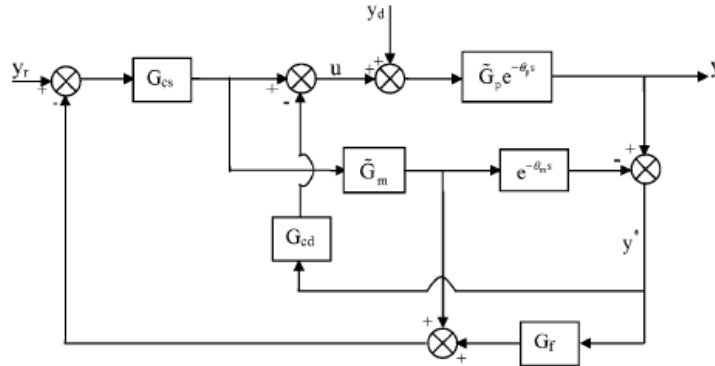


Figura 3.10: Predictor de Smith Modificado Propuesto por Rao *et. al.*

Por lo tanto, el controlador  $G_{cs}$  puede ser sintonizado para lograr un seguimiento de trayectorias satisfactorio, pero habrá que tomar en cuenta que  $G_{cs}$  afecta de igual manera el desempeño del sistema para el rechazo de perturbaciones. Debido a esto, el diseño del controlador  $G_{cd}$  se debe realizar posteriormente al diseño de controlador  $G_{cs}$ . Observe de la ecuación (3.21) que el diseño del controlador  $G_{cd}$  incluye el tiempo de retardo, debido a que la ecuación característica resultante contiene el término de retardo.

En el trabajo mencionado, el proceso inestable considerado es un sistema de primer orden inestable con retardo (FOPTD por sus siglas en inglés), el cual está caracterizado por la siguiente ecuación:

$$G_p = \tilde{G}_p e^{-\theta_p s} = \frac{K_p e^{-\theta_p s}}{\tau_p s - 1}, \quad (3.22)$$

y el modelo para el proceso está dado por:

$$G_m = \tilde{G}_m e^{-\theta_m s} = \frac{K_m e^{-\theta_m s}}{\tau_m s - 1}. \quad (3.23)$$

### Diseño del Controlador $G_{cs}$

Para el seguimiento de trayectorias, es considerado un controlador del tipo PI, cuya función de transferencia está dada por:

$$G_{cs} = k_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} \right). \quad (3.24)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.23) y (3.24) en la ecuación (3.20) obtenemos:

$$\frac{y}{y_r} = \frac{(1 + \tau_i s) e^{-\theta_m s}}{\left( \frac{\tau_m \tau_i}{k_m k_c} \right) s^2 + \left( \frac{k_m k_c - 1}{k_m k_c} \right) \tau_i s + 1}. \quad (3.25)$$

La ecuación característica en la función de transferencia (3.25) es considerada para seguir una trayectoria deseada de la forma  $(\lambda s + 1)^2 = 0$ , con lo cual, la función de transferencia del sistema se convierte en:

$$\frac{y}{y_r} = \frac{(1 + \tau_i s) e^{-\theta_m s}}{(\lambda s + 1)^2}. \quad (3.26)$$

Así, los parámetros del controlador son calculados como sigue:

$$k_c = \frac{\lambda + 2\tau_m}{k_m \lambda}, \quad (3.27)$$

$$\tau_i = \frac{\lambda^2 + 2\lambda\tau_m}{\tau_m}. \quad (3.28)$$

Donde el término  $\lambda$  es el parámetro de sintonización de lazo cerrado, el cual debe ser seleccionado de forma tal que el controlador proporcione un desempeño nominal adecuado.

## Diseño del Controlador $G_{cd}$

El objetivo principal del controlador  $G_{cd}$  es el de estabilizar el proceso inestable con retardo. Para este propósito se considera un controlador del tipo Proporcional Derivativo (PD) dado por:

$$G_{cd} = k_d(1 + \tau_d s). \quad (3.29)$$

Los parámetros del controlador  $G_{cd}$  dependen de la relación entre  $\theta_m$  y  $\tau_m$ . Estos parámetros están dados por:

$$\begin{aligned} k_d &= \frac{1}{k_m} \left( \frac{0.533}{\theta_m/\tau_m} + 0.746 \right) && \text{para } \theta_m/\tau_m \leq 0.7 \\ k_d &= \frac{1}{k_m} \left( \frac{0.49}{\theta_m/\tau_m} + 0.694 \right) && \text{para } 0.7 < \theta_m/\tau_m \leq 1.5 \\ \tau_d &= \tau_m \left[ 0.426 \left( \frac{\theta_m}{\tau_m} \right) - 0.014 \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

Puede simplificarse el cálculo del controlador PD, para su implementación práctica, obteniendo el siguiente resultado:

$$G_{cd} = k_d + 0.7 \left( \frac{\tau_m}{k_m} \right) s. \quad (3.31)$$

Con la intención de mejorar las características de robustez en el sistema en lazo cerrado, un filtro de primer orden  $G_f$  es colocado en el lazo de retroalimentación del predictor. Este filtro está caracterizado por:

$$G_f = \frac{1}{\tau_f s + 1}. \quad (3.32)$$

Después de numerosos estudios de simulación sobre diferentes tipos de procesos de primer orden inestables, se observó que un valor adecuado para la constante de tiempo del filtro de primer orden es  $\tau_f = 1.4\theta_m$ , lo cual proporciona robustez y un tiempo de levantamiento más veloz para el rechazo de perturbaciones.

## Ponderación de la Referencia

Para obtener un seguimiento de trayectorias adecuado, con un tiempo de establecimiento y sobre-impulsos reducidos, además del rechazo de perturbaciones simultáneamente, un esquema de control con dos grados de libertad es recomendado. Se sugiere el uso del término de ponderación del set-point para desplazar del eje imaginario los zeros de la función de transferencia en lazo cerrado. Con este término de ponderación, el controlador PI representado por la ecuación(3.24) debe ser modificado de la siguiente manera:

$$u(t) = k_c \left[ (\epsilon y_r - y) + \left( \frac{1}{\tau_i} \right) \int e dt \right], \quad (3.33)$$

donde  $e = y_r - y$  y el parámetro de ponderación de la referencia  $\epsilon$  se encuentra en los valores de  $0, \epsilon < 1$ . Basado en simulaciones numéricas realizadas en diferentes procesos, se sugiere que  $\epsilon$  debe tomar valores en el rango de  $0.4 - 0.6$ .

**Ejemplo 3.3.1** El siguiente ejemplo es presentado en el documento de Rao et. al., aquí se propone un sistema inestable de primer orden descrito por:

$$G_p = \frac{e^{-0.4s}}{s - 1}.$$

Basados en el método propuesto, se considera el término  $\lambda = \theta_m = 0.4$ . Por lo tanto el controlador  $G_{cs}$  obtenido es:

$$G_{cs} = 6 \left( 1 + \frac{1}{0.96} \right),$$

el controlador  $G_{cd}$  calculado es:

$$G_{cd} = 2.078 + 0.7s,$$

el parámetro de ponderación de la referencia elegido es  $\epsilon = 0.5$ . Finalmente el filtro  $G_f$  obtenido es:

$$G_f = \frac{1}{0.56s + 1}.$$

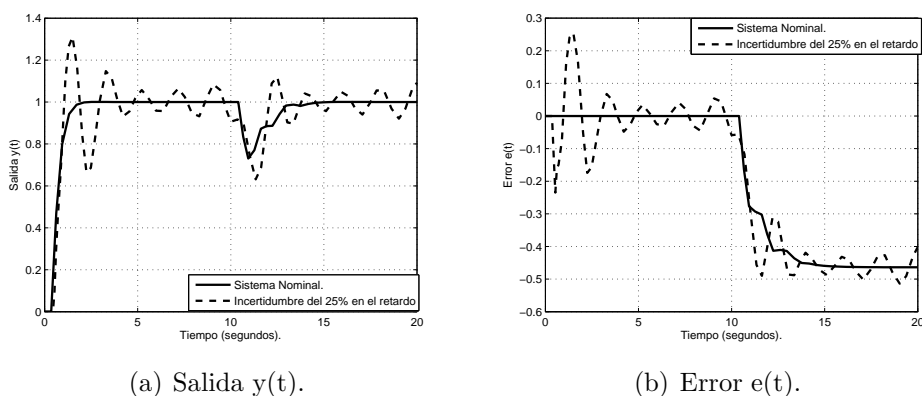


Figura 3.11: Desempeño del FSP.

Las imágenes 3.11(a) y 3.11(b) muestran las señales de salida  $y(t)$  y de error  $y^*(t)$  respectivamente, es claro que el sistema predictor de Smith modificado presenta un desempeño aceptable en cuanto a seguimiento de referencias y rechazo de perturbaciones, así como robustez ante incertidumbres. Sin embargo, esta estrategia se encuentra limitada a procesos inestables de primer orden teniendo en cuenta que la relación entre el retardo y la constante de tiempo de retardo debe cumplir la condición  $\theta_m/\tau_m \leq 1.5$ .

### 3.3.2. Normey-Rico y Eduardo Camacho, 2009

A continuación analizaremos el trabajo propuesto por los autores Julio E. Normey-Rico y Eduardo F. Camacho en el artículo llamado *Unified Approach for robust dead-time compensator design*, publicado en el Journal of Process Control del año 2009 [19].

El trabajo está basado en modificaciones hechas al Predictor de Smith (SP) original, al cual se agregan dos filtros adicionales, como se muestra en la figura 3.13.

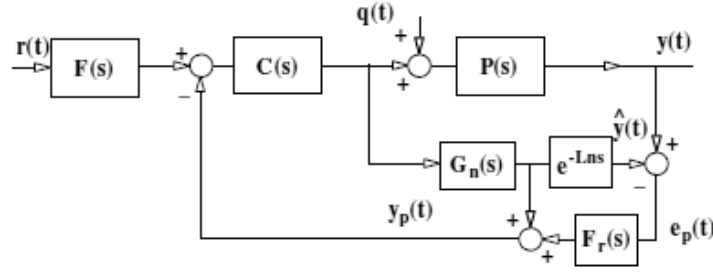


Figura 3.12: Predictor de Smith Filtrado.

El bloque  $F(s)$  es un filtro tradicional de referencia el cual mejora la respuesta para seguimiento de set-point y el bloque  $F_r(s)$  es un filtro usado para mejorar las propiedades del predictor. Debido a sus características, el Predictor de Smith Filtrado (FSP), como lo nombran sus autores, puede ser empleado para calcular un controlador tomando en cuenta la robustez, incluso para plantas inestables, mejorando las propiedades de rechazo de perturbaciones y desacoplando las respuestas de seguimiento de referencias y de perturbaciones.

En la estructura,  $P_n(s) = G_n(s)e^{-Lns}$  es el modelo del proceso,  $G_n(s)$  es el modelo libre de retardo y  $C(s)$  es el controlador primario. En esta estructura, la función de transferencia nominal (cuando el modelo de la planta es perfecto  $P_n(s) = P(s)$ ) está dada por:

$$H_r = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{F(s)C(s)P_n(s)}{1 + C(s)G_n(s)}, \quad (3.34)$$

y la función de transferencia que relaciona la salida con la perturbación está dada por:

$$H_q = \frac{Y(s)}{Q(s)} = P_n(s) \left[ 1 - \frac{C(s)P_n(s)F_r(s)}{1 + C(s)G_n(s)} \right]. \quad (3.35)$$

El procedimiento para calcular los filtros  $F(s)$ ,  $F_r(s)$  y el controlador primario  $C(s)$  para un sistema de primer orden inestable con retardo se resume a continuación. Un controlador primario PI caracterizado por la función de transferencia (3.36), es calculado para el seguimiento de referencias.

$$C(s) = \frac{K_c(1 + sT_i)}{T_i s}. \quad (3.36)$$

Tomando en cuenta un modelo nominal de la planta con la forma:

$$G_n(s) = \frac{K}{T_s - 1}, \quad (3.37)$$

La función de transferencia nominal en lazo cerrado puede escribirse como:

$$H_r = \frac{1 + sT_i}{1 + sT_i} e^{-Lns}, \quad (3.38)$$

Siendo  $T_r$  la constante de tiempo deseada del sistema en lazo cerrado. Así mismo, un filtro de referencia  $F(s)$  con la siguiente función de transferencia es usado:

$$F(s) = \frac{1 + sT_r}{1 + sT_i}. \quad (3.39)$$

Para el rechazo de perturbaciones, teniendo una raíz de la ecuación característica del sistema en lazo abierto ubicada en  $s = 1/T$ , obtenemos el filtro  $F_r$  dado por:

$$F_r = \frac{(1 + sT_r)^2}{1 + sT_i} \frac{1 + s\beta_1}{(1 + sT_o)^2}, \quad (3.40)$$

donde,

$$\beta_1 = T \left[ \left(1 + \frac{T_o}{T}\right)^2 e^{L_n/T} - 1 \right], \quad (3.41)$$

siendo  $T_o$  una constante elegida para definir la velocidad de la respuesta.

**Ejemplo 3.3.2** *A continuación, un ejemplo presentado en [19] se ilustrará, se trata del problema de control de la concentración en un reactor inestable, el comportamiento de las dinámicas de dicho sistema puede ser descrito por el modelo de Cholette.*

$$\frac{dC}{dt} = \frac{F(t)}{V} [C_i - C(t)] - \frac{k_1 C(t)}{[k_2 C(t) + 1]^2}, \quad (3.42)$$

donde  $C(t)$  es la concentración de salida,  $C_i(t)$  es la concentración de entrada,  $F(t)$  es el flujo de entrada,  $V$  es el volumen del reactor y los parámetros  $k_1 = 10$  l/s,  $k_2 = 10$  l/mol y  $V = 1$  l. Este reactor tiene un punto de operación inestable para  $F = 0.0333$  l/s y  $C_i = 3.288$  mol/l en  $C = 1.316$  mol/l.

Para propósitos de control  $C_i$  es la variable manipulada y  $C$  es la variable del proceso. También, como el transductor de la concentración necesita un tiempo para proporcionar la variable de salida, un tiempo muerto de 20s será considerado.

Este modelo puede ser linealizado en el punto de operación obteniendo la siguiente función de transferencia:

$$P(s) = \frac{3.433e^{-20s}}{103.1s - 1}, \quad (3.43)$$

donde la constante de tiempo del sistema  $T = 103.1$  y el tiempo de retardo  $L_n = 20$  están dados en segundos.

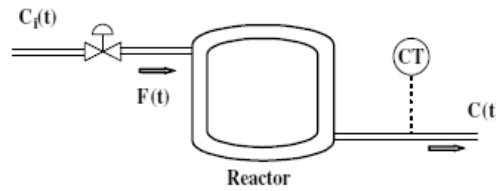


Figura 3.13: Reactor Químico.

Usando  $P(s)$  como modelo de la planta y siguiendo el procedimiento descrito anteriormente para calcular los filtros y el controlador correspondiente al sistema de primer orden inestable con retardo, la respuesta para el seguimiento de referencias se define con un tiempo de respuesta  $T_r = L_n = 20$  s, con lo cual se obtiene:

$$C(s) = \frac{3.29(43.87s + 1)}{43.87s}; \quad F(s) = \frac{20s + 1}{43.87s + 1}$$

Para este ejemplo, se selecciona el parámetro  $T_o = 26$ , con lo cual obtenemos el valor de la constante  $\beta_1 = 93.16$ , u así:

$$F_r(s) = \frac{(20s + 1)^2(93.16s + 1)}{(43.87s + 1)(26s + 1)^2}$$

La figura 3.14 muestra la respuesta del sistema cuando es controlado mediante el Predictor de Smith Filtrado propuesto por Normey-Rico y Camacho, la salida  $y(t)$  y la señal de error  $e_p(t)$  son estudiadas respectivamente, la línea continua indica el sistema trabajando ante condiciones iniciales iguales a cero, la línea discontinua presenta el comportamiento del sistema cuando la condiciones iniciales entre el sistema predictor y la planta original son diferentes, esto es  $y(0) - \hat{y}(0) = 0.001$ . Es claro que el sistema presenta un desempeño confiable en cuanto a seguimiento de referencias y rechazo de perturbaciones, sin embargo, su funcionamiento se ve afectado claramente cuando las condiciones iniciales entre el sistema original y el modelo usado como base del predictor son diferentes, sin importar que dicha diferencia sea infinitesimal, provocando una respuesta inadecuada llegando incluso a la inestabilidad.

La desventaja que presenta este sistema al no presentar robustez ante condiciones iniciales diferentes es un problema debido a que, en la práctica es imposible asegurar que un sistema o proceso arranque con condiciones iniciales idénticas al sistema predictor.

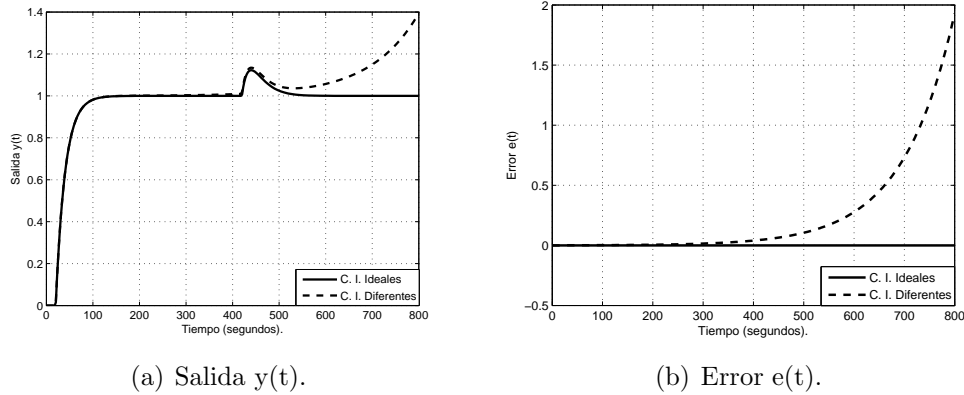


Figura 3.14: Desempeño del FSP.

---

# ESTRATEGIA DE CONTROL PROPUESTA

---

Este capítulo está dedicado a presentar el principal aporte del trabajo realizado en esta tesis. Comenzaremos con la definición de la clase de sistemas estudiados en el trabajo, estudiando algunas propiedades de este tipo de procesos. Más tarde estudiaremos algunos resultados preliminares que han sido de gran utilidad en el desarrollo del trabajo. Finalmente, se presentará la estructura de control propuesta, la cuál tiene la finalidad de estabilizar la clase de sistemas definidos.

## 4.1. Clase de Sistemas

Los sistemas con retardo, también llamados sistemas hereditarios, sistemas con memoria, sistemas con tiempo-muerto, etc. , abundan en el mundo. Los retardos de tiempo muchas veces son usados en ingeniería para modelar una gran cantidad de sistemas, donde la propagación y transmisión de material o energía están involucradas. La presencia de retardos hace que el análisis y el diseño de controladores se vuelva mucho más complicado. Los retardos en el tiempo aparecen en el modelado de diversos tipos de sistemas, por ejemplo, procesos químicos, cadenas de manufactura, sistemas económicos, etc., son originados por diferentes mecanismos tales como transporte de material, lazos de reciclaje, [17], [41], [12]. Adicionalmente, los sensores, actuadores y las redes de comunicación que se encuentran involucradas en los lazos de control comúnmente introducen retardos [24]. Los sistemas con retardo muchas veces son utilizados para aproximar de sistemas de alto orden [36]. Cuando la señal de entrada (o salida) de algún sistema se ve afectada por un retardo, un enfoque común es eliminar el efecto del retardo mediante una adecuada retroalimentación. Una alternativa más consiste en aproximaciones las cuales pueden usar expansiones en series de Taylor o de Padé del operador exponencial del retardo. Para sistemas lineales, la estrategia clásica es el llamado Compensador-Predictor de Smith, el cual proporciona una estimación futura de las salidas para retro-alimentarla como una función de control, como se ha mencionado con anterioridad, la principal limitación que presenta esta estrategia es que está restringida para plantas estables, [22], [37].

Diversas modificaciones han sido realizadas al Predictor de Smith Clásico para contrarrestar esta limitación y para tratar con sistemas inestables en lazo abierto con retardo. Por ejemplo, Seshagiri *te al.*, [33], presenta una modificación eficiente para controlar sistemas inestables de primer orden con retardo. Con una perspectiva diferente, Normey-Rico y Camacho en [20] proponen una modificación a la estructura original del Predictor de Smith con el fin de tratar con sistemas retardados de primer orden inestables. Usando una estructura similar, el resultado es extendido a sistemas



de alto orden con retardo en [19]. En ambos trabajos, es posible realizar un análisis de robustez para demostrar que en el caso sistemas inestables, la estabilidad interna no se encuentra garantizada. De hecho, la señal del error de estimación es inestable, lo que da como resultado que, cuando existe una diferencia mínima entre las condiciones iniciales en el sistema predictor y el proceso a controlar se produce una señal de salida no acotada. Cabe mencionar que en la práctica, es imposible medir con exactitud las condiciones iniciales en la planta para asignarlas al sistema predictor de Smith modificado.

Existen diversas unidades de procesamiento químico en la industria las cuales pueden modelarse como sistemas de segundo orden, entre algunos ejemplos cabe mencionar reactores de polimerización, tanques reactores de mezcla continua, bio-reactores, etc. los cuales pueden ser representados como sistemas de segundo orden inestables con retardo. Debido a esto, recientemente se ha presentado especial atención para lograr la estabilización y el control de dichos sistemas, [23], [34].

#### 4.1.1. Formulación del Problema

Considere la siguiente clase de sistemas lineales invariantes en el tiempo, con una entrada - una salida (SISO), con retardo en el tiempo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\tau s} = G(s) e^{-\tau s}. \quad (4.1)$$

- $U(s)$  es la señal de entrada.
- $Y(s)$  es la señal de salida.
- $\tau \geq 0$  es el tiempo de retardo.
- $N(s)$  es un polinomio representado en la variable compleja  $s$ .
- $D(s)$  es un polinomio representado en la variable compleja  $s$ .
- $G(s)$  representa al proceso libre de retardo.

Al aplicar una estrategia de control *tradicional*, basada en una retroalimentación de la salida de la siguiente manera:

$$U(s) = [R(s) - Y(s)]Q(s). \quad (4.2)$$

Produce un sistema en lazo cerrado dado por la siguiente ecuación:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Q(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + Q(s)G(s)e^{-\tau s}}. \quad (4.3)$$

El término exponencial  $e^{-\tau s}$ , ubicado en el denominador de la función de transferencia (4.3), es decir, en la ecuación característica del sistema en lazo cerrado, conduce a un sistema con un infinito número de polos, donde las propiedades de estabilidad del sistema en lazo cerrado deben de ser estudiadas cuidadosamente.

En este capítulo se propone un sistema Observador-Controlador con la finalidad de obtener un comportamiento en lazo cerrado estable para los sistemas de segundo orden inestables caracterizados por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{(s - a)(s - b)} e^{-\tau s}. \quad (4.4)$$

Donde, sin perder generalidad,  $a \geq b > 0$ ,  $\tau > 0$ . El esquema de control propuesto se ha diseñado basados en la teoría tradicional de observadores de estado, así, únicamente el modelo del sistema y dos ganancias proporcionales son necesarias para obtener una estimación adecuada de una variable de estado del sistema libre de retardo, la cual será utilizada más tarde como señal de control en la estructura estabilizante de la planta original.

A continuación se presentaran diferentes representaciones del sistema representado por la ecuación (4.4), esto con la finalidad de estudiar las propiedades de observabilidad y de controlabilidad de la clase de sistemas estudiados en este trabajo, las cuales por tratarse de un sistema con retardo, son expresadas de manera diferente a los sistemas lineales invariantes en el tiempo, para esto utilizaremos las definiciones de observabilidad y controlabilidad dadas en el capítulo 2 de esta tesis.

## Representación en Espacio de Estados

Considere una representación en espacio de estados para el sistema inestable de segundo orden con retardo (4.4), ilustrada por la figura 4.1 y caracterizada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Donde  $x(t) = [ w(t) \quad x_2(t) ]^T$  y la matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$  y  $C$  están dadas por:

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [ 0 \quad 1 ]. \end{aligned}$$

Observe que la representación en espacio de estados (4.1) puede volver a su forma en función de transferencia (4.4) mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - (A_0 + A_1e^{-\tau s}))^{-1}B \quad (4.6)$$

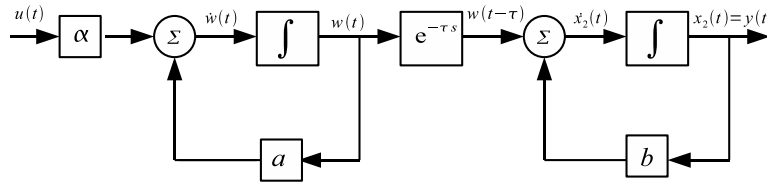


Figura 4.1: Representación en Espacio de Estados.

## Modelos en Anillos

Es posible expresar el sistema (4.4) mediante una representación de modelo en anillos (2.49), mostrada en el capítulo 2 mediante la siguiente expresión:

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\nabla)x(t) + B(\nabla)u(t) \\ y(t) = C(\nabla)x(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

Donde

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ \nabla & b \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \quad 1] x(t) \end{cases} \quad (4.8)$$

## Controlabilidad

Es posible expresar las propiedades de controlabilidad del sistema (4.4) por medio de el modelo en anillos (4.8), con la ayuda del submódulo de controlabilidad expresado de la siguiente forma.

$$\langle A(\nabla)/B(\nabla) \rangle = \left[ \begin{array}{c|c} \alpha & \alpha a \\ \hline 0 & \alpha \nabla \end{array} \right]. \quad (4.9)$$

Así, es posible deducir que el sistema (4.4) es *débilmente controlable*, ya que satisface las caracterizaciones dadas en la Definición 2.6 expresada en el capítulo 2, pero no es *fuertemente controlable*, esto es, el sistema es controlable solo a partir del instante  $t = \tau$ .

## Observabilidad

Finalmente, podemos expresar las propiedades de observabilidad para el sistema (4.4) por medio del submódulo de observabilidad del modelo en anillo (4.8), dado por la siguiente expresión:

$$\left\langle \frac{C(\nabla)}{A(\nabla)} \right\rangle = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \hline \nabla & b \end{array} \right]. \quad (4.10)$$

Así, es posible decir que el sistema (4.4) es *espectralmente observable* ya que satisface las caracterizaciones dadas en la Definición 2.9, i.e.

$$\text{rank} = \begin{bmatrix} s - a & 0 \\ -e^{-\tau s} & s - b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Entonces el sistema (4.4) es también *débilmente observable*, pero no *fuertemente observable*.

## 4.2. Resultados Preliminares

Esta sección está dedicada a presentar algunos resultados preliminares que han sido de gran utilidad para obtener el resultado principal en este trabajo.

### 4.2.1. Sistemas de Primer Orden Inestables con Retardo

Considere el sistema definido por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-\tau s} = \frac{\alpha}{s - \sigma}e^{-\tau s}. \quad (4.11)$$

Con  $\sigma > 0$  y  $\tau \geq 0$ . Como un resultado preliminar, se declaran las condiciones para la existencia de una retroalimentación estática de la salida tal que, la estabilidad del sistema en lazo cerrado se garantice.

**Lema 4.1** *Considere el sistema inestable de primer orden con retardo definido por la ecuación (4.11), y la ley de control mostrada a continuación:*

$$U(s) = R(s) - kY(s). \quad (4.12)$$

La cual produce un sistema en lazo cerrado de la siguiente forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{s - \sigma + k\alpha e^{-\tau s}}. \quad (4.13)$$

Existe una ganancia proporcional  $k$  tal que el sistema en lazo cerrado (4.13) es estable si y sólo si:

$$\tau < \frac{1}{\sigma}.$$

Este resultado ha sido ampliamente estudiado y su demostración puede ser examinada y validada en diversos trabajos tales como, [25], [13], [11], [17], entre otros.

**Demostración.** La siguiente demostración está basada en un análisis en tiempo discreto, y es presentada en [11]. Considere la discretización del sistema continuo representado por la ecuación (4.11) utilizando un retenedor de orden cero y un período de muestreo  $T = \frac{\tau}{n}$  con  $n \in \mathbb{N}$ , obteniendo la siguiente función de transferencia:

$$G(z) = \frac{\alpha (e^{\sigma \frac{\tau}{n}} - 1)}{\sigma z^n (z - e^{\sigma \frac{\tau}{n}})}. \quad (4.14)$$

Aplicando una retroalimentación estática de la salida al sistema (4.14), se obtiene un sistema en lazo cerrado:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\frac{\alpha}{\sigma} (e^{\sigma \frac{\tau}{n}} - 1)}{z^n (z - e^{\sigma \frac{\tau}{n}}) + k \frac{\alpha}{\sigma} (e^{\sigma \frac{\tau}{n}} - 1)}. \quad (4.15)$$

La ecuación característica relacionada con el sistema en lazo cerrado (4.15) es:

$$z^n (z - e^{\sigma \frac{\tau}{n}}) + k \frac{\alpha}{\sigma} (e^{\sigma \frac{\tau}{n}} - 1) = 0. \quad (4.16)$$

Considérese ahora el diagrama del lugar geométrico de las raíces del sistema (4.14), (mostrado en la figura 4.2). El sistema en lazo abierto cuenta con  $n$  polos en el origen y uno en el punto  $z = e^{\sigma \frac{\tau}{n}}$ , dado que no existen ceros finitos, tenemos  $n + 1$  trayectorias hacia el infinito,  $n - 1$  comienzan en el origen y las dos trayectorias restantes parten de un punto localizado sobre el eje real entre el origen y el punto  $z = e^{\sigma \frac{\tau}{n}}$ . Este punto puede ser localizado fácilmente considerando la ecuación siguiente:

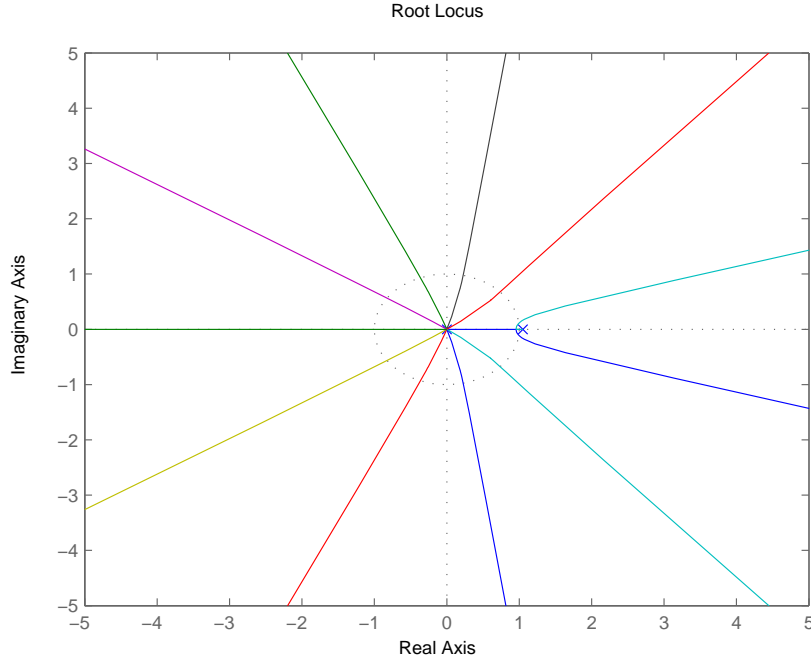


Figura 4.2: Lugar Geométrico de las Raíces.

$$\frac{dk}{dz} = \frac{d}{dz} \left[ -\frac{z^n (z - e^{\sigma \frac{\tau}{n}})}{\alpha} \sigma (e^{\sigma \frac{\tau}{n}} - 1) \right] = 0. \quad (4.17)$$

La cual puede escribirse de la siguiente manera:

$$z^{n-1} \left( z - \frac{n}{n+1} e^{\sigma \frac{\tau}{n}} \right) = 0. \quad (4.18)$$

La ecuación (4.18) tiene  $n - 1$  raíces en el origen y una raíz en  $z = \frac{n}{n+1} e^{\sigma \frac{\tau}{n}}$ . Si el punto de ruptura sobre el eje real se encuentra dentro del círculo unitario, el sistema en lazo cerrado tendrá una región de estabilidad, es decir, existirá una ganancia estabilizadora  $k$ . De lo contrario, el sistema será inestable para cualquier valor de  $k$ .

Las propiedades de estabilidad del sistema en tiempo continuo (4.11) y (4.13) son obtenidas considerando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , o equivalente, cuando  $T = 0$ , esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} e^{\sigma \frac{\tau}{n}} = 1. \quad (4.19)$$

Dado que en este punto se encuentra localizado el límite de estabilidad, no es difícil ver que si  $\sigma\tau < 1$ , en otras palabras  $\tau < \frac{1}{\sigma}$ , existe una ganancia  $k$  que estabiliza el sistema en lazo cerrado, es decir, el límite tiende a 1 por la izquierda. En el caso contrario, cuando  $\sigma\tau \geq 1$ , no existe una ganancia  $k$  capaz de estabilizar el sistema en lazo cerrado, es decir, el límite tiende a 1 por la derecha [25]. ■

**Observación 4.1** *En la prueba del Lema anterior se hace uso del hecho de que el modelo en tiempo discreto de un sistema en tiempo continuo, coincide con el sistema*

continuo cuando  $T \rightarrow 0$  (considerando un período de muestreo y un retenedor de orden cero).

## 4.2.2. Sistemas de Segundo Orden con un Polo Inestable y Retardo

Considere ahora el sistema de segundo orden con retardo caracterizado por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-\tau s} = \frac{\alpha}{(s - \sigma)(s + \phi)}e^{-\tau s}. \quad (4.20)$$

Siendo  $\sigma, \phi > 0$ . Observe que el sistema tiene solo un polo inestable. Considerando la retroalimentación estática de la salida (4.12), conduciendo al siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{[(s - \sigma)(s + \phi)] + k\alpha e^{-\tau s}}. \quad (4.21)$$

Las condiciones que aseguran la existencia de una ganancia proporcional tal que el sistema en lazo cerrado (4.21) es estable han sido estudiadas en diversos trabajos como, [15], [16] y son enunciadas en el siguiente Lema.

**Lema 4.2** *Considere el sistema con retardo dado por la ecuación (4.20) y el sistema en lazo cerrado (4.21) resultante al aplicar la retroalimentación estática de la salida (4.12). Existe una ganancia proporcional  $k$  tal que el sistema en lazo cerrado (4.21) es estable si y solamente si:*

$$\tau < \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\phi}.$$

**Demostración.** La siguiente demostración está basada en un análisis en el dominio de la frecuencia y ha sido presentada por González en [16].

El criterio de estabilidad de Nyquist establece que, al cerrar el lazo con una ganancia proporcional  $k$ , el sistema en lazo cerrado será estable si  $Z = 0$  en la ecuación:

$$Z = N + P.$$

Siendo  $P$  el número de polos de  $G(s)$  en el semiplano derecho del sistema en lazo abierto ( $P = 1$  en este caso) y  $N$  el número de rodeos a el punto  $(-1, j0)$  en sentido horario ( $N$  negativa en sentido contrario a las manecillas del reloj) en el diagrama de Nyquist. En el caso estudiado en el Lema 4.1, expresado anteriormente, existe una ganancia proporcional  $k$  tal que el sistema en lazo cerrado es estable cuando el diagrama de Nyquist realiza un rodeo en sentido horario al punto  $(-1, j0)$ , como es mostrado en la figura 4.3. En caso contrario, cuando la condición de estabilidad para el sistema no se cumple, es decir cuando  $\tau \geq \frac{1}{\sigma}$ , no existen rodeos en sentido anti-horario como se ilustra en la figura 4.4. En este caso, el ángulo en función de la frecuencia  $\omega$  está dado por:

$$\angle G(j\omega) = -(180^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma}) - (\omega\tau). \quad (4.22)$$

Puede decirse entonces que la condición dada por la expresión  $\tau < \frac{1}{\sigma}$  es equivalente a pedir que el ángulo tenga (para alguna frecuencia) un valor superior a  $-180^\circ$ ,

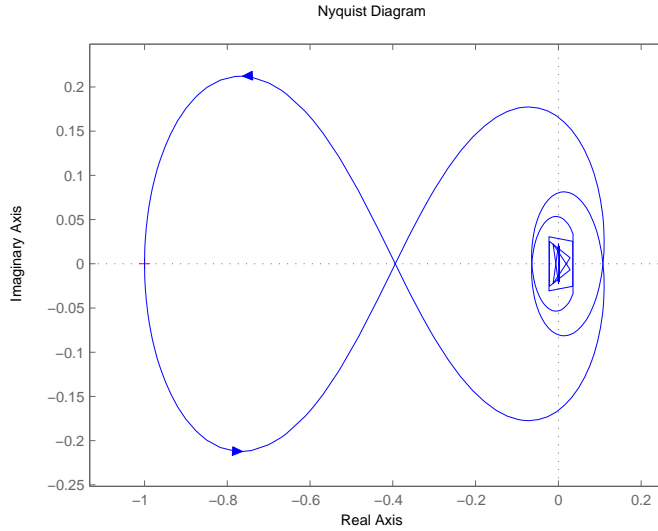


Figura 4.3: Diagrama de Nyquist: Sistema que cumple las condiciones de estabilidad dadas en el Lema 4.1.

es decir,  $\angle G(j\omega) > -180^\circ$ , teniendo así un rodeo en sentido anti-horario al punto  $(-1, j0)$  en el diagrama de Nyquist. Considerando que para frecuencias pequeñas se cumple la igualdad  $\tan^{-1} \omega\phi \approx \omega\phi$ , no es difícil concluir la condición de estabilidad dada en el Lema 4.1.

Tomando en cuenta ahora el sistema descrito por la ecuación (4.20), es fácil observar que la condición de Nyquist para tal sistema es la misma (un rodeo en el sentido contrario a las manecillas del reloj al punto  $(-1, j0)$ ), para este caso, el ángulo en función de la frecuencia  $\omega$  está dado por:

$$\angle G(j\omega) = -(180^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma}) - (\tan^{-1} \frac{\omega}{\phi}) - (\omega\tau). \quad (4.23)$$

Como se mencionó antes, para frecuencias pequeñas  $\tan^{-1} \omega\phi \approx \omega\phi$  y partiendo de la expresión  $\angle G(j\omega) > -180^\circ$ , no es difícil concluir que existe una ganancia  $k$  tal que el sistema en lazo cerrado (4.21) es estable si y sólo si:

$$\tau < \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\phi}$$

Note que cuando el valor del parámetro  $c$  va decreciendo, el rodeo al punto  $(-1, j0)$  en sentido anti-horario en el diagrama de Nyquist se hace más pequeño, hasta desaparecer, es decir, hasta dejar de cumplir la condición de estabilidad como es mostrado en la figura 4.5 ■.

### 4.2.3. Sistemas de Alto Orden con un Polo Inestable y Retardo

Finalmente consideremos un sistema con un polo inestable,  $n$  polos estables y un retardo en la salida, dado por la siguiente función de transferencia:

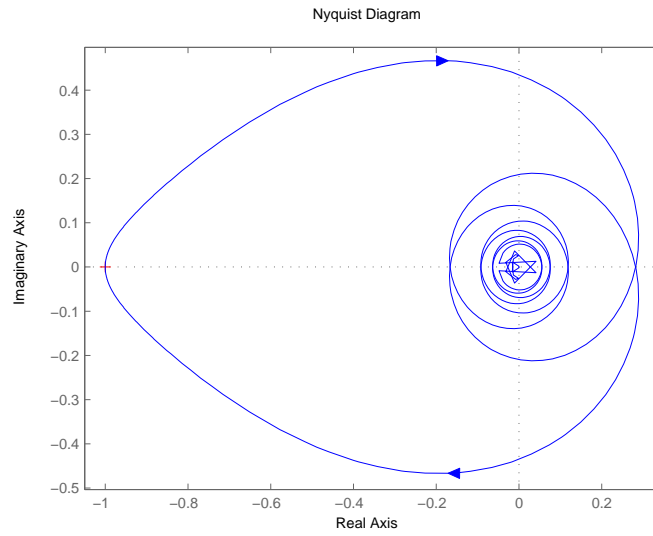


Figura 4.4: Diagrama de Nyquist: Sistema que no cumple las condiciones de estabilidad dadas en el Lema 4.1.

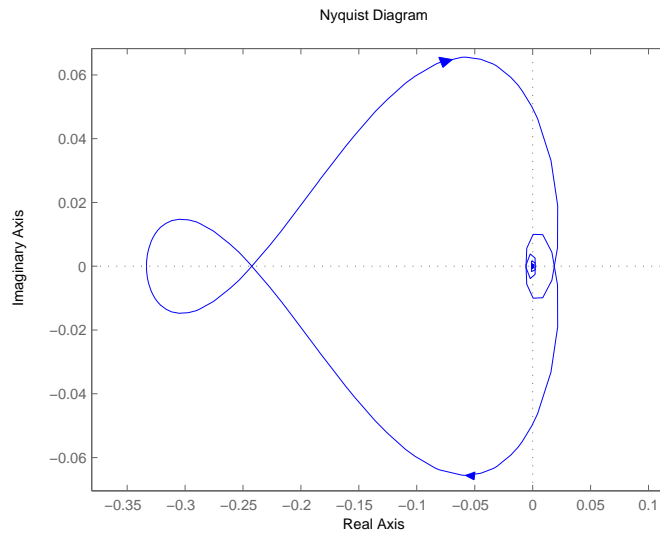


Figura 4.5: Diagrama de Nyquist: Sistema que cumple las condiciones de estabilidad dadas en el Lema 4.2 al ir decreciendo el parámetro  $\phi$ .



$$G(s) = \frac{\alpha}{(s - \sigma)(s + \phi_1)(s + \phi_2)\dots(s + \phi_n)} e^{-\tau s}. \quad (4.24)$$

Observe que el sistema cuenta nuevamente con un solo polo inestable, considerando la retroalimentación estática de la salida (4.12), conduciendo al siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{[(s - \sigma)(s + \phi_1)(s + \phi_2)\dots(s + \phi_n)] + k\alpha e^{-\tau s}}. \quad (4.25)$$

El siguiente resultado ha sido estudiado y demostrado en diferentes trabajos tales como [14] y [1].

**Lema 4.3** *Considere el sistema inestable con retardo 4.24 y la retroalimentación estática de la salida 4.12. Existe una ganancia proporcional  $k$  tal que el sistema en lazo cerrado es estable si y sólo si:*

$$\tau < \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\phi_i}.$$

**Demostración.** La siguiente demostración está basada en un análisis en el dominio de la frecuencia y ha sido presentada por Pedraza en [1]. Mediante un punto de vista similar a la demostración del Lema 4.2, considere ahora el sistema caracterizado por la función de transferencia siguiente:

$$G(s) = \frac{\alpha}{(s - \sigma)(s + \phi_1)(s + \phi_2)} e^{-\tau s}. \quad (4.26)$$

Nuevamente, es fácil notar que la condición de Nyquist es similar, es decir, se requiere que la trayectoria de Nyquist realice un rodeo en sentido anti-horario al punto  $(-1, j0)$ . Por lo tanto, el ángulo en función a la frecuencia  $\omega$  para tal sistema está dado por:

$$\angle G(j\omega) = -(180^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma}) - (\tan^{-1} \frac{\omega}{\phi_1}) - (\tan^{-1} \frac{\omega}{\phi_2}) - (\omega\tau). \quad (4.27)$$

Como se mencionó antes, para frecuencias pequeñas  $\tan^{-1} \omega\phi \approx \omega\phi$  y partiendo de la expresión  $\angle G(j\omega) > -180^\circ$ , no es difícil concluir que existe una ganancia  $k$  tal que estabiliza el sistema (4.26) mediante una retroalimentación estática de la salida si y sólo si:

$$\tau < \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\phi_1} - \frac{1}{\phi_2}.$$

La reflexión anterior puede ser generalizada para cualquier  $n \in \mathbb{R}$ , concluyendo así que existe una ganancia  $k$  tal que el sistema en lazo cerrado (4.25) es estable si y sólo si:

$$\tau < \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\phi_i}. \quad (4.28)$$

■

### 4.3. Estrategia de Control Propuesta

A continuación se presentará el resultado principal de este trabajo, un controlador basado en un esquema observador con el propósito de estabilizar sistemas inestables de segundo orden con retardo caracterizados por la función de transferencia (4.4). Tal estructura observador-controlador permite obtener la señal  $\hat{w}(t)$ , una estimación de la señal  $w(t)$ , una variable interna del sistema antes de ser retardada, para ser utilizada más tarde como señal de control para el proceso original.

Como primer paso, se enuncian las condiciones necesarias y suficientes que aseguran estabilidad para el esquema controlador y el esquema observador de manera separada. Estas condiciones se utilizarán más tarde para expresar las condiciones necesarias y suficientes que aseguran la existencia de la estructura estabilizante propuesta en este trabajo.

#### 4.3.1. Esquema Controlador

Primero, tomemos en cuenta el esquema de control mostrado en la figura 4.6, definiendo los subsistemas  $G_a$  y  $G_b$  de la siguiente forma:

$$G_a = \frac{\alpha}{s - a}$$

$$G_b = \frac{1}{s - b}.$$

Donde, sin pérdida de generalidad  $a \geq b$ . Las condiciones necesarias y suficientes que aseguran la existencia de constantes  $k_1$  y  $k_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable son enunciadas en el siguiente Lema.

**Teorema 4.1** *Considere el sistema inestable de segundo orden con retardo (4.4) y el esquema controlador mostrado en la figura 4.6. Existen ganancias proporcionales  $k_1$  y  $k_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable si y sólo si:*

$$\tau < \frac{1}{b}.$$

**Demostración.** El principal objetivo de esta prueba es aplicar las condiciones dadas en los Lemas 4.1 y 4.2 al sistema controlador en lazo cerrado mostrado en la figura 4.6.

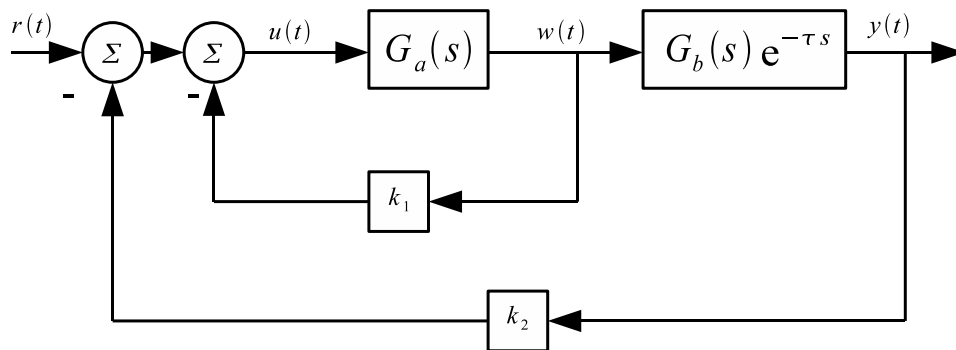


Figura 4.6: Esquema Controlador.

*Suficiencia.* Considere el hecho de que el sistema cumple con la condición:

$$\tau < \frac{1}{b},$$

entonces, existe una constante positiva  $\beta$  tal que:

$$\tau = \frac{1}{b} - \beta,$$

por lo tanto, siempre existe una ganancia  $k_1$  tal que:

$$\beta > \frac{1}{\alpha k_1 - a} > 0,$$

de esta forma, es claro que la siguiente desigualdad se cumple:

$$\tau < \frac{1}{b} - \frac{1}{\alpha k_1 - a},$$

tomando en cuenta las condiciones expresadas en el Lema 4.2, con  $\sigma = b$  y  $\phi = \alpha k_1 - a$ , existe una ganancia  $k_2$  tal que el sistema en lazo cerrado mostrado en la figura 4.6 es estable.

*Necesidad.* Considere el sistema con retardo (4.4) y la estructura de control mostrada en la figura 4.6, con ganancias proporcionales  $k_1$  y  $k_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable. La función de transferencia del sistema en lazo cerrado está caracterizada por la siguiente ecuación:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s + \phi)(s - b) + \alpha k_2 e^{-\tau s}}. \quad (4.29)$$

Donde  $\phi = \alpha k_1 - a$ . Es conocido que una ganancia  $k_2$  que estabiliza el sistema con retardo (4.29), debe estabilizar de igual forma el sistema libre de retardo (vea por ejemplo [10], [17] para mayor detalle), lo cual implica que  $\phi > 0$ . Tomando en cuenta las condiciones de estabilidad dadas en el Lema 4.2,

$$\tau < \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\phi},$$

con  $\sigma = b$ . Note que el término  $\phi$  es un parámetro libre del sistema y es función de  $k_1$ . Considere una ganancia  $k_1$  tal que:

$$\beta > \frac{1}{\phi} > 0.$$

Denotando

$$\beta = \frac{1}{\sigma} - \tau,$$

Es posible concluir la siguiente desigualdad:

$$\tau = \frac{1}{\sigma} - \beta < \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{b}.$$

■

**Observación.** Es posible realizar el cálculo de las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  mediante un análisis del lugar de las raíces y un estudio en el dominio de la frecuencia, por ejemplo un diagrama de Nyquist. Estas herramientas de análisis son ampliamente estudiadas en la Teoría de Control y se encuentran disponibles en el software MATLAB.

### 4.3.2. Esquema Observador

En la mayor parte de los procesos existentes en la práctica, algunas de las variables de estado del sistema no pueden ser medidas, por lo tanto el esquema de control mostrado en la figura 4.6 no puede ser implementado. Debido a esto, un esquema observador basado en la estrategia de control de inyección de la salida es implementado con el propósito de estimar las variables de estado del proceso (Ver figura 4.7). La estabilidad del esquema observador es abordada en el siguiente Lema.

**Teorema 4.2** *Considere el sistema inestable con retardo dado por la ecuación (4.4) y el esquema de control basado en la estrategia de inyección de la salida mostrada en la figura 4.7. Existen ganancias  $g_1$  y  $g_2$  tal que el sistema en lazo cerrado es estable si y sólo si:*

$$\tau < \frac{1}{a}$$

**Demostración.** El principal objetivo de esta prueba es aplicar las condiciones dadas en los Lemas 4.1 y 4.2 al sistema controlador en lazo cerrado mostrado en la figura 4.7.

*Suficiencia.* Considere el hecho de que el sistema cumple con la condición:

$$\tau < \frac{1}{a},$$

entonces, existe una constante positiva  $\beta$  tal que:

$$\tau = \frac{1}{a} - \beta,$$

por lo tanto, siempre existe una ganancia  $g_2$  tal que:

$$\beta > \frac{1}{g_2 - b} > 0,$$

de esta forma, es claro que la siguiente desigualdad se cumple:

$$\tau < \frac{1}{a} - \frac{1}{g_2 - b},$$

tomando en cuenta las condiciones expresadas en el Lema 4.2, con  $\sigma = a$  y  $\phi = g_2 - b$ , existe una ganancia  $g_1$  tal que el sistema en lazo cerrado mostrado en la figura 4.6 es estable.

*Necesidad.* Considere el sistema con retardo (4.4) y la estructura de control mostrada en la figura 4.7, con ganancias proporcionales  $g_1$  y  $g_2$  tales que el sistema en lazo

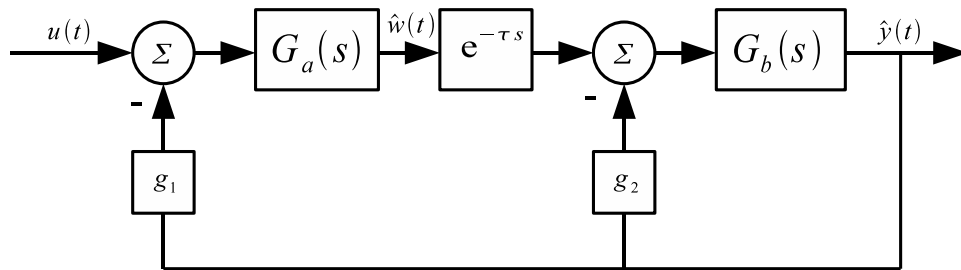


Figura 4.7: Esquema Observador.

cerrado es estable. La función de transferencia del sistema en lazo cerrado está caracterizada por la siguiente ecuación:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s-a)(s+\phi) + \alpha g_1 e^{-\tau s}}. \quad (4.30)$$

Donde  $\phi = g_2 - b$ . Es conocido que una ganancia  $g_1$  que estabiliza el sistema con retardo (4.30), debe estabilizar de igual forma el sistema libre de retardo (vea por ejemplo [10], [17] para mayor detalle), lo cual implica que  $\phi > 0$ . Tomando en cuenta las condiciones de estabilidad dadas en el Lema 4.2,

$$\tau < \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\phi},$$

con  $\sigma = a$ . Note que el término  $\phi$  es un parámetro libre del sistema y es función de  $g_2$ . Considere una ganancia  $g_2$  tal que:

$$\beta > \frac{1}{\phi} > 0.$$

Denotando

$$\beta = \frac{1}{\sigma} - \tau,$$

Es posible concluir la siguiente desigualdad:

$$\tau = \frac{1}{\sigma} - \beta < \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{a}.$$

■

**Observación.** Al igual que en el caso del controlador, es posible realizar el cálculo de las ganancias  $g_1$  y  $g_2$  mediante un análisis del lugar de las raíces y un estudio en el dominio de la frecuencia, por ejemplo un diagrama de Nyquist. Estas herramientas de análisis son ampliamente estudiadas en la Teoría de Control y se encuentran disponibles en el software MATLAB.

### 4.3.3. Esquema Observador-Controlador

Finalmente, el resultado principal de este trabajo es presentado, la figura 4.8 muestra la estrategia de control propuesta en este trabajo, donde el esquema observador permite estimar las variables de estado del proceso original. Es importante enfatizar que, en el esquema de control propuesto, solamente cuatro ganancias proporcionales son necesarias para obtener un comportamiento estable del sistema en lazo cerrado.

El siguiente resultado presentado a continuación es consecuencia de los resultados previos:

**Corolario 4.1** *Considere la estructura observador-controlador mostrada en la figura 4.8 y el sistema inestable de segundo orden con retardo caracterizado por la función de transferencia (4.4). Existen ganancias proporcionales  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  tales que el comportamiento del sistema en lazo cerrado es estable si y sólo si:*

$$\tau < \frac{1}{a}$$

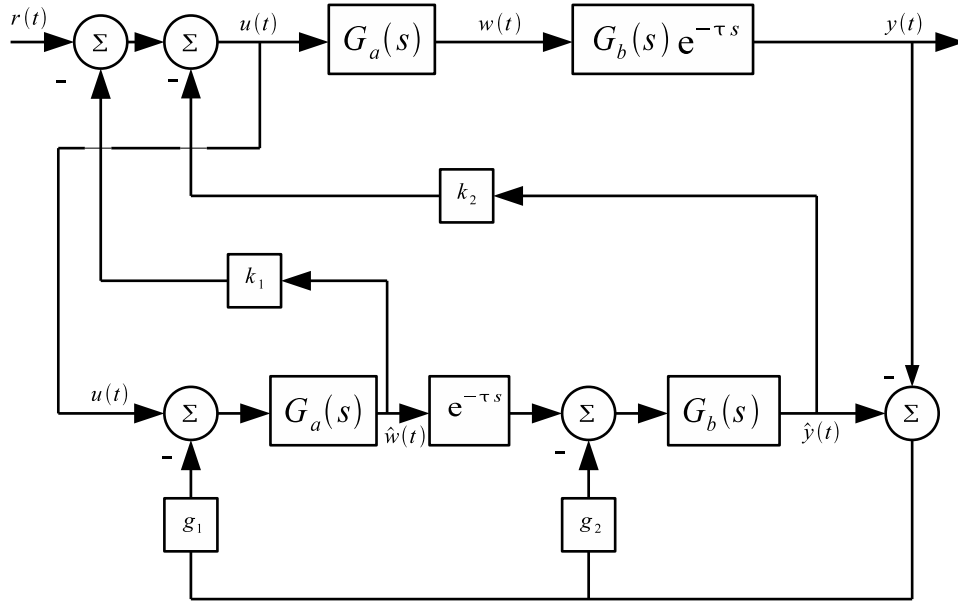


Figura 4.8: Estrategia de Control Propuesta.

**Demostración.** Como primer paso, para asegurar una estimación correcta de las variables de estado, se demostrará que la señal de error converge asintóticamente a 0, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{x}(t) - x(t)] = 0.$$

Para esto, consideremos la representación en espacio de estados del sistema (4.4) dada por la ecuación (4.5) como se ve a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

Donde  $x(t) = [w(t) \quad x_2(t)]^T$  y la matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$  y  $C$  están dadas por:

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad 1]. \end{aligned}$$

Las dinámicas de las variables de estado estimadas y la ley de control para el proceso original están descritas a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_0 \hat{x}(t) + A_1 \hat{x}(t - \tau) + Bu(t) - G(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ u(t) &= K\hat{x}(t). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Donde  $\hat{x}(t)$  representa la señal estimada de  $x(t)$ , y los vectores de ganancias proporcionales están dados por  $K = [k_1 \ k_2]$  and  $G = [g_1 \ g_2]^T$ . Se define el error como  $e(t) := x(t) - \hat{x}(t)$ , entonces obtenemos:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A_0 - GC)e(t) + A_1 e(t - \tau). \quad (4.32)$$

Y el sistema controlado:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + BK \hat{x}(t). \quad (4.33)$$

Denotando el vector  $x_e = [x(t) \ e(t)]^T$  y después de simples manipulaciones de las variables, es posible obtener la siguiente representación del sistema en lazo cerrado para el esquema mostrado en la figura 4.8:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= \begin{bmatrix} A_0 + BK & -BK \\ 0 & A_0 - GC \end{bmatrix} x_e(t) + \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} x_e(t - \tau) \\ y(t) &= [C \ 0] x_e(t). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Es fácil observar que la estrategia de control propuesta cumple con el principio de separación, [8], [38], es decir, el esquema observador y el esquema controlador pueden ser diseñados de manera separada. Así, asegurar la estabilidad del esquema observador es suficiente para garantizar una correcta estimación de las variables de estado del proceso, es decir, el error de estimación tiende a 0 asintóticamente. Por lo tanto,  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{w}(t) - w(t)] = 0$  si y sólo si:

$$\tau < \frac{1}{a}$$

Por otro lado, considerando de nueva cuenta que el controlador y el observador pueden ser diseñados separadamente y recordando las condiciones de estabilidad enunciadas previamente en los Lemas 4.1 y 4.2, es claro que las condiciones de estabilidad del esquema observador son más restrictivas que las del esquema controlador, es decir:

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

Por lo tanto, existen ganancias proporcionales  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  tales que el comportamiento del sistema en lazo cerrado es estable si y sólo si:

$$\tau < \frac{1}{a}$$

■

## 4.4. Ejemplos

Esta sección está dedicada a ilustrar el desempeño de la estrategia de control propuesta, los resultados se presentan por medio de simulaciones numéricas y mediante implementaciones electrónicas con plantas construidas con amplificadores operacionales.

**Ejemplo 4.4.1** Considere el sistema de segundo orden inestable con retardo en el tiempo dado por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{(s-3)(s-2.5)} e^{-0.25s}$$

Los parámetros del sistema son los siguientes:

- $\tau = 0.25$
- $\alpha = 6$
- $a = 3$
- $b = 2.5$

Es claro que el sistema cumple con las condiciones necesarias y suficientes expuestas en el Lema 4.1, es decir:

$$\tau = 0.25 < \frac{1}{a} = 0.333$$

Como se mencionó con anterioridad, el esquema observador controlador cumple con el principio de separación, por lo tanto, el diseño de la estructura de control propuesta y el cálculo de las ganancias proporcionales  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  tal que el sistema en lazo cerrado es estable puede realizarse siguiendo el siguiente procedimiento sencillo:

**Procedimiento 4.1** 1. Para asegurar la existencia de una ganancia  $k_2$ , tal que el sistema controlador proporcione un comportamiento estable del proceso original, el valor de  $k_1$  debe cumplir la siguiente relación:

$$k_1 > \frac{1}{\alpha(\frac{1}{b} - \tau)} + \frac{a}{\alpha}.$$

2. Con el valor seleccionado de  $k_1$ , realizar un análisis en el dominio de la frecuencia, (Un diagrama de Nyquist por ejemplo) para el sistema con un polo inestable y retardo caracterizado por la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s + \bar{a})(s - b)}.$$

Donde  $\bar{a} = \alpha k_1 - a$ .

3. Del rango de valores posibles para la ganancia  $k_2$  obtenidos por medio del análisis descrito en el paso anterior, seleccionar uno.
4. Para asegurar la existencia de una ganancia  $g_1$ , tal que el sistema controlador proporcione un comportamiento estable del proceso original, el valor de  $g_2$  debe cumplir la siguiente relación:

$$g_2 > \frac{1}{(\frac{1}{a} - \tau)} + b.$$



5. Con el valor seleccionado de  $g_2$ , realizar un análisis en el dominio de la frecuencia, (Un diagrama de Nyquist por ejemplo) para el sistema con un polo inestable y retardo caracterizado por la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s-a)(s+\bar{b})}.$$

Donde  $\bar{b} = g_2 - b$ .

6. Del rango de valores posibles para la ganancia  $g_1$  obtenidos por medio del análisis descrito en el paso anterior, seleccionar uno.

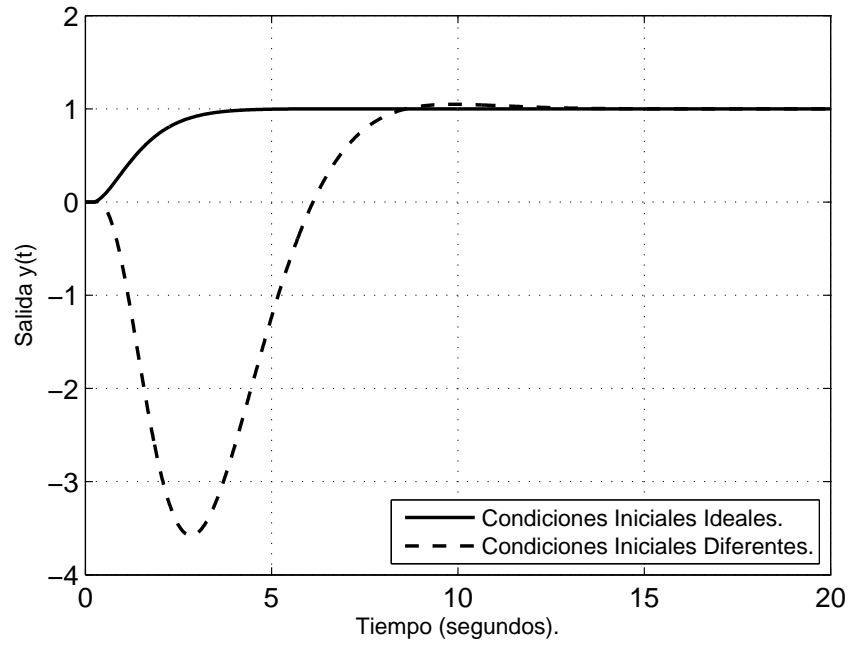
El procedimiento anterior es utilizado para calcular las ganancias de la estructura de control diseñada para el ejemplo 4.4.1, obteniendo los siguientes resultados:

- $k_1 > 1.6111$ . Se selecciona una  $k_1 = 17$ .
- $41.66 < k_2 < 75.75$ .
- $g_2 > 14.5$ . Se selecciona una  $g_2 = 52.5$ .
- $25 < g_1 < 33.89$ .

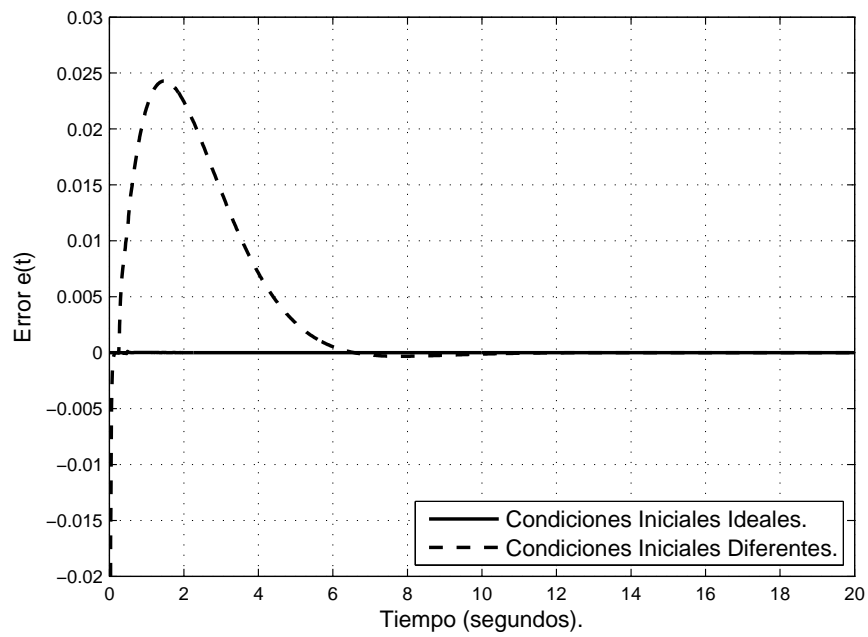
Los valores seleccionados para el diseño del controlador son  $k_1 = 17$ ,  $k_2 = 45$ ,  $g_1 = 26$  y  $g_2 = 52.5$ . El desempeño de la estrategia de control propuesta ante una entrada del tipo escalón es obtenido mediante simulaciones numéricas e ilustrado en la figura 4.9, la figura 4.9(a) muestra la señal de salida del sistema en lazo cerrado y la figura 4.9(b) muestra la señal de error, es decir, la diferencia entre la salida del proceso original y la salida del esquema observador, la línea sólida indica el comportamiento del sistema cuando las condiciones iniciales del sistema son iguales, es decir,  $y(0) - \hat{y}0 = 0$ . La línea punteada denota el desempeño del sistema cuando existe una diferencia entre las condiciones iniciales de la planta original y las condiciones iniciales del esquema observador, para este caso,  $y(0) - \hat{y}0 = 0.1$ .

Note que el sistema preserva la estabilidad a pesar de la diferencia en las condiciones iniciales diferentes, lo cual es una característica importante para sistemas de control basados en la estimación de los estados, ya que en la práctica no es posible asegurar que los sistemas inicien su funcionamiento en idénticas condiciones.

En la figura 4.10(a) se muestra como es afectada la salida  $y(t)$  cuando es modificada la ganancia  $k_2$ , es claro que, conforme aumenta el valor numérico de  $k_2$  la respuesta del sistema es más oscilatorio y con mayores sobre-impulsos. Cabe mencionar que las simulaciones para esta gráfica son realizadas con condiciones iniciales ideales, con dichas condiciones, un experimento similar es realizado variando la ganancia  $g_1$  observando que tal modificación no afecta la señal de salida. Por otro lado, la figura 4.10(b) muestra el comportamiento del sistema en lazo cerrado cuando la ganancia  $g_1$  es cambiado, esta vez con diferentes condiciones iniciales, es decir,  $y(0) - \hat{y}0 = 0.1$ . Note que la señal de salida presenta oscilaciones cuando la ganancia  $g_1$  aumenta, por el contrario, al acrecentar  $g_1$  el sobre-impulso negativo debido a las condiciones iniciales es menor.

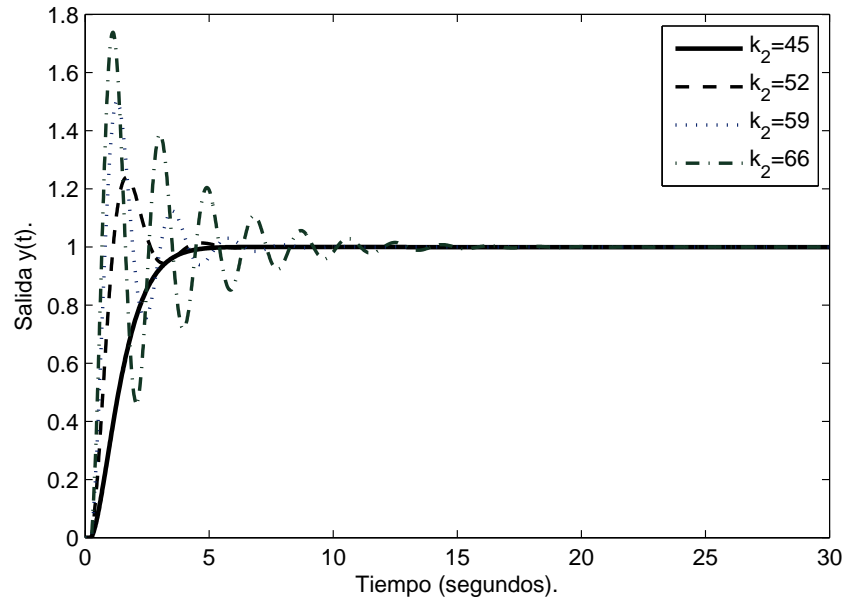


(a) Salida  $y(t)$ .

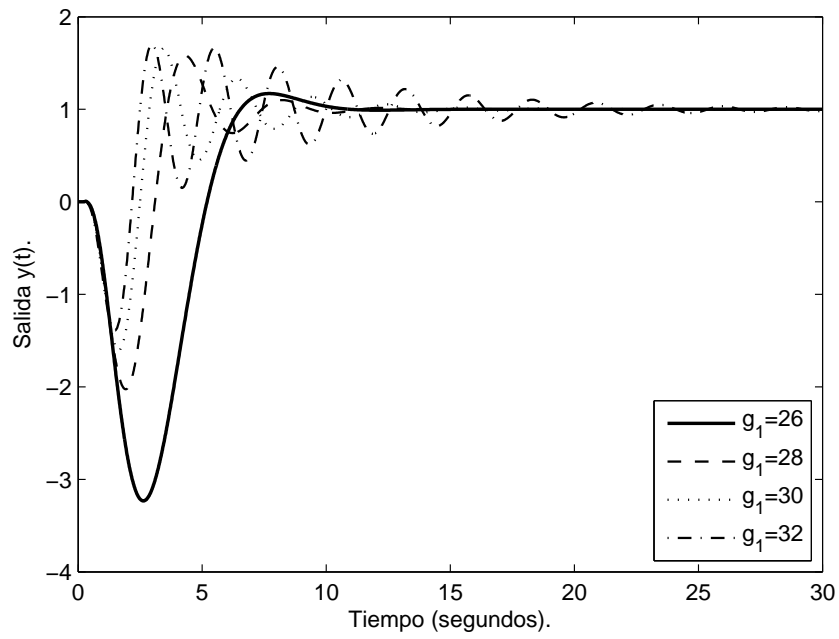


(b) Error  $e(t)$ .

Figura 4.9: Ejemplo 4.4.1. Desempeño de la Estrategia de Control Propuesta.



(a) Diferentes  $k_2$ .



(b) Diferentes  $g_1$ .

Figura 4.10: Ejemplo 4.4.1. Comparación del Sistema en Lazo Cerrado con Diferentes Ganancias .

**Ejemplo 4.4.2** Considere ahora el sistema inestable con retardo en el tiempo representado por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s - 0.7)(s - 0.4)} e^{-s}$$

Los parámetros del sistema son los siguientes:

- $\tau = 1$
- $\alpha = 1$
- $a = 0.7$
- $b = 0.4$

Es claro que el sistema cumple con las condiciones necesarias y suficientes expuestas en el Lema 4.1, es decir:

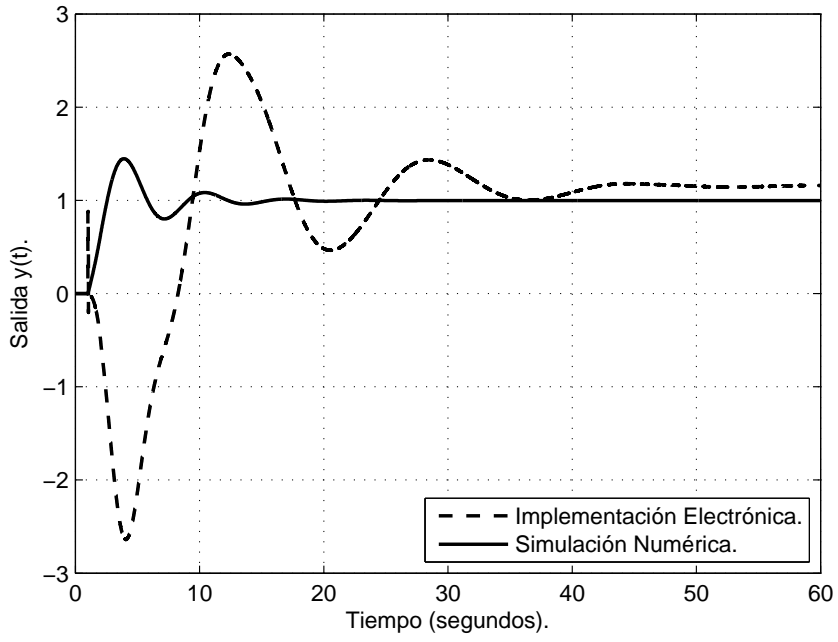
$$\tau = 1 < \frac{1}{0.7} = 1.428$$

Siguiendo el procedimiento presentado previamente, se obtienen los siguientes resultados para el ejemplo 4.4.2:

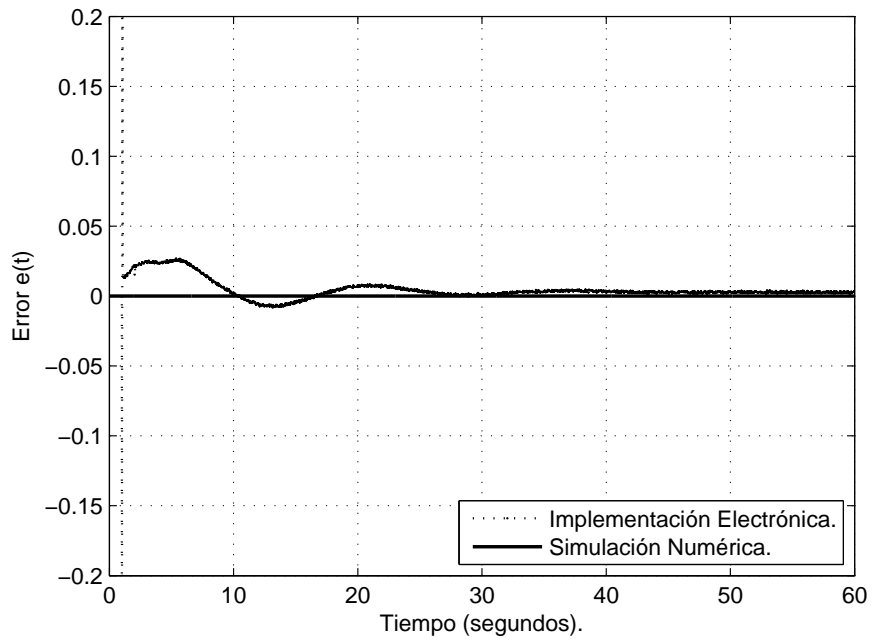
- $k_1 > 1.366$ . Se selecciona una  $k_1 = 100.7$ .
- $40 < k_2 < 130.89$ .
- $g_2 > 2.733$ . Se selecciona una  $g_2 = 100.4$ .
- $70 < g_1 < 114.02$ .

Los valores seleccionados para el diseño del controlador son  $k_1 = 100.7$ ,  $k_2 = 90$ ,  $g_1 = 80$  y  $g_2 = 100.4$ . El desempeño de la estrategia de control propuesta ante una entrada del tipo escalón es obtenido mediante simulaciones numéricas e ilustrado en la figura 4.11, la figura 4.11(a) muestra la señal de salida del sistema en lazo cerrado y la figura 4.11(b) muestra la señal de error. La línea sólida indica el desempeño del sistema nominal en lazo cerrado obtenido pro medio de simulaciones numéricas. La línea punteada muestra la respuesta de la estrategia de control propuesta implementada en una planta electrónica real construida con amplificadores operacionales y dispositivos electrónicos comerciales, (resistencias, capacitores, etc.). La integración de la estructura observador-controlador es efectuada con la ayuda de la tarjeta de adquisición de datos SENSORAY 626, [32], comunicando el sistema electrónico construido con un ordenador mediante el software MATLAB Simulink.

Observe que el sistema observador-controlador presenta un desempeño eficaz, obteniendo un comportamiento estable del sistema en lazo cerrado a pesar de la diferencia en las condiciones iniciales y las variaciones paramétricas debidas al uso de dispositivos electrónicos comerciales para la construcción de la planta electrónica.



(a) Salida  $y(t)$ .



(b) Error  $e(t)$ .

Figura 4.11: Ejemplo 4.4.2. Desempeño de la Estrategia de Control Propuesta.

## Conclusión

En este capítulo se presenta el resultado principal del trabajo desarrollado. Se propone una estrategia de control sencilla y novedosa con la finalidad de estabilizar sistemas lineales invariantes en el tiempo con dos polos inestables y con retardo. El esquema de control está basado en un sistema observador, el cual permite obtener una estimación adecuada de las señales internas del sistema para utilizarlas más tarde como señales de control. De esta manera, solo cuatro ganancias estáticas y el modelo de la planta son necesarios para estabilizar el sistema. Las condiciones *necesarias y suficientes* para la existencia de la estructura estabilizante propuesta son expresadas en términos de la ubicación de los polos inestables del sistema y el valor numérico del retardo de tiempo. Además se propone un procedimiento sencillo con el objetivo de calcular las ganancias proporcionales que logran un comportamiento estable del sistema en lazo cerrado. Los resultados obtenidos son ilustrados mediante simulaciones numéricas, posteriormente la estrategia de control es implementada a una planta electrónica construida principalmente con amplificadores operacionales, demostrando que el sistema presenta un desempeño aceptable incluso ante diferentes condiciones iniciales y ante variaciones paramétricas presentadas en la planta.

# APLICACIÓN DEL RESULTADO A DIFERENTES SISTEMAS

El presente capítulo está dedicado a presentar aplicaciones distintas para la estructura de control propuesta en el capítulo anterior. Mostrando así que es posible atacar diferentes problemas mediante el esquema Observador-Controlador diseñado para un sistema inestable de segundo orden con retardo.

## 5.1. Sistemas Inestables de Segundo Orden con un Cero Estable más Retardo

Considere a continuación la estrategia de control propuesta en este trabajo. La misma estructura observador controlador será implementada para estabilizar sistemas inestables de segundo orden caracterizados por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha(s + \psi)}{(s - a)(s - b)} e^{-\tau s}. \quad (5.1)$$

Donde  $\tau, a, b, \psi > 0$  y sin pérdida de generalidad  $a \geq b$ . Tomando en cuenta la estructura ilustrada en la figura 4.8, los sub-sistemas  $G_a$  y  $G_b$  quedan definidos de la siguiente manera:

$$G_a = \frac{\alpha}{s - a}$$

$$G_b = \frac{s + \psi}{s - b}.$$

### 5.1.1. Esquema Controlador.

Considere el sistema controlador mostrado en la figura 4.6 y el sistema inestable de segundo orden con retardo representado por la ecuación (5.1), las condiciones de estabilidad necesarias y suficientes para este sistema son enunciadas a continuación.

**Teorema 5.1** *Sea el sistema retardado caracterizado por la función de transferencia (5.1) y el esquema de control mostrado en la figura 4.6. Existen ganancias proporcionales  $k_1$  y  $k_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable si y solamente si:*

$$\tau < \frac{1}{b}.$$

**Demostración.** El objetivo de esta prueba es aplicar los resultados dados en el lema 4.1 al siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha(s + \psi)e^{-\tau s}}{(s - a + \alpha k_1)(s - b) + k_2 \alpha(s + \psi)e^{-\tau s}}. \quad (5.2)$$

Seleccionando un valor de la ganancia  $k_1 = (\psi + a)/\alpha$ . Entonces, es posible considerar el siguiente sistema equivalente:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{s - b + k_2 \alpha e^{-\tau s}}. \quad (5.3)$$

Así, es posible expresar las condiciones de estabilidad para este sistema mediante los resultados obtenidos en el lema 4.1, es decir, existen ganancias proporcionales  $k_1$  y  $k_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable si y solamente si:

$$\tau < \frac{1}{b}.$$

### 5.1.2. Esquema Observador

Primero, tomemos en cuenta la siguiente representación del sub-sistema  $G_b$ :

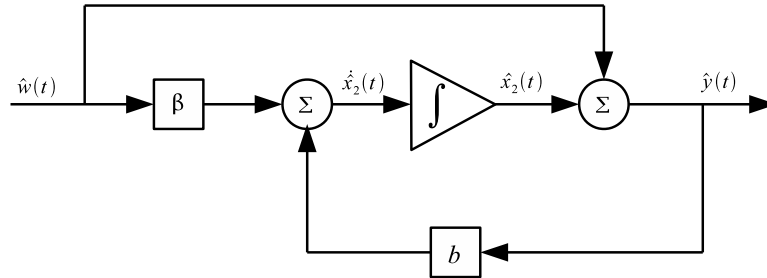


Figura 5.1: Representación del sistema Polo-Zero.

Esta representación del sub-sistema  $G_b$  permite realizar la estrategia de control de inyección de la salida propuesta en la figura 4.7. Por lo tanto, el siguiente lema es enunciado.

**Teorema 5.2** *Considere el sistema inestable con retardo caracterizado por la ecuación (5.1) y el esquema de inyección de la salida mostrado en la figura 4.7. Existen ganancias constantes  $g_1$  y  $g_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable si y sólo si:*

$$\tau < \frac{1}{a}.$$

**Demostración.** De manera similar que en el sistema controlador, el objetivo de la demostración es aplicar el resultado obtenido en el lema 4.1. Considere la siguiente función de transferencia en lazo cerrado:



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha(s + \psi)e^{-\tau s}}{(s - a)(s - b + g_2) + \alpha g_1(s + \psi)e^{-\tau s}}. \quad (5.4)$$

Seleccionando una ganancia  $g_2 = \psi + b$ . Entonces es posible tomar en cuenta un sistema equivalente mostrado a continuación:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{s - a + g_1 \alpha e^{-\tau s}}. \quad (5.5)$$

Así, es posible expresar las condiciones de estabilidad para este sistema mediante los resultados obtenidos en el lema 4.1, es decir, existen ganancias proporcionales  $g_1$  y  $g_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable si y solamente si:

$$\tau < \frac{1}{a}.$$

### 5.1.3. Esquema Observador-Controlador

Ahora, consideremos la estrategia de control propuesta en este trabajo mostrada en la figura 4.8 aplicada al sistema de segundo orden inestable con retardo representado en la ecuación (5.1). Las condiciones de estabilidad son dadas tomando en cuenta los resultados presentados anteriormente.

**Corolario 5.1** *Sea el sistema observador controlador mostrado en la figura 4.8 y el proceso con dos polos inestables, un zero estable y retardo caracterizado por la función de transferencia (5.1). Existen ganancias proporcionales  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  tales que el comportamiento del sistema en lazo cerrado es estable si y sólo si:*

$$\tau < \frac{1}{a}$$

**Demostración.** La demostración completa de este resultado se basa en la representación en espacio de estados del sistema inestable con retardo (5.1), caracterizada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + Bu(t) \\ y(t) &= C_0 x(t) + C_1 x(t - \tau). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Donde  $x(t) = [ w(t) \quad x_2(t) ]^T$  y la matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $C_0$  y  $C_1$  están dadas por:

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \psi + b & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Observación 5.1** *Note que el sistema en espacio de estados representado por la ecuación (5.6) puede ser regresado a su representación en función de transferencia mediante:*

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = (C_0 + C_1 e^{-\tau s}) [sI - (A_0 + A_1 e^{-\tau s})]^{-1} B. \quad (5.7)$$

Las dinámicas de las variables de estado estimadas y la ley de control para el proceso original están descritas a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_0 \hat{x}(t) + A_1 \hat{x}(t - \tau) + Bu(t) - G(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ u(t) &= (K_0 + K_1) \hat{x}(t). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Donde  $\hat{x}(t)$  representa la señal estimada de  $x(t)$ , y los vectores de ganancias proporcionales están dados por  $K_0 = [k_1 \ k_2]$ ,  $K_1 = [k_2 \ 0]$  and  $G = [g_1 \ g_2]^T$ .

Se define nuevamente el error como  $e(t) := x(t) - \hat{x}(t)$ , entonces obtenemos:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A_0 - GC_0)e(t) + (A_1 - GC_1)e(t - \tau). \quad (5.9)$$

Y el sistema controlado:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + B(K_0 + K_1) \hat{x}(t). \quad (5.10)$$

Denotando el vector  $x_e = [x(t) \ e(t)]^T$  y después de simples manipulaciones de las variables, es posible obtener la siguiente representación del sistema en lazo cerrado para el esquema mostrado en la figura 4.8:

$$\dot{x}_e(t) = \begin{bmatrix} A_0 + BK_0 & -BK_0 \\ 0 & A_0 - GC_0 \end{bmatrix} x_e(t) + \begin{bmatrix} A_1 + BK_1 & -BK_1 \\ 0 & A_1 - GC_1 \end{bmatrix} x_e(t - \tau) \quad (5.11)$$

Es fácil observar que la estrategia de control propuesta cumple con el principio de separación, [8], [38], es decir, el esquema observador y el esquema controlador pueden ser diseñados de manera separada. Así, asegurar la estabilidad del esquema observador es suficiente para garantizar una correcta estimación de las variables de estado del proceso, es decir, el error de estimación tiende a 0 asintóticamente. Por lo tanto,  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{w}(t) - w(t)] = 0$  si y sólo si:

$$\tau < \frac{1}{a}$$

Por otro lado, considerando de nueva cuenta que el controlador y el observador pueden ser diseñados separadamente y recordando las condiciones de estabilidad enunciadas previamente en los Lemas 5.1 y 5.2, es claro que las condiciones de estabilidad del esquema observador son más restrictivas que las del esquema controlador, es decir:

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

Por lo tanto, existen ganancias proporcionales  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  tales que el comportamiento del sistema en lazo cerrado es estable si y sólo si:

$$\tau < \frac{1}{a}$$

■

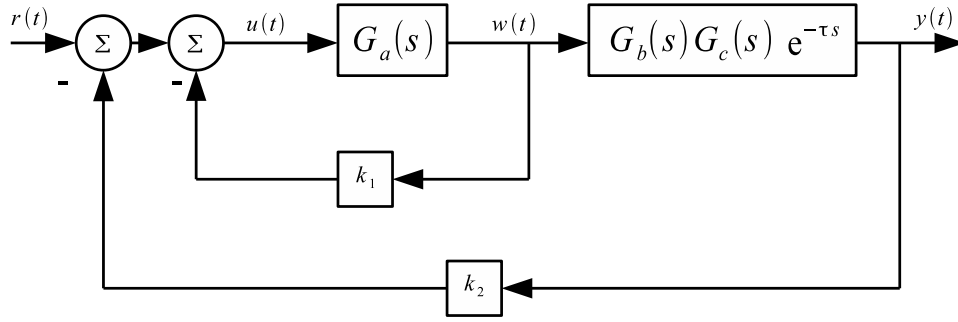


Figura 5.2: Esquema Controlador para Sistemas de Alto Orden.

## 5.2. Sistemas de Alto Orden con dos Polos Inestables y con Retardo

Finalmente, la estructura observador controlador será implementada con la finalidad de estabilizar sistemas con dos polos inestables y  $n$  polos estables con retardo, representadas mediante la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{(s-a)(s-b)(s+c_1)(s+c_2)\dots(s+c_m)} e^{-\tau s} \quad (5.12)$$

Donde  $\tau, a, b, c_1, c_2, \dots, c_m > 0$  y sin pérdida de generalidad  $a \geq b$ .

### 5.2.1. Esquema Controlador

Considere el sistema retardado inestable con dos polos inestables caracterizado por la función de transferencia (5.12) y el esquema de control presentado en la figura 5.2. Los bloques  $G_a$ ,  $G_b$  y  $G_c$  se definen a continuación:

$$G_a = \frac{\alpha}{s-a}$$

$$G_b = \frac{1}{s-b}$$

$$G_c = \frac{1}{(s+c_1)(s+c_2)\dots(s+c_m)}$$

**Teorema 5.3** *Considere el sistema de alto orden con retardo dado por la ecuación (5.12) y el controlador ilustrado en la figura 5.2. Existen ganancias proporcionales  $k_1$  y  $k_2$  tales que el sistema en lazo cerrado presenta un comportamiento estable si y solamente si:*

$$\tau < \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}$$

**Demostración.** El principal objetivo de esta prueba es aplicar las condiciones dadas en el Lema 4.3 al sistema controlador en lazo cerrado mostrado en la figura 5.2.

*Suficiencia.* Considere el hecho de que el sistema cumple con la condición:

$$\tau < \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i},$$

entonces, existe una constante positiva  $\beta$  tal que:

$$\tau = \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i} - \beta,$$

por lo tanto, siempre existe una ganancia  $k_1$  tal que:

$$\beta > \frac{1}{\alpha k_1 - a} > 0,$$

de esta forma, es claro que la siguiente desigualdad se cumple:

$$\tau < \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i} - \frac{1}{\alpha k_1 - a},$$

tomando en cuenta las condiciones expresadas en el Lema 4.3, con  $\sigma = b$ ,  $\phi_i = c_i$  y  $\phi_n = \alpha k_1 - a$ , existe una ganancia  $k_2$  tal que el sistema en lazo cerrado mostrado en la figura 5.2 es estable.

*Necesidad.* Considere el sistema con retardo (5.12) y la estructura de control mostrada en la figura 5.2, con ganancias proporcionales  $k_1$  y  $k_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable. La función de transferencia del sistema en lazo cerrado está caracterizada por la siguiente ecuación:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s-b)(s+\phi_1)(s+\phi_2)\cdots(s+\phi_n) + \alpha k_2 e^{-\tau s}}. \quad (5.13)$$

Donde  $\phi_i = c_i$ ,  $\phi_n = \alpha k_1 - a$  y  $n = m + 1$ . Es conocido que una ganancia  $k_2$  que estabiliza el sistema con retardo (5.13), debe estabilizar de igual forma el sistema libre de retardo (vea por ejemplo [10], [17] para mayor detalle), lo cual implica que  $\phi > 0$ . Tomando en cuenta las condiciones de estabilidad dadas en el Lema 4.3,

$$\tau < \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\phi_i},$$

con  $\sigma = b$ . Note que el término  $\phi_n$  es un parámetro libre del sistema y es función de  $k_1$ . Considere una ganancia  $k_1$  tal que:

$$\beta > \frac{1}{\phi_n} > 0.$$

Denotando

$$\beta = \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\phi_i} - \tau,$$

Es posible concluir la siguiente desigualdad:

$$\tau = \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\phi_i} - \beta < \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\phi_i} = \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}.$$

■

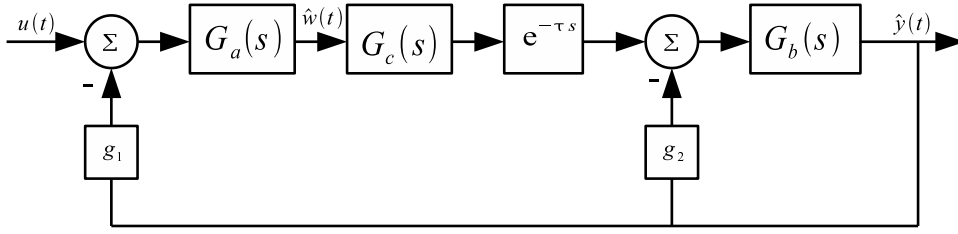


Figura 5.3: Esquema Observador para Sistemas de Alto Orden.

### 5.2.2. Esquema Observador

Como se ha mencionado anteriormente, en muchas ocasiones no es posible medir todas las variables de estado del proceso, por lo tanto se hace necesario el diseño de un sistema observador, con este propósito el esquema de observación mostrado en la figura 5.3 es introducido. Las condiciones de estabilidad necesarias y suficientes para este sistema son expresadas posteriormente.

**Teorema 5.4** *Sea el sistema de alto orden con retardo dado por la ecuación (5.12) y el sistema observador ilustrado en la figura 5.3. Existen ganancias proporcionales  $g_1$  y  $g_2$  tales que el sistema en lazo cerrado presenta un comportamiento estable si y solamente si:*

$$\tau < \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}.$$

**Demostración.** El principal objetivo de esta prueba es aplicar las condiciones dadas en el Lema 4.3 al sistema controlador en lazo cerrado mostrado en la figura 5.3.

*Suficiencia.* Considere el hecho de que el sistema cumple con la condición:

$$\tau < \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i},$$

entonces, existe una constante positiva  $\beta$  tal que:

$$\tau = \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i} - \beta,$$

por lo tanto, siempre existe una ganancia  $k_1$  tal que:

$$\beta > \frac{1}{g_2 - b} > 0,$$

de esta forma, es claro que la siguiente desigualdad se cumple:

$$\tau < \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i} - \frac{1}{g_2 - b},$$

tomando en cuenta las condiciones expresadas en el Lema 4.3, con  $\sigma = a$ ,  $\phi_i = c_i$  y  $\phi_n = g_2 - b$ , existe una ganancia  $g_1$  tal que el sistema en lazo cerrado mostrado en la figura 5.3 es estable.

*Necesidad.* Considere el sistema con retardo (5.12) y la estructura de control mostrada en la figura 5.3, con ganancias proporcionales  $g_1$  y  $g_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable. La función de transferencia del sistema en lazo cerrado está caracterizada por la siguiente ecuación:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s-a)(s+\phi_1)(s+\phi_2)\cdots(s+\phi_n) + \alpha g_1 e^{-\tau s}}. \quad (5.14)$$

Donde  $\phi_i = c_i$  y  $\phi_n = g_2 - b$ . Es conocido que una ganancia  $g_1$  que estabiliza el sistema con retardo (5.14), debe estabilizar de igual forma el sistema libre de retardo (vea por ejemplo [10], [17] para mayor detalle), lo cual implica que  $\phi > 0$ . Tomando en cuenta las condiciones de estabilidad dadas en el Lema 4.3,

$$\tau < \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\phi_i},$$

con  $\sigma = a$ . Note que el término  $\phi_n$  es un parámetro libre del sistema y es función de  $g_2$ . Considere una ganancia  $g_2$  tal que:

$$\beta > \frac{1}{\phi_n} > 0.$$

Denotando

$$\beta = \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\phi_i} - \tau,$$

Es posible concluir la siguiente desigualdad:

$$\tau = \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\phi_i} - \beta < \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\phi_i} = \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}.$$

■

### 5.2.3. Esquema Observador Controlador

Finalmente, el esquema observador controlador es presentado en la figura 5.4 es propuesto. Note que solo cuatro ganancias proporcionales son suficientes para obtener un comportamiento estable del sistema.

A continuación, las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad son expresadas por medio del siguiente Lema:

**Corolario 5.2** *Considere el sistema inestable con  $n$  retardo caracterizado por la ecuación (5.12) y la estructura de control mostrada en la figura 5.4. Existen ganancias proporcionales  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable si y sólo si:*

$$\tau < \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}.$$

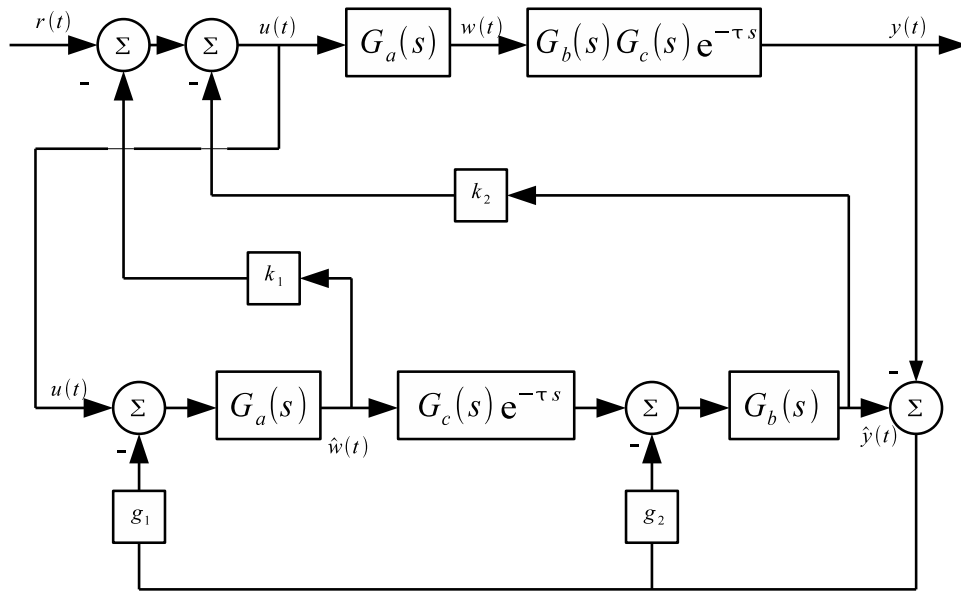


Figura 5.4: Esquema Observador-Controlador para Sistemas de Alto Orden.

**Demostración.** Como primer paso se demostrará la convergencia de la señal de error del sistema observador. Considere la representación en espacio de estados del sistema (5.12) caracterizada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Con  $x(t) = [ w(t) \ x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_m(t) \ z(t) ]^T$ .  
Donde,

$$A_0 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1 ]$$

**Observación 5.2** *Note que el sistema en espacio de estados representado por la ecuación (5.15) puede ser regresado a su representación en función de transferencia mediante:*

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C [sI - (A_0 + A_1 e^{-\tau s})]^{-1} B. \quad (5.16)$$

Las dinámicas de los estados estimados y la ley de control están descritas a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_0 \hat{x}(t) + A_1 \hat{x}(t - \tau) + Bu(t) - G(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ u(t) &= K\hat{x}(t). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Donde  $\hat{x}(t)$  representa la estimación del estado  $x(t)$  y los vectores de ganancia  $K$  and  $G$  están definidos por:

$$K = [ k_1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ k_2 ]$$

$$G = [ g_1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ g_2 ]^T$$

Definiendo  $e(t) := x(t) - \hat{x}(t)$ , obtenemos:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A_0 - GC)e(t) + A_1 e(t - \tau). \quad (5.18)$$

Y el sistema controlado está dado por:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + BK\hat{x}(t). \quad (5.19)$$

Denotando el vector  $x_e = [x(t) \ e(t)]^T$  y después de una simple manipulación de variables obtenemos el siguiente sistema en lazo cerrado del sistema observador controlador mostrado en la figura 5.4:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= \begin{bmatrix} A_0 + BK & -BK \\ 0 & A_0 - GC \end{bmatrix} x_e(t) + \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} x_e(t - \tau) \\ y(t) &= [ C \ 0 ] x_e(t). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Es fácil observar que la estrategia de control propuesta cumple con el principio de separación, así, asegurar la estabilidad del esquema observador es suficiente para obtener una estimación acertada de las variables de estado y la convergencia del error, esto es, existen ganancias proporcionales  $g_1$  y  $g_2$  tales que  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{w}(t) - w(t)] = 0$ , si y sólo si:



$$\tau < \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}.$$

Entonces, considerando nuevamente que el sistema observador controlador cumple el principio de separación y recordando las condiciones de estabilidad postuladas en los Lemas 5.3 y 5.4, es claro que las condiciones de estabilidad para el esquema controlador son más restrictivas que las del esquema observador, es decir:

$$\frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m c_i < \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}.$$

Por lo tanto, existen ganancias proporcionales  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  tales que el sistema en lazo cerrado presenta un comportamiento estable si y sólo si:

$$\tau < \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}.$$

■

### 5.3. Ejemplos

A continuación, presentaremos algunos ejemplos con el propósito de demostrar el desempeño del esquema de control propuesto para sistemas inestables con un zero y con retardo y para sistemas retardados de alto orden con retardo.

**Ejemplo 5.3.1** *Considere el siguiente sistema de segundo orden inestable con retardo:*

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3(s + 21)}{(s - 5)(s - 1.5)} e^{-0.18s}$$

Los parámetros del sistema son los siguientes:

- $\tau = 0.18$
- $\alpha = 3$
- $\psi = 21$
- $a = 5$
- $b = 1.5$

Es claro que el sistema cumple con las condiciones necesarias y suficientes expuestas en el Lema 5.1, es decir:

$$\tau = 0.18 < \frac{1}{a} = 0.2$$

Por lo tanto es posible aplicar la estructura de control mostrada en la figura 4.8 para estabilizar el sistema descrito. El diseño de la estructura de control propuesta y el cálculo de las ganancias proporcionales  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  tal que el sistema en lazo cerrado es estable puede realizarse siguiendo el siguiente procedimiento sencillo:

**Procedimiento 5.1** 1. Ajustar el valor de la ganancia  $k_1$  de la siguiente manera:

$$k_1 = \frac{\beta + a}{\alpha}.$$

2. Realizar un análisis en el dominio de la frecuencia, (Un diagrama de Nyquist por ejemplo) para el sistema con un polo inestable y retardo caracterizado por la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s - b)}.$$

3. Seleccionar una valor del rango posible para la ganancia  $k_2$  obtenido por medio del análisis descrito en el paso anterior.

4. Ajustar el valor de la ganancia  $g_2$  de la siguiente manera:

$$k_2 = \beta + b.$$

5. Realizar un análisis en el dominio de la frecuencia, (Un diagrama de Nyquist por ejemplo) para el sistema con un polo inestable y retardo caracterizado por la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s - a)}.$$

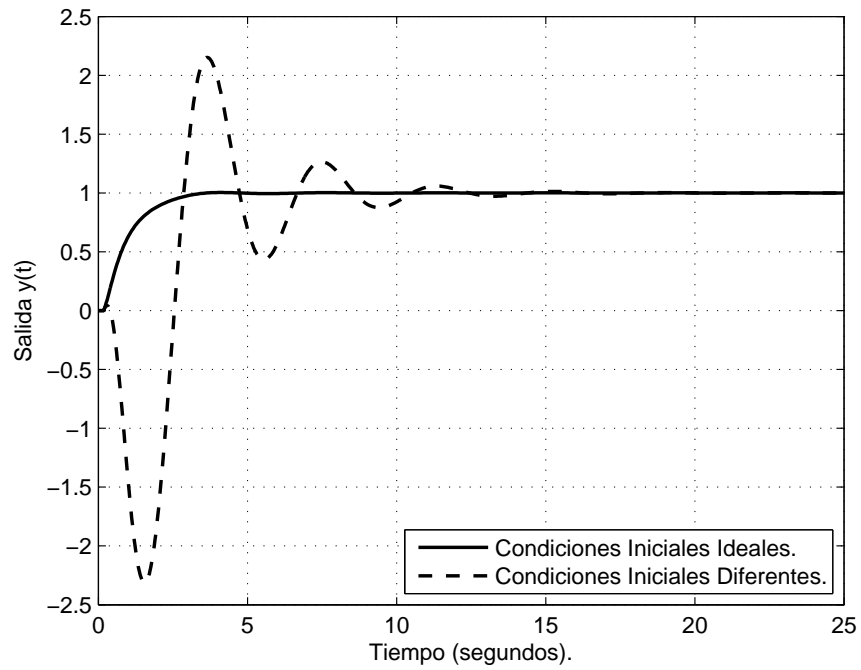
6. Seleccionar una valor del rango posible para la ganancia  $g_1$  obtenido por medio del análisis descrito en el paso anterior.

El procedimiento 5.2 es utilizado para calcular las ganancias de la estructura de control diseñada para el ejemplo 5.3.1, obteniendo los siguientes resultados:

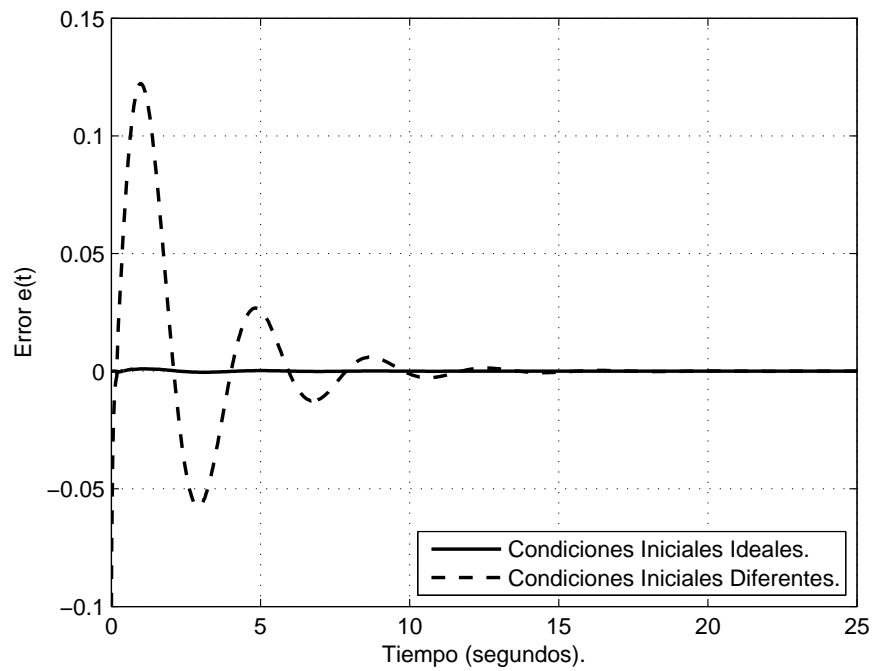
- $k_1 = 8.667$ .
- $0.5 < k_2 < 2.577$ .
- $g_2 = 22.5$ .
- $1.667 < g_1 < 1.93$ .

Los valores seleccionados para el diseño del controlador son  $k_1 = 8.667$ ,  $k_2 = 0.75$ ,  $g_1 = 1.75$  y  $g_2 = 22.5$ . El desempeño de la estrategia de control propuesta ante una entrada del tipo escalón es obtenido mediante simulaciones numéricas e ilustrado en la figura 5.5, la figura 5.5(a) muestra la señal de salida del sistema en lazo cerrado y la figura 5.5(b) muestra la señal de error, la línea sólida indica el comportamiento del sistema cuando las condiciones iniciales del sistema son iguales, es decir,  $y(0) - \hat{y}0 = 0$ . La línea discontinua denota el desempeño del sistema cuando existe una diferencia entre las condiciones iniciales de la planta original y las condiciones iniciales del esquema observador, para este caso,  $y(0) - \hat{y}0 = 0.1$ .

Note que el sistema preserva la estabilidad a pesar de la diferencia en las condiciones iniciales diferentes, lo cual es una característica importante para sistemas de control basados en la estimación de los estados, ya que en la práctica no es posible asegurar que los sistemas inicien su funcionamiento en idénticas condiciones.



(a) Salida  $y(t)$ .



(b) Error  $e(t)$ .

Figura 5.5: Ejemplo 5.3.1. Desempeño de la Estrategia de Control Propuesta para Sistemas Con un Zero.

**Ejemplo 5.3.2** Considere el siguiente sistema de alto orden inestable con retardo y dos polos inestables:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s - 0.7)(s - 0.4)(s + 5)(s + 10)} e^{-0.5s}$$

Los parámetros del sistema son los siguientes:

- $\tau = 0.5$
- $\alpha = 1$
- $a = 0.7$
- $b = 0.4$
- $c_1 = 5$
- $c_2 = 10$

Es claro que el sistema cumple con las condiciones necesarias y suficientes expuestas en el Lema 5.2, es decir:

$$\tau = 0.5 < \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} = 1.12$$

Por lo tanto es posible aplicar la estructura de control mostrada en la figura 5.4 para estabilizar el sistema descrito. El diseño de la estructura de control propuesta y el cálculo de las ganancias proporcionales  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  tal que el sistema en lazo cerrado es estable puede realizarse siguiendo el siguiente procedimiento sencillo:

**Procedimiento 5.2** 1. Para asegurar la existencia de una ganancia  $k_2$ , tal que el sistema controlador proporcione un comportamiento estable del proceso original, el valor de  $k_1$  debe cumplir la siguiente relación:

$$k_1 > \frac{1}{\alpha \left( \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} - \tau \right)} + \frac{a}{\alpha}.$$

2. Con el valor seleccionado de  $k_1$ , realizar un análisis en el dominio de la frecuencia, (Un diagrama de Nyquist por ejemplo) para el sistema con un polo inestable y retardo caracterizado por la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s + \bar{a})(s - b)(s + c_1)(s + c_2) \cdots (s + c_n)}.$$

Donde  $\bar{a} = \alpha k_1 - a$ .

3. Del rango de valores posibles para la ganancia  $k_2$  obtenidos por medio del análisis descrito en el paso anterior, seleccionar uno.

4. Para asegurar la existencia de una ganancia  $g_1$ , tal que el sistema controlador proporcione un comportamiento estable del proceso original, el valor de  $g_2$  debe cumplir la siguiente relación:

$$g_2 > \frac{1}{\left(\frac{1}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} - \tau\right)} + b$$

5. Con el valor seleccionado de  $g_2$ , realizar un análisis en el dominio de la frecuencia, (Un diagrama de Nyquist por ejemplo) para el sistema con un polo inestable y retardo caracterizado por la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s - a)(s + \bar{b})(s + c_1)(s + c_2) \cdots (s + c_n)}$$

Donde  $\bar{b} = g_2 - b$ .

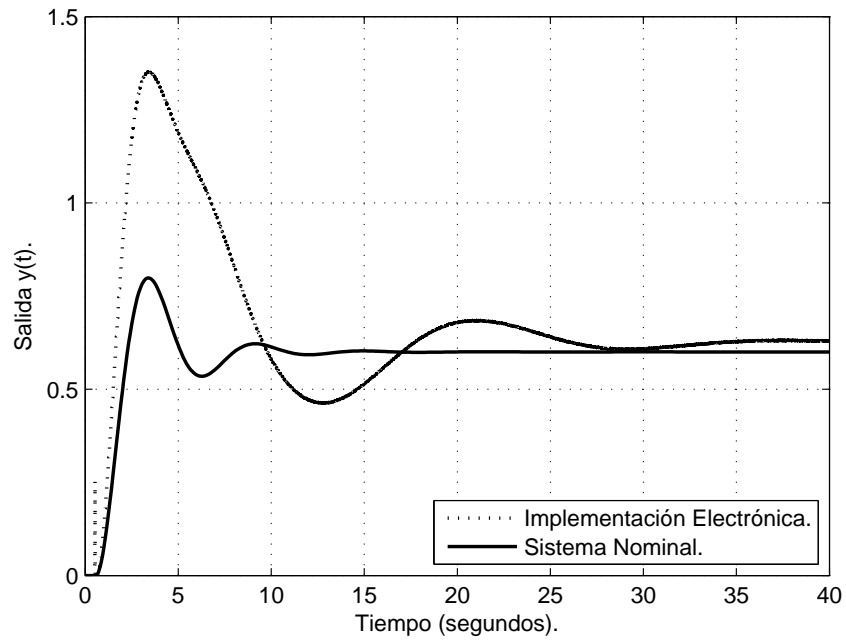
6. Del rango de valores posibles para la ganancia  $g_1$  obtenidos por medio del análisis descrito en el paso anterior, seleccionar uno.

Siguiendo el procedimiento 5.2, se obtienen los siguientes resultados para el ejemplo 5.3.2:

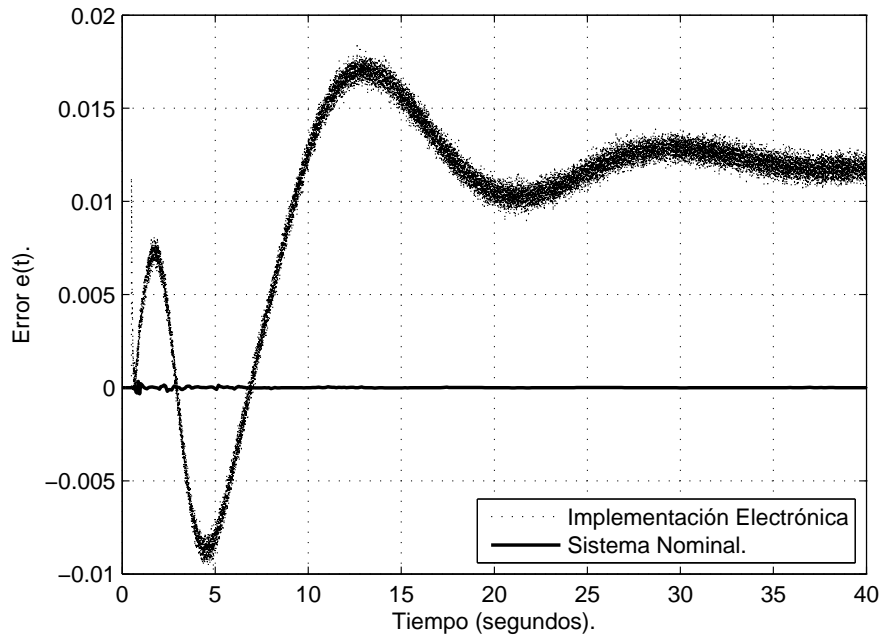
- $k_1 > 1.288$ . Se selecciona una  $k_1 = 20.7$ .
- $400 < k_2 < 1721$ .
- $g_2 > 1.99$ . Se selecciona una  $g_2 = 20.4$ .
- $700 < g_1 < 1499$ .

Los valores seleccionados para el diseño del controlador son  $k_1 = 20.7$ ,  $k_2 = 1000$ ,  $g_1 = 1100$  y  $g_2 = 20.4$ . El desempeño de la estrategia de control propuesta ante una entrada del tipo escalón es obtenido mediante simulaciones numéricas e ilustrado en la figura 5.6, la figura 5.6(a) muestra la señal de salida del sistema en lazo cerrado y la figura 5.6(b) muestra la señal de error. La línea sólida indica el desempeño del sistema nominal en lazo cerrado obtenido pro medio de simulaciones numéricas. La línea punteada muestra la respuesta de la estrategia de control propuesta implementada en una planta electrónica real construida con amplificadores operacionales y dispositivos electrónicos comerciales, (resistencias, capacitores, etc.). La integración de la estructura observador-controlador es efectuada con la ayuda de la tarjeta de adquisición de datos SENSORAY 626, [32], comunicando el sistema electrónico construido con un ordenador mediante el software MATLAB Simulink.

Observe que el sistema observador-controlador presenta un desempeño eficaz, obteniendo un comportamiento estable del sistema en lazo cerrado a pesar de la diferencia en las condiciones iniciales y las variaciones paramétricas debidas al uso de dispositivos electrónicos comerciales para la construcción de la planta electrónica.



(a) Salida  $y(t)$ .



(b) Error  $e(t)$ .

Figura 5.6: Ejemplo 5.3.2. Desempeño de la Estrategia de Control Propuesta Aplicada a Sistemas de Alto Orden.

## Conclusión

En este capítulo se presenta la extensión del resultado principal de la tesis a diferentes tipos de sistemas. Primero, la misma estructura de control usada para es utilizada para estabilizar sistemas retardados con dos polos inestables, un cero estable. Posteriormente, el esquema de control es implementado con la finalidad de obtener un comportamiento estable en sistemas de alto orden con dos polos inestables y con retardo. Las condiciones de estabilidad *necesarias y suficientes* son expresadas en cada caso particular. De la misma manera, se presenta un procedimiento sencillo para el cálculo de las cuatro ganancias proporcionales utilizadas en la estructura de control propuesta para obtener un comportamiento estable. Finalmente se presentan algunos ejemplos con el objetivo de ilustrar la respuesta del sistema en lazo cerrado, se realizan simulaciones numéricas y se implementa el esquema de control en una planta real para mostrar el desempeño de esta estrategia de control.

# ANÁLISIS DE ROBUSTEZ CON RESPECTO AL RETARDO

El estudio de la *robustez* es de crucial importancia en el diseño de sistemas de control debido a que los sistemas reales de ingeniería son vulnerables a perturbaciones externas y ruido en las mediciones, por lo tanto siempre existen diferencias entre los modelos matemáticos utilizados para el diseño y el sistema real. Se dice que un sistema de control es robusto si es insensible a diferencias entre el sistema físico real y el modelo matemático del proceso utilizado en el diseño del controlador [4], [6].

En el presente capítulo se presentará un estudio de robustez para la estrategia de control propuesta, primero se darán algunos conceptos y definiciones importantes en el estudio de robustez. Más adelante se proporcionará un análisis que permitirá realizar el estudio de robustez en cuanto a incertidumbres presentadas en el término del retardo en el sistema controlador observador en lazo cerrado.

## 6.1. Normas de Señales y Sistemas

Un sistema de control interactúa con su entorno a través de señales de control, señales de perturbación, señales de ruido, etc. Para el propósito de análisis y diseño, las normas deben ser definidas como el *tamaño* de esas señales.

### 6.1.1. Normas de Vectores y Normas de Señales

Sea el espacio lineal  $X \in \mathcal{F}^m$ , donde  $\mathcal{F} = \mathcal{R}$  para el conjunto de los números reales, o  $\mathcal{F} = \mathcal{C}$  para los números complejos. Para  $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \in X$ , la norma  $p$ -ésima del vector  $x$  está definida por:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &:= \sum_{i=1}^m |x_i|, \quad \text{para } p = 1 \\ \|x\|_p &:= \left( \sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \text{para } 1 < p < \infty \\ \|x\|_\infty &:= \max_{1 \leq i < m} |x_i|, \quad \text{para } p = \infty \end{aligned}$$

Cuando  $p = 2$ .  $\|x\|_2$  es la conocida *norma Euclidiana*.



Cuando  $X$  es un espacio lineal de señales continuas o continuas a pedazos en el tiempo de la forma  $x(t)$ ,  $t \in \mathcal{R}$ , la norma  $p$ -ésima de la señal  $x(t)$  está definida por:

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &:= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt, \quad \text{para } p = 1 \\ \|x\|_p &:= \left( \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad \text{para } p = 1 \\ \|x\|_{\infty} &:= \sup_{t \in \mathcal{R}} |x(t)|, \quad \text{para } p = \infty\end{aligned}$$

Desde el punto de vista de las señales, la norma  $\|x\|_1$  es la integral de su valor absoluto. El cuadrado de la norma  $\|x\|_2$  es llamada a menudo la *energía* de la señal. Por ejemplo, suponga que  $x$  representa la corriente que pasa a través de un resistor de  $1\Omega$ . Entonces, la potencia instantánea está definida como  $x(t)^2$  y la energía total de esta señal está dada por su integral, es decir,  $\|x(t)\|_2^2$ .

La norma- $\infty$ ,  $\|x\|_{\infty}$  representa la amplitud o valor pico de la señal  $x(t)$ .

### 6.1.2. Norma de Sistemas

Consideremos sistemas lineales, invariantes en el tiempo, casuales y de dimensión finita. En el dominio del tiempo un modelo entrada-salida para tal sistema tiene la forma de la siguiente ecuación de convolución:

$$y = G * u. \quad (6.1)$$

Esto es:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (6.2)$$

Causalidad se refiere a que  $G(t) = 0$  para todo  $t < 0$ . Definamos  $\hat{G}(s)$  como la función de transferencia del sistema, es decir, la transformada de Laplace de  $G(t)$ . Entonces  $\hat{G}(s)$  es racional con coeficientes reales. Decimos que  $\hat{G}(s)$  es *estable* si es analítico en el semiplano derecho, ( $Re s \geq 0$ ). consideramos que es *propio* si  $\hat{G}(j\omega)$  es finita, (el grado del denominador es mayor o igual que el grado del numerador). Se dice que es *estrictamente propio* si  $\hat{G}(j\omega) = 0$ , (el grado del denominador es mayor que el grado del numerador). Se llama *bipropia* si  $\hat{G}(s)$  y  $\hat{G}(s)^{-1}$  son ambas propias, (grado del numerador es igual al grado del denominador), [4].

A continuación se presentarán los conceptos de normas para los sistemas con función de transferencia  $\hat{G}(s)$ .

**Norma-2.**

$$\|\hat{G}\|_2 := \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{G}(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}. \quad (6.3)$$

**Norma- $\infty$ .**

$$\|\hat{G}\|_{\infty} := \sup_{\omega} |\hat{G}(j\omega)|. \quad (6.4)$$

La norma- $\infty$  de  $\hat{G}(s)$  es igual a la distancia en el plano complejo entre el origen y el punto más lejano del diagrama de Nyquist de  $\hat{G}(s)$ . También puede interpretarse como el valor pico en el diagrama de magnitud de Bode del sistema  $\hat{G}(s)$ .

En otras palabras, la norma- $\infty$  describe la máxima ganancia de energía del sistema y está dado por el valor pico del valor singular más grande de la matriz de respuesta en frecuencia para el eje completo  $\omega$ . Esta norma es llamada también norma  $H_\infty$  ya que denotamos el espacio  $H_\infty$  como el espacio lineal de todos los sistemas lineales estables, [6].

Una propiedad importante de la norma- $\infty$  es que es sub-multiplicativa, es decir:

$$\|\hat{G}\hat{H}\|_\infty \leq \|\hat{G}\|_\infty \|\hat{H}\|_\infty.$$

Es sencillo expresar las propiedades de un sistema cuando esas dos normas son finitas mediante el siguiente Lema.

**Lema 6.1** *La norma-2 de  $\hat{G}(s)$  es finita si y sólo si  $\hat{G}(s)$  es estrictamente propia y no tiene polos en el eje imaginario.*

*Además, la norma- $\infty$  es finita si y sólo si  $\hat{G}(s)$  es propia y no tiene polos en el eje imaginario. La prueba de este Lema puede encontrarse en [4].*

## 6.2. Modelado de Sistemas con Incertidumbre

Como se mencionó antes, es inevitable encontrar incertidumbres en un sistema de control real. La incertidumbre puede ser clasificada en dos categorías: señales de perturbación y perturbaciones dinámicas. Las primeras incluyen perturbaciones a la entrada o a la salida, (tal como una ráfaga de viento en una aeronave), ruido en los sensores, ruido en los actuadores, etc. El segundo tipo de incertidumbre representa la discrepancia entre el modelo matemático y las dinámicas reales del sistema en operación. El modelo matemático de cualquier sistema real es siempre una aproximación de la realidad. Las fuentes de discrepancia más usuales incluyen dinámicas no modeladas (en alta frecuencia normalmente), no linealidades despreciadas en el modelado, reducción del orden del sistema, variaciones en los parámetros del sistema debidos a cambios en su entorno y a los factores de desgaste de los componentes. Estos errores al modelar un sistema pueden tener repercusiones adversas en la estabilidad y el desempeño del sistema de control, [6].

### 6.2.1. Incertidumbres no Estructuradas

Muchas perturbaciones dinámicas que ocurren en diferentes partes del sistema pueden, de cualquier manera, ser englobadas en un solo bloque de perturbaciones  $\Delta$ . Esta representación de las incertidumbres es conocida como incertidumbre *no estructurada*. En el caso de sistemas lineales, invariantes en el tiempo, el bloque  $\Delta$  puede ser representado por una función de transferencia desconocida. Las incertidumbres no estructuradas pueden describirse de diferentes formas, a continuación se describirán algunas de esas representaciones, donde  $G_p(s)$  denota las dinámicas del sistema real perturbado y  $G_o(s)$  es una descripción nominal del sistema físico.

- Incertidumbre Aditiva.

$$G_p(s) = G_o(s) + \Delta(s). \tag{6.5}$$

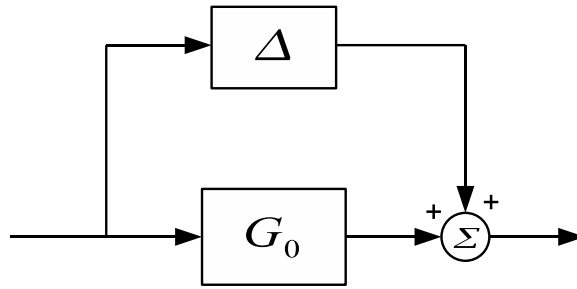


Figura 6.1: Configuración de la Incertidumbre Aditiva.

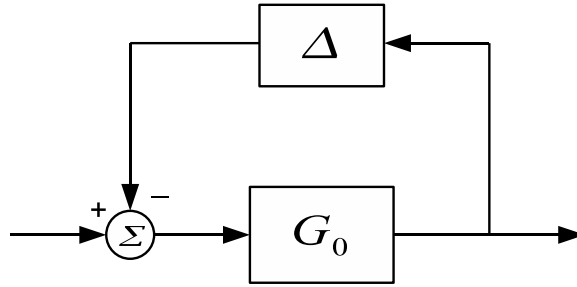


Figura 6.2: Configuración de la Incertidumbre Aditiva Inversa.

- Incertidumbre Aditiva Inversa.

$$(G_p(s))^{-1} = (G_0(s))^{-1} + \Delta(s). \quad (6.6)$$

- Incertidumbre Multiplicativa a la Entrada.

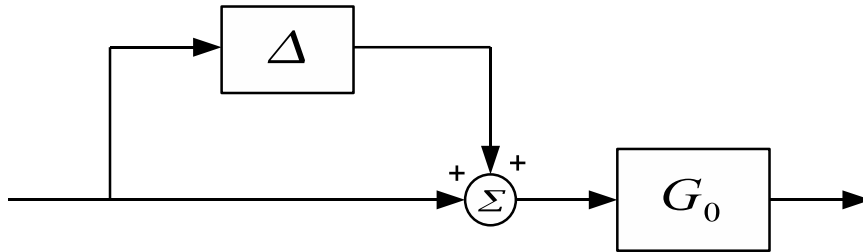


Figura 6.3: Configuración de la Incertidumbre Multiplicativa a la Entrada.

$$G_p(s) = G_0(s) [I + \Delta(s)]. \quad (6.7)$$

- Incertidumbre Multiplicativa a la Salida.

$$G_p(s) = [I + \Delta(s)] G_0(s). \quad (6.8)$$

La representación aditivas de la incertidumbre otorgan un valor del error absoluto entre las dinámicas reales del sistema y el modelo nominal, mientras que la representación multiplicativa presenta errores relativos. Cabe señalar que el diseño exitoso de un sistema de control robusto depende, en cierta medida de una apropiada de la perturbación considerada, aunque la mayoría de las representaciones pueden ser intercambiables [6], [29].

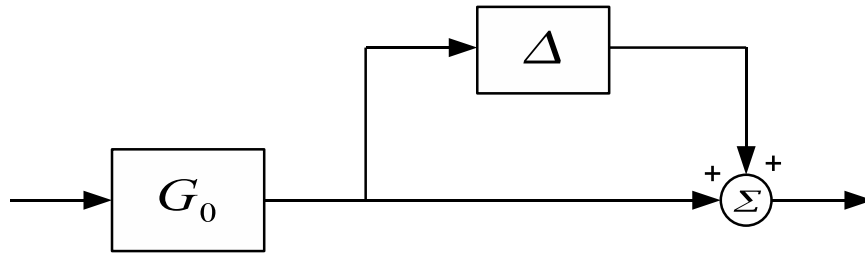


Figura 6.4: Configuración de la Incertidumbre Multiplicativa a la Salida.

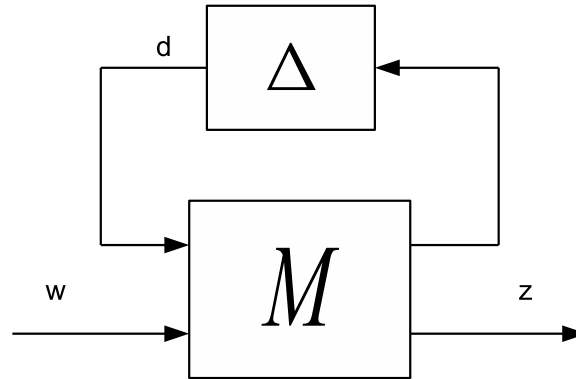


Figura 6.5: Incertidumbre Paramétrica.

### 6.2.2. Incertidumbres Paramétricas

Las incertidumbres no estructuradas presentadas anteriormente son de gran utilidad para describir dinámicas no modeladas o despreciadas. Estas incertidumbres complejas ocurren normalmente en el rango de las altas frecuencias y pueden incluir retardos no modelados, acoplamientos *parásitos*, histéresis y otras no linealidades. Por otro lado, las perturbaciones dinámicas presentes en muchos sistemas de control industrial son causados por una descripción incorrecta de las características de los componentes, efectos de desgaste y deterioro en algunos componentes de la planta, cambios en el punto de operación, etc. Estas perturbaciones pueden ser representadas como variaciones en ciertos parámetros del sistema sobre cierto rango de valores (complejos o reales). Estas perturbaciones afectan el desempeño del sistema de control en el rango de la frecuencias bajas y son conocidas como *incertidumbres paramétricas*, [6].

La figura 6.5 ilustra una representación esquemática de las incertidumbres paramétricas, donde el bloque de perturbaciones  $\Delta$  corresponde a las variaciones en los parámetros del sistema y es llamado *incertidumbres paramétricas*. El bloque de incertidumbres  $\Delta$  está representado por una matriz del tipo diagonal, tiene esta estructura, de ahí que también es conocida como *incertidumbre estructurada*.

## 6.3. Análisis de Robustez al Esquema de Control Propuesto

En esta sección se realizara un estudio con el fin de conocer la robustez del esquema de control presentado en secciones anteriores. Cabe mencionar que nos referimos a robustez al hecho de que no es necesario conocer el valor *exacto* del retardo *a priori*,

una situación frecuentemente asumida en la literatura acerca de sistemas con retardo pero difícilmente realista.

Asumiendo que la estabilidad de un sistema es conocida para un retardo nominal  $d$ , se desea conocer la máxima desviación  $\alpha$  para este valor nominal del retardo tal que el sistema preserve su estabilidad. Así, el sistema mantendrá su estabilidad para cualquier valor de retardo perteneciente a  $[d - \delta^-, d + \delta^+]$ .

Por lo tanto, consideremos que el retardo del sistema es incierto, es decir, el retardo del sistema real puede ser diferente al retardo con el cual se diseñó el sistema controlador observador. A continuación, considere las dinámicas del sistema controlado y del sistema observador tomando en cuenta que el sistema original contiene el retardo real  $\tau$  y el esquema observador contiene al retardo nominal  $d$ .

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + Bu(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + A_1\hat{x}(t - d) + Bu(t) - G(C\hat{x}(t) - y(t))\end{aligned}\tag{6.9}$$

Con la ley de control:

$$u(t) = K\hat{x}(t).$$

Definiendo el error de la siguiente forma:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t).$$

Obtenemos la siguiente ecuación:

$$\dot{e}(t) = (A_0 - GC)e(t) + A_1x(t - \tau) - A_1\hat{x}(t - d).\tag{6.10}$$

Escribiendo la ecuación anterior en términos de las variables  $x(t)$  y  $e(t)$  se tiene:

$$\dot{e}(t) = (A_0 - GC)e(t) + A_1x(t - \tau) - A_1x(t - d) + A_1e(t - d).\tag{6.11}$$

Denotando  $x_e := [x(t)e(t)]^T$ , el sistema en lazo cerrado extendido considerando la incertidumbre en el retardo queda definido a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{x}_e(t) &= \begin{bmatrix} A_0 + BK & -BK \\ 0 & A_0 - GC \end{bmatrix} x_e(t) + \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_1 & 0 \end{bmatrix} (x_e)_\tau(t - \tau) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A_1 & A_1 \end{bmatrix} (x_e)_d(t - d). \\ &= \mathcal{A}_0x_e(t) + \mathcal{A}_\tau(x_e)_\tau(t - \tau) + \mathcal{A}_d(x_e)_d(t - d).\end{aligned}\tag{6.12}$$

Observe que cuando el retardo en el sistema original iguala el valor del retraso de tiempo del sistema original, el sistema en lazo cerrado extendido 6.12 es equivalente al sistema en lazo cerrado nominal. Ahora, modelando la perturbación existente en el retardo en el tiempo como una incertidumbre multiplicativa, obtenemos:

$$\tau = d(1 + \delta\theta).\tag{6.13}$$

Donde:

- $\tau$  representa el retardo real.
- $d$  representa el retardo nominal.
- $\alpha$  representa la máxima variación en el retardo.
- $\theta$  es una función de peso normalizada,  $|\theta| \leq 1$ .

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 e^{-s\tau} &= e^{-sd(1+\delta\theta)} \\
 &= e^{-sd} e^{-sd\delta\theta} \\
 &= e^{-sd}(1 - \Delta).
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Con  $\Delta(s) = 1 - e^{-sd\delta\theta}$ . Por lo tanto la ecuación característica del sistema en lazo cerrado es obtenida a continuación:

$$\begin{aligned}
 \Psi(s) &= \det[sI_n - \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_d e^{-sd} - \mathcal{A}_\tau e^{-s\tau}] \\
 &= \det[sI_n - \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_d e^{-sd} - \mathcal{A}_\tau e^{-sd}(1 + \Delta(s))] \\
 &= \det[sI_n - \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_d e^{-sd} - \mathcal{A}_\tau e^{-sd}] + \mathcal{A}_\tau e^{-sd} \Delta(s) \\
 &= \det[\Psi_0(s)] \det[I_n + \Psi_0^{-1}(s) \mathcal{A}_\tau e^{-sd} \Delta(s)]
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Siendo:

$$\Psi_0(s) = I_{2n} - \mathcal{A}_0 - (\mathcal{A}_\tau + \mathcal{A}_d) e^{-sd}.$$

En seguida se presentará un resultado de gran utilidad para realizar el análisis de robustez para el sistema con incertidumbre en el retardo.

### Teorema 6.1 Teorema de Rouché

*Dadas dos funciones  $f$  y  $g$  analíticas (holomorfas), dentro y sobre un contorno  $\gamma$ . Si  $|g(z)| < |f(z)|$  para toda  $z$ , entonces  $f$  y  $f + g$  tienen el mismo número de raíces dentro de  $\gamma$ .*

Teniendo en cuenta que el diseño del controlador y el observador ha sido desarrollado con la finalidad de obtener estabilidad para el sistema nominal, es decir,  $\det[\Psi_0(s)]$  es estable, entonces, el sistema en lazo cerrado perturbado permanece estable si  $\det[I_n + \Psi_0^{-1}(s) \mathcal{A}_\tau e^{-sd} \Delta(s)]$  no cambia de signo cuando  $s$  barre el eje imaginario. Invocando el Teorema de Rouché, la condición para la estabilidad se define de la siguiente manera:

$$\|Q_d(s)\Delta(s)\|_\infty < 1. \tag{6.16}$$

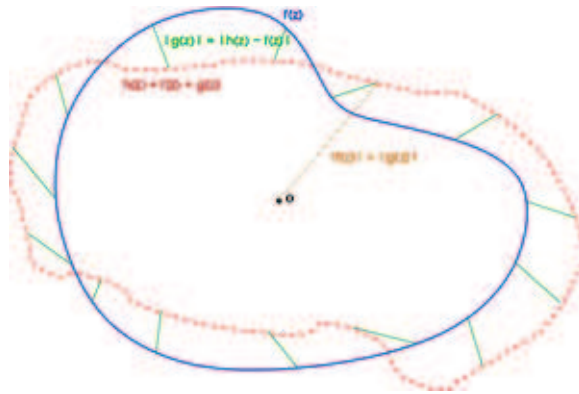


Figura 6.6: Interpretación Geométrica del Teorema de Rouché.

Donde,

$$Q_d(s) = \Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau e^{-sd}.$$

**Observación 6.1** Para toda  $s = j\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $|1 - e^{-sd\delta\theta}| \leq |sd\delta\theta|$ . Entonces, si se puede demostrar estabilidad para  $1 - e^{-sd\delta\theta}$  reemplazado por  $sd\delta\theta$  en el análisis realizado, es posible asegurar que la estabilidad para el sistema con incertidumbre se mantendrá. Esto equivale a sustituir el termino del retardo por su expansión en series de Taylor de primer orden, [40].

Por lo tanto, el máximo límite de incertidumbre  $\delta$  que preserva la estabilidad cuando se considera el peor de los casos en cuanto a  $\theta$ , es decir,  $|\theta| = 1$ , está determinado por la siguiente ecuación:

$$\delta_{max} = \frac{1}{\|sde^{-sd}\Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau\|_\infty}. \quad (6.17)$$

Entonces para cualquier  $|\theta| \leq 1$  y el máximo valor de la incertidumbre  $\delta_{max}$  el determinante  $\det[I_n + \Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau e^{-sd}\Delta(s)]$  no cambia de signo, implicando la ausencia de cruces por cero, y por lo tanto la estabilidad del sistema en lazo cerrado perturbado, asumiendo que el sistema nominal es estable, [27], [40].

**Observación 6.2** Note que para el caso de sistemas de segundo orden inestables con un zero estable y retardo tienen una representación en espacio de estados diferente. Sin embargo, es posible realizar un estudio de robustez similar considerando el sistema en lazo cerrado extendido, es decir, considerando el retardo nominal  $d$  en el diseño del observador y el retardo real  $\tau$  en el proceso original, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= \begin{bmatrix} A_0 + BK_0 & -BK_0 \\ 0 & A_0 - GC_0 \end{bmatrix} x_e(t) + \begin{bmatrix} A_1 + BK_1 & 0 \\ A_1 - GC_1 & 0 \end{bmatrix} (x_e)_\tau(t - \tau) \cdots \\ &\cdots + \begin{bmatrix} 0 & -BK_1 \\ -(A_1 - GC_1) & A_1 - GC_1 \end{bmatrix} (x_e)_d(t - d). \\ &= \mathcal{A}_0 x_e(t) + \mathcal{A}_\tau (x_e)_\tau(t - \tau) + \mathcal{A}_d (x_e)_d(t - d). \end{aligned} \quad (6.18)$$

## 6.4. Ejemplos

A continuación se presentarán algunos ejemplos con la finalidad de mostrar los resultados obtenidos con el análisis de robustez propuesto en este capítulo.

**Ejemplo 6.4.1** Considere el sistema de segundo orden inestable con retardo en el tiempo caracterizado por la siguiente función de transferencia.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s - 0.7)(s - 0.4)} e^{-s}.$$

Los parámetros del sistema están dados de la siguiente manera:

- $\alpha = 1$ ,
- $\tau = 1$ ,

- $a = 0.7$ ,
- $b = 0.4$ .

Es claro que este sistema cumple con las condiciones de estabilidad enunciadas en el Lema 4.1, es decir,

$$\tau = 1 < \frac{1}{a} = 1.4286.$$

Las ganancias  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  calculadas tales que estabilizan el sistema son:

- $k_1 = 100.7$ ,
- $k_2 = 90$ ,
- $g_1 = 80$ ,
- $g_2 = 100.4$ .

Es posible representar el sistema en espacio de estados mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned}A_0 &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, & A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & C &= [0 \ 1].\end{aligned}$$

Con el propósito de calcular el máximo límite de incertidumbre en el término del retardo mediante el análisis presentado en la sección anterior, se ha desarrollado el siguiente programa ejecutado en el software MATLAB.

## Programa

```
%DECLARAR EL SISTEMA EN SU REPRESENTACIÓN EN ESPACIO DE ESTADOS.
```

```
A0=[0.7 0; 0 0.4];
A1=[0 0; 1 0];
B=[1 0]';
C=[0 1];
K=-[100.4 90];
G=[80 100.7]';
n=size(A0);
```

```
%SISTEMA EN LAZO CERRADO EXTENDIDO.
```

```
A0bar=[A0+(B*K) -B*K;zeros(n, n) A0-G*C];
```



```

Atau=[A1 zeros(n,n);A1 zeros(n,n)];
Ad=[zeros(n,n) zeros(n,n);-A1 A1];

%ESTABLECIMIENTO DE LAS FRECUENCIAS SOBRE LAS QUE SE REALIZARÁ EL ANÁLISIS.

f1=0.01;
f2=1000;
N=10000;
i=1;
j=sqrt(-1);
pas=(f2-f1)/N;

%INICIALIZACIÓN DE LOS PASOS DE INTEGRACIÓN DEL PROGRAMA.

test=1;
iter=0;

%CALCULO DE LA NORMA INDUCIDA DEL SISTEMA PARA EL RANGO DE FRECUENCIAS.

for w=f1:pas:f2,
    i=i+1;
    s=j*w;

    Phi0=s*eye(2*n)-(A0bar)-(Atau+Ad)*exp(-s*d);
    Qp=Phi0\Atau;
    P=s*d*exp(-s*d);
    T(i)=norm(Qp*P);
    W(i)=w;
end

%MÁXIMO LÍMITE DE INCERTIDUMBRE.

MaxUnc=max(T);
deltamax=1/MaxUnc;

figure(1)
semilogx(W,T);grid on; hold on;
ylabel('Magnitud')
end

```

La figura 6.7 muestra el análisis en el dominio de la frecuencias realizado para calcular la norma  $H_\infty$  del término  $sde^{-sd}\Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau$ . De acuerdo a la ecuación (6.17) obtenemos:

$$\delta_{max} = 0.057663$$

Este valor de la incertidumbre máxima para el retardo es equivalente en términos de porcentaje a decir que es posible tener un aproximadamente un 5.7663 %. La figura 6.8 muestra el desempeño del sistema en lazo cerrado estabilizado con la estrategia de control propuesta en este trabajo. La línea sólida indica la respuesta del sistema nominal, la línea discontinua muestra la salida del sistema cuando el retardo presenta la incertidumbre  $\delta_{max}$ . Observe que aunque la respuesta del sistema con incertidumbre presenta mayores oscilaciones, el desempeño del proceso prevalece estable.

La tabla 6.1 muestra la relación que existe entre el valor de retardo  $d$  y la máxima incertidumbre  $\delta_{max}$  obtenida mediante el análisis de robustez propuesto en este

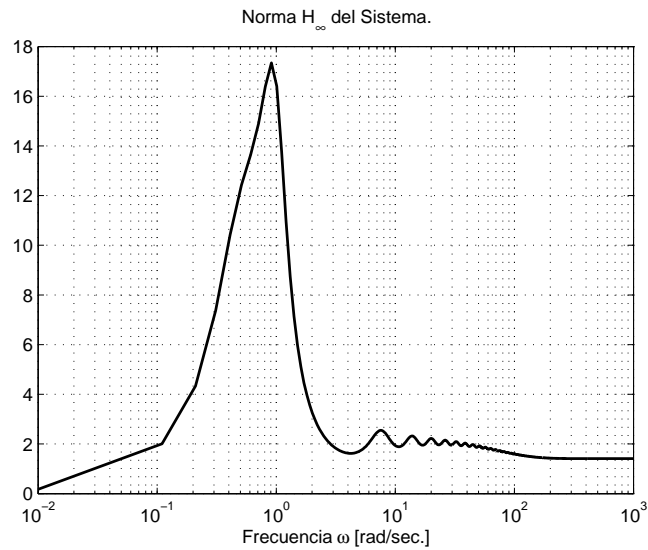


Figura 6.7: Ejemplo 6.4.1. Norma  $H_\infty$  de  $sde^{-sd}\Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau$ .

capítulo. Los valores  $\tau_{min}$  y  $\tau_{max}$  indican el valor de retardo mínimo y el máximo que puede presentar la planta original asegurando la estabilidad del sistema en lazo cerrado, respectivamente. Es claro que existe un compromiso directo entre el tamaño del retardo y el límite de incertidumbre, es decir, un valor pequeño de retardo permite grandes incertidumbres, (en términos de  $\delta_{max}$ ), y viceversa, dicha relación es mostrada gráficamente en la figura 6.9.

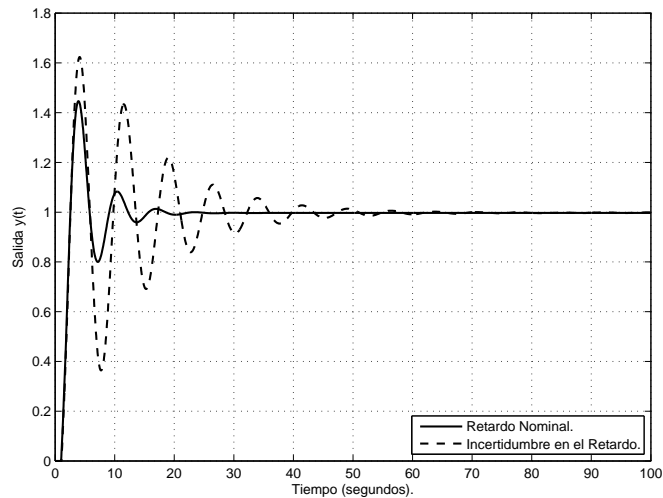


Figura 6.8: Ejemplo 6.4.1. Análisis de Robustez.

**Ejemplo 6.4.2** *El siguiente ejemplo es presentado para ilustrar el análisis de robustez con respecto al retardo aplicado en los sistemas de alto orden, considere el siguiente sistema inestable con retardo:*

$d$	$\delta_{max}$	$\tau_{min}$	$\tau_{max}$
0.1	3.855741	–	0.485574
0.2	1.739842	–	0.547968
0.3	1.026864	–	0.608059
0.4	0.665379	0.133848	0.666152
0.5	0.441873	0.279064	0.720936
0.6	0.293497	0.423902	0.776098
0.7	0.194797	0.563642	0.836358
0.8	0.129188	0.696650	0.903350
0.9	0.085734	0.822839	0.977161
1.0	0.057023	0.942977	1.057023

Tabla 6.1: Ejemplo 6.4.1. Análisis de Robustez para Diferentes Valores del Retardo.

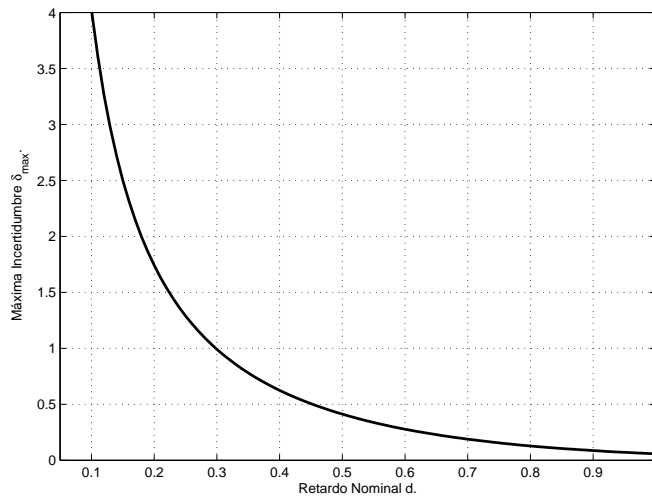


Figura 6.9: Ejemplo 6.4.1. Relación entre  $d$  y  $\delta_{max}$ .

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1.5e^{-s}}{(s - 0.4)(s - 0.2)(s + 3)}$$

Los parámetros del sistema son:

- $\alpha = 1.5$ ,
- $\tau = 1$ ,
- $a = 0.4$ ,
- $b = 0.2$ ,
- $c_1 = 3$ .

El sistema dado en el ejemplo 6.4.2 cumple con las condiciones de estabilidad enunciadas en el Lema 5.2, ya que:

$$\tau = 1 < \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} = 2.22.$$

Por lo tanto las ganancias  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  calculadas tales que estabilizan el sistema son:

- $k_1 = 6.933$ ,
- $k_2 = 10$ ,
- $g_1 = 133.33$ ,
- $g_2 = 100.2$ .

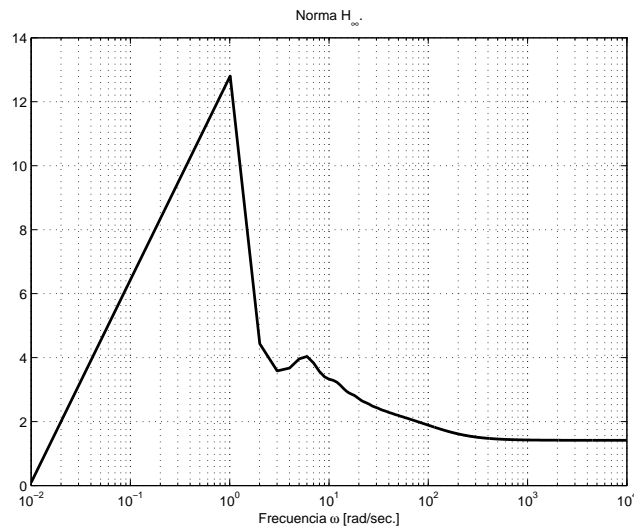


Figura 6.10: Ejemplo 6.4.2. Norma  $H_\infty$  de  $sde^{-sd}\Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau$ .

Es posible realizar un programa similar al presentado en el ejemplo anterior para calcular el máximo límite de incertidumbre para el presente ejemplo. La figura 6.10 muestra el análisis en el dominio de las frecuencias realizado para calcular la norma  $H_\infty$  del término  $sde^{-sd}\Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau$ . De acuerdo a la ecuación (6.17) obtenemos:

$$\delta_{max} = 0.07809$$

Este valor de la incertidumbre máxima para el retardo es equivalente en términos de porcentaje a decir que es posible tener un aproximadamente un 7.809%. La figura 6.11 muestra el desempeño del sistema en lazo cerrado estabilizado con la estrategia de control propuesta en este trabajo. La línea sólida indica la respuesta del sistema nominal, la línea discontinua muestra la salida del sistema cuando el retardo presenta la incertidumbre  $\delta_{max}$ . Observe que aunque la respuesta del sistema con incertidumbre presenta mayores oscilaciones, el desempeño del proceso prevalece estable, mostrando así que el análisis de robustez presentado es efectivo también para sistemas de alto orden.

La tabla 6.2 muestra la relación que existe entre el valor de retardo  $d$  y la máxima incertidumbre  $\delta_{max}$  obtenida mediante el análisis de robustez propuesto en este

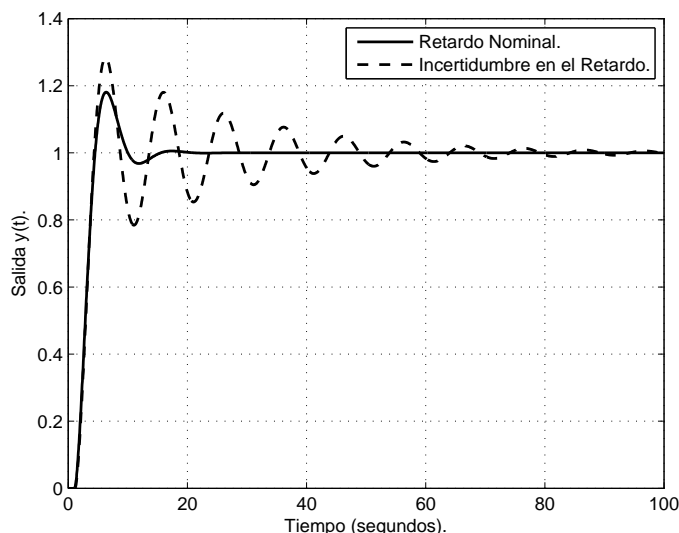


Figura 6.11: Ejemplo 6.4.2. Análisis de Robustez.

capítulo. Los valores  $\tau_{min}$  y  $\tau_{max}$  indican el valor de retardo mínimo y el máximo que puede presentar la planta original asegurando la estabilidad del sistema en lazo cerrado, respectivamente. Es claro que existe un compromiso directo entre el tamaño del retardo y el límite de incertidumbre, es decir, un valor pequeño de retardo permite grandes incertidumbres, (en términos de  $\delta_{max}$ ), y viceversa, dicha relación es mostrada gráficamente en la figura 6.12.

$d$	$\delta_{max}$	$\tau_{min}$	$\tau_{max}$
0.1	1.535910	–	0.253591
0.2	0.686280	0.062744	0.337256
0.3	0.406751	0.177975	0.422025
0.4	0.270657	0.291737	0.508263
0.5	0.192737	0.403631	0.596369
0.6	0.144609	0.513235	0.686765
0.7	0.114094	0.620134	0.779866
0.8	0.095018	0.723985	0.876015
0.9	0.083798	0.824582	0.975418
1	0.078090	0.921910	1.078090

Tabla 6.2: Ejemplo 6.4.2. Análisis de Robustez para Diferentes Valores del Retardo.

**Ejemplo 6.4.3** Finalmente presentaremos un ejemplo con un sistema con dos polos inestables y con un zero estable. El análisis de robustez similar se realizará para encontrar el máximo límite de incertidumbre. Considere el sistema caracterizado por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s + 6)}{(s - 2)(s - 1)} e^{-0.4s}$$

Los parámetros del sistema son los siguientes:

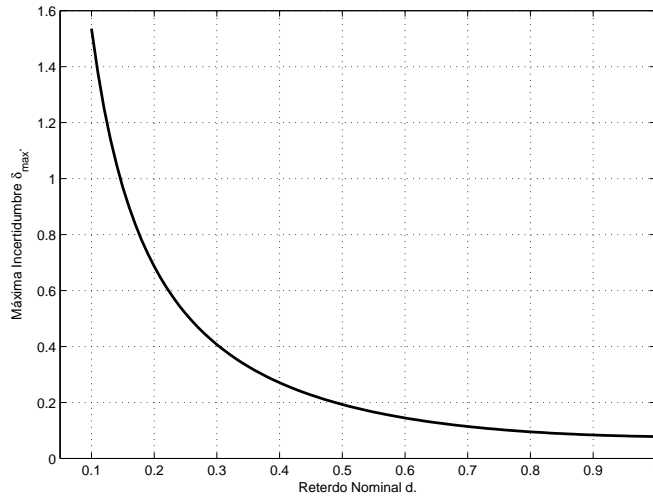


Figura 6.12: Ejemplo 6.4.2 Relación entre  $d$  y  $\delta_{max}$ .

- $\tau = 0.4$
- $\alpha = 1$
- $\beta = 6$
- $a = 2$
- $b = 1$

Observe que el proceso cumple con las condiciones de estabilidad presentadas en el Lema 5.1, es decir:

$$\tau = 0.4 < \frac{1}{a} = 0.5$$

Las ganancias estabilizantes calculadas para este ejemplo son:

- $k_1 = 8,$
- $k_2 = 1.5,$
- $g_1 = 2.5,$
- $g_2 = 7.$

La figura 6.13 muestra el análisis presentado para el ejemplo 6.4.3, con lo cual se encuentra el siguiente valor:

$$\delta_{max} = 0.013709$$

Usando este valor de  $\delta_{max}$ , la simulación numérica del ejemplo es ilustrada en la figura 6.14, la línea sólida muestra el desempeño del sistema en lazo cerrado con el retardo nominal en la planta, por otro lado, la línea discontinua indica la respuesta del proceso con perturbación en el termino del retardo.

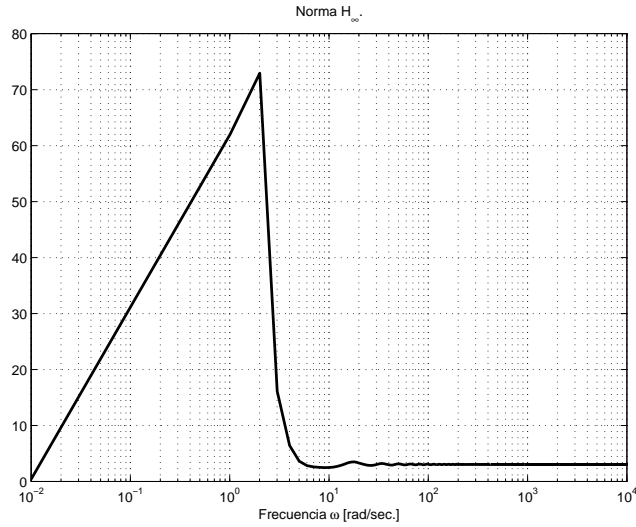


Figura 6.13: Ejemplo 6.4.3. Norma  $H_\infty$  de  $sde^{-sd}\Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau$ .

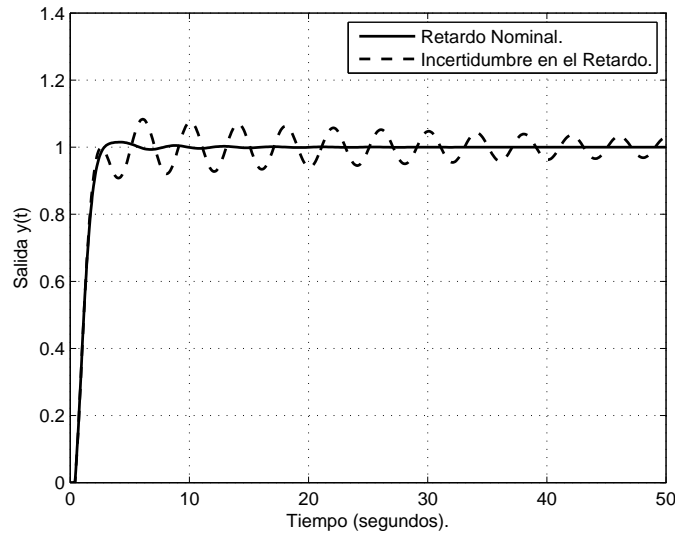


Figura 6.14: Ejemplo 6.4.3. Análisis de Robustez.

## Conclusión

Este capítulo está dedicado a presentar un análisis de robustez para la estrategia de control propuesta en esta tesis. Algunos conceptos importantes relacionados con el control robusto son presentados como primer paso. Posteriormente se realiza el análisis de robustez con la finalidad de obtener un límite máximo para la incertidumbre presentada en el término del retardo. Cabe mencionar que el análisis está basado en la suposición de que el esquema observador se diseña con el valor del retardo nominal, y que la perturbación en el valor del retardo se presenta en la planta original. El análisis demuestra que existe una relación directa entre la magnitud del tiempo de retardo nominal y el límite máximo de incertidumbre encontrado.

---

# CONCLUSIONES GENERALES

---

El estudio de los sistemas con retardo representa un campo de interés que ha sido ampliamente desarrollado en los últimos años, numerosos trabajos han sido dedicados al análisis y control de sistemas con retardo. En este trabajo de tesis se presenta una estrategia de control sencilla con la finalidad de estabilizar sistemas lineales invariantes en el tiempo, con dos polos inestables y con retardo. La estructura de control presentada se basa en la teoría de observadores de estado, lo cual permite estimar las variables internas del proceso para usarlas posteriormente como señales de control. De esta manera, solamente cuatro ganancias proporcionales y el modelo de la planta a controlar son suficientes para obtener un comportamiento estable del sistema en lazo cerrado. El cálculo de las ganancias estabilizantes es sencillo y puede realizarse fácilmente mediante herramientas de análisis conocidas del control clásico tales como diagramas de Nyquist, etc. Además, se expresan las condiciones *necesarias y suficientes* que aseguran la ganancia del esquema estabilizante propuesto, obteniendo una relación entre el tiempo de retardo y la constante de tiempo inestable dominante del sistema. Se presentan tanto simulaciones numéricas, como implementaciones electrónicas del esquema de control, mediante una planta construida con amplificadores operacionales, con la finalidad de ilustrar el desempeño obtenido con la estrategia de control propuesta, mostrando que el sistema es confiable incluso ante condiciones iniciales diferentes y variaciones paramétricas presentadas en la planta a controlar.

Más tarde, se extiende el resultado principal del trabajo, aplicando la estrategia de control propuesta a sistemas con dos polos inestable, un cero estable y con retardo, y a sistemas de alto orden con dos polos inestables con retardo. De igual forma, se expresan las condiciones de estabilidad *necesarias y suficientes* para cada caso en particular. Nuevamente se utilizan simulaciones numéricas y se implementa la estrategia de control mediante plantas construidas electrónicamente con la finalidad de mostrar la respuesta del sistema en lazo cerrado.

Finalmente se aplica un análisis de robustez al sistema en lazo cerrado con el objetivo de encontrar un límite máximo de incertidumbre para el término de retardo tal que el sistema preserve su estabilidad. Dicho análisis revela una relación directa entre la magnitud del tiempo de retardo y el límite máximo de incertidumbre.



## Perspectivas Futuras

Entre las principales perspectivas que se tienen para el trabajo desarrollado en esta tesis están:

- Extensión del resultado principal a casos más generales.
- Mejoramiento de las condiciones de estabilidad.
- Implementación de la estrategia de control en procesos prácticos.
- Seguimiento de señales de referencia.
- Rechazo de perturbaciones del tipo escalón.
- Análisis de robustez para incertidumbres presentadas en los parámetros del sistema.
- Diseño de controladores robustos para esta clase de sistemas con retardo.

# Publicaciones

---

*Observer Based Schema for the Stabilization of Delayed Systems with  
Two Unstable Poles,*

David F. Novella Rodríguez and Basilio del Muro Cuéllar,  
LACC Latin American Control Conference,  
Santiago, Chile, 2010.

# Observer Based Schema for the Stabilization of Delayed Systems with Two Unstable Poles<sup>★</sup>

David Novella Rodríguez<sup>\*</sup> Basilio Del Muro Cuéllar<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> *Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,  
Unidad Culhuacan, Instituto Politécnico Nacional,  
Santa Ana 1000, México D.F., 04430, México  
(e-mail: dyvid@msn.com).*

<sup>\*\*</sup> *Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,  
Unidad Culhuacan, Instituto Politécnico Nacional,  
Santa Ana 1000, México D.F., 04430, México  
(e-mail: bdelmuro@yahoo.com).*

---

**Abstract:** This work considers the problem of stabilization of a class of linear systems with two unstable poles subject to a input-output delay. As a first step, the conditions to ensure the stability of the system with an output injection strategy are presented. Then, in a second step, the stability conditions are used to design an observer based schema that provides an stable closed loop system.

---

## 1. INTRODUCTION

Time delays are frequently present in the modeling of different classes of systems such as chemical processes, manufacturing chains, economy systems, etc., and are due to several mechanisms like material transport, recycling loops or even by the approximation of high order systems by means of a lower order one plus dead time (Kolmanovskii and Myshkis [1992], Skogestad [2003]). From a control viewpoint, time delays become a challenging situation mainly when the system is unstable.

Several control strategies have been developed to deal with time delays. A common approach can be approximate the time delay operator by means of a Taylor or Pade series expansions which could leads to a non-minimum-phase system with rational transfer function representation (Hu and Wang [2002], Marshall [1979]). Another compensation strategy consists in counteracting the time delay effects by means of strategies intended to predict the effects of current inputs over future outputs. The Smith prediction compensator (SPC) is the classic example of this kind of prediction strategy which provides a future estimation by means of a type of open-loop observer schema (Figure 1) (Palmor [1996], Smith [1957]). The main limitation of the original SPC is the fact that the prediction schema has not a stabilization step, which restricts its application to open-loop stable plants. To get over this problem, some modifications of the SPC original structure have been proposed to deal with non-stable delayed process. (Seshagiri *et al.*), for instance, has presented an efficient modification to the Smith predictor in order to control unstable first order system plus time delay (Seshagiri *et al.* [2009]). With a different perspective, (Normey-Rico *et al.*), (Normey-Rico and Camacho [2008]) proposes a

modification to the original Smith Structure in order to deal with unstable first order delayed systems. Using a similar structure, the result is extended to delayed high order systems (Normey-Rico and Camacho [2009]). In both works, a robustness analysis is done concluding that for unstable dead time dominant systems, the closed-loop system can be unstabilized with an infinitesimal value of the modeling error, i.e., that robustness is strongly dependent on the relationship  $\tau/\tau_{un}$ , where  $\tau$  is the process time delay and  $\tau_{un}$  the dominant unstable time-constant. For the control scheme proposed in this later two works, it can be easily proven that in the case of unstable plants, the internal stability is not guaranteed. In fact it is obtained an unstable estimation error and, as a result, a minimal initial condition error, between the original plant and the model produces an internal unbounded signal. Notice that in a practical situation it is no possible to exactly measure the initial condition of the plant to assign the same value to the model considered on the modified Smith compensator.

This work deal with the problem of stabilization of a particular class of unstable linear second order systems plus time delay with both unstable poles. The convergence of the error estimation and then the internal stability conditions of the predictor schema are analyzed and stated.

The document is organized as follows, after a brief introduction, in the Section 2 it is presented the class of systems studied and a brief recall of the original Smith prediction compensator (SPC) also. In Section 3, are presented some preliminary results which are used in the design of the prediction schema proposed in this work. Then, in the Section 4 is stated the main result. In the Section 5 are given some examples showing the performance of the control strategy proposed, first by mean of numerical simulation and then applying the prediction schema to a process built with operational amplifiers. Finally in the section 6, are presented some conclusions.

---

<sup>★</sup> This work was supported in part by CONACyT-México, Under Grant 61713.

## 2. CLASS OF SYSTEMS

Consider the follow class of single-input single-output (SISO) linear systems with delay at the input:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}e^{-\tau s} = G(s)e^{-\tau s} \quad (1)$$

where  $U(s)$  and  $Y(s)$  are the input and output signals respectively,  $\tau \geq 0$  is the time delay,  $N(s)$  and  $D(s)$  are polynomials in the complex variable  $s$  and  $G(s)$  is the delay-free transfer function. Notice that with respect to the class of systems (1) a traditional control strategy based on an output feedback of the form:

$$U(s) = [R(s) - Y(s)]Q(s) \quad (2)$$

Produces a closed-loop system given by:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Q(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + Q(s)G(s)e^{-\tau s}} \quad (3)$$

Where the exponential term  $e^{-\tau s}$  located at the denominator of the transfer function (3) leads to a system with and infinite number of poles and where the closed-loop stability properties must be carefully stated. From the classical structure of the Smith predictor given in Figure 1, its known that the transfer function of the closed-loop system is obtained as follows:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Q(s)G(s)}{1 + Q(s)G(s)}e^{-\tau s} \quad (4)$$

Under ideal conditions, i.e., exact knowledge of the plant parameters, the SPC provides a successful future estimation  $\tau$  time units ahead of the  $y(t)$  signal, which could be used like a control signal in a specific feedback scheme ( Palmor [1996], Skogestad [2003]). Unfortunately, the classical structure of the SPC is restricted to stable process. Different authors have proposed several modifications to the original SPC structure to give solution to some particular cases ( Normey-Rico and Camacho [2009], Seshagiri et al. [2009]).

This work proposes a modification to the classical SPC structure in order to stabilize a system characterized by:

$$G(s) = \frac{\alpha}{(s-a)(s-b)}e^{-\tau s} \quad (5)$$

Where  $a \geq b > 0$ . The control schema proposed has been design based on a traditional observer theory, hence, only the plant model and two static gains are enough to get an adequate estimation of the internal delay free variable which will be used in the final stabilizing schema.

### 2.1 Preliminary Results

The following two preliminary results are used later in the proof of the main results of this work.

Consider the follow unstable first order system plus time delay:

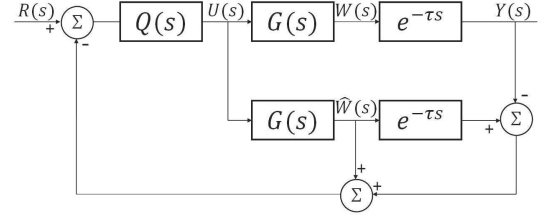


Fig. 1. Classical Smith predictor compensator schema.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-\tau s} = \frac{\alpha}{s-a}e^{-\tau s}, \quad (6)$$

with  $a > 0$ , and a proportional output feedback as follows:

$$U(s) = R(s) - kY(s) \quad (7)$$

Which produces a closed-loop system:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{s-a + k e^{-\tau s}} \quad (8)$$

The following result has been widely studied in the literature and the proof can be easily obtained by considering different approaches as a classical frequency domain. An alternative simple proof based on a discrete time approach is shown in ( Muro-Cuellar et al. [2008]).

*Lemma 1.* Consider the delayed system (6) and the proportional output feedback (7). Then, there exist a proportional gain  $k$  such that the closed loop system (8), is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ .

Now, consider the system characterized by:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-\tau s} = \frac{\alpha}{(s-a)(s+b)}e^{-\tau s}, \quad (9)$$

with  $a, b > 0$ . Note that the system has only one unstable pole. With the proportional output feedback (7), we get a closed-loop system as follows:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{[(s-a)(s+b)] + k\alpha e^{-\tau s}} \quad (10)$$

*Lemma 2.* Consider the delayed system (9) and the proportional output feedback (7). Then, there exist a proportional gain  $k$  such that the closed loop system (10), is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ .

The proof of this result can easily be obtained by mean of different approaches, as the frequency domain based approach shown in ( Muro-Cuellar et al. [2009]).

## 3. MAIN RESULT

Consider the class of systems studied in this work and characterized by the transfer function (5) with  $a, b > 0$  and assuming without lost of generality  $a \geq b$ . A predictor-observer based control strategy it is proposed in Figure 3,

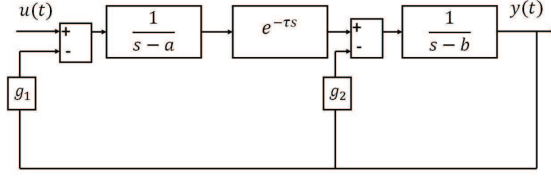


Fig. 2. Predictor-Observer Schema.

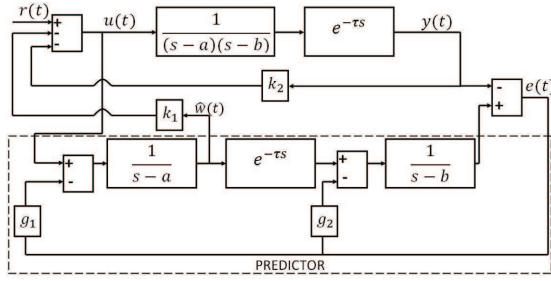


Fig. 3. Control Strategy Proposed.

which allows to get  $\hat{w}(t)$ , an estimation of the signal  $w(t)$ , to be used as a control signal for the real process.

As a preliminary result, the stability conditions for the auxiliary closed-loop system shown in Figure 2 are stated. This conditions will be used later in the proof of the main result of this work.

*Lemma 3.* Consider the delayed system (5), and the static output injection scheme shown in Figure 2. There exist constants  $g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ .

**Proof.** Consider the delayed system (5) and the static output injection scheme shown in Figure 2, with  $g_1 = 0$ . The closed loop transfer function is:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s-a)(s-b+g_2)} \quad (11)$$

Let us assume that  $g_2 > b$ . Then we get a system with only one unstable pole, which can be stabilized if satisfies the stability condition given in the Lemma 2, i.e., considering the delayed system (5), and the static output injection scheme shown in Figure 2, there exist constants  $g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{a} - \frac{1}{g_2-b}$ . As  $g_2$  can be as large as we wish, then  $\tau < \frac{1}{a} - \frac{1}{g_2-b}$ .

As a consequence of the previous developments we can state the following result.

*Lemma 4.* Consider the predictor schema shown in Figure 3. Then, there exist proportional gains  $g_1$  and  $g_2$  such that  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{w}(t) - w(t)] = 0$  if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ .

**Proof.** The proof can be easily done considering the stability conditions given in Lemma 3. With this aim, consider the dynamics of the system shown in Figure 2, assuming  $g_1 = 0$ . We can get the transfer function (11), with a state space representation (controllable and observable):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t+\tau) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (12)$$

Considering now the closed loop system with  $g_1 \neq 0$  we get:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t) - Bg_1Cx(t-\tau) \quad (13)$$

Let us consider now the predictor system shown in Figure 3. The dynamics of this system can be written in state space form as:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Bg_1 & -Bg_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u(t) \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} y(t+\tau) \\ \hat{y}(t+\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Where  $\hat{x}(t)$  is the estimation of  $x(t)$ . Defining first the state prediction error  $e_x(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ . It is possible to describe the behavior of the error signal as:

$$\dot{e}_x(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = A(\hat{x}(t) - x(t)) - Bg_1C(\hat{x}(t-\tau) - x(t-\tau)) \quad (15)$$

$$\dot{e}_x(t) = Ae_x(t) - Bg_1Ce_x(t-\tau)$$

It is clear that the error dynamics (15), are equivalents to the dynamics of the predictor system (13). Therefore, from the previous Lemma, there exist proportional gains  $g_1$  and  $g_2$  such that  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{w}(t) - w(t)] = 0$  if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ .

Now take into account the previous developments we can state the main result of this work.

*Lemma 5.* Consider the predictor-observer based control schema shown in Figure 4. There exist  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ .

**Proof.** Consider the time-delay system (5) and the static feedback schema shown in Figure 4. the stability conditions for this system will be stated now. Consider the system with  $k_2 = 0$ . The corresponding transfer function is:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s-a+k_1)(s-b)} \quad (16)$$

Let us assume  $k_1 > a$ . Then we get a different system, with only one unstable pole, which can be stabilized if satisfies

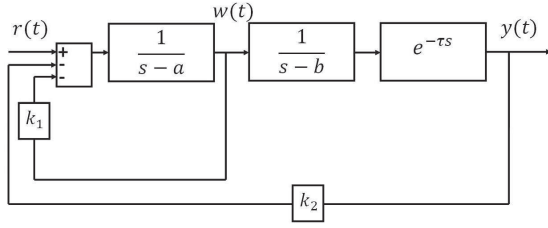


Fig. 4. State Feedback Schema.

the stability condition given in the Lemma 2, i.e., there exist constant gains  $k_1$  and  $k_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{b} - \frac{1}{k_1 - a}$ .

Now, as  $k_1$  can be as large as we wish, there exist proportional gains  $k_1$  and  $k_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{b} - \frac{1}{k_1 - a}$ , i.e., if and only if  $\tau < \frac{1}{b}$ .

As stated, the signal  $w(t)$  is not accessible in the system, then it is obtained from the predictor-observer schema shown in Figure 3. As the system is linear and time invariant, the predictor-observer based control strategy complies the separation property (Kailath [1980]), i.e. the controller and the observer can be designed independently, thus, as assuming a correct estimation of the  $w(t)$  signal, and reminding that  $a > b$ , it is clear that the stability conditions for the predictor schema are more restrictive than the states static feedback schema stability conditions,  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ , therefore, there exist  $k_1, k_2, g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ .

#### 4. SIMULATION RESULTS

The follow examples are used to illustrate the obtained results.

**Example 1.** Consider the following unstable delayed system:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s-0.7)(s-0.4)} e^{-1s} \quad (17)$$

Let us choose  $a = 0.7$  and  $b = 0.4$ . As  $\tau = 1$ , it is clear that the stability conditions given in Lemma 3 are satisfied, i.e., there exist a predictor schema such that the closed-loop system is stable because  $\tau = 1 < \frac{1}{a} = 1.428$ . The constant gains computed are  $k_1 = 100.7$ ,  $k_2 = 90$ ,  $g_1 = 80$  and  $g_2 = 100.4$ . The closed-loop behavior are shown in Figures 5 and 6, the Figure 5 shown the numerical simulation results and the Figure 6 shown the results of the control strategy implemented on a real plant designed with operational amplifiers.

**Example 2.** Consider the follow unstable delayed system:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s-2)(s-1)} e^{-0.4s} \quad (18)$$

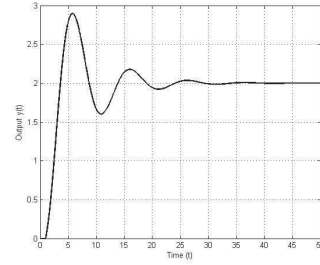


Fig. 5. Example 1: Numerical Simulation Results.

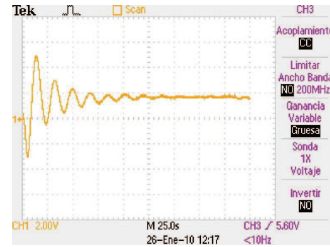


Fig. 6. Example 1: Control Strategy Implemented on a Real Plant.

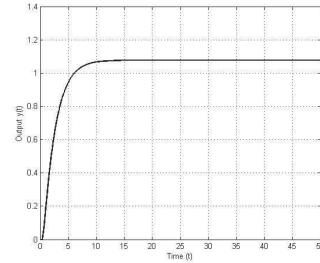


Fig. 7. Example 2: Numerical Simulation Results.

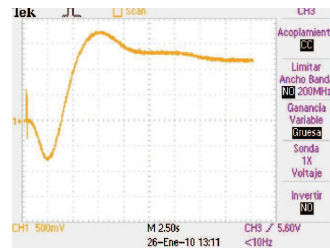


Fig. 8. Example 2: Control Strategy Implemented on a Real Plant.

Let be  $a = 2$ ,  $b = 1$  and  $\tau = 0.4$ , it is clear that the stability conditions given in Lemma 3, there exist a predictor schema such that the closed-loop system is stable because  $\tau = 0.4 < \frac{1}{a} = 0.5$ . The proportional gains computed are  $k_1 = 102$ ,  $k_2 = 120$ ,  $g_1 = 230$  and  $g_2 = 101$ . The closed-loop behavior are shown in Figures 7 and 8, the Figure 7 shown the numerical simulation results

and the Figure 8 shown the results of the control strategy implemented on a real plant designed with operational amplifiers.

## 5. CONCLUSIONS

Unstable systems with time delay are a challenging control problem, when the system has two unstable poles plus time delay the problem is even greater. This work present a stabilization strategy to affront this problem, it is a predictor-observer schema which, under explicit conditions, provide a estimation of a part of the plant free-delay to be feedback as a control signal to stabilize the closed-loop system.

The numerical simulation results and the results obtained results of the control strategy implemented on a real process can show the performance reached for the proposed strategy, both ideal conditions and with different initial conditions, also showing a satisfactory performance regardless the parametrical variations.

## REFERENCES

- H. Hu and Z. Wang. *Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, USA, 1980.
- V. Kolmanovskii and A. Myshkis. *A. Applied Theory of Functional Differential Equations*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands, 1992.
- J. E. Marshall. *Control of Time Delay Systems*. Peter Peregrinus LTD, New York, 1979.
- B. Del Muro-Cuéllar, J.F. Márquez-Rubio, M. Velasco-Villa, and J. Alvarez-Ramirez. Stabilization strategy for unstable first order linear systems with large time delay. *ICMIC*, 2008.
- B. Del Muro-Cuéllar, O. A. González, and Y. A. Pedraza. Stabilization of high order systems with delay using a predictor schema. 2009.
- J. E. Normey-Rico and E. F. Camacho. Unified approach for robust dead-time compensator design. *Journal of Process Control*, 19:38–47, 2009.
- Julio E. Normey-Rico and Eduardo. F. Camacho. Dead-time compensators: A survey. *Control Engineering Practice*, 16(4):407–428, 2008.
- Z. J. Palmor. Time delay compensation smith predictor and its modifications. *The control Handbook*, pages 224–237, 1996.
- R. A. Seshagiri, V. S. R. Rao, and M. Chidambaram. Simple analytical design of modified smith predictor with improved performance for unstable first-order plus time delay (fodtp) processes. *Ind. Eng. Chem. Res*, 46(13):4561–4571, 2009.
- S. Skogestad. Simple Analytic Rules for Model Reduction and PID Controller Tuning. *Journal of Process*, 2003.
- O. J. M. Smith. Close Control of Loops with Dead Time. *Chem. Eng. Prog.*, 53:217–219, 1957.

*A Simple Observer Based Controller for the Stabilization of Systems  
with Two Unstable Poles Plus Time Delay,*

David Novella Rodríguez, Basilio del Muro Cuéllar and Olivier  
Sename,

19th Mediterranean Conference on Control and Automation,  
Corfu, Greece, 2011.



# A Simple Observer Based Controller for the Stabilization of Systems with Two Unstable Poles Plus Time Delay.\*

David Novella Rodríguez<sup>†</sup>, Basilio Del Muro Cuéllar<sup>†</sup> and Olivier Sename<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacan,  
Instituto Politécnico Nacional, Santa Ana 1000, México D.F., 04430, México.  
(e-mail: dnovellar@gmail.com, bdelmuro@yahoo.com).

<sup>‡</sup>GIPSA-Lab Department of Control Systems, Grenoble INP, ENSE3,  
BP46 38402, Saint Martin d'Hères Cedex, GRENOBLE, FRANCE.  
(e-mail: olivier.sename@gipsa-lab.grenoble-inp.fr).

**Abstract**—This work considers the problem of the stabilization of linear time invariant systems with two unstable poles plus time delay. For this, we will proposed a simple observer based controller in order to stabilize the system. A robustness analysis with respect to the delay uncertainty is presented as well as numerical examples and electronic implementation of the proposed schema in order to illustrate the performance of the closed loop system.

## I. INTRODUCTION.

Time-delay is the property of a physical system by which the response to an applied signal is delayed in its effect. Systems with delays are very common in the world, they appears in various systems as biological, ecological, social, engineering systems, etc., and are due to several mechanisms like material or energy transport, recycling loops, etc.,. In addition, actuators, sensors and field networks that are involved in feedback loops usually introduce such delays, [16]. Also delays can be used in modeling reduction where high-order (finite-dimensional) systems are approximated (in some norm sense) by low order systems with delays, [13]. It is known that time-delay is often a source of complex behaviors (oscillations, instability, bad performance), in many dynamic systems, and thus considerable attention has been paid on the stability analysis and controller design of time delay systems. Hence, there exist a great motivation to study of delay effects on dynamical systems properties for two main reasons: first to understand how the delay presence may deteriorate the behavior of the system, and second to control their effects for better performance achieved on closed-loop systems, [5], [1].

Several control strategies have been developed to deal with delayed systems. A common approach is to approximate the time-delay operator by means of a Taylor or Pade series which could leads to a non minimum-phase system with rational transfer function representation. Another classical control approaches for time-delay systems include Proportional-Integral-Derivative (PID) control, classical smith predictors (SPC), etc, [8], [14].

Open-loop unstable processes arise frequently in the chemical and biological systems and are fundamentally difficult to

control. Unstable time-delay systems represent a challenge for control design, for instance the SPC scheme has not a stabilization step, which restricts its application to open-loop stable plants. To get over this problem, some modifications of the SPC original structure have been proposed to deal with non-stable delayed process, for instance, [11] has presented an efficient modification to the Smith predictor in order to control unstable first order system plus time delay. With a different perspective, [7] proposes a modification to the original Smith Structure in order to deal with unstable first order delayed systems. Using a similar structure, the result is extended to delayed high order systems [6]. In the last works, a robustness analysis is done concluding that for unstable dead time dominant systems, the closed-loop system can be unstabilized with an infinitesimal value of the modeling error, i.e., that robustness is strongly dependent on the relationship  $\tau/\tau_{un}$ , where  $\tau$  is the process time delay and  $\tau_{un}$  the dominant unstable time-constant. For the control scheme proposed in both latter works, it can be easily proven that in the case of unstable plants, the internal stability is not guaranteed. In fact it is obtained an unstable estimation error and, as a result, a minimal initial condition difference between the original plant and the model produces an internal unbounded signal. Notice that in a practical situation it is not possible to exactly measure the initial condition of the plant to assign the same value to the model considered on the modified Smith compensator.

Many chemical and biological systems exist whose dynamics present second-order behavior. Continuous stirred tank reactors, polymerization reactors and bioreactors are inherently unstable by design, these types of systems can be modeled as open-loop unstable second-order plus time delay models, [12], [9]. This paper is concerned with the stabilization problem of systems with two unstable poles plus time delay. The control schema relies on an observer-based structure with a memory observer and a memoryless state feedback. On the contrary of modified Smith predictors, the scheme only contains discrete time delay (and not distributed ones) which makes easy its practical implementation (see [16] for details on numerical implementation of modified Smith predictor scheme). This paper is organized as follows, the Section 2 is dedicated to the problem formulation. The

\*This work was supported in part by CONACyT-México, Under Grant 61713.

Section 3 yields the preliminaries results used to obtain the main result of this work. An observer based controller is proposed in order to stabilize the unstable system in the Section 4, also the stability conditions of the proposed controller schema are stated. Then, in section 5 a robustness analysis for the observer based schema with respect to the uncertainty in the delay operator is presented. Numerical simulations are presented in order to show the controller performance and the control strategy is implemented on a real electronic plant built with operational amplifiers. Finally conclusions and future perspectives are stated.

## II. PROBLEM STATEMENT.

Consider the following class of single-input single-output (SISO) linear systems with delay at the input:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}e^{-\tau s} = G(s)e^{-\tau s}. \quad (1)$$

Where  $U(s)$  and  $Y(s)$  are the input and output signals respectively,  $\tau \geq 0$  is the time delay,  $N(s)$  and  $D(s)$  are polynomials in the complex variable  $s$  and  $G(s)$  is the delay-free transfer function. Notice that with respect to the class of systems (1) a traditional control strategy based on an output feedback of the form:

$$U(s) = [R(s) - Y(s)]Q(s). \quad (2)$$

Produces a closed-loop system given by:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Q(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + Q(s)G(s)e^{-\tau s}}. \quad (3)$$

Where the exponential term  $e^{-\tau s}$  located at the denominator of the transfer function (3) leads to a system with an infinite number of poles and where the closed-loop stability properties must be carefully stated. This work proposes an observer based control scheme in order to stabilize a system characterized by the following transfer function:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{(s-a)(s-b)}e^{-\tau s}. \quad (4)$$

Where, without loss of generality,  $a \geq b > 0$ ,  $\tau > 0$ . The control schema proposed has been designed based on a traditional observer theory, hence, only the plant model and two static gains are enough to get an adequate estimation of an internal delay free variable which will be used in the final stabilizing control schema.

## III. PRELIMINARY RESULTS

Preliminary results are presented, which will be used later in order to state the stability conditions of the studied system.

Consider the following unstable first order system plus time delay:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-\tau s} = \frac{\alpha}{s-\sigma}e^{-\tau s}. \quad (5)$$

With  $\sigma > 0$ , and a proportional output feedback control as follows:

$$U(s) = R(s) - kY(s). \quad (6)$$

Which produces a closed-loop system:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{s - \sigma + k\alpha e^{-\tau s}}. \quad (7)$$

The following result has been widely studied in the literature and the proof can be easily obtained by considering different approaches as a classical frequency domain. An alternative simple proof based on a discrete time approach is shown in [3].

*Lemma 1:* Consider the delayed system (5) and the proportional output feedback (6). Then, there exists a proportional gain  $k$  such that the closed loop system (7), is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{\sigma}$ .

Now, consider the system characterized by:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-\tau s} = \frac{\alpha}{(s-\sigma)(s+\phi)}e^{-\tau s}. \quad (8)$$

With  $\sigma, \phi > 0$ . Note that the system has only one unstable pole. With the proportional output feedback (6), we get a closed-loop system as follows:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{[(s-\sigma)(s+\phi)] + k\alpha e^{-\tau s}}. \quad (9)$$

*Lemma 2:* Consider the delayed system (8) and the proportional output feedback (6). Then, there exists a proportional gain  $k$  such that the closed loop system (9), is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\phi}$ .

The proof of this result can easily be obtained by mean of different approaches, as the frequency domain based approach shown in [4].

## IV. CONTROL STRATEGY PROPOSED.

Consider the class of systems studied in this work and characterized by the transfer function (4) with  $a, b > 0$  and assuming without loss of generality  $a \geq b$ . An observer based control strategy is proposed, which allows to get an estimation of the internal variables of the system to be used as control signals for the real process.

As a first step, the stability conditions for the controller and the observer systems are stated separately. This conditions will be used later to submit the observer based controller closed loop stability conditions.

### A. Controller Schema.

Now, taking into account the proportional state feedback control strategy shown in the Figure 1.

*Lemma 3:* Consider the delayed system (4), and the state feedback controller shown in Figure 1. There exist constants  $k_1$  and  $k_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{b}$ .

*Proof:*

*Sufficiency.* Let us consider  $\tau < \frac{1}{b}$ . Then,  $\tau = \frac{1}{b} - \beta$ , for some  $\beta > 0$ . Therefore, there exists  $k_1$  such that  $\beta > \frac{1}{\alpha k_1 - a} > 0$ . Then  $\tau < \frac{1}{b} - \frac{1}{\alpha k_1 - a}$ . From Lemma 2, where

$\sigma = b$  and  $\phi = \alpha k_1 - a$  there exists  $k_2$  such that the closed loop system shown in Figure 1 is stable.

*Necessity.* Consider the delayed system (4), and the state feedback controller shown in Figure 1, with constants  $k_1$  and  $k_2$  such that the closed-loop system is stable. The closed loop transfer function can be written as follows:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{[(s-b)(s+\phi)] + k_2 \alpha e^{-\tau s}}, \quad (10)$$

with  $\phi = \alpha k_1 - a$ . It is well known that a  $k_2$  that stabilizes the delayed system (10) must also stabilize the delay free system (see for instance [2] or [5]), which implies that  $\phi > 0$ . Indeed, from Lemma 2,  $\tau < \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\phi}$  with  $\sigma = b$  (note that  $\phi > 0$  is a free parameter function of  $k_1$ ). Let us consider  $\beta > \frac{1}{\phi} > 0$ , denoting  $\beta = \frac{1}{\sigma} - \tau$ , therefore  $\tau = \frac{1}{\sigma} - \beta < \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{b}$ . ■

Note that a root locus and frequency domain analysis can be used to compute proper constant gains  $k_1$  and  $k_2$  in order to stabilize the proportional states feedback scheme.

### B. Observer Scheme.

In most of the practical applications, some of the state variables may not be measured. Thus, an observer, based on an output injection strategy is proposed, it can be represented as in Figure 2. The stability of the observer can be tackled as follows.

*Lemma 4:* Consider the delayed system (4), and the static output injection scheme shown in Figure 2. There exist constants  $g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if

$$\tau < \frac{1}{a}.$$

*Proof:*

The proof can be easily derived from a dual procedure of the previous result. ■

As in the controller design, the computation of the proportional gains  $g_1$  and  $g_2$  can be solved by mean of a root locus and frequency domain analysis.

### C. Observer-Based Controller.

Finally, the main result of this work is presented, we propose an observed based controller as in the Figure 3, where the observer allows to estimate the state variables, to be used in state feedback controller. The authors would like

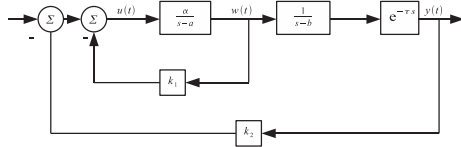


Fig. 1. State Feedback Scheme.

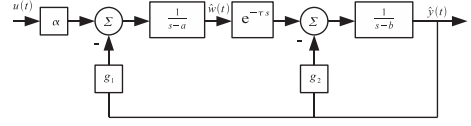


Fig. 2. Output-Injection Scheme of the Observer.

to stress that, in the proposed scheme, only four proportional gains are sufficient to get a stable closed loop behavior. As a consequence of the previous results, the following lemma can be stated.

*Lemma 5:* Consider the observer based controller scheme shown in Figure 3. There exist  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ .

*Proof:* As a first step, in order to ensure an accurate estimation of the states variables, let us demonstrate that the error signal converges asymptotically to zero, i.e.,  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{w}(t) - w(t)] = 0$  if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ . Consider the state space representation of the system (4) characterized by the following equation:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + B u(t) \quad (11)$$

$$y(t) = C x(t)$$

With  $x(t) = [w(t) \quad y(t)]^T$ . Where,

$$A_0 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1].$$

Note that the state space representation characterized by (11) can be returned to its transfer function representation by mean of:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - (A_0 + A_1 e^{-\tau s}))^{-1} B. \quad (12)$$

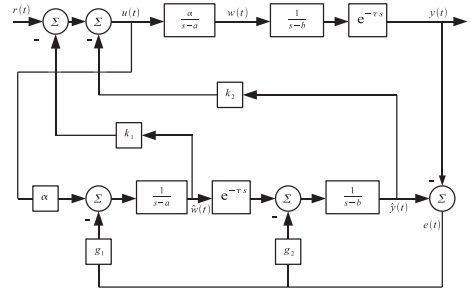


Fig. 3. Control Strategy Proposed.

Which brings us back to the delayed transfer function (4). The dynamics of the estimated states and the control law can be described as follows.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_0\hat{x}(t) + A_1\hat{x}(t-\tau) + Bu(t) - G(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (13) \\ u(t) &= K\hat{x}(t).\end{aligned}$$

Where  $\hat{x}(t)$  is the estimated state of  $x(t)$ , and the proportional gains are defined by  $K = [k_1 \ k_2]$  and  $G = [g_1 \ g_2]^T$ . Let be  $e(t) := x(t) - \hat{x}(t)$ , then we have:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A_0 - GC)e(t) + A_1e(t - \tau). \quad (14)$$

And the controlled system:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + BK\hat{x}(t). \quad (15)$$

Noting  $x_e = [x(t) \ e(t)]^T$  and after a simple manipulation of variables we have the following closed loop system with the observer and the controller proposed in the Figure 3:

$$\begin{aligned}\dot{x}_e(t) &= \begin{bmatrix} A_0 + BK & -BK \\ 0 & A_0 - GC \end{bmatrix} x_e(t) + \dots \quad (16) \\ \dots &+ \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} x_e(t - \tau) \\ y(t) &= [ \ C \ 0 ] x_e(t).\end{aligned}$$

It is easy to see that the observer and the controller can be designed separately, i.e. satisfies the separation principle. Hence, the stability of the observer scheme is sufficient to assure the error convergence, i.e. there exist proportional gains  $g_1$  and  $g_2$  such that  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{w}(t) - w(t)] = 0$  if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ .

Then, considering the fact of the observer and controller can be designed separately and reminding the stability conditions stated previously in Lemmas 4 and 3, is clear that the observer stability condition is more restrictive than the controller stability condition, i.e.  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ . Therefore, there exist  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ . ■

#### D. Examples.

The following numerical examples illustrate the performance obtained by main of the observed based controller proposed.

**Example 1.** Consider the unstable delayed system characterized for the following transfer function:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s - 0.7)(s - 0.4)} e^{-s}. \quad (17)$$

Let be  $a = 0.7$ ,  $b = 0.4$ ,  $\alpha = 1$  and  $\tau = 1$ , it is clear that the stability conditions given in Lemma 5 are satisfied, therefore there exist an observer based structure with proportional gains  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  and  $g_2$  such that the resulting closed-loop system is stable due to  $\tau = 1 <$

$\frac{1}{a} = 1.428$ . As was demonstrated before, the control scheme 3 holds the separation property, hence the design of the controller and the observer is independent. First, from the proof of Lemma 3, the gain  $k_1$  must be larger than  $a/\alpha$ . On the other hand, to ensure the existence of a proportional gain  $k_2$  such that the closed loop system is stable, from Lemma 2

$$k_1 > \frac{1}{\alpha(\frac{1}{b} - \tau)} + \frac{a}{\alpha}.$$

As the value  $k_1$  can be as large as we wish, the gain chosen is  $k_1 = 100.7$ , form this, after a frequency domain analysis, Nyquist stability criterion for instance, we can compute the gain  $k_2$  such that the controller scheme shown in the Figure 3 is stable, for this example,  $40 < k_2 < 131.06$ .

The procedure for compute the observer gains  $g_1$  and  $g_2$  is quite similar, the proportional gain  $g_2$  must be larger than  $b$  to ensure stability of the system. From Lemma 2 we know that

$$g_2 > \frac{1}{(\frac{1}{a} - \tau)} + b.$$

As the value  $g_2$  can be as large as we wish, the gain chosen is  $g_2 = 100.4$ , form this, after a frequency domain analysis, we can compute the gain  $g_1$ , such that the observer scheme shown in the Figure 2 is stable, for this example,  $69.93 < g_1 < 113.89$ .

Hence, the constant gains computed for this example are  $k_1 = 100.7$ ,  $k_2 = 90$ ,  $g_1 = 80$  and  $g_2 = 100.4$ . The Figure 4 illustrate the performance of the observer based controller in numerical simulations, the output and the error are shown respectively. The continuous line indicates the output of the closed loop system with identical initial conditions between  $x(t)$  and  $\hat{x}(t)$ . The dashed line point to the system performance whit different initial conditions ( $w(0) - \hat{w}(0) = 0.5$ ).

Below, for the same example, the observed based controller is implemented by mean of the Data Acquisition system Sensoray 626, using its analog inputs/outputs as sensors

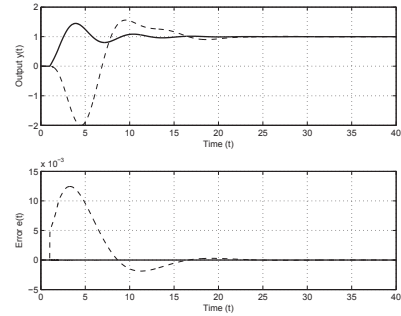


Fig. 4. Numerical Simulation Results.

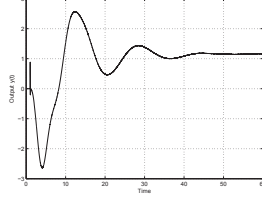


Fig. 5. Practical Implementation.

and actuators communicated with a computer through the MATLAB Real Time Workshop Toolbox. The real electronic plant is built with commercial operational amplifiers, resistors, and capacitors. The stable output  $y(t)$  of the closed loop system is shown in the Figure 5.

*Remark 1:* Notice that the controller have a efficient performance regardless the different initial conditions between the original process and the observer, and the parametrical variations due to the use of commercial electronic devices.

#### V. ROBUSTNESS ANALYSIS WITH RESPECT TO DELAY UNCERTAINTY.

No mathematical representation can exactly model a physical system. For this reason we must be aware of how modeling errors might adversely affect the performance of a control system. Here, we refer to robustness with respect to delay to the fact that the exact value of the delay is not known a priori.

Therefore, we assume now that the delay is uncertain, *i. e.* the delay of the real system is  $\tau = d(1 + \delta\theta)$  and may be different from the one used in the observer (the nominal delay  $d$ ). Consider the delay uncertainty in the original process, and the design of the observer taking into account the nominal time delay, *i. e.*,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + Bu(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + A_1\hat{x}(t - d) + Bu(t) - G(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ u(t) &= K\hat{x}(t).\end{aligned}\quad (18)$$

Let us consider the observer-controller system with the form (18) and its extended closed loop system considering the delay uncertainty characterized as follows:

$$\begin{aligned}\dot{x}_e(t) &= \begin{bmatrix} A_0 + BK & -BK \\ 0 & A_0 - GC \end{bmatrix} x_e(t) + \\ & \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_1 & 0 \end{bmatrix} (x_e)_\tau(t - \tau) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A_1 & A_1 \end{bmatrix} (x_e)_d(t - d), \\ & = A_0x_e(t) + A_\tau(x_e)_\tau(t - \tau) + A_d(x_e)_d(t - d).\end{aligned}\quad (19)$$

Note that when the delay value of the actual process matches to the nominal one, the extended closed loop system

(20) is equivalent to the nominal closed loop system (16), [15]. Now modeling the time delay with a multiplicative uncertainty as  $\tau = d(1 + \delta\theta)$ , with  $\theta$  normalized, *i. e.*  $|\theta| \leq 1$  we obtain.

$$e^{-s\tau} = e^{-sd(1+\delta\theta)} = e^{-sd}e^{-sd\delta\theta} = e^{-sd}(1 - \Delta). \quad (21)$$

With  $\Delta(s) = 1 - e^{-sd\delta\theta}$ . Therefore the characteristic polynomial of the above system is given by:

$$\Psi(s) = \det[\Psi_0(s)]\det[I_n + \Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau e^{-sd}\Delta(s)]. \quad (22)$$

Where  $\Psi_0(s) = I_{2n} - \mathcal{A}_0 - (\mathcal{A}_\tau + \mathcal{A}_d)e^{-sd}$ . Now, when the design of the controller and the observer ensures that the nominal extended system is stable, *i. e.*  $\det[\Psi_0(s)]$  is stable, the perturbed closed loop system remains stable if  $\det[I_n + \Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau e^{-sd}\Delta(s)]$  does not change sign when  $s$  sweeps the imaginary axis. Invoking Rouché's Theorem, it follows that the condition for stability is:

$$\|Q_d(s)\Delta(s)\|_\infty < 1 \quad (23)$$

Where  $Q_d(s) = \Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau e^{-sd}$ . Note that the term  $1 - e^{-sd\delta\theta} = sd\delta\theta e^{-sd\delta\theta/2} \Big|_{s=j\omega} \sin e^{\frac{\omega d \delta \theta}{2\pi}}$ . Hence, on the imaginary axis,  $|1 - e^{-sd\delta\theta}| \leq |sd\delta\theta|$ , then if one can show stability for  $1 - e^{-sd\delta\theta}$  replacing it by  $sd\delta\theta$  in the analysis, then stability for the uncertain system will follow. Note that this amounts to replacing the delayed term by its first order Taylor expansion. This means that the maximal uncertainty bound  $\delta$  that preserves stability for the worst case, *i. e.*  $\theta = 1$ , is determined by:

$$\delta_{max} = \frac{1}{\|sde^{-sd}\Psi_0^{-1}(s)\mathcal{A}_\tau\|_\infty}. \quad (24)$$

Then for all  $|\theta| \leq 1$  and the uncertainty bound  $\delta_{max}$  the determinant has a fixed sign, implying the absence of zero crossings, and henceforth the stability of the perturbed system (provided the nominal one is stable) [10], [15].

**Example 2.** In order to illustrate the above robustness analysis we can consider the example given in the section IV, and characterized by the following transfer function:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s - 0.7)(s - 0.4)} e^{-s}. \quad (25)$$

Let us choose  $a = 0.7$ ,  $b = 0.4$ ,  $\alpha = 1$  and  $\tau = 1$ , the constant gains, already computed, to stabilize the system are  $k_1 = 100.7$ ,  $k_2 = 90$ ,  $g_1 = 80$  and  $g_2 = 100.4$ . Therefore, with (24) we can compute  $\delta_{max} = 0.057023$ , the maximum uncertainty bound of the delay.

The Figure 6 shown the performance of the closed loop system when there is not uncertainty in the delay value (continuous line), and the behavior when the maximum uncertainty bound is present in the system (dash line). The following table shows the relation between the the size of the time delay  $d$  of the nominal system and the maximal uncertainty bound  $\delta_{max}$  in the above example. The terms  $\tau_{min}$  and  $\tau_{max}$  indicate the minimal and maximal value respectively of the

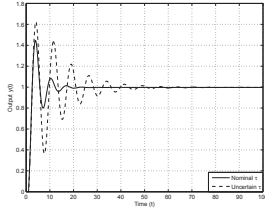


Fig. 6. Robustness Analysis W.R.T. Delay Uncertainty

delay term  $\tau$ , such that the closed loop system with nominal delay  $d$ , remains stable.

$d$	$\delta_{max}$	$\tau_{min}$	$\tau_{max}$
0.1	3.855741	—	0.485574
0.2	1.739842	—	0.547968
0.3	1.026864	—	0.608059
0.4	0.665379	0.133848	0.666152
0.5	0.441873	0.279064	0.720936
0.6	0.293497	0.423902	0.776098
0.7	0.194797	0.563642	0.836358
0.8	0.129188	0.696650	0.903350
0.9	0.085734	0.822839	0.977161
1.0	0.057023	0.942977	1.057023

TABLE I  
ROBUST ANALYSIS WITH DIFFERENT TIME DELAY SIZE.

*Remark 2:* Note that the stabilizing gains computed for the observer based controller for the nominal time delay  $d$  are able to preserve stability of the closed loop system with a nominal delay belongs to the interval  $[0, d]$ , the analysis of the stability sets and regions are dealt in [5] and [2]

## VI. CONCLUSIONS.

An observer based controller is proposed in order to stabilize a linear-time invariant system with two unstable poles plus time delay. The conditions that ensure existence of the control scheme and the stability of the closed loop system are stated. The scheme is simple and may be easily implemented. Numerical examples illustrate the performance of the controller under ideal conditions, an implementation of the observer based controller is presented by mean of an electronic plant built with operational amplifiers and the Data Acquisition system Sensoray 626. This example shows the controller performance working under different initial conditions between the plant and the observer, as well as the parametrical variations introduced by the use of commercial devices, also an robustness analysis is presented to show the effects of the modeling errors of the delay operator. The extension of the presented results to design an observer based controller to high order systems with two unstable poles and its robustness analysis are taken into account as a future work.

## REFERENCES

[1] Keqin Gu, Vladimir L. Kharitonov, and Jie Chen, *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhäuser, 2003.

[2] Efim Malakhovski and Leonid Mirkin, *On Stability of Second-order Quasi-polynomials with a Single Delay*, *Automatica* **42** (2006), 1041–1047.

[3] B. Del Muro, J.F. Márquez, M. Velasco, and J. Alvarez, *Stabilization strategy for unstable first order linear systems with large time delay*, *International Conference on Modelling Identification and Control, ICMIC* (2008).

[4] B. Del Muro-Cuéllar, O. González-Nagera, and Y. A. Pedraza, *Stabilization of high-order systems with delay using a predictor schema*, *Circuits and Systems, Midwest Symposium on* **0** (2009), 337–340.

[5] Silviu-Iulian Niculescu, *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, Springer, 2001.

[6] J. E. Normey-Rico and E. F. Camacho, *Unified approach for robust dead-time compensator design*, *Journal of Process Control* **19** (2009), 38–47.

[7] Julio E. Normey-Rico and Eduardo. F. Camacho, *Dead-time compensators: A survey*, *Control Engineering Practice* **16** (2008), no. 4, 407–428.

[8] Z. J. Palmor, *Time delay compensation smith predictor and its modifications*, *The control Handbook* (1996), 224–237.

[9] A. Seshagiri Rao and M. Chidambaram, *Enhanced Two-Degrees-of-Freedom Control Strategy for Second-Order Unstable Processes with Time Delay*, *Ind. Eng. Chem. Res.* **45** (2006), 3604–3614.

[10] Olivier Sename, *Is a Mixed Design of Observer Controllers for Time Delay Systems Interesting?*, *Asian Journal of Control* **9** (2007), no. 2, 180–189.

[11] R. A. Seshagiri, V. S. R. Rao, and M. Chidambaram, *Simple analytical design of modified smith predictor with improved performance for unstable first-order plus time delay (fodtp) processes*, *Ind. Eng. Chem. Res.* **46**(13) (2007), 4561–4571.

[12] M. Shamsuzzoha, Jongpal Jeon, and Moonyong Lee, *Improved Analytical PID Controller Design for the Second Order Unstable Process with Time Delay*, *17th European Symposium on Computer Aided Process Engineering* (2007).

[13] S. Skogestad, *Simple Analytic Rules for Model Reduction and PID Controller Tuning*, *Journal of Process Control* **13** (2003), 4.

[14] O. J. M. Smith, *Close Control of Loops with Dead Time*, *Chem. Eng. Prog.* **53** (1957), 217–219.

[15] Erik I. Verriest, Olivier Sename, and Pierdominico Pepe, *Robust Observer-Controller for Delay Differential Systems*, *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control* (2002), 981–986.

[16] Qing-Chang Zhong, *Robust Control of Time-Delay Systems*, Springer, 2006.

*CONTROL OF SECOND ORDER STRICTLY-PROPER  
UNSTABLE SYSTEMS WITH TIME DELAY. ,*  
David Novella Rodríguez and Basilio del Muro Cuéllar,  
Revista Mexicana de Ingeniería Química (Índice JCR),  
Artículo Aceptado para su publicación,  
(versión preliminar).



# Revista Mexicana de Ingeniería Química

Publicación de la Academia Mexicana de Investigación y Docencia en Ingeniería Química, A. C. Depto. de Ingeniería de Procesos e Hidráulica, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina, 09340 México, D. F. Tel. 5844648 al 51. FAX 58 044900. E-mail: [amidiq@xanum.uam.mx](mailto:amidiq@xanum.uam.mx)

Editores en Jefe:

Dr. J. Alberto Ochoa Tapia

Dr. E. Jaime Vernon Carter

Dr. Tomás Viveros García

Responder a:

Dr. Tomás Viveros García

E-mail: [tvig@xanum.uam.mx](mailto:tvig@xanum.uam.mx);

[amidiq@xanum.uam.mx](mailto:amidiq@xanum.uam.mx)

Ing. David F Novellar Rodríguez

ESIME-Culhuacán

e-mail: [dnovellar@gmail.com](mailto:dnovellar@gmail.com)

México, D. F., a 14 de Junio de 2011

Manuscrito No. RMIQ-170311

Estimado(a) Dr. Novellar Rodríguez

Por medio de este conducto le informo que los evaluadores de su trabajo titulado:

Título del Trabajo: CONTROL DE SISTEMAS INESTABLES ESTRICTAMENTE PROPIOS DE SEGUNDO ORDEN CON RETARDO.

Autores: David F. Novella Rodríguez, and Basilio del Muro Cuéllar.

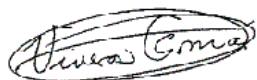
han encontrado **ligeras deficiencias**, que deben ser corregidas para proceder a su publicación en la *Revista Mexicana de Ingeniería Química* (RMIQ). Anexamos a la presente los comentarios de los evaluadores. Si tuviese a bien corregir su trabajo con base en los comentarios de los evaluadores, y de acompañar éste, con una descripción pormenorizada de los cambios hechos, o del por que decidió no seguir las recomendaciones de los evaluadores.

De no recibir el documento corregido por correo electrónico ([amidiq@xanum.uam.mx](mailto:amidiq@xanum.uam.mx)) dentro de un plazo de 30 días hábiles, tendremos que considerar que no le interesa publicar su artículo en la RMIQ.

Asimismo, le recordamos que es requisito necesario para la publicación de su artículo que éste, se conforme a lo establecido en el instructivo de autores y a cubrir el costo de la publicación respectivo.

Sin más por el momento me despido de usted.

Atentamente:



Dr. Tomás Viveros García

Editor de RMIQ

[www.amidiq.com](http://www.amidiq.com)



---

**CONTROL DE SISTEMAS INESTABLES ESTRICTAMENTE PROPIOS DE  
SEGUNDO ORDEN CON RETARDO.**

**CONTROL OF SECOND ORDER STRICTLY-PROPER UNSTABLE SYSTEMS WITH  
TIME DELAY.**

David F. Novella Rodríguez<sup>\*1</sup> and Basilio del Muro Cuéllar<sup>1</sup>.

*<sup>1</sup>Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacan,  
Instituto Politécnico Nacional, México D.F., 04430, México.*

---

**Resumen.**

El presente trabajo considera el problema de la estabilización y control de sistemas estrictamente propios lineales e invariantes en el tiempo que contienen dos polos inestables y con tiempo de retardo. Es conocido que los retardos en el tiempo complican el análisis de estabilidad de los sistemas así como el diseño de estrategias de control adecuadas. Por esta razón, se propone una sencilla estrategia de control basada en un sistema observador con la finalidad de estabilizar sistemas de segundo orden inestables con retardo. Las condiciones suficientes y necesarias que garantizan la estabilidad del sistema en lazo cerrado son enunciadas.

*Palabras Clave:* Retardo de Tiempo, Sistemas Inestables, Estabilización, Observador.

---

**Abstract.**

This paper considers the problem of stabilization and control of linear time invariant systems containing two unstable poles and time delay. It is well known that time delays complicate the stability analysis and the design of appropriate control strategies. For this reason, we propose a simple control strategy based on an observer system with the aim of stabilizing unstable second-order systems with delay. The necessary and sufficient conditions that guarantee the stability of the closed loop system are stated.

*Keywords:* Time-Delay, Unstable Systems, Stabilization, Observer.

---

---

<sup>\*</sup> Autor para la Correspondencia. E-mail dnovellar@gmail.com.

## 1. Introduction.

Time-delay is the property of a physical system by which the response to an applied signal is delayed in its effect. Systems with delays are very common in the world, they appears in various systems as biological, ecological, social, engineering systems, etc., and are due to several mechanisms like material or energy transport, recycling loops, etc.. In addition, actuators, sensors, field networks that are involved in feedback loops usually introduce such delays, (Zhong, 2006). Also delays can be used in modeling reduction where high-order (finite-dimensional) systems are approximated (in some norm sense) by low order systems with delays, (Skogestad, 2003). It is known that time-delay is often a source of complex behaviors (oscillations, instability, bad performance), in many dynamic systems, and thus considerable attention has been paid on the stability analysis and controller design of time delay systems. Hence, there exists a great motivation to study of delay effects on dynamical systems properties for two main reasons: first to understand how the delay presence may deteriorate the behavior of the system, and second to control their effects for better performance achieved on closed-loop systems, (Niculescu, 2001), (Gu *et al.* 2003), (Richard, 2003).

Several control strategies have been developed to deal with delayed systems. A common approach is to approximate the time-delay operator by means of a Taylor or Padé series which could leads to a non-minimum phase system with rational transfer function representation. Another classical control approaches for time-delay systems include Proportional Integral Derivative (PID) control, classical smith predictors (SPC), etc., (Smith, 1957), (Palmor, 1996), (Silva *et al.*, 2004).

Open-loop unstable processes arise frequently in the chemical and biological systems and are fundamentally difficult to control. Unstable time-delay systems represent a

challenge for control design, for instance the SPC schema has not a stabilization step, which restrict its application to open-loop stable plants. To get over this problem, some modifications of the SPC original structure have been proposed to deal with non-stable delayed process, for instance, (Rao *et al.*, 2007) has presented an efficient modification to the Smith predictor in order to control unstable first order system plus time delay. With a different perspective, (Normey-Rico and Camacho, 2008) proposes a modification to the original Smith Structure in order to deal with unstable first order delayed systems. Using a similar structure, the result is extended to delayed high order systems in (Normey-Rico and Camacho, 2009). In both works, a robustness analysis is done concluding that for unstable dead time dominant systems, the closed-loop system can be unstabilized with an infinitesimal value of the modeling error, i.e., that robustness is strongly dependent on the relationship  $\tau/\tau_{un}$ , where  $\tau$  is the process time delay and  $\tau_{un}$  is the dominant unstable time-constant. For the control scheme proposed in this later two works, it can be easily proven that in the case of unstable plants, the internal stability is not guaranteed. In fact it is obtained an unstable estimation error and, as a result, a minimal initial condition difference between the original plant and the model produces an internal unbounded signal. Notice that in a practical situation it is not possible to exactly measure the initial condition of the plant to assign the same value to the model considered on the modified Smith compensator.

Many chemical and biological systems exist whose dynamics present second-order behavior. Continuous stirred tank reactors, polymerization reactors and bioreactors are inherently unstable by design; these types of systems can be modeled as open-loop unstable second order plus time delay models, (Rao and Chidambaram, 2006), (Shamsuzzoha *et al.*, 2007). This paper is concerned with the stabilization and control problem of second order unstable systems plus time delay. The stabilizer structure relies

on an observer-based structure with a memory observer and a memoryless state feedback. On the contrary of modified Smith predictors, the scheme only contains discrete time delay (and not distributed ones) which makes easy its practical implementation (see (Zhong, 2006) for details on numerical implementation of modified Smith predictor scheme). A PI controller is implemented in order to obtain step references tracking end step disturbances rejection. This paper is organized as follows; the Section 2 is dedicated to the problem formulation. The Section 3 yields the preliminaries results used to obtain the main result of this work. An observer based controller is proposed in order to stabilize the unstable system in the Section 4, first for systems without zeros and then for systems with one stable zero, also the necessary and sufficient stability conditions of the proposed controller schema are stated. Then, in section 5 a Proportional Integral action is incorporated to the observer based structure. Numerical simulations are presented in order to show the controller performance. Finally conclusions and future perspectives are stated.

## 2. Problem Statement.

Consider the following class of single-input single-output (SISO) linear systems with delay at the input:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\tau s} = G(s)e^{-\tau s}. \quad (1)$$

Where  $U(s)$  and  $Y(s)$  are the input and output signals respectively,  $\tau \geq 0$  is the time delay,  $N(s)$  and  $D(s)$  are polynomials in the complex variable  $s$  and  $G(s)$  is the delay-free transfer function. Notice that with respect to the class of systems (1) a traditional control strategy based on an output feedback of the form:

$$U(s) = [R(s) - Y(s)]Q(s). \quad (2)$$

Produces a closed-loop system given by:

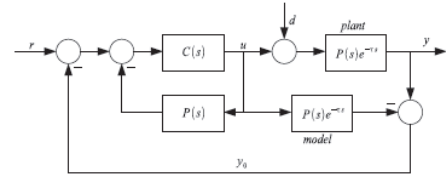


Figure 1. Classical Smith Predictor.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Q(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + Q(s)G(s)e^{-\tau s}} \quad (3)$$

Where the exponential term  $e^{-\tau s}$  located at the denominator of the transfer function (3) leads to a system with an infinite number of poles and where the closed-loop stability properties must be carefully stated. From the classical structure of the Smith predictor given in Figure 1, it is known that the transfer function of the closed-loop system is obtained as follows:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Q(s)G(s)}{1 + Q(s)G(s)} e^{-\tau s}. \quad (4)$$

Where the delay term is shifted outside of the characteristic equation of the system. Under ideal conditions, i.e., exact knowledge of the plant parameters, the SP provides a successful future estimation time units ahead of the  $y(t)$  signal, which could be used like a control signal in a specific feedback scheme, (Smith, 1957), (Palmor, 1996). Unfortunately, the classical structure of the SP is restricted to stable process. Different authors have proposed several modifications to the original SP structure to give solution to some particular cases, (Normey-Rico and Camacho, 2008), (Normey-Rico and Camacho, 2009), (Rao *et al.*, 2007), (Zhong, 2006). As was mentioned above, a minimal initial condition difference between the original plant and the model produces an internal unbounded signal, which can be produce instability in practical situations.

This work proposes an observer based control scheme in order to stabilize an unstable second order system characterized by the following transfer function:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{(s-a)(s-b)} e^{-\tau s}. \quad (5)$$

Where, without loss of generality,  $a \geq b > 0$  and  $\tau > 0$ . The control schema proposed has been design based on a traditional observer theory, hence, only the plant model and two static gains are enough to get an adequate estimation of an internal delay free variable which will be used in the final stabilizing control schema. Further, the observer based structure is employed to stabilize systems given by the following transfer function:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha(s+\beta)}{(s-a)(s-b)} e^{-\tau s}. \quad (6)$$

Where, without loss of generality,  $a \geq b > 0$  and  $\beta, \tau > 0$ .

### 3. Preliminary Results.

Preliminary results are presented, which will be used later in order to state the stability conditions of the studied system. First consider the following unstable first order system plus time delay:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{(s-a)} e^{-\tau s}. \quad (7)$$

With  $a > 0$ , and a proportional output feedback control as follows:

$$U(s) = R(s) - kY(s). \quad (8)$$

Which produces the closed-loop system:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{s-a+k\alpha e^{-\tau s}}. \quad (9)$$

The following result has been widely studied in the literature and the proof can be easily obtained by considering different approaches as a classical frequency domain. An alternative simple proof based on a discrete time approach is shown in (Márquez *et al.*, 2010).

*Lemma 1.* Consider the delayed system (7) and the proportional output feedback (8). Then, there exist a proportional gain  $k$  such that the closed loop system (9), is stable if and only if  $\tau < 1/a$ .

Now, consider the system characterized by:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{(s-a)(s+c)} e^{-\tau s}. \quad (10)$$

With  $a, c > 0$ . Note that the system has only one unstable pole. With the proportional output feedback (7), we get a closed-loop system as follows:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{s-a+k\alpha e^{-\tau s}}. \quad (11)$$

*Lemma 2.* Consider the delayed system (10) and the proportional output feedback (8). Then, there exist a proportional gain  $k$  such that the closed loop system (11) is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{a} - \frac{1}{c}$ .

The proof of this result can easily be obtained by mean of different approaches, as the frequency domain based approach shown in (Del Muro *et al.* 2009).

### 4. Control Strategy Proposed.

Consider the class of systems studied in this work characterized by the transfer function (5) with  $a, b > 0$  and assuming without loss of generality  $a \geq b$ . An observer based control strategy it is proposed, which allows to get  $\hat{w}(t)$ , an estimation of the signal  $w(t)$ , to be used as a control signal for the real process.

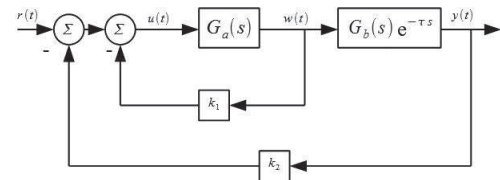


Figure 2. Controller Scheme.

As a first step, the stability conditions for the controller and the observer systems are stated separately. These conditions will be used later to submit the observer based controller closed loop stability conditions.

#### 4.1 Controller Scheme.

Now, taking into account the proportional state feedback control strategy shown in the Figure 2, where:

$$G_a = \frac{\alpha}{s - a}, \quad (12)$$

and

$$G_b = \frac{1}{s - b}. \quad (13)$$

*Lemma 3:* Consider the delayed system (5), and the state feedback controller shown in figure 2. There exist constants  $k_1$  and  $k_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{b}$ .

*Proof:* The aim of this proof is to apply *Lemmas 1* and *2* to the closed loop system shown in the figure 2, with the following transfer function:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s - a + \alpha k_1)(s - b) + \alpha k_2 e^{-\tau s}}. \quad (14)$$

Let us consider  $\alpha k_1 > a$ . Then, we get a different system, only with one unstable pole, which can be stabilized under the stability condition given in *Lemma 2*, i.e., there exist constant gains  $k_1$  and  $k_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{b} - \frac{1}{\alpha k_1 - a}$ . Now, as  $k_1$  can be as large as we wish, there exist proportional gains  $k_1$  and  $k_2$  such that the closed-loop system is stable if and only

$$\tau < \frac{1}{b}. \quad \blacksquare$$

Note that a root locus and frequency domain analysis can be used to compute proper constant gains  $k_1$  and  $k_2$  in order to stabilize the proportional states feedback scheme.

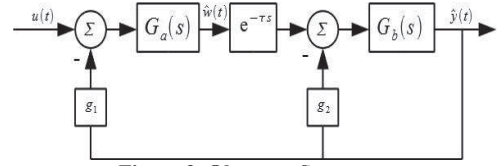


Figure 3. Observer Structure.

#### 4.2 Observer Scheme.

In most of the practical applications, some of the state variables may not be measured. Thus, an observer, based on an output injection strategy, can be represented as in Figure 2. The stability of the observer can be tackled as follows.

*Lemma 4:* Consider the delayed system (5), and the static output injection scheme shown in figure 3. There exist constants  $g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ .

*Proof:* Consider the delayed system (5) and the static output injection scheme shown in Figure 3, the closed loop transfer function of the delayed system can be described as:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s - a)(s - b + g_2) + \alpha g_1 e^{-\tau s}}. \quad (15)$$

As in the controller structure, the purpose of the proof is to apply the conditions stated in *Lemmas 1* and *2* to the observer scheme shown in the figure 3. First, consider  $g_2 > b$ , thus, we get a system with only one unstable pole, which can be stabilized under the stability condition given in *Lemma 2*, i.e., considering the delayed system (5), and the static output injection scheme shown in figure 3, there exist constants  $g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{a} - \frac{1}{g_2 - b}$ .

As  $g_2$  can be as large as we wish, then we can conclude:

$$\tau < \frac{1}{a}. \quad \blacksquare$$

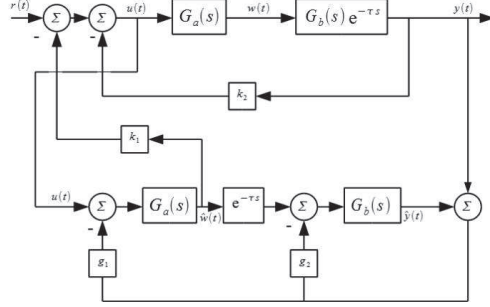


Figure 4. Control Strategy Proposed.

### 4.3 Observer-Based Controller.

Finally, the main result of this work is presented, we propose an observed based controller as in the figure 4, where the observer allows estimating the state variables, to be use in state feedback controller. The authors would like to stress that, in the proposed scheme, only four proportional gains are sufficient to get a stable closed loop behavior. As a consequence of the previous results, the following lemma can be stated.

*Lemma 5* Consider the observer based controller scheme shown in figure 4. There exist  $k_1, k_2, g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ .

*Proof:* As a first step, in order to ensure an accurate estimation of the states variables, let us demonstrate that the error signal converges asymptotically to zero, i.e.,  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{w}(t) - w(t)] = 0$  if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ . Consider the state space representation of the system (5) characterized by the following equation:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (16)$$

With  $x(t) = [w(t) \ x_2(t)]^T$ , where:

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, & A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, & C &= [0 \ 1]. \end{aligned}$$

Note that the state space representation characterized by (16) can be returned to its transfer function representation (5) by mean of:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - (A_0 + A_1 e^{-\tau s}))^{-1} B. \quad (17)$$

The dynamics of the estimated states and the control law can be described as follows.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_0 \hat{x}(t) + A_1 \hat{x}(t - \tau) + Bu(t) \cdots \\ &\cdots - G(C\hat{x}(t) - y(t)). \end{aligned} \quad (18)$$

$$u(t) = K\hat{x}(t). \quad (19)$$

Where  $\hat{x}(t)$  is the estimated state of  $x(t)$  and the proportional gains are defined by:

$$K = [k_1 \ g_2] \ , \ G = [g \ g_2]^T.$$

Let be  $e(t) := \hat{x}(t) - x(t)$ , then we have:

$$\dot{e}(t) = (A_0 - GC)e(t) + A_1 e(t - \tau). \quad (20)$$

Noting  $x_e = [x(t) \ e(t)]^T$ , and after a simple manipulation of variables we have the following closed loop system with the observer and the controller proposed in the figure 4:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= \begin{bmatrix} A_0 + BK & -BK \\ 0 & A_0 - GC \end{bmatrix} x_e(t) \cdots \\ &\cdots \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} x_e(t - \tau) \end{aligned} \quad (20)$$

$$y(t) = [C \ 0].$$

It is easy to see that the observer and the controller can be designed separately, i.e. it satisfies the separation principle. Hence, the stability of the observer scheme is sufficient to assure the error convergence, i.e., there exist proportional gains  $g_1$  and  $g_2$  such that  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{w}(t) - w(t)] = 0$  if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ .

Then, considering the fact of the observer and controller can be designed separately and

reminding the stability conditions stated previously in *Lemma 3* and *Lemma 4*, is clear that the observer stability condition is more restrictive than the controller stability condition, i.e.,  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ . Therefore, there exist  $k_1, k_2, g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if

$$\tau < \frac{1}{a}. \quad \blacksquare$$

### 5. Second Order Unstable Systems with a Stable Zero plus Time Delay.

In this section, the problem of the stabilization of systems of second order systems with one stable zero plus time delay. For this, the observer based controller proposed in the section above is implemented in order to obtain a stable behave of the closed loop system.

#### 5.1 Controller Scheme.

Considering the unstable system given by equation (6) and the controller structure shown in figure 2, where:

$$G_a = \frac{\alpha}{s - a}, \quad (21)$$

and

$$G_b = \frac{(s + \beta)}{s - b}. \quad (22)$$

The stability conditions for the controller scheme are introduced below.

*Lemma 6.* Consider the delayed system (6), and the state feedback controller shown in figure 2. There exist constants  $k_1$  and  $k_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{b}$ .

*Proof.* As in the Section 4, the objective of the proof is to apply the results of *Lemma 1* to the closed loop system of the

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} & \quad (23) \\ &= \frac{\alpha(s + \beta)e^{-\tau s}}{(s - a + \alpha k_1)(s - b) + k_2 \alpha(s + \beta)e^{-\tau s}}. \end{aligned}$$

Let us choose  $k_1 = (\beta + a)/\alpha$ , then we obtain the following equivalent system:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{e^{-\tau s}}{s - b + k_2 \alpha e^{-\tau s}}. \quad (24)$$

Hence, it is possible to attach the stability conditions of *Lemma 1*, i.e., there exist constant gains  $k_1$  and  $k_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if

$$\tau < \frac{1}{b}. \quad \blacksquare$$

#### 5.2 Observer Scheme.

First, for the unstable sub-system  $G_b$ , take into account the following representation:

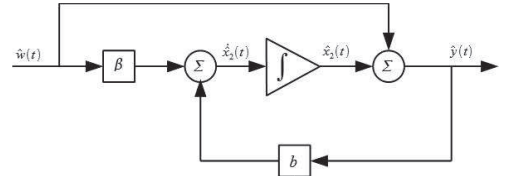


Figure 5. Zero-Pole State Space Representation

This representation allows realizing the output injection proposed in the figure 3. Thus, we can state the following Lemma.

*Lemma 7:* Consider the delayed system (6), and the static output injection scheme shown in figure 3, with the sub-system  $G_b$  represented as in the figure 5. There exist constants gains  $g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ .

*Proof.* Consider the transfer function of the output injection scheme shown in figure 3, with  $G_b$  given by equation (22).



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha(s + \beta)e^{-\tau s}}{(s - a)(s - b + g_2) + \alpha g_1(s + \beta)e^{-\tau s}} \quad (25)$$

Let us choose  $g_2 = \beta + b$  then we obtain the following equivalent system:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{e^{-\tau s}}{s - a + g_1 \alpha e^{-\tau s}} \quad (26)$$

Hence, it is possible to attach the stability conditions of *Lemma 1*, i.e., there exist constant gains  $g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if

$$\tau < \frac{1}{a} \quad \blacksquare$$

### 5.3 Observer-Based Controller.

Finally, the closed loop stability conditions for the observer-controller structure shown in the figure 4, with the sub-systems  $G_a$  and  $G_b$  given by equations (21) and (22) are stated in the incoming Lemma.

*Lemma 5* Consider the observer based controller scheme shown in figure 4. There exist  $k_1, k_2, g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if  $\tau < \frac{1}{a}$ .

*Proof.* The complete proof can be based in the state space representation of the closed loop system (20). Therefore, as the control structure holds the separation principle, i.e., the controller and the observer can be designed independently; it is easy to conclude that there exist  $k_1, k_2, g_1$  and  $g_2$  such that the closed-loop system is stable if and only if

$$\tau < \frac{1}{a} \quad \blacksquare$$

## 6. Numerical Examples.

The following examples are introduced in order to illustrate the performance of the control strategy proposed in this work.

**Example 1.** Consider the following second order unstable system plus time delay:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-s}}{(s - 0.7)(s - 0.4)}$$

For this example without zeros, we have  $a = 0.7, b = 0.4, \tau = 1$ , and  $\alpha = 1$ . It is clear, since  $\tau = 1 < \frac{1}{a} = 1.4826$ , that the stability condition given in *Lemma 5* is satisfied.

The following procedure is proposed in order to design the controller structure. To ensure the existence of a proportional gain  $k_2$  such that the closed loop system is stable, from Lemma 3 we get:

$$k_1 > \frac{1}{\alpha(\frac{1}{b} - \tau)} + \frac{a}{\alpha}$$

Let us choose  $k_1 = 50.7$ , then with a frequency domain analysis it is possible to compute the proportional gain  $k_2$ . For this example,  $20 < k_2 < 64.93$ .

For the design of the observer, a very similar procedure is implemented. From Lemma 4 we get:

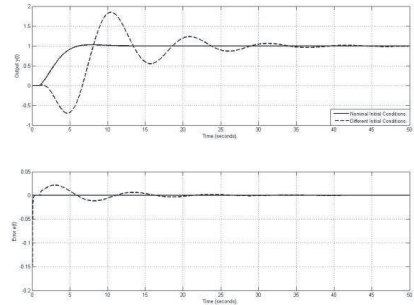


Figure 6. Example 1 Control Performance.



$$g_2 > \frac{1}{\left(\frac{1}{a} - \tau\right)} + b.$$

Let us choose  $g_2 = 20.4$ , then by mean of a frequency domain analysis it is possible to compute the proportional gain  $g_1$ . For this example,  $14 < g_1 < 21.55$ .

Hence, the proportional gains computed for this example are  $k_1 = 50.7, k_2 = 30, g_1 = 18$  and  $g_2 = 20.4$ . The Figure 6 illustrates the performance of the observer-based controller for a step reference in numerical simulations; the output and the error are shown respectively. The continuous line indicates the output of the closed loop system with identical initial conditions between  $y(t)$  and  $\hat{y}(t)$ . The dashed line point to the system performance whit different initial conditions ( $y(0) - \hat{y}(0) = 0.2$ ).

**Example 2.** Consider the following second order unstable system plus time delay with one zero:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3(s + 21)e^{-0.18s}}{(s - 5)(s - 1.5)}.$$

For the present example, the parameters of the system are  $a = 5, b = 1.5, \beta = 21, \tau = 0.18$ , and  $\alpha = 3$ . It is clear, since  $\tau = 0.18 < \frac{1}{a} = 0.2$ , that the stability condition given in *Lemma 7* is satisfied.

Hence, from *Lemmas 6* and *7* in section 5 the proportional gains computed for this example are  $k_1 = 8.67, k_2 = 1.8, g_1 = 1.8$  and  $g_2 = 22.5$ . The Figure 7 illustrates the performance of the observer-based controller for a step reference in numerical simulations; the output and the error are shown respectively. The continuous line denotes the performance for the nominal system. The dashed line suggests the performance for the system whit a uncertainty in the delay operator of 10%.

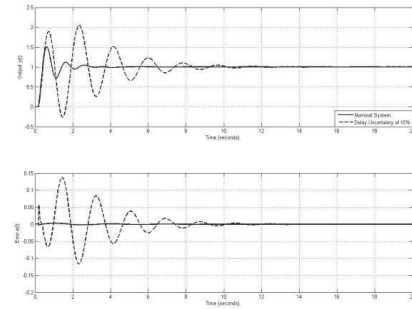


Figure 7. Example2 Control Performance.

## 7. Conclusions.

A simple observer based controller is proposed in the current work in order to stabilize second order strictly proper unstable systems plus time delay. Therefore, only the model of the process and four proportional gains are sufficient to obtain a stable behave of the closed loop system. The procedure for the computation of the constant gains is quite easy and can be realized by mean a frequency domain analysis. The performance reached for the control structure proposed is shown by mean of numerical simulations. The control strategy demonstrates robustness to different initial conditions and for uncertainty in the delay term.

## References.

- Del Muro, B., González, O. A., & Pedraza, Y. A. (2009). Stabilization of High Order Systems with Delay using a Predictor Schema. *IEEE 52nd International Midwest Symposium on Circuits and Systems*, (pp. 337-340). Cancun.
- Gu, K., Kharitonov, V. L., & Chen, J. (2003). *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhäuser.
- Malakhovski, E., & Mirkin, L. (2006). On Stability of Second-order Quasi-polynomials with a Single Delay. *Automatica*, 42(6), 1041-1047.
- Márquez, J., Del Muro, B., Velasco, M., & Alvarez, J. (2010). Control Based in an Observer Scheme for First-Order

- Systems with Delay. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 9(1), 43-52.
- Niculescu, S.-I. (2001). *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach* (Vol. 269). Londres: Springer.
- Normey-Rico, J. E., & Camacho, E. F. (2008). Dead-time compensators: A survey. *Control Engineering Practice*, 16(4), 407-428.
- Normey-Rico, J. E., & Camacho, E. F. (2009). Unified Approach for Robust Tead-Time Compesator Design. *Journal of Process Control*, 19, 38-47.
- Palmor, Z. J. (1996). Time Delay Compensation Smith Predictor and its Modifications. *The Control Hand-Book*.
- Rao, A. S., & Chidambaram, M. (2006). Enhanced Two-Degrees-of-Freedom Control Strategy for Second-Order Unstable Processes with Time Delay. *Ind. Chem. Eng. Res.*, 45(10), 3604-3614.
- Rao, A. S., Rao, V. S., & Chidambaram, M. (2007). Simple Analytical Design of Modified Smith Predictor with Improved Performance for Unstable First-Order plus Time Delay (FOPTD) Processes. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 46(13), 4561-4571.
- Richard, J. P. (2003). Time-delay systems:an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39, 1667-1694.
- Shamsuzzoha, M., Jeon, J., & Lee, M. (2007). Improved Analytical PID Controller Design for the Second Order Unstable Process with Time Delay. *17th European Symposium on Computer Aided Process Engineering*.
- Silva, G. J., Datta, A., & Bhattachaiyy, S. (2004). *PID Controllers for Time-Delay Systems*. Birkhäuser.
- Skogestad, S. (2003). Simple Analytic Rules for Model Reduction and PID Controller Tunning. *Journal of Process Control*, 291-309.
- Smith, O. J. (1957). Close Control of Loops with Dead Time. *Chem. Eng. Progress*, 53, 217-219.
- Zhong, Q.-C. (2006). *Robust Control of Time-Delay Systems*. Springer.

*Estabilización de una Clase de Sistemas de Alto Orden con Retardo  
Mediante un Esquema Observador Controlador,*  
David Novella Rodríguez y Basilio del Muro Cuéllar,  
Congreso Anual de la Asociación de Control Automático (AMCA)  
2011,  
Artículo sometido a revisión.

# Estabilización de una Clase de Sistemas de Alto Orden con Retardo Mediante un Esquema Observador Controlador.

David Novella y Basilio del Muro Cuéllar  
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,  
Unidad Culhuacan, Instituto Politécnico Nacional,  
Santa Ana 1000, México D.F., 04430, México  
dnovellar@gmail.com  
bdelmuro@yahoo.com.

**Resumen**—Este trabajo propone una estrategia simple de control para lograr un comportamiento estable una clase particular de sistemas retardados de alto orden con dos polos inestables. Un esquema de control basado en la teoría de los observadores de estado es implementado con el propósito de estimar las variables internas del sistema para utilizarlas más tarde como señales de control. Ejemplos numéricos así como la aplicación de la estrategia de control propuesta en una planta real construida con dispositivos electrónicos son presentadas para mostrar el desempeño del sistema en lazo cerrado.<sup>1</sup>  
**Palabras clave:** Sistemas lineales, sistemas con retardo, observadores.

## I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas con retardo son realmente comunes, estos aparecen en diversos sistemas tales como sistemas biológicos, sistemas de ingeniería, sistemas políticos, sistemas económicos, etc. y son ocasionados por diferentes mecanismos tales como transporte de energía o material, lazos de reciclo, entre otros. Además, los sensores, actuadores y las redes de comunicación que están involucrados en los lazos de control introducen usualmente tales retardos [Richard, 2003], [Zhong, 2006]. Por otro lado, los retardos pueden utilizarse en la aproximación de sistemas de alto orden por sistemas de orden reducido con retardo [Skogestad, 2003].

Es bien sabido que los retardos de tiempo frecuentemente producen comportamientos poco deseados en los sistemas dinámicos, (mal desempeño, oscilaciones, inestabilidad), por lo tanto es necesario prestar atención especial en el análisis de estabilidad y el diseño de controladores para los sistemas con retardo. Así, existe una gran motivación por estudiar los efectos que causa un retardo en los sistemas dinámicos por dos grandes razones: primero para entender como el retardo puede deteriorar el comportamiento del sistema, y segundo para controlar dichos efectos y alcanzar un mejor comportamiento de los sistemas en lazo cerrado, [Gu et al., 2003], [Niculescu, 2001].

<sup>1</sup> Este trabajo fue apoyado parcialmente por CONACyT, México, proyecto: 61713

Diferentes estrategias de control han sido desarrolladas para tratar con los sistemas con retardo. Un enfoque común consiste en aproximar el término de retardo por medio de series de Taylor o de Padé, lo cual puede conducir a sistemas de fase no mínima con una representación racional en función de transferencia [Niculescu, 2001]. Controladores Proporcional Integral (PI) y Proporcional Integral Derivativos (PID) están incluidos en el estudio de control de sistemas retardados [Silva et al., 2004].

Un enfoque distinto es el llamado Predictor de Smith Clásico, el cual consiste en contrarrestar los efectos del tiempo de retardo por medio de estrategias dedicadas a estimar los efectos de las entradas presentes sobre las salidas futuras, [Palmor, 1996], [Smith, 1957]. La principal limitación del predictor de Smith clásico es el hecho de que el esquema de predicción no contiene un paso de estabilización, lo cual restringe su uso a plantas estables en lazo abierto.

Sin embargo, los sistemas inestables en lazo abierto con retardo son muy frecuentes y aparecen, por ejemplo, en procesos químicos y biológicos y presentan mayor dificultad para su control. Para enfrentar este problema, se han propuesto algunas modificaciones al predictor de Smith original para controlar sistemas inestables con retardo. Por ejemplo, [Seshagiri et al., 2007] ha presentado una modificación eficiente al predictor de Smith clásico para controlar sistemas de primer orden inestables con retardo. Con una perspectiva diferente, [Normey-Rico and Camacho, 2008] propone una estructura de control para tratar con el mismo tipo de sistemas. Usando una estrategia similar, el mismo resultado es extendido para controlar sistemas de alto orden con retardo, [Normey-Rico and Camacho, 2009]. En los trabajos mencionados anteriormente, es fácilmente demostrado que la estabilidad interna del sistema no está garantizada. De hecho, una estimación inestable de la señal de error es obtenida, por lo tanto, una diferencia mínima entre las condiciones iniciales del sistema y las del predictor provoca un comportamiento inestable del sistema en lazo cerrado. Observe que, en situaciones prácticas no es posible obtener

una medición de las condiciones iniciales del sistema para asignarle este valor al modelo utilizado en predictor de Smith modificado.

Este trabajo esta dedicado a presentar una estrategia de control simple y novedosa para estabilizar sistemas de alto orden con dos polos inestable y con retardo. La estructura propuesta consta de un observador de estados y una retroalimentación de los estados estimados. A diferencia de los predictores de Smith modificados, el esquema de control propuesto en este trabajo solamente contiene retardos discretos (y no retardos distribuidos), o cuál hace sencilla su implementación practica, (vea [Zhong, 2006] para consultar detalles acerca de la implementación numérica de los predictores de Smith modificados).

El documento esta organizado de la siguiente manera: la Sección 2 esta dedicada a la formulación del problema. En la Sección 3 se presentarán algunos resultados preliminares que han sido utilizados en la obtención del resultado principal este trabajo. En la Sección 4 se presentará la estrategia de control propuesta, estableciendo las condiciones *necesarias y suficientes* para la existencia de la estructura de control presentada. La Sección 5 esta dedicada a presentar ejemplos didácticos, simulaciones numéricas y la implementación del esquema de control propuesto a una planta real serán presentadas con la finalidad de ilustrar el comportamiento del sistema en lazo cerrado así como el desempeño de la estrategia de control.

## II. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

### II-A. Formulación del Problema.

Considere la siguiente clase de sistemas lineales invariantes en el tiempo con una entrada - una salida con retardo en el tiempo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\tau s} = G(s) e^{-\tau s}. \quad (1)$$

Donde  $U(s)$  y  $Y(s)$  representan las señales de entrada y de salida respectivamente, los polinomios  $N(s)$  y  $D(s)$  expresados en la variable compleja  $s$  indican al numerador y el denominador de la función de transferencia libre de retardo  $G(s)$ . El término  $\tau$  representa el valor del tiempo de retardo.

Considere una estrategia de control tradicional basada en una retroalimentación de la salida de la siguiente forma:

$$U(s) = [R(s) - Y(s)]Q(s), \quad (2)$$

La cual produce un sistema en lazo cerrado dado por la siguiente ecuación:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Q(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + Q(s)G(s)e^{-\tau s}}. \quad (3)$$

El término exponencial  $e^{-\tau s}$  ubicado en en denominador de la función de transferencia (3), es decir, en la ecuación característica del sistema en lazo cerrado, conduce a un sistema con un número infinito de polos y donde las

propiedades de estabilidad del sistema en lazo cerrado deben de ser declaradas cuidadosamente.

Este trabajo propone un esquema de control con la finalidad de estabilizar la siguiente clase de sistemas:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{(s-a)(s-b)(s+c_1)(s+c_2)\dots(s+c_m)} e^{-\tau s}, \quad (4)$$

donde,  $\tau, a, b, c_1, c_2, \dots, c_m > 0$  y sin pérdida de generalidad  $a \geq b$ . El esquema de control propuesto esta diseñado basándose en la teoría convencional de observadores de estado, de esta forma, solo dos ganancias proporcionales y el modelo de la planta original son suficientes para obtener una estimación adecuada de una variable interna del sistema antes de ser retardada, la cual sera utilizada en el esquema de control estabilizante.

## III. RESULTADOS PRELIMINARES.

A continuación se presentarán algunos Lemas que han sido de gran utilidad para concluir el resultado principal de este trabajo.

Primero, considere el sistema de primer orden con retardo representado por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-\tau s} = \frac{\alpha}{s-\sigma} e^{-\tau s}, \quad (5)$$

con  $\sigma > 0$ , y una retroalimentación estática de la salida como se presenta a continuación:

$$U(s) = R(s) - kY(s), \quad (6)$$

noindent lo cual produce el siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{s - \sigma + k\alpha e^{-\tau s}}. \quad (7)$$

El siguiente resultado ha sido ampliamente estudiado y puede ser obtenido realizando diferentes análisis, por ejemplo, un análisis en el dominio de la frecuencia. Para demostrar este resultado, una alternativa simple basada en un estudio realizado en tiempo discreto es presentado en [Muro et al., 2008].

*Lema 1:* Considere el sistema con retardo (5) y la retroalimentación estática de la salida (6). Entonces, existe una ganancia proporcional  $k$  tal que el sistema en lazo cerrado (7) es estable si y solo si  $\tau < \frac{1}{\sigma}$ .

A continuación, considere el sistema de alto orden inestable caracterizado por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\alpha}{(s-\sigma)(s+\phi_1)(s+\phi_2)\dots(s+\phi_n)} e^{-\tau s}. \quad (8)$$

con  $\sigma, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n > 0$ . La retroalimentación estática de la salida(6), produce el siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{[(s - \sigma)(s + \phi_1)(s + \phi_2) \dots (s + \phi_n)] + k \alpha e^{-\tau s}}. \quad (9)$$

*Lema 2:* Tomando en cuenta el sistema con retardo (8) y la ley de control (6). Entonces, existe una ganancia proporcional  $k$  tal que el sistema en lazo cerrado (9), es estable si y solo si,  $\tau < \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\phi_i}$ .

La prueba de este resultado puede obtenerse por medio de diferentes análisis, como el análisis en el dominio de la frecuencia mostrado en [Muro-Cuéllar et al., 2009].

#### IV. ESTRATEGIA DE CONTROL PROPUESTA.

Considere la clase de sistemas analizados en este trabajo y representados por la ecuación (4), con  $a, b, c_1, c_2, \dots, c_m > 0$ , el tiempo de retardo  $\tau > 0$ , y asumiendo sin pérdida de generalidad que  $a \geq b$ . Un esquema observador-controlador es diseñado para obtener una estimación de las variables internas del sistema y usarlas más tarde como señales de control para el proceso original.

Como un primer paso, las condiciones de estabilidad para el sistema controlador y el sistema observador serán enunciadas por separado. Estas condiciones serán utilizadas más tarde para concluir las condiciones de estabilidad del sistema observador controlador en lazo cerrado.

##### IV-A. Esquema Controlador.

Primero, tomando en cuenta el controlador presentado en la figura 1.

Las condiciones para la existencia de dicho controlador serán expresadas en el siguiente Lema.

*Lema 3:* Considere el sistema inestable con retardo representado por la ecuación (??), y el esquema de retroalimentación mostrado en la Figura 1. Existen ganancias proporcionales  $k_1$  and  $k_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable si y solo si:

$$\tau < \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}.$$

El objetivo de la siguiente prueba es aplicar las condiciones de estabilidad expresadas en el Lema 2 al esquema de retroalimentación mostrado en la figura 1.

*Demostración:*

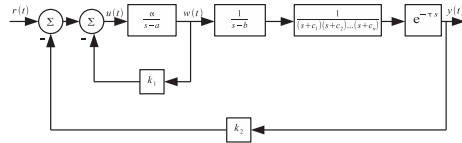


Figura 1. Control Scheme.

*Suficiencia.* Considere que el sistema cumple con la condición  $\tau < \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}$ . Entonces, existe una constante

positiva  $\beta$  tal que  $\tau = \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i} - \beta$ . Por lo tanto, existe

una ganancia constante  $k_1$  tal que  $\beta > \frac{1}{\alpha k_1 - a} > 0$ . Así,  $\tau < \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i} - \frac{1}{\alpha k_1 - a}$ . Finalmente, del Lema 2 es

posible concluir, donde  $\sigma = b$ ,  $\phi_i = c_i$  y  $\phi_n = \alpha k_1 - a$ , existe una  $k_2$  tal que el sistema en lazo cerrado 1 es estable.

*Necesidad.* Considere el sistema con retardo (4), y el esquema de retroalimentación mostrado en la Figura 1, con ganancias constantes  $k_1$  y  $k_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable. La función de transferencia del sistema en lazo cerrado puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s - b)(s + c_1) \dots (s + c_m)(s + \phi_n) + \alpha k_2 e^{-\tau s}}, \quad (10)$$

con  $\phi_n = \alpha k_1 - a$ . Es bien sabido que si existe una ganancia  $k_2$  que estabiliza el sistema dado por la ecuación (10), también debe ser capaz de estabilizar el sistema libre de retardo (vea [Malakhovski and Mirkin, 2006] o [Niculescu, 2001] para mayor detalle), lo cual implica que

$\phi_n > 0$ . De hecho, del Lema 2,  $\tau < \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\phi_i}$  con

$\sigma = b$ ,  $\phi_i = c_i$  y  $n = m + 1$  (observe que  $\phi_n > 0$  es un parametro libre del sistema en función de  $k_1$ ). Considere una constante  $\beta > 0$  tal que  $\beta > \frac{1}{\phi_n} > 0$ , y denotando

$\beta = \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\phi_i} - \tau$ , therefore:

$$\tau = \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\phi_i} - \beta < \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\phi_i} = \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}.$$

■

##### IV-B. Esquema Observador.

En un gran número de aplicaciones practicas no es posible medir las variables internas del sistema en su totalidad, (ya sea por razones de costo, restricciones tecnológicas, etc). Por eso, se propone un observador basado en la técnica de inyección de las salidas, presentada en la Figura 2. Las condiciones de estabilidad para este sistema serán abordadas a continuación.

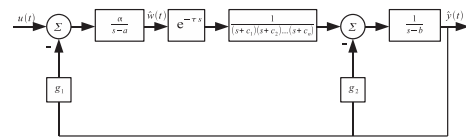


Figura 2. Observer Scheme.

*Lema 4:* Considere el sistema inestable de alto orden con retardo caracterizado por (4), y el esquema de inyección de las salidas mostrado en la Figura 2. Existen ganancias proporcionales  $g_1$  y  $g_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable si y solo si:

$$\tau < \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}.$$

*Demostración:*

La prueba para el Lema 4 puede ser obtenida fácilmente dualizando la prueba realizada para el Lema 3. ■

#### IV-C. Esquema Controlador-Observador.

Finalmente, el resultado principal de este trabajo será presentado, una estructura de control basada en un sistema observador es propuesto y mostrado en la Figura 3, este esquema de observación permite realizar una estimación de las variables de estado del sistema para usarlas más tarde como señales de retroalimentación para la planta original. Cabe mencionar que en la estrategia de control propuesta, solamente cuatro ganancias proporcionales son suficientes para obtener un comportamiento estable del sistema en lazo cerrado.

El siguiente resultado es producto de los resultados presentados previamente.

*Lema 5:* Considere la estrategia de control mostrada en la Figura 3 aplicada al sistema inestable con retardo (4). Entonces, existen ganancias proporcionales  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable si y solo si:

$$\tau < \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}.$$

*Demostración:* Primero se demostrará que el esquema observador proporciona una estimación adecuada de las variables de estado del sistema. Considere la representación en espacio de estados del sistema (4), caracterizada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (11)$$

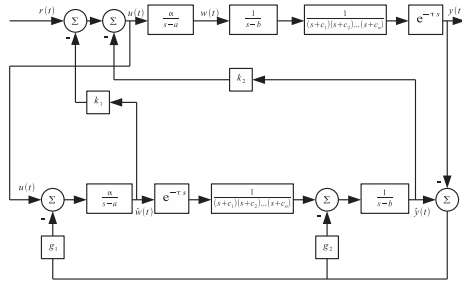


Figura 3. Control Strategy Proposed.

Siendo  $x(t) = [w(t) \ x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_m(t) \ z(t)]^T$ . Donde,

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -c_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \end{aligned}$$

Observe que la representación en espacio de estados dada por (11) puede regresar a su representación en espacio de estados por medio de la siguiente expresión:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - (A_0 + A_1e^{-\tau s}))^{-1}B. \quad (12)$$

Las dinámicas de los estados estimados y la ley de control propuesta se describen a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_0\hat{x}(t) + A_1\hat{x}(t - \tau) + Bu(t) - G(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ u(t) &= K\hat{x}(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Donde  $\hat{x}(t)$  representa la estimación del estado  $x(t)$ , y los vectores de ganancias  $K$  y  $G$  están definidas por:

$$K = [k_1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ k_2]$$

$$G = [g_1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ g_2]^T$$

Sea  $e(t) := x(t) - \hat{x}(t)$ , entonces obtenemos las dinámicas del error:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A_0 - GC)e(t) + A_1e(t - \tau), \quad (14)$$

y las siguientes dinámicas del sistema controlado:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + BK\hat{x}(t). \quad (15)$$

Denotando la variable  $x_e = [x(t) \ e(t)]^T$  obtenemos las siguientes ecuaciones de estado para el sistema en lazo cerrado mostrado en la Figura 3:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= \begin{bmatrix} A_0 + BK & -BK \\ 0 & A_0 - GC \end{bmatrix} x_e(t) + \dots \quad (16) \\ &\dots + \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} x_e(t - \tau) \\ y(t) &= [C \ 0] x_e(t). \end{aligned}$$

Es claro que el sistema cumple con el principio de separación, [Kailath, 1980], es decir, el diseño del esquema de control puede realizarse de manera independiente al sistema de observación. Por lo tanto, la estabilidad del esquema observador es suficiente para obtener una señal de error convergente cero, *i.e.* existen ganancias proporcionales  $g_1$  and  $g_2$  tales que  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{w}(t) - w(t)] = 0$  si y solo si

$$\tau < \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}.$$

Así, considerando el hecho de que el controlador y el observador pueden diseñarse separadamente y tomando en cuenta los resultados expresados en los Lemas 3 y 4, es claro que las condiciones de estabilidad del esquema observador son más restrictivas que las del controlador, es decir:

$$\frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m c_i < \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}.$$

Por lo tanto, existen ganancias  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable si y solo si:

$$\tau < \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i}.$$

■

## V. EJEMPLOS.

A continuación se presentaran ejemplos didácticos con el propósito de mostrar el desempeño de la estrategia de control propuesta en este trabajo.

*Ejemplo 6:* Considere el sistema inestable caracterizado por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{30}{(s-1)(s-0.5)(s+7)(s+12)(s+15)} e^{-0.5s} \quad (17)$$

Es claro que el sistema cumple con las condiciones de estabilidad enunciadas en el Lema 3, es decir,  $\tau = 0.5 < \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i} = 0.7071$ . A continuación se introducirá un procedimiento sencillo el cual permite calcular las ganancias proporcionales para lograr un comportamiento estable del sistema en lazo cerrado:

1. Para asegurar la existencia de una ganancia  $k_2$ , tal que el sistema controlador proporcione un comportamiento estable del proceso original, el valor de  $k_1$

debe cumplir la siguiente relación:

$$k_1 > \frac{1}{\alpha \left( \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} - \tau \right)} + \frac{a}{\alpha}.$$

2. Con el valor seleccionado de  $k_1$ , realizar un análisis en el dominio de la frecuencia, (Un diagrama de Nyquist por ejemplo) para el sistema con un polo inestable y retardo caracterizado por la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s+\bar{a})(s-b)(s+c_1)(s+c_2) \cdots (s+c_n)}.$$

Donde  $\bar{a} = \alpha k_1 - a$ .

3. Del rango de valores posibles para la ganancia  $k_2$  obtenidos por medio del análisis descrito en el paso anterior, seleccionar uno.
4. Para asegurar la existencia de una ganancia  $g_1$ , tal que el sistema controlador proporcione un comportamiento estable del proceso original, el valor de  $g_2$  debe cumplir la siguiente relación:

$$g_2 > \frac{1}{\left( \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} - \tau \right)} + b$$

5. Con el valor seleccionado de  $g_2$ , realizar un análisis en el dominio de la frecuencia, (Un diagrama de Nyquist por ejemplo) para el sistema con un polo inestable y retardo caracterizado por la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s-a)(s+\bar{b})(s+c_1)(s+c_2) \cdots (s+c_n)}.$$

Donde  $\bar{b} = g_2 - b$ .

6. Del rango de valores posibles para la ganancia  $g_1$  obtenidos por medio del análisis descrito en el paso anterior, seleccionar uno.

Las ganancias proporcionales obtenidas para estabilizar el sistema con retardo presentado en el ejemplo 6 son:  $k_1 = 0.4$ ,  $k_2 = 350$ ,  $g_1 = 900$  y  $g_2 = 20.5$ . La Figura 4 muestra el desempeño del controlador observador propuesto obtenido mediante simulaciones numéricas. La línea continua indica la respuesta del sistema con condiciones iniciales iguales entre el modelo del observador y la planta original, la línea discontinua muestra el desempeño del sistema cuando existen condiciones iniciales diferentes, es decir,  $y(0) - \hat{y}(0) = 0.1$

*Ejemplo 7:* Considere el sistema de alto orden con retardo con la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s-0.7)(s-0.4)(s+5)(s+10)} e^{-0.5s} \quad (18)$$



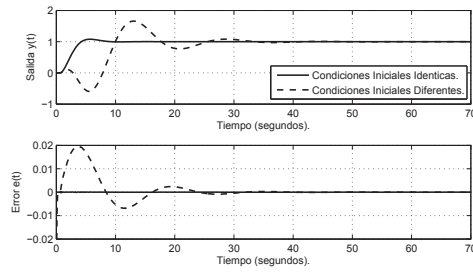


Figura 4. Simulaciones Numéricas.

El sistema cumple con las condiciones de estabilidad expresadas en el Lema 3, ya que  $\tau = 0.5 < \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{c_i} = 1.128$ .

Las ganancias obtenidas para estabilizar este sistema mediante la estrategia de control propuesta son  $k_1 = 20.7$ ,  $k_2 = 1000$ ,  $g_1 = 1100$  and  $g_2 = 20.4$ . La figura 5 muestra el desempeño de la estrategia de control integrada a una planta construida con dispositivos electrónicos comerciales, el sistema controlador observador es implementado por medio de la tarjeta de adquisición de datos Sensoray 626, utilizando sus entradas y salidas análogas como sensores y actuadores, realizando la comunicación al ordenador mediante el software MATLAB Simulink. La respuesta estable del sistema y la señal de error son mostradas en la figura 5.

*Observación 8:* Observe que la estrategia de control propuesta en este trabajo presenta un desempeño aceptable a pesar de que el sistema original y el modelo usado en el observador presenten condiciones iniciales diferentes (Ejemplo 6) y sin importar las variaciones paramétricas ocasionadas al utilizar dispositivos electrónicos comerciales (Ejemplo 7).

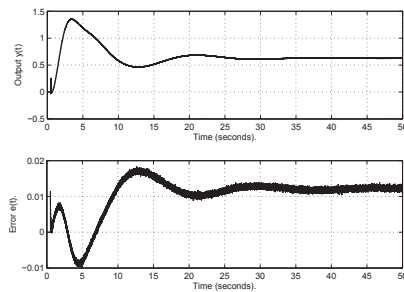


Figura 5. Implementación Electrónica.

## VI. CONCLUSIONES.

Se ha diseñado una estrategia de control sencilla y novedosa con la finalidad de estabilizar una clase particular de sistemas con retardo. Las condiciones *necesarias* y *suficientes* para la existencia de esta estructura de control estabilizante son expresadas en términos del valor del retardo y de las constantes de tiempo inestables del sistema. De esta forma, solamente cuatro ganancias proporcionales y el modelo de la planta a estabilizar son suficientes para obtener un sistema en lazo cerrado estable. El desempeño de esta estrategia está ilustrado mediante simulaciones numéricas, además se implementa el esquema de control a una planta real, mostrando en ambos casos una respuesta aceptable.

## REFERENCIAS

- [Gu et al., 2003] Gu, K., Kharitonov, V. L., and Chen, J. (2003). *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhäuser.
- [Kailath, 1980] Kailath, T. (1980). *Linear Systems*. Prentice Hall, USA.
- [Malakhovskii and Mirkin, 2006] Malakhovskii, E. and Mirkin, L. (2006). On Stability of Second-order Quasi-polynomials with a Single Delay. *Automatica*, 42:1041–1047.
- [Muro et al., 2008] Muro, B. D., Márquez, J., Velasco, M., and Alvarez, J. (2008). Stabilization strategy for unstable first order linear systems with large time delay. *International Conference on Modelling Identification and Control, ICMI*.
- [Muro-Cuellar et al., 2009] Muro-Cuellar, B. D., González-Nagera, O., and Pedraza, Y. A. (2009). Stabilization of high-order systems with delay using a predictor schema. *Circuits and Systems, Midwest Symposium on*, 0:337–340.
- [Niculescu, 2001] Niculescu, S.-I. (2001). *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*. Springer.
- [Normey-Rico and Camacho, 2008] Normey-Rico, J. E. and Camacho, E. F. (2008). Dead-time compensators: A survey. *Control Engineering Practice*, 16(4):407–428.
- [Normey-Rico and Camacho, 2009] Normey-Rico, J. E. and Camacho, E. F. (2009). Unified approach for robust dead-time compensator design. *Journal of Process Control*, 19:38–47.
- [Palmor, 1996] Palmor, Z. J. (1996). Time delay compensation smith predictor and its modifications. *The control Handbook*, pages 224–237.
- [Richard, 2003] Richard, J.-P. (2003). Time-Delay Systems: An Overview of Some Recent Advances and Open Problems. *Automatica*, 39:1667–1694.
- [Seshagiri et al., 2007] Seshagiri, R. A., Rao, V. S. R., and Chidambaram, M. (2007). Simple analytical design of modified smith predictor with improved performance for unstable first-order plus time delay (fodtp) processes. *Ind. Eng. Chem. Res*, 46(13):4561–4571.
- [Silva et al., 2004] Silva, G. J., Datta, A., and Bhattacharyya, S. (2004). *PID Controllers for Time-Delay Systems*. Control Engineering. Birkhäuser.
- [Skogestad, 2003] Skogestad, S. (2003). Simple Analytic Rules for Model Reduction and PID Controller Tuning. *Journal of Process Control*, 13:4.
- [Smith, 1957] Smith, O. J. M. (1957). Close Control of Loops with Dead Time. *Chem. Eng. Prog.*, 53:217–219.
- [Zhong, 2006] Zhong, Q.-C. (2006). *Robust Control of Time-Delay Systems*. Springer.

*A Simple Observer Based Controller for the Stabilization of High Order Systems with Two Unstable Poles Plus Time Delay,*  
David Novella Rodríguez, Basilio del Muro Cuéllar and Olivier Sename,  
Artículo en proceso de redacción para su posible publicación en revista internacional.

# A Simple Observer Based Controller for the Stabilization of High Order Systems with Two Unstable Poles Plus Time Delay.

David Novella Rodríguez<sup>†</sup>, Basilio Del Muro Cuéllar<sup>†</sup> and Olivier Sename<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacan,  
Instituto Politécnico Nacional, Santa Ana 1000, México D.F., 04430, México.  
(e-mail: dnovellar@gmail.com, bdelmuro@yahoo.com).

<sup>‡</sup>GIPSA-Lab Department of Control Systems, Grenoble INP, ENSE3,  
BP46 38402, Saint Martin d'Hères Cedex, GRENOBLE, FRANCE.  
(e-mail: olivier.sename@gipsa-lab.grenoble-inp.fr).

**Abstract**—This paper deals with the problem of the stabilization of linear time invariant high order systems with two unstable plus time delay. A simple observer based controller is designed in order to achieve a stable behavior of the closed loop system. Necessary and sufficient conditions for the existence of the control structure are stated. Hence, only four proportional gains and the model of the plant are enough to obtain a stable response of the time delay system. Moreover, a robustness analysis with respect to the delay term is presented to compute the maximal uncertainty bound of the delay. The performance of the control strategy propose is illustrate by mean of numerical simulations and electronic implementations.

## I. INTRODUCTION.

Systems with delays are very common, they appear in various systems as biological, ecological, social, engineering systems, etc., and are due to several mechanisms like material or energy transport, recycling loops, etc.. In addition, actuators, sensors and field networks that are involved in feedback loops usually introduce such delays, [9], [16]. Also delays can be used in model reduction where high-order (finite-dimensional) systems are approximated (in some norm sense) by low order systems with delays, [13]. It is known that time-delay is often a source of complex behaviors (oscillations, instability, bad performance), in many dynamic systems, and thus considerable attention has been paid on the stability analysis and controller design of time delay systems. Hence, there exists a great motivation to study delay effects on dynamical systems properties for two main reasons: first to understand how the delay presence may deteriorate the behavior of the system, and second to control their effects for better performance achievement on closed-loop systems, [1], [5].

Several control strategies have been developed to deal with delayed systems. A common approach is to approximate the time-delay operator by means of a Taylor or Pade series which could lead to a non minimum-phase system with rational transfer function representation. The Proportional-Integral (PI) and Proportional-Integral-Derivative (PID) controllers are included in the control design for time delay systems [12].

A different approach to deal with time delay systems is the classical Smith Predictor (SP), which consists in counteracting the time delay effects by mean of strategies

intended to estimate the effects of current inputs over future outputs, [8], [14]. The main limitation of the original SP is the fact that the prediction schema has not a stabilization step, which restricts its application to open-loop stable plants.

However, open-loop unstable processes arise frequently in chemical and biological systems and are fundamentally difficult to control. To overcome this problem, some modifications of the SP original structure have been proposed to deal with non-stable delayed process, for instance, [11] has presented an efficient modification to the Smith predictor in order to control unstable first order system plus time delay. With a different perspective, [7] proposes a modification to the original Smith Structure in order to deal with unstable first order delayed systems. Using a similar structure, the result is extended to delayed high order systems [6]. In both works, a robustness analysis is done concluding that for unstable dead time dominant systems, the closed-loop system can be unstabilized with an infinitesimal value of the modeling error, i.e., that robustness is strongly dependent on the relationship  $\tau/\tau_{un}$ , where  $\tau$  is the process time delay and  $\tau_{un}$  the dominant unstable time-constant. For the control scheme proposed in this later works, it can be easily proven that in the case of unstable plants, the internal stability is not guaranteed. In fact it is obtained an unstable estimation error and, as a result, a minimal initial condition difference between the original plant and the model produces an internal unbounded signal. Notice that in a practical situation it is not possible to exactly measure the initial condition of the plant to assign the same value to the model considered on the modified Smith compensator. In [?] it is considered the stabilization of time-delay system of order  $n$  based on a numerical stabilization method. Such method consists in shifting the unstable eigenvalues to the left half plane by static state feedback by applying small changes to the feedback gain. Then, such method is applied to the observer design case. However, explicit stability conditions with respect to time-delay size are not provided for the mentioned kind of systems. On the other hand, in [?] upper bounds on the delay size are provided when using linear time invariant controllers on the stabilization of strictly proper delayed real rational plants. It is important to note that in general, the provided bounds are not tight and the authors

---

---

# Bibliografía

---

- [1] Yebrail Antonio Pedraza Beltran. Estabilización de sistemas inestables con retardo con un polo inestable y  $n - 1$  estables. Master's thesis, IPN, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacan, Enero 2010.
- [2] Stephen Boyd. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [3] Corentin Briat. *Commande Et Observation Robuste Des Systemes LPV Retardés*. PhD thesis, Grenoble INP, 2008.
- [4] John Doyle, Bruce Francis, and Allen Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. MacMillan Publishing Co., 1990.
- [5] Frédéric Gouaisbaut and Dimitri Peaucelle. Stability of Time-Delay Systems with Non-Small Delay. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 840–845, 2006.
- [6] D.-W. Gu, P. Hr. Petkov, and M. M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB®*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer-Verlag, 2005.
- [7] Keqin Gu, Vladimir L. Kharitonov, and Jie Chen. *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhäuser, 2003.
- [8] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, USA, 1980.
- [9] V. B. Kolmanovskii, Silviu-Iulian Niculescu, and Keqin Gu. Delay Effects on Stability: A Survey. *Proceedings of the 38<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, pages 1993–1998, December 1999.
- [10] Efim Malakhovski and Leonid Mirkin. On Stability of Second-order Quasipolynomials with a Single Delay. *Automatica*, 42:1041–1047, 2006.
- [11] J.F. Márquez, B. Del Muro, M. Velasco, and J. Alvarez. Control Based in an Observer Scheme for First-Order Systems with Delay. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 9, 2010.
- [12] Leonid Mirkin and Natalya Raskin. Every stabilizing dead-time controller has an observer predictor based structure. *Automatica*, 39:1747–1754, 2003.

- [13] B. Del Muro, J.F. Márquez, M. Velasco, and J. Alvarez. Stabilization strategy for unstable first order linear systems with large time delay. *International Conference on Modelling Identification and Control, ICMIC*, 2008.
- [14] B. Del Muro-Cuéllar, O. González-Nagera, and Y. A. Pedraza. Stabilization of high-order systems with delay using a predictor schema. *Circuits and Systems, Midwest Symposium on*, 0:337–340, 2009.
- [15] B. Del Muro-Cuéllar, Y. Pedraza-Beltran, and O. A. González. Estabilización de sistemas de segundo orden con retardo, aplicación a sistemas de alto orden. *XIII Congreso Latinoamericano de Control Automático / VI Congreso Venezolano de Automatización y Control.*, 2008.
- [16] Omar Arid González Nájera. Estabilización de sistemas de segundo orden con retardo: Aplicación a sistemas de alto orden. Master’s thesis, IPN, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacan, Junio 2009.
- [17] Silviu-Iulian Niculescu. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*. Springer, 2001.
- [18] Norman S. Nise. *Control System Engineering*. CECSA, 3 edition, 2000.
- [19] J. E. Normey-Rico and E. F. Camacho. Unified approach for robust dead-time compensator design. *Journal of Process Control*, 19:38–47, 2009.
- [20] Julio E. Normey-Rico and Eduardo. F. Camacho. Dead-time compensators: A survey. *Control Engineering Practice*, 16(4):407–428, 2008.
- [21] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, USA, 3 edition, 1997.
- [22] Z. J. Palmor. Time delay compensation smith predictor and its modifications. *The control Handbook*, pages 224– 237, 1996.
- [23] A. Seshagiri Rao and M. Chidambaram. Enhanced Two-Degrees-of-Freedom Control Strategy for Second-Order Unstable Processes with Time Delay. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 45:3604–3614, 2006.
- [24] Jean-Pierre Richard. Time-Delay Systems:An Overview of Some Recent Advances and Open Problems. *Automatica*, 39:1667–1694, 2003.
- [25] Juan Fransisco Márquez Rubio. Análisis de sistemas inestables con retardo: Una solución novedosa al caso de primer orden. Master’s thesis, IPN, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacan, Diciembre 2008.
- [26] Olivier Sename. *Sur la Commandabilité et le Découplage des Systèmes Linéaires à Retards*. PhD thesis, Université de Nantes, 1994.
- [27] Olivier Sename. Is a Mixed Design of Observer Controllers for Time Delay Systems Interesting? *Asian Journal of Control*, 9(2):180–189, June 2007.
- [28] Olivier Sename. Analysis, Observation and Control of Time-Delay Systems., 2009.
- [29] Olivier Sename. Robust Control: Analysis and Design., 2010.
- [30] Olivier Sename, Jean-Francois Lafay, and Rabah Rabah. Controllability Indices of Linear Systems with Delays. *Kybernetika*, 31(6):559–580, 1995.

- [31] Olivier Sename[2]. New Trends in Design of Observers for Time-Delay Systems. *Kybernetika*, 37(4):427–458, 2001.
- [32] Sensoray Co., Inc., 7313 SW Tech Center Dr., Tigard, Oregon 97223, USA. *Sensoray Model 626 Instruction Manual*, f edition, January 2004.
- [33] R. A. Seshagiri, V. S. R. Rao, and M. Chidambaram. Simple analytical design of modified smith predictor with improved performance for unstable first-order plus time delay (fodtp) processes. *Ind. Eng. Chem. Res*, 46(13):4561–4571, 2007.
- [34] M. Shamsuzzoha, Jongpal Jeon, and Moonyong Lee. Improved Analytical PID Controller Design for the Second Order Unstable Process with Time Delay. *17th European Symposium on Computer Aided Process Engineering*, 2007.
- [35] Guillermo J. Silva, Aniruddha Datta, and S.P. Bhattacharyya. *PID Controllers for Time-Delay Systems*. Control Engineering. Birkhäuser, 2004.
- [36] S. Skogestad. Simple Analytic Rules for Model Reduction and PID Controller Tunning. *Journal of Process Control*, 13:4, 2003.
- [37] O. J. M. Smith. Close Control of Loops with Dead Time. *Chem. Eng. Prog.*, 53:217–219, 1957.
- [38] Harry L. Trentelman, Anton A. Stoorvogel, and Malo Hautus. *Control Theory for Linear Systems*. Springer-Verlag, 1 edition, 2001.
- [39] E. Umez-Eronini. *Dinámica de sistemas y control*. Thomson Learning, 2001.
- [40] Erik I. Verriest, Olivier Sename, and Pierdominico Pepe. Robust Observer-Controller for Delay Differential Systems. *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 981–986, December 2002.
- [41] Qing-Chang Zhong. *Robust Control of Time-Delay Systems*. Springer, 2006.

Φ