Tres Modelos de Deconvolución Matricial para Filtrado de Señales: Simulación

C.V. García Mendoza[1] y J.J. Medel Juárez[1,]

[1]Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Legaria 694. Colonia Irrigación, 11500 México D. F.

[2]*Centro de Investigación en Cómputo del Instituto Politécnico Nacional, Av. Juan de Dios Bátiz s/n casi esq. Miguel Othón de Mendizabál, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Colonia Nueva Industrial Vallejo, 07738 México D.F*

Resumen

En este trabajo se presentan de manera formal diversos modelos para encontrar la dinámica interna del sistema de referencia, enfocándose explícitamente al problema de la deconvolución. El primero de ellos es el de la convolución, el cual proporciona el preámbulo necesario para definir a los tres Modelos de Deconvolución Matricial que se proponen en este trabajo. Después se define el Error Cuadrático Medio Recursivo que permiten hacer el análisis de los resultados arrojados por la simulación de los Modelos de Deconvolución propuestos.

Para finalizar se presenta el contexto en que se realizó la simulación de los tres Modelos de Deconvolución. Se presentan las graficas de deconvolución con la señal original y la señal deconvolucionada (señal identificada). Además de las graficas del Error Cuadrático Medio Recursivo. Se analizan los resultados y se concluye sobre la optimalidad de los Modelos de Deconvolución Propuestos.

Introducción

La deconvolución es una operación matemática. Se usa en restauración de señales para recuperar datos que han sido degradados por cualquier proceso físico que pueda describirse mediante la operación inversa, una convolución. Tiene diversas aplicaciones: en el análisis de medidas sísmicas, microscopia y astronomía.

La resolución de la deconvolución puede ser un problema inverso complejo. Para ello se suelen emplear algoritmos iterativos, como el de *estimación de máxima verosimilitud* en microscopía, que se refiere a la identificación en el proceso de reconstrucción; o la *deconvolución ciega* en astronomía, que sucesivamente va mejorando una identificación inicial del objeto real hasta alcanzar cierto criterio de calidad preestablecido; en el análisis de medidas sísmicas por el método de *división espectral* o mediante la *transformada discreta de wavelet packet*.

Resultados y Análisis

Convolución

La convolución está dada de forma matricial:

$\mathbf{C}_{\mathbf{mx1}} := \mathbf{G}_{\mathbf{mxn}} \ \mathbf{F}_{\mathbf{nx1}}$

Donde el vector de convolución $\mathbf{C}_{\mathbf{mx1}}$ $\mathbf{C}_{\mathbf{mx1}}$, es el resultado del producto matricial entre la matriz ampliada $\mathbf{G}_{\mathbf{mxn}}$ $\mathbf{G}_{\mathbf{mxn}}$ compuesta por filas de vectores desplazados por intervalos de tiempo y que representan dentro de la matriz ampliada solo desplazamientos en columnas en referencia a cada intervalo de tiempo considerado dentro de la convolución y el vector $\mathbf{F}_{\mathbf{nx1}}$ $\mathbf{F}_{\mathbf{nx1}}$, es fijo para el conjunto de intervalos que conforman a la matriz ampliada.

Modelos de Deconvolución Matricial

Modelo 1: Encontrar $\mathbf{F}_{\mathbf{mx1}}$ $\mathbf{F}_{\mathbf{mx1}}$ con error = 0, donde $\mathbf{G}_{\mathbf{mxm}}$ $\mathbf{G}_{\mathbf{mxm}}$ es una matriz cuadrada no singular:

$F_{mx1} = G_{mxm}{}^{-1} \ C_{mx1}$ $F_{mx1} = G_{mxm}{}^{-1} \ C_{mx1}$.

Modelo 2: Encontrar $\mathbf{F}_{\mathbf{mx1}}$ $\mathbf{F}_{\mathbf{mx1}}$ con error = 0, con $\mathbf{G}_{\mathbf{mxn}}$ $\mathbf{G}_{\mathbf{mxn}}$ que es una matriz ampliada rectangular:

$$F_{nx1} = (G'_{nxm} G_{mxn})^{+} \ G'_{nxm} \ C_{mx1}$$
$$F_{nx1} = (G'_{nxm} G_{mxn})^{+} \ G'_{nxm} \ C_{mx1}.$$

Modelo 3: Encontrar $\mathbf{G}_{\mathbf{mxn}}$ $\mathbf{G}_{\mathbf{mxn}}$ con error = 0:

$$G_{mxn} = (C_{mx1} \ F'_{1xn})(\ F_{nx1} \ \ F'_{1xn})^{+}, \qquad con \ \ m \neq n$$
$$G_{mxn} = (C_{mx1} \ F'_{1xn})(\ F_{nx1} \ \ F'_{1xn})^{+}, \qquad con \ \ m \neq n.$$

Error Cuadrático Medio Recursivo

El error cuadrático medio recursivo entre dos señales $\boldsymbol{h}_i$ $\boldsymbol{h}_i$

$$MSE_n = \frac{1}{n^2}\left[\left(\boldsymbol{h}_n - \widehat{\boldsymbol{h}}_n\right)^2 + (n-1)^2 MSE_{n-1}\right]$$

Conclusiones

El modelo de *deconvolución matricial*, consiste en la discretización de la convolución y la deconvolución, recuperando la señal a través de la inversa y pseudoinversa de matrices. Al simular este modelo se encontró el funcional del error que es del orden de $\mathbf{10^{-25}}$ $\mathbf{10^{-25}}$ unidades, que con respecto a los otros dos modelos que tienen del orden de $\mathbf{10^{-20}}$ $\mathbf{10^{-20}}$ y $\mathbf{10^{-1}}$ $\mathbf{10^{-1}}$, el primero de ellos resulto ser el mejor descriptor.

Agradecimientos

Agradecemos a la SIP del IPN y al CONACyT por su apoyo para la realización de este trabajo.

Referencias

[1] S. Cordero, Seismograms Deconvolution by Digital Division and Inverse Filtering Spectral Simulation and Digital Seismograms, *Compendium of Research Papers. CNDG - Library Geophysical Institute of Peru,* Vol. 4, 2003, pp.131-146.

[2] B. Noble, J.W. Daniel, *Applied Linear Algebra,* Prentice Hall, 1989.

[3] D.C. Lay., Linear *Algebra and its Applications*, Pearson, 1999.

[4] V.S. Pugachev., *Introduction to the Theory of Probability,* Mir Moscu, 1973.

[5] M.S. Grewal., A.P. Andrews., *Kalman Filtering Theory and Practice,* Prentice Hall, 1993.

[6] A.S. Poznyak., K. Najim., *Learning Automata and Stochastic Optimization***,** Springer-Verlag, 1997.