INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

UNIDAD LEGARIA

Discurso Matemático Escolar: un estudio en el concepto de Pendiente.

T E S I S D E M A E S T R Í A

P A R A O B T E N E R E L G R A D O

D E

M A E S T R O E N C I E N C I A S

E N

M A T E M A T I C A E D U C A T I V A

P R E S E N T A

I N G. J A V I E R C R U Z H E R N Á N D E Z

Directores de Tesis:

Dr. Apolo Castañeda Alonso y M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

México, D. F. Marzo 2011

SIP-13-BIS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REGISTRO DE TEMA DE TESIS
Y DESIGNACIÓN DE DIRECTORES DE TESIS

México, D.F. a 21 de junio del 2011

El Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA-IPN en su sesión ordinaria No. VI celebrada el día 21 del mes de junio conoció la solicitud presentada por el(la) alumno(a):

Cruz	Hernández	Javier
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre (s)

Con registro: B 0 7 1 7 4 7

Aspirante de: Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

1.- Se designa al aspirante el tema de tesis titulado:
Estudio del discurso escolar de la pendiente

De manera general el tema abarcará los siguientes aspectos:
Análisis de las interpretaciones que tienen los estudiantes de nivel superior sobre el concepto de pendiente, análisis de la didáctica escolar de la pendiente.

2.- Se designan como Directores de Tesis a los Profesores:
Dr. Apolo Castañeda Alonso y M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

3.- El trabajo de investigación base para el desarrollo de la tesina será elaborado por el alumno en:
CICATA-IPN Unidad Legaria

que cuenta con los recursos e infraestructura necesarios.

4.- El interesado deberá asistir a los seminarios desarrollados en el área de adscripción del trabajo desde la fecha en que se suscribe la presente hasta la aceptación de la tesis por la Comisión Revisora correspondiente:

Directores de Tesis

Dr. Apolo Castañeda Alonso

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

Aspirante

Javier Cruz Hernández

Presidente del Colegio

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 28 del mes agosto del año 2011, el (la) que suscribe Cruz Hernández Javier alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro B071747, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Apolo Castañeda Alonso y cede los derechos del trabajo intitulado Discurso Matemático Escolar: Un estudio en el concepto de pendiente , al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección ing_javiercruzh@hotmail.com Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Javier Cruz Hernández
Nombre y firma

GLOSARIO

Bisecar: en geometría, significa dividir en dos partes iguales, partir por mitad.

Función creciente: cuando la derivada de la función es positiva en un intervalo dado.

Función decreciente: cuando la derivada de la función es negativa en un intervalo dado.

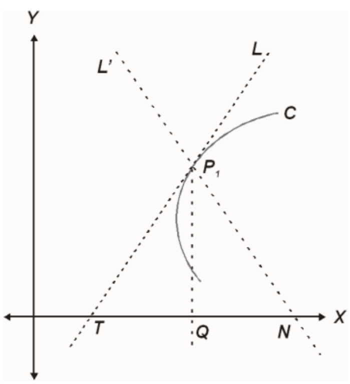
Objeto matemático: teoremas, demostraciones, rutinas algorítmicas, técnicas especiales e incluso recursos nemotécnicos.

Nemotécnico: la nemotecnia o mnemotecnia es el procedimiento de asociación mental de ideas, esquemas, ejercicios sistemáticos, repeticiones, etc. para facilitar el recuerdo de algo.

Paradigma: modelo o patrón en cualquier disciplina científica u otro contexto epistemológico.

Subtensa. Cuerda de un arco.

Subtangente: veamos la siguiente figura



La proyección QT de la longitud de la tangente sobre X se llama **subtangente**.

Normal. **L'** es la recta trazada por P1 perpendicular a L y se llama normal a C en P1.

Subnormal. La proyección QN de la longitud de la normal sobre X se llama subnormal.

Secuencia didáctica. Las secuencias didácticas (SD) quedan configuradas por el orden en que se presentan las actividades a través de las cuales se lleva a cabo el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Grado. unidad de ángulo en el plano.

Didáctica. Tratamiento de la matemática para su transmisión a los estudiantes, secuenciación , tipos de actividades , función didáctica de los ejemplos y aplicaciones.

Semántica: se refiere a los aspectos del significado, sentido o interpretación del significado de un determinado elemento, símbolo, palabra, expresión o representación formal.

CONALEP: Colegio Nacional de Educación Profesional T

CBT: Centro de Bachillerato Tecnológico.

CBTIS: Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios.

CECyTEM: Centro de estudios Científicos y Tecnológicos del estado de México.

CETEC: Centro Tecnológico.

RESUMEN

Nuestra investigación ofrece un panorama sobre dificultades que presentan estudiantes, al ingresar del nivel medio superior, a la Carrera de Ingeniería Industrial en el Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli, en relación a la conceptualización y el uso de la pendiente.

Existen investigaciones antecedentes a nuestro estudio, que de formas diversas presentan el concepto de pendiente, mediante un discurso de tipo didáctico, un análisis didáctico o mediante un análisis de tipo cognitivo.

En un análisis del Discurso Matemático Escolar en libros de texto, observamos que el concepto de pendiente, se da en tres momentos: en geometría analítica es caracterizado como "cociente de diferencias", en trigonometría, se maneja como "la tangente de un ángulo de inclinación ", y en los textos de precálculo, es el resultado de encontrar una "fórmula de predicción de la pendiente". En obras eruditas, advertimos, un discurso: de corte geométrico, descriptivo, analítico o por medio de métodos para el trazo o la determinación de tangentes. Al profesor, esto, no le ayuda a mostrar procedimientos, más bien le ayuda a mostrar al estudiante, la construcción de un conocimiento desde diferentes ideas o puntos de vista. Presentaciones diversas, desprendidas de libros de texto y de obras eruditas, impactan, mediante su discurso, la oportunidad de clarificar la diferencia entre el concepto de pendiente estática y pendiente dinámica.

Derivado de lo anterior, consideramos como hipótesis que "*El actual modelo de enseñanza no permite la formulación de una tangente variacional*". Aplicamos una exploración a estudiantes, mediante una secuencia, encontrando por parte de ellos, una ideología derivada del Discurso Matemático Escolar que sobre el concepto de pendiente, adquirieron en sus cursos de precálculo en el actual modelo de enseñanza (básicamente sobre pendiente estática) y cuyos resultados coinciden con nuestro problema de investigación: *el discurso matemático escolar no facilita la construcción de la noción de pendiente lo cual es necesario para entender conceptos de calculo elementales*.

ABSTRACT

Our research offers an overview of the difficulties that students encounter as they go from mid school to the mayor in Industrial Engineering at the Tecnologico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli, in relation to the conceptualization and use of the Slope.

There is some research preceding our study, which in different ways introduces the concept of Slope through a didactic type of discourse, a didactic analysis or through a cognitive type of analysis.

Analyzing the School Mathematical Discourse in school texts, we find that the concept of Slope is given in three moments: In Analytical Geometry it is characterized as the "cocient of differences", in Trigonometry it is handled as "the tangent of an angle of inclination" and in pre-calculus texts it is the result of finding the "formula for the prediction of the slope." In scholar works we encounter a discourse of: Geometric style, descriptive, analytical or through methods to trace or determine of tangents. These do not help the teacher to show procedures. It rather helps to show the students the building of knowledge from different ideas or points of view. Diverse presentations taken from text books and scholar works facilitate through their discourse, the opportunity of clarifying the difference among the concepts of static slope and dynamic slope.

From the previous, we consider as a hypothesis that "The current model of teaching does not allow the formulation of a variational tangent." Applying a probe to students through a sequence it was found in them an ideology, derived from the School Mathematical Discourse, for the concept of slope, acquired from their pre-calculus courses in the present model of teaching (basically about static slope) results which coincide with our research problem. That is, *The school mathematical discourse does not facilitate the construction of the notion of Slope, which is necessary to understand elementary concepts of calculus.*

ÍNDICE

Introducción

En el capítulo 1, describimos algunas investigaciones que anteceden a la presente. Éstos trabajos, ofrecen un panorama, sobre las dificultades que tienen estudiantes del nivel medio superior, superior y maestría, en relación a la interpretación y uso del concepto de la pendiente de una recta. Las investigaciones analizadas, mencionan diferentes interpretaciones que estudiantes le dan a la pendiente, como: ángulo, inclinación o ángulo de inclinación. Las investigaciones, indican, la preferencia de estudiantes en manifestar las características del escenario donde se encuentra la recta, sobre las características de la recta misma y muestran antecedentes, de cómo estudiantes, interpretan la pendiente de una recta cuando forma un ángulo agudo ó un ángulo obtuso con el eje de las *x*. Se cita también en éste capítulo, dificultades de estudiantes en el manejo de proporciones en el Teorema de Tales. Se presenta, tanto un análisis didáctico y cognitivo de la pendiente y su variación en la investigación de Martínez (2005), así como un análisis didáctico de la tangente en el trabajo de Serna (2007) y la ilustración del concepto de pendiente dinámica y pendiente estática en el libro de Texto de Leheman (1989).

En el capítulo 2, presentamos, además de algunas ideas relevantes en relación a los antecedentes de nuestra investigación, aspectos como: el problema, la hipótesis y el objetivo de nuestro estudio, así como las características, tanto del escenario donde se lleva a cabo nuestro trabajo, como las de los estudiantes que participan en ella. También mencionamos, la importancia de la enseñanza enfocada en la sociedad contemporánea y de los efectos que tal proceso produce. Expresamos la interrelación que existe entre los elementos del sistema didáctico. Manejamos la idea de abordar el discurso del concepto de pendiente en obras de texto así como en obras eruditas. Ahondamos en la importancia de realizar un análisis del discurso matemático escolar del concepto de pendiente en los libros de texto y mencionamos el ámbito donde se desarrolla la investigación.

En el capítulo 3, realizamos un análisis, historico-epistemologico del concepto de tangente en obras eruditas de matemáticos, así como el resultado de este análisis. Incorporamos la forma de presentar el concepto de tangente por Apolonio de Perge (262-190 a. C.), Copérnico (1473-1543), Galilei (1564-1542), Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665), Barrow (1630-1677), Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716), Hospital (1696), Agnesi (1748) y Euler (1707-1783) e incorporamos un resumen de esta sección.

En el capítulo 4, exponemos los resultados del análisis del discurso del tema de pendiente, que hacen en sus obras, por un lado Fleming y Varberg (1991), Barnett (1997), Dolciani, Berman y Wooton (1998), Swokowski y A-Cole (1998), así como Bittinger (1999), todos ellos desde el punto de vista del Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica y por otro lado Zill (1987), Swokowsky (1989), Edwards y Penney (1996), Leithold (1998) y Granville (2008) lo hacen desde un punto de vista del Cálculo con Geometría Analítica. Mencionamos también el propósito de la revisión en los libros de texto, la metodología utilizada para el análisis del discurso del tema de pendiente e incluimos finalmente un resumen de este apartado.

En el capítulo 5, damos a conocer, los resultados de una exploración a estudiantes respecto a las problemáticas que manifiestan en relación al concepto de pendiente. La exploración mencionada, es presentada en tres partes, la primera, relativa a diversos planteamientos gráficos, la segunda relativa al manejo de relaciones proporcionales a través del teorema de Tales y la tercera, relativa a comparar el signo de la pendiente en graficas de rectas con diferente posición en un sistema de ejes coordenados. Explicamos, el diseño de las actividades planteadas en la exploración, las cuales son constituidas por preguntas (definiendo el objetivo de cada una de ellas, así como las ideas o conceptos que pueden aparecer al ser respondidas por el estudiante), graficas y figuras. Exponemos la metodología de implementación de la exploración. Mostramos un análisis, de las respuestas obtenidas y una serie de tablas en donde aparecen los resultados de los aspectos observados en cada respuesta, así como algunas evidencias escaneadas de las respuestas hechas por los estudiantes.

En el capítulo 6, encontramos, las conclusiones generales de nuestra investigación. Presentamos una confrontación (en donde mostramos coincidencias, no coincidencias, similitudes y diferencias) de las conclusiones obtenidas en el capítulo "Antecedentes" con las obtenidas tanto del capítulo "Análisis del discurso en los libros" como con las del capítulo denominado "Investigación histórico-epistemológica de los libros". Aparece en este capítulo un análisis de cómo la aportación del diseño experimental presentado en nuestra trabajo, impacta, en relación a la esencia de nuestro problema de investigación así como una argumentación de cómo la aportación que el diseño experimental aquí presentado, impacta en la esencia de nuestra hipótesis. Finalmente aparece una propuesta de nuevos trabajos que se pueden realizar a partir de la conclusión de esta investigación.

Capítulo 1

Antecedentes

Como aportación a nuestro trabajo, mostramos en este capítulo, a través de investigaciones realizadas, las formas de uso, problemáticas, interpretaciones y dificultades que tienen estudiantes en relación al concepto de pendiente. Específicamente, identificamos lo relacionado a la utilidad de su presentación como apoyo a la práctica educativa, así como el discurso contenido en las investigaciones y su interpretación estudiantil.

1.1 Problemáticas que presentan estudiantes en relación al manejo del concepto de pendiente.

Existen diversas investigaciones en relación a las problemáticas en estudiantes de nivel medio superior, superior e incluso de maestría respecto al manejo y significado del concepto de Pendiente de una recta ..."*La noción de pendiente de la línea recta no se encuentra entre los dominios de destreza de los estudiantes y ello altera sensiblemente su comprensión para posteriores resultados del calculo."* (García, 1998, página 3). En las investigaciones realizadas, también se pone de manifiesto por parte del profesor un exceso de confianza en el manejo de este concepto..."*los profesores dan por sentado que el estudiante puede crear un vínculo entre la pendiente vista como un numero (tangente estática) y la pendiente variable (tangente dinámica), aunque la creación de tal vínculo regularmente no existe"* (Serna, 2007, página 13).

1.1.1 Complicaciones que presentan estudiantes, para conceptualizar la pendiente.

A continuación, presentamos el análisis de trabajos, en diversos niveles y escenarios educativos de algunos investigadores, en donde se manifiesta, la forma y las complicaciones que tienen estudiantes sobre el concepto de pendiente. García, nos plantea en su investigación, la confusión que el estudiante tiene del concepto de pendiente, con el ángulo de inclinación. Dolores y Catalán (2000), manifiestan la incapacidad del estudiante para identificar el signo de la pendiente. Dolores (2004), en su investigación, declara que el estudiante, mantiene la idea de pendiente, asociada con el signo de los ejes del sistema cartesiano. Cantoral (2004), expresa en su investigación, que el estudiante interpreta, que la pendiente es una propiedad invariante de la recta. En la investigación de Martínez (2005), se declara la idea, que el estudiante tiene confusión, entre pendiente e inclinación y en la investigación de Serna, se da el caso, que el estudiante, da valor a la pendiente como constante.

1.2 Investigación de García (1998).

En un estudio realizado por García (1998), se presentaron evidencias de que estudiantes (22 de vocacional[1] del segundo semestre, 49 estudiantes del primer semestre y 15 estudiantes del segundo semestre de Ingeniería), mostraron dificultades, para construir una recta con valor para la pendiente de $\frac{1}{2}$ sobre un plano, donde también aparece, la gráfica de una recta con pendiente uno (página 132), *Figura 1*.

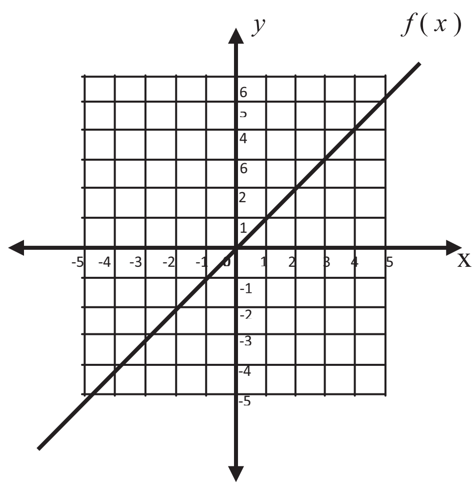


Figura 1

La investigadora, reportó, que de los 22 estudiantes de vocacional observados, 4 construyeron la recta, utilizando la expresión $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, con esta información determinaron el valor del ángulo y lo ubicaron sobre el eje de las *x*, enseguida trazaron la recta solicitada.

[1] Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos del Instituto Politécnico Nacional

Otro grupo de estudiantes, trazaron una recta, bisecando el ángulo que forman la recta $f(x)$ y el eje x.

En el primer caso, la autora esperaba, que los estudiantes localizaran la pendiente como cociente de diferencias. En el segundo caso, la autora observó, que los estudiantes confunden la pendiente con el ángulo de inclinación, pues el valor del ángulo de la recta con pendiente $\frac{1}{2}$, es diferente, al valor del ángulo bisecado de 45º.

De los 49 estudiantes del primer semestre de Ingeniería, 27 trazaron la recta, asignándole a la altura de la ordenada la mitad del valor de la abscisa, 3 estudiantes dividieron el ángulo y uno de ellos mencionó que la recta con pendiente $m = \frac{1}{2}$ le correspondía un ángulo de 22.5º.

De lo anterior, observamos que casi la mitad de los estudiantes entrevistados, reconoce a la pendiente como un valor ajeno a la recta y no como una propiedad de la misma. También observamos, que 4 estudiantes, confunden la pendiente con ángulo de inclinación, pues no ubican a la pendiente con la razón que la identifica, es decir, el incremento de las ordenadas con respecto a las abscisas.

Para el caso de los estudiantes del segundo semestre de Ingeniería, la autora encontró, que casi la mitad, logró trazar la recta solicitada, asignándole a la ordenada la mitad del valor de la abscisa. Un estudiante, calculó $\theta = \tan^{-1} .5$ y luego trazó una recta aproximada con el ángulo calculado, es decir, tiene la confusión del concepto de pendiente de la recta con el ángulo de inclinación.

1.3 Investigación de Dolores y Catalán (2000).

En la investigación de Dolores y Catalán (2000), citado en Martínez (2005, página 7), se presenta un estudio con estudiantes de Bachillerato, en relación a la deducción de la ecuación de la recta a partir de graficas. Los investigadores, identifican, que más de la mitad de los estudiantes mencionaron que una función es positiva si su gráfica está ubicada en la región donde las *x* (abscisas) son “positivas”, sin importar que los puntos de la función estuvieran en el primer ó cuarto cuadrante; mencionando también que *una función es negativa, si su abscisa es negativa*. Los estudiantes, asocian las regiones de las gráficas de las funciones donde éstas son positivas, con la idea de crecimiento y las regiones de las gráficas de las funciones donde éstas son negativas, con la idea de decrecimiento. De lo anterior, encontramos que el estudiante presenta dificultades, para determinar crecimiento-decrecimiento de las graficas, pues no identifica el signo de la pendiente.

1.4 Investigación de Dolores (2004).

Dolores (2004), citado en Martínez (2005, página 6), explica, que existe una percepción recurrente en el estudiante, al relacionar el crecimiento de una función con el valor de la ordenada y la abscisa. Observemos en las *Figura 2* y *Figura 3* cuatro rectas en diferentes posiciones.

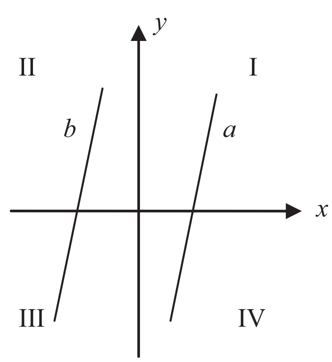


Figura 2

Los estudiantes, explican que la recta “*a*” es una función creciente porque está en el primer cuadrante, y la recta “*b*”, es una función decreciente porque está en el segundo cuadrante.

Los estudiantes interpretan que una recta es creciente si se encuentra en el cuadrante I y IV, y decreciente si se encuentra en los cuadrantes II y III, es evidente que la idea de pendiente está asociada con el signo de los ejes.

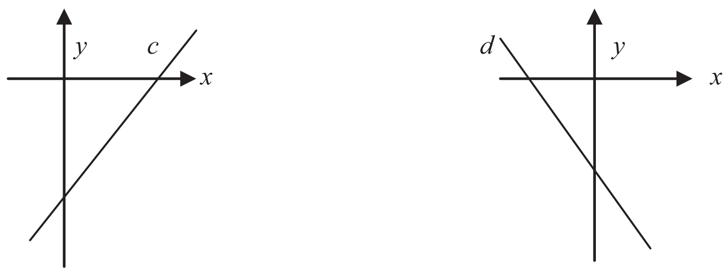


Figura 3

En este caso los estudiantes explican que las rectas "*c*" y "*d*" tienen pendiente negativa, si la recta corta al eje de las "*y*" en una ordenada negativa "sin importar el sentido de la recta". El estudiante manifiesta que todo lo que está a la izquierda del origen del sistema cartesiano es negativo y todo lo que está a la derecha es positivo, no importando la pendiente.
Concluimos, que en las respuestas aportadas por los estudiantes respecto de las figuras 2 y 3, es más significativo el sistema coordenado que la idea de pendiente de la recta.

1.5 Investigación de Cantoral (2004).

Cantoral (2004), citado en Martínez (2005, páginas 6 y 7), comenta sobre un estudio en la línea de investigación del *Pensamiento y Lenguaje Variacional,*[2] en donde muestra lo inexacto de la percepción del docente, ya, que da por hecho, que el estudiante interpreta, que la pendiente es una propiedad invariante de la recta y en su estudio, Cantoral (2004), muestra a estudiantes el triángulo ABC, *Figura 4,* preguntándoles si se cumple la igualdad CA/AB=DE/EB, a lo que los estudiantes contestan afirmativo, porque la mayoría recuerda el teorema de Thales, pero

[2] Se encarga de estudiar fenómenos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos relativos a los conceptos de variación y cambio, desde un enfoque socioepistemológico.

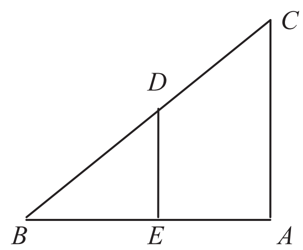


Figura 4

si se pinta el segmento DE mucho más pequeño y cerca del vértice B (figura 5), la proporción de respuestas baja, pues algunos estudiantes, dudan que se siga cumpliendo la igualdad anterior y prefieren decir más bien que ahora se cumple CA/AB > DE/AB o bien CA/AB < DE/EB dependiendo de si centran su atención sólo en el tamaño de uno de los segmentos, DE (muy pequeño) o EB (muy grande) y en el rol respectivo que juega el cociente anterior. Ahora lo toman como variable.

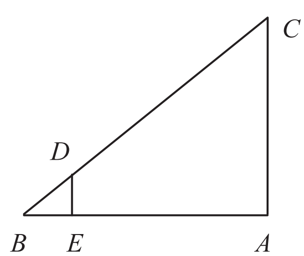


Figura 5

El estudiante manifiesta que al desplazarse el segmento *DE* hacia el vértice *B*, duda que se siga cumpliendo la proporción $\frac{CA}{AB}=\frac{DE}{EB}$ al observar que, al realizarse este desplazamiento, se forma un triangulo más pequeño y entonces da preferencia, a que se cumplan las siguientes desigualdades $\frac{CA}{AB}<\frac{DE}{EB}$ o bien $\frac{CA}{AB}>\frac{DE}{EB}$.

Concluimos, que debido a que el estudiante, observa un cambio en el tamaño del triángulo *BDE* (*Figura 5*) la toma como variable, aunque sea una relación constante. Es decir que lo que el estudiante observa lo conduce a esa conclusión.

1.6 Investigación de Martínez (2005).

En el trabajo de Martínez (2005, página 2), se explica que existe *otro tipo de concepciones relacionadas con la complejidad de la construcción de la pendiente como número y de su respectiva variación,* pues en un curso de maestría, los estudiantes mencionaron que la razón de cambio instantánea[3] en los puntos *A* y *B* de la *Figura 6* era positiva.

El autor, explica, que el estudiante argumenta, la construcción de la pendiente a través de la razón de cambio, menciona, que la razón de cambio instantánea, en los puntos *A* y *B* (*Figura 6*) es la misma, excluyendo el hecho de que la razón de cambio, en el punto *A* es positiva y en el punto *B* es negativa.

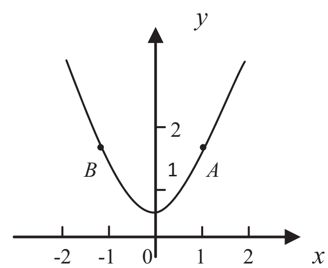


Figura 6

En su análisis didáctico, concluye, que la mayoría de los libros que él analizó, establecen la función: $y = mx + b$, que es utilizada para obtener la definición formal de *pendiente,* al tomar dos puntos diferentes sobre la recta, quedando representada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ...con...x_2 \neq x_1$$

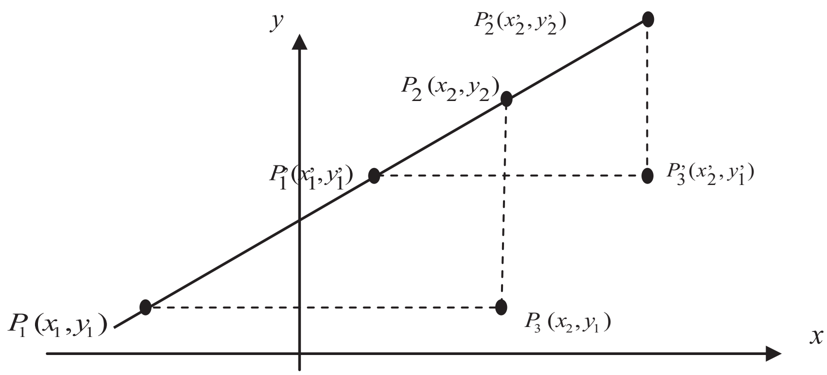
---

[3] Razón de cambio instantáneo: Concepto relativo a los cambios de una magnitud con respecto a otra con la que esta está relacionada funcionalmente. Para poder calcular la razón de cambio instantánea, tomamos el incremento $\Delta x = x_2 - x_1$ cada vez más y más pequeño, es decir, Δx tendiendo a cero que expresamos así $\Delta x \to 0$ y observamos entonces que se obtiene un valor "limite". A este proceso lo podemos enunciar como "limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$ que simbólicamente se escribe

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

lo anterior sucede cuando la secante y la recta tangente prácticamente están en la misma posición, es decir , la razón de cambio instantánea numéricamente vale lo mismo que la pendiente de la recta tangente.

y reporta que ésta definición es expresada como: "*La pendiente m es igual a la diferencia de los valores de las ordenadas divididas por el valor de la diferencias de las abscisas*" (pág. 69), resumiendo que: "*En esta definición se puede apreciar claramente que el valor numérico de la pendiente queda establecida como una razón de la diferencia de dos variables numéricas, por lo que contradice a la definición de que la pendiente es invariante"*. (pág. 70).



Reformulación del esquema que presenta Martínez (2005).

Figura 7

De acuerdo al investigador, para calcular el valor de la pendiente, los textos utilizan una figura semejante a la anterior, en la cual observamos dos cosas: primero, que el triángulo con vértices P_1', P_2' y P_3' es semejante al triangulo con vértices P_1, P_2 y P_3, por lo que al calcular los cocientes entre los lados correspondientes de triángulos similares, estos son iguales, entonces al continuar tomando puntos diferentes pero sobre la misma recta, observamos que su pendiente se caracteriza por ser un valor constante, el cual es positivo y por tanto invariable.

En su análisis cognitivo, Martínez (2005), encuentra que algunos estudiantes definen la pendiente de la recta como su inclinación, toman como referencia la tangente del ángulo que la recta forma con el eje de las abscisas. Existe una confusión entre pendiente e inclinación.

Por otra parte el estudiante tiene dificultad con el concepto de razón, pues al calcular el ángulo que forma la recta con el eje x confunde este valor con el de su pendiente.

1.7 Investigación de Serna (2007).

Serna (2007), realizó un análisis del uso didáctico del libro de Leheman (1989) donde se menciona que si el ángulo α es agudo, la pendiente de la recta *l* es positiva pero si el ángulo *α'* es obtuso, la pendiente de la recta *l'* es negativa (*Figura 8*).

m=tg α

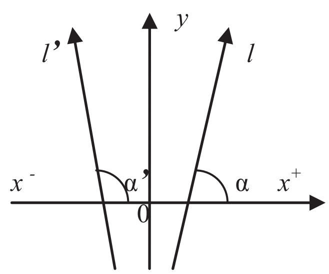


Figura 8

Representación del concepto de pendiente en el libro de Geometría Analítica de (Leheman, 1989, página 17)

El investigador comenta que…*"Existe una gran diferencia al abordar la pendiente tomando en cuenta su ángulo de inclinación que al tomarla como un cociente de diferencias"* (página 28). Hay que considerar que el resultado de determinar el ángulo de inclinación se expresa en grados ó radianes y el relacionado al cociente de diferencias se expresa mediante un número real el cual puede ser positivo, negativo, cero ó mediante una indeterminación. En su estudio, se reporta una consulta con estudiantes de Bachillerato en el CBT[4] 1, donde encontró que los estudiantes no le dan ningún significado al número $\frac{1}{2}$ de la expresión $y = \frac{1}{2}x + 1$. Esto evidencia que los estudiantes, no pueden expresar

[4] Centro de Bachillerato Tecnológico

argumentos sobre los coeficientes de la expresión, pues usualmente la construcción de la gráfica en el ámbito escolar omite información relacionada con la pendiente.

En una segunda parte de su estudio, mostró a los estudiantes la grafica de dos líneas rectas en un mismo plano y con diferente inclinación (ángulos agudos), y encontró que la mitad de ellos lograron identificar cuál de ellas tenía mayor pendiente (*figura 9*).

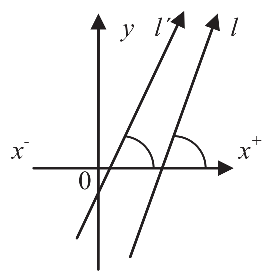


Figura 9

Cita en su trabajo una consulta a profesores de matemática en servicio de nivel básico, donde se les plantea la pregunta ¿Qué es la derivada?, uno de los profesores argumenta que: "*Es la recta tangente a un punto*" (pág. 29) y presentó el siguiente trazo (*Figura 10*).

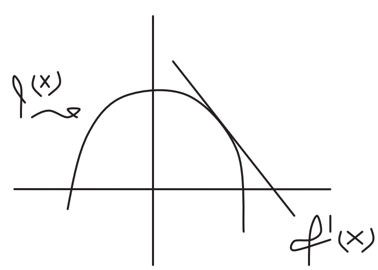


Figura 10

Se puede observar que la interpretación de derivada está asociada con la recta tangente a un punto. El investigador manifiesta que algunos profesores mantienen la idea de pendiente estática dejando de lado que la pendiente de la recta tangente a un punto cambia (pendiente dinámica) dependiendo del valor de cada punto de la función.

En sus conclusiones, el autor nos ofrece dos aspectos importantes, primero: que en los cursos de cálculo el concepto de tangente dinámica (tangente variable) con respecto a una función, debe ser tratada como algo constantemente cambiante (*Figura 11*). Ya que el valor de la derivada evaluada en un punto cualquiera es el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

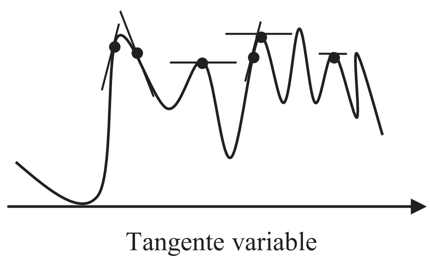


Figura 11

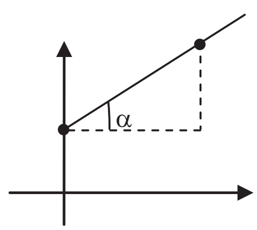
Y segundo, que los estudiantes asignan el valor de la pendiente como un número (constante). La tangente trigonométrica es utilizada para determinar el ángulo de inclinación de la recta, y el estudiante interpreta este resultado como el valor de la pendiente de la recta.

CONCEPTO DE PENDIENTE

$$\text{Tg } \alpha = \frac{Cateto..Opuesto}{Cateto..adyacente} = m \quad \text{(número)}$$

m = Pendiente

α = ángulo



La pendiente es igual a la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de una recta.

Figura 12

1.8 Principales observaciones

Hemos mostrado en este capítulo, los trabajos realizados por diversos investigadores, en los que presentan las formas de uso, interpretaciones, problemáticas y dificultades que tienen estudiantes en relación al manejo del concepto de pendiente. Específicamente, identificamos lo relacionado a la utilidad que cada autor hace de su presentación (Gráficas, explicaciones, fórmulas, ejemplos) como apoyo a la práctica educativa, así como el discurso (del uso didáctico, como el realizado por Serna del libro de Leheman y del análisis cognitivo, realizado por Martínez), contenido en las investigaciones y su interpretación estudiantil.

Capítulo 2

La problemática de la investigación.

2.1 Ideas relevantes de los antecedentes de investigación.

La revisión presentada en el capítulo anterior permite identificar dificultades que han reportado investigadores en relación al tratamiento escolar del concepto de pendiente. Los resultados de estos trabajos muestran la necesidad de ampliar nuestro conocimiento en relación al tratamiento didáctico que se ha dado a la pendiente, así como reconocer con más detalle las características de su epistemología, por lo que a continuación presentamos algunas ideas relevantes del capitulo denominado "Antecedentes de Investigación".

2.1.1 ¿ Pendiente o ángulo de inclinación ?.

En el trabajo de García (1998), se reportan dificultades que experimentan estudiantes para determinar el valor de la pendiente como cociente de diferencias, los estudiantes confunden la pendiente con el ángulo de inclinación. Por otra parte tampoco manejan el concepto de pendiente como una propiedad de la recta, ya que la interpretan como un valor ajeno a la recta, los estudiantes confunden la pendiente con el ángulo de inclinación ya que no ubican la pendiente con la razón que la identifica es decir el incremento de las ordenadas con respecto a las abscisas.

2.1.2 Propiedad invariante de la recta.

En el trabajo de Cantoral (2004), se observa que existe una carencia de exactitud en la percepción del profesor de matemáticas al suponer que el estudiante pueda asimilar que el concepto de pendiente como número es una propiedad invariante de la recta.

2.1.3 Dificultades para obtener información de la gráfica de una función.

Dolores y Catalán (2000) reportan los resultados de una consulta realizada a estudiantes, cuando en su investigación, se utilizaron graficas como elemento visual, para determinar *los cambios de las rectas*[5], sólo la mitad de los estudiantes los lograron determinar, pero también se manifestó una deficiente interpretación gráfica (Página 8). El uso de esta estrategia genera algunas dificultades, asociadas principalmente a la confusión que reporta Dolores (2004), respecto a los criterios para determinar si una función es positiva o negativa.

2.1.4 ¿Pendiente o inclinación? o ¿Pendiente e inclinación ?.

En el trabajo de Martínez (2005), estudiantes de maestría afirman que la razón de cambio instantáneo es positiva en dos puntos (uno localizado en el primer cuadrante y otro en el segundo cuadrante) de una parábola (con centro en el origen y que abre hacia arriba) omitiendo el hecho de que en el punto localizado en el primer cuadrante es positiva y en el punto localizado en el segundo cuadrante es negativa (Figura 6). En el mismo estudio, el investigador observa que autores de libros que él analizó representan la pendiente con el símbolo m y su interpretación entre los estudiantes tiene diferentes significados como: "pendiente ó inclinación", "pendiente e inclinación", además de ser representada como una *razón* de m igual a la diferencia de los valores de y entre la diferencia de los valores de x. Utiliza el concepto de triángulos semejantes (al tomar pares de puntos diferentes sobre una misma recta) para mostrar que la pendiente de una recta se caracteriza por ser un valor constante, positivo y por ende invariable (Figura 7).

2.1.5 ¿Angulo de inclinación? o ¿Cociente de diferencias?.

En Serna (2007), observamos un análisis del uso didáctico del libro de Leheman , en donde se reporta que el ángulo es un argumento fundamental para determinar el tipo de pendiente de una recta. Otro aspecto que se reporta en este trabajo, es que el estudiante no puede

[5] Una recta queda determinada completamente si se conocen dos condiciones, por ejemplo, dos de sus puntos, un punto y su pendiente y ésta puede ser positiva, negativa, cero o no definida.

argumentar el valor de la pendiente *m* en la expresión de la recta de la forma $y = mx + b$. Sin embargo al realizar un experimento con estudiantes, encontró que el 50% lograron identificar que recta tiene mayor pendiente al presentárseles dos de ellas con diferente ángulo agudo. Por otra parte encuentra que profesores de matemáticas de nivel básico relacionan la definición de derivada con la recta tangente a un punto. En otro punto relevante, Serna (2007), reporta la falta de incorporación de ideas en los profesores como el hecho de que la pendiente de la recta tangente a un punto cambia (pendiente dinámica) sobre la idea de pendiente estática.

2.2 Descripción del problema de investigación.

De lo revisado en el capítulo "Antecedentes de Investigación" y lo expuesto al inicio de este capitulo, donde se presentan diferentes formas de trabajar y conceptualizar la pendiente. Coincidimos con Serna (2007, página 43) ... *podemos aseverar que el discurso matemático escolar (DME) actual no facilita la construcción de la noción de tangente variable la cual es necesaria para entender conceptos de Cálculo elementales*. Para nuestro estudio, consideramos que además, no facilita la construcción de la noción de pendiente (concepto muy relacionado con el de tangente).

Por lo anterior, el propósito de esta investigación es identificar las dificultades que experimentan los estudiantes del primer semestre de Ingeniería en el Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli, ubicado en el Estado de México, que cursan la materia de matemáticas I (Calculo Diferencial) en relación a la interpretación y significado de la pendiente estática y la pendiente dinámica. La exploración se realiza en un escenario real, sin introducir algún tipo de estrategia o dispositivo didáctico, lo que nos permitirá obtener información verídica del concepto de pendiente emitida por los estudiantes anteriormente mencionados.

2.3 Hipótesis de investigación.

Para que el estudiante, construya el concepto de pendiente, es necesario construir el concepto de *tangente variacional*[6]. De acuerdo a los trabajos de Serna (2007), Dolores (2004), Martínez (2005), el concepto de tangente dentro de los sistemas escolares se formula a partir de una visión estática, por lo que es necesario crear escenarios de estudio donde se resignifique la idea de tangente estática a tangente dinámica. Consideramos que el concepto de pendiente, resulta ser, una construcción escolar que se origina de la abstracción[7] sobre la recta tangente, su valor y su significado, está asociado, con la capacidad que los estudiantes deben adquirir para interpretar la variación.

Desarrollar una propuesta didáctica para que estudiantes construyan la noción de "tangente variacional", requiere conocimientos sobre el estado actual de su enseñanza (las dificultades que experimentan los estudiantes y las problemáticas que se generan). Consideramos como hipótesis, que el actual modelo de enseñanza de la pendiente, no permite, que estudiantes construyan la noción de tangente variacional.

2.4 Objetivo de la investigación.

Mostrar evidencias sobre los efectos que tiene la educación tradicional[8], particularmente con el tema de la recta tangente y su relación con la pendiente, para ello, nos proponemos realizar una investigación en los libros de texto, para determinar las características de la

[6] La derivada es una función que al evaluarla en un punto c, nos da la pendiente (la variación) de una recta tangente en dicho punto "c".

[7] En educación, la idea de abstraer se relaciona con el momento en que el conocimiento entra a formar parte de la vida del sujeto (inicialmente en una categoría mental) y se confirma con un comportamiento explícito que nos permite ver que se ha logrado la "abstracción".

[8] La educación tradicional está enfocada en la enseñanza, no en el aprendizaje. Ella incorrectamente supone que por cada concepto de enseñanza, hay un concepto de aprendizaje en aquellos estudiantes a los que se les enseña.

didáctica de la pendiente, con el fin de identificar la forma en que se presenta, se estudia, así como el tipo de ejercicios que se proponen. Esta información será de utilidad para elaborar un instrumento de consulta que nos permitirá conocer las interpretaciones que tienen los estudiantes del Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli en relación al concepto de pendiente.

2.5 Escenario donde se desarrolla la investigación.

Nuestra investigación se lleva a cabo en un escenario escolar real, en el Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli, ubicado en el Estado de México con treinta estudiantes entre 17 y 19 años de edad, los cuales han tomado cursos de cálculo en diferentes instituciones del nivel medio superior y que se encuentran cursando el primer semestre de la carrera de Ingeniería Industrial. La retícula de ésta carrera, tiene programada la asignatura de Matemáticas I "Calculo Diferencial", donde la derivada es vista hasta el capítulo IV después de haber pasado por temas como: números reales, funciones, límites y continuidad.

2.6 Efectos que se presentan en el sistema didáctico.

Los resultados obtenidos en la primera parte de la investigación nos permiten definir conceptos que se utilizan en este trabajo, así como obtener consideraciones didácticas para diseñar una actividad exploratoria con el propósito de identificar problemáticas que tienen estudiantes en relación a los conceptos de pendiente y tangente.

Coincidimos con Cantoral y Farfán (1998, página 203)[9] sobre la importancia de la enseñanza enfocada en la sociedad contemporánea y de los efectos que tal proceso

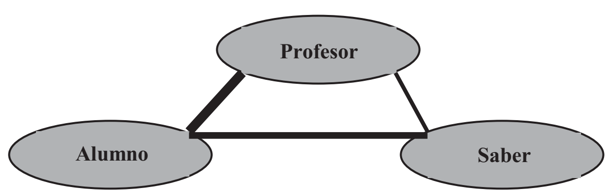
[9] Tomado del documento MATEMÁTICA EDUCATIVA: UNA VISIÓN DE SU EVOLUCIÓN, de la página de internet http://bit.ly/hIfO1p, el 6 de marzo del 2001.

produce..."*La enseñanza en general y la de las matemáticas en particular son asuntos de la mayor importancia para la sociedad contemporánea. A lo largo del tiempo, las sociedades han conformado instituciones con el objeto de incorporar a las matemáticas y a la ciencia en la cultura de la sociedad con la clara intención de favorecer entre la población una visión científica del mundo. Este intenso proceso social de culturización científica, nos ha ayudado a reconocer la necesidad de implementar modificaciones educativas en el campo particular de las matemáticas con base en diseños mejor adaptados a las practicas escolares. Del estudio sistemático de los efectos de tales procesos se ocupa la matemática educativa*". Uno de éstos efectos que se presentan en el sistema didáctico así como de las acciones reciprocas entre sus componentes es el Discurso Matemático Escolar.

2.6.1 Componentes del sistema didáctico[10].

Chevallard (1991) citado en Montiel (2002, página 14) expresa la interrelación que existe entre los elementos del sistema didáctico: *Saber matemáticas y enseñar un conocimiento concreto son fenómenos que giran alrededor de lo que Chevallard (1991) ha llamado sistema didáctico (fig. 2), un triángulo cuyas interacciones se deben mirar de forma sistémica para explicar los acontecimientos que se producen en el procesos de enseñanza y aprendizaje".*

Sistema Didáctico



Reconstrucción de la figura representativa del sistema didáctico mostrada en Montiel (2002).

Figura 2

[10] El sistema didáctico está conformado por tres subsistemas (Alumno, profesor y saber) y un entorno llamado noosfera. En este sentido una parte del sistema puede ser una de sus componentes considerada como aislada de las demás o por una pareja de ellas. Martínez (2003).

2.7 Discurso Matemático Escolar.

Dubinsky (2000, página 67), nos induce a utilizar elementos para realizar nuestras investigaciones: *En general, para aprender cómo hacer las investigaciones es necesario aprender, al mismo tiempo, como diseñarlas , como recoger los datos..*, por lo anterior, nosotros utilizamos información relacionada con el discurso matemático escolar, contenida en libros de texto y en obras eruditas. *El libro de texto en el ámbito escolar cumple, entre otras funciones, la de fuente de consulta del saber que se estudia, así como la de organizador en la creación de programas de estudio, estructuración de cursos y seminarios, o de situaciones específicas en la preparación de clases, elaboración de problemarios, guías de estudio o exámenes. Con una mirada más profunda, se puede advertir una doble naturaleza en las obras de texto: como una obra de texto, referida a los elementos de estructura y organización, y a aquellos tocantes a su contenido, es decir, al discurso que contiene.* Castañeda (2006, página 254).

Es decir en esta investigación abordamos el discurso del concepto de pendiente en obras de texto así como en obras eruditas, analizando hacia donde se dirige el autor, la profundidad de su análisis e ideas que manifiesta en relación al concepto de nuestro estudio.

2.7.1 Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto.

De acuerdo a Marcolini y Perales (2005) citado en (Castañeda 2006, página 255) el discurso matemático escolar se formula a partir de consensos que se realiza en la noosfera en torno a un saber escolar. En ella, las opiniones de profesores, padres de familia, académicos, políticos, autores de libros de texto en relación a *qué objetos escolares deben aprenderse* en la escuela está modelada por diversos factores tales como la incorporación de tecnologías a la clase de matemáticas, la postura personal o institucional de lo que significa “aprender” matemáticas, la orientación curricular, esta serie de restricciones configura el cuerpo de conocimientos que deberán aprenderse en las aulas, lo cual, tiene efectos en lo que los estudiantes logran construir al final de la clase.

El discurso matemático escolar refleja una *ideología* sobre la forma de presentar y tratar (didácticamente) los objetos matemáticos en clase y que a la larga se convierte en un conjunto de restricciones, implícitas o explícitas, que norman la actividad áulica y al discurso escolar[11] mismo (Montiel, 2005, página 113). Un análisis del *discurso matemático escolar* en los libros de texto tiene como objetivo identificar los rasgos de tipo conceptual, de enfoque didáctico o referidos a la organización del saber que son comunes en las obras escolares y que han configurado un discurso *oficial* para la clase de matemáticas a partir del cual se escriben nuevas obras, se organizan lecciones de clase e incluso se desarrollan programas de estudio.

De acuerdo con Castañeda, Molina y Rosas (2010, página 192)[12], *la forma en que los libros de texto reflejan determinados aspectos de los conceptos puede influir en lo que los alumnos aprenden*, debido a que el libro de texto cumple, entre otras funciones, la de ser fuente de consulta del *saber* designado para estudiarse en clase (Castañeda, 2006, página 254) no sólo a objetos matemáticos en cuestión; tales como teoremas, definiciones, demostraciones, sino que también para consultar rutinas algorítmicas, técnicas especiales e incluso recursos nemotécnicos.

La investigación sobre el *discurso* usa un acercamiento sistémico para describir y caracterizar su naturaleza, considera tres componentes fundamentales en el estudio del discurso matemático escolar; la didáctica, la epistemológica y el análisis del discurso. Particularmente en nuestra investigación sólo empleamos la primera y segunda parte; en la parte epistemológica analizamos aspectos de la naturaleza del saber[13], sus usos, la

[11] Montiel (2005) explica que el discurso escolar es el conjunto de interacciones entre profesor y estudiantes, dirigidas por la exposición coherente de los saberes escolares.
[12] Tomado del documento en pdf Untitled: XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Red Cimates (Red de centros de investigación en matemática educativa) de la página de internet *www.red-cimates.org.mx/Documentos/Programa_y_Resumenes.pdf* el 6 de marzo del 2011, página 192.

[13] La naturaleza del saber está referida a la esencia del saber en cuanto a su ser y como se revela ante el sujeto. Tomado del Documento : Capitulo Bibliografía f, de la página de internet en Google http://www.rieoi.org/deloslectores/1122Diaz.pdf el 16 de Febrero del 2011, página 6.

naturaleza de las definiciones así como el tipo de argumentos que el autor utiliza. La parte didáctica se centrada en identificar las formas, procedimientos, estrategias por los que se transmite el saber, por ejemplo el tipo de recursos gráficos y explicativos que el autor utiliza, el enfoque o paradigma de aprendizaje, la naturaleza de los ejemplos y problemas que plantea.

2.8 Ámbito donde se desarrolla la investigación.

El ámbito donde se desarrolla la investigación son, la parte histórica en obras eruditas del concepto de tangente (aspecto muy ligado al concepto de pendiente) y la parte de libros de texto.

Capítulo 3

Análisis histórico-epistemológico

3.1 Obras eruditas.

En éste capítulo, abordamos el discurso del concepto de pendiente en obras eruditas, analizando hacia donde se dirige el autor, la profundidad de su análisis e ideas que manifiesta en relación al concepto de nuestro estudio.

El concepto de pendiente está estrechamente relacionado con el concepto de tangente, por lo que aquí analizamos, cómo se ha presentado el concepto de tangente en obras eruditas[14] de matemáticos como: Perge (262-190 a. C.), Copérnico (1473-1543), Galilei (1564-1542), Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665), Barrow (1630-1677), Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716), Hospital (1696), Agnesi (1748), Euler (1707-1783)[15].

4.1.1 Perge (262-190 a.C.).

Perge (262-190 a. C.)[16] presenta el concepto de la tangente, al proponer y resolver el problema de hallar circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas, conocido como Problema de Apolonio, problema que aparece en su obra (hoy perdida), "Las tangencias o los Contactos". A continuación aparece la solución propuesta por Gergonne, J. (1816)[17].

---

[14] Obras eruditas son aquellas obras escritas por matemáticos eruditos pertenecientes a una comunidad científica y cuyo interés principal es difundir la ciencia, expresar sus resultados obtenidos para que otros miembros de la comunidad científica o pertenecientes a ambiente erudito puedan conocerlos, al compartir sus ideas también se perseguía el avanzar la ciencia, Serna (2007).

[15] La Información analizada en este trabajo respecto a Copérnico, Galilei, Fermat, Descartes, Barrow, Newton, Leibniz, Hospital, Agnesi y Euler, fue extraída de Serna (2007).

[16] Problema de Apolonio. (s.f.). En Wikipedia. Recuperado el 1 de abril de 2010, desde http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Apolonio.

[17] Gergonne, J. (1816) *Solución propuesta por Gergonne (1771-1859) al Problema de Apolonio*. Recuperado el 23 de Enero del 2011 desde http://cc.bingj.com/cache.aspx?q=soluci%c3%b3n+propuesta+por+Gergonne+(1771-1859)+al+Problema+de+Apolonio&d=4666202951980284&mkt=es-MX&setlang=es-MX&w=a3c4b49b,3bdf34b8

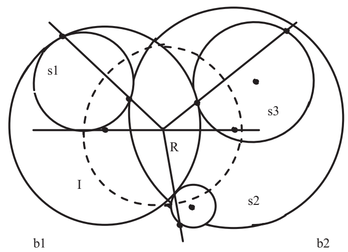


Figura 42

Considérense tres circunferencias (véase la *Figura 42*) *s*1, *s*2 y *s*3. Sea *R* el centro radical de las circunferencias dadas. Existe una circunferencia *I*, ortogonal a las circunferencias dadas, cuyo centro es el punto *R*. En la inversión respecto de la circunferencia *I*, las circunferencias dadas son invariantes y las circunferencias tangentes, *b*1 y *b*2 en la figura, son homólogas.

Se sigue que los puntos de contacto entre las circunferencias buscadas y una de las circunferencias dadas, son colineales con el centro radical *R*. También, los centros del par de circunferencias buscadas (*b*1 y *b*2) y el centro radical, son colineales.

Algunas consideraciones sobre polaridad

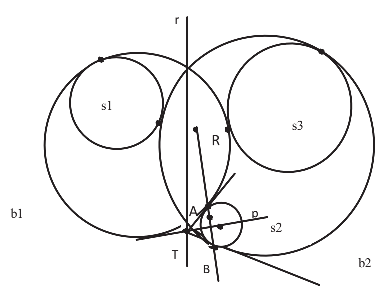


Figura 43

Consideremos las tangentes a las circunferencias *b*1 y *b*2 en los puntos de contacto *A* y *B* con la circunferencia *s*2. Si estas tangentes se cortan (como en la *Figura 43*), lo hacen sobre un punto *T* que se halla sobre el eje radical *r* de las circunferencias *b*1 y *b*2. El punto *T* es polo de la recta *AB* respecto de *s*2 y por consiguiente, el polo P del eje radical *r* respecto de la misma circunferencia es colineal con los puntos de contacto *A* y *B* y con el centro radical *R*.

Eje radical asociado a pares de soluciones

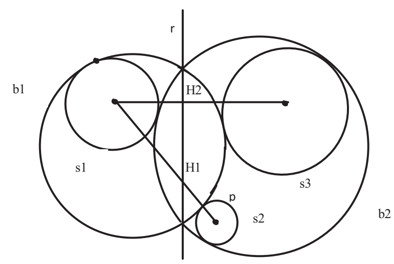


Figura 44

Consideremos la homotecia[18] (de razón negativa) en la que las circunferencias *s*1 y *s*2 son homólogas, denotando con *H*1 el centro de dicha homotecia. *H*1 es centro de una inversión en la cual *s*1 y *s*2 son homólogas y las circunferencias *b*1 y *b*2 son invariantes. Por esta razón, *H*1 se halla sobre el eje radical del par de circunferencias *b*1 y *b*2. Otro tanto se puede decir sobre el centro de homotecia (negativa) en la cual las circunferencias *s*1 y *s*3 son homólogas. El centro de homotecia en la cual *s*2 y *s*3 son homologas, que también se halla sobre el eje radical *r*, está fuera de la figura.

Se sigue que el eje radical *r* de las circunferencias *b*1 y *b*2 es uno de los ejes de homotecia de las circunferencias dadas.

Solución al problema de Apolonio

[18] De una forma intuitiva es agrandar o reducir a escala una figura. Mas técnicamente, una homotecia de centro O y razón escalar K es la transformación geométrica que hace corresponder a cada punto A del plano, otro punto A´ del mismo, de modo que (OA´= K•OA); siendo los puntos A y A´ homotéticos. Cada un punto y su homotético están al mismo lado del centro de homotecia la razón se considera positiva; mientras que si están a lados distintos es negativa.

Las consideraciones anteriores permiten resolver el problema de Apolonio: hallar las circunferencias tangentes a tres dadas. Se puede comenzar hallando el centro radical de las tres circunferencias y se determinan los ejes de homotecia de las circunferencias. Para hallar un par de soluciones, se elige uno de estos ejes y se hallan sus polos respecto de las circunferencias dadas. Las rectas que pasan por los polos hallados y por el centro radical determinan los puntos de contacto entre las circunferencias tangentes y las circunferencias dadas.

Como, en general, dadas tres circunferencias, existen cuatro ejes de homotecia, son ocho las soluciones a este problema (cuatro pares de soluciones). Hay configuraciones de tres circunferencias que sólo admiten dos o ninguna solución. Hay un total de ocho soluciones, las cuales están ilustradas en la figura 45.

Observamos que Perge presenta el concepto de tangencia al resolver el problema de construir una circunferencia tangente a tres elementos cualesquiera elegidos entre un punto, una recta y una circunferencia.

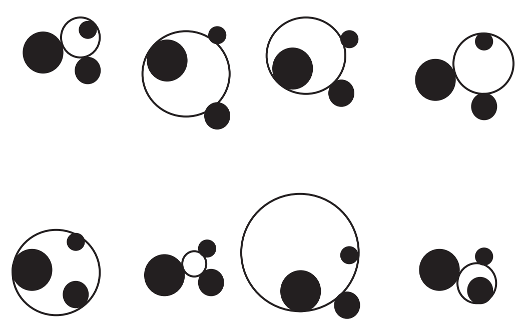
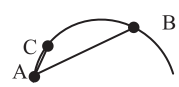


Figura 45

3.1.2 Copérnico (1473-1543).

Copérnico (1473-1543)[19], en su libro "Sobre las revoluciones de los orbes celestes", explica la idea de tangente al mencionar "…*Pero puesto que el arco es siempre mayor que la subtensa a él trazada, siendo la recta la línea más corta de las que tienen los mismos extremos, con toda la desigualdad tiende a la igualdad al pasar las secciones del circulo de mayores a menores, de modo que el punto de contacto (de tangencia) del circulo coexisten la línea circular y la recta",* ver *figura 46*.



AB arco, *AC* subtensa[20] y *A* el punto de tangencia

Figura 46

Advertimos que el uso que le da a la tangente es la de encontrar la razón entre segmentos de arco y de rectas infinitamente pequeños ($\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$) dando un argumento del tipo variacional. El modelo de Copérnico considera el concepto de punto de tangencia el cual le sirve para analizar la variación de la subtensa en un arco.

3.1.3 Galilei (1564-1542).

Galilei (1564-1542)[21], presenta el uso de la tangente para determinar la amplitud de la parábola en su libro "Dialogo sobre dos nuevas ciencias", en donde aparece el TEOREMA.

---

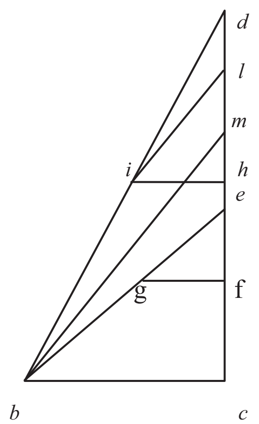
[19] citado en (Serna 2007, pp. 73 a 75).

[20] Geometría. Cuerda de un arco.

[21] Citado en (Serna 2007, pp. 77 a 78)

PROPOSICIÓN VIII, del cual presentamos el párrafo donde hace referencia a la tangente, así como la figura geométrica empleada (*Figura 47*).

"Si imaginamos una vez más una parábola descrita a través de los puntos f y b con una elevación fl y una altura fc, siendo la medida proporcional de ambas fg, que es la mitad de la horizontal cb, entonces, lo mismo que antes, será cb su amplitud, siendo la línea eb tangente en b a dicha amplitud, puesto que ef y fc son iguales".



Galileo Galilei, 1638, "Diálogos sobre dos nuevas ciencias
A hombros de gigantes, pp. 540 y 541.

Figura 47

Percibimos que da un uso a la tangente con argumentos de tipo geométrico (triángulos semejantes).

3.1.4 Descartes (1596-1650).

Descartes (1596-1650)[22], determina que la pendiente *m* de la recta normal en un punto conocido de una elipse llamado (x_o, y_o) así como la tangente en ese mismo punto son expresadas como

[22] citado en (Serna 2007, pp. 85 y 86)

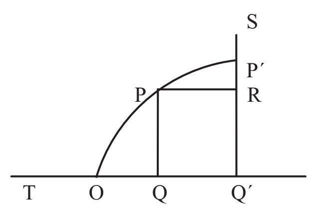
$$m = \frac{y_o}{x_o - \left(x_o - \frac{x_o b^2}{a^2}\right)} = \frac{y_o}{\frac{x_o b^2}{a^2}} = \frac{a^2 y_o}{b^2 y_o}$$, pendiente de la elipse.

$$\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = 1$$, tangente de la elipse.

Contemplamos que en la presentación de la tangente, da un argumento básicamente analítico.

3.1.5 Fermat (1601-1665).

Fermat (1601-1665)[23], menciona el término de tangente, al mostrar su método para trazar tangentes, citado en (Cantoral y Farfán, 2004) utilizando la figura 48. “Sea la curva *OPP´*. La recta *PT* es tangente a la curva en el punto *P*. El punto T es la intersección de la recta tangente con el eje de las abscisas”.



(*Cantoral y Farfán, 2004, pp. 71 y 72*)

Figura 48

Observamos que Fermat, utiliza argumentos geométricos.

3.1.6 Barrow (1630-1677).

Barrow (1630-1677)[24], presenta la idea de tangente sin mencionarla, al escribir: *“Dada ZGE es una curva de la cual su eje es VD; y dada las ordenadas aplicadas a este eje, VZ,*

[23] citado en (Serna 2007, pp. 79 a 80)
[24] citado en (Serna 2007, página 88)

PG, DE, continuamente incrementada desde la ordenada inicial VZ; también dada VFI es una curva tal que, sí una línea recta EDF es dibujada perpendicular a VD, la cual corta a las curvas en los puntos E, F, y VD en D, el rectángulo contenido por DF y una longitud dada R que es igual al espacio interceptado VDEZ; también dado DE: DF = R : DT, y uniendo TF. Entonces tocará a la curva VIF.

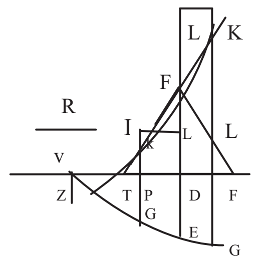


Figura 49
(*Barrow, 1670, p. 154*)

Observamos que la tangente es utilizada mediante argumentos geométricos y analíticos, para encontrar una relación dada por el espacio DE • DT = R • DF = área VDEZ y la recta tangente TF.

Respecto al descubrimiento geométrico de Barrow (1630–1677) del teorema fundamental del cálculo infinitesimal[25] (aunque él no tuvo ningún conocimiento de ésta rama de las matemáticas) quién escribió el libro "Geoemtric Lectures" se hace referencia al concepto de tangente en donde se utiliza el dibujo[26] de la figura 50.

---

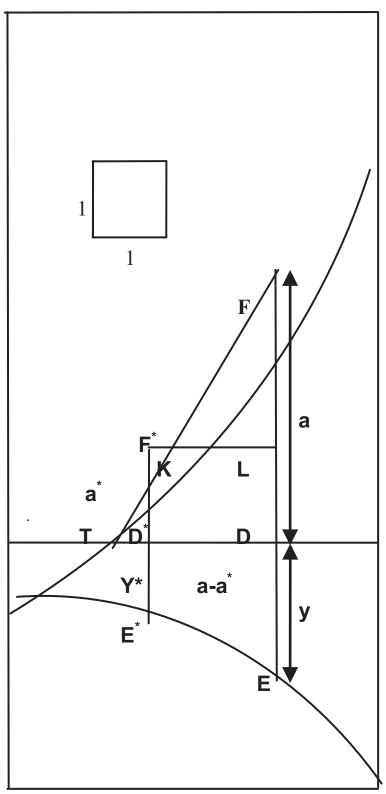
[25]El cálculo infinitesimal o cálculo de infinitesimales constituye una parte muy importante de la matemática moderna. Es normal en el contexto matemático, por simplificación, simplemente llamarlo cálculo. El teorema fundamental del cálculo consiste (intuitivamente) en la afirmación de que la derivación e integración de una función son operaciones inversas.

[26] Kindt. M. *Aportaciones de la historia de las matemáticas a la educación moderna.* En Web bing. Recuperado el 9 de Octubre de 2010, desde http://bit.ly/gYgUTG

Explicación de la figura

La curva $ZE^{*}E$ representa una función monótona.

La curva *VF*F* representa el área encerrada entre el eje horizontal, la curva *ZE*E*, y las verticales *DE* y *VZ*. Esta es claramente una función de la abscisa de *D*.



$$DT = \frac{FD}{DE} = \frac{a}{y}$$

Figura 50

Es decir: las longitudes de *a** y *a* representan respectivamente las áreas de *VD*E**Z y *VDEZ*.

El punto *T* es construido de tal modo que la longitud del segmento *DT* es igual al cociente de *FD* y *ED*. Entonces:

$$DT = \frac{FD}{DE} = \frac{a}{y}$$

Afirmación: La línea TF es una tangente de la curva VF*F.

Observamos que Barrow utiliza la geometría griega, para referir el concepto de tangente a una curva, el cual es un problema de las raíces del cálculo infinitesimal (aunque él nunca lo supo) y la determinación de áreas (actualmente en el manejo de la derivada y la integral).

Concluimos que el problema de las tangentes había sido visto antes de la invención del cálculo por Newton y Leibniz.

3.1.7 Newton (1642-1727).

En los apuntes de Newton (1642-1727)[27], es descrito el PROBLEMA 4, donde aparece el MÉTODO 1 para TRAZAR LAS TANGENTES DE LAS CURVAS (*Figura 51*), del cual tomamos la siguiente información: *Las tangentes se trazan de varias forma, según las relaciones de las curvas con las líneas rectas. En primer lugar sea la línea recta BD de modo que forme un ángulo con otra línea recta AB, tomada como base, y que sea ordenada en la curva ED. Muévase esta ordenada un espacio infinitamente pequeño hacia la posición bd, de modo que ésta incrementa con el momento cd mientras AB incrementa por el momento de Bd, que es igual Dc. Ahora prolónguese Dd hasta que encuentre a AB en T; ésta cortará a la curva en D o en d, y los triángulos dcD y DBT serán semejantes, por lo que TB: BD=Dc:cd.*

Cuando la relación de BD a AB es exhibida a través de una ecuación que determine a la curva, se busca, por el problema 1, la relación entre las fluxiones, y se toma TB a BD en la misma razón de la fluxión de AB a la fluxión de BD; entonces TD tocará a la curva en D.

Encontrando el cociente de fluxiones[28] expresado como $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ (*Figura 51*).

[27] citado en (Serna 2007, página 96)

[28] El cálculo de Newton está basado en la idea intuitiva del movimiento continuo, manejando el concepto de *fluente*, como cantidad que varia respecto al tiempo y el de *fluxión* como su velocidad de cambio respecto al tiempo, es decir las derivadas con relación al tiempo (velocidades instantáneas).

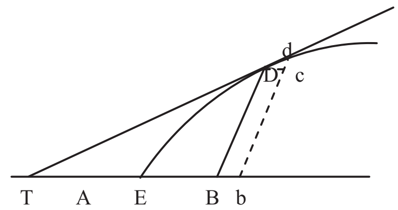


Figura 51

Advertimos que en el trazo de las tangentes de curvas, son utilizados argumentos del tipo geométrico (triángulos semejantes) e infinitesimal, así como la incorporación del concepto de fluxión, donde se da la relación $\frac{BD}{DT}$ que podemos interpretar como la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, cuyo resultado es la pendiente, representada por *m*.

3.1.8 Leibniz (1646-1716).

Leibniz (1646-1716)[29], presenta un método para determinar las rectas tangentes a las curvas (*Figura 52*) en el libro "Cálculo Infinitesimal" de la Editorial Balsal, de la colección de "La aventura de la ciencia", tomamos los siguientes párrafos donde aparece una traducción de su trabajo 1684.

Dado el eje AX y las curvas VV, WW, YY, ZZ, llamemos x al segmento AX del eje y, v, w, y, z respectivamente, las ordenadas normales al eje VX, WX, YX, ZX. Sean VB, WC, YD, ZE las tangentes que cortan, respectivamente, al eje en los puntos B, C, D, E.
Sea dx un segmento arbitrario y dv (*o dw, o dy, o dz*)*, o sea las diferencias de las mismas v* (*o w, o y, o z*)*, un segmento que es a dx como v* (*o w, o y, o z*) *es a BX* (*o CX, o DX, o EX*)*.*
Esto admitiendo, las reglas del cálculo son:

[29] citado en Serna (2007, página 100 a 101)

Si a es una cantidad constante dada, será da = 0; y dax = adx. Si y = v (es decir, una ordenada cualquiera de la curva YY es igual a una ordenada cualquiera correspondiente de la curva VV), será dy = dv.

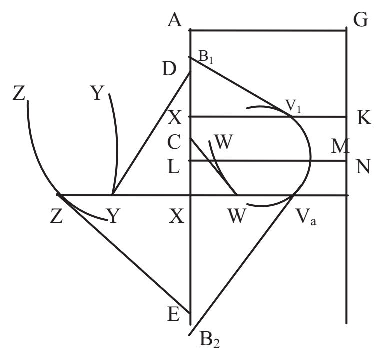


Figura 52

(Leibniz, 1684, p. 41)

Percibimos que el uso de las tangente es para dar puntos de referencia con los que se obtienen relaciones entre los diferenciales (*dv, dw, dy* o *dz*) y los segmentos (BX, CX, DX O EX), es decir, maneja argumentos de tipo infinitesimal y geométrico.

Otra referencia de Leibniz es la "Cuadratura de una curva" en donde se refiere a la pendiente de su tangente y es presentada mediante la *Figura 53*, donde se muestra una sucesión de ordenadas equidistantes y_1, y_2, y_3, y_n y en donde al suponer que la distancia entre ellas es de 1, encuentra que: la suma $y_1 + y_2 + y_3 + y_n$ es una aproximación de la curvatura de la curva y la diferencia entre dos sucesivas y_i´s, da aproximadamente el valor de la pendiente de su tangente.

Notamos que se utiliza términos de la forma entre ordenadas, como un primer paso para el cálculo de la pendiente de la tangente en un punto de una función (*figura 53*).

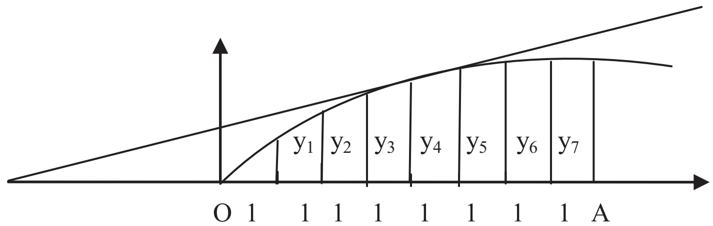
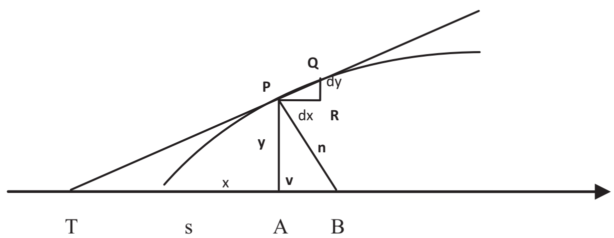


Figura 53

En otra aplicación geométrica[30], Leibniz presenta el concepto de subtangente, tangente, normal y subnormal, basándose en un punto *P(x, y)* sobre una curva, observando que éstas variables están relacionadas entre sí, (*Figura 54*).



Subtangente s=TA, *tangente t=TP*, *normal n=PB* y *subnormal v* = AB.

Figura 54

En este caso, se muestran en la figura argumentos diferenciales (*dy, dx*), así como relaciones geométricas, que acompañaron la presentación de la tangente, como: la subtangente, la normal y la subnormal.

3.1.9 Hospital (1696).

Hospital (1696)[31], en su obra análisis de lo infinitamente pequeños para el estudio de las

[30] La información para las figuras 53 y 54 fue extraída del documento EL DESCUBRIMIENTO DEL CALCULO de la página de internet http://www.vam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo/calculo.html, el 13 Octubre del 2010.
[31] citado en (Serna, 2007, pp. 107 a 108)

líneas curvas en la sección dos, presenta el concepto de tangente bajo la siguiente definición:

Si se prolonga uno de los pequeños lados Mm de la poligonal (*Figura 55*) *que compone a una línea curva, este pequeño lado, así prolongado, será llamado la tangente de la curva en el punto M o m.*

Percibimos un manejo intuitivo de la variación de la recta tangente, al tomar diferentes segmentos infinitamente pequeños.

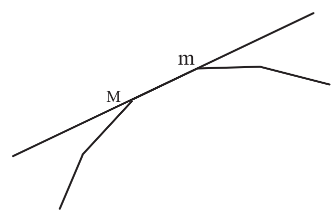


Figura 55

(L´Hospital, 1696, p. 41)

3.1.10 Agnesi (1748).

Agnesi (1748)[32], presenta la idea de tangente en el capítulo II del tomo "Calculo Diferencial" cuyo título es “Capítulo del método de las tangentes”, retomando lo reportado en Castañeda (2004), citamos lo que transcribe de la obra de Agnesi[33]; …*Sea la curva ADF y además una tangente TDG en un punto cualquiera sobre la curva. Se asume que la ordenada BD es perpendicular a AB en el punto B, además que la ordenada CF está infinitamente próximo a la ordenada BD. Al prolongar CF, su intersección con la tangente determina el punto G, determinamos que GF, será infinitamente pequeño respecto a EF por consiguiente se pueden considerar indistintamente a EF y EG, al igual que DF y DG.*

[32] citado en (Serna, 2007, pp. 114 a 116)

[33] Traducción de la obra, originalmente publicada en italiano

De esta forma se distinguen; AB = x, BD = y, y por el segmento anterior EF = EG = dy, y también a DF = DG = $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ *. Así se determina los triángulos semejantes GED, DBT los cuales conducen a la siguiente relación GE: ED :: DB : BT, "términos analíticos" como dice Agnesi, se tiene dy : dx :: y : BT, por consiguiente BT* $= \frac{ydx}{dy}$*, lo que determina la fórmula general de la subtangente de cualquier curva* (*Figura 56*).

Contemplamos en la presentación de la tangente, argumentos de carácter variacional y de tipo geométrico en el que incluye la semejanza de triángulos.

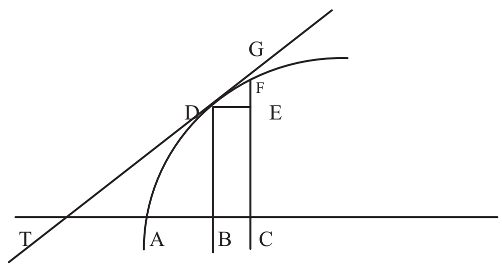


Figura 56

3.1.11 Euler (1707-1783).

Euler (1707-1783)[34] en el capítulo XIII del segundo volumen de su obra "INTRODUCTIÓN A L´ANALYSE INFINITESIMALE", TOME SECOND: CHAPITRE XVIII. "Des Affections des Lignes Courbes", presenta una explicación de la tangente a una curva al hacer un análisis de la figura siguiente

[34] citado en Serna (2007, pp. 120 a 124)

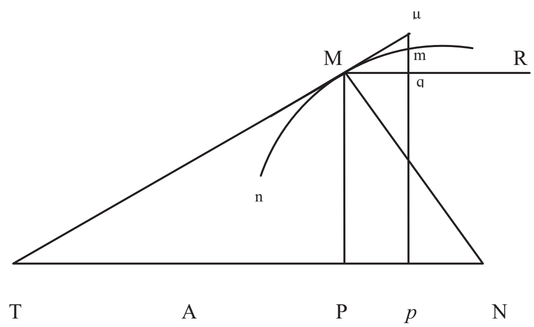


Figura 57

Halla la ecuación 0 = *At* + *Bu,* y utilizando la semejanza de triángulos, determina también, la relación existente, entre la tangente del triángulo *MPT* y el triángulo infinitesimal $\mu\, q\, M$,

para ubicar la relación $\frac{\mu}{t}$, que es la que determina la recta tangente a la curva para finalmente encontrar la subtangente mediante la expresión:

$$PT = \frac{-Bq}{A}$$

Percibimos que se presentan ideas de tipo geométrico como son la semejanza de triángulos, argumentos de tipo infinitesimal utilizando un apoyo visual en la presentación de la tangente. En su trabajo Euler es el primero en mencionar de manera explícita el carácter variable de la tangente lo que en el discurso de Newton y Leibniz no se explicitaba, por lo que consideramos que aquí es el momento en que nace el carácter variacional de la tangente evento importante para nuestra investigación.

4.2 Conclusiones del capitulo.

El problema de la tangente ha sido presentada desde la época de los griegos en sus trabajos sobre geometría, siendo uno de esos trabajos el de Apolonio, quién presenta el concepto de tangencia, al resolver el problema de construir una circunferencia tangente a tres elementos cualesquiera elegidos entre un punto, una recta y una circunferencia. Para presentar el concepto de tangente, Copérnico la usa para encontrar la razón entre segmentos de arco y de rectas infinitamente pequeños ($\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$), dando un argumento del tipo variacional. Mientras que Galilei utiliza argumentos de tipo geométrico (triángulos semejantes). Descartes presenta el concepto de tangente dándole un argumento básicamente analítico. Fermat utiliza también argumentos de tipo geométrico (curvas, triángulos, puntos). Barrow presenta el concepto de tangente en donde la tangente es definida utilizando argumentos de tipo geométricos como el arco y la subtensa para encontrar un punto de tangencia; ángulos entre curvas; tangentes a las curvas; rectángulos y elipses, así como argumentos del tipo analíticos como el caso de Descartes. En el trabajo de Barrow, percibimos la presentación del concepto de tangente en dos momentos, en un primer momento la define utilizando argumentos geométricos como el arco y la subtensa, para encontrar un punto de tangencia, maneja también ángulos entre curvas, tangentes a las curvas, rectángulos y elipses, así como argumentos del tipo analíticos. En un segundo momento, utiliza la geometría griega, para referir el concepto de tangente a una curva, el cual es un problema de las raíces del cálculo infinitesimal, por lo que concluimos que el problema de las tangentes había sido visto antes de la invención del cálculo por Newton y Leibniz. Newton para presentar el concepto de tangente, realiza el trazo de las tangentes de curvas, utilizando argumentos del tipo geométrico e infinitesimal, mientras que Leibniz maneja argumentos diferenciales de tipo infinitesimal y geométrico, utilizando términos de la forma entre ordenadas, como un primer paso para el cálculo de la pendiente de la tangente en un punto de una función, encontrando relaciones geométricas, que acompañan a la presentación de la tangente, como el este caso de la subtangente, la normal y la subnormal. En Hospital, notamos un manejo intuitivo de la variación de la recta tangente, al tomar diferentes segmentos infinitamente pequeños, y con Agnesi, la presentación de la tangente, se hace utilizando argumentos geométricos; semejanza de triángulos, así como dándole un carácter variacional, en la obra de Euler se presenta la tangente con ideas de tipo geométrico, como son la semejanza de triángulos. En su trabajo Euler es el primero en mencionar de manera explícita, el carácter variable de la tangente lo que en el discurso de Newton y Leibniz, no se explicitaba el carácter variacional de la tangente, por lo que consideramos que aquí es el momento en que nace el carácter variacional de la tangente evento importante para nuestra investigación.

Advertimos en las obras analizadas, un discurso, ya sea de corte geométrico, descriptivo, analítico o por medio de métodos para el trazo o la determinación de tangentes y donde aparecen términos como el de *variación de la recta tangente,* para conceptualizar el concepto de tangente. Es decir, aunque se identifican estos elementos centrales en el discurso, al profesor esto, no le ayudaría a mostrar procedimientos, más bien le ayudaría a mostrar al estudiante, la construcción de un conocimiento desde diferentes ideas o puntos de vista.

Capítulo 4

Análisis del discurso de los libros

4.1 Los libros.

En este capítulo, se presenta el análisis del concepto de pendiente en los libros de texto de Fleming y Varberg (1991), Barnett (1997), Dolciani, Berman y Wooton (1998), Swokowski y A-Cole (1998) y Bittinger (1999), desde una perspectiva del Algebra con Trigonometría y Geometría Analítica. Los textos de los autores Zill (1987), Swokowsky (1989), Edwards y Penney (1996), Leithold (1998) y Granville (2008), son analizados desde una perspectiva del Cálculo con Geometría Analítica.

4.2 Propósito de la revisión.

Los libros de texto, como portadores del saber, son la primera fuente a partir de la cual se lleva a cabo el análisis de la matemática escolar. Este análisis aborda diferentes aspectos de la obra. El plano epistemológico que se refiere al análisis de la matemática; su estructura, la organización conceptual, los significados y naturaleza de los objetos matemáticos. El plano didáctico, referido al tratamiento de la matemática para su transmisión a los estudiantes; secuenciación, tipos de actividades, función didáctica de los ejemplos y aplicaciones. También la referida al análisis del discurso, que se refiere al estudio de la organización y representación del saber en los libros de texto (Zaldúa, 2007) citado en el artículo: *"El Discurso Matemático Escolar de los Logaritmos en los libros de Texto"*[35]

Un análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto se propone identificar los manejos conceptuales, de enfoque didáctico o referidos a la organización del saber que son comunes en las obras escolares y que han configurado un discurso oficial para la clase de matemáticas a partir del cual se escriben nuevas obras, se organizan lecciones de clase e incluso se desarrollan programas de estudio. Díaz y Morales (2005)[36] advierten que la

[35] tomado de la página de internet http://bit.ly/dVQBq9 el 3 de Octubre del 2010, página 6.

36 Tomado de la página internet *www.red-cimates.org.mx/Documentos/Programa_y_Resumenes.pdf* el 7 de marzo del 2011, página 192.

forma en que los libros de texto reflejan determinados aspectos de los conceptos puede influir en lo que los alumnos aprenden[37]. La identificación de las regularidades en las obras no sólo tienen que ver con la semántica, existen otros aspectos como la formulación de explicaciones, analogías y argumentaciones que trascienden a la obra y contribuyen a la formación de un *discurso matemático escolar.*

4.3 Metodología de análisis.

En este apartado realizamos una revisión de libros de texto; aquellos más utilizados en el nivel medio superior y superior. El propósito de la revisión de libros es analizar la presentación que cada autor hace del tema de pendiente, a continuación reportamos los resultados de éste análisis.

4.3.1 Fleming y Varberg (1991).

Fleming y Varberg (1991), presentan el concepto de pendiente de una recta en dos momentos, el primero en el subtema "La pendiente de una recta" correspondiente al tema "Coordenadas y curvas" y el segundo, en el subtema "la función tangente y la pendiente" correspondiente al tema "las funciones trigonométricas".

En un primer momento se presenta el concepto de pendiente mediante el argumento de que "dados dos puntos (por ejemplo *A* y *B*), hay sólo una línea recta que pasa por los dos" (*Figura 14*) y que al ser colocada en el sistema coordenado debe tener una ecuación, que para encontrarla, se hace necesario conocer la noción de pendiente tomando como referencia los datos de la siguiente figura

[37] Tomado de la página 5, del artículo mencionado en la referencia número 1.

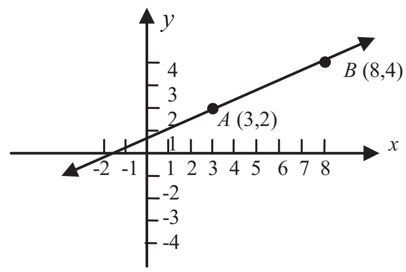
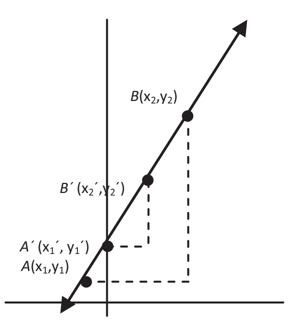


Figura 14

Entre el punto *A* y el punto *B* (*Figura 14*) hay una elevación (cambio vertical) de 2 unidades y un avance (cambio horizontal) de 5 unidades. Se dice que la recta tiene pendiente $\frac{2}{5}$ (pág. 173). En general para una recta que pasa por *A* (x_1, y_1), y *B* (x_2, y_2), donde $x_1 \neq x_2$, se define la pendiente *m* de esta recta como

$$\boxed{m = \frac{elevación}{avance} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

En su obra los autores expresan que la pendiente no depende de los pares de puntos que se elijan de una recta, pues se forman triángulos similares (*Figura 15*) en donde se muestra que se cumple la igualdad



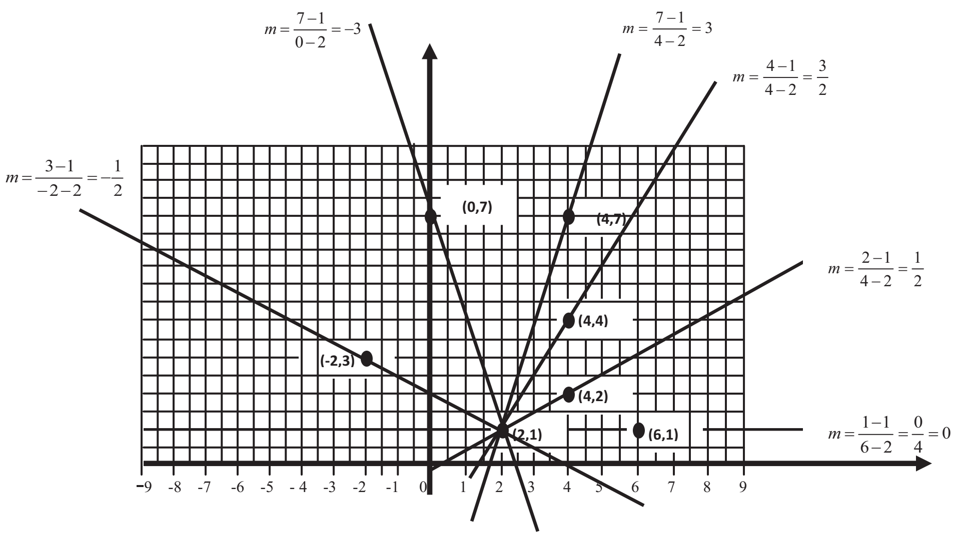
$$\frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Figura 15

Concluyendo entonces, que los puntos *A'* y *B´* sirven igual que los puntos A y *B*, no importando si el punto *A* está a la derecha o a la izquierda del punto *B*, ya que

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Siendo importante restar las coordenadas en el mismo orden tanto en el numerador como en el denominador. Más adelante, los autores encuentran que la pendiente *m* es una medida de la inclinación de una recta, lo cual es ilustrado en la *Figura 16*, aclarando además que: una recta horizontal tiene pendiente cero y que una recta vertical no tiene pendiente.



Rectas con distintas pendientes

Figura 16

En un segundo momento, son utilizadas las definiciones alternativas de las funciones trigonométricas para presentar el concepto de pendiente. Los autores particularizan el hecho de que la recta que pasa por el punto (a, b) y por el origen (*Figura 17*), tiene pendiente b/a.

Pero el número b/a es también la tangente del ángulo θ no negativo[38] que forma la recta con el eje x positivo.

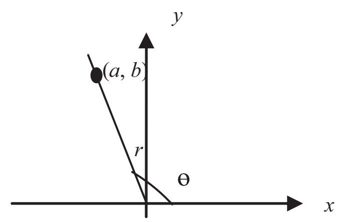


Figura 17

Entonces Fleming y Varberg (1991) deducen que para cualquier recta no vertical, la pendiente m de la recta satisface la ecuación

$$\boxed{m = \tan \theta}$$

Encontramos que los autores presentan el concepto de pendiente en dos momentos, primero tomando dos puntos sobre la recta y aplicar el cociente de diferencias y segundo al tomar el ángulo de inclinación de la recta.

4.3.2 Barnett (1997).

En la obra de Barnett (1997) se presenta el concepto de pendiente en el subtema "Pendiente de una recta; ecuaciones de una recta" partiendo del siguiente problema: "…dada cierta información (la pendiente m y la ordenada al origen b) acerca de una línea recta en un mismo sistema de coordenadas rectangulares, encontrar su ecuación". El autor empieza introduciendo una medida de la inclinación de una recta, que recibe el nombre de pendiente.

[38] Angulo no negativo. Un ángulo θ es un conjunto de puntos que consiste de un punto P y dos rayos que se extienden desde P. El punto P es el vértice del ángulo y los rayos son los lados del ángulo. El rayo *r*, se llama el lado inicial (permanece fijo) y el segundo rayo, rayo *s*, se llama rayo terminal del ángulo. El ángulo comienza en la posición del lado inicial y gira alrededor del punto final común P en un plano hasta que alcanza su posición terminal. Una rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj produce un ángulo positivo y una rotación en el sentido de las manecillas del reloj produce un ángulo negativo.

Si se toman dos puntos, (x_1, y_1) y (x_2, y_2), sobre una recta (*Figura 13*), *la razón del cambio que sufre* y *al cambio que sufre x, al desplazarse del punto P_1 al punto P_2, se llama pendiente de la recta.*

Fórmula de la pendiente

Si una recta pasa por los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, su pendiente está dada por la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{cambio vertical (ascenso)}}{\text{cambio horizontal (recorrido)}}$$

$x_1 \neq x_2$

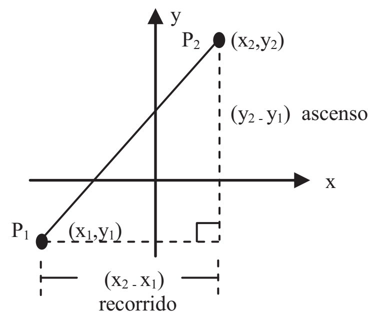
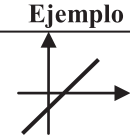
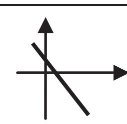
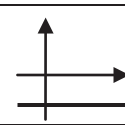
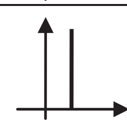


Figura 13

Más adelante el autor hace la interpretación geométrica de la pendiente de una recta cuando ésta puede ser positiva, negativa, cero o indefinida.

Al desplazarse de izquierda a derecha

Recta	Pendiente	Ejemplo
Asciende	**Positiva**	
Desciende	**Negativa**	
Horizontal	**0**	
Vertical	**No está definida**	

Representación gráfica de las distintas posiciones de la pendiente de una recta.

Encontramos que el autor presenta el concepto de pendiente a través del cociente de diferencias, así como por medio de la representación gráfica en los ejes cartesianos de las distintas posiciones de la pendiente de una recta.

4.3.3 Dolciani, Berman y Wooton (1998).

En Dolciani, Berman y Wooton (1998) presentan el concepto de pendiente en el subtema "pendiente de una recta" derivado del tema "la recta y sus ecuaciones" pertenecientes a la unidad denominada "Sistemas de proposiciones abiertas lineales "a partir del siguiente planteamiento: "Si una montaña se eleva *15 m* por cada *100 m* de distancia horizontal, la pendiente de la montaña es el cociente $\frac{15}{100}$ ó sea el *15 %"* (*Figura 18*)

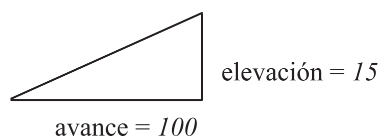


Figura 18

Y para definir el concepto de pendiente los autores, escogen dos puntos de ella *M* y *N* (*Figura 19*), para calcular su cociente de diferencias utilizando la fórmula $Pendiente = \frac{Elevacion}{Avance} = \frac{ordenada..de..N - ordenada..de..M}{abscisa..de..N - abscisa..de..M}$ cuyo resultado lo expresan en fracción y ya no como un porcentaje.

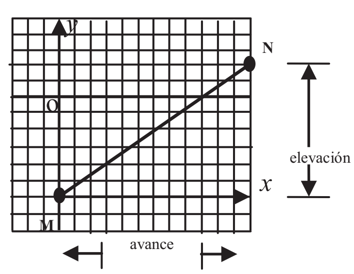


Figura 19

Más adelante los autores hacen la siguiente definición: Si $x_1 \neq x_2$ la pendiente m de la recta que une los puntos de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, para $x_1 \neq x_2$, sugiriendo el siguiente teorema:

TEOREMA. Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen al conjunto solución de $Ax + By = C$ y si $B \neq 0$, entonces $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{A}{B}$.

Observamos que el concepto de pendiente es tratada primero como un porcentaje, obtenido de la interpretación en el planteamiento de una cuestión física y segundo como una fracción. Los autores omiten los cambios de signo que la pendiente en un momento puede tener (positiva, negativa), así como el valor que puede adquirir (cero e indeterminado).

4.3.4 Swokowski y A-cole (1998).

Swokowski y A-cole (1998) presentan el concepto de pendiente con el título "Definición de la pendiente de una recta" en el subtema "Rectas" perteneciente al capítulo "Funciones y sus graficas", bajo la siguiente consideración: "Sea l una recta que no es paralela al eje y, y sean P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) puntos diferentes de l.

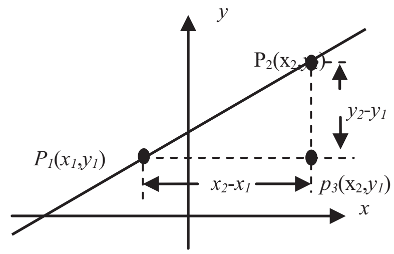
La pendiente m de l es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$".

Si l es paralela al eje y, la pendiente de l no está definida.

Los autores mencionan en su obra que la letra griega Δ (delta) se usa para denotar "cambio en ", por tanto la pendiente m es dada como $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cambio.en..y}{cambio.en..x}$

Los puntos característicos P_1 y P_2 de la línea recta l se exhiben en la *Figura 20*.

(a) Pendiente positiva (la recta crece)



(b) Pendiente negativa (la recta decrece)

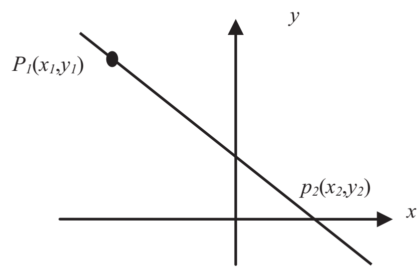


Figura 20

El numerador $y_2 - y_1$ de la fórmula para encontrar m es el cambio vertical en dirección de P_1 a P_2 y puede ser positivo o negativo, pero nunca cero porque l no es paralelo al eje y. En la *Figura 20* (a) la pendiente es positiva es decir la recta *crece*; en la *Figura 20* (b) es negativa y la línea *decrece*.

Al hallar la pendiente de una recta no importa qué punto se marque como P_1 y P_2, pues

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Si los puntos están señalados de modo que $x_1 < x_2$ (*Figura 20*), entonces $x_2 - x_1 > 0$ y, por tanto, la pendiente es positiva, negativa o cero, dependiendo si $y_2 \rangle y_1, y_2 \langle y_1.\ o.\ y_2 = y_1$ respectivamente.

Los autores muestran que la definición de la pendiente no depende de los puntos elegidos. Si se usan otros puntos, por ejemplo P'_1 (x'_1, y'_1) y P'_2 (x'_2, y'_2), entonces como en la *Figura 21*, el triángulo con vértices P'_1, P'_2 y $P'_3(x_2, y_1)$ es semejante al triángulo con vértices P_1, P_2 y P_3 (x_2, y_1). Puesto que los cocientes entre los lados correspondientes de triángulos similares son iguales.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}.$$

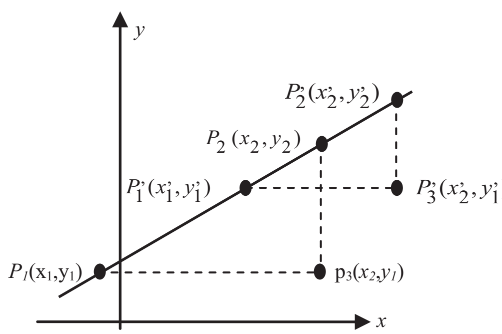


Figura 21

Los autores exponen el diagrama de la *Figura 22* donde se indica las pendientes de varias rectas que pasan por el origen. La recta que se encuentra sobre el eje *x* tiene pendiente m = 0. Si se hace girar alrededor de *O* en dirección *contraria al giro de las manecillas del reloj* (Según indica la flecha de línea continua), la pendiente es positiva y aumenta; alcanza el valor de 1 cuando la recta biseca[39] el primer cuadrante y continua incrementándose a medida que la recta se acerca al eje *y*. Ahora bien, si la recta de pendiente m = 0 se hace girar en sentido de las manecillas del reloj (flecha punteada), la pendiente es negativa y llega al valor de -1 cuando la recta biseca el segundo cuadrante; además, se vuelve más grande y negativa conforme la recta se acerca al eje *y*.

[39] Una recta biseca cuando corta, divide.

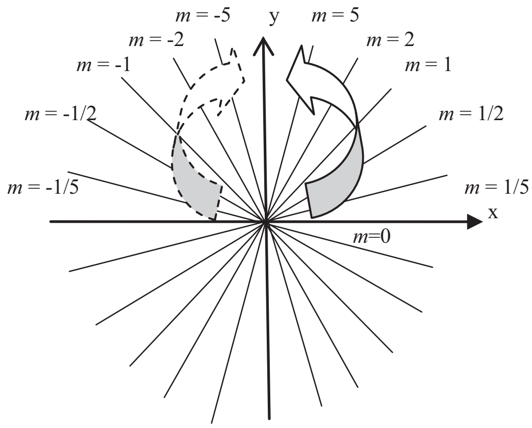
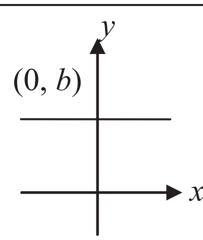
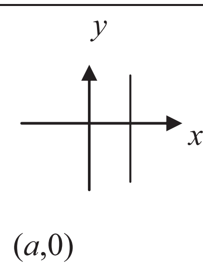


Figura 22

Swokowski y A-cole (1998) presentan en la tabla siguiente las ecuaciones de la pendiente de una recta horizontal y una recta vertical.

Terminología	Definición	Gráfica	Ecuación	Pendiente
Recta horizontal	Una recta paralela al eje *x*		$y = b$ la intersección en *y* es *b*	La pendiente es cero.
Recta vertical	Una recta paralela al eje *y*		$x = a$ la intersección en *x* es *a*	La pendiente es indefinida

Encontramos que los autores presentan el concepto de pendiente de dos maneras: una cuando se toman dos puntos diferentes (sin importar el orden) de una recta que no es paralela al eje *y*, y otra al aplicar el cociente de diferencias y emplear la semejanza de triángulos donde los cocientes entre sus lados correspondientes son iguales.

4.3.5 Bittinger (1999).

Bittinger (1999) presenta el concepto de pendiente del título: "La constante *m*: Inclinación", correspondiente al subtema "Funciones Lineales: Inclinación y Graficas", del tema "Graficas, Funciones y Aplicaciones", haciendo uso de la construcción las graficas de las funciones: $y = 2x$ (línea continua); $y = 2x + 3$ (línea punteada), *Figura 23* y las graficas de las funciones: $g(x) = 1/3x - 2$ (línea continua); $f(x) = 1/3x$ (línea punteada) *Figura 24*, y resalta el hecho de que la inclinación de cada línea punteada pareciera ser mayor que la correspondiente a cada línea continua y hace las siguientes dos observaciones: Uno: "Esto nos lleva a entender que el numero m en la ecuación $y = mx + b$ está relacionado con la inclinación de la línea" y dos que: "la siguiente definición nos permite visualizar esta inclinación y fijar un número o una pendiente, para la línea" (pág.186).

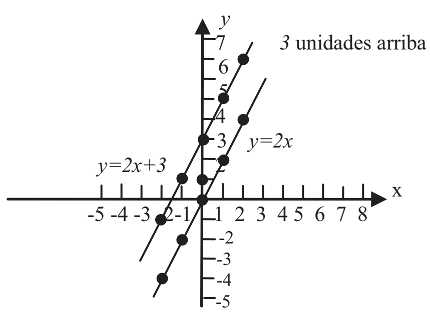


Figura 23

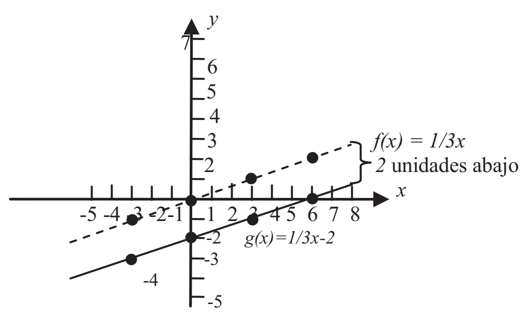


Figura 24

Definición

La pendiente de una línea (*Figura 25*) que contiene a los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la relación:

$$m = \frac{subida}{desplazamiento}$$
$$= \frac{cambia.en..y}{cambia.en.x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

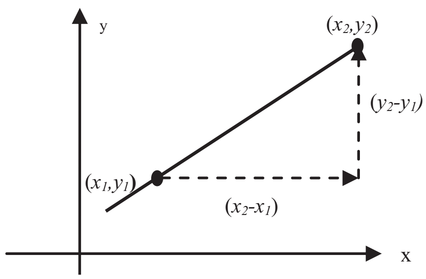


Figura 25

Observamos que el autor relaciona el concepto de pendiente con la inclinación de una línea, asignándole el término de "constante".

Ahora, presentamos el análisis de autores de libros en Cálculo, de cómo determinan la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera de la gráfica de una función f(x).

4.3.6 Zill (1987).

En el subtema "Tangente a una grafica" del tema "Razón de cambio de una función" correspondiente al capitulo "La derivada", Zill (1987) presenta el concepto de pendiente de una recta tangente L, de una grafica f de una función continua $y = f(x)$ en un punto $P(a, f(a))$ cuando se hace necesario encontrar precisamente la ecuación de la recta tangente (*Figura 33*)

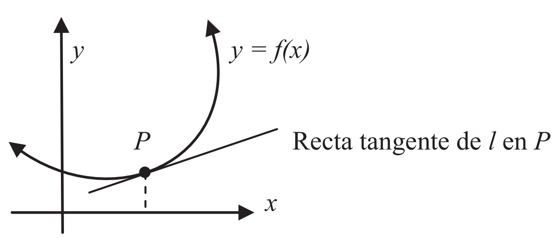


Figura 33

Para aproximar el valor de la pendiente de la recta tangente *l*, representada por el símbolo $m_{\tan}$, el autor propone determinar en primer lugar la pendiente de una recta secante que pasa por los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$, (*Figura 34*) por medio de la expresión:

$m_{\sec} = \dfrac{\text{cambio en la coordenada } y}{\text{cambio en la coordenada } x} = \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{(a+\Delta x) - a}$, si $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$, entonces:

$m_{\sec} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, para a continuación construir la pendiente de la recta tangente $m_{\tan}$ utilizando la *Figura 35*, en donde se aprecia que las secantes giran hacia la tangente cuando $Q \to P$ y cuando $Q' \to P$, por lo que cuando $\Delta x \to 0$

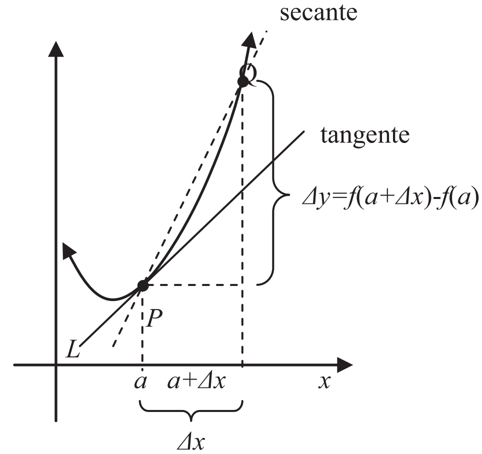


Figura 34

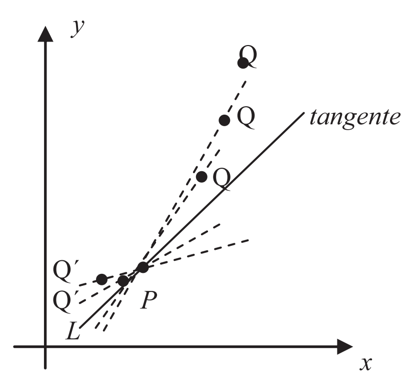


Figura 35

el valor de la pendiente de la recta tangente L denominada como $m_{\tan}$ es el valor límite de los valores de la pendiente de la secante denominada como $m_{\sec}$, Zill (1987) resume lo anterior con la siguiente definición:

$$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$, siempre que el limite exista.

El autor nos hace notar que la pendiente de la recta tangente en (*a, f(a)*), es conocida como pendiente de la curva en el punto.

4.3.7 Swokowsky (1989).

en su obra "Cálculo con Geometría Analítica", en el subtema "Notación de Limite", del tema "Introducción al Cálculo", del capítulo "Limite de funciones", presenta el concepto de pendiente para resolver el problema de encontrar la recta tangente a una curva en un punto P dado.

En la presentación de pendiente el autor define en primer lugar apoyándose en la geometría plana la recta tangente l en un punto P sobre una circunferencia como aquella recta que tiene solamente un punto P en común con tal circunferencia (*Figura 36*), definición que no se puede aplicar a cualquier gráfica, ya que una recta tangente puede cortar a una grafica varias veces (*Figura 37*)

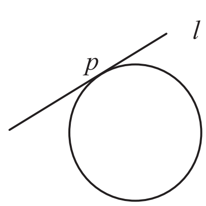


Figura 36

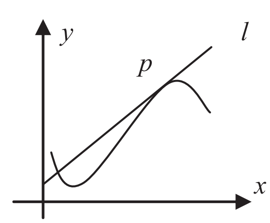


Figura 37

Definido lo anterior, inicia la presentación del concepto de pendiente a través de tres figuras: en la *Figura 38* define la pendiente de la recta secante *l* que pasa por los puntos *P* y *Q* como *m* y como m_{PQ} la pendiente de la recta tangente l_{PQ}, en la *Figura 39*, ilustra la variación de m_{PQ} cuando *Q* se acerca a *P* por la derecha, observando que si l_{PQ} tiende a *l*, entonces m_{PQ} tiende a *m* y en la *Figura 40* se observa que *Q* se acerca a *P* por la izquierda por lo que m_{PQ} se acerca a *m*,

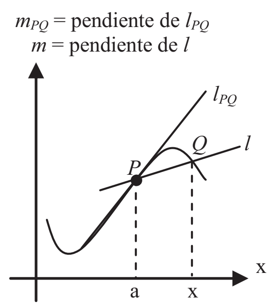


Figura 38

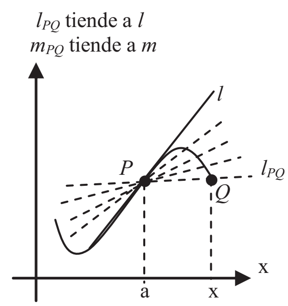


Figura 39

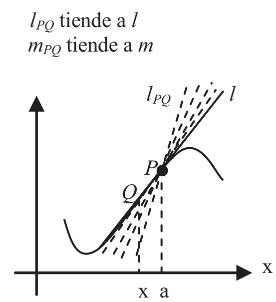


Figura 40

Observaciones que sugieren que si la pendiente de una recta secante l_{PQ} tiende a algún valor fijo cuando *Q* tiende a *P*, entonces ese valor se debe usar para definir la pendiente de la recta tangente *l* en *P* (página 53).

Swokowsky (1989), utiliza la *Figura 41* y la fórmula de la pendiente

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para obtener la pendiente de la recta secante l_{PQ}

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

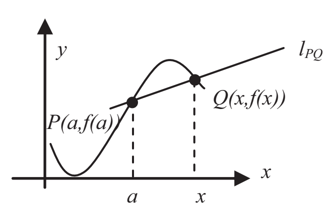


Figura 41

El autor resume lo anterior con la siguiente definición:

Definición

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a. La pendiente m de la recta tangente a la grafica de f en el punto $(a,\ f(a))$ es:

$m = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, siempre y cuando el limite exista.

Observamos que el autor nos presenta el hecho de que la pendiente de una recta tangente a un punto de una función $f(x)$ puede determinarse aproximando la pendiente de una recta secante por la derecha o por la izquierda de un punto fijo.

4.3.8 Edwards y Penney (1996).

En el subtema: "Los dos problemas fundamentales", correspondiente al tema "Una vista preliminar": ¿Qué es el cálculo? del capítulo I: "Funciones y gráficas", los autores abordan dos casos particulares, para presentar el concepto de pendiente.

Primero: definir que una recta tangente a una curva es aquella que "sólo toca" a la curva (caso del círculo), ver *Figura 26* y segundo, determinar que el valor de la pendiente es *2* para una parábola de la forma $y = x^2$, en el punto (1, 1),

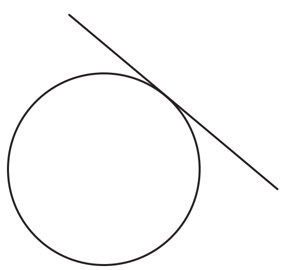


Figura 26

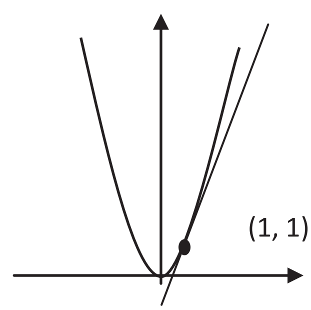


Figura 27

De los dos casos anteriores, los autores abordan el problema de encontrar rectas tangentes y el valor de su pendiente en casos más generales, es decir cuando se da un punto P $(x, f(x))$ sobre la curva $y = f(x)$, es entonces que presentan el concepto de pendiente al definir la recta tangente L en un punto arbitrario P de una curva $y = f(x)$, como aquella línea recta que pasa a través de P y que tiene la misma dirección que la curva[40] en P, siendo esta definición, equivalente a encontrar una "fórmula de predicción de la pendiente", fórmula que en cálculo es denominada la derivada, la cual da la pendiente apropiada a la recta tangente.

Los autores presentan el concepto de pendiente de la recta tangente L en el punto P (($a, f(a)$)) de una función $y = f(x)$ apoyándose en la *Figura 28.*

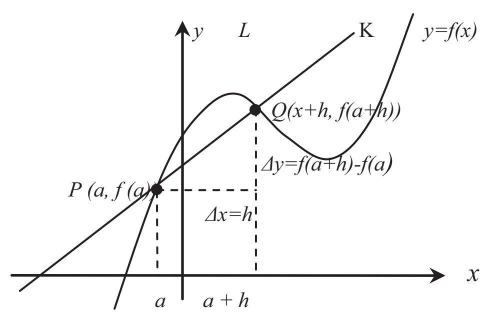


Figura 28

Utilizando el cociente de diferencia de Fermat, los autores presentan la pendiente de la recta secante K, por la expresión:

$$m(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{para} \quad h \neq 0$$

Edwards y Penney (1996) exponen que m (h) tiende al número m cuando h tiende a cero, por lo que m es el límite de m (h) cuando h tiende a cero, pudiéndose escribir entonces esto

[40] La dirección de una recta queda determinada por su pendiente

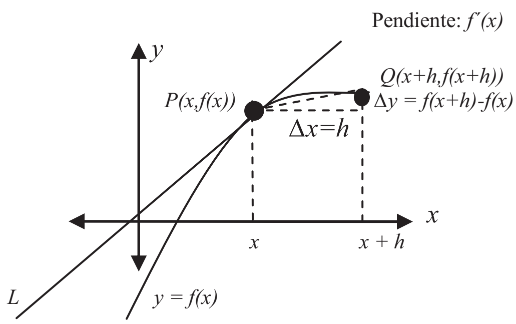
como: $m = \lim\limits_{h \to 0} m(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Observando que esta ecuación, *m* depende de la función *f* y del número *a*, entonces se puede escribir como:

$$m = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si se reemplaza *a* por *x*, se tiene la definición de una nueva función *f′:* $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si el límite existe.

Y su interpretación geométrica es representada en la *Figura 29* siendo expresada como:
La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$ es su derivada, es decir $f'(x)$.



La pendiente de la recta tangente en $(x, f(x))$ es $f'(x)$.

Figura 29

Observamos que los autores relacionan el concepto de pendiente de una recta tangente de una función $f(x)$, en un punto arbitrario como la derivada de la función.

4.3.9 Leithold (1998).

En la presentación del concepto de pendiente, Leithold (1998) define el significado de recta tangente en geometría plana como la recta que intersecta a la circunferencia en un solo punto, pero para una curva en general, emplea el concepto de límite para definir la pendiente de la recta tangente en un punto, siendo la recta tangente determinada por medio de su pendiente y el punto de tangencia.

El autor define en primer lugar la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos *P* y *Q* (*Figura 32*) como

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}, \text{ donde } m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \text{ si } x_2 = x_1 + \Delta x$$

Si el punto *Q*, se mueve a lo largo de la curva alrededor del punto fijo *P*, entonces Δx se tiende a cero hasta que la recta secante *PQ* llega a una posición límite, dando como resultado la recta tangente a la grafica de *f* en el punto fijo *P*, entonces la pendiente de la recta tangente a la grafica de *f* en el punto *P* es dada por el limite de m_{PQ} conforme Δx tiende a cero. Entonces la pendiente *m* (x_1) de la recta que pasa por *P* es definida como

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \text{ sí el límite existe}$$

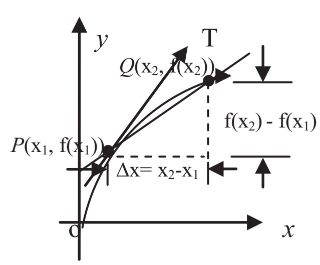


Figura 32

Observamos que el autor utiliza el concepto de límite para presentar el concepto de pendiente.

4.3.10 Granville (2008).

En el subtema "Interpretación geométrica de la derivada" del capitulo denominado "Derivación", para presentar el concepto de pendiente, el autor define en primer lugar el concepto de tangente a una curva en un punto *P* de la misma (*Figura 30*), haciendo girar en el punto *P* la secante *PQ*, cuya posición límite es por definición, la tangente a la curva en *P*.

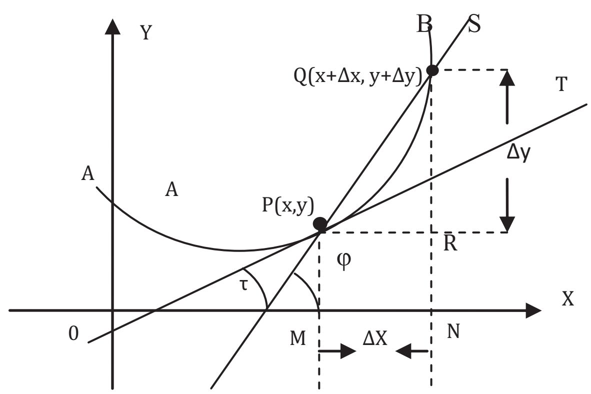


Figura 30

En segundo lugar trata el cálculo de la pendiente de la recta tangente (*T*) a la curva *AB* derivando la función *f* (*x*), es decir la curva *AB* dada por la ecuación $y = f(x)$ por la regla general, escogiendo dos puntos pertenecientes a la curva *AB*: el punto $P(x, y)$ y el punto $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ teniendo como resultado la expresión:

$dy/dx = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\tau =$ pendiente de la tangente a la curva en $P(x, y)$.

Estableciendo el siguiente teorema

Teorema: El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en aquel punto.

Más adelante en el subtema “Dirección de una curva” del "Capitulo V", del tema “Aplicaciones de la derivada”, Granville (2008) define la dirección de una curva en cualquier punto de ella, como la dirección de la tangente a la curva en este punto.

Por tanto si: τ es igual a la inclinación de la tangente (*Figura 30*), entonces la pendiente es igual a la tangente de τ y por tanto $dy / dx = tg\ \tau$ = pendiente de la curva en cualquier punto $P\ (x, y)$.

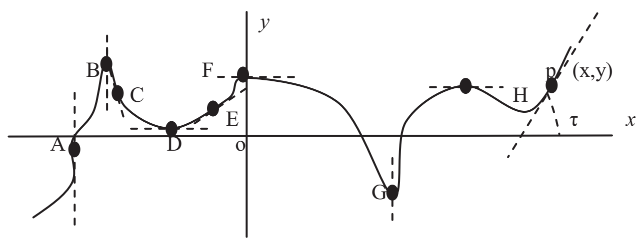


Figura 31

El autor nos muestra en la *Figura 31* que en los puntos: *D*, *F* y *H* la dirección de la curva es paralela al eje *x*; la tangente es horizontal y el ángulo $\tau = 0$, entonces la pendiente $dy / dx = 0$, y en los puntos *A, B* y *G* la dirección de la curva es paralela al eje de las *y*; la tangente es vertical y el ángulo $\tau = 90°$ y por lo que la pendiente d*y* / d*x* = se hace indefinida.

Observamos que el autor relaciona la tangente del ángulo de inclinación de la recta *PT* con el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva, haciendo notar que la pendiente toma diferentes valores, es decir que es variable.

4.4 Aportaciones del análisis de los libros de texto al análisis del discurso matemático escolar.

En relación al análisis del discurso, observamos que de concepto de pendiente, se da en tres momentos: en geometría analítica es caracterizado como el cociente de diferencias "la razón de una elevación (cambio vertical) y un avance (cambio horizontal)"; en trigonometría se maneja como "la tangente de un ángulo de inclinación " y en un tercer momento en los textos de cálculo, el concepto de pendiente es el resultado de encontrar una “fórmula de predicción de la pendiente”, fórmula que en cálculo es denominada la derivada, la cual da la pendiente apropiada a la recta tangente.

Con éste análisis, hemos cumplido el propósito trazado al inicio de éste capítulo, el referido al análisis de la matemática escolar que aborda diferentes aspectos de la obra. El plano epistemológico que se refiere al análisis de la matemática. El plano didáctico, referido al tratamiento de la matemática para su transmisión a los estudiantes y también la referida al análisis del discurso, que se refiere al estudio de la organización y representación del saber en los libros de texto.

Coincidimos con Díaz y Morales (2005), quienes advierten que la forma en que los libros de texto reflejan determinados aspectos de los conceptos (en este caso del concepto de pendiente), pueden influir en lo que los alumnos aprenden.

A continuación, resaltaremos puntualmente, elementos interesantes en el análisis realizado de los libros.

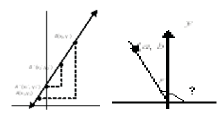
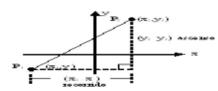
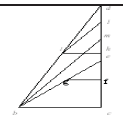
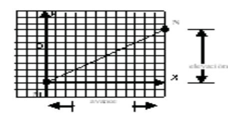
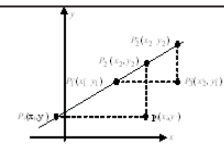
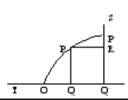
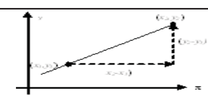
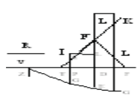
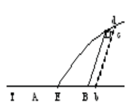
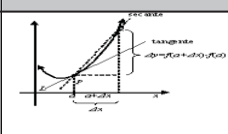
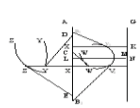
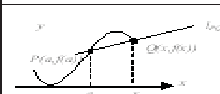
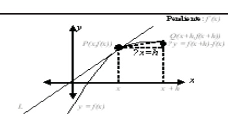
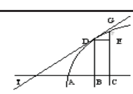
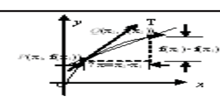
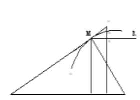
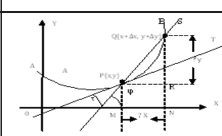
Encontramos, que los autores de los primeros cinco libros aquí analizados, presentan el concepto de pendiente, utilizando el cociente de diferencias, sin embargo, Fleming y Varberg lo presentan también como la tangente del ángulo de inclinación de una recta. Por otro lado, observamos que cada autor ó autores, indican de forma diferente, el resultado de encontrar el valor de la pendiente de una recta, Fleming y Varberg lo indican mediante la fracción de dos números enteros (2/3), Barnett lo indica como una interpretación geométrica (dándole los valores de positiva, negativa, cero ó indeterminada), Dolciani, Berman y Wooton lo indican como un porcentaje (%), Swokowski-A Cole lo indican como números enteros positivos y negativos (1, -1, 2, -2, etc.) así como con fracciones positivas y negativas (-1/5, -1/2, 1/2, 1/5, etc), en este mismo sentido, Bittinger lo hace, asignándole a la pendiente, el término de “constante. Estos primeros autores, manejan el concepto de pendiente desde una óptica de la trigonometría con geometría analítica, dándole un tratamiento básicamente estático.

Los autores Zill, Swokowski, Edwards y Penney, Leithold y Granville, relacionan la pendiente de la recta secante con la pendiente de la recta tangente y emplean el concepto de límite, para definir, la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera de la gráfica de una función f(x), siendo la recta tangente, determinada, por medio de su pendiente y el punto de tangencia. Por otro lado, Edwards y Penney así como Granville, establecen que el valor de la derivada evaluada en cualquier punto de una curva, es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en aquel punto, sin embargo, observamos, como Granville, también nos presenta el concepto de pendiente, como la tangente del ángulo de inclinación de la recta tangente a una curva dada. En todos estos casos, observamos que éstos últimos cinco autores, desde la óptica del Cálculo, presentan el concepto de pendiente, como aquel que toma valores diferentes, es decir, le dan un tratamiento prácticamente dinámico.

Con éste análisis, hemos cumplido el propósito trazado al inicio de éste capítulo, el referido al análisis de la matemática escolar que aborda diferentes aspectos de la obra. El plano epistemológico que se refiere al análisis de la matemática. El plano didáctico, referido al tratamiento de la matemática para su transmisión a los estudiantes y también la referida al análisis del discurso, que se refiere al estudio de la organización y representación del saber en los libros de texto.

Coincidimos con Díaz y Morales (2005), quienes advierten que la forma en que los libros de texto reflejan determinados aspectos de los conceptos (en este caso del concepto de pendiente), pueden influir en lo que los alumnos aprenden.

La siguiente tabla, nos ofrece la oportunidad de realizar una comparación, entre lo encontrado en "obras eruditas" y los libros de texto, analizados en esta investigación.

Autores de Obras Eruditas			Autores de Libros de Texto		
Uso de la tangente	**Autor/Gráfica**	**Expresión(es)**	**Concepto de Pendiente**	**Gráfica(s)**	**Expresión(es)**
Perge Hallar circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas.			**Fleming y Varberg** **Cociente de diferencias** **Tangente del ángulo de inclinación.**		$m = \frac{elevación}{avance} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $m = tg\theta$
Copérnico Encontrar la Razón entre segmentos de arco de rectas infinitamente pequeñas.		$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$	**Barnett** **Cociente de diferencias**		$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $= \frac{cambio.vertical.(ascenso)}{cambio.horizontal.(recorrido)}$
Galilei Determinar la amplitud de la parábola.			**Dolciani, Berman y Wooton** **Cociente de diferencias**		$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, para $x_1 \neq x_2$
Descartes Determinar la pendiente *m* de la recta normal en un punto de una elipse.		$m = \frac{y_0}{x_0 - (x_0 - \frac{x_0 b^2}{a^2})}$ $= \frac{y_0}{\frac{x_0 b^2}{a^2}} = \frac{a^2 y_0}{b^2 y_0}$	**Swokowsky y A-Cole** **Cociente de diferencias**		$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$ $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cambio..en..y}{cambio..en..x}$
Fermat Encontrar la recta tangente a la curva en un punto.			**Bittinger** **Cociente de diferencias**		$m = \frac{subida}{desplazamiento}$ $= \frac{cambio..en..y}{cambio..en..x}$ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$
Barrow Encontrar una relación entre el área bajo la curva y la inclinación de la recta tangente.		$\frac{DE}{DF} = \frac{R}{DT}$	**Para encontrar la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera de la grafica f(x), los autores relacionan:**		
Newton Encontrar la relación entre las fluxiones TB a DB, en la misma razón de la fluxión de BD a la fluxión de AB a la fluxión de BD; entonces TD tocará a la curva en D.		Fluxiones $m = \Delta y / \Delta x$ puede ser escrita: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{BD}{BT}$	**Zill** La pendiente de la recta secante con la pendiente de la recta tangente.		$m_{sec} = \frac{cambio.en.la.coordenada.y}{cambio.en.la.coordenada.x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{(a+\Delta x) - a}$ $m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, siempre que el límite exista
Leibniz Obtener puntos de referencia(B, c y D) y encontrar relaciones entre diferenciales (dv, dw, dy y dz) y segmentos de recta (BX, CX, Dx y EX).		Diferencias Infinitesimales $\frac{Dy}{Dx}$	**Swokowsky** La pendiente de la recta secante con la pendiente de la recta tangente.		$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
Hospital Tomar diferentes segmentos infinitamente pequeños de una línea curva (curva poligonal, la cual la considera compuesta por segmentos infinitamente pequeños) para localizar la tangente.			**Edwards y Penney** La pendiente de la recta secante con la pendiente de la recta tangente y con la derivada evaluada en cualquier punto de una curva.		$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si.el.límite.existe
Agnesi Construir una recta tangente a un punto cualquiera sobre una curva, encontrando en primer lugar, la recta subtangente BT.		BT = ydx/dy	**Leithold** La pendiente de la recta secante con la pendiente de la recta tangente.		$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$, si.el.límite.existe
Euler Hallar la ecuación 0 = *At* + *Bu*, y utilizar, la semejanza de triángulos y su relación, entre la tangente del triángulo *MPT* y el triángulo infinitesimal μq*M*, para ubicar la relación (u/t) que es la que determina la recta tangente a la curva.		$Tg_{curva} = u/t$ u=pequeña porción en que incrementa q t=pequeña porción en que incrementa p	**Granville** La pendiente de la recta secante con la pendiente de la recta tangente, con la derivada evaluada en cualquier punto de una curva y con la tangente del ángulo de inclinación.		$\frac{dy}{dx} = tg.\tau$

Observamos en la tabla anterior, el uso sistemático de gráficas compuestas por líneas rectas y curvas para definir, por una parte, el concepto de tangente (básicamente analizado en obras eruditas) y por otra, el concepto de pendiente (analizado en los primeros cinco libros) así como el tratamiento tangente-pendiente (en los siguientes cinco libros de Texto restantes, analizados en esta investigación).

Consideramos, que el discurso matemático escolar del concepto de pendiente que los estudiantes reciben en las aulas, básicamente es formado por la contextualización que el profesor hace del concepto, a través lecturas en libros de texto o muy probablemente de lecturas de obras eruditas. En un segundo momento, el profesor descontextualiza el concepto en un discurso matemático escolar a los estudiantes, quienes a su vez, lo descontextualizan en evaluaciones a nivel aula de clase o en actividades propuestas por investigadores, para determinar cómo usan e interpretan en concepto de pendiente.

Capítulo 5

Exploración en el aula de clase

5.1 Propósito de la Exploración.

En este apartado, presentamos una exploración cuyo propósito es obtener información referente a contextualización del concepto de pendiente mediante una serie de actividades (diez) , que estudiantes han obtenido del discurso matemático escolar sobre éste concepto en sus cursos de precálculo, por lo que la información tratada (análisis de gráficas, uso de razones para el calculo de la tangente y la comparación de rectas identificando el signo de su pendiente) en los capítulos 4 y 5, nos servirán de referente para la realizar el cuestionario que nos permitirá determinar las interpretaciones que tienen estudiantes del Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli, que cursan la asignatura de Calculo Diferencial en el primer semestre de Ingeniería, tienen en relación al concepto de pendiente, así también obtener información sobre las dificultades y problemas asociados a éste concepto.

La exploración consta de tres partes, en la primera se abordan diversos planteamientos gráficos. En la segunda se abordan preguntas relacionadas con el teorema de Tales. En la tercera se aborda una exploración sobre la pendiente de una recta.

5.1.1 Primera parte de la exploración.

En esta primera parte, se plantean actividades de interpretación y análisis gráfico, se espera que los estudiantes realicen exploraciones gráficas y observen las propiedades de las curvas, para responder a los cuestionamientos. El trabajo de análisis sobre gráficas, tiene un problema adicional, pues los estudiantes habitualmente no tienen mucho trabajo escolar con gráficas.

Esta exploración se propone como un recurso para obtener estrategias, interpretaciones, argumentos de los estudiantes, no hay un propósito de evaluar su conocimiento, de hecho se espera que todos los errores y dificultades que surjan en la resolución de las actividades nos permitan elaborar algunas conclusiones en relación al concepto de pendiente en los estudiantes.

5.1.2 Segunda parte de la exploración.

En la segunda parte, se proponen actividades de tipo geométricas, a partir de los resultados obtenidos en la investigación histórico-epistemológica reportados en el capítulo anterior, particularmente de los trabajos del cálculo infinitesimal que estaban fundamentados en la geometría. La idea principal que se quiere explorar es la de razón proporcional, pues está muy ligada al cálculo de la tangente en los métodos infinitesimales de la antigüedad.

Aunque no aparece el concepto de pendiente en la antigüedad, los métodos para el cálculo de la tangente hacen uso de razones lo que lleva a obtener un valor característico de la tangente que se deseaba obtener.

En la actividad se involucra a los estudiantes a diferentes preguntas donde aparecen relaciones proporcionales en triángulos rectángulos, particularmente atreves del teorema de Tales.

5.1.3 Tercera parte de la Exploración.

En esta última parte se propone a los estudiantes analizar diferentes situaciones gráficas en donde tienen que interpretar la pendiente, comparar inclinaciones de las rectas y distinguir signos de las pendientes. Se espera obtener información, sobre las dificultades que experimentan los estudiantes en relación al análisis de gráficas y a la pendiente de las mismas.

Las figuras[41] contenidas en cada actividad de la exploración, tienen como objetivo inducir al estudiante del Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli, a mencionar

[41] Aportaciones propias basadas en el trabajo realizado en el curso de cálculo diferencial que imparto en el Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli.

respuestas, que nos permitan obtener información verídica que ellos poseen sobre el concepto de pendiente.

5.2 Diseño de las Actividades.

En cada actividad planteada a estudiantes, mencionaremos el objetivo de cada una de ellas y a continuación la presentaremos.

5.2.1 Objetivo de la actividad 1.

El objetivo de ésta tarea es observar la información que pueda aportar el estudiante en relación a la función en su representación gráfica. En ambas figuras el estudiante debe expresar toda la información referida a las funciones que aparecen, el estudiante debe realizar una interpretación sobre las gráficas para expresar información, es decir un ejercicio visual.

Ya que se trata de cuestionamientos abiertos, el estudiante puede expresar cualquier idea a través de sus propias palabras ó a través de fórmulas, lo importante es obtener evidencias de lo que observa y sus interpretaciones.

Conceptos ó ideas que pueden aparecer

- Máximo
- Mínimo
- Cuadrantes
- Continuidad
- Pendiente

TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE CUAUTITLÁN IZCALLI

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

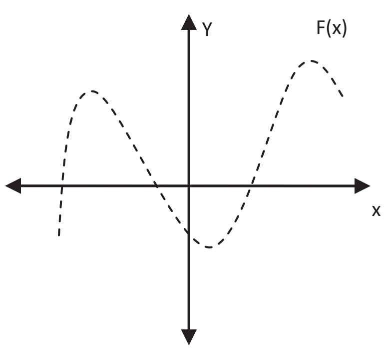
Actividad 1.

Nombre del alumno(a) ____grupo:______

Carrera ____fecha:_________

1.- En el recuadro de la derecha responde ampliamente lo que se te pide, por favor no borres nada

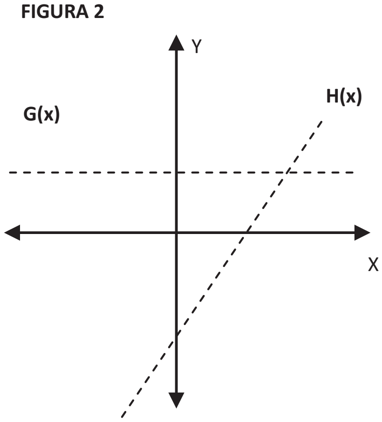
FIGURA 1



ESCRIBE AQUÍ TODAS LAS CARACTERÍSTICAS QUE ENCUENTRES DE ESTA LÍNEA F(x).

____
____
____
____
____
____
____
____

FIGURA 2



ESCRIBE AQUÍ TODAS LAS CARACTERÍSTICAS QUE ENCUENTRES DE ESTA LÍNEA G(x).____________________________________

____
____

ESCRIBE AQUÍ TODAS LAS CARACTERÍSTICAS QUE ENCUENTRES DE ESTA LÍNEA H(x).

____
____
____

5.2.2 Objetivo de la actividad 2.

El objetivo de esta tarea es conocer si los estudiantes pueden trazar una tangente a una curva, implica conocer las propiedades de tangencia en relación a la forma de la curva en una región dada. Por otra parte también se busca conocer si los estudiantes identifican el signo de una tangente.

Aquí aparecen dos figuras. En la FIGURA 3**,** los estudiantes deben trazar la tangente en los puntos indicados y escribir (si ellos así lo creen oportuno) sus dificultades ó dudas. En la FIGURA 4, los estudiantes deben trazar tangentes y además reconocer su signo y escribir una explicación sobre su decisión.

Para la **FIGURA 4,** los estudiantes deben decidir el signo de la tangente, es posible que haya confusión en relación a la inclinación-signo.

Conceptos ó ideas que pueden aparecer

- Pendiente

TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE CUAUTITLÁN IZCALLI

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

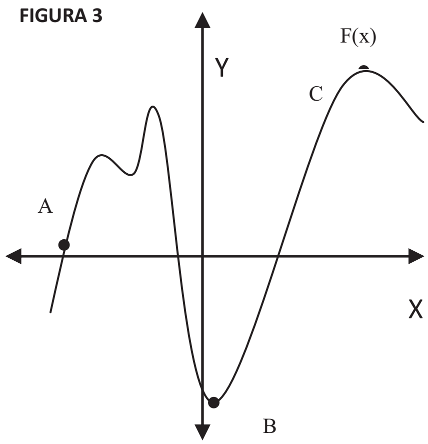
Actividad 2.

Nombre del alumno(a) ____grupo:______

Carrera ____fecha:_________

2.- En el recuadro de la derecha responde ampliamente lo que se te pide, por favor no borres nada.

FIGURA 3



TRAZA UNA LÍNEA RECTA TANGENTE A LA CURVA F(x) EN LOS PUNTOS A,B y C, Y ANOTA EN LOS RENGLONES SIGUIENTES SI TUVISTE ALGUNA DIFICULTAD PARA ELLO.

____

____

____

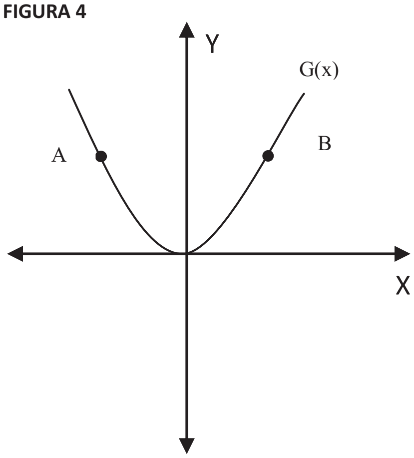
____

____

____

____

FIGURA 4



TRAZA UNA LÍNEA RECTA TANGENTE EN LOS PUNTOS A y B , DE LA CURVA G(x) Y ANOTA EN LOS SIGUIENTES RENGLONES SI SON POSITIVAS O NEGATIVAS Y PORQUÉ.

____

____

____

____

____

____

____

____

5.2.3 Objetivo de la actividad 3.

En esta tarea se pide que pueda reconocer y obtener la pendiente de la recta que aparece en la gráfica. Hay que considerar que los estudiantes han abordado el tema de punto-pendiente en la preparatoria, así que esta pregunta busca indagar si los estudiantes pueden reconocer a la pendiente como un elemento que esta intrínseco a una recta. Es posible que los estudiantes utilicen fórmulas, usen el Teorema de Tales ó hagan cálculos intuitivos, pero lo que esperamos es que expresen cualquier argumento, idea ó explicación sobre la pendiente.

Ahora los estudiantes deben utilizar una estrategia para obtener el valor de la pendiente y es opcional cualquier otra reflexión.

Conceptos ó ideas que pueden aparecer

- Teorema de Tales.
- Fórmula punto-pendiente

TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE CUAUTITLÁN IZCALLI

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Actividad 3.

Nombre del alumno(a) ____grupo:______

Carrera ____fecha:_________

3.- Observa la siguiente recta la cual pasa por los puntos: A (-2,-2) y B (4,5).

Contesta lo que se te pide en el recuadro inferior de la figura 5 que describe la recta que pasa por dichos puntos.

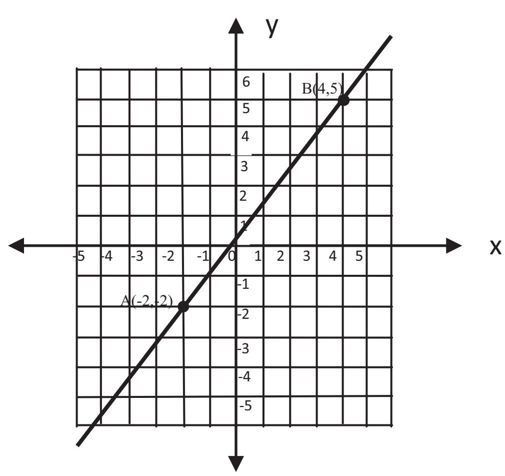


Figura 5

¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta trazada?

Nota: Utiliza los valores de los puntos mencionados

5.2.4 Objetivo de la actividad 4.

En ésta tarea, los estudiantes deben observar tres figuras, donde en cada una de ellas aparece un triángulo rectángulo y una relación proporcional. La hipotenusa de los triángulos rectángulos, representan la magnitud relevante en estas relaciones. Los triángulos rectángulos mostrados en esta actividad, se asemejan a los triángulos infinitesimales que aparecen en la época antigua, justo cuando se estaba formulado el actual cálculo. No es tan importante la relación proporcional, en sí, más bien tratamos un problema geométrico que aparece incluso en la actualidad en los cursos de geometría analítica. De alguna forma, éste acercamiento geométrico nos permite involucrar a la tangente y a la pendiente.

Esta actividad tiene tres figuras, los estudiantes deben analizar cada una de ellas y escribir en el recuadro que le corresponde, una respuesta para cada planteamiento.

Conceptos ó ideas que pueden aparecer

- Relación proporcional
- Teorema de Thales.

TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE CUAUTITLÁN IZCALLI

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

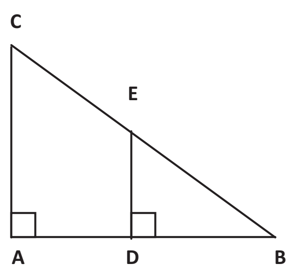
Actividad 4.

Nombre del alumno(a) ____grupo:______

Carrera ____fecha:_________

4.- Observa detenidamente cada uno de los siguientes triángulos, responde ampliamente lo que se te pide en el recuadro derecho, no borres nada.

FIGURA 6



¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{DB}$ **?**

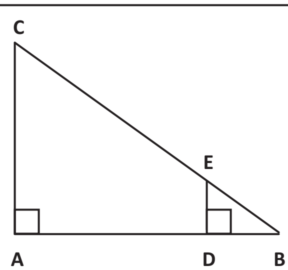
____

____

____

____

FIGURA 7



¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{DB}$ **?**

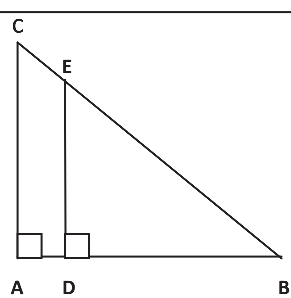
____

____

____

____

FIGURA 8



¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{DB}$ **?**

____

____

____

____

____

5.2.5 Objetivo de la actividad 5.

El objetivo de esta tarea es que el estudiante utilice el Teorema de Tales y observe la proporcionalidad que se da en triángulos rectángulos semejantes que fueron utilizados en el pasado como argumento de tipo geométrico para presentar el concepto de tangente.

Aquí se muestra la figura de un triangulo rectángulo (*ABC*) con una relación proporcional y en donde se pide a los estudiantes calcular a partir de los datos mostrados en la figura el valor de los cocientes *BC/BA* y *DE/DA* y manifestar sus observaciones al comparar los valores de los cocientes encontrados.

Conceptos ó ideas que pueden aparecer

- Teorema de Thales

TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE CUAUTITLÁN IZCALLI

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

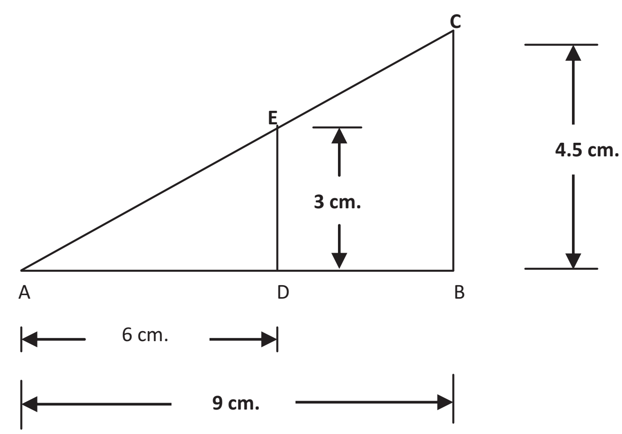
Actividad 5.

Nombre del alumno(a) ____grupo:______

Carrera ____fecha:_________

5.- En la siguiente figura se muestran los triángulos ABC y ADE, indicando algunas medidas, por ejemplo la del segmento AB, BC, DE y AD que miden 9 cm., 4.5 cm., 3 cm. y 6 cm. respectivamente, a partir de los datos mostrados, calcula los cocientes BC/BA y DE/DA y compara los resultados. Contesta ampliamente lo que se te pide en el recuadro de debajo de dicho triangulo

FIGURA 9



¿QUE ES LO QUE OBTIENES?, ¿A QUE CREES QUE SE DEBE?

____

____

____

____

5.2.6 Objetivo de la actividad 6.

En esta tarea los estudiantes deben localizar puntos, trazar rectas así como calcular dimensiones por medio de la proporcionalidad, el concepto de proporcionalidad ya era manejada en tiempos pasados para presentar el concepto de tangente al manejarse la proporcionalidad entre los arcos y las líneas rectas, observándose desde entonces ideas de tipo variacional precedentes al cálculo.

En este caso, se presenta la figura de un triángulo rectángulo en donde se pide al estudiante determinar uno de los lados proporcionales a partir de los datos que aparecen en la figura. Como resultado a la solución de este problema, se espera obtener datos que nos indiquen que el estudiante está en condiciones de manipular la igualdad del teorema de Tales usando el concepto de proporcionalidad.

Conceptos ó ideas que pueden aparecer

- Teorema de Tales.

TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE CUAUTITLÁN IZCALLI

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Actividad 6.

Nombre del alumno(a) ____grupo:______

Carrera ____fecha:_________

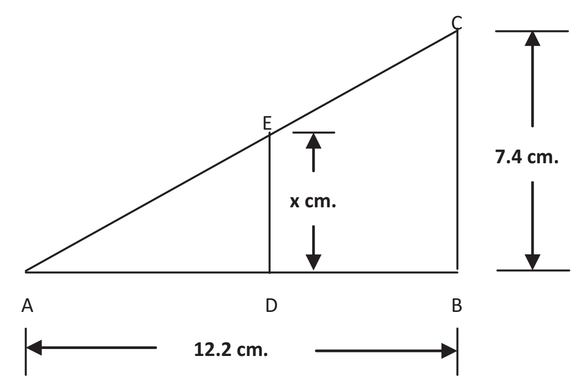
6.- En la siguiente figura tenemos la representación de un triangulo, un triángulo rectángulo ABC, cuyos catetos miden 7.4 cm. Y 12.2 cm respectivamente, es decir:

AB = 12.2 cm. Y BC = 7.4 cm.

6.5 cm. A la derecha del punto A marcamos el punto D. Desde el punto D trazamos una perpendicular a AB, que cruza el lado AC en el punto E.

Con los datos que se han mencionado, determina el valor de la longitud del segmento DE.

FIGURA 10



EN ESTE ESPACIO REALIZA TUS CÁLCULOS, NO BORRES NADA.

5.2.7 Objetivo de la actividad 7.

El objetivo de esta tarea es que el estudiante pueda interpretar a la pendiente como un número asociado a la inclinación de una recta. Como construcción de conceptos, en el pasado era utilizado el manejo de líneas, ya sea: dividiéndolas, localizando puntos sobre líneas y la utilización de puntos de referencia por donde se daba el trazo de rectas paralelas ó perpendiculares en la presentación del concepto de tangente.

En la primera de las dos figuras que aparecen en esta actividad se otorga un ejemplo en donde se expresa el valor de la pendiente y en la segunda figura solo se presenta un sistema de ejes cartesiano cuadriculado para que los estudiantes tracen una recta con las características pedidas.

Conceptos ó ideas que pueden aparecer

- Cociente de diferencias

TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE CUAUTITLÁN IZCALLI

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Actividad 7.

Nombre del alumno(a) ____grupo:______

Carrera ____fecha:_________

7.-La recta F(x) que aparece en la FIGURA 11, tiene pendiente uno, traza en el plano de la FIGURA 12, una recta con pendiente 3/2.

FIGURA 11

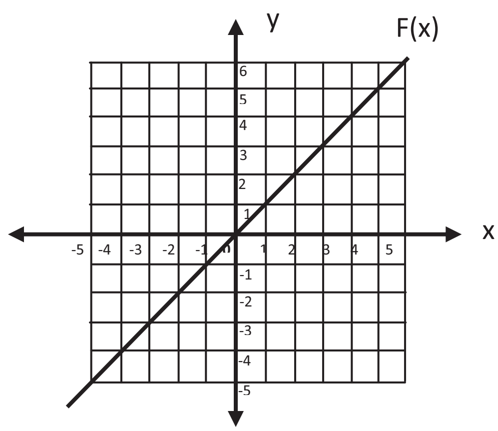
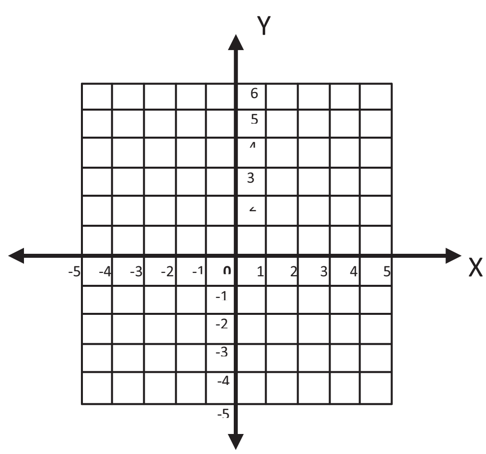


FIGURA 12



5.2.8 Objetivo de la actividad 8.

El objetivo de esta tarea es que el estudiante determine el valor de la pendiente de cada una de las rectas mostradas en la figura, deben determinar la pendiente.

En el pasado en el método para trazar tangentes, se utilizaron elementos de tipo gráfico visual, así como las ideas intuitivas de cambio cuando estos son muy pequeños.

Conceptos ó ideas que pueden aparecer

- Pendiente

TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE CUAUTITLÁN IZCALLI

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

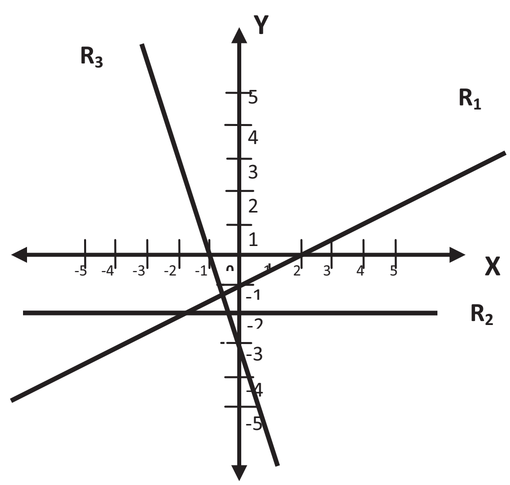
Actividad 8.

Nombre del alumno(a) ____grupo:______

Carrera ____fecha:_________

8. Observa por donde pasa cada recta de la siguiente figura y determina el valor de su pendiente. No borres nada.

FIGURA 13



EL VALOR m_1 DE LA RECTA R_1, ES:	EL VALOR m_2 DE LA RECTA R_2, ES:	EL VALOR m_3 DE LA RECTA R_3, ES:

5.2.9 Objetivo de la actividad 9.

El objetivo de esta tarea es que el estudiante observe las tres rectas y determine el signo de la pendiente, se deja al estudiante libre camino para determinar si el valor de la pendiente es positiva, negativa, cero ó indeterminada, ya sea mediante la observación y/o aplicación de alguna fórmula o ecuación.

Desde la época de Leibniz, se manejaban cantidades positivas (representadas con el signo "+" y cantidades negativas representadas por el signo "-") en la presentación del concepto de tangente.

Conceptos ó ideas que pueden aparecer

- Infinito

TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE CUAUTITLÁN IZCALLI

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

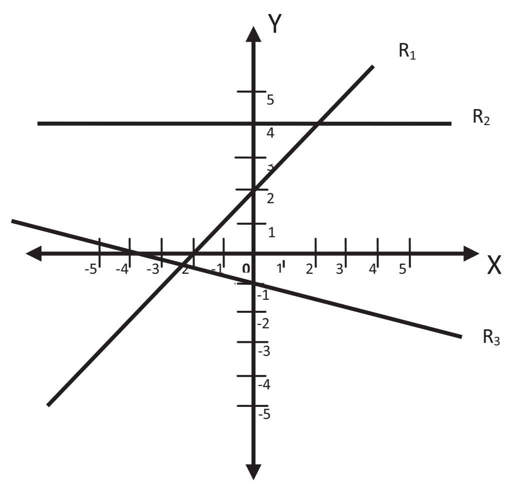
Actividad 9.

Nombre del alumno(a) ____grupo:______

Carrera ____fecha:_________

9. Determina el tipo de pendiente (positiva, negativa, cero o indeterminada) para cada una de las rectas que aparecen en la siguiente figura:

FIGURA 14



PARA LA RECTA R_1, LA PENDIENTE m_1 , ES:

____
____
____
____
____
____
____
____

PARA LA RECTA R_2, LA PENDIENTE m_2 , ES:

____
____
____
____
____
____
____
____

PARA LA RECTA R_3, LA PENDIENTE m_3 , ES:

____
____
____
____
____
____
____
____

5.2.10 Objetivo de la actividad 10.

En esta tarea se presentan dos rectas en diferentes posiciones en un mismo sistema de ejes cartesiano, tiene como objetivo que el estudiante argumente cuál de ellas tiene mayor pendiente. El estudiante deberá obtener información de cada una de las rectas ya sea para calcular el valor de la pendiente o mediante la observación determinar la pendiente.

Conceptos ó ideas que pueden aparecer

- Máximo
- Mínimo

TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE CUAUTITLÁN IZCALLI

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

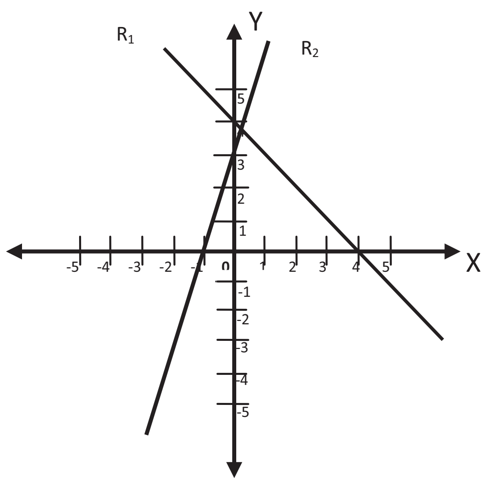
Actividad 10.

Nombre del alumno(a) ____grupo:______

Carrera ____fecha:_________

10.- Observa las rectas R_1 y R_2 y determina cual tiene mayor pendiente.

FIGURA 15



Utiliza este espacio para escribir tus observaciones.

5.3 Metodología de implementación.

La implementación de esta actividad, se aplicó a treinta estudiantes de entre 17 y 22 años de edad, que cursan el primer semestre de la Carrera de Ingeniería Industrial en el Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli, ubicado en el Estado de México y cuya procedencia escolar es variada, pues encontramos estudiantes provenientes de CONALEP, CBT, CBTIS, CECyTEM, CETEC, Preparatoria Abierta, Preparatorias Oficiales, así como de diferentes Colegios Particulares con estudios previos al Cálculo.

Se programó una sola sesión de tres horas, para que los estudiantes aportaran sus respuestas al diseño propuesto, en dicha sesión, se tomaron algunas fotografías que muestran la forma en que fueron distribuidos los estudiantes, en éste caso, se le asignó una mesa de trabajo a cada uno de ellos dentro un salón de usos múltiples, el cual da comodidad tanto por su espacio como por su iluminación.

Antes de la aplicación del diseño experimental, les ofrecí a los estudiantes una explicación de la actividad que estaban por realizar, indicándoles que leyeran detenidamente cada cuestionamiento y respondieran de acuerdo a lo que iban leyendo. Agregué que estaban en libertad de utilizar cualquier accesorio (calculadora, regla, escuadras, etc.) que creyeran podría servirles, para contestar las preguntas planteadas en el documento que les iba a entregar. Por otro lado, clarifique el hecho de que mi participación para contestar sus preguntas sobre el documento no estaba contemplada. Bajo el marco anterior, los alumnos se mostraron accesibles para trabajar el experimento líneas arriba presentado.

Por lo anterior, durante la implementación del experimento, me mantuve al margen de cualquier pregunta, dedicándome exclusivamente a observar y crear un ambiente de confianza con los estudiantes, que les permitiera eliminar cualquier manifestación de angustia ó ansiedad, por terminar de contestar rápido la actividad.

5.4 Análisis de las respuestas obtenidas.

El propósito de ésta actividad fue obtener información referente al concepto de pendiente, así como otros conceptos asociados a la pendiente; que se encuentran relacionados por ejemplo, en el contexto gráfico aparece la tangente, gráfica, cuadrante, etc.

Las respuestas obtenidas nos aportan una perspectiva de la idea (en un escenario real) que tiene el estudiante en relación a la pendiente, aunque es importante resaltar que la información recabada tiene otros detalles que no los consideramos para este estudio, por ejemplo, para el caso de las preguntas relacionadas con el aspecto gráfico no consideramos argumentos numéricos ó algebraicos pues el interés fue esencialmente analizar las reflexiones en el plano de lo gráfico .

A continuación, presentamos los aspectos a observador en cada pregunta y para cada una de las figuras, un análisis de las respuestas de los estudiantes basado en el mayor y menor porcentaje obtenido de cada una de las tablas, en donde se contempla el concentrado de las respuestas de cada uno de los treinta estudiantes que participaron en la solución de este diseño experimental.

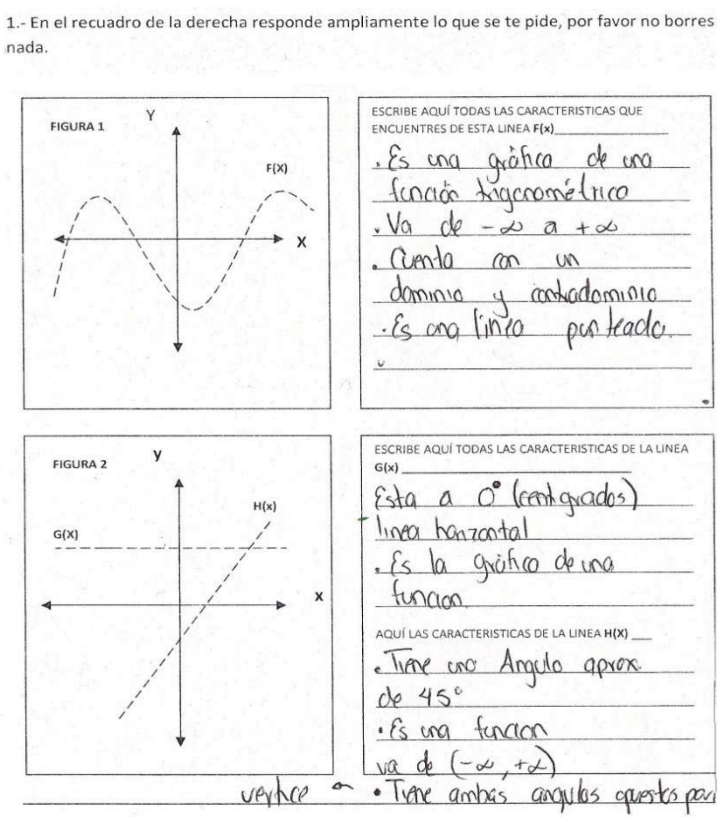
5.4.1 **Tabla I**

Para la Recta F(x), FIGURA 1.

Aspectos observados

1.1 Relacionado con la curva y su continuidad.
1.2 Relacionado con el sistema de referencia y los cuadrantes .
1.3 Relacionado con puntos críticos.
1.4 Relacionado con la intersección con los ejes coordenados.
1.5 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.6 No contesta o presenta dificultades.

Más de la mitad de los estudiantes identifican aspectos morfológicos en la curva así como su continuidad. Considerando los antecedentes académicos de los estudiantes es muy probable que esta pregunta los remita a rescatar la información trabajada en sus cursos de precálculo donde se analizan las gráficas de las funciones y se trabaja el tema de continuidad.
Las respuestas de los estudiantes hacen escasa mención al sistema de referencia y los cuadrantes, es muy probable que sus reflexiones estén más enfocadas al objeto, en este caso la curva, que al escenario (sistema cartesiano) donde ésta se encuentra.



	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
1	x					
2	x					
3	x					
4				x		
5					x	
6					x	
7	x					
8	x					
9	x					
10		x				
11			x			
12	x					
13	x					
14	x					
15	x					
16	x					
17		x				
18			x			
19				x		
20						x
21				x		
22	x					
23				x		
24				x		
25	x					
26	x					
27	x					
28	x					
29			x			
30						x
Total	16	2	3	5	2	2
%	53.33	6.67	10	16.67	6.67	6.67

5.4.2 **Tabla II**

Para la Recta G(x), FIGURA 2.

Aspectos observados

1.1 Relacionado con los conceptos de horizontalidad.
1.2 Relacionado con el sistema de referencia y los cuadrantes.
1.3 Referido a la ecuación de una recta horizontal.
1.4 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.5 No contesta o presenta dificultades.

El 50 % de los estudiantes manifiesta tratarse de una recta horizontal, es probablemente que el estudiante exprese lo anterior, debido a que relacione el concepto de horizontalidad con el concepto de paralelismo, relación que es muy manejada en los cursos de precálculo cuando se dibuja una recta que es paralela a cualquiera de los ejes de referencia.
Es nula la referencia de los estudiantes, respecto a expresar la ecuación de ésta recta horizontal como una característica de la misma. Es muy probable que lo anterior, se deba, a que la ecuación de la recta horizontal vista por el estudiante en su curso de Geometría analítica, tenga escasa mención en sus cursos de precálculo.

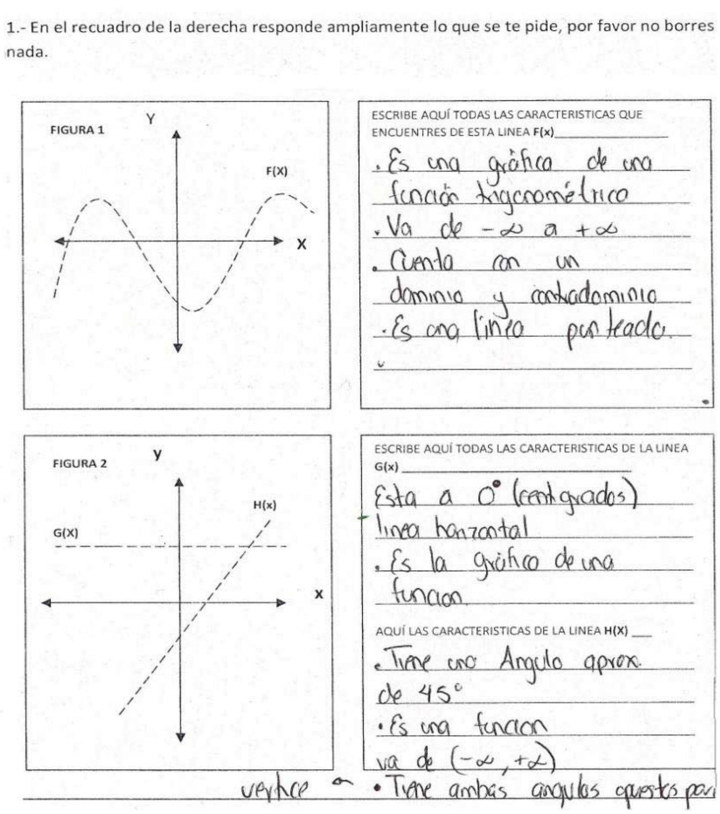

1.- En el recuadro de la derecha responde ampliamente lo que se te pide, por favor no borres nada.

FIGURA 1 — Y — F(X) — X

ESCRIBE AQUÍ TODAS LAS CARACTERISTICAS QUE ENCUENTRES DE ESTA LINEA F(x)
. Es una gráfica de una
función trigonométrica
. Va de $-\infty$ a $+\infty$
. Cuenta con un
dominio y contradominio
. Es una línea punteada.

FIGURA 2 — y — H(x) — G(X) — X

ESCRIBE AQUÍ TODAS LAS CARACTERISTICAS DE LA LINEA G(x)
Esta a 0° (centígrados)
línea horizontal
. Es la gráfica de una
función

AQUÍ LAS CARACTERISTICAS DE LA LINEA H(X)
. Tiene un Angulo aprox.
de 45°
. Es una funcion
va de $(-\infty, +\infty)$
vertice • Tiene ambos angulos opuestos por

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
1	x				
2				x	
3	x				
4	x				
5				x	
6				x	
7	x				
8	x				
9	x				
10				x	
11				x	
12		x			
13				x	
14				x	
15	x				
16					x
17	x				
18				x	
19	x				
20	x				
21	x				
22	x				
23				x	
24					x
25				x	
26	x				
27	x				
28					x
29	x				
30					x
Total	15	1	0	10	4
%	50	3.33	0	33.33	13.33

5.4.3 Tabla III

Para la Recta H(x), FIGURA 2.

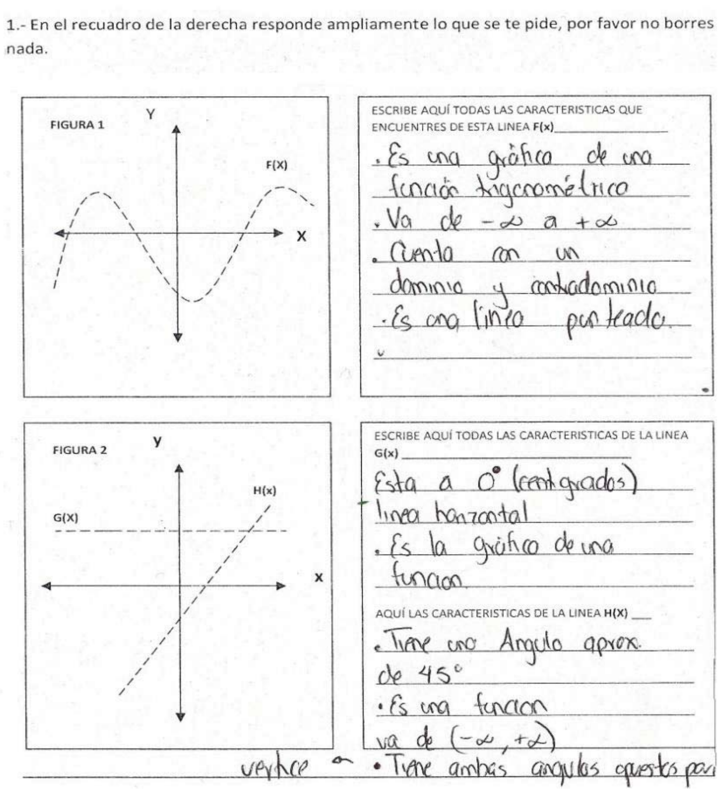
Aspectos observados

1.1 Relacionado con el concepto de pendiente
1.2 Relacionado con el sistema de referencia y los cuadrantes.
1.3 Otras respuestas no consideradas en el estudio
1.4 No contesta o presenta dificultades.

Un alto porcentaje de los estudiantes manifiesta el concepto de pendiente expresando "la recta esta inclinada", "es una línea en diagonal"," tiene un ángulo", al observar una recta en la posición mostrada para este caso. Es muy probable que el estudiante mantenga clara la idea de sus cursos de precálculo de que en una recta no paralela al eje x o al eje y tendrá siempre una cierta pendiente que en su momento se puede calcular, sin embargo la confunden con una inclinación, una diagonal ó un ángulo.

Un estudiante responde: " No sé", otro estudiante responde: "No recuerdo" y un tercer estudiante deja en blanco los espacios para responder. Es muy probable que en sus cursos de precálculo el tema de la pendiente para estos estudiantes haya tomado escasa , nula relevancia o significado al momento de ser abordado.

	1.1	1.2	1.3	1.4
1		x		
2			x	
3			x	
4	x			
5	x			
6			x	
7	x			
8	x			
9	x			
10	x			
11			x	
12		x		
13	x			
14	x			
15		x		
16				x
17		x		
18			x	
19				x
20	x			
21		x		
22	x			
23	x			
24	x			
25			x	
26			x	
27	x			
28	x			
29	x			
30				x
Total	15	5	7	3
%	50	16.67	23.33	10

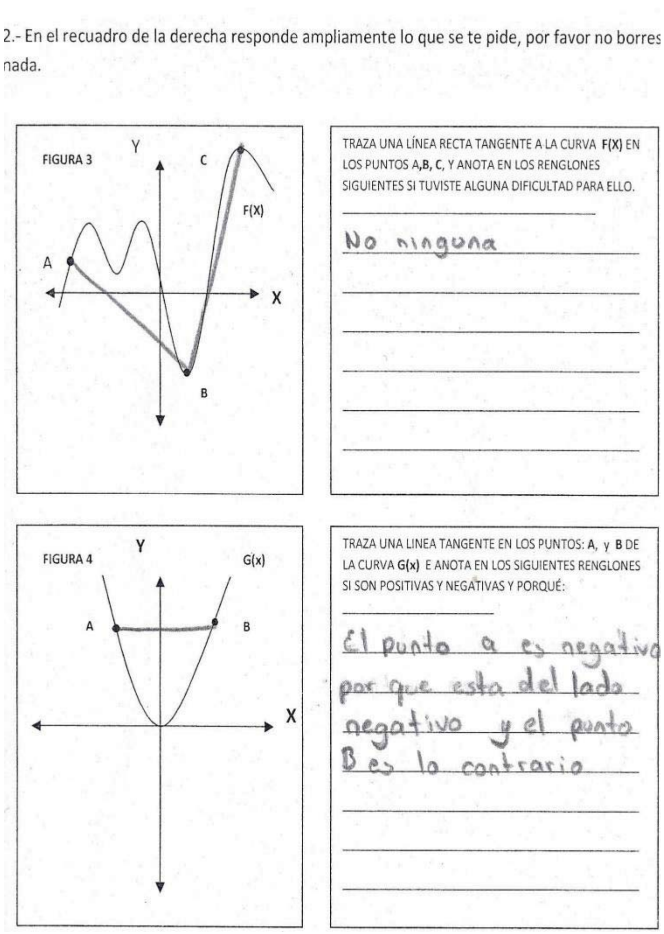


5.4.4 **Tabla IV**

Aspectos observados

Para la Recta F(x), **FIGURA 3.**
1.1 Relacionado con haber realizado el trazo de una línea recta tangente a los puntos A,B y C.
1.2 Relacionado con haber realizado el trazo de una línea recta tangente solo en dos puntos.
1.3 Relacionado con haber realizado el trazo de una línea recta tangente en un solo punto.
1.4 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.5 No contesta ó presenta dificultades.

Un mínimo de estudiantes (dos), hacen referencia al cambio de la pendiente de la recta tangente en diferentes puntos de la grafica de una función *f(x)*.
En contraste la mitad de los estudiantes resuelve esta actividad uniendo mediante líneas rectas el punto *A* con el punto *B* y a continuación el punto *B* con el punto *C*. Es muy probable que estos estudiantes estén más enfocados al concepto de que la distancia más corta entre puntos es una línea recta que a los conceptos de pendiente y tangente dinámica.



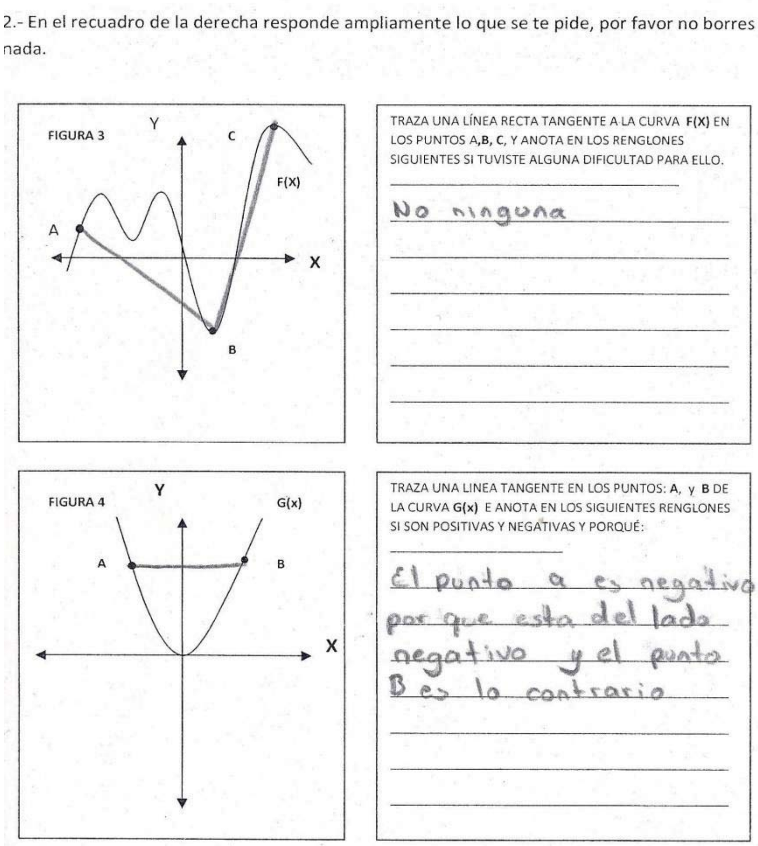
	1.1	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**
1				x	
2				x	
3				x	
4		x			
5			x		
6					x
7	x				
8					x
9			x		
10					x
11				x	
12	x				
13				x	
14				x	
15			x		
16				x	
17				x	
18				x	
19					x
20				x	
21				x	
22				x	
23					x
24				x	
25					x
26					x
27		x			
28				x	
29				x	
30					x
Total	2	2	3	15	8
%	6.67	6.67	10	50	26.67

5.4.5 **Tabla V**

Aspectos observados

Para la Parábola G(x), **FIGURA 4.**
1.1 Relacionado con el trazo de la línea recta tangente al punto "A".
1.2 Relacionado con el trazo de la línea recta tangente al punto "B".
1.3 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.4 No contesto o presenta dificultades.

Las respuestas de los estudiantes hacen poca referencia a los trazos de las rectas tangentes tanto para el punto *A*, como para el punto *B*. Es muy probable estos estudiantes rescaten información de sus cursos de precálculo en donde es trabajado el concepto de pendiente de una recta tangente en el punto de la gráfica de una función $f(x)$.
Tres cuartas partes de los estudiantes, basaron sus respuestas en unir mediante una línea recta el punto *A* con el punto *B*. Es muy probable, que sus respuestas estén relacionada con el concepto de que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta, más que con el concepto de recta tangente a un punto.



	1.1	1.2	1.3	1.4
1			x	
2			x	
3			x	
4				x
5	x			
6			x	
7			x	
8			x	
9	x			
10				x
11			x	
12			x	
13			x	
14			x	
15		x		
16			x	
17			x	
18			x	
19			x	
20			x	
21			x	
22			x	
23			x	
24			x	
25			x	
26				x
27			x	
28			x	
29			x	
30				x
Total	2	1	23	4
%	6.67	3.33	76.67	13.33

5.4.6 **Tabla VI**

FIGURA 4.

Aspectos observados

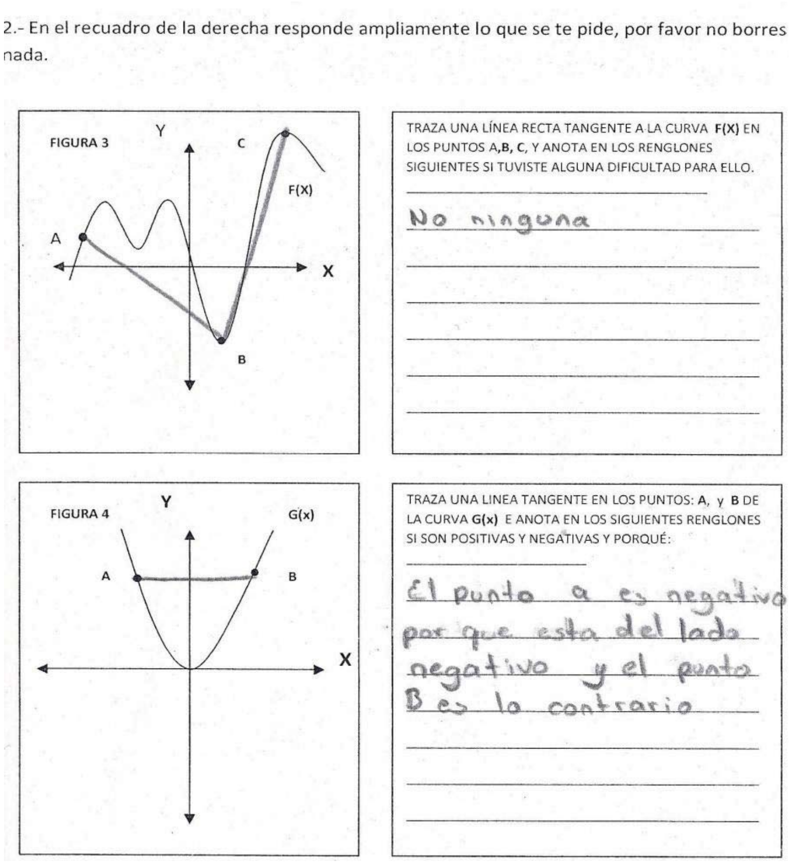
Respecto al signo de la tangentes de la Parábola G(x), EN EL PUNTO A.

1.1 Relacionado con el signo positivo de la línea recta tangente en el punto *A*.
1.2 Relacionado con el signo negativo de la línea recta tangente en el punto *A*.
1.3 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.4 No contesto o presenta dificultades.

	1.1	1.2	1.3	1.4
1		x		
2		x		
3		x		
4			x	
5		x		
6			x	
7			x	
8		x		
9		x		
10		x		
11		x		
12		x		
13		x		
14		x		
15				x
16		x		
17		x		
18			x	
19		x		
20			x	
21		x		
22			x	
23		x		
24		x		
25		x		
26				x
27			x	
28		x		
29			x	
30				x
Total	0	19	8	3
%	0	63.33	26.67	10

Más de la mitad de los estudiantes hacen referencia al hecho de que la tangente en este punto es negativa, muy probablemente debido a que lo relacionan con el concepto de la recta numérica real donde se menciona que toda cantidad que este del lado izquierdo del origen es negativa.

La respuesta en el sentido de que el signo de la pendiente en este punto sea positiva es nulo. Muy probablemente se de esta respuesta por la observación antes mencionada.



5.4.7 **Tabla VII**

FIGURA 4.

Aspectos observados

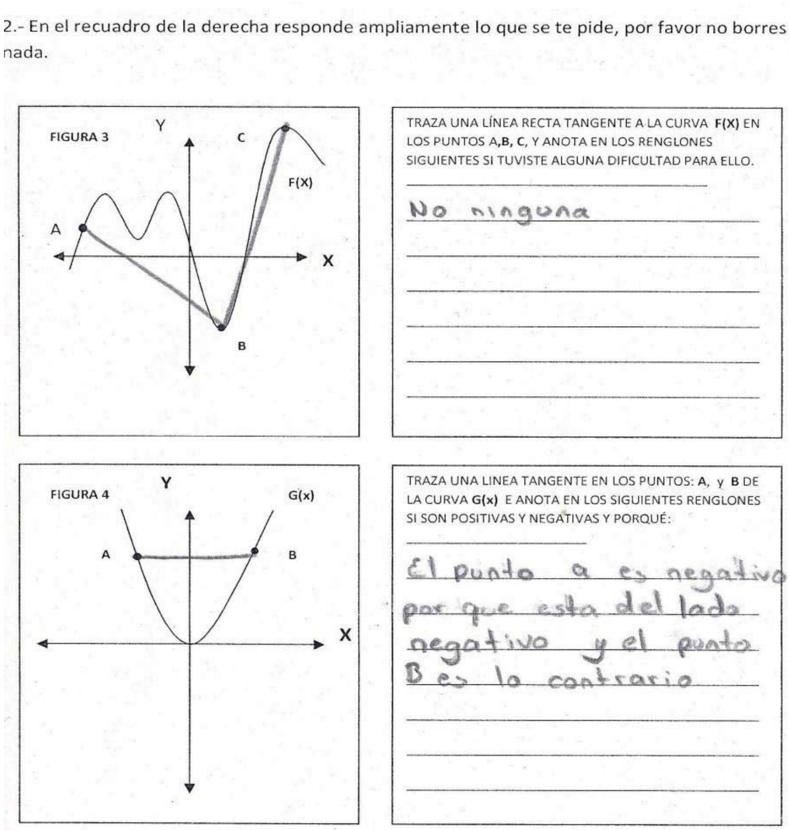
Respecto al signo de la tangentes de la Parábola G(x), EN EL PUNTO B.

1.1 Relacionado con el signo positivo de la línea recta tangente en el punto *B*.
1.2 Relacionado con el signo negativo de la línea recta tangente en el punto *B*.
1.3 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.4 No contesto o presenta dificultades.

	1.1	1.2	1.3	1.4
1	x			
2	x			
3	x			
4			x	
5	x			
6			x	
7			x	
8			x	
9	x			
10	x			
11	x			
12	x			
13	x			
14	x			
15				x
16	x			
17	x			
18	x			
19	x			
20			x	
21	x			
22			x	
23	x			
24			x	
25	x			
26				x
27			x	
28	x			
29			x	
30				x
Total	18	0	9	3
%	60	0	30	10

Más de la mitad de los estudiantes hacen referencia al hecho de que la tangente en este punto es positiva. Muy probablemente debido a que lo relacionan con el concepto de la recta numérica real donde se menciona que toda cantidad que esté del lado derecho del origen es positiva.

La respuesta en el sentido de que el signo de la pendiente en este punto sea positiva es nulo. Muy probablemente se de ésta respuesta por la observación antes mencionada.



5.4.8 **Tabla VIII**

Para la FIGURA 5.

Aspectos observados

1.1 Relacionado con el cálculo del valor de la pendiente**.**
1.2 Relacionado con el no cálculo del valor de la pendiente.
1.3 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.4 No contesto o presenta dificultades.

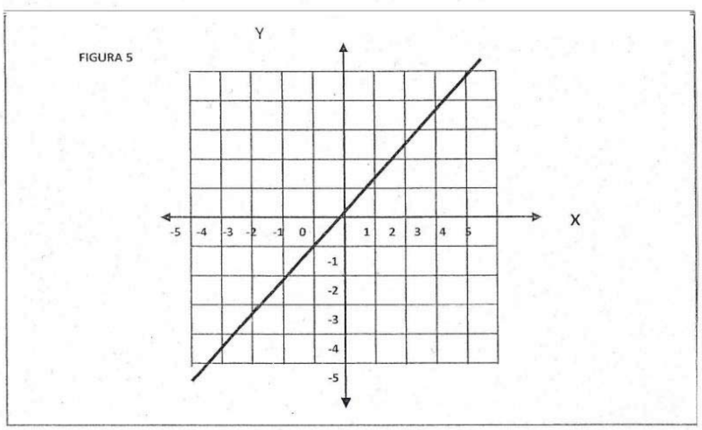
La mayoría de los estudiantes, únicamente se dedicaron a mencionar un punto que ubicaron sobre la recta que se les mostró, sin realizar cálculo alguno para determinar el valor de la pendiente con los datos proporcionados. Es muy probable que esta actividad la hayan relacionado con el tema de graficas de pares ordenados en donde se pide localizar puntos (x, y) en el sistema de ejes coordenados.

Un estudiante contestó que el valor es positivo, argumentando que los puntos proporcionados (-2,-2) y (4,5) van de negativo a positivo. Es muy probable que su reflexión se base en el manejo de la recta numérica real en donde se menciona que todo valor que valla de menos a más siempre es positivo y un segundo estudiante se dedico a tabular ciertos valores.

	1.1	1.2	1.3	1.4
1		x		
2	x			
3			x	
4		x		
5		x		
6	x			
7	x			
8	x			
9		x		
10		x		
11	x			
12		x		
13		x		
14		x		
15	x			
16	x			
17	x			
18		x		
19				x
20		x		
21			x	
22		x		
23		x		
24		x		
25		x		
26	x			
27	x			
28				x
29				x
30				x
Total	10	14	2	4
%	33.33	46.67	6.67	13.33

3.- Observa la siguiente recta la cual pasa por los puntos: A (-2,-2) y B (4,5).

Contesta lo que se te pide en el recuadro inferior de la figura que describe la recta que pasa por dichos puntos.



¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta trazada¿ (-2;2) (4,5)
es positiva porque van los puntos de - a +.
Nota: utiliza los valores de los puntos mencionados

5.4.9 **Tabla IX**

Para la FIGURA 6.
Aspectos observados

1.1 Relacionado en que la relación $\frac{AC}{AB}$ sí es mayor que la relación $\frac{DE}{DB}$.

1.2 Relacionado en que la relación $\frac{AC}{AB}$ es igual que la relación $\frac{DE}{DB}$.

1.3 Relacionado en que la relación $\frac{AC}{AB}$ es menor o no es mayor que la relación $\frac{DE}{DB}$.

1.4 Otras respuestas no consideradas en el estudio

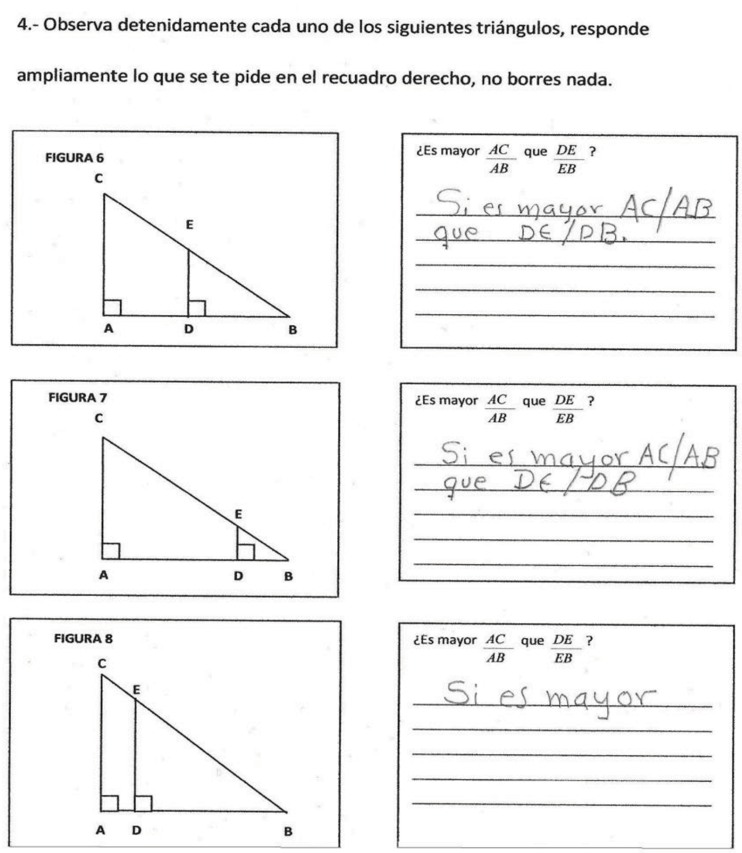
1.5 No contestó o presenta dificultades.

Más de tres cuartas partes de los estudiantes refieren que la relación $\frac{AC}{AB}$ sí es mayor. Es muy probable que esta determinación la hayan obtenido de observar que los catetos *AC* y *AB* son de mayor longitud que los catetos *DE* y *DB* sin considerar la relación proporcional vista en el teorema de Tales, estudiada en sus cursos de precálculo.

Tres estudiantes afirman que la relación $\frac{DE}{DB}$ es mayor que la relación $\frac{AC}{AB}$.

Es muy probable que esta reflexión se deba a la posición del triángulo *DEB*, se encuentra a la derecha del triangulo formado por *ABC*, rescatando información de que todo lo que esté a la derecha es mayor que lo que esté a la izquierda.

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
1		x			
2	x				
3	x				
4	x				
5	x				
6	x				
7	x				
8		x			
9	x				
10	x				
11	x				
12	x				
13	x				
14	x				
15	x				
16			x		
17	x				
18			x		
19	x				
20	x				
21	x				
22	x				
23			x		
24	x				
25		x			
26		x			
27	x				
28	x				
29	x				
30	x				
Total	23	4	3	0	0
%	76.67	13.33	10	0	0



5.4.10 **Tabla X**

Para la FIGURA 7.
Aspectos observados

1.1 Relacionado en que la relación $\frac{AC}{AB}$ sí es mayor que la relación $\frac{DE}{DB}$.

1.2 Relacionado en que la relación $\frac{AC}{AB}$ es igual que la relación $\frac{DE}{DB}$.

1.3 Relacionado en que la relación $\frac{AC}{AB}$ es menor o no es mayor que la relación $\frac{DE}{DB}$.

1.4 Otras respuestas no consideradas en el estudio

1.5 No contestó o presenta dificultades.

Más de la mitad de los estudiantes refieren que la relación $\frac{AC}{AB}$ sí es mayor.

Es muy probable que esta determinación la hayan obtenido de observar que la superficie del lado izquierdo donde se encuentra *AC* es mayor que la superficie del triangulo generado por *DEB*, sin considerar la relación proporcional vista en el teorema de Tales, estudiada en sus cursos de precálculo.

Dos estudiantes afirman que la relación $\frac{DE}{DB}$ es mayor que la relación $\frac{AC}{AB}$.

Es muy probable que esta reflexión se deba a la posición del triángulo *DEB*, se encuentra a la derecha del triangulo formado por *ABC*, rescatando información de que todo lo que esté a la derecha es mayor que lo que esté a la izquierda.

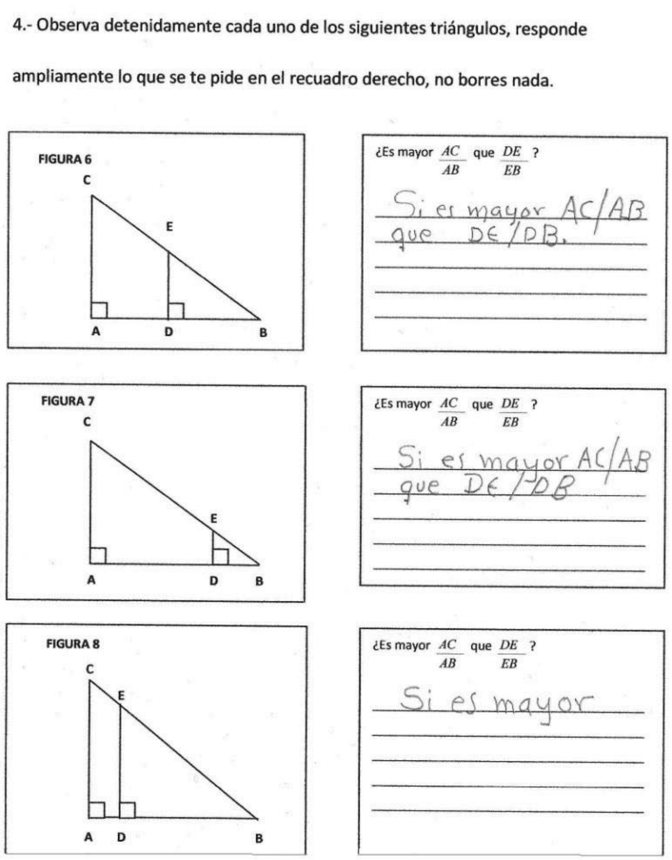

4.- Observa detenidamente cada uno de los siguientes triángulos, responde ampliamente lo que se te pide en el recuadro derecho, no borres nada.

FIGURA 6

¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{EB}$?

Si es mayor AC/AB que DE/DB.

FIGURA 7

¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{EB}$?

Si es mayor AC/AB que DE/DB

FIGURA 8

¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{EB}$?

Si es mayor

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
1		x			
2	x				
3		x			
4	x				
5	x				
6	x				
7	x				
8			x		
9	x				
10	x				
11			x		
12	x				
13			x		
14			x		
15			x		
16	x				
17			x		
18	x				
19	x				
20			x		
21			x		
22	x				
23	x				
24				x	
25	x				
26	x				
27				x	
28			x		
29	x				
30	x				
Total	17	2	9	2	
%	56.67	6.67	30	6.67	0

5.4.11 **Tabla XI**

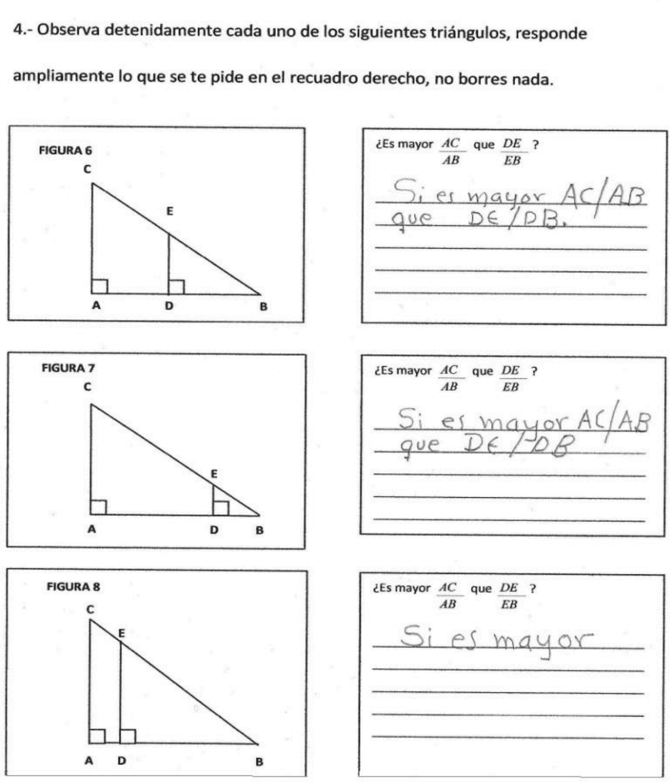
Para la FIGURA 8.

Aspectos observados

1.1 Relacionado en que la relación $\frac{AC}{AB}$ sí es mayor que la relación $\frac{DE}{DB}$.
1.2 Relacionado en que la relación $\frac{AC}{AB}$ es igual que la relación $\frac{DE}{DB}$.
1.3 Relacionado en que la relación $\frac{AC}{AB}$ es menor o no es mayor que la relación $\frac{DE}{DB}$.
1.4 Otras respuestas no consideradas en el estudio
1.5 No contestó o presenta dificultades.

La mitad de los estudiantes refieren que la relación $\frac{AC}{AB}$ sí es mayor. Es muy probable que esta determinación la hayan obtenido de observar que la longitud de la rectas AC y AB, son de mayor longitud que las rectas DB y DE respectivamente, sin considerar la relación proporcional vista en el teorema de Tales, estudiada en sus cursos de precálculo.
Un estudiante afirma que $\frac{AC}{AB}$ es igual que la relación $\frac{DE}{DB}$. Es muy probable que esta reflexión se deba a haber rescatado información dada en sus curso de precálculo en donde se revisa la relación proporcional de triángulos rectángulos mediante el teorema de Thales.

	1.1	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**
1		x			
2	x				
3	x				
4			x		
5	x				
6			x		
7	x				
8			x		
9	x				
10	x				
11	x				
12			x		
13	x				
14	x				
15				x	
16	x				
17	x				
18	x				
19			x		
20			x		
21	x				
22					
23					
24					
25					
26	x				
27	x				
28				x	
29					
30				x	
Total	15	1	11	3	0
%	50	3.33	36.67	10	



5.4.12 **Tabla XII**

Para la FIGURA 9.

Aspectos observados

1.1 Relacionado con el cálculo correcto del valor de los cocientes: $\frac{BC}{BA}$ y $\frac{DE}{DA}$.

1.2 Relacionado con el cálculo incorrecto del valor de los cocientes: $\frac{BC}{BA}$ y $\frac{DE}{DA}$.

1.3 Relacionado con no haber calculado los cocientes: $\frac{BC}{BA}$ y $\frac{DE}{DA}$

1.4 Respondió a las preguntas ¿Qué obtienes?, A que crees que se deba?

1.5 Otras respuestas no consideradas en el estudio.

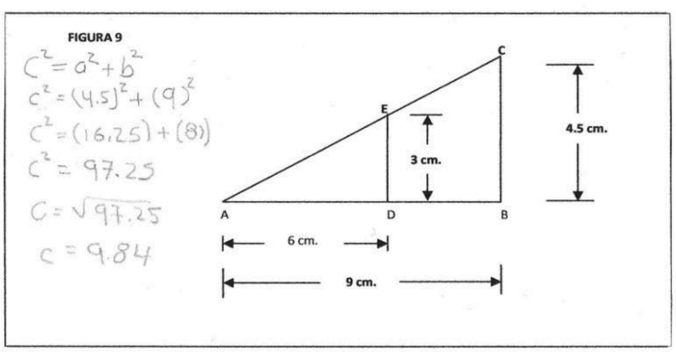
1.6 No contestó o presenta dificultades.

La mayoría de los estudiantes dieron otras respuestas no consideradas en nuestro estudio, mencionando entre ellas que se obtienen datos como: un área, un ángulo, la hipotenusa, el cateto opuesto, el cateto adyacente, una recta, utilizando para ello funciones trigonométricas así como el teorema de Pitágoras. Es muy probable que la reflexión de los estudiantes se haya dado por relacionar este tema con el tema de Solución de triángulos rectángulos en donde al mismo tiempo son utilizadas las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras.

Dos estudiantes realizaron el cálculo correcto del valor de los cocientes pedidos. Es muy probable que el estudiante debido a su antecedente académico haya manipulado el teorema de Tales al observar la relación proporcional mostrada en el triangulo *ABC*.

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
1				x		
2				x		
3					x	
4					x	
5		x				
6		x				
7		x				
8	x					
9					x	
10	x					
11		x				
12						x
13				x		
14				x		
15					x	
16						x
17					x	
18				x		
19						x
20				x		
21					x	
22				x		
23					x	
24				x		
25					x	
26					x	
27					x	
28					x	
29				x		
30					x	
Total	2	4	0	9	12	3
%	6.67	13.33	0	30	40	10

5.- En la siguiente figura se muestran los triángulos ABC y ADE, indicando algunas medidas, por ejemplo la de los segmentos AB, BC, DE y AD que miden 9 cm., 4.5 cm., 3 cm. y 6 cm. respectivamente. A partir de los datos mostrados, calcula los cocientes BC/BA y DE/DA y compara los resultados. Contesta ampliamente lo que se te pide en el recuadro de debajo de dicho triangulo



¿QUE ES LO QUE OBTIENES?, A QUE CREES QUE SE DEBE?

el valor de la hipotenusa = 9.84

5.4.13 **Tabla XIII**

Para la FIGURA 10.

Aspectos observados

1.1 Relacionado con el cálculo correcto del valor de la longitud del segmento *DE*.
1.2 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.3 No contestó o presenta dificultades.

La mayoría de los estudiantes dieron otras respuestas no consideradas en nuestro estudio, haciendo cálculos de ángulos y magnitudes del triangulo como catetos e hipotenusa utilizando para ello funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. Es muy probable que la reflexión de los estudiantes se haya dado por relacionar este tema con el tema de Solución de triángulos rectángulos en donde al mismo tiempo son utilizadas las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras.

Dos estudiantes realizan el cálculo correcto del valor de la longitud del segmento *DE*. Es muy probable que estos estudiantes hayan tenido la oportunidad de manipular la igualdad del teorema de Tales usando el concepto de proporcionalidad en sus cursos de precálculo.

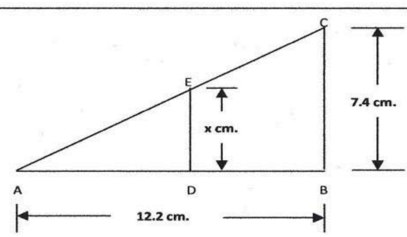
6.- En la siguiente figura tenemos la representación de un triangulo, un triángulo rectángulo ABC, cuyos catetos miden 7.4 cm. Y 12.2 cm respectivamente, es decir:

AB = 12.2 cm. Y BC = 7.4 cm.

6.5 cm. A la derecha del punto A marcamos el punto D. Desde el punto D trazamos una perpendicular a AB, que cruza el lado AC en el punto E.

Con los datos que se han mencionado, determina el valor de la longitud del segmento DE.

FIGURA 10



EN ESTE ESPACIO REALIZA TUS CÁLCULOS, NO BORRES NADA.

$Sen = \frac{COP}{Hi}$

$Sen = \frac{7.4}{12.2} = \underline{37.34}$

	1.1	1.2	1.3
1		x	
2		x	
3			x
4		x	
5		x	
6	x		
7		x	
8	x		
9		x	
10		x	
11		x	
12		x	
13		x	
14		x	
15		x	
16		x	
17		x	
18		x	
19		x	
20		x	
21		x	
22		x	
23		x	
24		x	
25		x	
26			x
27		x	
28			x
29			x
30		x	
Total	2	24	4
%	6.67	80	13.33

5.4.14 **Tabla XIV**

Para la FIGURA 12.

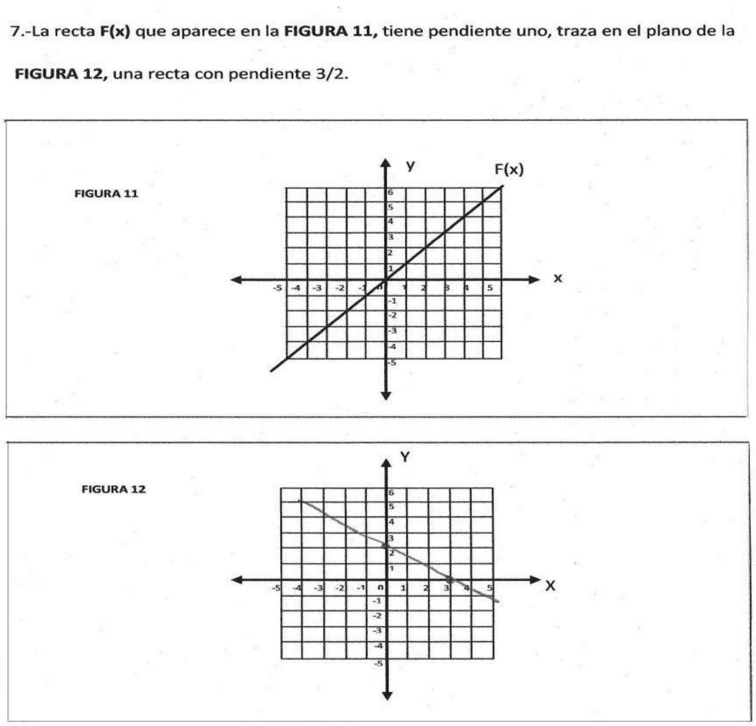
1.1 Relacionado con haber trazado la línea recta con pendiente $\frac{3}{2}$

1.2 Otros trazos o respuestas no consideradas en el estudio.

1.3 No contestó o presenta dificultades.

Casi el total de los alumnos trazaron la recta pedida utilizando los siguientes métodos: localizando el punto 3 en el eje *x* y el punto 2 en el eje *y* uniéndolos a continuación con una línea, recta; localizando el punto de coordenadas (3, 2) uniéndolo al origen del sistema coordenado con una línea recta ; otros más localizaron el punto 2 en el eje *x* y el punto -3 en el eje *y*, y a continuación unirlos con una línea recta. Es muy probable que las reflexiones de los estudiantes estén rescatadas del tema denominado Gráficas de pares ordenados visto en bachillerato, donde se menciona que así como existe una correspondencia entre los números y los puntos en una recta, existe una correspondencia entre los pares ordenados de números y los puntos en un plano.

En contraste, dos estudiantes hicieron pasar una línea recta a través de los puntos de coordenadas (0, 0) y (2, 3). Es muy probable que hayan rescatado de sus cursos de bachillerato que para calcular el valor de la pendiente de una recta es necesario utilizar el cociente de la diferencia de las ordenadas y de las abscisas.



	1.1	1.2	1.3
1		x	
2		x	
3		x	
4		x	
5		x	
6		x	
7		x	
8		x	
9	x		
10		x	
11		x	
12		x	
13		x	
14		x	
15		x	
16		x	
17		x	
18		x	
19		x	
20		x	
21		x	
22		x	
23		x	
24		x	
25		x	
26		x	
27		x	
28		x	
29	x		
30		x	
Total	2	28	0
%	6.67	93.33	0

5.4.15 **Tabla XV**

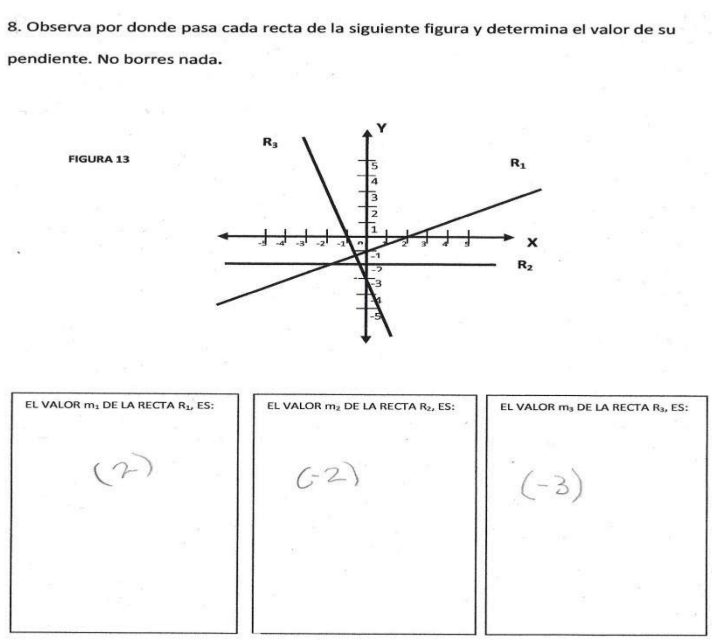
Para la FIGURA 13.
Para la Recta R_1

Aspectos observados

1.1 Relacionado con determinar el valor de la pendiente.
1.2 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.3 No contestó ó presenta dificultades.

Los estudiantes relacionan el valor que se pide de la pendiente, con los valores en que la recta intercepta tanto en el eje *x* como en el eje *y*, pues las respuestas que ofrecen en este apartado es que el valor de la pendiente es de 2 ó -1.
Es muy probable que su reflexión se base en el tema del Método de las intersecciones para el trazado de graficas en donde "Las soluciones de una ecuación de dos variables que por lo general son más fáciles de encontrar, son aquéllas en las que ya sea la primera componente, o la segunda, es 0", utilizando el método anterior se pueden encontrar pares ordenados del tipo (0, a) y (b, 0), donde *a* y *b* son constantes, localizando los valores *a* y *b* en un sistema de ejes coordenados podemos trazar una recta.

Dos estudiantes determinan el valor de la pendiente mediante el cociente de diferencias $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Es muy probable que dichos estudiantes hayan rescatado de sus cursos de precálculo que para determinar el valor de la pendiente de una recta se hace necesario localizar dos puntos sobre la misma.



	1.1	1.2	1.3
1		x	
2		x	
3		x	
4		x	
5		x	
6		x	
7		x	
8		x	
9	x		
10		x	
11		x	
12		x	
13		x	
14		x	
15		x	
16		x	
17		x	
18		x	
19		x	
20		x	
21		x	
22		x	
23		x	
24		x	
25	x		
26		x	
27		x	
28		x	
29		x	
30		x	
Total	2	28	0
%	6.67	93.33	0

5.4.16 **Tabla XVI**

Para la FIGURA 13.
Para la Recta R_2

Aspectos observados

1.1 Relacionado con determinar el valor de la pendiente.
1.2 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.3 No contestó o presenta dificultades.

Más de la mitad de los estudiantes respondieron que el valor de la pendiente es -2. Es muy probable que su reflexión a este apartado esté relacionado con el tema visto en precálculo para el trazo de la gráfica de una recta paralela al eje *x*, a cierta distancia hacia abajo de este. Un estudiante contesto ($-\alpha$, α). Es muy probable que su respuesta esté relacionada con el tema de la recta de los Números Reales en donde se maneja que éstos van desde $-\alpha$, hasta α.

Más de una tercera parte de los estudiantes encontró el valor pedido. Es muy probable que los estudiantes hayan rescatado de sus estudios de precálculo el hecho de que en toda recta horizontal el cociente de diferencias $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ siempre es cero.

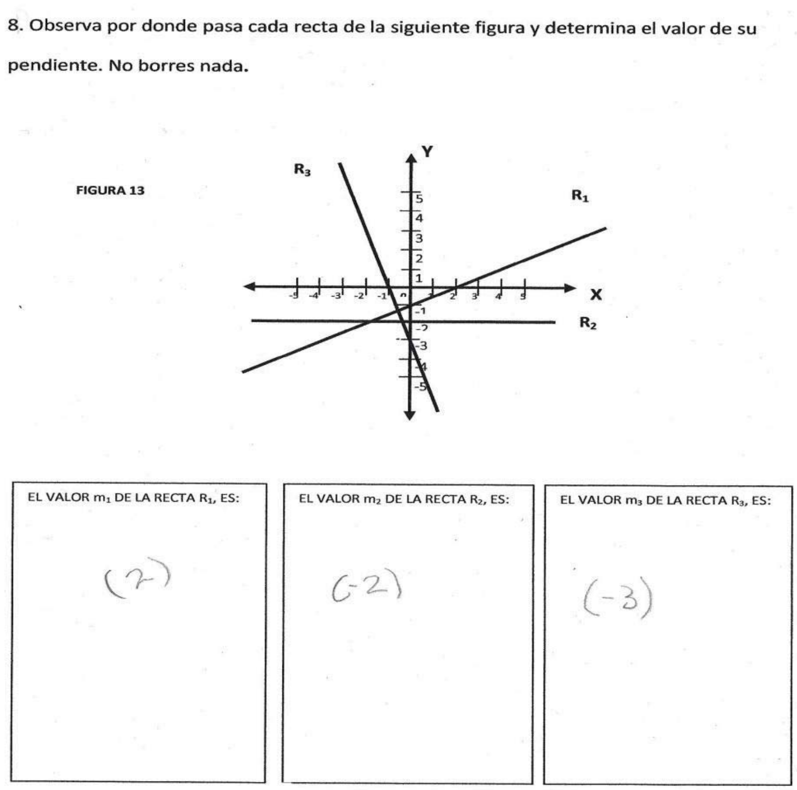

8. Observa por donde pasa cada recta de la siguiente figura y determina el valor de su pendiente. No borres nada.

FIGURA 13

EL VALOR m_1 DE LA RECTA R_1, ES: (2)

EL VALOR m_2 DE LA RECTA R_2, ES: (-2)

EL VALOR m_3 DE LA RECTA R_3, ES: (-3)

	1.1	1.2	1.3
1	x		
2		x	
3		x	
4		x	
5		x	
6	x		
7	x		
8	x		
9	x		
10	x		
11		x	
12	x		
13		x	
14		x	
15		x	
16		x	
17		x	
18		x	
19	x		
20		x	
21		x	
22		x	
23		x	
24		x	
25	x		
26	x		
27		x	
28		x	
29	x		
30		x	
Total	11	19	0
%	36.67	63.33	0

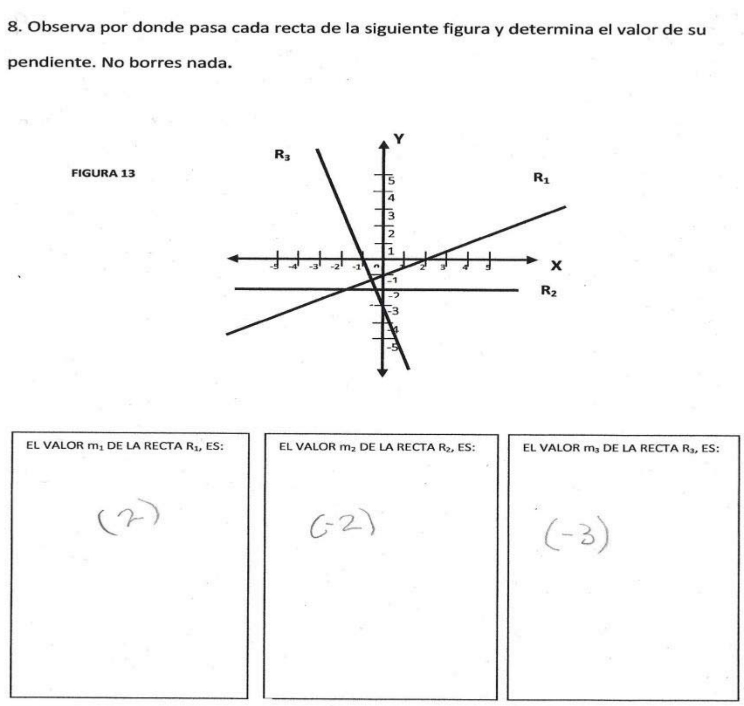
5.4.17 **Tabla XVII**

Para la FIGURA 13.
Para la Recta R_3
Aspectos observados

1.1 Relacionado con determinar el valor de la pendiente.
1.2 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.3 No contestó o presenta dificultades.

Más de tres cuartas partes de los estudiantes relacionan el valor que se pide de la pendiente, con los valores en que la recta intercepta tanto en el eje *x* como en el eje *y*, pues las respuestas que ofrecen en este apartado es que el valor de la pendiente es de -1 ó -3. Es muy probable que su reflexión se base en el tema del "Método de las intersecciones para el trazado de graficas" en donde "Las soluciones de una ecuación de dos variables que por lo general son más fáciles de encontrar, son aquéllas en las que ya sea la primera componente, o la segunda, es 0", utilizando el método anterior se pueden encontrar pares ordenados del tipo (0, *a*) y (*b*, 0), donde *a* y *b* son constantes, localizando los valores *a* y *b* en un sistema de ejes coordenados podemos trazar una recta.

Una quinta parte de los estudiantes determinan el valor de la pendiente mediante el cociente de diferencias $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.Es muy probable que dichos estudiantes hayan rescatado de sus cursos de precálculo que para determinar el valor de la pendiente de una recta se hace necesario localizar dos puntos sobre la misma.



	1.1	1.2	1.3
1		x	
2		x	
3		x	
4		x	
5		x	
6		x	
7		x	
8		x	
9	x		
10		x	
11	x		
12		x	
13		x	
14		x	
15	x		
16	x		
17	x		
18		x	
19		x	
20		x	
21	x		
22		x	
23		x	
24		x	
25		x	
26		x	
27		x	
28		x	
29		x	
30		x	
Total	6	24	
%	20	80	0

5.4.18 **Tabla XVIII**

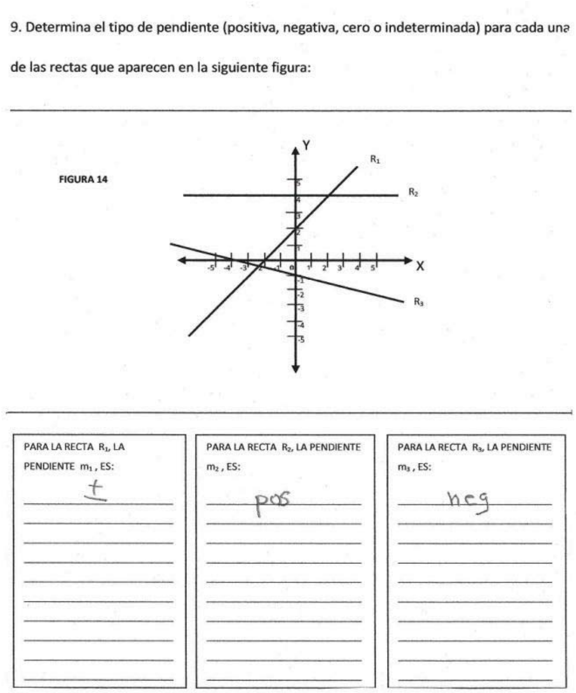
Para la FIGURA 14.
Para la recta R_1

Aspectos observados

1.1 Relacionado con que la recta R_1 tiene pendiente positiva.
1.2 Relacionado con que la recta R_1 tiene pendiente negativa.
1.3 Relacionado con que la recta R_1 tiene pendiente cero.
1.4 Relacionado con que la recta R_1 tiene pendiente indeterminada
1.5 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.6 No contestó ó presenta dificultades.

Menos de un tercio de los estudiantes indican en este apartado que la recta R_1 tiene pendiente negativa. Es muy probable que su reflexión esté relacionada con el tema del método de las intersecciones para el trazo de las graficas en donde comúnmente se toman pares ordenados en las intersecciones de la recta con el eje *x* ó eje *y*, para el caso de la recta R_1, el par ordenado (-2,0) es el par en que la recta intercepta al eje *x* del lado negativo.

Seis estudiantes manifiestan que la recta R_1 tiene pendiente indeterminada. Es muy probable que el estudiante lo relacione con el tema del dominio y rango de una función en donde se menciona que "El intervalo infinito ($-\alpha$, $+\alpha$) se puede considerar abierto ó cerrado, ya que puede contener ó no contener a sus extremos *a* y *b*", es decir pueda causarles confusión la interpretación de indeterminado con infinito.



	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
1				x		
2					x	
3				x		
4		x				
5				x		
6				x		
7	x					
8	x					
9		x				
10		x				
11					x	
12		x				
13		x				
14		x				
15		x				
16	x					
17	x					
18	x					
19					x	
20		x				
21		x				
22					x	
23					x	
24				x		
25	x					
26					x	
27					x	
28	x					
29	x					
30				x		
Total	8	9	0	6	7	0
%	26.67	30	0	20	23.33	

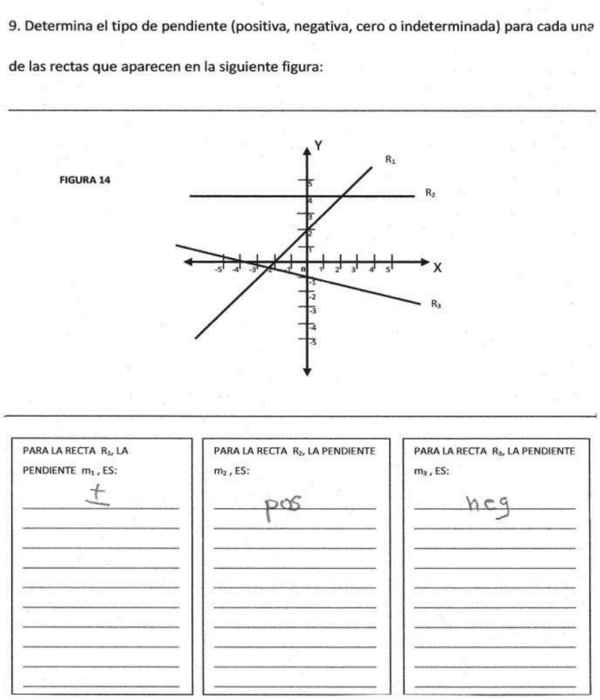
5.4.19 **Tabla XIX**

Para la FIGURA 14.
Para la recta R_2

Aspectos observados

1.1 Relacionado con que la recta R_2 tiene pendiente positiva.
1.2 Relacionado con que la recta R_2 tiene pendiente negativa.
1.3 Relacionado con que la recta R_2 tiene pendiente cero.
1.4 Relacionado con que la recta R_2 tiene pendiente indeterminada
1.5 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.6 No contesto o presenta dificultades.

Un tercio de los estudiantes indican en este apartado que la recta R_2 tiene pendiente positiva. Es muy probable que su reflexión esté relacionada con el tema de " Graficas de pares ordenados" en donde se menciona que construyendo un par de graficas rectilíneas perpendiculares , llamadas ejes, en algún punto de un plano, es posible asignar un par ordenado de números a cada punto en plano, haciendo referencia a la distancia perpendicular del punto a cada una de las graficas rectilíneas que se intersecan. Si la primera componente es positiva, el punto se encuentra a la derecha del eje vertical, si es negativa, está a la izquierda. Si la segunda componente es positiva , el punto está arriba del eje horizontal , si es negativa, se encuentra abajo. Una quinta parte de los estudiantes contesta el valor de la constante 4. Muy probablemente porque la recta interseca al eje y en el punto (0, 4), haciendo válido el principio anterior de Graficas de pares ordenados.



	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
1				x		
2					x	
3	x					
4				x		
5				x		
6	x					
7			x			
8	x					
9	x					
10			x			
11			x			
12			x			
13				x		
14				x		
15	x					
16	x					
17	x					
18	x					
19					x	
20				x		
21	x					
22			x			
23					x	
24	x					
25			x			
26					x	
27					x	
28				x		
29			x			
30					x	
Total	10	0	7	7	6	0
%	33.33	0	23.33	23.33	20	0

5.4.20 **Tabla XX**

Para la FIGURA 14.
Para la recta R_3

Aspectos observados

1.1 Relacionado con que la recta R_3 tiene pendiente positiva.
1.2 Relacionado con que la recta R_3 tiene pendiente negativa.
1.3 Relacionado con que la recta R_3 tiene pendiente cero.
1.4 Relacionado con que la recta R_3 tiene pendiente indeterminada
1.5 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.6 No contesto o presenta dificultades.

Aproximadamente la mitad de los estudiantes, identifican que la pendiente de la recta R_3, es negativa. Es muy probable que rescaten esta información de sus cursos de precálculo en donde se menciona que todo valor que se encuentre a la izquierda o abajo del origen de un sistema de ejes coordenado es negativo.

Los estudiantes hacen poca referencia a que la recta R_3 tiene pendiente cero. Es muy probable que esto lo rescaten de sus cursos de precálculo donde se trabaja el concepto de que toda recta que este inclinada tiene pendiente.

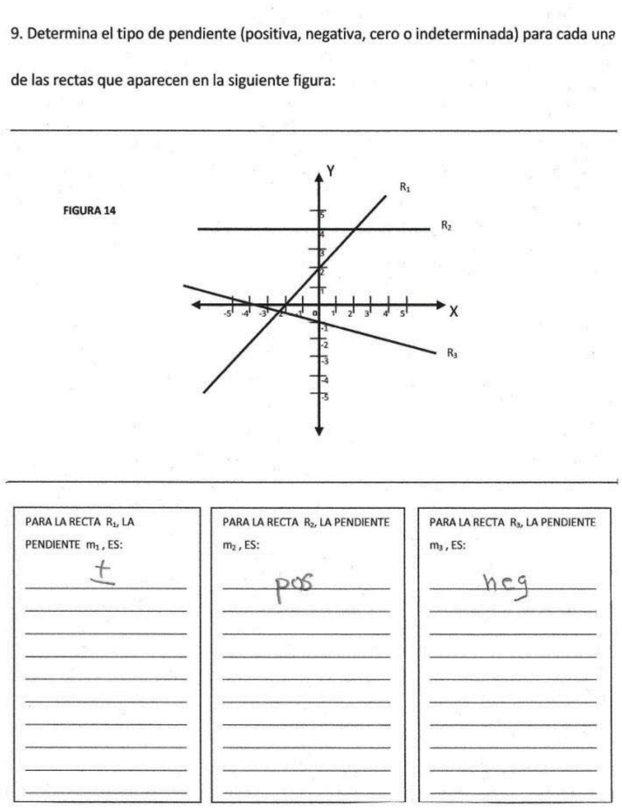

9. Determina el tipo de pendiente (positiva, negativa, cero o indeterminada) para cada una de las rectas que aparecen en la siguiente figura:

FIGURA 14

PARA LA RECTA R_1, LA PENDIENTE m_1, ES: +

PARA LA RECTA R_2, LA PENDIENTE m_2, ES: pos

PARA LA RECTA R_3, LA PENDIENTE m_3, ES: neg

	1.1	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**
1				x		
2					x	
3				x		
4	x					
5		x				
6		x				
7		x				
8		x				
9			x			
10	x					
11					x	
12		x				
13	x					
14	x					
15		x				
16		x				
17		x				
18		x				
19					x	
20	x					
21		x				
22					x	
23					x	
24		x				
25		x				
26					x	
27					x	
28		x				
29				x		
30					x	
Total	5	13	1	3	8	0
%	16.67	43.33	3.33	10	26.67	

5.4.21 **Tabla XXI**

Para la FIGURA 15.

Aspectos observados

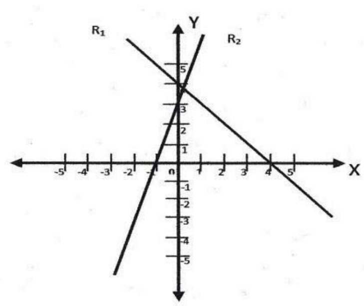
1.1 Relacionado con que la recta R_1 tiene mayor pendiente.
1.2 Relacionado con que la recta R_2 tiene mayor pendiente
1.3 Otras respuestas no consideradas en el estudio.
1.4 No contesto o presenta dificultades.

Dos terceras partes de los estudiantes contestaron que la recta de mayor pendiente es la R_2, haciendo referencia a que tiene mayor inclinación y/o mayor ángulo que la recta R_1. Teniendo en cuenta los antecedentes académicos de los estudiantes es muy probable que esta pregunta los remita a rescatar información trabajada en sus cursos de Geometría y Trigonometría en donde aparecen problemas a resolver como el siguiente. "Un constructor desea construir una rampa inclinada de 7.36 m de largo que se levante a una altura de 1.52 m del suelo. Calcular el ángulo que debe hacer la rampa con la horizontal.

Una tercera parte de los estudiantes identifican que la recta R_1 tiene mayor pendiente. Es muy probable que sus reflexiones estén más enfocadas en la posición del objeto, que en el escenario donde este se encuentra .

10.- Observa las rectas y determina cual tiene mayor pendiente.

FIGURA 15



Utiliza este espacio para escribir tus observaciones.

Observando el siguiente plano observamos que la linea R1 aproximadamente tiene una inclinacion a 45 grados.
Por otra parte R2 observece que tiene un angulo de inclinacion mayor a 45°
por lo tanto R2 es la de mayor pendiente

	1.1	1.2	1.3	1.4
1		x		
2	x			
3		x		
4	x			
5		x		
6		x		
7		x		
8	x			
9		x		
10	x			
11		x		
12		x		
13		x		
14	x			
15		x		
16	x			
17	x			
18		x		
19	x			
20	x			
21		x		
22		x		
23		x		
24		x		
25		x		
26		x		
27		x		
28		x		
29		x		
30	x			
Total	10	20	0	0
%	33.33	66.67	0	0

5.5 Conclusiones del capitulo.

En resumen, observamos que estudiantes del Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli, que cursan la asignatura de Matematicas I (Cálculo Diferencial) en el primer semestre de la carrera de Ingeniería Industrial, presentan diferentes formas de trabajar, conceptualizar e interpretar la pendiente. Esta exploración nos ha permitido obtener información verídica emitida por los estudiantes en relación a la interpretación y significado que le dan al concepto de la pendiente. El resultado de esta exploración, refleja (por parte de estudiantes) una ideología derivada del discurso matemático escolar (muy relacionado con el análisis de libros de texto), que sobre el concepto de pendiente, adquirieron en sus cursos de precálculo en el actual modelo de enseñanza (básicamente sobre pendiente estática), lo que coincide con nuestro problema de investigación: *el discurso matemático escolar no facilita la construcción de la noción de pendiente lo cual es necesario para entender conceptos de calculo elementales*. Derivado de lo anterior, este resultado nos permite comprobar nuestra hipótesis de investigación: *el actual modelo de enseñanza de la pendiente, no permite que estudiantes construyan la noción de tangente variacional.*

.

Capítulo 6

Conclusiones

En las respuestas que estudiantes del Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli ofrecen en las actividades planteadas en el Capítulo 5 "Exploración en el aula de clase", se muestran evidencias sobre los efectos que tiene la educación tradicional (los estudiantes presentan problemas para descontextualizar el concepto de pendiente visto en sus cursos de precálculo). La investigación en los libros de texto, nos ha ayudado a identificar la forma en que el concepto de pendiente se presenta (cociente de diferencias, inclinación, ángulo de inclinación, función trigonométrica, porcentaje). Consideramos que la gran diversidad para presentar el concepto de pendiente (el cuál es contextualizado por el profesor, para posteriormente descontextualizarlo durante su discurso matemático escolar en el aula), influye en lo que los estudiantes aprenden. Lo anterior incide desde luego en nuestro problema de investigación: *el discurso matemático escolar no facilita la construcción de la noción de pendiente lo cual es necesario para entender conceptos de calculo elementales*.

En este apartado, también presentamos las conclusiones generales de la investigación, mostramos "coincidencias", "similitudes" y "diferencias" entre los resultados encontrados en el capitulo "La exploración en el aula de clases" y el capítulo "Antecedentes"; entre el capítulo "Antecedentes" y el capítulo "Analisis del discurso de los libros"; entre el capitulo "Antecedentes" y el capitulo "Analisis histórico-epistemológico". Mencionamos el impacto de nuestro diseño experimental en relación de nuestro problema de investigación, identificamos aspectos que no tienen relación alguna con nuestra investigación, reconocemos el impacto de nuestro diseño experimental en relación a la esencia de nuestra hipótesis de investigación y sugerimos nuevos trabajos que se pueden realizar a partir de estas conclusiones.

6.1 "La exploración en el aula de clases" y los "Antecedentes".

Al analizar los datos, encontramos semejanza entre los resultados del estudio exploratorio con los reportados en el trabajo de:

García (1998): los estudiantes confunden la pendiente con ángulo de inclinación. Esta situación se presenta en:

- En la tabla III para la figura 2 correspondiente a la recta $H(x)$, hay estudiantes que confunden el concepto de pendiente con una inclinación, una diagonal ó un ángulo.
- En la tabla XXI, para la figura 15, hay estudiantes que expresan que una recta con respecto a otra tiene mayor ó menor pendiente cuando una de ellas tiene un mayor ó menor ángulo.

Dolores (2004): para el estudiante es más significativo el sistema coordenado (ya que centra sus respuestas en la localización de puntos en donde la recta intercepta al eje "x" o al eje "y") que la idea de pendiente de la recta. Esta situación se presenta en:

- La tabla *VIII* para la figura 5, los estudiantes dan mayor importancia al sistema coordenado que al concepto de pendiente.
- La tabla *XIV* para la figura 12, los estudiantes dan preferencia a localizar puntos en el sistema de referencia que extraer información del mismo para trazar una recta con cierto valor para su pendiente.
- Las tablas *XV* y *XVII* para las figuras 13 para la recta R_1 y la figura 13 para la recta R_3, los estudiantes confunden el determinar el valor de la pendiente de una recta no paralela mostrada en un sistema de ejes cartesiano, con los valores en que dicha recta intercepta tanto al eje x como al eje y.
- La tabla *XVIII* para la figura 14 correspondiente a la recta R_1, los estudiantes confunden el tipo de pendiente de una recta con el valor del punto en donde la misma intercepta a los ejes x ó y.
- La tabla *XIX* para la figura 14 correspondientes a la recta R_2, un tercio de los estudiantes confunden el tipo de pendiente de una recta con el valor del ó los puntos por donde pasa la misma en un sistema de referencia.

Observamos algunas diferencias en relación al tratamiento que estudiantes hacen respecto al Teorema de Tales de Mileto durante la experimentación, principalmente en:

- En la tabla X para la figura 7, los estudiantes confunden la proporcionalidad entre longitudes que marca el teorema de Tales, con las superficies de los triángulos formados en la figura utilizada para la demostración de dicho Teorema.
- En la tabla XII para la figura 9, los estudiantes confunden el calcular áreas, ángulos, hipotenusas con obtener valores de longitudes para comparar la proporcionalidad indicada en el Teorema de Tales.
- En la tabla XIII de la figura 10, los estudiantes confunden los conceptos de trigonometría al utilizarlos para determinar el valor de la longitud de un segmento (mostrado en la figura de un triángulo rectángulo) con la utilización del cociente de proporcionalidad indicado por el teorema de Tales.

Hallamos similitud con lo reportado por Dolores y Catalán (2000): *los estudiantes muestran dificultad para extraer información de las graficas*. Situación presentada en:

- La tabla *I* para la figura 1, correspondiente a la recta F(x): un mínimo de estudiantes presenta dificultades para extraer información, respecto al sistema de ejes cartesiano, cuando en él se presenta la grafica de una curva.

En el capitulo "Antecedentes de Investigación" en donde abordamos el trabajo de Martínez (2005), coincidimos con el autor en que: algunos profesores mantienen la idea de que la razón de cambio instantánea numéricamente vale lo mismo que la pendiente de la recta tangente, sin embargo, omiten el hecho de que la razón de cambio instantánea es variable. En nuestra experimentación no encontramos evidencia de este hallazgo que se reporta.

Encontramos aspectos parecidos entre los resultados del estudio exploratorio con el trabajo de Serna (2007): "Algunos profesores no consideran que la pendiente de la recta tangente a un punto cambia (pendiente dinámica)". Esta situación se presenta en:

- La tabla IV para la recta F(x) correspondiente a la figura 3, un mínimo de estudiantes, hacen referencia al cambio de la pendiente de la recta tangente en diferentes puntos de la grafica de la función.

En la etapa de experimentación encontramos aspectos mencionados por los estudiantes que consideramos no tiene relación directa con el propósito de nuestro estudio, dichos aspectos están contemplados en:

- La tabla *IV* para la figura 3 correspondiente a las gráfica F(x), la mitad de los estudiantes confunden el trazar una recta tangente en tres puntos diferentes de dicha gráfica con unirlos (uno tras otro) mediante una línea recta.
- La tabla V para la figura 4 correspondiente a la grafica G(x), sucede exactamente lo del punto anterior, pero ahora para tres cuartas partes de estudiantes.
- La tabla XVI para la figura 13 correspondiente a la recta R_2, en donde un estudiante confunde determinar el valor de la pendiente de una recta horizontal con el intervalo infinito ($-\alpha$, $+\alpha$).

6.2 "Antecedentes" y "Analisis del discurso de los libros".

Examinamos a continuación las conclusiones del capítulo "Antecedentes de Investigación", con las que obtuvimos en el capitulo IV "Analisis del discurso de los libros" en donde mostramos coincidencias, similitudes y diferencias.

Encontramos características comunes en las conclusiones del estudio realizado por García (1998): "Los estudiantes confunden el concepto de pendiente de la recta con el ángulo de inclinación", con las obtenidas respecto al análisis del:

- Libro de Fleming y Varberg (1991) en relación a que presentan el concepto de pendiente tomando el ángulo de inclinación de la recta.

- Libro de Granville (2008). El autor relaciona la tangente del ángulo de inclinación de una recta con la pendiente de la recta tangente a la curva, haciendo notar que la pendiente toma diferentes valores, es decir que es variable.

En la parte que analizamos de los trabajos de Dolores (2004) en donde concluimos que para el estudiante es más significativo el sistema coordenado que la idea de pendiente de la recta. No encontramos coincidencias ó similitudes de este estudio respecto a los libros analizados.

Encontramos similitud de las conclusiones de la investigación de Dolores y Catalán (2000): "El estudiante no identifica el signo de la pendiente", con las conclusiones obtenidas respecto a los libros de:

- Dolciani, Berman y Wooton (1998) en donde el concepto de pendiente es tratada como un porcentaje obtenido de la interpretación en el planteamiento de una cuestión física, dejándose de lado tanto el cambio que ésta puede sufrir, tanto el signo que en un momento dado puede tener.
- Swokowski y A-cole (1998): Mencionan la variabilidad de la pendiente la cual es representada por la letra $m = \dfrac{cambio..en..y}{cambio..en..x}$ pudiendo su valor ser: positivo, cero, negativo ó indeterminado.

Encontramos semejanza en las conclusiones del trabajo de Martínez (2005) "algunos profesores mantienen la idea de que la razón de cambio instantánea, numéricamente vale lo mismo (valor constante) que la pendiente de la recta tangente", con las conclusiones obtenidas respecto al libro de:

- Bittinger (1999): El autor relaciona el concepto de pendiente con la inclinación de una línea, asignándole el termino de "constante".

Encontramos resultados parecidos en las conclusiones del estudio de Serna (2007): "Algunos profesores no consideran que la pendiente de la recta tangente a un punto cambia (pendiente dinámica)", con las conclusiones obtenidas respecto de los libros de:

- Barnett, (1997) en donde encontramos que el autor presenta el concepto de pendiente sin mencionarnos que ésta tiene una característica cambiante.
- Granville (2008) en donde el autor hace notar que la pendiente toma diferentes valores, es decir que es variable.
- Zill (1987): El autor nos en la definición de pendiente los conceptos de :cambio y de límite.
- Edwards y Penney (1996): Ilustran el concepto de pendiente de una recta tangente de una función $f(x)$, en un punto arbitrario como la derivada de la función.
- Leithold (1998): El autor utiliza el concepto de límite para presentar el concepto de pendiente.
- Swokowsky (1989): La pendiente de una recta tangente a un punto de una función $f(x)$ puede determinarse aproximando la pendiente de una recta secante por la derecha ó por la izquierda de un punto fijo.

6.3 "Antecedentes" y "Analisis histórico-epistemológico".

En estas sección, comparamos las conclusiones del capítulo de los "antecedentes de investigación" con las conclusiones obtenidas del "análisis histórico de los libros" en donde mostramos coincidencias, similitudes, diferencias.

Encontramos algunas similitudes en las conclusiones que hicimos en el estudio de García (1998), en la investigación de Dolores, (2004), en la investigación de Dolores y Catalán (2000), en el trabajo de Martínez (2005) y en el análisis de Serna (2007) en donde se mencionan conceptos de cambio y dinamismo, con el análisis histórico del concepto de tangente (concepto estrechamente relacionado con el concepto de pendiente) en donde ésta es tratada en forma variable y/o cambiante.

6.4 El impacto de nuestro diseño experimental en relación de nuestro problema de investigación.

En esta sección presentamos un análisis de cómo, la aportación del diseño experimental presentado en nuestra investigación impacta en relación a la esencia de nuestro problema de investigación (identificar las dificultades que experimentan los estudiantes que cursan la materia de Calculo Diferencial en el nivel superior en relación a la interpretación del concepto de pendiente estática y dinámica).

- Un alto porcentaje de los estudiantes confunde el concepto de pendiente con una inclinación, una diagonal ó un ángulo.
- Dos terceras partes de los estudiantes confunden el concepto de pendiente con el ángulo al expresar que una recta con respecto a otra tiene mayor ó menor pendiente cuando una de ellas tiene un mayor ó menor ángulo.
- La mayoría de los estudiantes confunden el extraer información del escenario dónde se presenta una recta con una cierta pendiente para determinar su valor, con el hecho de sólo localizar puntos sobre la recta mostrada, dando mayor importancia al sistema coordenado que al concepto de pendiente.
- la mayoría de los estudiantes confunden el localizar puntos en el sistema de referencia para trazar una recta con cierto valor para su pendiente , con la utilización del cociente de diferencias $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para trazar la recta con la pendiente solicitada.
- Casi el total de los estudiantes confunden el determinar el valor de la pendiente de una recta no paralela mostrada en un sistema de ejes cartesiano, con los valores en que dicha recta intercepta tanto al eje x como al eje y.
- Menos de un tercio de los estudiantes confunden el tipo de pendiente de una recta con el valor del punto en donde la misma intercepta a los ejes x o y, es decir da importancia al sistema de ejes coordenados y no al tipo de pendiente.
- Un tercio de los estudiantes confunden el tipo de pendiente de una recta con el valor del ó los puntos por donde pasa la misma en un sistema de referencia.

- Concluimos que el estudiante presenta dificultades para extraer información de la pendiente al presentar la grafica de una recta no paralela al eje *x* o al eje *y*.
- Más de tres cuartas partes de los estudiantes se confunden al utilizar las áreas que los triángulos forman, para determinar si la relación de proporcionalidad indicada por el teorema de Tales ($\frac{CA}{AB}=\frac{DE}{EB}$) es mayor, menor ó igual con el emplear los valores que en dicha figura se otorgan determinar si dicha proporcionalidad es menor, mayor o igual.
- Más de la mitad de los estudiantes confunden la proporcionalidad entre longitudes que marca el teorema de Tales con la superficie que los triángulos forman para determinar si la proporcionalidad es mayor, meno o igual.
- Un estudiante escribe como respuesta: "Si es mayor pero no es mucha la diferencia en AC y ED". El estudiante confunde la proporcionalidad entre longitudes con las dimensiones de las longitudes de las rectas, para determinar si la proporcionalidad indicada por el teorema de Tales es mayor, menor o igual.
- La mayoría de los estudiantes confunden el calcular: áreas, ángulos, hipotenusas para comparar la proporcionalidad ($\frac{CA}{AB}=\frac{DE}{EB}$) con la utilización de los datos proporcionados en la figura 9 para determinar y comparar la proporcionalidad indicada por el teorema de Tales.
- La mayoría de los estudiantes confunde, el utilizar los conceptos de trigonometría para determinar el valor de la longitud de un segmento formado en la figura de un triángulo rectángulo mostrado en un sistema de ejes cartesiano, con la utilización el cociente de proporcionalidad ($\frac{CA}{AB}=\frac{DE}{EB}$) indicado en teorema de Tales.
- Un mínimo de estudiantes presenta dificultades para extraer información respecto al sistema de ejes cartesiano cuando en se presenta la grafica de una curva, pues dan preferencia al objeto que al escenario donde este se encuentra.
- Tres cuartas partes de los estudiantes confunden el concepto de trazar en dos puntos diferentes localizados en la grafica de una función $f(x)$ una recta tangente, con el sólo hecho de unir éstos dos puntos mediante una línea recta.

- Un mínimo de estudiantes (dos), hacen referencia al cambio de la pendiente de la recta tangente en diferentes puntos de la grafica de una función $f(x)$.

6.5 Sin relación.

- Un estudiante expresa que el valor de la pendiente de una recta horizontal, es dado por el intervalo $(-\alpha,+\alpha)$.

6.6 El impacto de nuestro diseño experimental en relación a la esencia de nuestra hipótesis de investigación.

Presentamos a continuación una argumentación de cómo la aportación que el diseño experimental presentado en nuestra investigación impacta la esencia de nuestra hipótesis de investigación (Si el estudiante comprende que el valor y significado de la pendiente está inmerso en el concepto de la recta tangente, hecho que se contempla cuando se pide al estudiante, hallar la pendiente de la recta tangente de una función en un punto dado y que parte del teorema que llevo a Leibniz al descubrimiento del Calculo Diferencial "*El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en aquel punto*" citado en (Granville, 1996 pagina 33), entonces será capaz de interpretar su variación.

- De los resultados de la tabla *I* para la Figura 1, correspondiente a la recta $F(x)$, observamos que más de la mitad de los estudiantes identifican aspectos morfológicos de la curva así como de sus continuidad y una décima parte de ellos identifica puntos críticos de la misma, es decir reconocen aspectos relacionados con el concepto de máximos y mínimos vinculados directamente con el concepto de la tangente dinámica.
- De los resultados de la tabla *IV* para la recta $f(x)$ correspondientes a la figura 3, observamos que un mínimo de estudiantes (dos), hacen referencia al cambio de la pendiente

de la recta tangente en diferentes puntos de la grafica de una función $f(x)$, es decir reconocen aspectos relacionados con el concepto de la tangente dinámica.

- De los resultados de las tablas *V* para la figura 4 correspondientes a las rectas $G(x)$, un mínimo de estudiantes hacen el trazo correcto de una línea tangente a en dos puntos diferentes marcados en la gráfica de una parábola con centro en el origen y que abre hacia arriba, es decir reconocen aspectos relacionados con la tangente dinámica.
- De los resultados dados en la tabla XVIII para la figura 14 correspondientes a la recta R_1, aproximadamente un tercio de los estudiantes determinan correctamente el tipo de pendiente (positiva) correspondiente a esta recta, es decir reconocen aspectos relacionados con el concepto de la pendiente dinámica.
- De los resultados dados en la tabla XIX para la figura 14 correspondientes a la recta R_2, existe entre los alumnos ausencia de reconocimiento que el tipo de pendiente de esta recta es cero, es decir no identifican aspectos relacionados con el concepto de la pendiente dinámica.
- De los resultados dados en la tabla XX para la recta R_3, la mayoría de los estudiantes contestó correctamente el tipo de pendiente (negativa) que tiene la recta, es decir, reconocen aspectos relacionados con el concepto de pendiente dinámica.

6.7 Propuesta de nuevos trabajos que se pueden realizar a partir de la conclusión de esta investigación.

Aplicación de Diseño de experimentos que permita al estudiante comprender que el valor y significado de la pendiente está inmerso en el concepto de la recta tangente, hecho que se contempla cuando se pide al estudiante, hallar la pendiente de la recta tangente de una función en un punto dado y que parte del teorema que llevo a Leibniz al descubrimiento del Calculo Diferencial "*El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en aquel punto"* citado en (Granville, 1996 pagina 33).

- Análisis del discurso matemático en el aula relacionado al enlace del concepto de pendiente estática a pendiente dinámica.

- Análisis del discurso matemático en el aula relacionado al enlace del concepto de pendiente estática a pendiente dinámica como un preámbulo al concepto de tangente estática a tangente dinámica.

El confrontar las conclusiones entre los resultados encontrados entre el capitulo "La exploración en el aula de clases" y el capítulo de "Antecedentes", entre el capítulo "Antecedentes" y el capítulo "Analisis del discurso de los libros", entre el capitulo "Antecedentes" y el capitulo "Analisis histórico-epistemológico", nos ha permitido comprobar que se presentan diferentes formas de trabajar, conceptualizar e interpretar la pendiente, lo *que no facilita la construcción de la noción de pendiente lo cual es necesario para entender conceptos de calculo elementales.* El resultado de esta investigación refleja (por parte de estudiantes) una ideología derivada del discurso matemático escolar que sobre el concepto de pendiente adquirieron en sus cursos de precálculo (básicamente sobre pendiente estática) y que por tanto nos permite comprobar nuestra hipótesis de investigación: *el actual modelo de enseñanza de la pendiente, no permite que estudiantes. construyan la noción de tangente variacional.* Con esta investigación, conocemos interpretaciones que tienen estudiantes en relación al concepto de pendiente, por lo que coincidimos con (Montiel, 2005, página 113). " *El discurso matemático escolar refleja una ideología sobre la forma de presentar y tratar (didácticamente) los objetos matemáticos en clase y que a la larga se convierte en un conjunto de restricciones, implícitas o explícitas, que norman la actividad áulica y al discurso escolar mismo*".

Referencias

Arana, P., Cazarez, S., Minor, E., Lavin, E., Hernández, R., Márquez, A., Mexica, E., Martínez, A., Cerna, J. y Hernández, R. (1988*). Matemáticas III Geometría y Trigonometría*. México, D.F, Instituto Politécnico Nacional.

Barnett, R. (1997). *Álgebra*. México: Mc. Graw-Hill.

Bittinger, M L. (1999). *Intermediate Algebra.* (8 ed.). USA: Addison-Wesley.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 17, 1-9.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: El caso del máximo de una función en la obra de L´Hospital y María G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Mathematica Educativa,* 9(2), 253-265.

Dolciani, M., Berman, S., Wooton, W. (1998). *Álgebra moderna y trigonometría. Estructura y método libro II*. México: Publicaciones Cultural.

Dolores, C. & Catalán, A. (2000). El comportamiento variacional de la función lineal: Una experiencia didáctica con estudiantes del bachillerato. En R. M. Farfán, C. E. Matias, D. Sánchez & A. Tavares (Eds.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13,* 36–41.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones de los estudiantes de Bachillerato. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7(3), 195-218.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en la matemática teórica a la investigación en la matemática educativa: Un viaje personal. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol.3, Núm. 1, marzo , 2000. pp. 47-70.*

Drooyan, I. (1991). *Elementos de álgebra para bachillerato.* México: Editorial Limusa.

Edwards, y Penney, (1996). *Cálculo con geometría analítica.* (4ª. Ed.). México: Prentice Hall.

Fleming, W. y Varberg, D. (1991). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.

García, M. (1998*). Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Garza, B. (2001). *Cálculo deferencial matemáticas IV.* México: Dirección General de Educación Tecnológica Industrial.

Granville, W. A. (1996). *Calculo Diferencial e Integral*. México: Limusa.

Granville, W. A. (2008). *Calculo Diferencial e Integral*. México: Limusa.

Leheman, C. (1989). *Geometría Analítica* (13a reimpresión). México: Editorial LIMUSA.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo.* (7ª ed.). México: Oxford University Press.

Martínez, R. (2005). *La pendiente y su variación: Un estudio didáctico y Cognitivo.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad de Guerrero, Facultad de Matemáticas. Guerrero.

Montiel (2002). *Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual*. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN. México.

Montiel (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de doctorado, no publicada. DME-Cinvestav-IPN, México.

Serna, L. (2007). *Estudio socioepistemológico de la tangente*. Tesis de maestría no publicada, CICATA-IPN, México.

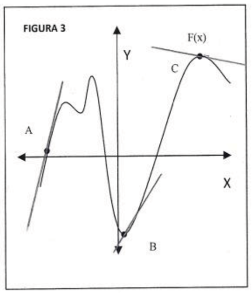
Swokowski, E W. (1989). *Cálculo con geometría analítica.* (2a ed.). México: Editorial Iberoamérica.

Swokowski y A-Cole (1998). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* (10a ed.). México: Editorial Thomson.

Zill, G. (1987). *Cálculo con geometría analítica.* México: Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

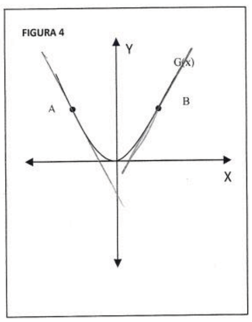
Anexos

2.- En el recuadro de la derecha responde ampliamente lo que se te pide, por favor no borres nada.



TRAZA UNA LÍNEA RECTA TANGENTE A LA CURVA F(x) EN LOS PUNTOS A,B y C, Y ANOTA EN LOS RENGLONES SIGUIENTES SI TUVISTE ALGUNA DIFICULTAD PARA ELLO.

Yo creo que no tuve algun problema en esta grafica

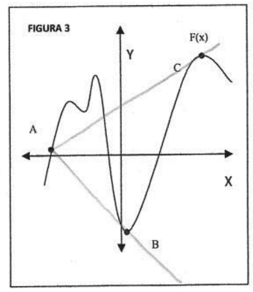


TRAZA UNA LÍNEA RECTA TANGENTE EN LOS PUNTOS A y B , DE LA CURVA G(x) Y ANOTA EN LOS SIGUIENTES RENGLONES SI SON POSITIVAS O NEGATIVAS Y PORQUÉ.

Punto A las lineas son negativas por el lado del eje

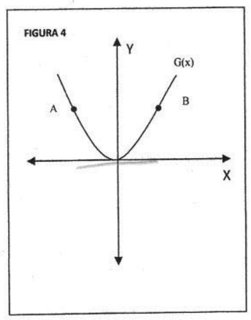
Punto B las lineas son positivas por el lado del eje

2.- En el recuadro de la derecha responde ampliamente lo que se te pide, por favor no borres nada.



TRAZA UNA LÍNEA RECTA TANGENTE A LA CURVA F(x) EN LOS PUNTOS A,B y C, Y ANOTA EN LOS RENGLONES SIGUIENTES SI TUVISTE ALGUNA DIFICULTAD PARA ELLO.

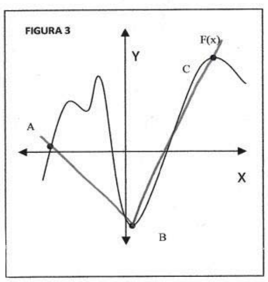
Es no, una linea tangente es la que roza una parte de la curva



TRAZA UNA LÍNEA RECTA TANGENTE EN LOS PUNTOS A y B , DE LA CURVA G(x) Y ANOTA EN LOS SIGUIENTES RENGLONES SI SON POSITIVAS O NEGATIVAS Y PORQUÉ.

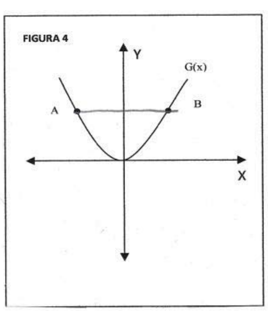
Son negativas ya que está por debajo del origen y esos cuadrantes son negativos

2.- En el recuadro de la derecha responde ampliamente lo que se te pide, por favor no borres nada.



TRAZA UNA LÍNEA RECTA TANGENTE A LA CURVA F(x) EN LOS PUNTOS A,B y C, Y ANOTA EN LOS RENGLONES SIGUIENTES SI TUVISTE ALGUNA DIFICULTAD PARA ELLO.

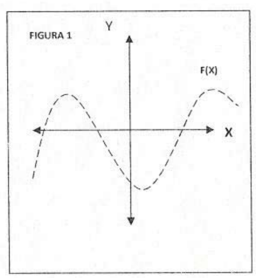
No ninguna



TRAZA UNA LÍNEA RECTA TANGENTE EN LOS PUNTOS A y B , DE LA CURVA G(x) Y ANOTA EN LOS SIGUIENTES RENGLONES SI SON POSITIVAS O NEGATIVAS Y PORQUÉ.

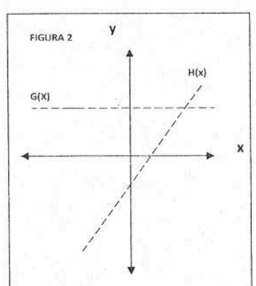
El punto a es negativo porque esta del lado negativo y el punto B es lo contrario

1.- En el recuadro de la derecha responde ampliamente lo que se te pide, por favor no borres nada.



ESCRIBE AQUÍ TODAS LAS CARACTERISTICAS QUE ENCUENTRES DE ESTA LINEA F(x)

.Es una gráfica de una función trigonométrica
.Va de $-\infty$ a $+\infty$
.Cuenta con un dominio y contradominio
.Es una línea punteada.



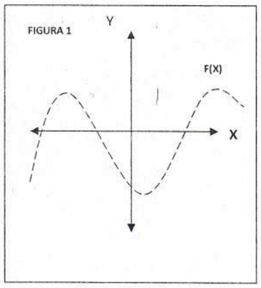
ESCRIBE AQUÍ TODAS LAS CARACTERISTICAS DE LA LINEA G(x)

Esta a 0° (centigrados)
linea horizontal
.Es la gráfica de una funcion

AQUÍ LAS CARACTERISTICAS DE LA LINEA H(X)

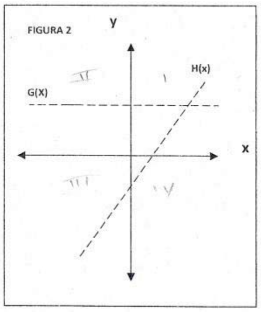
.Tiene una Angulo aprox de 45°
•Es una funcion
va de $(-\infty, +\infty)$
•Tiene ambos angulos opuestos por el vertice

1.- En el recuadro de la derecha responde ampliamente lo que se te pide, por favor no borres nada.



ESCRIBE AQUÍ TODAS LAS CARACTERISTICAS QUE ENCUENTRES DE ESTA LINEA **F(x)**

La linea es punteada,
atraviesa por los 4 cuadrantes,
forma una parabola,
pasa por el eje Y y el eje X
es una funcion

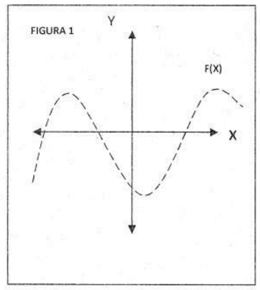


ESCRIBE AQUÍ TODAS LAS CARACTERISTICAS DE LA LINEA G(x) La linea es punteada
es horizontal, paralela al
eje X, pasa por el 1er y 2do
Cuadrante, pasa por el eje Y
intercecta en el 1er cuadrante con
la linea H(X)

AQUÍ LAS CARACTERISTICAS DE LA LINEA **H(X)**

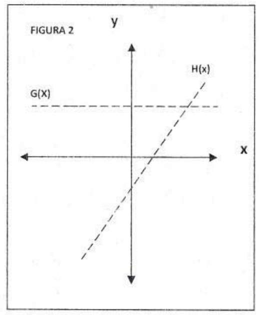
la linea es punteada, es vertical
intercecta con la linea G(X) en
el 1er Cuadrante, pasa por el 1er
3er y 4to Cuadrante

1.- En el recuadro de la derecha responde ampliamente lo que se te pide, por favor no borres nada.



ESCRIBE AQUÍ TODAS LAS CARACTERISTICAS QUE ENCUENTRES DE ESTA LINEA **F(x)**

tienen intersección en
el eje x 3 puntos



ESCRIBE AQUÍ TODAS LAS CARACTERISTICAS DE LA LINEA G(x)

No Recuerdo a ver si
es donde paralelo al eje
x

AQUÍ LAS CARACTERISTICAS DE LA LINEA **H(X)**

No Recuerdo

3.- Observa la siguiente recta la cual pasa por los puntos: A (-2,-2) y B (4,5).

Contesta lo que se te pide en el recuadro inferior de la figura 5 que describe la recta que pasa por dichos puntos.

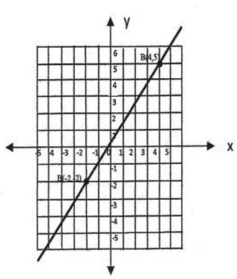


Figura 5

¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta trazada? (-2 ; 2) (4,5)

es positiva porque van los puntos de - a +

Nota: Utiliza los valores de los puntos mencionados

3.- Observa la siguiente recta la cual pasa por los puntos: A (-2,-2) y B (4,5).

Contesta lo que se te pide en el recuadro inferior de la figura 5 que describe la recta que pasa por dichos puntos.

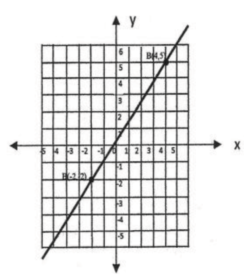


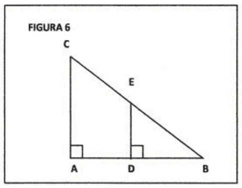
Figura 5

¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta trazada? (1,1)

Nota: Utiliza los valores de los puntos mencionados

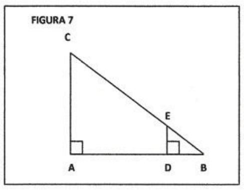
A(-2,-2), (4,5) = 45°

4.- Observa detenidamente cada uno de los siguientes triángulos, responde ampliamente lo que se te pide en el recuadro derecho, no borres nada.



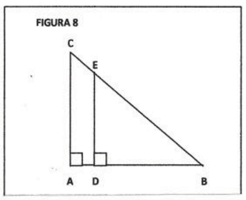
¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{EB}$?

Si es mayor AC/AB que DE/DB.



¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{EB}$?

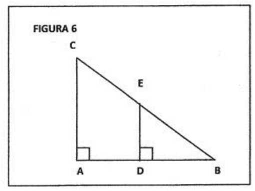
Si es mayor AC/AB que DE/DB



¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{EB}$?

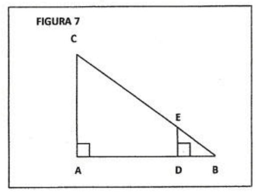
Si es mayor

4.- Observa detenidamente cada uno de los siguientes triángulos, responde ampliamente lo que se te pide en el recuadro derecho, no borres nada.



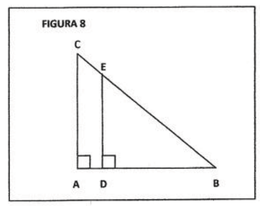
¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{EB}$?

Si porque el cateto opuesto y cateto adyasente es mas largo que DE/DB



¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{EB}$?

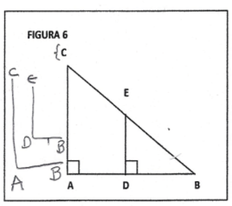
Si porque la superficie es mayor



¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{EB}$?

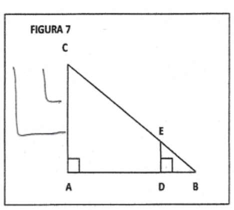
No porque es menor la superficie.

4.- Observa detenidamente cada uno de los siguientes triángulos, responde ampliamente lo que se te pide en el recuadro derecho, no borres nada.



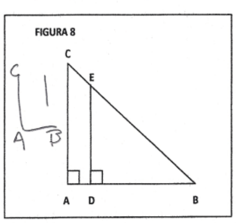
¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{EB}$?

Si es mayor AC/AB que DE/DB.



¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{EB}$?

Si es mayor AC/AB que DE/DB

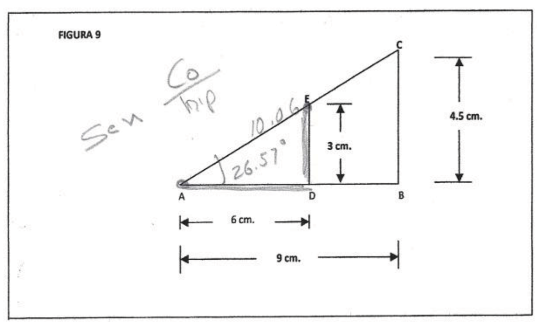


¿Es mayor $\frac{AC}{AB}$ que $\frac{DE}{EB}$?

Si es mayor

5.- En la siguiente figura se muestran los triángulos ABC y ADE, indicando algunas medidas, por ejemplo la del segmento AB, BC, DE y AD que miden 9 cm., 4.5 cm., 3 cm. y 6 cm. respectivamente, a partir de los datos mostrados, calcula los cocientes BC/BA y DE/DA y compara los resultados,

Contesta ampliamente lo que se te pide en el recuadro de debajo de dicho triangulo



¿QUE ES LO QUE OBTIENES?, A QUE CREES QUE SE DEBE?

los cocientes BC = 4.5 los Cocientes BA = 9 cm. devido a que ya nos dan los datos los cocientes DE = 3 cm y DA pues sacando el cateto adyacente conrespecto al angulo y el cateto opuesto.

5.- En la siguiente figura se muestran los triángulos ABC y ADE, indicando algunas medidas, por ejemplo la de los segmentos AB, BC, DE y AD que miden 9 cm., 4.5 cm. 3 cm. y 6 cm. respectivamente. A partir de los datos mostrados, calcula los cocientes BC/BA y DE/DA y compara los resultados. Contesta ampliamente lo que se te pide en el recuadro de debajo de dicho triangulo

FIGURA 9

$c^2 = a^2 + b^2$

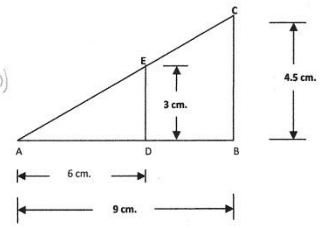
$c^2 = (4.5)^2 + (9)^2$

$c^2 = (16.25) + (81)$

$c^2 = 97.25$

$c = \sqrt{97.25}$

$c = 9.84$



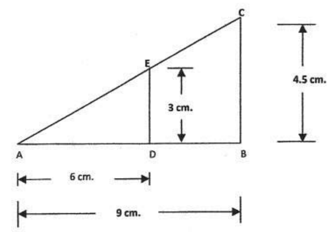
¿QUE ES LO QUE OBTIENES?, A QUE CREES QUE SE DEBE?

el valor de la hipotenusa = 9.84

5.- En la siguiente figura se muestran los triángulos ABC y ADE, indicando algunas medidas, por ejemplo la del segmento AB, BC, DE y AD que miden 9 cm., 4.5 cm., 3 cm. y 6 cm. respectivamente, a partir de los datos mostrados, calcula los cocientes BC/BA y DE/DA y compara los resultados,

Contesta ampliamente lo que se te pide en el recuadro de debajo de dicho triangulo

FIGURA 9



¿QUE ES LO QUE OBTIENES?, A QUE CREES QUE SE DEBE?

$4.5/9 = 0.5$ $DE/DA = \frac{3}{6} = 0.5$

Son iguales.

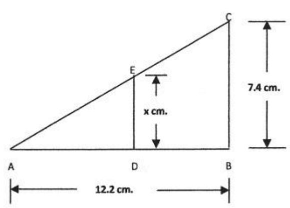
6.- En la siguiente figura tenemos la representación de un triangulo, un triángulo rectángulo ABC, cuyos catetos miden 7.4 cm. Y 12.2 cm respectivamente, es decir:

AB = 12.2 cm. Y BC = 7.4 cm.

6.5 cm. A la derecha del punto A marcamos el punto D. Desde el punto D trazamos una perpendicular a AB, que cruza el lado AC en el punto E.

Con los datos que se han mencionado, determina el valor de la longitud del segmento DE.

FIGURA 10



EN ESTE ESPACIO REALIZA TUS CÁLCULOS, NO BORRES NADA.

$Sen = \frac{COP}{Hi}$

$Sen = \frac{7.4}{12.2} = 3734$

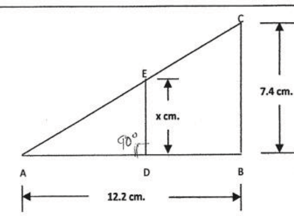
6.- En la siguiente figura tenemos la representación de un triangulo, un triángulo rectángulo ABC, cuyos catetos miden 7.4 cm. Y 12.2 cm respectivamente, es decir:

AB = 12.2 cm. Y BC = 7.4 cm.

6.5 cm. A la derecha del punto A marcamos el punto D. Desde el punto D trazamos una perpendicular a AB, que cruza el lado AC en el punto E.

Con los datos que se han mencionado, determina el valor de la longitud del segmento DE.

FIGURA 10



EN ESTE ESPACIO REALIZA TUS CÁLCULOS, NO BORRES NADA.

$AD = 6.5$ $Hip = \frac{6.5}{1}$

$\cancel{AE =}$ $Hip = 6.5$

$DE = 6.5$

$Sen\,\alpha = \frac{CO}{Hip}$ $Cos\,\alpha = \frac{CA}{Hip}$

$Hip = \frac{CA}{Cos\,90°}$ $Hip = \frac{CO}{Sen\,\alpha}$

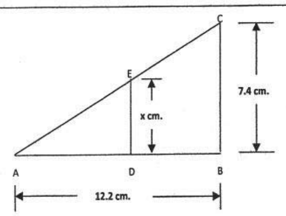
6.- En la siguiente figura tenemos la representación de un triangulo, un triángulo rectángulo ABC, cuyos catetos miden 7.4 cm. Y 12.2 cm respectivamente, es decir:

AB = 12.2 cm. Y BC = 7.4 cm.

6.5 cm. A la derecha del punto A marcamos el punto D. Desde el punto D trazamos una perpendicular a AB, que cruza el lado AC en el punto E.

Con los datos que se han mencionado, determina el valor de la longitud del segmento DE.

FIGURA 10



EN ESTE ESPACIO REALIZA TUS CÁLCULOS, NO BORRES NADA.

$\frac{12.2}{100} = 0.122(54) = 6.5$

$\frac{7.4}{100} = 0.074 \quad (54) = 3.9$

$DE = 3.9$ cm.

7.-La recta **F(x)** que aparece en la figura 11, tiene pendiente uno, traza en el plano de la figura 12 una recta con pendiente 3/2.

FIGURA 11

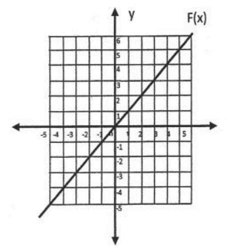
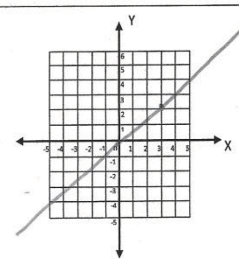


FIGURA 12



7.-La recta **F(x)** que aparece en la **FIGURA 11,** tiene pendiente uno, traza en el plano de la **FIGURA 12,** una recta con pendiente 3/2.

FIGURA 11

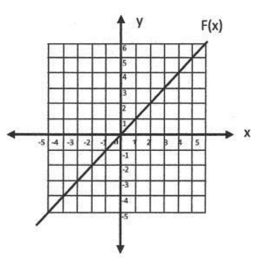
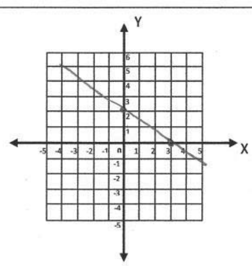


FIGURA 12



7.-La recta **F(x)** que aparece en la figura 11, tiene pendiente uno, traza en el plano de la figura 12 una recta con pendiente 3/2.

FIGURA 11

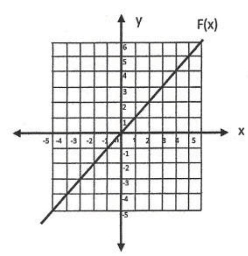
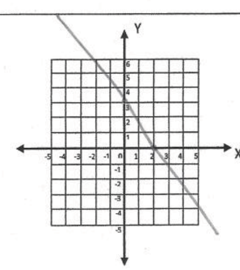
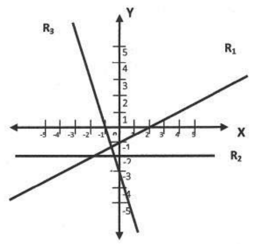


FIGURA 12



8. Observa por donde pasa cada recta de la siguiente figura y determina el valor de su pendiente. No borres nada.

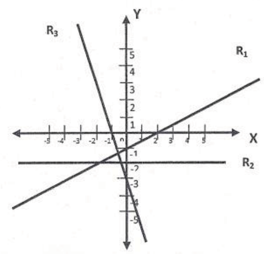
FIGURA 13



EL VALOR m_1 DE LA RECTA R_1, ES:	EL VALOR m_2 DE LA RECTA R_2, ES:	EL VALOR m_3 DE LA RECTA R_3, ES:
(2)	(-2)	(-3)

8. Observa por donde pasa cada recta de la siguiente figura y determina el valor de su pendiente. No borres nada.

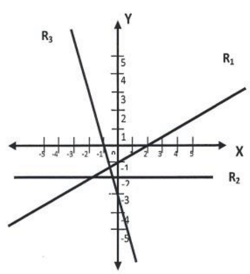
FIGURA 13



EL VALOR m_1 DE LA RECTA R_1, ES:	EL VALOR m_2 DE LA RECTA R_2, ES:	EL VALOR m_3 DE LA RECTA R_3, ES:
$-\frac{1}{2}$ x_1, y_1 (2;0) $(\overset{x}{0}, \overset{y}{1})$ $m = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{0-(-1)}{2-0}$ $\frac{1}{2}$	0 m	-3 $(-1, \overset{y}{0})$ $(0,-3)$ $m = \frac{0-(-3)}{-1-0} = \frac{3}{1}$

8. Observa por donde pasa cada recta de la siguiente figura y determina el valor de su pendiente. No borres nada.

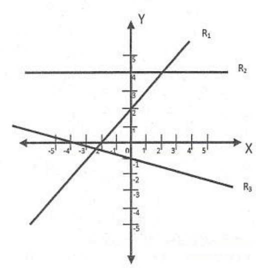
FIGURA 13



EL VALOR m_1 DE LA RECTA R_1, ES:	EL VALOR m_2 DE LA RECTA R_2, ES:	EL VALOR m_3 DE LA RECTA R_3, ES:
(2,-3)	0,	(-1,-3)

9. Determina el tipo de pendiente (positiva, negativa, cero o indeterminada) para cada una de las re[...]
que aparecen en la siguiente figura:

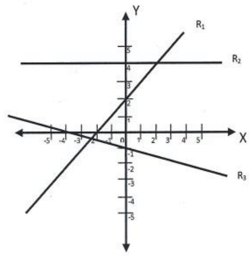
FIGURA 14



PARA LA RECTA R_1, LA PENDIENTE m_1, ES:	PARA LA RECTA R_2, LA PENDIENTE m_2, ES:	PARA LA RECTA R_3, LA PENDIENTE m_3, ES:
positivo	positiva	negativa.

9. Determina el tipo de pendiente (positiva, negativa, cero o indeterminada) para cada una de las rec que aparecen en la siguiente figura:

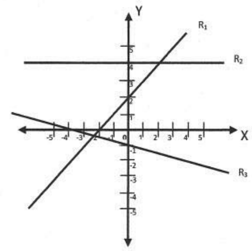
FIGURA 14



PARA LA RECTA R_1, LA PENDIENTE m_1, ES:	PARA LA RECTA R_2, LA PENDIENTE m_2, ES:	PARA LA RECTA R_3, LA PENDIENTE m_3, ES:
2,2	4	4, -7

9. Determina el tipo de pendiente (positiva, negativa, cero o indeterminada) para cada una de las rectas que aparecen en la siguiente figura:

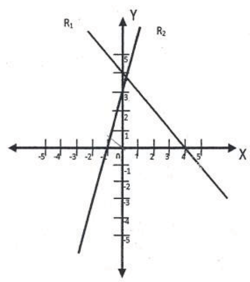
FIGURA 14



PARA LA RECTA R_1, LA PENDIENTE m_1, ES:	PARA LA RECTA R_2, LA PENDIENTE m_2, ES:	PARA LA RECTA R_3, LA PENDIENTE m_3, ES:
+	pos	neg

10.- Observa las rectas y determina cual tiene mayor pendiente.

FIGURA 15



Utiliza este espacio para escribir tus observaciones.

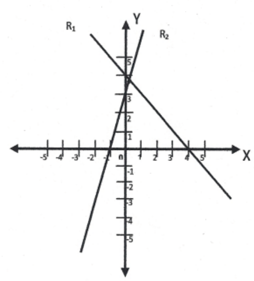
$$m_1 = \frac{x_2 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{4-(-2)}{0-(5)} = \frac{6}{-5} = \frac{6}{5}$$

$$m_2 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{1-(-2)}{4-(6)} = \frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$$

La recta 1 tiene una mayor pendiente.

10.- Observa las rectas y determina cual tiene mayor pendiente.

FIGURA 15



Utiliza este espacio para escribir tus observaciones.

Observando el siguiente plano observamos que la linea R_1 aproximadamente tiene una inclinacion a 45 grados.
Por otra parte R_2 observe se que tiene un angulo de inclinacion mayor a 45°
por lo tanto R_2 es la de mayor pendiente