INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE ECONOMÍA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Comparación de métodos para la valuación de opciones tipo americano de activos que cotizan en la bolsa mexicana de valores en el período 2003-2009.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS ECONÓMICAS

(ECONOMÍA FINANCIERA)

P R E S E N T A

JOSÉ ÁNGEL TENORIO MARTÍNEZ

MÉXICO, D. F. AGOSTO DE 2011

SIP-14-BIS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de ***México D.F.,*** siendo las ***11:30*** horas del día ***20*** del mes de ***mayo*** del año ***2011*** se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de ***la SEPI ESE-IPN*** para examinar la tesis titulada:

Comparación de métodos para la valuación de opciones tipo americano de activos que cotizan en la bolsa mexicana de valores en el período 2003-2009.

Presentada por el alumno:

Tenorio	***Martínez***	***José Angel***
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro: | *A* | *0* | *9* | *0* | *0* | *4* | *1* |

aspirante de:

Maestría en Ciencias Económicas.

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***APROBAR LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

Dr. Miguel Flores Ortega
(Director de tesis)

Dr. Francisco Almagro Vázquez
(Director de tesis)

Dr. Humberto Ríos Bolivar

Dr. Federico Alfonso Reina Sosa

PODER EJECUTIVO FEDERAL
MEXICO, D.F.
S.E.P.
INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
E.S.E.
SECCION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACION

M.en C. Héctor Allier Campuzano

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. Gerardo Angeles Castro

**gmf.*

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En México D. F., siendo las **11:30** horas del día miércoles **20** del mes de **mayo** del año **2011**, el (la) que suscribe **José Angel Tenorio Martínez** alumno (a) del Programa de **Maestría en Ciencias Económicas** con número de registro **A090041** adscrito a la **SEPI ESE-IPN,** manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de tesis bajo la dirección de la **Dr. Miguel Flores Ortega y del Dr. Francisco Almagro Vázquez** y cede los derechos del trabajo intitulado **Comparación de métodos para la evaluación de opciones tipo americano de activos que cotizan en la bolsa mexicana de valores en el período 2003-2009,** al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección **Camino del Triunfo A # 24. Colonia Campestre Aragón. Deleg. Gustavo A. Madero. México D.F. (C.P. 07530)** Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

M.EN C. © JOSÉ ANGELTENORIO MARTÍNEZ
Nombre y firma

❖ *gmf.*

Agradecimientos

Hoy, concluyo un proyecto más en mi vida, y no hay nada más satisfactorio que ver mi objetivo realizado.

Quiero agradecer a cada uno de mis profesores por su tiempo y dedicación por enseñarme el secreto de amar nuestra profesión, por su gran calidad humana, por su capacidad humana y por su capacidad académica.

En especial al Dr. Miguel Flores Ortega, por su valioso tiempo que me brindo para concluir este proyecto, por el estimulo brindado para seguir adelante, pero sobre todo por la exigencia para dar lo mejor de mí.

Quiero decirles a mis padres Ana María y José Fernando, ¡Gracias!

Gracias, porque me dieron la vida, porque me dieron un hogar, por creer en mí, por brindarme sus consejos, su apoyo incondicional y todo su amor.

A mis hermanos Ismael, Mario, Sarahit, a mis amigos en especial a Gustavo, Arturo, Gabriel, José y a todas esas personas que influyeron en este proyecto de mi vida, ¡gracias!, gracias por estar siempre conmigo y por su gran apoyo.

¡Gracias!

José Ángel Tenorio Martínez.

Índice.

Índice de tablas y gráficas.

Índice de cuadros.

Índice de gráficas.

Glosario.

Acción: Titulo que establece la participación proporcional que su poseedor tiene en el capital de una empresa.

Activo subyacente: Es el activo que se utiliza para establecer el precio de un producto derivado.

Asigna: En la cámara de compensaciones y liquidación del mercado mexicano de derivados, su función central es ser la contraparte y por tanto garante de todas las obligaciones financieras que se derivan de la operación de los contratos negociados, para ello deberá mostrar la normatividad emitida por las autoridades financieras: Secretaria de Hacienda y Crédito Público (SHCP), Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNVB) y Banco de México (BM), así como por las reglas del propio mercado mexicano de derivados. Es un fideicomiso de administración y pago constituido en 1998 en BBVA Bancomer, con el objeto de compensar y liquidar las operaciones de productos derivados realizadas en el Mercado de derivados (MexDer).

Arbitraje: En el mercado, el arbitraje implica una estrategia que combina la compra de un contrato que se considera subvaluado y la venta de otro considerado sobrevaluado; vinculados para obtener un beneficio sin riego.

Clase: Todos los contratos de futuros y los contratos de opciones que tienen como objeto o referencia un mismo activo subyacente.

Cobertura: Estrategia que busca disminuir la expansión de riesgo.

Contratos de futuros: Son contratos normalizados a plazo por medio del cual el comprador se obliga a comprar el activo subyacente y el vendedor a venderlo a un precio pactado, en una fecha futura.

Contrato de opción: Contrato estandarizado, en el cual el comprador mediante el pago de una prima, adquiere del vendedor el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un activo subyacente a un precio pactado (precio de ejercicio) en una fecha futura, y el vendedor se obliga a vender o comprar, según corresponda, el activo subyacente al precio convenido. El comprador puede ejercer dicho derecho, según se haya acordado en el contrato respectivo.

Derivados financieros: Los derivados son productos financieros cuyo valor depende de un activo o canasta de activos subyacentes. Estos pueden ser acciones, emisiones de deuda, tipo de cambio.

Divisas: En la moneda extranjera, referida a la unidad del país de que se trate, la relación entre la moneda nacional y las monedas extranjeras demuestra la solidez de la moneda y del crédito de un país en el entorno nacional.

Emisor: Entidad que introduce los valores al mercado de derivados.

Estocástico: Algo que se determina al azar.

Incertidumbre: Es la situación en la cual no se conoce la ocurrencia de un determinado evento.

Liquidez: Es la facilidad con la que los activos se transforman en dinero.

Mercado de capitales: Es el mercado constituido por la oferta y la demanda de títulos de renta variable (acciones).

Mercado de dinero: Es el mercado constituido por la oferta y la demanda de títulos de renta fija de corto plazo, generalmente menor un año.

Mercado spot: Aquel en el que la entrega y pago del bien negociado se efectúan al momento de la concertación. El precio al cual se negocian se le conoce como precio spot o de contado.

Opción: Es un contrato entre dos partes por el cual una de ellas adquiere sobre la otra el derecho, pero no la obligación, de comprarle o de venderle una cantidad determinada de un activo a un cierto precio y en un momento futuro.

Operador: Es el miembro del MexDer como instituciones de crédito, casas de bolsa, personas físicas y morales cuya función es actuar como comisionista de uno o más socios liquidadores, en la celebración de contratos de opciones y que puede tener acceso a las instalaciones del MexDer, para la celebración de dichos contratos.

Óptimo: Es donde se alcanza la mejor asignación de recursos posibles.

Over the counter: Es el término que se utiliza para denominar a todas aquellas operaciones o productos que se negocian fuera de una bolsa organizada de valores. En México se refiere principalmente a la compra-venta a futuro de dólares, tasas de interés y otros instrumentos autorizados, que se realizan directamente entre participantes e intermediarios, entendiéndose como participantes a las personas físicas nacionales y extranjeras, y los intermediarios a las instituciones de crédito o casas de bolsa que obtienen autorización por escrito del Banco de México para realizar operaciones de compra-venta con otros intermediarios y participantes.

Portafolio: Conjunto de activos financieros de una sociedad o persona física. Combinación de activos financieros mantenidos por un individuo o institución.

Posición larga: Es la postura que presenta el comprador (quien paga la prima) de una opción, sin importar si está es una opción de compra o de venta.

Posición corta: Es la postura que presenta el emisor o vendedor de la opción (recibe la prima) de compra o de venta.

Posición de cobertura: Posición corta o posición larga que un cliente mantenga en la cámara de compensación como posición que contribuya a cubrir riesgos de la posición que un cliente mantenga en otros mercados distintos a la bolsa y a la cámara de compensación, en activos subyacentes o valores del mismo tipo que el activo subyacente u otro tipo de activos sobre los cuales se esté tomando la posición de cobertura de riesgo.

Precio de cierre: Precio de los títulos valores en una bolsa al final de cada sesión.

Precio de paridad: Precio para un bien o servicio que se relaciona con otro precio, o bien con una composición de precios de diferentes bienes durante un período específico.

Riesgo financiero: Porción del riesgo total de la empresa, que resulta de la contratación de deudas.

Riesgo del negocio: Riesgo inherente a las operaciones típicas de una empresa dentro de su industria.

Riesgo de tasa de interés: Es el riesgo asociado a las fluctuaciones que pueden exhibir los precios de los instrumentos de renta fija (deuda) como resultado de variaciones en las tasas de interés de mercado.

Riesgo de mercado: Parte del riesgo total de un título que no puede eliminarse por diversificación.

Rendimiento: Es la relación entre el precio inicial y el final en base al precio inicial.

Rendimiento esperado: Tasa de rendimiento que una empresa espera realizar en una inversión. Es el valor promedio de la distribución de probabilidades de los rendimientos posibles.

Serie: Todas las opciones de la clase, con igual precio y fecha de vencimiento.

Spread: Es el margen de utilidad, la diferencia entre el precio de compra y precio de venta.

Valor intrínseco: Es el valor que tendría la opción si expirara inmediatamente tomando en cuenta el precio del activo subyacente en el mercado en efectivo. Específicamente, es la cantidad por la cual la opción se encuentra dentro del dinero.

Volatilidad: Desviación estándar de un rendimiento. Grado de fluctuación que manifiesta el precio del subyacente a través del tiempo.

Abreviaturas

BM	Banco de México
BMV	Bolsa Mexicana de Valores
BS	Black y Scholes
CBOE	Chicago Board Options Exchange
CNBV	Comisión Nacional Bancaria y de Valores
MexDer	Mercado de derivados
PDE	Ecuación de derivadas parciales
PIB	Producto Interno Bruto
SENTRA	Sistema Electrónico de Negociación, Transacción, Registro y Asignación
SHCP	Secretaria de Hacienda y Crédito Público

Resumen.

Esta investigación aborda la teoría de opciones y compara los métodos del modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein, el modelo Schwartz y el modelo Brennan-Schwartz para valuar opciones tipo americanas y se analiza el comportamiento cuando el subyacente es un activo de capital que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores.

Los modelos analizados permiten determinar la prima de riesgo, la investigación evalúa cual sería el modelo más adecuado para describir las condiciones en el mercado mexicano de derivados, dado que no hay operaciones con opciones tipo americano, las opciones tipo americano ofrecen una mayor flexibilidad en lo que se refiere a la cobertura de riesgos, las opciones americanas son las más utilizadas en los mercados organizados y otras partes del mundo, la pregunta a contestar desde el punto de vista económico corresponde a cual es el precio justo para la transferencia de riesgos entre los agentes que operan en el mercado.

En el trabajo se presentan los resultados obtenidos al evaluar las acciones de la empresa Cemex que cotiza en la Bolsa Mexicana de Valores en el periodo comprendido de 2003 a 2009 y las opciones tipo americano que se podrían obtener con este subyacente utilizando los modelos binomial de Cox-Ross-Rubinstein, modelo Schwartz y el modelo Brennan-Schwartz.

Desde el punto de vista académico el trabajo representa un documento valioso para introducirse en el campo de las opciones tipo americano y de los métodos de solución porque se incorpora en forma detalla el proceso de cálculo de un caso real que representa una opción sobre el activo subyacente de la acción de Cemex.

Abstract

This research addresses the theory of options and compares the methods of the binomial model of Cox-Ross-Rubinstein, Schwartz model and Brennan-Schwartz model to value options such as American and analyzes the behavior when the underlying asset is a listed capital on the Mexican Stock Exchange.

The models analyzed for determining the risk premium, which evaluates research would be the most appropriate to describe the conditions in the Mexican derivatives market, since there are no transactions with American type options, which offer greater flexibility as regards risk coverage, American options are the most commonly used in organized markets and other parts of the world, answering questions from the economic point of view corresponds to what is the fair price for the transfer of risk among agents operating in the market.

The paper presents the results obtained when evaluating the company CEMEX shares traded on the Bolsa Mexicana de Valores in the period 2003 to 2009 and American-style options that could be obtained with this underlying binomial models using Cox -Ross-Rubinstein model, Schwartz and Brennan-Schwartz model.

From the standpoint of academic work is a valuable document to enter the field of American-style options and methods of solution that is incorporated into a spreadsheet detailing the process that was used.

Introducción

Los mercados financieros han tenido un elemento característico en los últimos años que es el incremento del riesgo, para mitigar este riesgo surgieron los mercados de derivados, en ellos se ofrece una mejor flexibilidad para realizar operaciones al utilizar los contratos de opciones como elementos de cobertura de riesgos.

Las opciones se pueden clasificar según el activo subyacente sobre el que se instrumentan, el activo subyacente permite diferenciar entre centenares de opciones distintas, por su fecha de expiración las opciones se dividen en europeas, estás son ejercidas al final del período, y en opciones americanas, estás se pueden ejercer en cualquier punto del período; estas últimas son las más utilizadas en los mercados organizados.

El objetivo de esta investigación es comparar los métodos para valuar opciones tipo americanas sobre activos subyacentes que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores y establecer si la prima de riesgo está valuada adecuadamente para las condiciones del mercado mexicano.

Durante las últimas décadas se ha mostrado una revolución financiera en la teoría financiera, que ha llevado a grandes cambios en las instituciones financieras, en los mercados de capitales y en la innovación de diversos instrumentos financieros, atrás de estos cambios existe un marco teórico que evoluciona al mismo ritmo.

Los contratos de opción son una de las piezas fundamentales de un mercado financiero moderno, uno de los grandes alcances del uso de la metodología de opciones, es que permite visualizar coberturas de riesgo a largo plazo.

Un contrato de opción le da al tenedor el derecho pero no la obligación de ejercer el contrato, es decir, el tenedor tiene el derecho de comprar o de vender el bien subyacente. Los contratos de opciones contemplan un precio de ejercicio del subyacente, a su vez un periodo de expiración para ejercer los derechos del contrato y al precio de la opción se le denomina prima. Esta prima estará en función del periodo de expiración del contrato, de la volatilidad de los rendimientos del subyacente, así como la tasa de interés libre de riesgo.

Por lo tanto, con este proyecto se propone dar a conocer la teoría de las opciones, su analogía a las opciones financieras, sus conceptos más importantes, sus ventajas y los modelos de valoración que utiliza, para poder aplicarlos al estudio de alternativas de inversión.

La exposición de esta investigación se presenta en tres capítulos, a los que precede una introducción que busca dar una justificación al tema, el objetivo, la hipótesis y los resultados. Se incluye un apartado de conclusiones donde se destacan los resultados de las muestras realizadas.

En el capítulo I se hace una descripción de los derivados financieros que hay actualmente y con más énfasis en el concepto de los contratos de opciones así como los fundamentos para valuar una opción, abarcando sus conceptos y su importancia en las alternativas de inversión. Se presentan también los objetivos y los riesgos que tienen los contratos de opciones.

En el capítulo II se explican los modelos que se utilizaran para valuar la opción tipo americana, mediante la metodología usada para llevar a cabo la experimentación del proyecto, con un análisis detallado de los supuestos que se consideran para seguir con el análisis y saber cuál de los métodos comparados es el que nos determina mejor la valuación de la prima de riesgo del activo subyacente.

En el capítulo III se analiza mediante un caso práctico la veracidad del modelo utilizado para valuar la prima de riesgo y determinar si el modelo utilizado es el mejor para pronosticar la cobertura de riesgo que nos dará. Por último se incorpora el apartado donde se detallan las conclusiones.

CAPÍTULO 1. Los derivados financieros.

1.1. La Bolsa Mexicana de Valores.

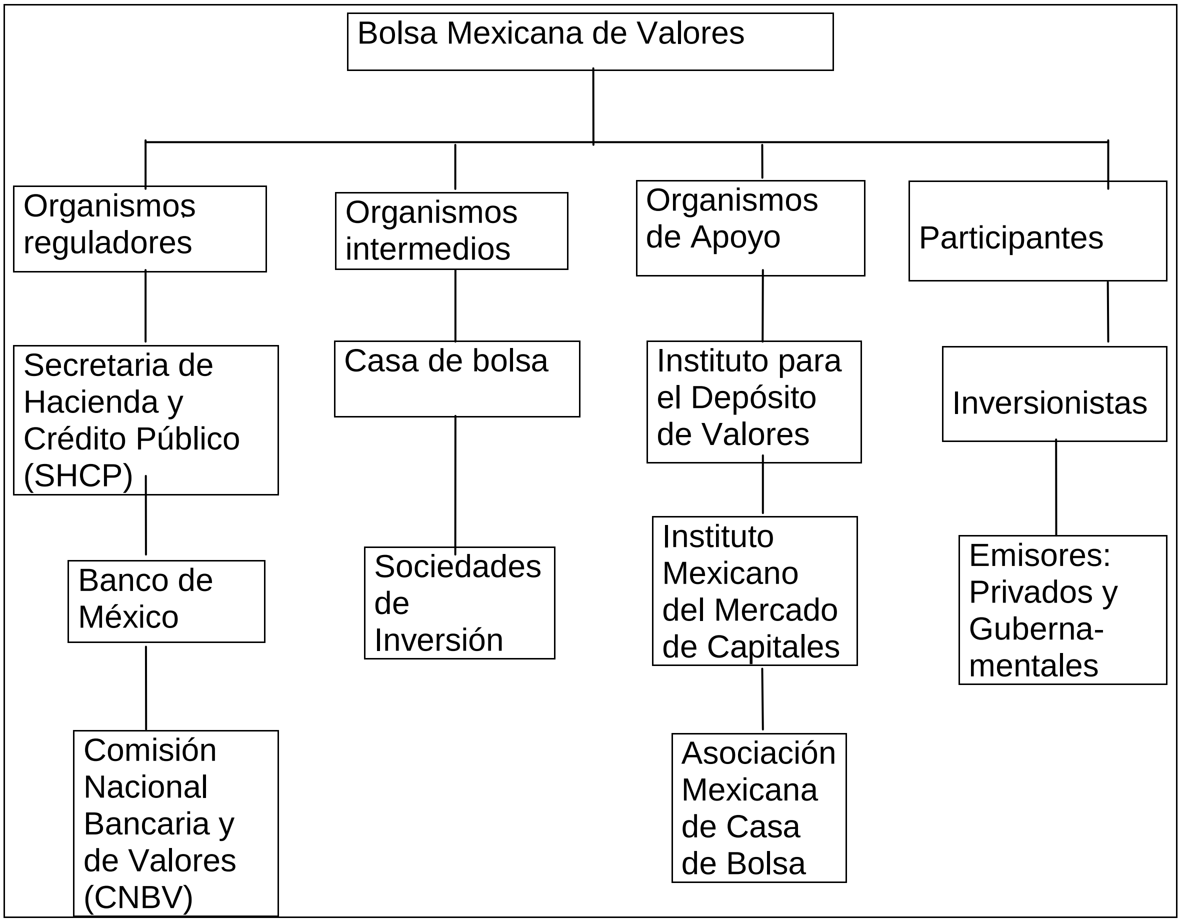
La Bolsa Mexicana de Valores, S.A. de C.V. (BMV) es una institución privada, se encarga de proveer la infraestructura adecuada y marco regulatorio que permiten que la transacción de instrumentos financieros se lleve a cabo con transparencia, seguridad y eficacia dentro de un mercado organizado. Los participantes en el mercado de valores son los inversionistas que prestan su dinero a cambio de recibir cierta ganancia y las emisoras que son las empresas que requieren de recursos financieros. En el cuadro 1.1 se muestran los organismos que intervienen en el funcionamiento de la Bolsa Mexicana de Valores.

Las principales funciones de la Bolsa Mexicana de Valores son; proveer las instalaciones necesarias para la compra-venta de instrumentos financieros, hacer pública la información respecto a los instrumentos financieros y establecer un marco regulatorio al cual deben sujetarse los participantes. En la BMV se compran y venden acciones a través de los agentes y corredores, que representan a las Casas de Bolsa. En la BMV sólo se efectúan y se registran transacciones de compra venta a través del sistema llamado SENTRA (Sistema Electrónico de Negociación, Transacción, Registro y Asignación).

1.1.2 Los organismos reguladores y los organismos intermediarios.

Los organismos reguladores encargados de establecer el marco normativo y regulatorio de la operación bursátil en México son la Secretaria de Hacienda y Crédito Público (SHCP), el Banco de México (BM) y la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), tal y como se muestra en el cuadro 1.1.

Cuadro 1.1. Organismos que intervienen en el funcionamiento de la Bolsa Mexicana de Valores.



Fuente: Elaboración propia.

La principal función que desempeña la Secretaría de Hacienda y Crédito Público para el funcionamiento de la BMV es que funge como un órgano regulador, tiene la facultad de establecer lineamientos y políticas de operación de las bolsas de valores, instituciones de depósito de valores y casas de bolsa. Otorgar las licencias de operación a los distintos intermediarios bursátiles y bolsas de valores, así como sancionar administrativamente a aquellos que violen dichos lineamientos.

La Comisión Nacional Bancaria y de Valores, es un órgano desconcentrado de la SHCP que supervisa el correcto funcionamiento de las operaciones realizadas en el mercado de valores, esta supervisión incluye no sólo el monitoreo de las transacciones, sino también realiza periódicamente visitas de inspección a los intermediarios bursátiles, y estos también se encuentran obligados a proporcionar reportes de su situación financiera y económica. La principal finalidad es supervisar el perfecto funcionamiento del mercado de valores, que este sea eficiente, justo, transparente y líquido, con lo que también se procura reducir el riesgo sistémico.

El Banco de México es una institución pública cuya función principal es la de regular la oferta monetaria a través de la política fiscal y la política monetaria, uno de sus objetivos es contrarrestar los efectos de la inflación, mantener los precios estables, mantener un bajo desempleo y fomentar el aumento del PIB. Le compete mantener bajo su control el correcto funcionamiento del mercado de valores mediante disposiciones que los participantes deben seguir, asegurándose de su cumplimiento.

El papel que juegan los organismos reguladores, permite que el inversionista se sienta protegido y se fomente un ambiente de confianza, al haber una operación en el mercado donde esta sea justa, eficiente, transparente y líquida, la definición de estos conceptos sirve para identificar el papel de los organismos. El mercado es justo cuando las condiciones de opresión sean las mismas para todos los participantes sin favorecer a algunos en particular. El mercado es más eficiente cuando el comportamiento de los precios de los valores que se cotizan en la BMV refleja la situación actual en que se encuentra la empresa emisora. La información debe ser transparente, ya que esta información es de gran relevancia para el inversionista de esta información dependerá la toma de decisiones para la futura inversión. La facilidad con que los valores pueden convertirse en efectivo, hará más eficiente el mercado de valores.

Los organismos intermediarios son aquellas personas morales que se encargan de poner en contacto a las contrapartes que compran y venden valores, realizan las transacciones acordadas, brindan asesoría y llevan a cabo la administración de portafolios de inversión. Los instrumentos financieros se ponen a disposición del público inversionista a través de la BMV) y el Mercado Mexicano de Derivados (Mexder). A través de estas instituciones es posible realizar la compra-venta de instrumentos de inversión, pues es aquí donde se contactan el público inversionista con los emisores de valores.

1.2. El Mexder.

El Mexder S.A de C.V. es el Mercado Mexicano de Derivados, donde se negocian contratos estandarizados de opciones que se compensan y liquidan a través de una cámara de compensación la cual hace el papel de contraparte para cada transacción realizada. La cámara de compensación es un fideicomiso de administración integrada por socios liquidadores y socios operadores. Los socios liquidadores son bancos ó casas de bolsa que liquidan ó celebran contratos operados en la bolsa. Los socios operadores pueden ser bancos, casas de bolsa, que están facultados a través del socio liquidador para celebrar contratos. La persona que desee adquirir un contrato de compra-venta de opciones, deposita un margen en la Cámara de Compensación, el margen es un depósito obligatorio, es un determinado porcentaje del valor del contrato que le permite cubrir el riesgo asumido, tiene la función de una garantía que asegura el cumplimiento de ambas partes, tanto del vendedor al cual se le llama corto, como del comprador al cual se le llama largo. El Mexder es una entidad autorregulada con autorización de la SHCP, se llama mercado de derivados precisamente porque el valor de las opciones deriva ó subyace de un bien financiero, el cual puede ser divisas, índices accionarios, tasas de interés ó acciones.

1.3. Los mercados financieros.

Con el crecimiento de los mercados financieros en el mundo, los derivados financieros han tenido un importante crecimiento, por medio de la utilización de los derivados financieros se busca cubrir los riesgos de mercado o de crédito, estos derivados financieros permiten promover esquemas de estabilidad macroeconómica y facilitar el control de riesgos en intermediarios financieros y entidades económicas.

Las empresas usan opciones e instrumentos derivados para reducir sus propios riesgos. Los bancos y las instituciones financieras buscan métodos teóricos, que estén fundamentados para desarrollar y determinar el valor de nuevos productos para vender soluciones financieras a la medida de sus clientes, los instrumentos derivados se aprovechan para reducir los riesgos que surgen con su uso en los mercados financieros. Las finanzas en la actualidad son una de las áreas de mayor desarrollo en el mundo corporativo y en la banca moderna, esto se debe por la implementación de modernos productos derivados financieros que dan una mejor cobertura a los cambios que presenta el mercado. Los mercados financieros se componen de tres mercados fundamentales; los mercados de deuda; que a su vez incluyen los mercados interbancarios, los mercados de divisas, los mercados monetarios y los mercados de renta fija, los mercados de acciones y los mercados de derivados.

Los valores que se negocian en los mercados de derivados, son valores de materias primas, o valores de renta fija, de renta variable, o de índices compuestos por algunos valores o materias primas. Por la naturaleza de los instrumentos suele hablarse de mercado de deuda y mercado de capitales, la diferencia entre estos radica en la forma en que se pagan las ganancias y en el plazo de la inversión (De Lara, 2008).

En el mercado de deuda los valores que son negociados son aquellos cuyo principal objetivo es financiar proyectos de corto, mediano y largo plazo para las empresas o instituciones emisoras. En éste se incluyen valores del tipo; gubernamental, instrumentos de deuda a corto plazo, instrumentos de deuda a mediano plazo e instrumentos de deuda a largo plazo. En el mercado de capitales los valores que son negociados en el mercado de capitales son aquellos cuyo principal objetivo es financiar proyectos de corto plazo para las empresas o instituciones emisoras. En éste se incluyen los valores de tipo; acciones y obligaciones.

Las acciones son una fuente de financiamiento a largo plazo muy importante para las empresas, son emitidas por sociedades mercantiles, el tenedor de una acción cuenta con ciertos derechos y es considerado como socio de la empresa, se puede considerar que el tenedor de una acción posee parte de la empresa. No existe un plazo específico, pues este realmente lo fija el tenedor de la acción, en su momento puede decidir venderla, sin embargo se recomienda que sea a largo plazo. El precio de la acción es variable, depende de la entidad emisora, algunos de los factores determinan el precio de las acciones, esto es por el desempeño mismo de la compañía, así como sus expectativas de crecimiento ó desarrollo a futuro.

Invertir en acciones es riesgoso pues el desempeño de una empresa se puede ver afectado por múltiples factores, tanto internos como externos, tal como la situación económica política del país. Se deben evaluar los factores tanto, nacionales como internacionales en un análisis técnico, así como factores que competen al desempeño de la empresa, como situación financiera, análisis de riesgos, análisis de razones financieras, esto por medio de un análisis fundamental, que pueden influenciar en el precio de las acciones. Se debe comparar el desempeño de la empresa con el desempeño de otras compañías que se encuentran en el mismo sector. El atractivo de las acciones está en las ganancias que se pueden obtener al venderlas, es decir, la diferencia entre el precio de compra y venta ó si se desea mantener la acción, es posible obtener ingresos mediante el pago de dividendos que realizan las empresas anualmente que está en función de las utilidades que la empresa haya obtenido.

La forma de emitir acciones puede ser pública ó privada, y las acciones se clasifican en acciones preferentes ó acciones comunes. La diferencia entre estos tipos de acciones está en que las acciones comunes le confieren al tenedor el derecho a voto dentro de la organización en las asambleas generales de accionistas para la toma de decisiones importantes, y las acciones preferentes permiten que el tenedor participe en las ganancias de la empresa, es decir, confieren algunos privilegios financieros como cobrar dividendos. No obstante, el poseer acciones no solo confiere derechos, sino también ciertas obligaciones. En el mercado de divisas como principal característica se puede mencionar que está basado en los tipos de cambios fluctuantes, por lo que es altamente especulativo y por lo tanto de alto riesgo. Aquí se negocian divisas (monedas extranjeras) tales como el dólar.

En la actualidad ningún individuo, empresa, gobierno o proyecto con vista de negocios, se libra a los fuertes movimientos que provocan las fluctuaciones del tipo de cambio entre divisas, que inducen las tasas de interés, las materias primas, entre otras variables, movimientos en los mercados financieros, por tanto, el objetivo de los derivados financieros es actuar como instrumento para la cobertura de riesgo, en donde los clientes se sientan más seguros para invertir cuando limitan su expectativa de perdida.

1.3.1. Características de los derivados financieros.

En los mercados de derivados se han creado diversos instrumentos financieros para satisfacer las necesidades de los participantes del mercado, que operan tanto en mercados organizados como en los mercados extrabursátiles (OTC).[1] Los productos derivados más utilizados para protegerse de los riesgos del mercado son los contratos de intercambio, los contratos adelantados, los contratos de futuros y los contratos de opciones, se han desarrollado combinaciones de estos instrumentos, que se ajustan de acuerdo a las necesidades de cada inversionista.

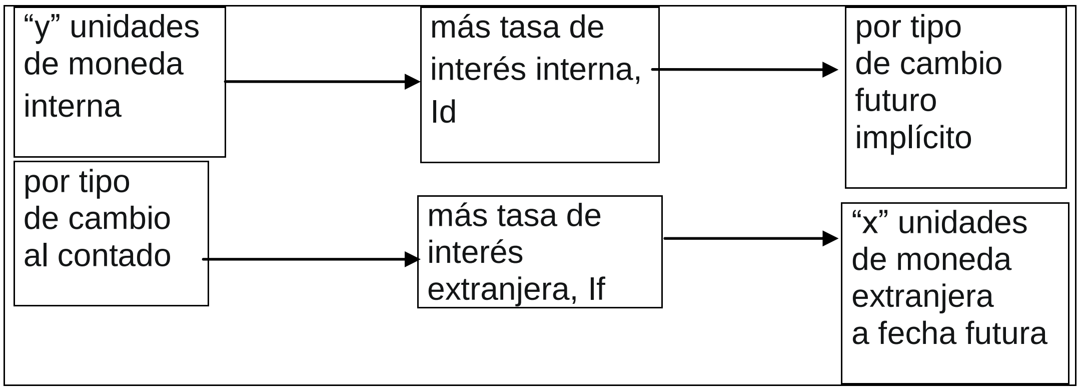
Los contratos adelantados son contratos que se llevan a cabo entre dos partes, donde se obliga al titular a la compra de un activo por un precio determinado en una fecha predeterminada. Las características más importantes de los contratos adelantados son; que no exige ningún desembolso inicial, el precio lo fijan las dos partes de mutuo acuerdo y únicamente al vencimiento del contrato hay un solo flujo de dinero a favor del ganador. El contrato no permite ningún cambio en el futuro, no es negociable después del cierre del contrato, los mercados secundarios para contratos adelantados son escasos.

Los contratos adelantados de divisas, no son transferibles y se espera que al vencimiento se liquide mediante la entrega efectiva de las divisas

[1] Mercados over the counter (OTC), mercado donde los contratos se negocian en forma bilateral, y el riesgo de incumplimiento es asumido por ambas partas.

convenidas. Por lo tanto un contrato adelantado es un acuerdo, negociado en una bolsa o mercado organizado, que obliga a las partes contratantes a comprar o vender un número de bienes o activos subyacentes en una fecha futura, pero con un precio preestablecido. En el cuadro 1.2 se muestra el cálculo del precio de los contratos adelantados de divisas.

Cuadro1.2 Cálculo de los contratos adelantados de divisas.



Fuente: Elaboración propia.

Los futuros son contratos que operan en un mercado organizado están destinados a comprar o vender un activo subyacente, donde el precio del activo es pagado y entregado en una fecha futura determinada. En este contrato el vendedor está obligado a entregar el activo subyacente en la fecha pactada y a un precio establecido. Este tipo de contrato cuenta con márgenes y capital que respalda el cumplimiento del contrato. Cuando se venden estos contratos se produce una cobertura en una posición corta y cuando se compran contratos a futuro, se adopta una posición larga. Estos instrumentos sirven para cubrir riesgos de tipo de interés, de tipo de cambio o de un bien para protegerse de la variación de precios del mercado.

Los futuros sobre índices bursátiles son contratos cuyo precio depende de los movimientos de una canasta de acciones que forman el índice. El instrumento financiero asume un subyacente que no tiene una existencia física, por lo que la liquidación del instrumento se realiza mediante la entrega de dinero. Este instrumento se utiliza para cubrir el riesgo de precio al adquirir un portafolio de acciones. Los futuros sobre tipos de interés se negocian con el objetivo de fijar un tipo de interés sobre títulos emitidos, al vencimiento del futuro, el vendedor se compromete a entregar la cantidad de títulos de deuda especificados en el contrato a la tasa pactada y el comprador entrega dinero y recibe los títulos. Los futuros sobre tipos de cambio son contratos sobre monedas extranjeras que se utilizan para cubrir los riesgos que originan los movimientos en los tipos de cambio, es decir, congela el precio de la moneda extranjera hasta la fecha de vencimiento. Esto permite al importador presupuestar costos y precios de las mercancías importadas y el exportador puede cubrir sus costos y concertar créditos a partir de una recuperación cierta con respecto a su moneda nacional en la fecha de liquidación. Así los inversionistas pueden realizar transacciones en moneda extranjera, para ser pagadas o cobradas en una fecha futura, sin preocuparse por la volatilidad del mercado.

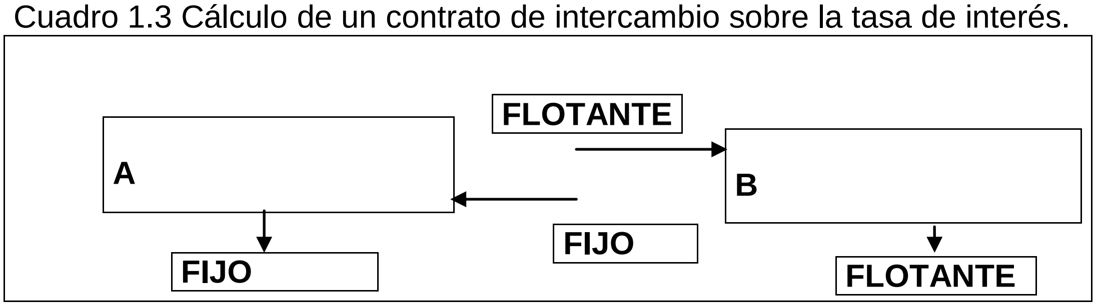
Una opción es un contrato entre dos partes por el cual una de ellas adquiere sobre la otra el derecho, pero no la obligación, de comprarle o de venderle una cantidad determinada de un activo a un cierto precio establecido en un futuro.

Los contratos de intercambio (swaps), son contratos mediante el cual ambas partes acuerdan intercambiar flujos de efectivo sobre un cierto principal a intervalos regulares de tiempo durante un periodo dado. Existen casos de contratos de intercambio utilizados sobre los tipos de cambio, tasas de interés, índices accionarios o bursátiles. Los contratos de intercambio sobre la tasa de interés se definen como un acuerdo entre dos partes para intercambiar flujos de efectivo relacionados con los pagos de intereses.

En el cuadro 1.3 se muestra el cálculo de un contrato de intercambio sobre la tasa de interés donde “A” tiene un pasivo de tasa fija y “B” un pasivo de tasa flotante. Así se realiza la transacción de contratos de intercambio, a fin de alterar los movimientos de la tasa de interés; las flechas muestran la dirección de los pagos en efectivo conforme a la transacción del contrato de intercambio. Esto se describe de la siguiente forma; A realiza un pago en efectivo de tasa flotante neta y B un pago en efectivo de tasa fija neta. El préstamo de tasa fija original de A subsiste como pasivo directo de A, sin tomar en cuenta si B cumple con el acuerdo, aunque si B lo hace, entonces el pasivo neto de A es ahora dinero a una tasa flotante más que a una tasa fija.

La cantidad de pagos de intereses intercambiados se basa en una cantidad principal, sólo se intercambian los pagos de intereses; el principal no. Los instrumentos financieros de cobertura son muy utilizados, ya que permiten retener el activo y a su vez segmentar y diversificar el riesgo, de acuerdo con Rodríguez de Castro (1997), estos contratos tienen tres finalidades básicas que son, la cobertura de riesgos, especulación o aprovechamiento de oportunidades de arbitraje. Es por eso que estos contratos de derivados permiten que los usuarios desagreguen los riesgos, para así asumir los que pueden administrar y así poder transferir los que no desean asumir.

Cuadro 1.3 Cálculo de un contrato de intercambio sobre la tasa de interés.



Fuente: Elaboración propia.

Las posiciones largas y cortas pueden ser medidas de formas diferentes, una posición larga va asociada con la obligación de comprar un activo que podrían ser divisas, títulos, productos básicos y préstamos, mientras que una posición corta conlleva la obligación de vender (Gray y Place 2003).

La posición es considerada sobre una base neta por tipo de categoría de riesgo, es decir, una posición de divisas a plazo neta, toma en cuenta futuras obligaciones de compra, contra las obligaciones de vender, y se incluyen los contratos de intercambio, aunque podría ser dividida por períodos, o añadida a una posición de efectivo subyacente. Los operadores de los derivados financieros asumen una posición larga si esperan que los precios aumenten, y una posición corta si esperan que los precios caigan. El cuadro 1.4 resume los diferentes tipos de derivados y cómo se negocian.

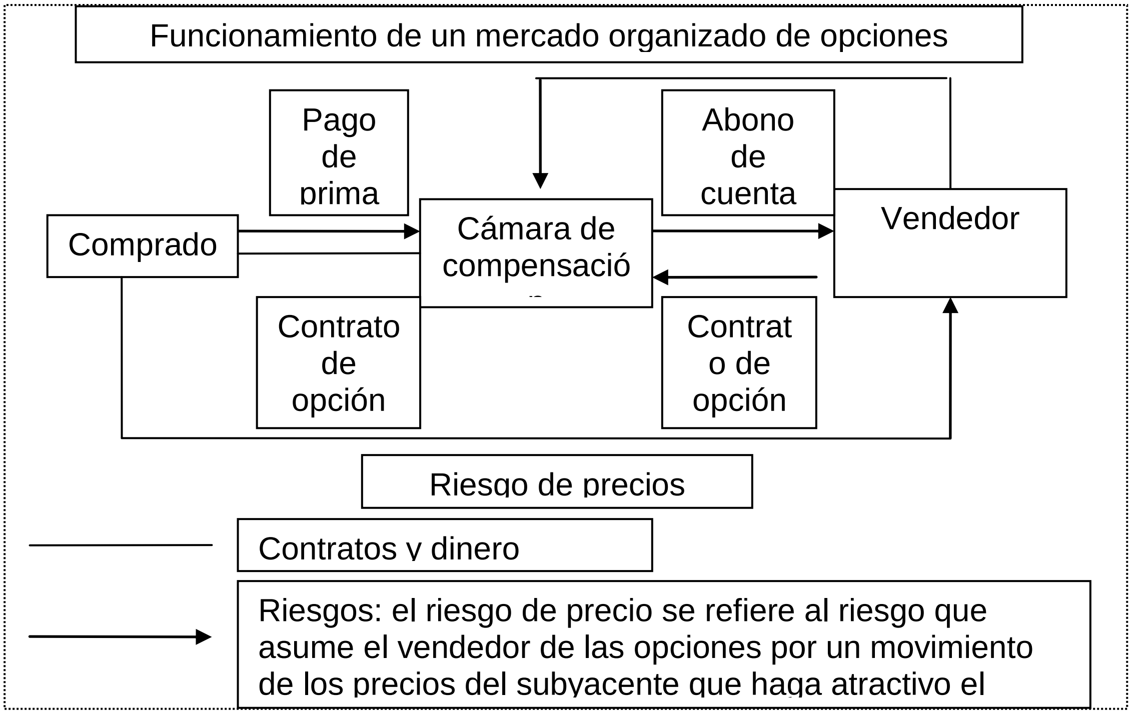
Cuadro 1.4 Negociación de los tipos de derivados.

	Negociados en Bolsa Contratos estandarizados	Mercado extrabursátil (OTC) contratos no-estandarizados
Compra/Venta de activo al precio especificado en fecha futura convenida.	Futuro	Contrato adelantado
Intercambio de activos a precios especificados y en fechas convenidas	-	Contratos de intercambios
Derecho pero sin obligación de llevar a cabo una de las transacciones	Opción	Opción OTC

Fuente: Gray y Place (2003).

En los mercados de opciones extrabursátiles los contratos se negociaban de forma bilateral y el riesgo de incumplimiento es asumido por ambas partes. La aportación del Chicago Board Options Exchange (CBOE) fue introducir una cámara de compensación, su función era lidiar con ambas partes y asumir los riesgos de contrapartida del mercado de opciones, esto se muestra en el cuadro 1.5.

Cuadro 1.5 Funcionamiento del mercado organizado de opciones.

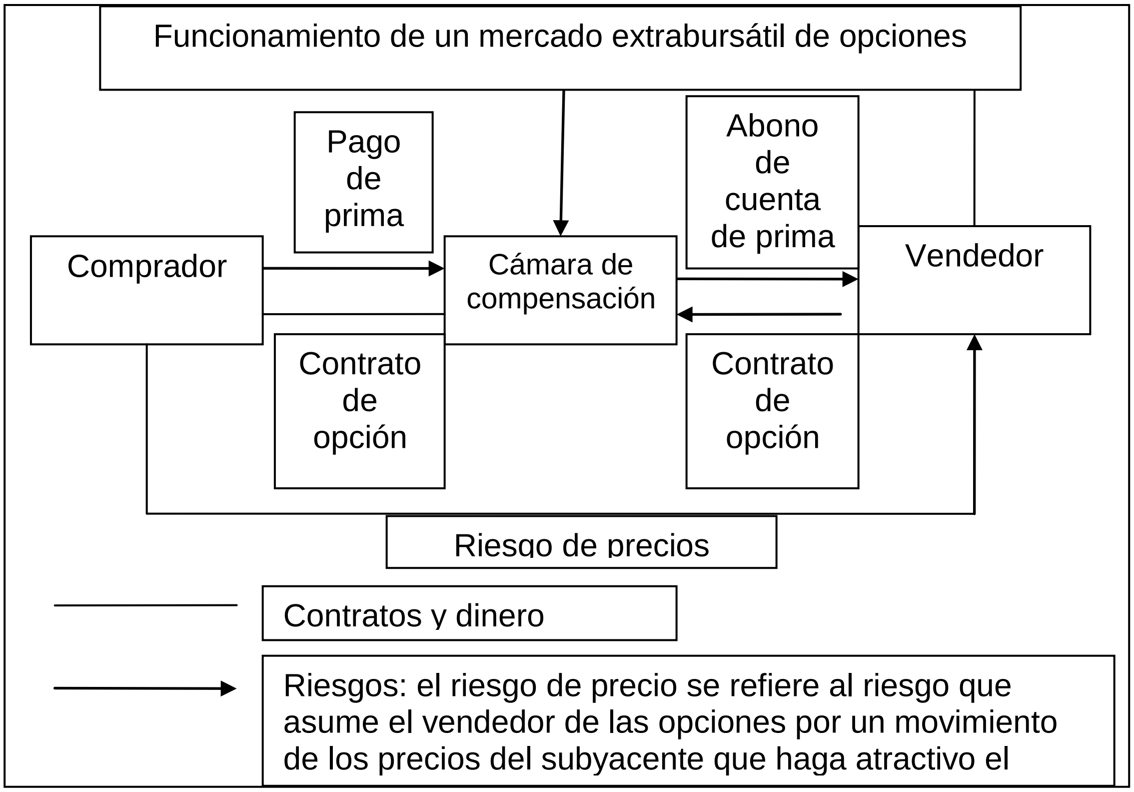


Fuente: P. Lamothe (2003).

En un mercado extrabursátil de opciones la exposición a los riesgos que se presentan en la transacción de los contratos es muy alta, por lo tanto, el riesgo que se asumen es de contrapartida en donde los compradores de estos contratos lo asumen, tal y como se muestra en el cuadro 1.6.

Una explicación de las diferencias que hay entre los mercados extrabursátiles y los mercados organizados de opciones se ve en el cuadro 1.7 donde se muestra que en los mercados extrabursátiles, los contratos son a medida y en los mercados organizados los contratos están plenamente estandarizados, esto en términos de; vencimiento, precio de ejercicio y tipo de opción compra o venta.

Cuadro 1.6 Funcionamiento del mercado extrabursátil de opciones.



Fuente: P. Lamothe (2003).

Los mercados organizados utilizan mecanismos de subasta para el establecimiento de los precios, mientras que en los mercados extrabursátiles el precio se establece por negociación entre comprador y vendedor. Los mercados extrabursátiles proporcionan una cobertura mejor, aunque el comprador debe asumir el riesgo de contrapartida, son más confiables los mercados organizados, aunque los costes de transacción, de financiación de márgenes y comisiones pueden ser mayores, ambos mercados son complementarios ya que los vendedores de opciones de los mercados extrabursátiles, bancos y firmas de valores cubren parte de sus ventas con posiciones en los mercados organizado.

Cuadro 1.7 Diferencias entre opciones negociadas en mercados organizados y mercados extrabursátiles.

Diferencias entre opciones negociadas en mercados extrabursátiles y mercados organizados		
Características	Extrabursátiles	Organizados
1. Fijación de precios	Negociaciones	Cotización abierta
2. Fluctuación de precios	Libre	En algunos mercados existen límites
3. Relación entre comprador y vendedor	Directa	A través de la cámara de compensación
4. Depósito de garantía	No usa	Siempre para el vendedor
5. Calidad de cobertura	A medida	Aproximada
6. Riesgo de contrapartida	Lo asume el comprador	Lo asume la cámara
7. Seguimiento de posiciones	Exige medios especializados	Fácil (prensa económica)
8. Regulación	No regulación en general	Regulación gubernamental y autorregulación
9. Liquidez	Escasa en muchos contratos	En los mercados consolidados, amplia

Fuente: P. Lamothe (2003).

La innovación financiera que se produce de forma constante e intensa en los mercados extrabursátiles, permite a los mercados organizados lanzar nuevos contratos, cuyo interés ya ha sido contrastado en el otro segmento del negocio de las opciones. Es decir, en muchos casos, los mercados extrabursátiles actúan como un campo de pruebas de los mercados organizados.

1.3.2. Función de los derivados financieros.

La función de los derivados es dar cobertura ante fluctuaciones de precio de los subyacentes, por lo que se aplican preferentemente a; los portafolios accionarios, la planeación de flujos de efectivo, las obligaciones contraídas a tasa variable, a los pagos o cobranzas en moneda extranjera a un determinado plazo entre otros.

Los productos derivados son instrumentos que contribuyen a la liquidez, estabilidad y profundidad de los mercados financieros; que generan condiciones para diversificar las inversiones y administrar riesgos, esto con la finalidad de poder tener una seguridad de lo que ocurrirá con el patrimonio propio. Los beneficios de los contratos de opciones, son más utilizados por los importadores que requieran dar cobertura a sus compromisos de pago en divisas, o tesoreros de empresas que busquen protegerse de fluctuaciones adversas en las tasas de interés, para inversionistas que requieran proteger sus portafolios de acciones contra los efectos de la volatilidad, inversionistas experimentados que pretendan obtener rendimientos por la baja o alza de los activos subyacentes, o para empresas no financieras que quieran apalancar utilidades, deudores a tasa flotante que busquen protegerse de variaciones adversas en la tasa de interés los productos derivados son una buena opción. (Díaz y Hernández, 2000)

1.4. Concepto de opción.

Una opción es un instrumento financiero que establece un contrato entre dos agentes económicos que le da al tenedor o comprador del contrato el derecho, más no la obligación, de comprar o de vender una cantidad específica de un bien o activo financiero al precio predeterminado o precio preestablecido en una fecha especificada. Los contratos de opciones financieras son instrumentos que trasladan el riesgo de mercado a que está expuesto el agente comprador al agente que vende el contrato de tal forma que quien vende un contrato a cambio de la prima asume el riesgo de variación del precio del activo subyacente. Por lo tanto quien compra una opción reduce su exposición de riesgo con respecto a las fluctuaciones del precio del activo subyacente.

La utilidad de una opción consiste en asegurar el precio de un bien o servicio, a cambio del pago de una prima cuyo monto depende de la exposición de riesgo que representa la probabilidad de que el bien experimente un cambio desfavorable en el precio, si esto ocurre la máxima perdida que tendrá quien adquiere la opción es el valor de la prima y tiene la posibilidad de obtener una ganancia si se experimenta un cambio favorable en el precio. Las opciones se podrán ejercer cuando se analice la posición que toma en el ejercicio en los cambios del dinero, las cuales son; El valor intrínseco de la opción que es la diferencia entre el subyacente y el precio de ejercicio. Una opción no puede tener un valor intrínseco negativo. El valor intrínseco es una medida de la cantidad en que la opción está en el dinero. Se dice que una opción está a la par si el precio de ejercicio de una opción es el mismo que el del precio al contado, de modo que el ejercicio del contrato no implica una ganancia o una pérdida para el tenedor de la opción, por lo tanto, esto no incluye la ganancia o pérdida causada por la prima pagada, dado que ésta es un costo irrecuperable. Fuera del dinero, para una opción de compra, si el precio de ejercicio es más elevado que el subyacente, ello implicará una pérdida para el tenedor de la opción en caso de ser ejercida esto es, sin valor intrínseco, si se ejercer la opción, el tenedor tendrá que comprar el subyacente a un precio superior al disponible en el mercado de contado. Así el tenedor se limitaría a dejar que la opción expirase sin valor alguno, y el costo sería la prima de opción que se pagó en primer lugar.

De acuerdo con Lamothe (1993), las opciones son el mejor instrumento para la cobertura de riesgo, esto es porque con una opción se transfiere el riesgo de pérdida, y se mantiene la posibilidad de beneficio ante una evolución positiva del mercado. Un contrato de opción financiera contiene; tipo de opción, activo subyacente, cantidad del activo negociado, fecha de vencimiento y el precio de ejercicio. Un elemento que se estipula en el contrato, es el precio a pagar por la opción, precio que se fija en el mercado determinado por la ley de la oferta y la demanda. En los contratos de opciones financieras solo se obliga al vendedor, mientras que el comprador tiene el derecho de ejercer o de no ejercerlo, es la condición de una opción. El poseedor de una opción se cubre ante posibles pérdidas y tiene la posibilidad de obtener un beneficio adicional en caso de que el precio del activo subyacente ofrezca una oportunidad de arbitraje al ejercer la opción con una ganancia.

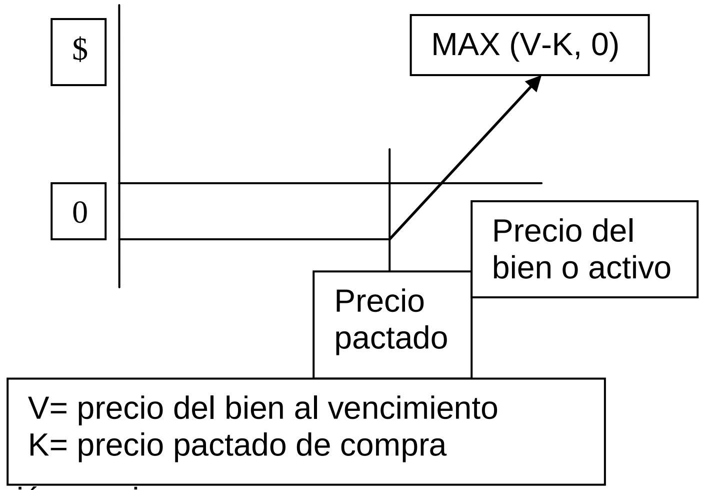
Las opciones financieras son contratos estandarizados, lo que permite que las transacciones se efectúen en mercados organizados y con garantías de su cumplimiento, característica que genera liquidez para llevar a cabo distintas combinaciones y estrategias para ampliar y diversificar las carteras de inversión. El comprador del contrato de una opción sólo está obligado al pago de una prima que corresponde al precio de la opción que recibe el vendedor del activo, para garantizar la opción el vendedor aportará el margen inicial y de mantenimiento según la evolución del precio del activo subyacente en el mercado.

1.4.1. Tipos de opciones.

Las opciones financieras se clasifican de acuerdo al tiempo en que se puede ejercer el derecho que ellas otorgan. Las opciones pueden ser americanas o europeas, y no tiene nada que ver con la ubicación geográfica como lo explica Hull (2002). Las opciones Americanas son opciones que pueden ser ejercidas en cualquier momento durante la vida de la opción hasta su fecha de vencimiento, es decir, en cualquier momento antes de la expiración de está, mientras que las opciones europeas solo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento.

La opción financiera le da al tenedor de la opción el derecho a comprar o vender un valor, es decir, no tiene la obligación. La opción financiera se ejerce cuando el tenedor así lo desee, siempre y cuando este dentro de la fecha de ejercicio, el costo del contrato de las opciones tiene un precio, denominado prima. Una vez firmado un contrato de opciones financieras, existen tres formas de cerrarlo, el comprador ejerce su derecho, el comprador permite que pase la fecha de vencimiento sin ejercer su derecho, y se da por terminado el contrato. El comprador puede vender la opción a un tercero, o el emisor puede recomprar la opción al comprador, es decir, la opción se liquida. Una opción de compra otorga al comprador el derecho, más no la obligación, de comprar al emisor el activo subyacente a un precio predeterminado en la fecha de terminación del contrato. El comprador tiene que pagar una prima al emisor en el momento de la realización del contrato. Este tipo de opciones presentan para el comprador ganancias ilimitadas, al mismo tiempo que sus pérdidas se ven reducidas al valor de la prima que paga al firmar el contrato. En cambio el emisor presenta como ganancia máxima el valor de la prima y sus pérdidas son ilimitadas. En gráfica 1.1 se muestra el mecanismo de una función de pérdida y ganancia de una opción de compra.

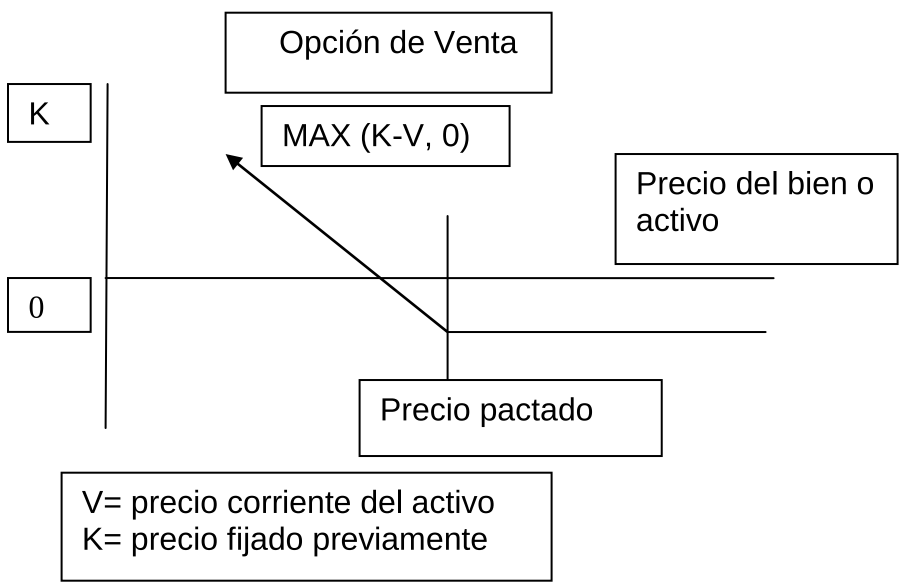
Gráfica 1.1 Función de pérdida y ganancia de una opción de compra.



Fuente: Elaboración propia.

Una opción de venta otorga al comprador el derecho, más no la obligación, de vender el activo subyacente a un precio predeterminado en una fecha preestablecida.

Gráfica 1.2 Función de pérdida y ganancia de una opción de venta.



Fuente: Elaboración propia.

El contrato especifica los mismos puntos que el de opciones de compra. En estos contratos, al igual que en los de compra, el emisor tiene una ganancia reducida a la prima y pérdidas ilimitadas, la situación del comprador es la contraria, es decir, presenta pérdidas reducidas a la prima y ganancias ilimitadas. En la gráfica 1.2 se muestra el mecanismo de una función de pérdida y ganancia de una opción de venta.

1.4.2. Los objetivos de las opciones.

Las opciones no poseen valor por sí mismas, sino únicamente a través del bien sobre el cual subyacen su valor por ejemplo una acción. El objetivo principal de las opciones financieras es cubrir un riesgo por ejemplo la variación del precio del activo subyacente. Con la opción se busca limitar el riesgo de pérdida a un tercero mientras se conserva la posibilidad de obtener beneficios, en caso de una evolución favorable en el precio del activo subyacente, esto se muestra cuando al adquirir una opción de compra el tenedor se cubre contra futuras bajadas en el precio del activo subyacente, y así, el tenedor tiene la posibilidad de obtener beneficios futuros derivados de la subida en el precio del activo subyacente. (Lamothe 2003)

Los objetivos de las opciones se agrupan de acuerdo al nivel agregado; a nivel microeconómico una opción es un instrumento financiero que tiene dos objetivos, en primer lugar es un producto con el cual el inversionista busca protegerse del riesgo y el segundo lugar el inversionista lo usa simplemente para invertir o especular, a nivel macroeconómico una opción tiene el objetivo de la formación más eficiente de precios del activo subyacente, mejorar los niveles de liquidez en el mercado, amplía las oportunidades de arbitraje y permitir perfiles de riesgo y rendimientos controlables.

1.4.3. Riesgos en opciones.

Los usuarios potenciales de opciones deben entender las ventajas y las desventajas de estos instrumentos financieros. Estas ventajas y desventajas incluyen microfactores y macrofactores. Los macrofactores afectan a todos los participantes en el mercado, así como a la economía. Los microfactores afectan principalmente a los usuarios específicos de los mercados de opciones.

Las opciones representan un tipo alternativo de cobertura, las opciones manejan un límite de perdida potencial equivalente al precio de la prima, en este punto es donde existe tanto un comprador como un vendedor de la opción. Por lo tanto si las posiciones son descubiertas uno tiene un potencial ilimitado de pérdida o ganancia, según sea su posición. Esto implica que, los participantes deben escoger el mercado que sea consistente con sus objetivos y necesidades.

Las opciones son utilizadas para ajustar el riesgo y rendimiento de una posición determinada a un costo muy bajo, para cubrirse de los riesgos de los movimientos en los precios y en las cantidades, es decir, las opciones son mejores que los futuros cuando la cantidad que uno desea proteger es incierta, las opciones pueden ser emitidas sobre un buen número de valores.

1.4.4. Fundamentos de la valuación de opciones.

Tal como menciona Lamothe (1993), el precio de una opción es el negociado entre su comprador y su vendedor, es decir, es determinado por las leyes del mercado y es el que las dos partes aceptan de común acuerdo.[2] El análisis

---

[2] La Bolsa Mexicana de Valores lista y cierra las posiciones conforme van existiendo posiciones de compra y de venta.

se basa en una opción de compra y puede fácilmente ser extendido a las opciones de venta. Primero se deben encontrar los límites dentro de los cuales debe encontrarse el precio de una opción de compra. Posteriormente, se determina el precio de la opción de compra. Esto es para identificar los factores que influyen en el precio de una opción.

La fijación del precio de las opciones se da de acuerdo a la oferta y la demanda del mercado; varios factores intervienen en el proceso porque la dinámica del precio depende del tiempo y de las variaciones del precio del subyacente en el mercado, es por ello que las opciones tienen un valor intrínseco y un valor en el tiempo.

Para las opciones de compra el precio intrínseco es la diferencia entre el precio de mercado del subyacente y el precio de ejercicio, si la diferencia es positiva, o de lo contrario es simplemente cero, porque al no estar dentro del dinero la opción no tiene ningún valor para el comprador y no la ejercerá, por lo tanto, su valor se expresa por la ecuación 1.1:

$$C = Max\ (S_T - K, 0) \tag{1.1}$$

Donde:

$C = Precio\ de\ la\ opción\ de\ compra$

$S_T = Precio\ del\ activo\ subyacente$

$K = Precio\ de\ ejercicio$

Para las opciones de venta es la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio de mercado del subyacente, si la diferencia es positiva, o simplemente cero porque la opción no tiene valor para el comprador porque no se ejerce. Por lo tanto, su valor se expresa por:

$$P = Max\ (K - S_T, 0) \quad (1.2)$$

Donde:

$P = Precio\ de\ la\ opción\ de\ venta$

$S_T = Precio\ del\ activo\ subyacente$

$K = Precio\ de\ ejercicio$

El valor de una opción varía en el tiempo porque el precio del subyacente puede cambiar entre la fecha en que se compra la opción y la fecha de vencimiento, por lo tanto existe un potencial de posibles beneficios, es decir, el valor de la prima que están dispuestos a pagar los inversionistas depende de las posibilidades de obtener una ganancia. Cuando no hay arbitraje el valor de la opción es igual a cero en la fecha de vencimiento y el valor máximo de la opción al que se puede ejercer corresponde al valor intrínseco.

La paridad entre el precio de una opción de compra y una opción de venta es una relación que debe mantenerse para que no exista arbitraje. En el caso de una opción europea cuando vence, se aplica el precio de ejercicio en la relación de equilibrio existente entre las opciones de compra y la opción de venta del mismo subyacente, a esta relación se le conoce como paridad de precios entre opción de compra y opción de venta.

El principio de la paridad de los precios de opciones de compra y de venta, señala que en el caso de una opción europea que no paga dividendos, para que no exista arbitraje entre la compra del subyacente y la venta, al momento de su liquidación se debe cumplir que el precio del activo subyacente menos el precio del ejercicio debe de ser igual al precio de la opción de compra menos el precio de la opción de venta, es decir:

$$S_T - K = C(T, S_T) - P(T, S_T) \qquad (1.3)$$

Los factores de los cuales depende el valor de una opción son el precio actual del activo subyacente, el precio de ejercicio de la opción, la tasa de interés libre de riesgo, el pago de dividendos, el tiempo remanente de vigencia al término del contrato y la volatilidad del precio del activo subyacente. Los cuatro primeros factores están relacionados con el valor intrínseco de la opción, en tanto que los dos últimos con el valor en el tiempo de la opción. Estas variables determinar el valor de las opciones en cada instante.

CAPÍTULO 2. Modelos para el análisis de opciones tipo americana.

Las opciones tipo americanas son instrumentos financieros que dan derecho al tenedor de ejercer la opción en cualquier momento entre la fecha de compra y la fecha de ejercicio, esta característica hace que las opciones tipo americano sean más valiosas porque su valor representa la posibilidad de obtener una utilidad adicional cuando los movimientos del precio lo permiten.

2.1. Opciones americanas sobre acciones.

Las opciones americanas sobre acciones tienen como problema fundamental el pago de dividendos, el cálculo del valor de las opciones no toman en cuenta el efecto de este evento que modifica el valor de la acción en el mercado, el cuadro 2.1 establece el impacto en el precio debido a los factores individuales que afectan el valor de una opción americana.

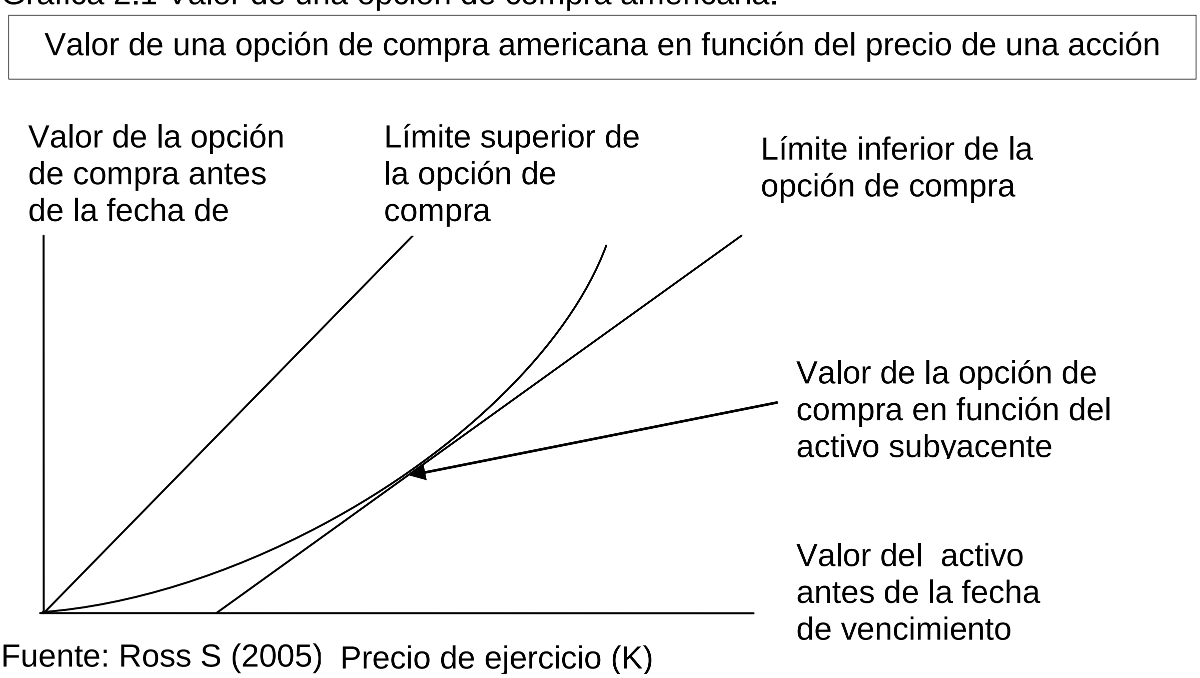
Cuadro 2.1 Impacto de los factores individuales en el valor de una opción americana.

Impacto de los factores individuales en el valor de una opción americana		
Factor	Opción americana de compra	Opción americana de venta
Subyacente de precios	+	-
Precio de ejercicio	-	+
Fecha de vencimiento	+	+
Volatilidad de los subyacente	+	+
Tasa libre de riesgo de interés	+	-
Dividendos	-	+

Fuente: Elaboración propia.

En el cuadro 2.1 se observa que al aumentar el precio de la acción en relación al precio de ejercicio aumenta la probabilidad de que la opción de compra se encuentre dentro del dinero. Si el precio de ejercicio es mayor que el precio del activo subyacente de la opción, hay menos probabilidades que una opción de compra se encuentre dentro del dinero, en lo que se refiere a la fecha de expiración, la opción americana es equivalente a una opción tipo europeo con fecha de expiración igual a la fecha de análisis y otra opción con un término mayor, esto es por la volatilidad del precio de la acción, ya que con una mayor volatilidad aumenta las posibilidades de que la opción termine dentro del dinero, el efecto de la tasa libre de riesgo, es que el beneficio corresponde al valor presente del beneficio futuro. Para las opciones de compra tipo americanas el precio de ejercicio es pagado en el momento que se asume el derecho, para las opciones de venta tipo americano el precio de ejercicio es recibido en el momento que asume el derecho. El pago de dividendos hace que el precio de las acciones se ajuste hacia abajo, esto reduce o aumenta la probabilidad de que una opción americana de compra o una opción americana de venta terminen dentro del dinero.

Gráfica 2.1 Valor de una opción de compra americana.



Fuente: Ross S (2005)

Al no existir dividendos, el precio anticipado de la opción solo interesa en el caso de las opciones de venta, por lo que la diferencia del valor entre las opciones americanas y las europeas es muy poco significativa en la mayoría de los casos. La presencia de dividendos amplía el número de situaciones en que interesa ejercer anticipadamente la opción, lo cual supone que el diferencial de valor entre las opciones americanas y europeas aumenta (Hull, 2002).

2.2. Valuación de las opciones tipo americano.

El problema de los contratos de opción tipo americanos es más complejo que las del tipo europeo, en primer lugar se debe de encontrar la función que determina el valor del instrumento y en segundo, se debe caracterizar la estrategia óptima de ejercicio mediante la frontera de valores críticos y las expectativas para establecer el beneficio esperado de un ejercicio anticipado.

Una opción tipo americana se caracteriza por la posibilidad de ejercicio anticipado en cualquier momento entre la compra y el vencimiento. Para cada tiempo *t,* existe un valor particular del subyacente $S_f(t)$ que ofrece una posibilidad de utilidad que marca la frontera entre dos regiones, por un lado se debe ejercer la opción y hacia el otro lado se debe mantener. El conjunto $\{S_f(t): t \in [0, T]\}$ es la frontera libre. La dificultad que representa la frontera libre es que no es conocida con anticipación. Lo esencial de una opción americana es que el comprador decide el momento de ejercicio que corresponde a una función no negativa C *ó* $V \geq 0$ conocida como función de retribución.

$$C(t, S) = \max(S(t) - K, 0) = (S(t) - K)^{+} \qquad \text{COMPRA} \qquad (2.1)$$

$$V(t,S) = \max(K - S(t),0) = (K - S(t))^+ \qquad \text{VENTA} \qquad (2.2)$$

En el ejercicio, dadas dos opciones una europea y otra americana sobre el mismo subyacente *S*, con el mismo precio de ejercicio *K* y vencimiento *T*, en todo momento se verifica que:

$$V_{europea}(t,S) \leq V_{americana}(t,S) \quad \forall(t,S) \in [0,T]x[0,+\infty) \qquad (2.3)$$

Una opción americana nunca puede tener un valor por debajo de su ingreso porque existiría una oportunidad de arbitraje al comprar la opción y al ejercerla:

$$(S - K)^+ \leq V_{call\,americana}(t,S) \qquad \forall(t,S) \in [0,T]x[0,+\infty) \qquad (2.4)$$

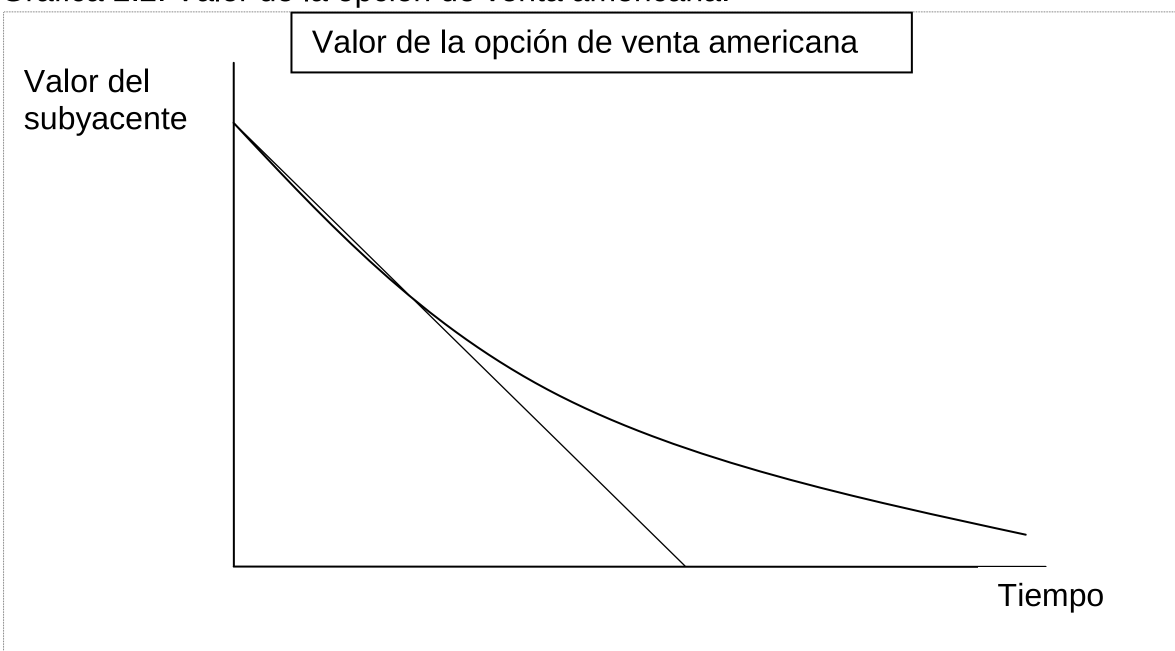
$$(K - S)^+ \leq V_{put\,americana}(t,S) \qquad (2.5)$$

En cambio una opción europea puede tomar valores inferiores a su ingreso antes del vencimiento. En la gráfica 2.2 se muestra el comportamiento del subyacente en el instante (T – t) para el vencimiento de una opción de venta tipo americana. El valor de la opción americana está constantemente por encima del ingreso, el comportamiento de la opción americana se tiene que adaptar a este ingreso.

El valor del subyacente en el punto de intersección entre el valor del subyacente y el tiempo se denomina valor crítico y depende del plazo restante hasta el vencimiento de la opción, la misma opción, con el mismo precio de ejercicio tendrá valores críticos diferentes que depende del plazo *t.* Todos estos valores críticos constituyen una curva en el plano tiempo-subyacente, que es la frontera de valores críticos S* (t).

La frontera de valores críticos S*(t) determina el momento óptimo de ejercicio en este punto que se denota. S*(t) se divide el espacio en dos zonas [0, T] x [0, +∞], a un lado de la frontera se tiene la región de ejercicio anticipado, región de parada o región de contacto con el obstáculo que si es alcanzado por el subyacente la opción deberá ser ejercida anticipadamente y se tiene la región de continuación porque no es óptimo ejercer anticipadamente la opción en este punto. El lado de la frontera arriba o abajo en que se sitúa cada región depende de que se trate de una opción de venta americana o una opción de compra americana.

Gráfica 2.2. Valor de la opción de venta americana.



Fuente: Elaboración propia.

Cualquier punto de [0, T] x [0,+∞) pertenece a la región de continuación, y se verifica con la ecuación parcial diferencial de Black-Scholes a partir de las condiciones iníciales y de frontera de la opción de compra europea. Estas opciones son valuadas con la siguiente fórmula:

$$V_{call}(S,t) = S * N(d_1) - Ke^{-r-t} - N(d_2) \qquad (2.6)$$

Donde N(x) es la función de distribución normal acumulada:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) * t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad (2.7)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \qquad (2.8)$$

El modelo de Black-Scholes no se puede aplicar de forma directa a las opciones de venta tipo americanas sobre acciones que no pagan dividendo, ya que, muestra que existe una frontera de valores críticos *S*(t)* que establece que no es óptimo ejercer antes del vencimiento. Cuando se aplica a las opciones sobre acciones que paguen dividendo, entre las opciones de compra y de venta tipo americano ya no pueden ser valuadas con la fórmula de Black-Scholes y no es posible encontrar un punto óptimo para ejercer antes del vencimiento.

Las opciones americanas pueden ser entendidas como juegos asociados a un proceso estocástico seguido por precios del activo subyacente S_t en donde el comprador paga una prima por entrar a jugar y no se puede salir cuando lo desee y recibe el ingreso que define la función de retribución *C ó V* (S_t) cuando el ingreso es negativo deja expirar su derecho al vencimiento *T*.

El comprador observa en cada momento el valor del subyacente y conoce cuál es su ganancia si se saliera en ese momento debe decidir si ejerce su derecho o continúa en la espera de un mayor beneficio. Sólo es posible ejercer una vez la opción y cuando se ejerce el derecho se extingue, si se quiere regresar al juego, es necesario comprar nuevamente el derecho de ejercicio.

Los derechos del comprador de la opción son transferibles de forma que siempre existe la posibilidad de vender a un tercero siempre que no se haya ejercido anticipadamente. Mientras que la venta del derecho implique ingresos superiores a ejercer la opción y percibir el ingreso correspondiente, nadie ejercerá anticipadamente si tiene la posibilidad de aumentar su ganancia, si ya no interesa seguir en el juego lo mejor es vender el derecho. El valor de la opción (*V (t, S))* en ausencia de arbitrajes nunca puede ser inferior al ingreso, de lo contrario sería posible comprar y ejercer inmediatamente el beneficio sin incurrir en ningún riesgo que corresponde al arbitraje, esto se puede ver en la siguiente expresión:

$$V(t,S) \geq C(S) \qquad \forall(t,S) \in [0,T]x[0,+\infty) \tag{2.9}$$

Sólo tiene sentido ejercer anticipadamente una opción cuando el valor de la opción americana es igual al ingreso. Si el comprador conociera el valor de la opción americana en todo momento, dispondría de más información sobre posibles estrategias de ejercicio óptimo. El problema es que no se conoce con certeza el valor esperado por lo que la estrategia óptima no se puede determinar y lo único que se conoce es la función de retribución *C o V* (S_t) y a partir de ahí se hace el análisis del ejercicio óptimo.

La valuación de una opción con ayuda de un modelo analítico o la aplicación de métodos numéricos, busca establecer el precio de una oportunidad de ganancias ya sea al final del periodo o durante la vida de la opción. En la valuación de opciones americanas hace diferencia entre las opciones de compra y las opciones de venta, en el caso de las opciones de compra tipo americana cuando el ejercicio anticipado, el valor de la opción corresponde al valor intrínseco, esto es; $S_C - E$. De no ejercer anticipadamente, el valor de la opción de compra se tiene como límite inferior $S_C - E(1+i)^{-T}$, es decir,

$$C \geq S_C - E(1+i)^{-T} \qquad (2.10)$$

Ya que

$$C \geq S_C - E(1+i)^{-T} > S_C - E \qquad (2.11)$$

Hull (2002) sostiene que no se ejercerá una opción de compra tipo americana sobre una opción que no reporta dividendos, es decir, sin dividendos la opción de compra americana siempre vale más viva que ejecutada. Por lo tanto la posibilidad de ejercicio anticipado no proporciona ningún beneficio especial y la opción de compra americana se puede valorar sin problemas como una opción de compra tipo europea.[3] En el caso de las opciones de venta es diferente, en el caso del ejercicio anticipado se obtiene:

$$P = E - S_C \qquad (2.12)$$

Existe un límite inferior dado por el valor intrínseco ya que el precio no puede ser menor que este, si lo fuera se denotaría inmediatamente que hay arbitraje al entrar y salir del mercado.

Si no se ejerce, a partir de la paridad de la opción de venta-compra se muestra que la opción de venta debe tener un valor igual a:

$$P = C - S_C + E(1+i)^{-T} \qquad (2.13)$$

[3] Existe un límite inferior dado por el valor intrínseco ya que el precio no puede ser menor que este, si lo fuera se denotaría inmediatamente que hay arbitraje al entrar y salir del mercado.

Una opción que asume el ejercicio previo a la fecha de termino es atractiva para los inversionistas, cuando se toma ventaja de la volatilidad que hay en el mercado bursátil a partir de un movimiento favorable del precio del activo subyacente, la opción permite el flujo asociado al producto derivado inmediatamente sin tener que esperar a la terminación del contrato, esta condición reduce el riesgo de que un movimiento adverso del precio lo prive de las ganancias que podría obtener en ese momento.

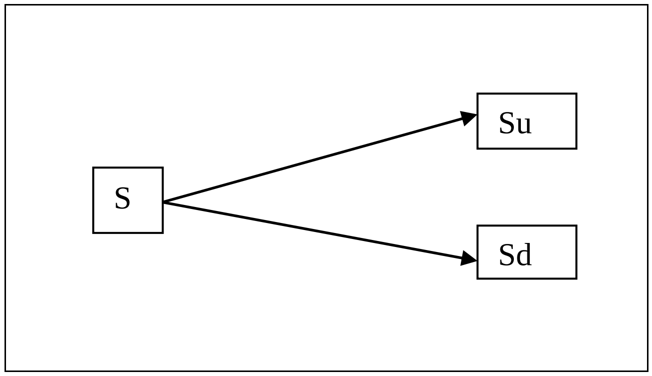
2.3. Modelo binomial.

El árbol binomial es una técnica utilizada para valorar opciones sobre acciones. El árbol binomial representa diferentes trayectorias que puede seguir el precio de la acción utilizada como subyacente. De acuerdo con Cox, Ross y Rubinstein (1979), el método binomial es un procedimiento probabilístico que no involucra problemas de frontera, aunque está interrelacionado con ellos.

2.3.1. Modelo binomial a un paso y el cálculo de la prima

El modelo binomial es un modelo discreto que muestra el comportamiento de las acciones a través del tiempo. Sí el precio de la acción en el momento t se denota por S, el modelo binomial asume que la acción se puede comportar de dos formas; por una parte una vez transcurrido el intervalo de tiempo Δt, S puede subir hacia Su ó puede bajar al precio Sd como se muestra en la gráfica 2.3. Las opciones son utilizadas en el ámbito financiero como una protección para los compradores de acciones, los conceptos importantes relacionados con opciones son; el precio de la acción que es el precio al que se encuentra en el mercado una determinada acción al día de hoy; el precio de ejercicio es el precio al que se pacta comprar las acciones en una fecha futura; el precio futuro de la opción, es el precio de la opción en una fecha futura y que es incierto.

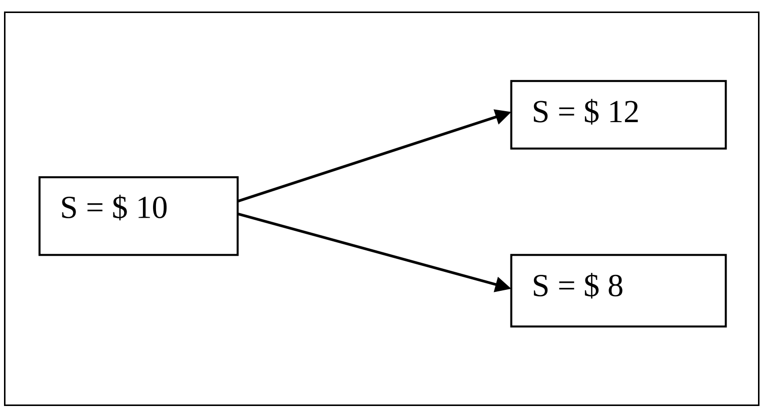
Gráfica 2.3. Movimiento de S (activo subyacente) en Δt



Fuente: Elaboración propia

Una opción de compra se utiliza para que un comprador de acciones se proteja de un aumento del precio de las acciones en el futuro. Dada esta incertidumbre, se establecen dos escenarios que muestran las situaciones a las que se puede enfrentar el comprador de acciones, estos escenarios se observan en la gráfica 2.4.

Gráfica 2.4. Movimiento de los precios del activo subyacente

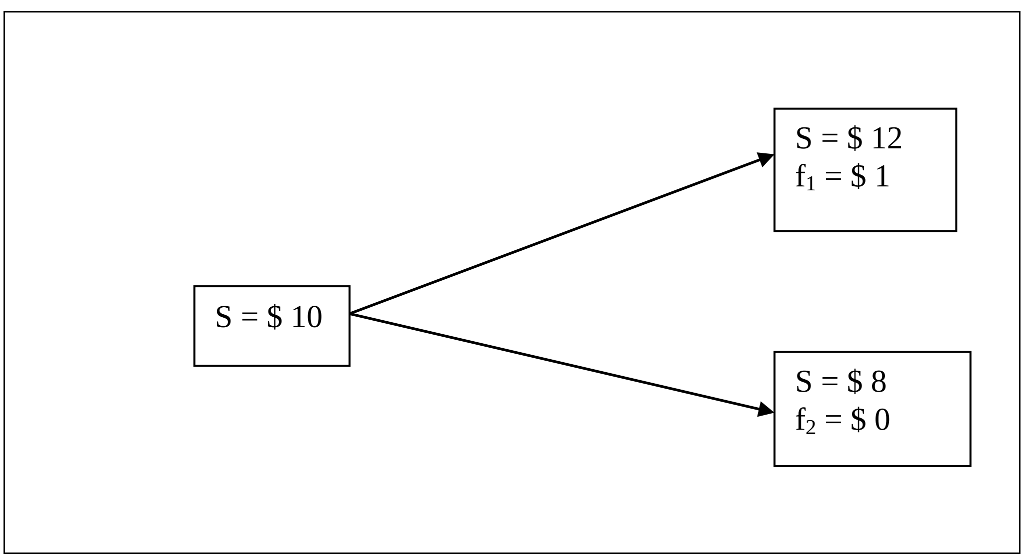


Fuente: Elaboración propia

En el primer escenario la acción sube de precio, en el segundo escenario se observa lo contrario. El comprador de opciones para tener más certidumbre va a pactar a un precio al cual comprara las acciones en el futuro, este precio es el precio de ejercicio. Para ilustrar el ejemplo anterior el precio de ejercicio es $11. Por este derecho el comprador va a pagar una cantidad denominada prima, esta prima le da derecho a comprar las acciones de su interés al precio de ejercicio independientemente del valor al que se encuentre en el mercado. En caso de que el precio de mercado de la acción sea menor que el precio de ejercicio, el comprador de la opción no ejercerá su derecho.

El valor de la prima tendrá que ver con la diferencia entre el valor del activo subyacente en el futuro menos el precio de ejercicio, a valor presente. En caso de que la diferencia sea negativa se considera que el valor de la prima es igual a 0. La gráfica 2.5 muestra estos valores, aquí se denota el valor de la prima como f_1 en caso de que el valor de la acción en un futuro aumente y f_2 en caso de que el valor de la acción disminuya.

Gráfica 2.5. Precio de la opción de compra en los dos casos posibles.



Fuente: Elaboración propia.

Las diferencias de precios analizados en la gráfica 2.5 son mostradas con una fecha futura; sin embargo, se necesita tener conocimiento de esas diferencias en una fecha actual. Para tal motivo es necesario introducir el concepto de λ, el cual es el número o proporción de acciones con las que debe contar la persona interesada en vender la opción de compra formando un portafolio, el cual se constituye con la venta de un opción de compra y la posesión de λ acciones, de tal forma que, cuando el activo subyacente disminuye a \$8, el valor de la proporción de la acción es 8λ y el valor de la opción es cero, por lo que el valor del portafolio es 8λ-0, mientras que si el precio del activo subyacente aumenta a \$12, el valor de la proporción de la acción es 12λ y el valor de la opción de compra es \$1, por lo que el valor del portafolio es 12λ-1.

Aquí el valor de la opción de compra se resta ya que para el vendedor de la opción de compra, representa una obligación. Para obtener el portafolio libre de riesgo se igualan estas dos ecuaciones, y se obtienen el valor de λ. Como se muestra a continuación:

$$12\lambda-1 = 8\lambda-0 \tag{2.14}$$

$$\lambda = 0.25$$

Una vez que se ha obtenido λ, se vuelve una labor más sencilla obtener el precio del portafolio ya que, si el precio del activo subyacente aumenta a \$12 el valor del portafolio al sustituir λ es igual a 2, y el precio del activo subyacente disminuye a \$8, el valor del portafolio es igual a 2, no importa hacia donde se mueva el precio del activo subyacente, el valor del portafolio es 2 al vencimiento.

No existen oportunidades de arbitraje, es decir, de comprar opciones a precio menor o venderlas a un precio superior, ya que se conoce el precio del portafolio al final del periodo se puede calcular el valor presente de dicho portafolio con la tasa libre de riesgo. Dado que se gráfica el portafolio con fecha a un periodo después (Δt), se necesita conocer el valor de dicho portafolio el día de hoy, por lo tanto, se obtiene el valor presente por medio de la siguiente fórmula:

$$(Su\lambda - f_1)e^{-i\Delta t} = f^* \qquad (2.15)$$

Donde:

Δt= longitud del periodo que en este caso es cada tres meses

Su = valor del activo subyacente al finalizar el periodo Δt

λ = proporción de acciones

f_1 = precio de la opción de compra con fecha Δt periodos en el futuro

f* = precio del portafolio con fecha el día de hoy

i = tasa libre de riesgo

La tasa libre de riesgo es 12% anual y al sustituir los valores respectivos de la fórmula 2.15 se obtiene el valor presente del portafolio que corresponde a:

$$2e^{-.12\left(\frac{3}{12}\right)} = 2.06 \qquad (2.16)$$

En la gráfica 2.4 se tiene que el precio del activo subyacente el día de hoy es igual a $10. Así la prima o precio de la opción que será denotada por f, se obtiene por medio de la siguiente fórmula:

$$S\,\lambda - f = f^* \qquad (2.17)$$

Donde:

S =valor del activo subyacente con fecha al día de hoy

λ = proporción de acciones

f* = precio del portafolio con fecha al día de hoy

f = precio de la opción de compra con fecha al día de hoy

Se resta el precio de compra, ya que en el portafolio se tiene la venta de compra, y representa una obligación para el que toma la posición corta. La fórmula 2.17 muestra el procedimiento de manera general, se sustituyen los valores correspondientes que permitirán obtener la prima.

$$10 * \ 0.25 - f = 2.06 \qquad (2.18)$$

$f = 0.58$

El valor de la opción de compra es de $0.58 a un paso.

Cuando se conforma un portafolio con una opción y el activo subyacente se selecciona el valor de λ que hace que quede libre de riesgo. Si hubiera un movimiento hacia arriba en el precio de la acción, el valor del portafolio al final seria $Su\lambda - \mathrm{f}_2$ y si hubiera un movimiento hacia abajo en el precio de la acción este sería $Su\lambda - \mathrm{f}_3$. Si se igualan las dos ecuaciones se obtiene:

$$Su\lambda - \mathrm{f}_2 = Su\lambda - \mathrm{f}_3 \qquad (2.19)$$

Al despejar se tiene:

$$\lambda = \frac{f_2 - f_3}{Su - Sd} \qquad (2.20)$$

Con esta λ se obtiene el portafolio libre de riesgo y este debe crecer a la tasa libre de riesgo. La ecuación (2.20) muestra que λ es la razón de cambio en el precio de las opciones, de acuerdo a los cambios en el precio de las acciones, conforme se mueve entre los nodos en el tiempo T. Si en la igualdad de la fórmula (2.17) se sustituye el valor de λ de la fórmula (2.20) y se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{f_2}-\mathrm{f_3}}{\mathrm{Su}-\mathrm{Sd}}\right)-\mathrm{f}=\left((\mathrm{Su})\frac{\mathrm{f_2}-\mathrm{f_3}}{\mathrm{Su}-\mathrm{Sd}}-\mathrm{f_2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{rT}} \qquad (2.21)$$

Con algunas simplificaciones, esta ecuación se reduce a:

$$uf-df=\mathrm{f_2}-\mathrm{f_3}-d\mathrm{f_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{rT}}+u\mathrm{f_3}\mathrm{e}^{-\mathrm{rT}} \qquad (2.22)$$

Al sumar y restar $d\mathrm{f_3}\mathrm{e}^{-\mathrm{rT}}$ de la ecuación (2.22), queda:

$$uf-df=\mathrm{f_2}-\mathrm{f_3}-d\mathrm{f_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{rT}}+u\mathrm{f_3}\mathrm{e}^{-\mathrm{rT}}-d\mathrm{f_3}\mathrm{e}^{-\mathrm{rT}}+u\mathrm{f_3}\mathrm{e}^{-\mathrm{rT}} \qquad (2.23)$$

Con algunas simplificaciones, la ecuación se reduce a:

$$f=\mathrm{e}^{-\mathrm{rT}}\left[\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{rT}}-\mathrm{d}}{\mathrm{u}-\mathrm{d}}\right)\mathrm{f_2}+\left(1-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{rT}}-\mathrm{d}}{\mathrm{u}-\mathrm{d}}\right)\mathrm{f_3}\right] \qquad (2.24)$$

Al que $p=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{rT}}-\mathrm{d}}{\mathrm{u}-\mathrm{d}}$, entonces la ecuación se reduce a, (2.25)

$$f=\mathrm{e}^{-\mathrm{rT}}[\mathrm{pf_2}+(1-\mathrm{p})\mathrm{f_3}] \qquad (2.26)$$

De la fórmula 2.25, d representa el factor de disminución y u el factor de incremento, con respecto al precio, para el ejemplo anterior se tiene:

$$u = \frac{S_u}{S} = \frac{12}{10} = 1.2$$

$$d = \frac{S_d}{S} = \frac{8}{10} = 0.8$$

Y con los datos del ejemplo anterior se tiene:

$$p = \frac{e^{.12\left(\frac{3}{12}\right)} - .8}{1.2 - .8} = .602 \qquad (2.27)$$

Por lo que se concluye que la probabilidad de que suba el activo subyacente es de .602 y de que baje seria el complemento (1- p)= .398. Al aplicar la fórmula 2.26 con los datos del ejemplo descrito en la sección anterior, es decir con f_1=1 y f_2=0, con τ=3/12 y con r=12%, y con la p obtenida en la ecuación 2.27 se obtiene:

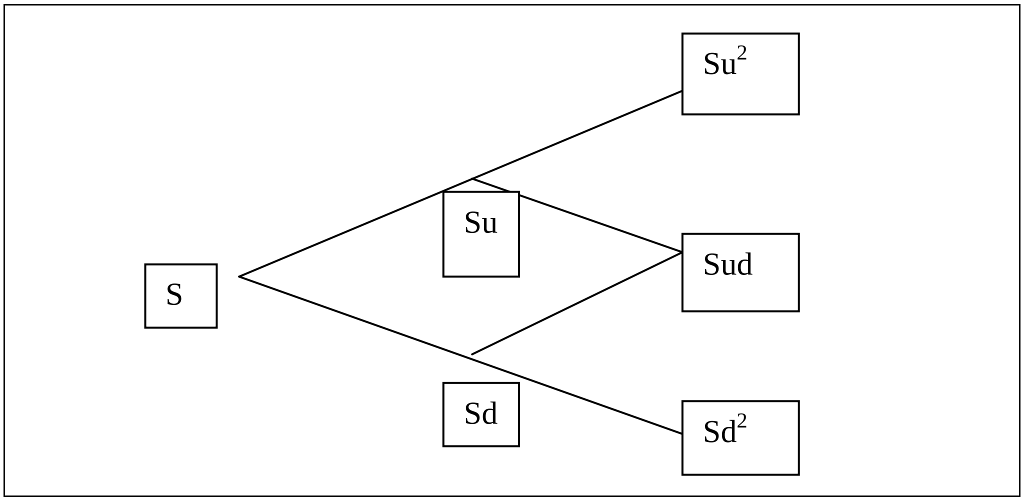
$$f = e^{-(0.12)\left(\frac{3}{12}\right)}[0.602 * 1 + 0.398 * 0] = .58$$

El resultado coincide con el anterior.

2.3.2 Modelo binomial a tres pasos y el cálculo de la prima.

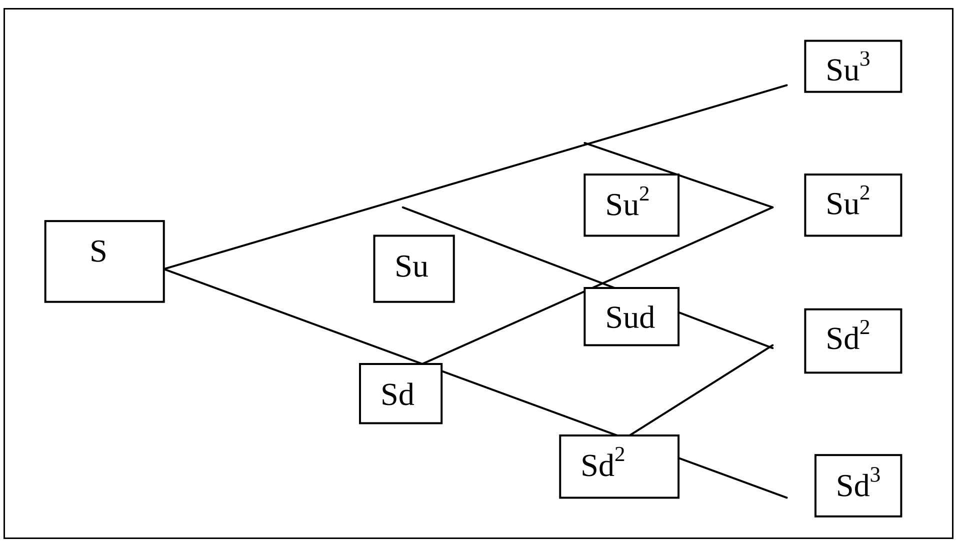
Con forme se utilizan mas pasos el modelo se vuelve más complicado cuando se llega al periodo 2Δt, las posibilidades para S aumentan a 3, como se muestra en la gráfica 2.6. Cuando se llega al periodo 3Δt, S cuenta con cuatro diferentes alternativas como se muestra en la gráfica 2.7 y así sucesivamente a medida que pasa el tiempo, el árbol aumenta a n pasos y arroja n+1 salidas para S.

Gráfica 2.6: Movimiento de S (activo subyacente) en 2Δt



Fuente: Elaboración propia

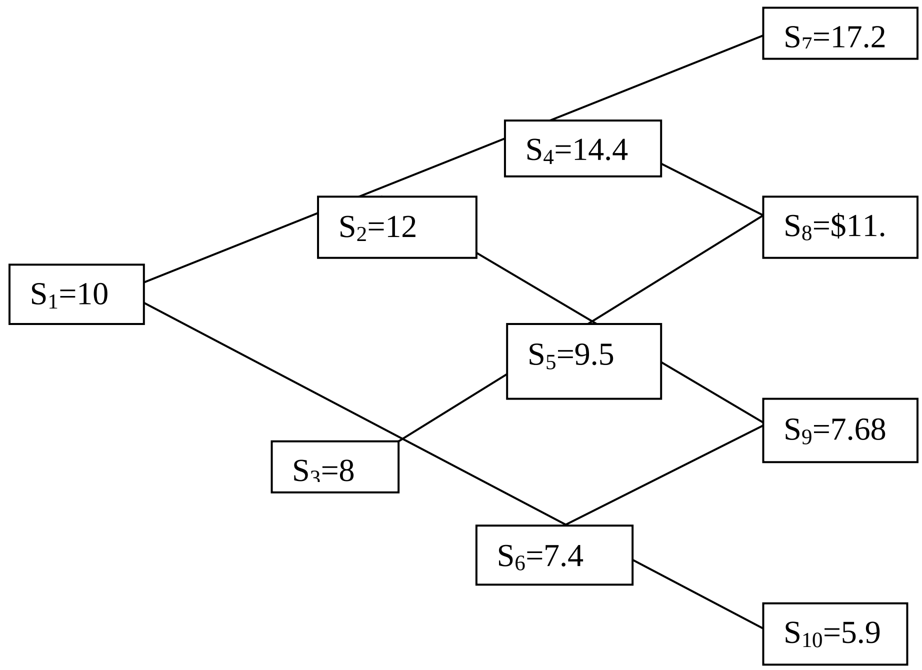
Gráfica 2.7: Movimiento de S (activo subyacente) en 3Δt



Fuente: Elaboración propia

Cuando el árbol binomial es a tres pasos, el activo subyacente puede aumentar o disminuir como se muestra en la gráfica 2.8.

Gráfica 2.8: Movimiento de los precios del activo subyacente a tres pasos

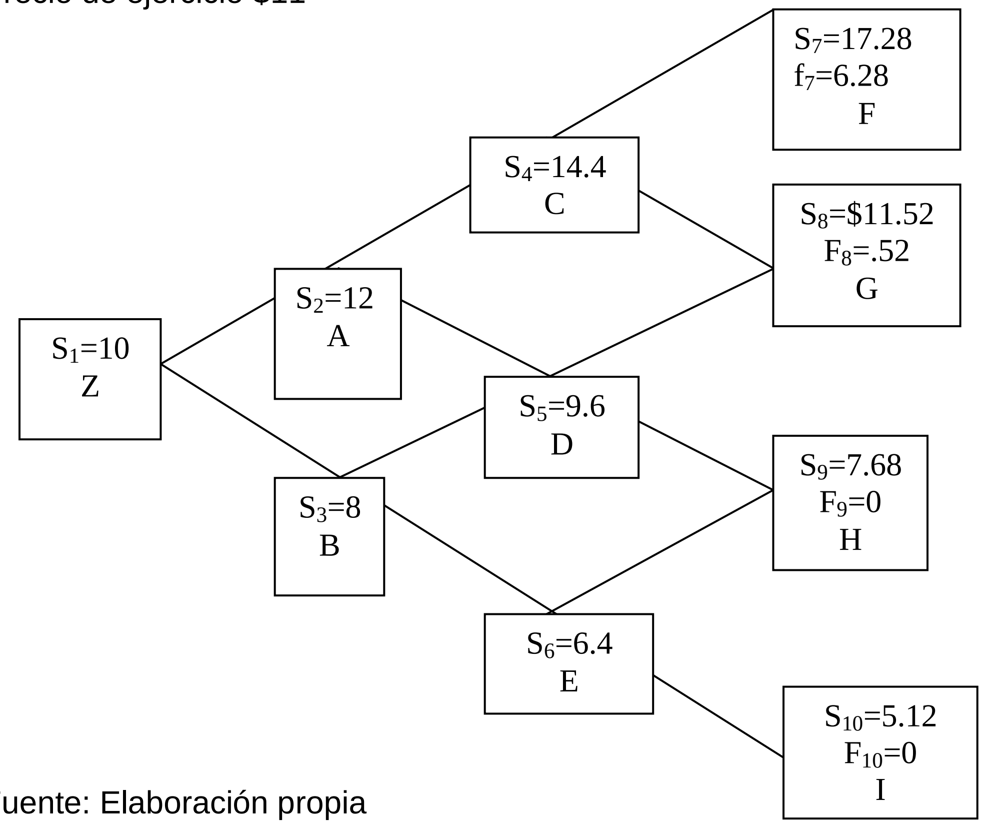


Fuente: Elaboración propia

Este árbol binomial a tres pasos contiene cuatro salidas que están denotadas por S_7, S_8, S_9, S_{10}. Los valores que se muestran en cada una de las salidas son calculados de acuerdo a una tasa del 20%.

Ahora se calcula la prima para el árbol binomial a tres pasos de manera semejante como se hizo con el árbol binomial a un paso. El precio del ejercicio es igual a $11, se obtiene el valor de la opción al vencimiento para las cuatro salidas del árbol binomial a tres pasos. Dichos valores de las opciones serán $6.28, 52, 0, 0 las cuales serán denotadas por f_7, f_8, f_9, f_{10} respectivamente. En la gráfica 2.9 se muestran los valores de estas salidas representados por las letras F, G, H, I.

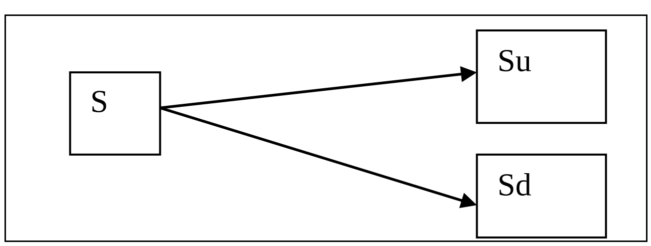
Gráfica 2.9: Movimiento de los precios de la opción de compra a tres pasos. Precio de ejercicio $11



Fuente: Elaboración propia

El modelo binomial a tres pasos proporciona combinaciones de acuerdo al comportamiento del activo subyacente y el tiempo. Se tiene que el tiempo Δt el precio del activo subyacente tendrá 2 posibilidades, haber experimentado un aumento, el cual es denotado con Su, por otra parte S puede sufrir una disminución que solía ser expresada para fines del ejemplo con Sd. Esta analogía se muestra en la gráfica 2.10.

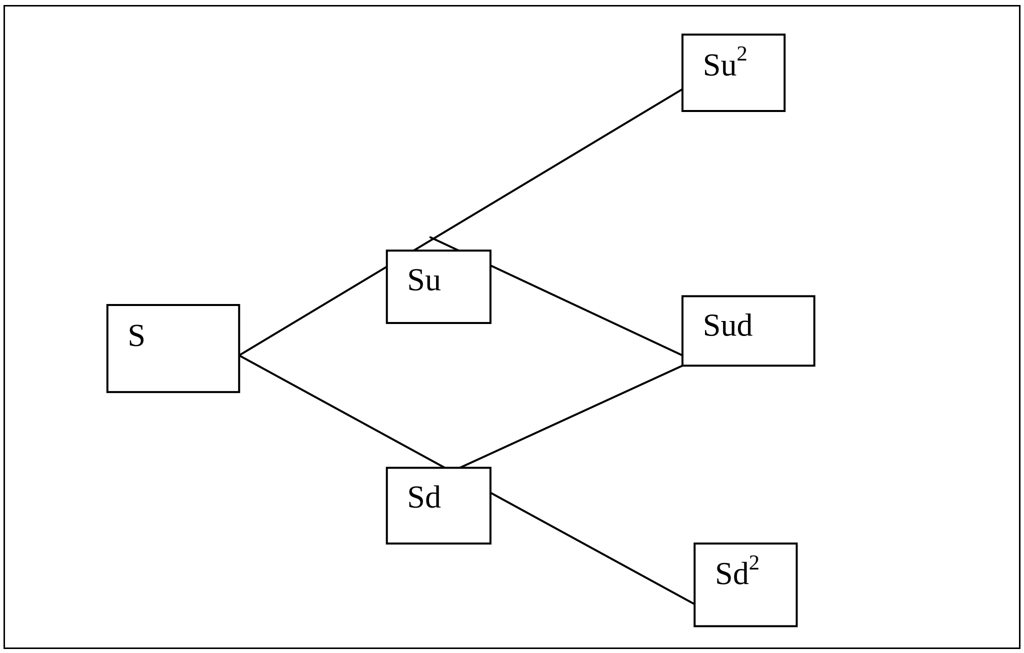
Gráfica 2.10. Aumento y disminución del precio del activo subyacente.



Fuente: Elaboración propia.

Una característica particular de un árbol binomial es que para cualquier periodo dos nodos que son vecinos es que en el siguiente periodo si el de menor valor aumenta y el de mayor valor disminuye coinciden en el mismo precio con lo que para cada pareja de nodos en el siguiente paso solo se crean tres con se presenta en la gráfica 2.11.

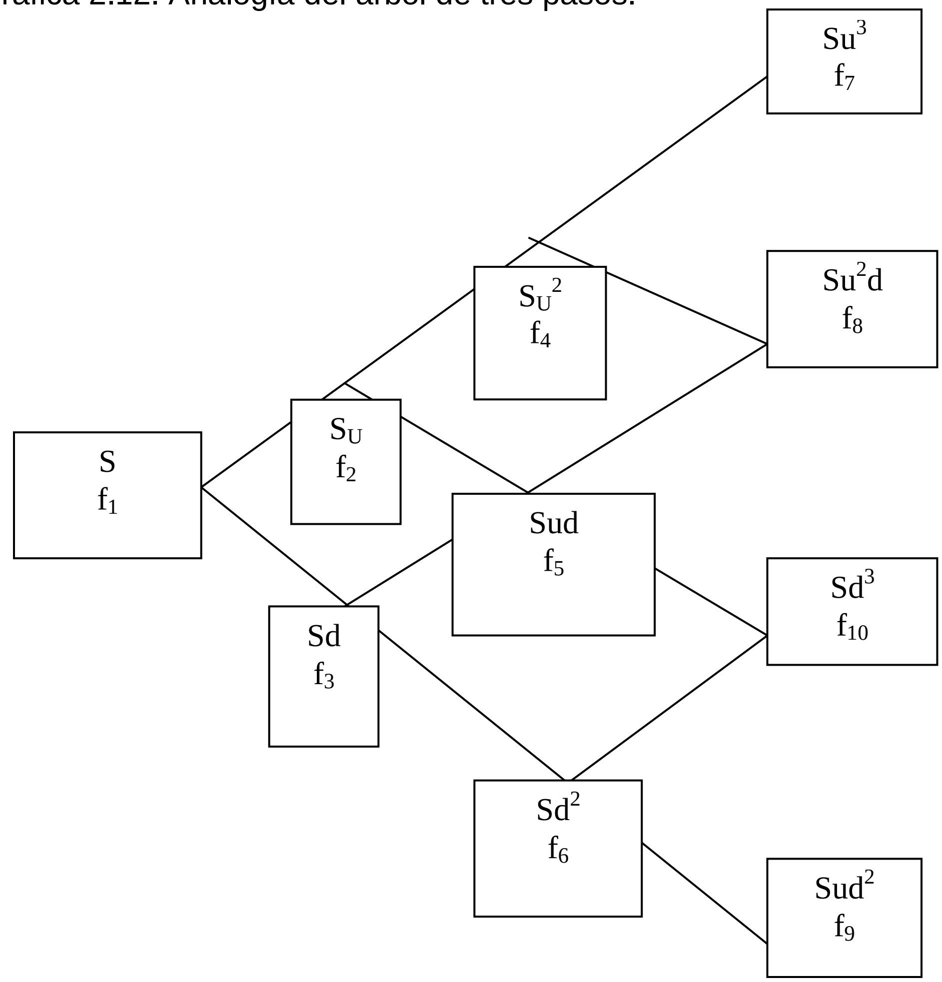
Gráfica 2.11: Analogía a dos pasos



Fuente: Elaboración propia

Las trayectorias posibles del precio S a lo largo de los periodos de tiempo 0, Δt, 2Δt corresponde a las posibilidades que describe el árbol binomial, cuando el tiempo avanza al periodo 3Δt se tienen 4 posibilidades del precio distintas a partir del instante 2Δt, como se aprecia en la gráfica 2.12.

Gráfica 2.12. Analogía del árbol de tres pasos.



Fuente: Elaboración propia

El árbol a tres pasos se calcula igual que un árbol a un paso, y el procedimiento se replica en cada nodo, en cada periodo cada nodo representa un pequeño árbol a un paso que es independiente del resto del árbol, la construcción del árbol es un proceso hacia delante y el cálculo del valor de la opción corresponde a una evaluación hacia atrás de los precios implícitos de la opción y se determina el valor presente de los posibles beneficios, esto se repite sucesivamente hasta llegar al nodo inicial.

Para determinar el precio de la opción de compra en el tiempo t, es necesario desarrollar el árbol binomial para obtener el precio del activo subyacente en cada uno de los periodos (0, Δt, 2Δt, 3Δt), entonces es posible con ayuda de la sustitución hacia atrás encontrar el precio buscado.

A manera de ejemplo se presenta el cálculo del precio de la opción de compra con ayuda de un árbol binomial a tres pasos que se observa en la gráfica 2.9 se ilustra el cálculo, se inicia con el valor intrínseco que se obtiene a partir de la diferencia entre el valor del activo subyacente menos el valor de precio de ejercicio, que se repite para cada una de las 4 posibilidades de precio en el instante 3Δt.

En la gráfica 2.12 se muestra que se puede llegar a Sud^2 a través de varios caminos, ahora se encontrará el valor para el precio de la opción de compra en el tiempo 2Δt, como se hizo para el caso del método binomial a un paso lo primero es igualar los dos portafolios para obtener λ, y se obtiene:

$$17.2\lambda - 6.28 = 11.52\lambda - .52 \qquad (2.28)$$

$$\lambda = 1$$

Al sustituir λ en cualquiera de las ecuaciones se obtiene el valor del portafolio y sus componentes, para continuar se debe traer a valor encontrado al valor presente del paso anterior, por lo tanto, con la fórmula (2.15), y al sustituir los valores de este ejemplo se obtiene:

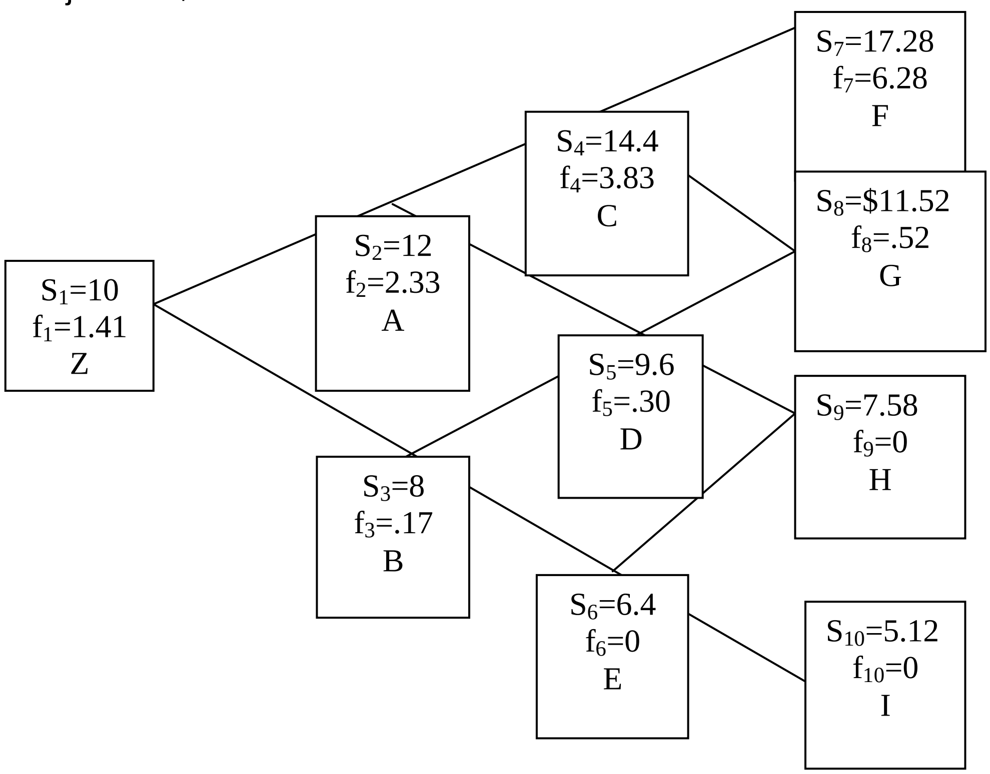
$$11e^{-.12\left(\frac{5}{12}\right)} = 10.57 \qquad (2.29)$$

Al sustituir el valor del portafolio en la fórmula (2.17) se obtiene el valor de la opción de compra que corresponde a:

$$14.1 * \ 1 - f = 10.57 \qquad (2.30)$$

$$f = 3.83 \qquad (2.31)$$

Gráfica 2.13: Valor del Activo Subyacente y de la prima en cada paso. Precio de ejercicio $11



Fuente: Elaboración propia.

En los puntos CFG, el valor de la opción de compra f_4, es de 3.83 como se observa en la gráfica 2.13, al calcular los valores de los puntos DGH y EHI se obtienen los valores de f_5, y f_6. Para obtener el valor de f_2 se utilizan los valores de f_4 y f_5, así como se calculó f_4, de la misma forma se calculará f_3 con los valores de f_5 y f_6. Se realiza un proceso semejante en Δy y de los puntos ACD se obtiene f_2, de BDE f_3. El procedimiento termina cuando se halla el valor de f_1 que si se ha seguido el procedimiento correctamente, éste es el valor actual de la opción de compra, para este caso es de 1.41, este resultado se observa en la gráfica 2.13.

Para realizar el cálculo de la prima a través de probabilidades implícitas es necesario calcular la p, al sustituir los valores de cada nodo en la fórmula 2.25, para obtener la probabilidad para el primer nodo CFG se utilizan las siguientes fórmulas:

$$u = \frac{S_u}{S} = \frac{17.28}{14.4} = 1.2$$

$$d = \frac{S_d}{S} = \frac{\$11.52}{14.4} = 0.8$$

$$p = \frac{\mathrm{e}^{-.12\left(\frac{3}{12}\right)} - .8}{1.2 - .8} = .602$$

Se puede observar que u y d se mantienen constantes durante todo el árbol binomial por lo que nodo a nodo el cálculo de la probabilidad (p=.062) que se mantiene constante.

Las primas se pueden obtener, mediante la aplicación de la fórmula 2.26, pero para el caso a tres pasos varia la metodología, ya que para las cuatro salidas (f_7, f_8, f_9 y f_{10}) es necesario multiplicar cada una por la probabilidad de llegar a ese punto. Para llegar a f_7 solo se puede llegar cuando en los tres periodos sube con probabilidades p, por lo que para llegar a este nodo será necesario multiplicar $f_7 * p^3$, para la segunda salida existen caminos diferentes: es decir que en el primer y segundo periodo haya subido y en el tercero haya bajado ó que haya subido en el primero, bajado en el segundo y subido en el tercero o que haya bajado en el primer periodo y subido en el segundo y tercer periodo, pero las tres posibilidades nos llevan a las misma f_8. Al calcular la probabilidad de llegar a este punto en los tres casos será multiplicar p^2 (1-p), por lo que para llegar a este nodo se multiplica f_8*3p^2 (1-p).

Para el caso de la tercera salida existen 3 caminos diferentes: es decir, que en el primer periodo haya subido, y en el segundo y tercer período haya bajado, o que haya bajado en el primero, subido en el segundo y bajado en el tercero, o que haya bajado en el primer y segundo periodo y subido en el tercer periodo, pero con las tres posibilidades se obtiene f_9. Al calcular la probabilidad de llegar a este punto en los tres casos será multiplicar p $(1\text{-}p)^2$, por lo que para llegar a este nodo multiplicaremos f_9*3p $(1\text{-}p)^2$. En la cuarta salida solo existe un camino para llegar al nodo f_{10}, es decir que en los 3 periodos se ha presentado una disminución con probabilidad (1-p), por lo que para llegar a este nodo será necesario multiplicar f_{10}*$(1\text{-}p)^3$.

Así se obtiene la prima, al traer a valor presente la suma de estas probabilidades multiplicadas por el valor de f en cada nodo, es decir el valor esperado, se obtiene:

$$f_1 = \mathrm{e}^{-r3T}[p^3 f_7 + 3p^2(1-p)f_8 + 3p(1-p)^2 f_9 + (1-p)^3 f_{10}] \qquad (2.32)$$

Al aplicar la fórmula 2.32 con los datos del ejemplo anterior, es decir con f_7=6.28, f_8=.52, f_9=0 y f_{10}=0, con τ= 3/12 y con r=12%, y con la p=.602 se obtiene:

$$f_1 = e^{-(.12)3\left(\frac{4}{12}\right)}[(.602)^3 * 6.28 + 3(.602)^2(1-.602) * .52 + 3(.602)(1-.602)^2 * 0 + (1-.602)^3 * 0]$$

$$f_1 = 1.41$$

El valor coincide con el obtenido anteriormente.

2.3. Modelo para la valuación de opciones americanas.

Para la valuación de una opción americana de venta que permite el ejercicio antes del vencimiento se analiza en primera instancia el modelo de Merton (1975) y el modelo de Brennan-Schwartz (1977). Se asume que el comportamiento del precio del suyacente de la acción sigue un proceso geométrico browniano, definido por la siguiente ecuación:

$$\frac{ds}{s} = \mu dt + \sigma dz \qquad (2.33)$$

Donde:

dz = es el incremento de un proceso Gauss- Weiner,

σ = es la desviación estándar instantánea de los retornos del precio spot

μ = es el retorno esperado total de invertir en el activo S

El modelo de precios definido por la ecuación (2.33) resulta no estacionario, debido a la raíz unitaria presente en todos los movimientos geométricos brownianos. Esto provoca que el modelo ignore los ciclos de precios de las acciones, producidos por las fluctuaciones de la oferta y demanda de estos activos, como lo demuestra Black-Scholes y Merton (1977), por las consideraciones de arbitraje establecidas el valor de la opción americana de venta se calcula por la ecuación diferencial parcial.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_{SS} + rSP_S - rP - P_\tau = 0 \qquad (2.34)$$

Donde los subíndices de las variables denotan la diferenciación de la ecuación parcial, y P(S, t) debe cumplir con las condiciones adicionales:

$$P(S,T) = max[E_T - S,0] \qquad (2.35)$$

El valor de la opción americana de venta al vencimiento es igual a la mayor parte de su valor de ejercicio.

$$P(S,t) \geq max[E_T - S,0] \qquad (2.36)$$

La posibilidad de un ejercicio anticipado impide que el valor de la opción americana de venta se encuentre por debajo del valor de ejercicio.

$$P(S,t) \leq E_t \qquad (2.37)$$

La ecuación 2.37 cumple con que el precio de ejercicio tiene una función no decreciente de tiempo hasta su vencimiento. Por lo tanto, el valor máximo que la opción de venta puede alcanzar el precio de ejercicio en curso, esto solo si el valor de precio de las acciones es cero.

La consideración de la dominancia estocástica, indica que el valor de la opción americana de venta nunca puede superar este valor máximo.

$$P(S,t) \geq 0 \qquad (2.38)$$

Dado que el valor de contrato de una opción americana de venta nunca puede estar por debajo de cero, como se muestra en la ecuación:

$$P(S,t) \geq max[E_T - S,0] \qquad (2.39)$$

El valor de una opción americana de venta es una función convexa del conjunto de precios, el precio de la opción americana de venta debe cumplir con:

$$\lambda P(S_1,E) + (1-\lambda)P(S_2,E) \geq P(\lambda S_1 + (1-\lambda)S_2,E), 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad (2.40)$$

Para ver que $S_1 = h_1 E$, $S_2 = H_2 E$. En la ecuación siguiente se demuestra que:

$$\lambda P(h_1 E,E) + (1-\lambda)P(h_2 E,E) \geq P(\lambda h_1 E + (1-\lambda)h_2 E,E) \qquad (2.41)$$

Si el precio de la opción es homogénea de grado uno en el conjunto de precios y en el precio de ejercicio, entonces la ecuación (2.41) es equivalente a:

$$\lambda P\ h_1\left(E,\frac{E}{h_1}\right) + (1-\lambda)h_2 P(E,E/h_2) \geq (\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2)P\left(E,\frac{E}{(\lambda h_1} + (1-\lambda\right)h_2)) \qquad (2.42)$$

Al considerar la formación de un portafolios de λh_1 de opción de venta con un precio de ejercicio de E/h_1, y $(1-\lambda)\ h_2$ de opción de venta con un precio de ejercicio de E/h_2. El valor de este portafolio cuando el precio de las acciones es igual a E viene dado por el resultado del lado izquierdo de la ecuación (2.42). El lado derecho de la ecuación (2.42) muestra el valor del portafolio $(\lambda h_1 + (1-\lambda)\ h_2)$ de venta con un precio de ejercicio de $E/(\lambda h_1 + (1-\lambda)\ h_2)$, cuando el precio de las acciones es E.

La convexidad del precio de venta junto con los límites superior e inferior en el valor de la opción de venta dada por las ecuaciones (2.36) y (2.37) implica que:

$$\lim_{S \to \infty} Ps\ (S,t) = 0 \qquad (2.43)$$

Si en el tiempo t es el cambio en el precio de ejercicio, y un dividendo discretos D_t, es pagado t^- denota un instante antes del cambio de precio del dividendo entre el ejercicio, y t^+ en el instante después. Entonces el valor de la opción de venta depositado debe cumplir:

$$P(S,t^-) = max\,[E_{t^-} - S, P(S - D_t, t^+] \qquad (2.44)$$

Donde P (S, t +) es el valor depositado cuando cambia el precio de ejercicio a E, +.

La ecuación (2.44) refleja el hecho de que el valor de la opción de venta antes del cambio de precio al anunciar el dividendo y el ejercicio sea igual al mayor valor de ejercicio inmediato (E,-S) y el valor después del cambio de precio entre el dividendo y el precio de ejercicio, P (S-D_1,t^{+}). Si un dividendo se paga sin compensar el cambio en el precio de ejercicio, entonces nunca tendrá que pagar el titular el ejercicio del dividendo porque entonces se obtiene la siguiente ecuación:

$$P(S - D_t, t^+) \geq E - (S - D_t) > E - S \qquad (2.45)$$

El valor ex-dividendo de la opción de venta es superior a su valor neto de los dividendos del ejercicio. El problema de la valuación de la opción de venta se resuelve con la ecuación diferencial.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_{SS} + rSP_S - rP - P_\tau = 0 \qquad (2.46)$$

La aproximación de las derivadas parciales se puede escribir como:

$$aiPi-1,j+biPi,j+ciPi+1,j=Pi,j-1; i=1,\ldots.,(n-1), j=1,\ldots,m \quad (2.47)$$

Donde:

$$ai=\frac{1}{2}rki-\frac{1}{2}\sigma^2ki^2$$

$$bi=1+rk+\sigma^2ki^2$$

$$ci=-\frac{1}{2}rki-\frac{1}{2}\sigma^2ki^2$$

$$P(S,\tau)=P(Si,\tau j)=P(ih,jk)=Pi,j \qquad (2.48)$$

Donde:

h = es el incremento discreto en el precio de las acciones

k = es el tiempo hasta el vencimiento.

m = es el número de incrementos discretos en el tiempo hasta el vencimiento (tiempo de expiración de la opción de venta)

n = es el precio de las acciones.

Después la condición de frontera dada por la ecuación (2.43) se aproxima bien al valor de las acciones consideradas de precio más alto. La condición de frontera dada por la ecuación (2.43) que tiene a todos los valores de j se aproxima por:

$$Pn-1,j-Pn,j=0 \qquad (j=1,\ldots,m) \qquad (2.49)$$

En las ecuaciones (2.47) y (2.48) se constituyen un conjunto de n ecuaciones lineales en las (n + 1) incógnitas $P_{i,j}$ (i= 0,1 .., n) y con la adición de una ecuación que permite resolver de $P_{i,j}$ en términos de $P_{i,j-t}$, Puesto que $P_{i,0}$ viene dada por las condiciones que rigen el valor de la expiración de la opción de venta, el conjunto de $P_{i,,j}$ se puede resolver por la solución repetida de el conjunto de ecuaciones. Las soluciones a la ecuación diferencial debe cumplir el límite de la condición de la ecuación (2.36), que se puede escribir como;

$$Pi,j \geq Ej - ih \qquad (i = 0,1, \ldots \ldots, n) \qquad (2.50)$$

Donde E_j son las reglas del precio de ejercicio de j incremento en el tiempo (r = jk), la ecuación diferencial es válida sólo para los valores de P, para la cual la ecuación (2.48) se mantiene como una estricta desigualdad. El precio de la acción máximo de la ecuación (2.48) tiene como una igualdad, el precio de la acción crítica, es el precio al que la opción de venta debe ser ejercida.

2.4. Modelo de Schwartz.

El modelo de Schwartz (1977) se refiere a la valoración de opciones de compra americana sobre acciones que paga dividendos discretos. El marco teórico es el mismo que se aplica con el modelo Black and Scholes (1973) se considera que entre dos fechas de pago de dividendos, la dinámica del valor de la acción sigue un proceso geométrico browniano,

$$dS = \alpha S dt + \sigma S d \qquad (2.51)$$

Para simplificar la presentación pero sin pérdida de generalidad, los dividendos son constantes y conocidos:

$$d_\zeta = d \forall_{\delta\zeta} = 1, \ldots, n$$

En estas condiciones, el valor de la opción entre dos fechas de pago de dividendos se verifica por la ecuación en derivadas parciales (EDP):

$$\frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2\left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)+rS\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)+\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)-rC=0 \qquad (2.52)$$

La ecuación debe de sujetarse a las condiciones de frontera siguientes:

En la fecha de vencimiento T (τ = 0) el valor de la opción será si S < k o S - k en caso contrario; es decir,

$$C(S,T^+)=max[0,S-K] \qquad (2.53)$$

En cualquier instante, si la acción carece de valor, S = 0, entonces,

$$C(0,t)=\ 0 \qquad (2.54)$$

En cada fecha t en que la acción hace efectivo un dividendo se impone la condición siguiente; en el instante inmediatamente después del pago del dividendo el valor de la acción se reduce en la cuantía del dividendo; es decir, pasa de valer S en τ^+ a valer S - d en τ^-. Puesto que la opción puede ejercerse en cualquier momento, pudiera ser más que valiera más si se ejerce justo antes del pago del dividendo que inmediatamente después; por tanto,

$$C(S,T^+)=max[0,S-K,C(S-d,T^-)] \qquad (2.55)$$

Por último, cuando el precio de la acción tiende a infinito, la derivada parcial del valor de la opción tiende a 1, la idea que subyace en la igualdad anterior es que $C_1\left(S,\tau^{+}\right) \geq C(S,\tau^{*})$, donde $\tau^{*} = t_{\zeta}^{-} - t$ y t_{ζ} es la primera fecha después de t, en que se pagan dividendos. Cuando $S \dashrightarrow \infty, C\left(S,\tau^{*}\right) \to S - ke^{-r\tau^{*}}$; como C es, entre dos fechas de pago de dividendos, una función convexa con respecto de S, para valores suficientemente grandes se mantendrá paralela a $S - ke^{-r\tau^{*}}$, ya que en caso contrario existirían valores de la acción, tales que $C_1 < C$.

Donde:

d = representa la cantidad de dividendos

T^{+} y T^{-} = se refieren a los instantes justo antes y justo después de que el activo subyacente page el dividendo.

La opción americana de compra debe cumplir con tres condiciones fundamentales para su valuación: La primera condición de la opción americana de compra es saldar antes de la fecha de vencimiento. La segunda condición muestra que la opción americana de compra no tiene ningún valor cuando el activo subyacente es cero. La tercera condición indica que el valor de la opción americana de compra no puede ser inferior a su valor de ejercicio inmediato cuando el activo subyacente paga dividendo. Esta condición se caracteriza por la existencia de un cierto nivel del activo subyacente para el cual el valor de la opción con dividendos es igual a su valor de ejercicio. Este es el precio del activo subyacente crítico a la situación en la que el valor intrínseco de la opción está por encima de C(S,T). De esta forma requiere el uso de las siguientes condiciones de la opción derivada con respecto al activo subyacente:

$$\lim_{S\to\infty} \frac{\partial C(S,\tau)}{\partial S} = 1 \qquad (2.56)$$

Esta condición debe cumplirse para que se dé un nivel elevado del activo subyacente.

2.5. Modelo de Brennan-Schwartz.

Este modelo es una modificación a los diferentes métodos de diferencias finitas utilizados para la resolución de problemas de frontera con ecuación de derivadas parciales (PDE) que se adapten a la resolución del problema asociado con una opción tipo americana la propuesta de Brennan y Schwartz (1977), en principio, el fundamento riguroso de lo que proponían era escaso, pero el algoritmo era simple e intuitivo, de ahí el interés por analizarlo y comprenderlo.

Brennan y Schwartz proponen que en cualquier método de la familia de diferencias finitas que se utilice para la valoración de una opción de venta americana, después del cálculo del valor de la opción en un nodo, se debe comparar el valor preliminar con el ingreso que correspondería a dicho nodo si la opción se ejerce anticipadamente en dicho punto, de la comparación se toma como valor definitivo el mayor de los dos. Esto determina que el valor de una opción americana nunca puede ser inferior al ingreso que correspondería, porque de lo contrario existirían oportunidades de arbitraje al comprar la opción y al ejercerla de inmediato, la siguiente ecuación ilustra esta situación.

$$V_{i,j} = \max(V_{i,j}, \max(K - S_i, 0)) \qquad (2.57)$$

La resolución numérica del problema de frontera al utilizar los métodos de diferencias finitas se realiza hacia atrás en el tiempo, esta fórmula debe hacerse de modo que afecte a todos los valores anteriores. Lo importante es que el sistema de diferencias finitas converge hacia la solución exacta del problema principal *V (t, S)* conforme la discretización se hace más densa, de tal manera que la solución exacta se puede aproximar.

Un sistema se dice que es consistente si las diferencias entre los valores exactos correspondientes a los nodos y los valores calculados mediante el sistema de diferencias finitas tiende hacia cero cuando el retículo se hace cada vez más denso. Esto no es difícil de comprobar pues si las ecuaciones lineales que conforman el sistema de diferencias finitas tienen un error que tiende a cero al hacerse más denso el retículo, entonces el sistema será consistente.

Brennan y Schwartz (1977) presentaron una solución numérica para la valoración de opciones de venta tipo americano, esta solución es utilizada solo cuando hay distribuciones discretas del activo subyacente. La valoración de la opción americana de venta está dada por la solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en las siguientes condiciones:

$$P(S,T) = max[0, K - S] \qquad (2.58)$$

$$P(S,t) \geq max[0, K - S] \qquad (2.59)$$

$$P(S,t) \geq 0 \qquad (2.60)$$

$$P(S,t) \leq K \qquad (2.61)$$

$$\lim_{S\to\infty} \frac{\partial P(S,t)}{\partial S} = \qquad (2.62)$$

La condición que se encuentra en la ecuación (2.58) corresponde al valor puesto a la fecha de vencimiento que es simplemente el mayor de cero y contiene el valor intrínseco. En la ecuación (2.59) se muestra que el valor depositado en la opción americana de compra debe ser mayor que su valor de ejercicio en cada instante.

Por lo tanto, en las ecuaciones (2.60) y (2.61), muestran respectivamente, el mínimo valor que debe tener la opción americana de compra y el precio máximo para una opción de venta. En la ecuación (2.62) se muestran los resultados de las ecuaciones (2.60) y (2.61) y la convexidad del precio de la opción. En una fecha de dividendos, deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$P(S,t-) = MAX\{K - S, P(S - D1, t+)\}\ 0 \qquad (2.63)$$

Esta condición muestra que justo antes de que la acción sea pagada en el instante t^- y que el valor de la opción americana de venta depositado debe ser igual o mayor al valor intrínseco de la misma, esto se mide cuando el precio de la opción americana de venta se paga en el instante t^+.

2.6. El Método de diferencias finitas.

El método diferencias finitas puede manejar procesos con cocientes variables en el tiempo, modelos de tasa de interés simples o multifactoriales, el método determina el valor un derivado al resolver la ecuación diferencial que describe su comportamiento, la ecuación diferencial original se convierte en una serie de ecuaciones diferenciales, que se resuelven de manera iterativa.

Para valuar una opción de venta tipo americana sobre una acción que no paga dividendos,la ecuación diferencial que la opción debe satisfacer es la misma presentada por Black y Scholes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 t} = rf \qquad (2.64)$$

Para obtener la solución se divide el tiempo total, entre el instante cero y el instante de madurez de la opción, T, en una serie de intervalos iguales, en donde $\Delta t = T / N$ y con lo que se tiene N + 1 intervalos:

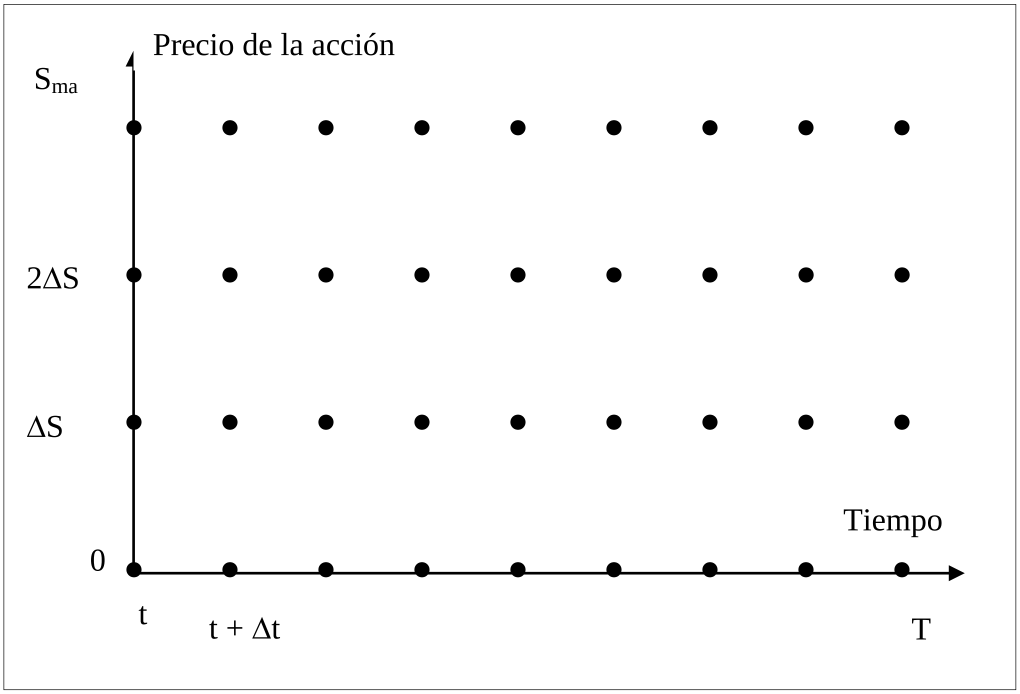
$0, \Delta t, 2\ \ \Delta t, \qquad 3\ \Delta t\ \ldots T$

Como siguiente acción el precio se divide en la acción equidistante, si S_{max} es aquel precio de la acción suficientemente alto tal que si es alcanzado, la opción de venta no tiene valor. Se define un $\Delta s = S_{max} / M$ y se toma un total de M + 1 posibles precios de acción:

$$0, \Delta S, 2\ \ \Delta S,\ \ 3\ \Delta S\ \ldots Smax$$

Se asume que uno de estos valores es el valor actual de la acción. Esta aproximación general es representada gráficamente en la gráfica 2.14 que muestra, una malla de *(M*+1*)* por *(N*+1*)* puntos para la aproximación por medio de diferencias finitas. El punto *(i,j)* de la malla es el punto que corresponde al tiempo $i\Delta t$ y al precio de la acción $j\Delta S$. *P*ara denotar el valor de la opción en el punto *(i,j)*, se utilizara la variable $f_{i,j}$.

Gráfica 2.14. Malla de puntos para la aproximación mediante diferencias finitas.



Fuente: Elaboración propia.

2.6.1. El Método de las diferencias finitas implícitas y su implementación.

Para un punto interior de la malla *(i,j)*, *∂f/∂S*, *∂f/∂t*, $\partial^2 f/\partial S^2$ pueden ser aproximados mediante *DF*, obteniéndose:

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-2f_{i,j}}{\Delta S^2} = rf_{i,j} \qquad (2.65)$$

Para $j = 1,2, \ldots , M - 1$ e $i = 0, 1, \ldots , N - 1$. Al reordenar los términos, se obtiene:

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j\mp1} = f_{i+1,j} \qquad (2.66)$$

Donde

$$a_j = \frac{1}{2} rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

$$b_j = 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t$$

$$c_j = -\frac{1}{2} rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

El valor de la opción de venta en el tiempo *T* es Max [*X* - S_T *, 0]* donde S_T es el valor de la acción en el tiempo *T*. Por lo tanto:

$$f_{N,j=} \text{Max}\,[X - j\Delta S, 0] \;\; j = 0,1, \dots, M \qquad (2.67)$$

El valor de la opción de venta cuando el valor de la acción es cero será *X*, por lo tanto:

$$f_{i,0} = X \;\; i = 0,1, \dots, \qquad (2.68)$$

El valor de la opción de venta tiende a cero cuando el valor de la acción tiende a infinito, por lo tanto se utiliza la siguiente aproximación:

$$f_{i,M} = 0 \;\; i = 0,1, \dots, I \qquad (2.69)$$

Las ecuaciones (2.67), (2.68) y (2.69) definen los valores de la opción de venta a lo largo de tres de las aristas de la malla indicada en la gráfica (2.14), donde *S = 0*, *S = Smax* y *t = T*. Se utiliza la ecuación (2.66) para llegar al valor de *f* para todos los puntos de la malla. Primero se calculan los valores correspondientes al tiempo *T* – Δ*t*. La ecuación (2.66) con *i* = *N* – 1 da los *M* – 1 ecuaciones simultáneas:

$$a_j f_{N-1,j-1} + b_j f_{N-1,j} + c_j f_{N-1,j\mp 1} = f_{N,j} \qquad (2.70)$$

Para $j = 1, 2, \ldots, M - 1$. Los lados derechos de las ecuaciones son conocidos a partir de (2.67). Además de las ecuaciones (2.68) y (2.69) se obtiene:

$$f_{N-1,0} = X \qquad (2.71)$$

$$f_{N-1,M} = 0 \qquad (2.72)$$

La ecuación (2.70) son M–1 ecuaciones que se resuelven para conocer las M–1 incógnitas: $f_{N\text{-}1,1}$, $f_{N\text{-}1,2}$, ... , $f_{N\text{-}1,M\text{-}1}$. Luego que se ha realizado esto, cada valor de los $f_{N\text{-}1,j}$ se compara con $X–j^*\Delta S$. Si $f_{N\text{-}1,j} < X–j^*\Delta S$, será óptimo ejercer la opción en el tiempo $T–\Delta t$ y $f_{N\text{-}1,j}$ ya que toma el valor de $X–j^*\Delta S$.

Así, los nodos correspondientes al tiempo $T–2\Delta t$ son calculados de la misma manera, y así para los otros nodos. Finalmente se obtienen los $f_{0,1,}$, $f_{0,2}$, $f_{0,3}$, ... , $f_{0,M\text{-}1}$. Uno de ellos será el valor de la opción de venta tipo americano.

Para implementar la metodología de diferencias finitas es necesario realizar un procedimiento de resolución paso a paso muy detallado, se debe tomar en cuenta todas las consideraciones de la metodología simultáneamente con las condiciones de frontera, las opciones existentes en cada instante de tiempo y las diferentes combinaciones de opciones que se pueden producir.

Al utilizar la metodología de resolución mediante diferencias finitas implícitas el problema se basa en resolver el sistema de ecuaciones indicado en la siguiente ecuación:

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j}$$

En este sistema de ecuaciones, los $f_{N,j}$ iníciales (con i=N-1) son determinados a partir de la discretización de los valores y se considera la opción de venta americana al momento de la expiración de la opción, es decir, cuando t=T. El sistema se puede descomponer para j desde 1 hasta M-1, esto se describe con en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{j} = 1 & a_1 f_{i,0} + b_1 f_{i,1} + c_1 f_{i,2} = f_{i+1,1} \\
\mathrm{j} = 2 & a_2 f_{i,1} + b_2 f_{i,2} + c_2 f_{i,3} = f_{i+1,2} \\
 & \ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\
\mathrm{j} = \mathrm{M}-2 & a_{\mathrm{M}-2} f_{i,\mathrm{M}-3} + b_{\mathrm{M}-2} f_{i,\mathrm{M}-2} + c_{\mathrm{M}-2} f_{i,\mathrm{M}-1} = f_{i+1,\mathrm{M}-2} \\
\mathrm{j} = \mathrm{M}-1 & a_{\mathrm{M}-1} f_{i,\mathrm{M}-2} + b_{\mathrm{M}-1} f_{i,\mathrm{M}-1} + c_{\mathrm{M}-1} f_{i,\mathrm{M}} = f_{i+1,\mathrm{M}-1}
\end{array}
\qquad (2.73)
$$

Las ecuaciones de (2.71) y (2.72) dan los valores de $f_{i,0}$ y $f_{i,M}$ respectivamente, ya que se incorporan como ecuaciones al sistema para obtener un sistema de M+1 ecuaciones con M+1 incógnitas de tipo:

$$A * F_{N-1} = F_N \qquad (2.74)$$

A corresponde a una matriz tri-diagonal de dimensiones *(M+*1*)x(M+*1*)* que incorpora las condiciones de frontera y los parámetros a_j, b_j y c_j que acompañan a las incógnitas $f_{i,j}$ del sistema de ecuaciones. F_{N-1}, que corresponde al vector de M+1 incógnitas y *FN* corresponde al vector de M+1 elementos conocidos. El sistema se resuelve mediante la inversión de la matriz tri-diagonal y premultiplicada por el vector conocido de la forma:

$$F_{N-1} = A^{-1} * F_N \qquad (2.75)$$

La matriz A es llamada matriz de transición, ya que está compuesta por las probabilidades de transición desde el estado i en el momento j, al estado *i+1* ó *i*-1 en el momento *j*+1, se obtiene a partir de los cocientes de la ecuación discretizada.

A partir de la columna *N* que almacena los valores de la opción en el tiempo *T*, o sea en la fecha de expiración se encuentran los elementos de la columna *N*-1, que corresponden a los valores de la opción para el tiempo *T*-Δt. Los valores encontrados son comparados con la opción existente en ese instante de tiempo para saber si es óptimo o no ejercer la opción en ese instante, y así sucesivamente hasta encontrar la totalidad de los elementos de la malla hasta el tiempo *t=0*, lo que corresponde a la solución del problema, esto se ilustra en el cuadro 2.2.

Cuadro 2.2. Solución mediante diferencias finitas.

Valor de la Opción de Venta Americana				Valor de la Opción para cada instante t y para cada Valor de la Opción de Venta Americana S				
S = S_{max}	j = M	$f_{0,M}$	$f_{1,M}$	$f_{2,M}$	…	$F_{N-1,M}$	$F_{N,M}$	
S = (M-1) Δs	j = M - 1	$f_{0,M-1}$	$f_{0,M-1}$	$f_{2,M-1}$	…	$F_{N-1,M-1}$	$F_{N,M-1}$	
.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	
S = 2Δs	j = 2	$f_{0,2}$	$f_{1,2}$	$f_{2,2}$	…	$F_{N-1,2}$	$F_{N,2}$	
S = Δs	j = 1	$f_{0,1}$	$f_{1,1}$	$f_{2,1}$	…	$F_{N-1,1}$	$F_{N,1}$	
S = 0	j = 0	$f_{0,0}$	$f_{1,0}$	$f_{2,0}$	…	$F_{N-1,0}$	$F_{N,0}$	
		i=0	i=I	I=2		i=N-1	i=N	
		t=0	t= Δt	t= 2Δt		t=T- Δt	t=T	Tiempo

Fuente: Elaboración propia

Esta es la forma en que se desarrolla el método de diferencias finitas, por medio de una matriz el método de diferencias finitas valúa una opción de tipo americana, que consiste en la descomposición de un sistema de ecuaciones.

Capítulo 3. Aplicación al caso de la empresa Cemex que cotiza en la Bolsa Mexicana de Valores.

En este capítulo se presenta la evidencia empírica del comportamiento del precio de opciones tipo americano en donde se seleccionó como activo subyacente la acción de Cemex, los cálculos numéricos se determinan a partir de los modelos desarrollados en el capítulo dos y se utilizan datos reales de las cotizaciones que se presentaron en el período de estudio.

3.1 Datos de la empresa CEMEX que cotiza en la Bolsa Mexicana de Valores

CEMEX se considera una empresa global que esta ligado al sector de la construcción, desde su fundación en 1906, es una empresa que inicio en México y se ha extendido por los cuatro continentes, actualmente opera con más de 50,000 empleados a nivel mundial.

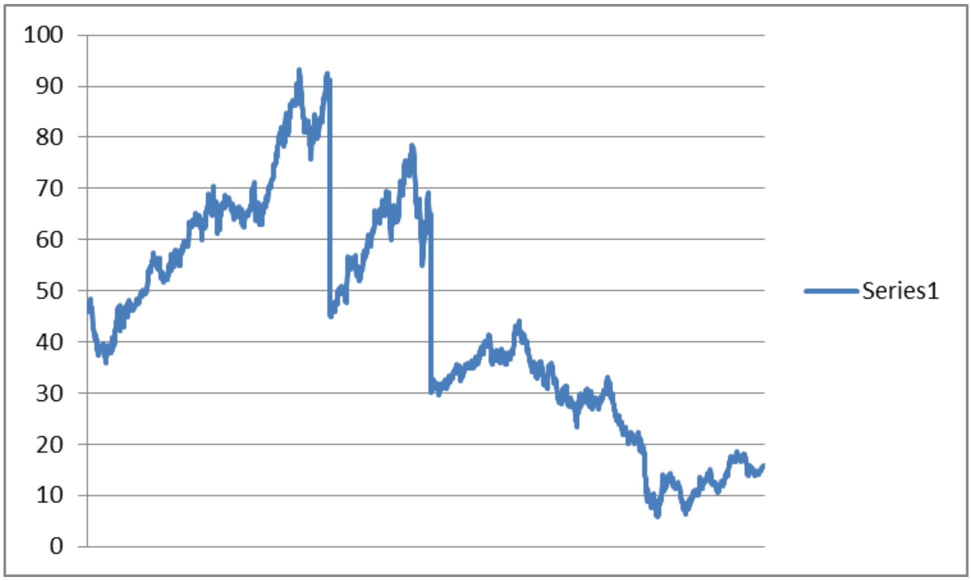
Para su operación CEMEX utiliza instrumentos financieros derivados para cambiar el perfil de los riesgos asociados con movimientos en las tasas de interés y las monedas de intercambio y denominación de su deuda, los instrumentos financieros al reducir el riesgo permiten reducir el costo financiero.[4]

Los datos que se analizan corresponden a información trimestral a la serie de los rendimientos de las acciones de Cemex, en el periodo comprendido entre 2003 y 2009 con un total de 72 muestras. Los valores se tomaron trimestralmente de la Bolsa Mexicana de Valores, los valores muestran como es el rendimiento de las acciones con una cobertura de una opción tipo

[4] La referencia de CEMEX se tomo de la página principal de la BMV 2010

americana. La volatilidad de las acciones de CEMEX se muestra en la gráfica 3.1.

Gráfica 3.1 La volatilidad de las acciones de CEMEX



Fuente: Elaboración propia con datos de la BMV.

La gráfica muestra que la volatilidad del rendimiento de las acciones varia con el tiempo y presenta cambios estructurales a lo largo del tiempo, se produce un cambio de tendencia a partir del año 2006, este cambio de tendencia se explica por la variación de las expectativas de los agentes económicos como consecuencia de la relajación de las presiones inflacionarias, en este periodo los mercados financieros experimentaron a corto plazo descensos en el tipo de interés.

El análisis de una opción tipo americano sobre la acción que se realizo con los modelos binomial, Brennan y Schwartz, parte de las condiciones necesarias para que no existan oportunidades de arbitraje. El riesgo se define en forma exógena a partir de la información histórica, y el precio se modela a partir de un modelo de difusión que representa el comportamiento estocástico.

El modelo binomial de Cox, Ingerson y Roos se considera un modelo de ausencia de arbitraje considera que el tipo de interés se comporta como un proceso estocástico que afecta los precios de los activos financiero. El modelo de valuación de opciones tipo americano propuesto por Schwartz considera que el movimiento del precio de la acción en un periodo de tiempo sigue un movimiento browniano, por otro lado una mejora se encontró en el modelo propuesto por Brennan y Schwartz en el cual se deriva numéricamente el precio de las acciones.

Para el análisis de los métodos se utilizaron los datos de las acciones de Cemex, donde el Mexder lista y mantiene disponible para su negociación los contratos de opción sobre los activos de Cemex, tanto de compra como de venta en los precios de ejercicio especificados y sobre una base trimestral, lo que significa que de manera permanente estarán disponibles para su negociación contratos de opción con fechas de vencimiento en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

En el caso que el mercado demande la disponibilidad de contratos de opciones sobre acciones de Cemex con fechas de vencimiento distintas a las señaladas anteriormente, Mexder lista nuevas series para su negociación. En la mecánica de negociación de las opciones en el Mexder se describe el símbolo o clave de pizarra de las distintas series de contratos de opción sobre las acciones de Cemex, se identifican con un símbolo o clave de pizarra que el Mexder publica en el boletín de indicadores de Mercados de Productos Derivados de la siguiente forma; Los primeros dos dígitos son letras y/o números características del nombre del activo subyacente, a las que se agregan hasta 5 dígitos para especificar el precio de ejercicio, dos enteros y tres decimales y por ultimo un digito más que especifica el tipo de contrato de opción y el mes de vencimiento.

La celebración de contratos de opción sobre acciones de Cemex se realiza mediante procedimientos electrónicos a través del sistema electrónico de negociación de Mexder, de acuerdo a las normas y procedimientos establecidos en su reglamento interior, sin perjuicio de la facultad de Mexder para establecer alguna mecánica distinta.

3.2 Solución numérica del modelo binomial a un paso.

Para valuar las opciones tipo americanas con el modelo binomial, el procedimiento es trabajar hacia atrás en el árbol, desde el final hasta el principio, determinado en cada nodo si es óptimo el ejercicio antes del vencimiento. El valor de la opción en los nodos finales es el mismo que para la opción europea. En los nodos iníciales el valor de la opción es mayor entre el valor dado por la ecuación a utilizar en el desarrollo del modelo y el ingreso del ejercicio antes del vencimiento.

La valuación de la opción se realizó para un periodo de tres meses y el comportamiento estocástico de las expectativas se modela con ayuda de un proceso de difusión binomial para determinar el valor esperado de la opción referido al valor de la prima que se debe pagar por la opción. El valor del activo subyacente se muestra con el comportamiento que tenga el precio de las acciones, los pasos del árbol binomial describen la periodicidad del precio de la acción, además cada una de las diversas ramas del árbol detalla todas las posibles situaciones en donde es factible ejercer o no la opción. Para la aplicación real del árbol se utiliza un periodo de tres meses, para realizar el estudio del caso de Cemex con los datos que semuestran en el cuadro 3.1 en donde se encuentra el precio del activo subyacente, el precio de ejercicio, el plazo de vencimiento y la tasa de interés.

Cuadro 3.1. Datos para la valuación de la opción americana para el caso Cemex

Precio de la acción	S	30
Precio de Ejercicio	X	33
La volatilidad del	Σ	0.4
El tiempo de expiración (año)	T	1
Tasa libre de riesgo	R	0.1
el número de períodos	N	1

Fuente:Elaboración Propia

Ahora se muestra cual es el comportamiento de la acción y como es la valuación de la opción de venta americana, que parte de los siguientes supuestos. En el método binomial solo existen dos posibilidades en cada periodo; ejercer o no ejercer la opción de venta tipo americana, para este punto si el precio de ejerció es 30 con un interés de 10% se representa de la siguiente forma:

Gráfica 3.2. Elaboración de los resultados del árbol binomial a un paso

44.7547409

30

20.1096014

0 1

Fuente: Elaboración propia.

Como se ve en la gráfica 3.2 estas son las dos opciones que se pueden experimentar durante el primer periodo, es decir, que no se ejerza la opción, este resultado viene dado por:

30 * 1.4918 = 44.7547409

Al no ejercerse la opción en el primer periodo donde el precio de la acción se encontraba en 44.7547409, el no ejercer tampoco en el segundo paso hace que la acción tome un valor de:

33 * 0.6703 = 20.1096014

Al usar esta metodología el segundo periodo tiene los siguientes resultados:

Gráfica 3.3. Elaboración de los resultados del árbol binomial a dos paso

		66.7662279
	44.7547409	
30		30
	20.1096014	
		13.4798689
0	1	2

Fuente: Elaboración propia.

Pero si se ejerce la opción en el punto intermedio el valor seria:

44.7547409 * 0.6703 = 30 ó 20.1096014 * 1.4918 = 30

En el paso final del árbol donde el valor de la opción es de 20.1096014 existen dos posibilidades: que la empresa ejerza o no la opción, en el primer caso el valor de la opción es 30 y en el segundo es 13.4798689.
El comportamiento que tendría la acción en el tercer paso sería:

Gráfica 3.4. Elaboración de los resultados del árbol binomial de tres pasos

			99.6035077
		66.7662279	
	44.7547409		44.7547409
30		30	
	20.1096014		20.1096014
		13.4798689	
			9.03582636
0	1	2	3

Fuente: Elaboración propia.

En el tercer paso la ubicación en 2∆, la empresa no ha ejercido la opción, y el valor se encuentra en 66.7662279, así se tiene dos opciones que se ejerza o no la opción americana, para el primer caso se trasladan los 66.7662279 un periodo en el futuro, esto se describe a continuación:

$$66.7662279 * 1.4918 = 99.6035077$$

Para el caso contrario en donde la empresa no decida ejercer se representa de la siguiente forma:

$$66.7662279 * 0.6703 = 44.7547409$$

En el caso de que decidiera la empresa ejercer la opción se encontraría en que se encontraba con un valor en el paso dos de 30, en el paso tres seria un valor de.

30 * 1.4918 = 44.7547409

Si la empresa decidiera no ejercer en los tres periodos el valor de la opción quedaría expresada con los 30 pesos que valía en un principio la opción llevada a valor futuro con los intereses respectivos de tres periodos, por lo que el valor de la rama superior del árbol queda definido de la siguiente manera.

$30 * (1.4918)^3 = 99.6035077$

Este es el precio en el que se situaría la acción si se ejerciera.

3.3 Cálculo de las probabilidades implícitas

S, es el activo subyacente y su comportamiento tiene una probabilidad implícita p de subir a Su (probabilidad de que la empresa no ejerza). Sin embargo, también S podía bajar hacia Sd con probabilidad implícita 1-p, esta ultima representa la probabilidad de que la empresa ejerza la opción. El incremento de u fue el mismo en todos los nodos al igual que en el árbol binomial, esto es porque todos crecen a la misma tasa de interés, pero no todos los cálculos de d son iguales por lo que se tiene que calcular el descuento nodo por nodo, para luego calcular cada probabilidad.

Se calcula el parámetro de subida u:

$$u = 1.4918$$

Se calcula el parámetro de bajada d:

$$\mathrm{d} = 0.6703$$

Se calculan las probabilidades.

$$\mathrm{p} = 0.5293$$

$$1 - \mathrm{p} = 0.4706$$

3.4 Solución numérica del modelo Schwartz.

Al considerar la posibilidad de una subdivisión de la variable de estado en h equidistantes unidades del activo subyacente y la variable tiempo en k unidades de tiempo, o

$$S_i = ih \qquad para\ i = 0\ a\ n$$

$$T_j = jk \qquad para\ j = 0\ a\ m$$

Por lo tanto, el precio de la opción (S, T) se puede escribir como

$C(S,T) = C(S_i, T_j) = C(ih, jk)$

La derivada parcial con respecto al tiempo $\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)$, se puede aproximar en el punto (i, j) por la diferencia

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C(i,j) - C(i,j-1)}{k}$$

La derivada parcial con respecto a los precios de los activos se puede aproximar en el punto (i, j) por la diferencia

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{C(i+1,j) - C(i-1,j)}{h}$$

El término $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$ se puede aproximar en el punto (i, j) por

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{C(i+1,j) - 2C(i,j) + C(i-1,j)}{h^2}$$

Si se reemplazan esas derivadas parciales con sus valores en la ecuación diferencial parcial de B-S, se obtiene:

$$a_i C(i-1,j) + b_i C(i,j) + c_i C(i+1,j) = C(i,j-1)$$

Con:

$$a_i = \frac{1}{2} rik - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 k$$

$$b_i = 1 + rk + \sigma^2 i^2 k$$

$$c_i = -\frac{1}{2} rik - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 k$$

Con las condiciones de los límites de la ecuación $C(S,T^+) = max[0, S-K]$ para la opción de compra americana se aproxima por:

$$C(i,0) = \begin{cases} ih - k & si\ i \geq \frac{k}{h} \\ 0 & mas \end{cases}$$

Con las condiciones de los límites de la ecuación $C(0,t) = 0$, se aproxima por:

$$C(0,j) = 0 \qquad para\ j = 0,1, \ldots \ldots, m$$

En una fecha de dividendos, la condición de la ecuación $C(S,T^+) = max[0, S-K, C(S-d, T^-)]$ se aproxima por:

$$C(i,j^+) = \begin{cases} C(i-\frac{d}{h}, j^- & para\ C(i-\frac{d}{h}, j^-) \geq ih-k \\ ih-k & para\ C(i-\frac{d}{h}, j^-) \leq ih-k \end{cases}$$

Por los altibajos del activo subyacente, la condición de la ecuación $\lim_{S\to\infty} \frac{\partial C(S,\tau)}{\partial S} = 1$ se aproxima por:

$$C(i,j) - C(n-1,j) = h \qquad para\ j = 0, \dots \dots .., m$$

Por lo tanto, para cada valor de j existe un sistema de n-1 ecuaciones lineales con n +1 incógnitas. Las condiciones de uso de las ecuaciones $C(0,t) = 0$ y $\lim_{S\to\infty} \frac{\partial C(S,\tau)}{\partial S} = 1$ da un sistema con n +1 ecuaciones y n +1 incógnitas. Este sistema se resuelve al invertir la matriz para dar a todos los valores posibles del precio de la opción en cada instante j.

3.5 Solución numérica del modelo de Brennan-Schwartz

Si la discretización de la variable de estado en el espacio h unidades pequeña, equidistante y la variable tiempo en k unidades pequeñas. Además, al utilizar una variable de tiempo nueva, τ = TBT, en lugar de t, de tiempo del calendario. La discretización del precio de los activos y el plazo de vencimiento se escribe como:

$$S_i = ih \qquad para\ i = 0\ a\ n$$

$$\tau_j = jk \qquad para\ j = 0\ a\ m$$

El precio de poner P (S, τ) es aproximada por $P(S_i, \tau_j) = P(ih, jk)$

La aproximación de las derivadas parciales por sus valores y al sustituir en la ecuación diferencial da el siguiente sistema:

$$a_i P(i-1,j) + b_i P(i,j) + c_i P(i+1,j) = P(i,j-1)$$

Con

$$a_i = \frac{1}{2} rik - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 k$$

$$b_i = 1 + rk + \sigma^2 i^2 k$$

$$c_i = -\frac{1}{2} rik - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 k$$

Para i = 1 hasta n-1 y j = 1 hasta m.

La condición de frontera $\lim_{S\to\infty} \frac{\partial P(S,t)}{\partial S} = 0$ para cada valor de j se aproxima por:

$$P(n-1,j) - P(n,j) = 0 \qquad para\ j = 1\ a\ m$$

El sistema de la siguiente ecuación.

$a_i P(i-1,j) + b_i P(i,j) + c_i P(i+1,j) = P(i,j-1)$ y la condición de la ecuación $\lim_{S\to\infty} \frac{\partial P(S,t)}{\partial S} = 0$ representan un conjunto de n ecuaciones lineales con n +1 incógnitas u (i, j) para i = 0 a n. el uso de la condición de la ecuación $P(S,T) = max[0, K-S]$ permite que la solución de P (i, j) como una función de P (i, j-1).

La condición de la ecuación $P(S,t) \geq max[0, K-S]$ se aproxima por:

$$P(i,j) \geq K - ih \qquad para\ i = 0\ a\ n$$

Y la solución debe satisfacer esta condición.

El valor del activo subyacente para la que esta desigualdad se convierte en una igualdad estricta da precios de los activos, S_c I_C = h, que corresponde a una política de ejercicio óptima.

En una fecha de dividendos, la condición de la ecuación $P(S,t-)=MAX\{K-S,P(S-D1,t+)\}$ se aproxima por:

$$P(i,j^-)=\begin{cases} P(i-\frac{d}{h},j^+ & para\ P(i-\frac{d}{h},j^+) > K-ih \\ K-ih & para\ P\left(i-\frac{d}{h},j^+\right) < K-ih \end{cases}$$

Este sistema se resuelve al invertir la matriz para dar a todos los valores posibles del precio de la opción en cada j instantánea en función de los valores de un instante anterior.

3.6 Implementación del programa Matlab para la valuación de los modelos Schwartz y Brennan-Schwartz

El programa MatLab es utilizado en esta tesis ya que el programa posee comandos que realizan automáticamente la interpolación para elegir el procedimiento de diferencias finitas para valorar opciones de venta americana y opciones de compra americana. Una vez calculado el valor en todos los nodos de la malla se tiene que definir el valor como una función continua que toma valores en los puntos interiores mediante interpolación, la estabilidad es prácticamente completa con independencia de los valores de m y n. El programa generara informes que incluyen el valor con mayor precisión y el cálculo de la frontera de valores críticos.

Cuadro 3.2. Datos para la valuación de opción americana para el caso Cemex

Smax = 30
X = 33
r = 0.1
σ = 0.4
T = 10
dT=.1
dS = 1

Fuente. Elaboración propia

Para comparar los modelos Schwartz y Brennan-Schwartz se definen los parámetros y las variables que intervienen en la formula de la valoración de la opción de venta americana.

```
function put = imfdamput(Smax, dS, T, dT, X, R, SIG);
% put = imfdamput(Smax, dS, T, dT, X, R, SIG);
% Smax : maximum stock price
% dS : increment of stock price
% T : maturity date
% dT : time step
% X : exercise price
% R : risk free interest rate

M = ceil(Smax/dS); ds = Smax / M;
N = ceil(T/dT); dt = T / N;
J = 1:M-1;
a = .4*R*dt*J - .4*SIG^2*dt*J.^2;
b = 1 + SIG^2*dt*J.^2 + R*dt;
c = -.4*R*dt*J - .4*SIG^2*dt*J.^2;
```

```
A = diag(b) + diag(a(2:M-1), -1) + diag(c(1:M-2), 1);
put = zeros(N+1, M+1);
put(N+1, :) = max(X - [0:ds:Smax], 0);
put(:, 1) = X; put(:, M+1) = 0;
for i = N:-1:1
y = put(i+1, 2:M)’; y(1) = y(1) - a(1)*X;
put(i, 2:M) = [A \ y]’;
put(i, :) = max(X - [0:ds:Smax], put(i,:))
```

Una vez introducidos los parámetros se obtiene el valor de la opción de venta americana**.** Si la opción de venta tiene un valor intrínseco positivo en el tiempo t = 2, el poseedor de este activo derivado debe decidir si ejercer la opción inmediatamente, o extender la vida de este instrumento financiero hasta su fecha de expiración, en el tiempo t = 3.

Cuadro 3.3 Valores de la opción tipo americana para ejercer o continuar

Trayectoria	Ejercer	Continuar
1	0.02	0.04
3	0.03	0.05
4	0.13	0.12
6	0.33	0.15
7	0.26	0.15

Fuente: Elaboración propia

Del cuadro (3.3) se encuentra que existen sólo cinco trayectorias para las cuales la opción tiene un valor intrínseco positivo en el tiempo t = 2. Si X proporciona el precio del activo subyacente en el tiempo t = 2, para estas cinco trayectorias, si la opción no se ejerce en el tiempo t = 2.

El valor de ejercicio inmediato equivale al valor intrínseco de la opción, mientras que el valor de continuar se obtiene al valuar la función de continuar dada por la ecuación (2.56) en el valor del subyacente para cada trayectoria considerada en la regresión. Esta comparación implica que resulta conveniente ejercer la opción en el tiempo t = 2, únicamente para las trayectorias cuatro, seis y siete. En el siguiente cuadro se pueden ver las comparaciones de las primas calculados por cada uno de los modelos.

Cuadro 3.4 Comparación de los métodos de valuación de una opción americana

	Comparación de los métodos de valuación de una opción americana			
	Subyacente	Binomial	Schwartz	B - S
T= 0.3	30	0.3	0.3	0.3
T= 0.5	30	3.99	3.99	4.2
T=0.10	30	7.26	7.25	7.54

Fuente: Elaboración propia

Con los modelos Schwartz y Brennan y Schwartz se busca presentar una solución analítica frente a la solución numérica del método binomial, ya que estos modelos proponen soluciones numéricas para valuar las opciones americanas a través del método de diferencias finitas. Específicamente en el caso de la opción americana y al tomar un intervalo de tiempo de 3, 5 y 10 meses el modelo Brennan y Schwartz sobre valora el valor de las primas y el método binomial y el Schwartz coinciden prácticamente con los resultados.

Conclusiones

Black (1976) desarrolló la metodología que permite valuar opciones europeas mediante una fórmula cerrada, similar a que el mismo Black en conjunto con Scholes desarrolló en 1973. Sin embargo, no se puede utilizar esta fórmula para valuar opciones americanas, y a la fecha no existen formulas cerradas para valuar estas opciones. En la práctica el método más utilizado para valuar opciones americanas es el árbol binomial, técnica propuesta originalmente por Cox, Ross y Rubinstein (1979).

Los árboles binomiales son prácticos para valuar derivados cuyo activo subyacente depende de un solo factor de riesgo, ya que se necesita un árbol por cada factor. Brennan y Schwartz (1977) fueron de los primeros en desarrollar la metodología de diferencias finitas que se usa para valuar opciones americanas. Esta técnica resuelve la ecuación diferencial parcial que modela la opción.

En la investigación fue posible comparar el comportamiento y diferencias entre el modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein, el modelo Schwartz y el modelo Brennan-Schwartz, el mejor poder predictivo en la medición de la prima de riesgo que corren las empresas cuando utilizan la opción americana como una forma de cubrirse de las volatilidades de los rendimientos de los activos financieros.

Del análisis de los resultados obtenidos puede concluirse que, el algoritmo de diferencias finitas es capaz de valuar adecuadamente el modelo planteado por Brennan y Schwartz, ya que se adapta con mucha facilidad a problemas que dependen de más de una dimensión. Esta flexibilidad se refleja en la generación de decisiones óptimas, las que dependen de todas las variables que inciden en el modelo. Esta refinación en el análisis permite aseverar que, el algoritmo de Brennan y Schwartz funciona adecuadamente cuando existe una alta correlación entre los procesos que describen la evolución del precio de la opción.

La investigación comenzó, con una breve explicación de los mercados financieros y el crecimiento de los mercados de derivados, así como con una breve revisión de los modelos que valuaron en primera instancia la opción tipo americana, ya que la valuación de la opción americana es más compleja por la forma en que opera, el valor de la opción es muy volátil en cada período de tiempo en que puede ser ejercida.

Las opciones americanas de compra nunca deben ejercerse antes del vencimiento cuando las acciones subyacentes no pagan dividendos. Cuando se pagan dividendos a veces es mejor ejercerlas antes del vencimiento, la razón es porque el dividendo hará que las acciones cubiertas con una opción de compra tengan menos valor, si los dividendos son suficientemente grandes y la opción de compra se encuentra dentro del dinero, se puede ejercer para evitar los efectos negativos de los dividendos sobre el precio de las acciones.

Por lo tanto en el caso de las opciones de compra tipo americano es más probable que se ejerzan antes del vencimiento se pagan dividendos.

A lo largo de la investigación se corroboro empíricamente que que las opciones tipo americano son más valiosas que las de tipo europeo cuando ofrece la probabilidad de obtener un beneficio adiconal.es más probable que las opciones de compra se ejerzan antes del vencimiento.

Bibliografía

Ayala Gaytan, Edgardo Arturo y otros, (2008) Finanzas para todos desde el financiero, México, Litoproces, primera edición.

Brennan, M.J., and E.S. Schwartz, (1977a), “Convertible Bonds: Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion”, Journal of Finance 32, 1699-1715.

Brennan, M.J., and E.S. Schwartz, (1977b), “Savings Bonds, Retractable Bonds and Callable Bonds”, Journal of Financial Economics 5, 67-88.

Brennan, M.J., and E.S. Schwartz, (1980), “Analyzing Convertible Bonds”, Journal of Financial and Quantitative Analysis 15, 907-929.

De Lara, Alfonso, (1999), Forwards, futuros y opciones sobre el tipo de cambio. Ejecutivos de finanzas

De Lara, Alfonso, (2003), Medición y control de riesgos financieros, D.F., México, Limusa. Tercera edición.

De Lara, Alfonso, (2008) Productos derivados financieros: Instrumentos, valuación y cobertura de riesgos, D.F., México, Limusa.

Díaz Tinoco, Jaime y Hernández Trillo, Fausto, (2000), Futuros y opciones financieras: una introducción, D.F., México, Limusa, Tercera edición.

Fernández, P., (1991), Opciones y valoración de instrumentos financieros, Editorial Deusto, Bilbao España.

Grinblatt, Mark y Titman Sheridan, (2002), Mercados financieros y estrategia empresarial. México, McGraw-Hill, segunda edición.

Hull, J. C., (2002) Option, futures and other derivates, 3era edition, prentice hall international, Inc. Upper Saddle River, New Jersey

Hull, John C. (2002), Introducción a los mercados de futuros y opciones, Madrid, España, Pearson Educación. Cuarta edición.

Hull, John C., (1996), Futuros y Opciones, España, Prentice-Hall, Segunda edición.

Jorion, Philippe, (2008), El nuevo paradigma para el control de riesgos con derivados, México, Limusa.

Lamothe Fernández, Prosper, (1993), Opciones Financieras. Un Enfoque Fundamental, Madrid, España, McGraw-Hill, Primera edición.

Lara A., (1998) Productos derivados financieros, Ed. Limusa

Marín, José M., (1999) Economía financiera (prólogo de Andreu Mas Colell), ed. McGraw-Hill, Primera edición.

Martínez Abascal, Eduardo, (1993), Futuros y opciones en la gestión de carteras, España, McGraw-Hill.

Merton, R.C., (1973), Theory of Rational Option Pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, pp. 637- 654.

Merton, R.C., (1969), Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case, Review of Economics and Statistics, Vol. 51, pp. 247- 257.

Morales Castro, Arturo y Morales Castro, J. Antonio, (2002), Respuestas rápidas para los financieros. México, Pearson Educación, Primera edición.

Pérez Somalo Miguel, Lamothe Prosper (2007). Opciones financieras y productos estructurados (3ra ed.) España; Mc Graw Hill.

Rodríguez de Castro, J. (1997), Introducción al análisis de productos financieros derivados: futuros, opciones, forwards, swaps. Limusa, México.

Venegas Martínez, Francisco, Riesgos financieros y económicos (2003). Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, Ed. Thomson