Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en
Ciencia Aplicada y Tecnología
Avanzada del IPN

EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DESDE UNA PERSPECTIVA CONSTRUCTIVISTA

Tesis que para obtener el grado de
Doctor en Matemática Educativa
presenta:

M. en C. Ofelia Vizcaíno Díaz

Director de la tesis:

Dr. Ed Dubinsky

México, D.F., mayo de 2004

CGPI-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 25 del mes de Marzo del 2003 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Evaluación del aprendizaje del cálculo desde una perspectiva constructivista"

Presentada por la alumna:

Vizcaíno	Díaz	Ofelia
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | 0 | 1 | 0 | 6 | 5 | 0 |

aspirante al grado de:

Doctor en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Ed Dubinsky

Dr. Ed Dubinsky

Dr. Francisco Cordero Osorio

Rosa Ma. Farfán

Dra. Rosa Ma. Farfán Márquez

CICATA IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

María Trigueros G.

Dra. María Trigueros Gaisman

Dr. Antonio Calderón Arenas

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

CARTA DE CESION DE DERECHOS

En la ciudad de México, D.F. el día 2 del mes abril del año 2004, el (la) que suscribe Ofelia Vizcaíno Díaz alumno (a) del Programa de Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro 010650 adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Ed. Dubinsky y cede los derechos del trabajo intitulado "Evaluación del aprendizaje del Cálculo desde una perspectiva constructivista al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección ovizcain@itesm.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Ofelia Vizcaíno D.

Ofelia Vizcaíno Díaz

Nombre y firma

ÍNDICE

RESUMEN / *ABSTRACT*

Evaluación del aprendizaje del cálculo desde una perspectiva constructivista

El aprendizaje escolar en general, y el aprendizaje de las matemáticas en particular, son desde hace varias décadas un problema bajo el estudio de investigadores. Alrededor del aprendizaje de las matemáticas han surgido varios paradigmas, los cuales, desde sus correspondientes perspectivas trabajan en la búsqueda de elementos que permitan abordar dicho problema.

Uno de estos paradigmas acerca de la ocurrencia del aprendizaje de las matemáticas es el propuesto por el grupo de investigadores rumec[1], al interior del grupo se genera una teoría acerca del aprendizaje (Teoría apoe[2]) de las matemáticas, la cual se fundamenta en la teoría cognitiva de Jean Piaget. Así, se define el conocimiento matemático de un individuo como su tendencia a responder a los problemas matemáticos percibidos reflexionando acerca de ellos y de sus soluciones dentro de un contexto social y por medio de la construcción o reconstrucción mental de las acciones, procesos y objetos matemáticos, los cuales se organizan en esquemas para ser utilizados en la solución de problemas.

Es decir, el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder de acuerdo a las estructuras cognitivas que ha elaborado en torno a un concepto particular.

El deseo de poner en práctica dicha teoría genera un intenso trabajo para crear el diseño instruccional ace.[3] En la elaboración de dicho diseño instruccional la descomposición genética juega un rol fundamental permitiendo a los investi-

[1] Research in Undergraduate Mathematics Education.

[2] Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas.

[3] Actividades computacionales, Discusiones y Ejercicios.

gadores describir una posible ruta de acceso a la comprensión de dichos conceptos matemáticos.

Medir la eficacia del diseño instruccional para conseguir que los estudiantes se apropien de los conceptos matemáticos es uno de sus objetivos, para lo cual diseñan una metodología de evaluación que se espera describa de manera fiel la situación cognitiva de los estudiantes. Dicha evaluación difiere sustancialmente de la metodología de evaluación tradicional debido a las innovaciones propuestas. Así, la importancia de la propuesta radica en la aplicación al salón de clase de dicha propuesta educativa y por otro lado en la medición de su efectividad.

Pero al interior del grupo surge la inquietud, ¿la metodología de evaluación planteada describe realmente la situación cognitiva de los estudiantes? La pregunta anterior genera el diseño de una investigación que busca verificar la eficacia de la metodología de evaluación planteada.

Por otro lado existe la "entrevista clínica" o entrevista profunda usada para indagar con la precisión deseada los conocimientos de un individuo referentes a un tópico, de manera que el adecuado diseño, aplicación y análisis de las preguntas y respuestas permitirán hacer inferencias acerca de dicha situación cognitiva.

Sin embargo, este método no es el ideal para evaluar la situación cognitiva de los estudiantes debido a que no es un método práctico, es decir, requiere demasiado tiempo para decidir el estado de la situación cognitiva de los estudiantes.

Así la pregunta de la presente investigación es: ¿La evaluación de los estudiantes a través del tratamiento instruccional ace genera la misma evaluación que la generada a través de entrevistas personalizadas? Porque de ser así, podemos usar una metodología de evaluación práctica con la confianza de que describirá la situación cognitiva de los estudiantes.

El presente documento reporta los resultados encontrados durante tal investigación.

Assessment of Calculus learning from a constructivist standpoint

School learning in general and mathematics learning in particular, constitute problems that researchers have been dealing with since several decades ago. Several different paradigms have arisen related to mathematics learning; thus, from their correspondent perspectives, they search for elements to address this problem.

One of these paradigms related to the occurrence of mathematics learning is pro-

posed by RUMEC[4] research group. At the interior of this group, a theory is generated about mathematics learning (APOS Theory[5]), which lays its foundations in Jean Piaget's cognitive theory. Hence, the mathematical knowledge of an individual is defined as his tendency to respond to perceived mathematical problems by reflecting on them and their solutions in a social context, and by means of the mental construction or reconstruction of mathematical actions, processes and objects, which get organized in schemas in order to use them in dealing with such problems.

That is to say, the mathematical knowledge of an individual consists of his tendency to respond according to the cognitive structures that he has elaborated in relation to a particular concept.

The desire to put this theory into practice generates a great amount of work to create the ACE[6] instructional design. In the elaboration of this instructional design, the genetic decomposition plays a fundamental role allowing researchers to describe a possible access route to the understanding of such mathematical concepts.

One of the researchers' goals is to measure the effectiveness of the structural design to help students apprehend the mathematical concepts. To achieve it, they are designing an evaluation methodology that is expected to describe the students' cognitive situation accurately. This evaluation differs substantially from the traditional evaluation methodology due to the proposed innovations. Thus, the significance of this educational proposal is based, on one hand, on its putting into practice in the classroom and, on the other hand, in the measurement of its effectiveness.

However, a question arises within the group: does the proposed evaluation methodology really describe the students' cognitive situation? The former question is the starting point for a research scheme that aims at verifying the effectiveness of the proposed evaluation methodology.

On the other hand, there is the "clinical interview" or thorough interview, used to investigate accurately about an individual's knowledge of a given topic, so that an adequate design, application and analysis of the questions and answers will allow making inferences about his cognitive situation.

However, this method is not the ideal one to assess the students' cognitive situation because it is not practical. In other words, it requires too much time to determine the status of the students' cognitive situation.

Thus, the question of the present research is: Does the students' evaluation by means of the ACE instructional treatment generates the same assessment that the generated by personalized interviews?

[4] Research in Undergraduate Mathematics Education.

[5] Actions, Processes, Objects and Schemas.

[6] Computer activities, Discussions and Exercises.

If so, we can trust that the use a practical evaluation methodology will determine the students' cognitive situation. Hence, the present work will report the results obtained during the research.

Before reporting the results, I will proceed to context research with the aim of understanding it.

INTRODUCCIÓN

La evaluación es sin duda un tema de actualidad: se evalúa el aprendizaje de los estudiantes cotidianamente en los centros educativos, se evalúa la eficiencia de los profesores, se evalúa a los egresados de una institución educativa, se evalúan los logros institucionales, se evalúa la pertinencia del currículo, etc. Esto se debe a que la evaluación es un instrumento que nos permite replantear y perfeccionar procesos, lo que exige el cuestionamiento de sus objetivos, la revisión crítica de los procesos mismos, y la retroalimentación de los resultados para alcanzar así las metas planteadas.

La evaluación cumple asimismo varias funciones sociales: permite certificar aptitudes en los individuos; coadyuva al proceso de enseñanza-aprendizaje informándonos sobre lo que los estudiantes aprenden y cómo lo hacen; nos permite conocer el funcionamiento de instituciones, empresas o sistemas de muy diversa índole.

Si restringimos ahora nuestro interés al estudio de la evaluación en el ámbito educativo, nos vemos frente a una tarea de gran complejidad. En primer lugar, debido a la cantidad y variedad de temas que se prestan al análisis: el aprendizaje, la enseñanza, la acción docente, el contexto educativo, los programas de estudio, el currículo y los diversos factores institucionales. En segundo lugar, porque el docente se ve en la necesidad de abordar dichos temas desde muchas perspectivas, lo que implica resolver problemas de carácter psicopedagógico, metodológico, teórico, técnico, práctico, administrativo e institucional.

En contraste con tal profusión de perspectivas y vías de aplicación, las metodologías tradicionales de aprendizaje suelen concebir a la evaluación de manera más bien simplificada, reduciéndola a la asignación de un valor numérico que parece ser de la exclusiva responsabilidad de cada estudiante, con lo que se deja de lado el valioso análisis de los procesos de pensamiento y se pierde de vista el contexto del aula. Como se equipara el bajo rendimiento escolar con una carencia de habilidades en el estudiante, su calificación es, a sus ojos como a los de sus padres y profesores, el resultado de un esfuerzo insuficiente o mal aplicado. En caso de fracasar, será el propio estudiante quien deberá pagar las consecuencias; sólo él deberá cambiar, lo demás podrá seguir como estaba.

Por otra parte, nadie cuestiona a los profesores acerca de los aspectos tomados en cuenta en el momento de determinar la calificación de los alumnos. De esta forma, la utilidad de la evaluación resulta limitada y su aplicación es conservadora y poco creativa.

¿Qué perspectivas puede adoptar el docente respecto a los procesos de evaluación de modo que pueda incorporarlos de manera provechosa a su práctica educativa?

Si partimos de que la finalidad primordial de los profesores consiste en conseguir que los estudiantes se apropien de los conceptos específicos del curso, y si tenemos presente que en dicha apropiación entran en juego factores tan diversos como son la naturaleza del contenido, la metodología de enseñanza, las actividades planteadas a los estudiantes, la teoría cognitiva elegida, las creencias del profesor y los objetivos institucionales, entre otros, podemos afirmar que la evaluación tiene como objetivo medir la efectividad didáctica de tales factores en la generación del aprendizaje. Como este proceso provee además información relevante sobre la situación cognitiva del alumno, permite al docente contar con argumentos para proponer correcciones y mejoras al proceso de enseñanza-aprendizaje.

En este sentido, el profesor viene a ser, por una parte, un científico social, ya que está interesado en la manera como se adquiere el conocimiento, en la naturaleza y los límites de las capacidades humanas y en los cambios relativos al desarrollo de los procesos cognitivos; por otra parte, podemos considerarlo también un psicólogo educativo, ya que está en una posición estratégica para emitir juicios de valor sobre las metas de la educación.

La evaluación es, pues, uno de los elementos más importantes dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por lo tanto, si la educación ha de prosperar, tanto profesores como estudiantes tendremos que aprender a recibir con agrado las pruebas regulares y sistemáticas, en lugar de considerarlas como amenazas, intrusiones o distracciones de asuntos más importantes.

Entre los programas de investigación que actualmente se desarrollan en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, destaca una propuesta que asigna a la evaluación un papel preponderante en los procesos pedagógicos. Se trata del trabajo emprendido por el grupo de investigadores del Research in Undergraduate Mathematics Education Community, o rumec, y que consiste en la aplicación de una serie de innovaciones pedagógicas fundamentadas en una teoría constructivista sobre la adquisición del conocimiento matemático.

Dicha teoría, conocida como “Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas” (apoe), y cuyos orígenes se remontan a la teoría cognitiva de Piaget, parte de la noción de que el conocimiento matemático de un individuo es el resultado de la construcción de determinadas estructuras mentales, cuya complejidad aumenta gradualmente desde el nivel conceptual de las *acciones*, que se interiorizan en estructuras mayores llamadas *procesos,* los que a su vez se agrupan en *objetos,* hasta llegar a la organización de todos los anteriores en *esquemas.*

A partir de esta tesis, el grupo rumec ha creado una metodología didáctica, el "ciclo de enseñanza ace", expresamente diseñada para ayudar al estudiante a construir las mencionadas estructuras. El curso procede mediante la interacción cíclica de tres componentes: *actividades* en computadora (A), discusiones en *clase* basadas en las actividades (C), y *ejercicios* para reforzar los conocimientos (E). La metodología se apoya en un sistema de aprendizaje colaborativo que agrupa a los estudiantes en equipos de trabajo; en un sistema de evaluación continua a lo largo del curso bajo la forma de tareas, exámenes y registros (de participación y desempeño en actividades); y en material didáctico no tradicional, entre otras estrategias.

¿Es posible decidir con certeza si un estudiante aprendió matemáticas en un curso basado en el ciclo ace? En el contexto de la teoría apoe, la respuesta a esta pregunta radica en saber si el estudiante construyó, y en qué medida, las estructuras mentales correspondientes. La propuesta del grupo rumec a este respecto es que su sistema de evaluación está de tal manera integrado a su metodología de enseñanza que permite inferir, con un grado aceptable de certeza, el nivel real de construcción de dichas estructuras; es decir, que si los estudiantes participan en todas las actividades del curso, cooperan en sus grupos, realizan razonablemente bien sus exámenes, etc., entonces puede afirmarse que las construcciones mentales fueron hechas y por lo tanto los contenidos fueron aprendidos.

La propuesta anterior genera, sin embargo, diversas interrogantes: ¿cómo evaluar el conocimiento de un estudiante si su trabajo siempre fue colaborativo?; si los alumnos construyeron los conceptos matemáticos en la computadora, ¿cómo decidir si esas mismas construcciones se dieron en sus mentes?; ¿los estudiantes entendieron en las preguntas lo mismo que el profesor intentó preguntar?; ¿qué significado debemos asignar a las respuestas a preguntas específicas en un examen cronometrado?; ¿cuáles son los mejores criterios para decidir la calificación final?

Para someter a prueba el grado de confiabilidad de los resultados que arroja el modelo de evaluación de rumec y tratar de dar respuesta a las interrogantes anteriores, podemos emplear un procedimiento evaluatorio más directo y exhaustivo, el de la entrevista personalizada, la cual, como afirma M. Patton (1997), "es uno de los modos más efectivos de recoger información en cualquier investigación".

El método de la entrevista se basa en la idea de que las personas son capaces de ofrecer una explicación de su conducta, sus prácticas y sus acciones a quien les pregunta sobre ellas; es decir, que pueden reflexionar, hasta cierto punto, sobre sus propias acciones, o al menos se les puede inducir a hacerlo.

Una entrevista adecuadamente diseñada, analizada y aplicada permite al profesor percibir la calidad y cantidad de conocimientos que posee cada uno de los estudiantes, así como el nivel de construcción de estructuras cognitivas que éstos han desarrollado. Sin embargo, la aplicación de esta metodología en la práctica educativa requiere invertir una gran cantidad de tiempo y esfuerzo, lo que la vuelve administrativamente inviable. De ahí que el modelo de rumec haga uso de un sistema de evaluación indirecto cuya pertinencia puede valorarse mediante procedimientos más sofisticados como el de la entrevista.

El objetivo particular de mi investigación radica en determinar si la evaluación de los estudiantes derivada del tratamiento instruccional ace genera las mismas calificaciones que la evaluación a través de entrevistas personalizadas; es decir, se trata de establecer una comparación cuantitativa y cualitativa entre ambos modelos con la finalidad de definir si podemos utilizar una metodología práctica, como la propuesta por rumec, para generar las mismas calificaciones que con el método de la entrevista, lo que podría ayudar a reforzar ciertos conceptos de dicho enfoque educativo.

1

ANTECEDENTES

1.1 Planteamiento del problema

En palabras de Cardinet, "la evaluación se reconoce actualmente como uno de los temas que ofrecen una perspectiva privilegiada para estudiar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Abordar el problema de la evaluación supone necesariamente tocar todos los problemas fundamentales de la pedagogía. Cuanto más penetramos en el dominio de la evaluación, adquirimos más conciencia de nuestra ignorancia y nos vemos obligados a someter a revisión nuestras certidumbres. Cada interrogante lleva a otras, cada árbol se enlaza con otro y el bosque parece inmenso" (Cardinet, 1986, p. 5).

Evaluar no es una acción que los profesores y la institución escolar lleven a cabo de manera esporádica o circunstancial, sino que está presente de manera cotidiana en la práctica pedagógica. Su función como parte de dicho proceso está siendo cuestionada debido a su misma naturaleza y a que en la práctica se le reduce frecuentemente al establecimiento de un valor numérico que dice muy poco acerca del nivel de aprendizaje del estudiante y de la calidad de la enseñanza del profesor. Cabría empezar, pues, por plantearse las siguientes preguntas: ¿qué es la evaluación?, ¿cuáles son sus objetivos?, ¿a quién y cómo debe servir?

Las respuestas dependerán de la perspectiva adoptada:

- Para un estudiante, la evaluación es una oportunidad para mostrar sus conocimientos y habilidades matemáticas. De manera que el aprendizaje del estudiante está en el núcleo del proceso de evaluación.
- Para un profesor, la evaluación es un proceso que le permite reunir evidencias, hacer inferencias, llegar a conclusiones y actuar según dichas conclusiones. Aplicada en este sentido, la evaluación adquiere un carácter *constructivista,* ya que ayuda a fomentar el aprendizaje de los estudiantes.

La información generada por la evaluación debe aprovecharse en el diseño adecuado de actividades matemáticas en aras de promover la apropiación adecuada de los contenidos y plantear de esta manera una enseñanza acorde a las necesidades cognitivas de los estudiantes.

La selección de estrategias de evaluación debe asegurar el intercambio de información de calidad, además de ayudarnos a mantener un diálogo constructivo con los estudiantes sobre su aprendizaje y su enseñanza. Así, las tareas de evaluación deben dar mayores oportunidades a los estudiantes para expresar los resultados de su aprendizaje.

Sin embargo, tradicionalmente este no ha sido siempre el caso. Hemos venido asignando calificaciones al rendimiento escolar de los alumnos, en las asignaturas o áreas del currículo, con el fin exclusivo de otorgar grados, determinar quién aprueba una asignatura, un curso o un nivel, quién obtiene la titulación, etc., propiciando así la selección y jerarquización de los alumnos.

De esta forma, la evaluación ha sido vista como un proceso por el cual los profesores valoran y sancionan el desempeño académico desde una posición de competencia, en cuanto a saber y autoridad, de la que son investidos por la institución escolar a partir de la selección a la que los ha sometido: el profesor resulta ser entonces un "experto" reconocido para evaluar a sus alumnos. Por otra parte, el ejercicio de una función que no parece exigir más bagaje técnico que el de aplicar una sencilla escala de puntuaciones, puede llevar a algunos a pensar que la práctica docente es una actividad profesional poco complicada en realidad. Evitando caer en tales distorsiones, tanto de pretendida cientificidad como de percepción equívoca, es preciso reconocer, sin embargo, que los profesores realizan la evaluación sin entrar en grandes complicaciones de planteamiento, de diseño de exámenes o de búsqueda de formas más sofisticadas de asignar puntuaciones a las respuestas dadas por el alumno.

La evaluación debe tener como objetivo principal enriquecer la actividad académica de todos los participantes: debe informar a los profesores sobre la manera más efectiva de enseñar y a los estudiantes sobre los conocimientos que han adquirido, lo que aún les falta por aprender y la mejor manera de lograrlo.

Sin embargo, si se realiza pobremente, la evaluación puede mostrar una imagen engañosa del nivel de aprendizaje de los estudiantes y del grado de cumplimiento de nuestros objetivos. En el mejor de los casos, una mala evaluación puede simplemente desinformarnos, decirnos poco sobre cómo mejorar nuestra enseñanza y proporcionar a los estudiantes poca información que pueda fomentar su aprendizaje.

No es de extrañar entonces que cada vez una mayor cantidad de educadores se preocupen por obtener mayor información del aprendizaje de los estudiantes a través de la evaluación.

Un caso ilustrativo de esta tendencia es el representado por el grupo de investigadores rumec (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), que muestra una posición novedosa e interesante con respecto al papel de la evaluación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Con el objetivo de alcanzar un mejor entendimiento sobre la forma en que tiene lugar el aprendizaje, el grupo rumec ha desarrollado una metodología de enseñanza (el ciclo ace) y una teoría del aprendizaje de corte constructivista (la teoría apoe) mediante las que proponen que haya una participación activa de los estudiantes a fin de motivar la creación de su propio conocimiento matemático. Dicho grupo afirma también que el análisis de la consecución de los objetivos de aprendizaje debe basarse en la observación de la conducta de los alumnos frente a ciertas actividades o tareas matemáticas en el aula (lo que permite inferir las estructuras mentales que poseen) y no sólo en su desempeño frente a pruebas cerradas.

¿Cuál es el efecto de dichas innovaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes?

El presente trabajo de tesis tiene por objetivo valorar el grado de confiabilidad de la metodología de evaluación propuesta por el grupo rumec estableciendo una comparación ente las calificaciones generadas a partir de ésta con las obtenidas mediante un procedimiento directo que permite conocer con mayor certeza la situación cognitiva del estudiante, es decir, la entrevista personalizada. Concretamente, se busca saber si la evaluación de los estudiantes a través del tratamiento instruccional ace genera las mismas calificaciones que la evaluación a través de entrevistas personalizadas.

1.2 Estado del arte

1.2.1 *Panorama general de la evaluación*

Durante muchos años los métodos de enseñanza y el diseño de las estructuras curriculares en el área de las matemáticas han estado inspirados por las experiencias en el salón de clases y por las concepciones particulares que los educadores poseían sobre dicha materia.

Frente a la evidente subjetividad de tales criterios en el ámbito de la evaluación, donde el diseño e instrumentación de los exámenes reflejaban los juicios individuales de quien los elaboraba y calificaba, resultaban atractivos los modelos que propugnaban por procesos de evaluación más técnicos y objetivos.

Entre dichos modelos destaca, durante las décadas de 1960 y 1970, la teoría conductista del aprendizaje, la cual proponía considerar como efectos educativos sólo aquellos que se tradujeran en cambios de conducta y que, por lo mismo, fueran observables por medio de técnicas objetivas de evaluación. Su premisa era que si el diseño del currículo y la enseñanza parten de objetivos claros y precisos, entonces la evaluación debería poder constatar cuándo tales objetivos han sido alcanzados.

Esta orientación se deja ver claramente en los textos especializados de esos años; por ejemplo, Tyler (1973) plantea: "La evaluación tiene por objetivo descubrir hasta qué punto las experiencias de aprendizaje, tales como se las proyectó, producen realmente los resultados apetecidos" (p. 108). Y más adelante, en la misma obra: "[...] la evaluación debe juzgar la conducta de los alumnos, ya que la modificación de las pautas de conducta es precisamente uno de los fines que la educación persigue" (p. 109). Por su parte, Bloom definiría la evaluación en esta misma línea como: "la reunión sistemática de evidencias a fin de determinar si en realidad se producen ciertos cambios en los alumnos y establecer el grado de cambio en cada estudiante" (Bloom *et al.,* 1975, p. 23).

Por otra parte, la universalización del sistema educativo extendió el uso de la evaluación como un instrumento para estimular y controlar al estudiante, particularmente en circunstancias en las que se da una pérdida de la relación personal y continua del profesor con cada uno de sus alumnos.

Estas concepciones sobre la evaluación como un sistema de medición y control objetivo de estados o niveles cognitivos, de rendimiento o de productos de aprendizaje en el alumno han experimentado una evolución gradual hacia otra perspectiva que aprecia que ha de ponerse énfasis en el diagnóstico del aprendizaje, en la explicación de sus causas y en la valoración de las realidades diagnosticadas. Esta nueva actitud se ha visto materializada en distintas iniciativas institucionales y académicas tanto en la experiencia nacional como internacional.

En los Estados Unidos, el National Council of Teachers of Mathematics (nctm) emitió en el año 2000 una serie de principios y estándares en los que se señala que para asegurar un aprendizaje de calidad, los sistemas de enseñanza de matemáticas deben integrar a la evaluación como una actividad cotidiana en el salón de clase. Se plantea, además, que ésta puede contribuir significativamente al aprendizaje de los estudiantes si se apoya en la utilización de técnicas no convencionales, como la observación individual, las conversaciones y las entrevistas personalizadas.

En los estándares, sin embargo, no deja de advertirse que los métodos no tradicionales de evaluación son casi siempre más difíciles de diseñar e implementar. No es fácil recolectar la información recomendada por los estándares: las observaciones en el salón de clase requieren que el profesor tenga experiencia en esta actividad; las entrevistas individuales a los estudiantes requieren de tiempo, además de que presentan dificultades de organización y análisis.

Otra iniciativa norteamericana, conocida como el Proyecto 2061, promovida por la American Association for the Advancement of Science (aaas) con el apoyo del nctm y el National Research Council (nrc), busca establecer coherencia entre la evaluación y los objetivos del aprendizaje, lo que significa un paso importante en el esfuerzo por vincular las metas propuestas en los estándares oficiales con el currículo y con la instrucción.

El Proyecto 2061 hace algunas recomendaciones sobre lo que los estudiantes deben saber y ser capaces de hacer en ciencias, matemáticas y tecnología para cuando se gradúen de la escuela preparatoria.

Con este propósito, los organismos antes mencionados proponen llevar a cabo una revisión de los libros de texto, el currículo y la metodología misma de evaluación, de manera que resulten acordes con los objetivos de aprendizaje; y sugieren, por otra parte, la publicación de los exámenes aplicados a los estudiantes, los cuales frecuentemente son usados como indicadores de éxito o fracaso y que son inducidos por la política institucional.

Adicionalmente, en el contexto del proyecto, el documento *Blueprints for Reform: Science, Mathematics and Technology Education (Planes para la reforma: la educación en ciencias, matemáticas y tecnología,* aaas, 1998) recomienda que la evaluación debe:

- Incluir variedad de técnicas.
- Alentar a los estudiantes a ir más allá de la memorización de datos y hechos.
- Acortar la distancia, en la medida de lo posible, entre el salón de clase y el mundo real.
- Ofrecer oportunidades para que los estudiantes realicen tareas y resuelvan problemas.

En resumen, el Proyecto 2061 busca:

- Desarrollar criterios y procedimientos de análisis para juzgar la coherencia entre las tareas evaluación y las metas específicas de aprendizaje.
- Producir casos de estudio que ilustren el uso de los criterios en la revisión de las actividades de evaluación existentes y crear nuevas actividades.

Este proyecto pretende servir de guía para los profesores en el salón de clase, quienes requieren desarrollar sus propios exámenes, interpretar las respuestas de los estudiantes y tomar decisiones basadas en esas respuestas.

Otra propuesta a la mejora del proceso de evaluación tuvo lugar en el Departamento de Física de la Universidad del Estado de Arizona, en donde los profesores Halloun y Hestenes (1985, pp. 1043-1055) publicaron un cuidadoso estudio en el que exponen y validan experimentalmente el diseño de un sistema para evaluar objetivamente los resultados de la instrucción en física mediante una escrupulosa comparación del estado de los conocimientos de los estudiantes antes y después de ser sometidos a ella.

El sistema consiste en aplicar a los estudiantes, de forma previa e independiente al curso, un par de exámenes diagnósticos, tanto de física introductoria como de cálculo, para explorar sus conocimientos y creencias acerca de los fenómenos físicos, así como sus habilidades matemáticas. El nivel de los exámenes excluye problemas que pudieran ser resueltos por la simple sustitución de valores en una fórmula. Al final, se practica una prueba de mecánica, también externa al curso, para conocer el efecto de la instrucción en los parámetros inicialmente considerados.

La comparación de los resultados de tales pruebas diagnósticas con los del curso podría permitir a los profesores revisar o rediseñar sus esquemas de instrucción para conseguir mejores resultados.

En la Universidad de Northumbria, en el Reino Unido, la evaluación es utilizada para revelar el "currículo oculto", es decir, aquello que hacen y experimentan profesores y estudiantes en el salón de clase por contraposición con lo que en teoría se espera que ocurra según se estipula en el currículo oficial. En la mayoría de las universidades, el currículo formal enfatiza altas metas educacionales tales como independencia de pensamiento, capacidad de análisis, habilidad para resolver problemas, etc.; pero desde el punto de vista de los estudiantes y el profesor, los procedimientos de evaluación sugieren que el currículo oculto enfatiza la memorización de hechos y teorías como la vía para conseguir el éxito académico. Por eso es que autores como Rowntree proponen que "si deseamos descubrir la verdad acerca del sistema educacional, debemos observar los procedimientos de evaluación" (Rowntree, 1997, p. 1).

Cada acto de evaluación es un mensaje para los estudiantes acerca de lo que deben estar aprendiendo y cómo pueden hacerlo. Los mensajes que envía la evaluación están codificados, no son fáciles de entender y con frecuencia mensajes iguales reciben diferente énfasis por parte de los profesores. Los estudiantes no responden explícitamente al currículo oculto, sino que lo construyen a través de sus interpretaciones, percepciones y acciones.

Por ejemplo, Elbown (1999, p. 8) habla del mensaje dañino que se envía a los estudiantes acerca de la naturaleza de los procesos escritos, sugiriéndoles que las discusiones acerca de los conceptos a aprender son innecesarias y superfluas. Por otra parte, autores como Sambell reportan que algunos estudiantes perciben que la evaluación "contamina" su aprendizaje (Sambell *et al.,* 1997).

Los autores mencionados sugieren que los métodos de evaluación deben ser variados, de manera que el estudiante cuente con distintas vías para informar al profesor acerca de su entendimiento. Por ejemplo, puede evaluarse por proyectos individuales o en equipo, por presentación oral, por exámenes a libro abierto, por presentación de posters, o por simulación de tareas profesionales y portafolios. Ante esta diversidad en la metodología de evaluación los estudiantes expresan la motivación a trabajar en diferentes formas, a establecer una relación diferente con los profesores y a adoptar diferentes enfoques sobre la naturaleza del aprendizaje.

En México, la inconformidad de amplios sectores de la sociedad respecto a la calidad de la educación llevó a las autoridades educativas a crear el Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior (Ceneval), que es un organismo destinado a poner en práctica, de manera cotidiana y permanente, los conceptos, políticas y directrices del sistema educativo. Sus metas prioritarias son el mejoramiento cualitativo de la educación y la intensificación de los procesos de evaluación, en el sentido de evaluar con mayor rigor y de manera sistemática lo que se hace en el sistema educativo.

El Ceneval busca, pues, aportar evidencias relativas al aprendizaje que logran los estudiantes, las cuales ayudan a evaluar el quehacer de las instituciones de educación superior. La calidad de un programa educativo se mide, entre otras cosas, a partir del aprendizaje que logran los estudiantes. La evaluación de ese aprendizaje es algo fundamental (Gago, 2000).

Para alcanzar su cometido, el Centro se dedica principalmente a elaborar exámenes y pruebas de conocimientos y habilidades. Estos instrumentos contribuyen a evaluar la eficacia de los programas y las actividades educativas ya que permiten indagar la medida en que los estudiantes han aprendido lo que debían aprender. La indagación que se hace con los exámenes del Ceneval es adicional y complementaria a la que hace cada profesor en su escuela o facultad. El uso de los exámenes del Ceneval es voluntario y son las instituciones educativas las que determinan las repercusiones y efectos que tendrán los resultados y la información que les proporciona el organismo.

Los exámenes del Ceneval no pretenden explorar de forma cabal y exhaustiva todos los posibles objetivos y finalidades de cada programa educativo, pero sí aquellos que consideran indispensables o esenciales. Desde su perspectiva externa e independiente, el Ceneval se ocupa de establecer el "mínimo esencial" de conocimientos y habilidades que debiera alcanzarse en los programa de licenciatura, de bachillerato o de educación secundaria, con lo que se posibilita la realización de estudios, evaluaciones y comparaciones que no es factible hacer con los exámenes y pruebas que practica cada profesor en cada escuela. De manera que se intenta establecer el uso generalizado de lo que podría entenderse como estándares nacionales.

Lo anterior permite vislumbrar que en un futuro inmediato se establecerán normas en las instituciones educativas, o leyes en el país, que propicien la doble evaluación de los egresados: una interna a cargo de la propia institución de educación superior y otra externa, realizada por instituciones diversas (gobierno, colegio de profesores, organismos especializados, etcétera).

Por otro lado, reportes recientes sobre la evaluación del aprendizaje sugieren reconsiderar y ampliar las bases conceptuales y metodológicas utilizadas en la construcción y en la evaluación técnica de exámenes. Entre sus diversas recomendaciones, cabe destacar el uso de pruebas válidas y la coordinación y vinculación entre los exámenes aplicados en el salón de clase con los aplicados a gran escala.

Como puede verse, a partir de las experiencias e investigaciones anteriormente expuestas, existe en varios países un activo movimiento por la mejora en la enseñanza a través de la revisión de los programas de estudio, de las metodologías de evaluación, de la interacción entre ambos, etc. (Madison, 1998).

En el terreno de la matemática educativa, los artículos publicados en las revistas especializadas revelan un cambio de actitud en muchos profesores universitarios hacia la búsqueda de mejoras a los procesos de enseñanza y aprendizaje usando la metodología de evaluación como herramienta para conseguir la información que les permita decidir hacia dónde enfocar sus esfuerzos.

1.2.2 *La propuesta de RUMEC en el contexto de las metodologías de evaluación en los Estados Unidos*

En el seno de la Mathematical Association of America (fundada en los Estados Unidos en 1920) se conformó el Committee on the Undergraduate Program in Mathematics (CUPM), encargado de emitir recomendaciones para apoyar a los distintos departamentos universitarios de matemáticas en el diseño de sus planes de estudio de licenciatura.

En el año de 1995, el Subcomité de Evaluación del CUPM publicó el documento "Assessment of Student Learning for Improving the Undergraduate Major in Mathematics" ("La evaluación del aprendizaje de los estudiantes como apoyo en el mejoramiento de las asignaturas matemáticas", MAA, 1995, pp. 24-28), en el cual se convoca a los departamentos de matemáticas de las diferentes universidades a considerar las ventajas que para la enseñanza superior puede reportar el uso de la evaluación como un indicador de la medida en que los planes de estudio cumplen con los objetivos curriculares.

Para llevar a la práctica esta propuesta, el documento recomienda a los departamentos partir de un conjunto de principios guía e implementar un ciclo de actividades de evaluación, para lo cual se delinean, a manera de ejemplo, ciertos principios, metas, áreas de evaluación y técnicas de asignación de calificaciones.

Inicialmente, y previo a la construcción de un ciclo de evaluación es, pues, fundamental acordar un conjunto de principios básicos que orienten el proceso tanto éticamente como operacionalmente. Éstos tienen como fin prever posibles problemas, así como garantizar una práctica educativa eficaz. En el documento se someten a consideración los siguientes principios:

1. Los objetivos deben ajustarse a las metas institucionales, así como a los antecedentes de los estudiantes, sus habilidades, aspiraciones y necesidades profesionales.
2. La evaluación debe centrarse principalmente en el currículo matemático.
3. La evaluación debe ser una parte integral del programa y de los procesos de depuración y mejora del mismo.
4. La evaluación debe usarse para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de todos los estudiantes, y no como un sistema para excluirlos de las oportunidades educativas.
5. Los estudiantes y el personal docente deben involucrarse y estar informados de los proceso de evaluación, desde la planeación hasta la implementación.
6. Los datos deben recabarse con propósitos específicos, determinados previamente, y los resultados deben reportarse de manera oportuna.

Una vez que los principios han sido formulados y comprendidos, el departamento de matemáticas puede emprender un ciclo de actividades de evaluación partiendo de las siguientes tres preguntas:

1. ¿Qué deben aprender los estudiantes?
2. ¿Qué tan bien están aprendiendo?
3. ¿Qué debemos cambiar para que en el futuro nuestro estudiantes aprendan más y mejor?

El documento del cupm propone los siguientes pasos en el diseño e implementación del ciclo, con los cuales se busca además dar respuesta a las tres preguntas anteriores:

1. Articular las metas de aprendizaje del currículo de las matemáticas con el conjunto de objetivos prácticos que deben llevar a la consecución de esas metas.
2. Diseñar estrategias (tales como métodos curriculares e instruccionales) que permitan alcanzar los objetivos y que tomen en cuenta las experiencias de aprendizaje de los estudiantes, los diversos estilos de aprendizaje y los resultados de investigaciones acerca de cómo aprenden los estudiantes.
3. Determinar las áreas de actividad de los estudiantes y las capacidades académicas que servirán como parámetro para establecer juicios cualitativos. Elegir aquellos métodos de evaluación diseñados para medir el progreso de los estudiantes hacia el cumplimiento de los objetivos.
4. Recabar la información que arrojan los procesos evaluatorios; resumir e interpretar los resultados.
5. Usar los resultados de la evaluación para mejorar la enseñanza matemática universitaria.

El documento concluye afirmando que mediante un efectivo ciclo de evaluación, los estudiantes se comprometerán más con su aprendizaje, el cuerpo docente emprenderá discusiones relevantes sobre los procesos de enseñanza y se dará una mayor interacción entre facultades y estudiantes, lo que ayudará a construir un fuerte sentido de responsabilidad en todos los participantes respecto a la calidad del aprendizaje.

Hace ya poco más de dos décadas los profesores de diferentes universidades se han visto motivados por este tipo de iniciativas para experimentar metodologías evaluativas diferentes a las tradicionales, por lo que cada vez es más frecuente encontrar prácticas evaluativas como: exámenes comprensivos, entrevistas, presentaciones, aprendizaje colaborativo, portafolios, etcétera.

En el contexto del Movimiento Nacional de la Reforma del Cálculo aparece en 1987 el programa C4L (Calculus, Concepts, Computer and Cooperative Learnig) bajo la conducción de Ed Dubinsky y Keith Schwingendorf. Esta propuesta educativa tiene dos enfoques: una investigación cualitativa acerca de cómo los estudiantes aprenden los conceptos del cálculo y una investigación cuantitativa acerca del desarrollo de un modelo analítico de la evaluación de la efectividad de sus reformas educacionales.

El programa C4L se basa en una perspectiva constructivista de acuerdo con la cual los estudiantes necesitan construir su propio entendimiento de cada concepto matemático, de manera que los cursos de cálculo propuestos por C4L difieren radicalmente de los cursos tradicionales. El programa busca ayudar a los estudiantes a alcanzar un profundo entendimiento de los conceptos del cálculo mediante la implementación de un ciclo de enseñanza conocido como ace: actividades-clases-ejercicios (Schwingendorf, 1996).

Cada unidad del ciclo dura aproximadamente una semana, empezando con la realización de actividades computacionales en un esfuerzo por ayudar a los estudiantes a construir su propio significado de los conceptos matemáticos y reflexionar con sus compañeros de equipo en un ambiente de aprendizaje colaborativo. A cada sesión de laboratorio sigue otra donde los estudiantes resuelven problemas, también de forma colaborativa, que después discutirán con el grupo completo. Finalmente se les asignan ejercicios relativamente tradicionales para reforzar los conocimientos que se espera que hayan construido durante las dos primeras fases del ciclo.

El diseño cualitativo de las actividades de aprendizaje se basa en la *descomposición genética* de cada concepto matemático básico. Para elaborar dicha descomposición los investigadores parten de una base teórica subyacente, la cual es modificada con base en entrevistas realizadas a estudiantes y en observaciones de la forma en que ellos intentan aprender cada concepto.

Posteriormente, los resultados de investigación de la fase cualitativa del proceso de evaluación de C4L se usan para revisar el diseño del currículo, el libro de texto y otros materiales de curso del programa, así como para ajustar el diseño pedagógico.

1.3 Marco teórico

1.3.1 *La teoría* APOE

Muchos cursos tradicionales de cálculo, carentes de un sólido respaldo teórico, llegan a sembrar en los estudiantes la idea de que esta asignatura es fría, tediosa, aburrida, memorística y sin sentido, lo que trae consigo, además de resultados deficientes de aprendizaje, consecuencias perjudiciales en la capacidad de asimilación y comprensión posteriores de los alumnos.

Según Piaget existen prácticas educativas que no sólo inhiben sino que dañan el desarrollo intelectual de los niños: “En algunos casos [...] los regalos de la instrucción son presentados demasiado temprano o demasiado tarde, o de manera que se inhibe la asimilación porque ésta no ajusta a las construcciones espontáneas de los niños. Entonces el desarrollo intelectual es impedido, o incluso lo vuelven estéril.” (Piaget, 1979, p. 246).

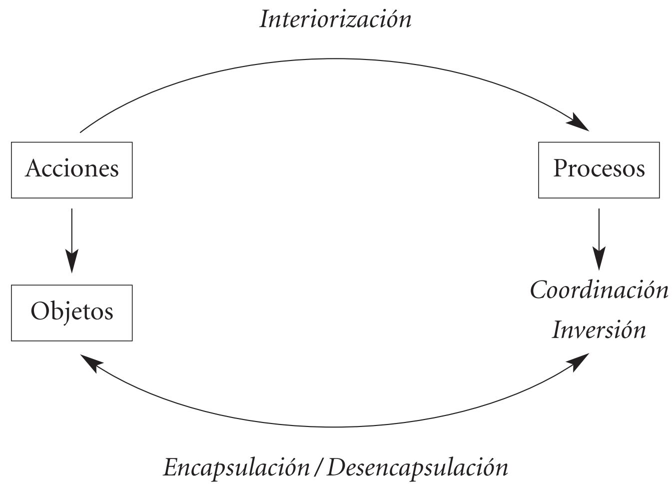
Es en este contexto que el grupo de investigadores rumec (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) propone, tomando como base las ideas de Piaget, la teoría apoe (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), a partir de la cual instrumenta y refina el ciclo de enseñanza ace. Ambas ideas tiene por objetivo alcanzar un mejor entendimiento sobre la forma en que ocurre el aprendizaje, desarrollar una pedagogía basada en la teoría que pueda ser usada en la instrucción universitaria de las matemáticas, y diseñar técnicas de información y evaluación referentes a la epistemología y pedagogía asociadas con conceptos particulares.

Para el grupo, el conocimiento matemático de un individuo "es su tendencia a responder a problemas matemáticos por reflexión sobre los mismos, y sus soluciones son dadas en un contexto social. Estas soluciones se alcanzan mediante la construcción o reconstrucción de acciones, procesos y objetos, organizando éstos en esquemas para posteriormente usarlos en situaciones determinadas" (Asiala *et al.*, 2000, p. 7).

De acuerdo con esta descripción, el conocimiento presenta dos problemas: conocer un concepto y acceder a éste cuando sea necesario, pero además, el conocimiento es una tendencia a hacer construcciones mentales que son usadas en una situación problemática. El progreso en el desarrollo del conocimiento matemático tiene lugar cuando se hace una reconstrucción a través de una generalización, una interiorización, una encapsulación, una coordinación o una reversión, frente a un problema parecido a otro tratado anteriormente. Dicha reconstrucción no es exactamente igual a las construcciones previas, puede implicar uno o más avances a un nivel más sofisticado.

Cabe preguntarse entonces, ¿cuál es la naturaleza de esas construcciones? y ¿de qué forma se elaboran?

El grupo rumec parte de la idea de que el entendimiento matemático de un concepto inicia con la manipulación de un objeto físico o mental para formar acciones, de manera que la repetición de las manipulaciones permite que estas acciones sean interiorizadas para formar procesos los cuales pueden ser encapsulados para formar objetos. Los objetos, a su vez, pueden ser desencapsulados invirtiendo el proceso por el cual fueron formados. Finalmente, acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas. En palabras de Dubinsky: "Cuando el material es realmente entendido, entre cada conjunto estático de símbolos escritos hay para el sujeto un movimiento dinámico de procesos, formación de objetos, empaque de procesos y enganchamiento con otros, transformando objetos, regresando y formando otros procesos, y mediante ese rico mundo interno en la mente del matemático, enriqueceremos a nuestros estudiantes si conseguimos que ellos lo conozcan" (Dubinsky, 2000, p. 3).



Por otra parte, no se puede dejar de lado el énfasis que hace el grupo en la abstracción reflexiva, la cual permite describir la construcción de estructuras lógico-matemáticas de un individuo durante su desarrollo cognitivo. Piaget consideró que la abstracción reflexiva en su más avanzada forma permite la construcción de un tipo de conocimiento matemático; es decir, la abstracción reflexiva permite la formación de un proceso o permite la separación del contenido, de la misma manera que permite que esos procesos sean convertidos en objetos de contenidos.

Abordemos ahora, de manera más detallada, el modelo propuesto por la teoría apoe para la formación del conocimiento matemático. El sujeto que aprende lleva a cabo una *acción* cuando realiza una manipulación física o mental sobre un objeto que es percibido de manera externa a él. En muchos de los casos esta manipulación ocurre como reacción a estímulos externos que indican los pasos a realizar. En el contexto de la teoría, muchas de las dificultades asociadas al aprendizaje están relacionadas con la falta de habilidad de los estudiantes para interiorizar esas acciones en procesos, o encapsular los procesos en objetos. A pesar de que la conceptualización en el nivel de las acciones es muy limitada, la teoría señala que éstas son el inicio crucial para lograr el entendimiento posterior de un concepto.

Cuando la acción es repetida manual o mentalmente y no es provocada por estímulos externos necesariamente, ésta puede ser interiorizada en un *proceso.* La interiorización permite al sujeto ser consciente de la acción, reflexionar sobre ella y a la vez coordinarla con otras acciones. La manera de percibir que un concepto se encuentra en el nivel de proceso es a través de la calidad en la manipulación de éste: si el estudiante es capaz de invertir los pasos de la transformación, el nivel de conocimiento ha ascendido. Se considera que un proceso es una actividad interna y completamente controlada por el individuo.

Si un individuo puede reflexionar de manera más general sobre un proceso particular, si lo concibe como una totalidad y si puede efectuar transformaciones sobre el mismo, decimos entonces que ha encapsulado a dicho proceso como un *objeto.* En el curso de la formación de acciones o procesos en objetos, con frecuencia existe la necesidad de desencapsular el objeto invirtiendo el proceso por el cual fue formado. La encapsulación de procesos en objetos es una tarea particularmente difícil.

Una colección de procesos y objetos puede ser organizada estructuralmente para formar *esquemas.* Los esquemas pueden ser tratados como objetos e incluidos en organizaciones más complejas que la teoría llama "esquemas de alto nivel". Cuando esto ocurre los esquemas son considerados como objetos. Así, un esquema es una colección más o menos coherente de objetos y procesos. La tendencia de un sujeto a invocar un esquema le permite llegar a la comprensión, lidiar con ella, organizar o lograr dar sentido a la situación problemática (Dubinsky, 1996).

De acuerdo con la perspectiva teórica apoe, el crecimiento del entendimiento no es lineal. Los estudiantes desarrollan entendimientos parciales y repetidamente regresan a la misma pieza del conocimiento ya que, como se dijo arriba, el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a usar ciertas construcciones, pero no todas las construcciones relevantes son recordadas en cada situación.

Pero, ¿de qué manera el grupo de investigadores plantea el diseño pedagógico para conseguir la formación de las mencionadas estructuras de conocimiento? Para conseguir su objetivo diseñan un tratamiento instruccional que emplea lo que llaman el "*holistic spray*". El grupo busca crear un ambiente intencionalmente desequilibrado el cual contiene tanto como sea posible del material que se está estudiando, con la idea de que cada conocimiento sea expuesto de manera holística, oponiéndose a los conocimientos expuestos de manera organizada secuencialmente. De esta manera, cada individuo o cada grupo trata de dar sentido a las situaciones, esto es, tratan de resolver problemas, responder preguntas o entender ideas. Diferentes estudiantes pueden aprender distintas piezas de un concepto en diferentes momentos, de manera que están siempre tratando de dar sentido a las situaciones problemáticas. La metodología pedagógica particular que usan es el ciclo ace.

1.3.2 *El ciclo* ACE

Un curso basado en la metodología ACE se distribuye en varias etapas, cada una de las cuales abarca una semana durante la que se llevan a cabo tres tipos de sesiones: actividades (A) de computación, discusiones en el salón de clase (C) y ejercicios (E) que se completan fuera del salón. A este efecto, desde el principio los estudiantes son organizados en equipos permanentes de no más de cuatro estudiantes para realizar su trabajo de manera colaborativa; además, se requiere de ellos su compromiso y activa participación en cada tarea o actividad asignadas para que logren un aprendizaje significativo.

Las *actividades* se llevan a cabo en un laboratorio de computación donde los estudiantes realizarán tareas diseñadas para desarrollar construcciones mentales específicas sugeridas por el marco teórico. Partiendo de la idea de que resolver problemas matemáticos, escribir definiciones y pruebas es como elaborar programas en un lenguaje de programación y ejecutar éstos en la mente, las tareas requieren que ellos escriban y/o revisen un código computacional usando un lenguaje matemático de programación (el ISETL o Interactive Set Language). Se busca que cuando ellos efectúen alguna actividad prediseñada en la computadora, ésta afecte su mente.

Las *discusiones en clase* se hacen por equipos y con ellas se busca que los estudiantes reflexionen sobre el trabajo que realizaron en el laboratorio de computación. Después de esta actividad se sugiere al profesor proporcionar explicaciones y definiciones revisando los que los estudiantes han estado discutiendo.

Los *ejercicios* son tradicionales y asignados a cada equipo de trabajo para ser resueltos fuera del salón de clase. La idea es que los estudiantes refuercen las ideas que han construido para usar las matemáticas que han aprendido o para empezar a pensar acerca de situaciones que pueden ser estudiadas después.

El diseño de las actividades da oportunidad a los estudiantes de mostrar cómo resolverían un problema usando las ideas que han aprendido. Las actividades computacionales frecuentemente los fuerzan a resolver problemas que involucran matemáticas que aún no han estudiando. Se fomenta la discusión de los problemas con los miembros de sus grupos y con otros compañeros.

Como apoyo a su trabajo, el grupo de investigadores ha confeccionado un libro de texto específicamente adaptado a su metodología, el cual desempeña un papel fundamental en la formación de los conceptos matemáticos en la mente de los estudiantes, permitiéndoles familiarizarse con la simbología y el lenguaje de las matemáticas a partir de las actividades propuestas.

El plan del libro difiere de los libros de texto comerciales comunes, cuya utilidad es cuestionada por el grupo a partir de la tesis de que las matemáticas no se aprenden en el orden lógico en el que se presentan en los libro de texto tradicionales. El libro rumec está dividido en 10 capítulos, de tres o cuatro secciones cada uno, y está programado para trabajarse en sesiones semanales. Cada sección, por su parte, esta diseñada con base en la *descomposición genética* del concepto a estudiar. El primer capítulo del libro esta dedicado a familiarizar al estudiante con los componentes computacionales necesarios para abordar el curso.

La estructura de cada sección refleja nuestras creencias acerca de cómo la gente aprende mejor, esto es, haciendo y pensando acerca de lo que hacen. Cada sección empieza con una lista sustancial de actividades para ser realizadas en equipos en una computadora y que tienen como finalidad crear la base para el siguiente estadio de aprendizaje. Como desde la perspectiva de rumec existe similitud entre aprender a programar y aprender matemáticas, mucho del trabajo en computadora será escribir en el lenguaje de programación isetl, lo que exige al estudiante tratar de deducir qué hace la computadora y cómo manipula objetos.

Las actividades en cada sección son seguidas por discusiones, introduciendo el temario oficial de la materia. A través de las actividades y las discusiones los estudiantes avanzarán hacia un entendimiento mayor y cada vez a horizontes más lejanos del tópico.

Después de la sección de las discusiones se encuentra la sección de ejercicios, pensada para ayudar a los estudiantes a solidificar sus conocimientos. No existen muestras de ejercicios resueltos ni respuestas al final del libro.

1.3.3 *La evaluación del aprendizaje en la metodología de* RUMEC

El sistema de evaluación propuesto por rumec demanda una posición activa de los estudiantes frente a su propio aprendizaje. La metodología contempla innovaciones como aprendizaje colaborativo, actividades computacionales, lecturas y discusiones diseñadas para estimular en los estudiantes la construcción de los conceptos matemáticos.

Las actividades que conforman la evaluación son:

a) Actividades semanales computacionales. Se llevan a cabo en el laboratorio de computación trabajando colaborativamente; es frecuente el uso de tiempo extra a las sesiones de clase. El resultado de esta actividad es entregada y evaluada por equipo, la calificación se asigna por tarea entregada y su objetivo es provocar la construcción de estructuras cognitivas necesarias para la comprensión de los conceptos matemáticos a estudiar. Para cada periodo parcial (de un mes) hay cuatro actividades y cuentan el 10% de la calificación de dicho periodo.

b) Discusiones en el salón de clase. Tienen lugar la segunda sesión de cada semana y su objetivo es reflexionar acerca de la actividad computacional realizada. El registro de las participaciones en éstas contribuye un 10% a la calificación de cada periodo.

c) Tareas semanales. Son esencialmente tradicionales y se entrega una sola tarea por equipo. Para cada periodo parcial hay cuatro tareas que son entregadas los viernes de cada semana. Contribuyen un 20% a la calificación de cada periodo.

d) Primer examen. Se resuelve en equipo y cubre el 25% del material total del curso. Cada equipo entregan sólo un examen, por lo que cada estudiante del equipo recibe la misma calificación, la cual contribuye un 60% a la calificación del primer periodo parcial.

e) Segundo examen. Ocurre a la mitad del curso y se resuelve individualmente. Cada estudiante recibe dos calificaciones: la de su propio examen y el promedio de las calificaciones de cada integrante del equipo. El resultado individual cuenta 40% y el promedio de las calificaciones del equipo 20%.

f) Tercer examen. Se lleva a cabo cuando se ha cubierto aproximadamente el 75% del curso y se resuelve individualmente. Al igual que en el segundo examen, cada estudiante recibe dos calificaciones, la de su examen y el promedio de las calificaciones los otros integrantes del equipo. El resultado individual cuenta 40% y el promedio de las calificaciones del equipo 20%.

g) Examen final. Se aplica de manera individual, cada estudiante recibe solamente su calificación. Contribuye en un 60% a la calificación final del curso.

h) Participación en clase. Muchas de las clases son dedicadas a resolver y discutir problemas en equipos. La participación individual y por equipo se registra y es tomada en cuenta para la calificación.

De lo anterior, el grupo rumec concluye que si los estudiantes participan en todas las actividades del curso, cooperan en sus grupos, realizan razonablemente bien sus exámenes, etc., entonces las construcciones mentales fueron hechas y por lo tanto aprendieron los conceptos matemáticos estudiados en el curso.

1.4 Formas de evaluación

El replanteamiento de la evaluación trae necesariamente consigo el cuestionamiento de otros componentes que contribuyen al proceso del enseñanza y aprendizaje, debido a que se trata de una de las partes más importantes de dicho proceso.

Por lo anterior, las formas de evaluación han variado a fin de representar de manera cada vez más adecuada el nivel de conocimientos y habilidades de los estudiantes. En esta evolución gradual, encontramos distintos formatos de evaluación, como los exámenes tradicionales, los exámenes estandarizados y las entrevistas.

1.4.1 *Exámenes tradicionales*

La forma tradicional de evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje consistía, hasta hace algunos años, en la aplicación de exámenes individuales en los que se medía la retención repetitiva de información fáctica por parte de los estudiantes. La eficacia de este esquema para describir el grado de cumplimiento de las metas educativas ha sido puesto en duda.

Los exámenes tradicionales tienden a evaluar los resultados educativos más tangibles, triviales y fáciles de medir, y no los más importantes, como son la comprensión genuina, la originalidad, la capacidad de resolver problemas, de pensar independientemente, de recuperar información, de sintetizar conocimientos, etc. (Calonghi, 1991). No se han ideado todavía sistemas de medición objetiva de rasgos y capacidades tan importantes como son el estilo cognitivo individual, las estrategias para resolver problemas, la flexibilidad y la sensibilidad al problema.

Las puntuaciones de un examen y las calificaciones escolares se vuelven a menudo fines en sí mismos, desplazando en importancia al aprendizaje efectivo, la competencia y el aprovechamiento escolar que pretendían demostrar y representar; no es de extrañar, pues, que los alumnos pierdan interés en la materia tan pronto como son registradas sus calificaciones. La sociedad, por su parte, concede también mayor valor a las calificaciones que a los testimonios de escolaridad e idoneidad para la práctica de una profesión, intrínsecamente más válidos a largo plazo.

El profesor, como un investigador cotidiano de los objetivos de aprendizaje, debe diseñar sus exámenes guiándose por preguntas como: ¿qué es lo que realmente nos interesa medir?, ¿qué es lo que realmente miden nuestros exámenes?

Una de las deficiencias fundamentales de los exámenes tradicionales es que sus resultados se correlacionan exclusivamente con lo que se considera producto de la capacidad de rendimiento del alumno, ignorando "todo" lo demás, lo que impide toda posibilidad de mejora de "todo" lo demás, esto es, del resto de las variables que influyen de modo determinante en el aprendizaje.

Desde un punto de vista estadístico y pedagógico, los exámenes tradicionales en todos los niveles se caracterizan por su falta de objetividad, tanto respecto de su cuestionable validez y confiabilidad, como del absurdo psicológico y pedagógico que significa la aplicación de una evaluación discontinua, parcial en numerosos aspectos y desconectada del proceso formativo del alumno.

1.4.2 *Exámenes estandarizados*

Los exámenes estandarizados, aunque de elaboración más difícil y prolongada, deben su gran popularidad en la educación a varios factores. En primer término, porque se elimina la subjetividad y la variabilidad al calificar, ya que existen criterios precisos e invariables convenidos con antelación para esta labor. En segundo lugar, los reactivos se seleccionan de manera cuidadosa y sistemática de modo que constituyan una muestra representativa del contenido abarcado y de las competencias evaluadas; esto exige contar con una especificación exacta y anticipada de los objetivos educativos, tanto en función de los hechos, conceptos, principios y aplicaciones particulares que se espera que domine el estudiante, como de la forma en que se debiera manifestar dicho dominio. Tomando en cuenta que no es posible verificar la totalidad de los conocimientos que posee el alumno en un área dada, debe ponerse gran cuidado en asegurar que la muestra representativa de los temas importantes sea lo suficientemente amplia y en que se conceda la debida importancia a los aspectos subsidiarios. La tercera ventaja de las pruebas estandarizadas es la brevedad de cada reactivo y la mayor velocidad a la que puede contestarse, lo que permite un muestreo más amplio y sistemático del conocimiento adquirido en comparación con lo que sería posible por otros medios (Bridgeman, 2000, p. 127).

En el diseño de una prueba estandarizada debe ponerse especial atención a aspectos como el criterio de equidad, la selección de los reactivos y la profundidad de los mismos:

- La equidad se refiere al ideal de que los puntajes producidos por una prueba sean enteramente atribuibles a la habilidad o los conocimientos que el instrumento pretende medir y no a diferencias sistemáticas entre distintos sectores de la población.
- Los reactivos que son contestados correctamente por todos o casi todos los estudiantes son evidentemente muy sencillos como para que posean un poder discriminatorio; por razones opuestas, la misma conclusión se aplica a los reactivos que son contestados de manera incorrecta por todos o casi todos los alumnos. Así, un buen reactivo es aquel que es contestado correctamente y con más frecuencia por los estudiantes más talentosos (los que logran puntuaciones totales elevadas) que por los menos capaces, y respondido incorrectamente más a menudo por los estudiantes menos aptos. Los

reactivos que no satisfacen estos criterios se suprimen, se reescriben con menor ambigüedad o se reemplazan por otros.

- La profundidad se logra mediante la identificación de la cantidad y calidad de los actos de comprensión logrados o el número de obstáculos epistemológicos superados por el estudiante (Sierpinska, 1998).

Por otra parte, las pruebas estandarizadas han recibido enérgicas críticas basadas en la falta de comprensión de su naturaleza, funciones y limitaciones inherentes.

1.4.3 *Entrevista*

El proceso de enseñanza-aprendizaje requiere metodologías de evaluación que arrojen información real de la situación cognitiva de los estudiantes, información que permita al profesor tomar decisiones a fin de mejorar dicho proceso y a los estudiantes conocer sus logros cognitivos. Una metodología de este tipo la ejemplifica el sistema de la entrevista o evaluación oral, la cual, según varios autores, "ha tenido una larga historia y continúa formando parte importante del repertorio de la evaluación en las universidades" (Brown & Knight, 1994, p. 80; Forrest, 1985, p. 3688; Hubbard, 1971, p. 93).

La evaluación oral se define como aquella en la cual el estudiante responde a los reactivos en forma principalmente verbal o complementada con formas escritas o demostraciones de habilidades físicas. Este tipo de evaluación no pretende medir la habilidad oral del estudiante, sino su situación cognitiva, entendimiento, procesos de pensamiento y capacidad para comunicarlos.

La identificación de los elementos de la evaluación oral nos permitirá entender su naturaleza específica y determinar sus diferencias con otros tipos de evaluación, los cuales podremos describir y analizar desde una perspectiva diferente; así mismo, alcanzaremos un mejor entendimiento sobre la forma en que la evaluación oral interactúa con otros componentes del proceso de enseñanza y aprendizaje (Gordon, 1998, pág. 368): "Las entrevistas abiertas permiten observar el mundo tal como lo ve el entrevistado, las respuestas son más largas, detalladas y de contenido variable; su análisis se vuelve complejo ya que las respuestas no están estandarizadas. Las citas directas revelan los niveles de emoción cognición, así como la forma en que el alumno organiza su mundo y sus pensamientos sobre sus experiencias y percepciones." (Goldin, 1998, p. 11).

Esta metodología de evaluación trata de observar, registrar e interpretar ambientes complejos, incluyendo también aspectos no verbales. El profesor debe tomar decisiones con respecto al tipo de observaciones que considere importantes como parte del diseño de la entrevista dentro de su esquema evaluatorio.

Una de las diferencias más importantes entre la evaluación basada en una entrevista estructurada y los exámenes aplicados con papel y lápiz, es que aquélla se centra más en los procesos mentales de los estudiantes para resolver alguna tarea matemática y no se fija solamente en si las respuestas son correctas o incorrectas. La evaluación tradicional no permite observar lo que el sujeto está pensando o razonando, sus procesos cognitivos, representaciones internas, significados, estructuras de conocimiento, esquemas, estados emocionales y afectivos. La investigación basada en entrevistas, en cambio, permite inferir tales estados a partir de intercambios verbales de y la observación.

Los datos obtenidos mediante la evaluación oral son de tipo cualitativo, por tal razón es necesario utilizar instrumentos tales como la filmación, grabación, anotaciones por escrito, etc., cuyo registro permita proceder al análisis posterior de los mismos. Esto permitirá profundizar en una variedad más amplia de elementos, tales como la cognición compleja asociada con el aprendizaje de las matemáticas, los mecanismos de exploración matemática y resolución de problemas, las relaciones entre la solución de problemas y el aprendizaje, además de las relaciones entre la esfera emotiva y la cognitiva.

En el diseño de las entrevistas se deben tomar en cuenta los objetivos a investigar, es decir, es necesario llevar a cabo una investigación exploratoria, describir inferencias y técnicas de análisis, desarrollar construcciones o conjeturas, investigar o probar hipótesis, verificar la aplicabilidad de un modelo de enseñanza-aprendizaje o de resolución de problemas. De esta forma, el diseño de las entrevistas se ve afectado por la complejidad del fenómeno en el sistema bajo investigación.

Heid señala que, "cuando los estudiantes responden a exámenes no siempre muestran su verdadero nivel de conocimientos, algunas veces poseen más conocimientos de los que su respuesta indica; otras, sólo se limitan a repetir las respuestas correctas, aunque en realidad puedan no entender lo que escriben" (Heid, 2000, pp. 109-111). Por lo tanto, en opinión de este autor, si un instructor está interesado en conocer con mayor profundidad el entendimiento de sus estudiantes, puede hacerlo a través de entrevistas, las cuales le van a permitir percibir las interpretaciones personales y formas de pensar de sus alumnos: "El entendimiento de cada estudiante es único, y la mejor manera de revelarlo es mediante las entrevistas personalizadas. Éstas no son exámenes orales, porque el objetivo no es determinar la eficacia con la que el entrevistado puede realizar alguna actividad estandarizada, sino más bien caracterizar su manera de pensar" (Heid, 2000 p. 109-111).

Todo profesor debe preguntarse cotidianamente cómo es que los estudiantes le dan sentido a las matemáticas y no limitarse a verificar simplemente que las respuestas de las pruebas sean correctas. Heid recomienda el uso de la entrevista con el fin de enriquecer el entendimiento de los profesores acerca de los conocimientos de los conceptos matemáticos de los estudiantes, de manera que se puedan sugerir mejoras a la enseñanza.

Las intervenciones del entrevistador durante el desarrollo de una entrevista se vuelven parte del ambiente natural dentro de esta metodología, permitiéndole controlar parcial o totalmente algunas variables, tales como el escenario, la elección del tema, el material físico disponible, el tiempo permitido para resolver cada problema. Por lo que se sugiere contar con una lista de preguntas que describan la secuencia de intervenciones desde un punto de vista relativamente neutral. Dentro de esta lista podemos incluir las siguientes:

- ¿Por qué piensas eso?
- ¿Puedes mostrarme cuál es el significado de esa expresión?
- ¿Puedes decirme más acerca de esa gráfica?
- ¿Podrías explicarme cuál fue la manera de resolver ese problema?
- ¿Qué significado tiene la expresión que escribiste?
- ¿Cómo deseas abordar el problema?
- ¿De qué manera crees que te ayudará lo que escribiste?

La entrevista es, pues, un instrumento que nos permite reunir datos cualitativos, de manera que podamos vincular más la investigación con la práctica, y nos ayuda a saber cómo conseguir que el estudiante logre las metas de aprendizaje en una gran variedad de dominios matemáticos.

A través de la entrevista se puede mirar, desde afuera de la mente del alumno, la forma como razona en matemáticas. No es una tarea fácil, es más bien un fenómeno delicado y complejo que demanda estar atento a los gestos, el tono de voz, el lenguaje utilizado para referirse a los objetos matemáticos y otros tantos indicios que permiten detectar que se está llevando a cabo un proceso de razonamiento matemático adecuado. Estudiar cómo evoluciona la comprensión de un concepto hace necesario un seguimiento continuo y detallado de los estudiantes durante su actividad o de los procesos que están teniendo lugar en un determinado contexto.

La entrevista tiene el carácter de una prueba semiestructurada, es decir, que aun cuando existe un guión construido previamente con las características señaladas, éste no excluye la intervención del entrevistador, pues se busca comprender cómo se forman los conceptos en la mente del alumno.

De acuerdo con las opiniones anteriores, considero que la entrevista es una situación de contacto personal en la que una persona hace a otra preguntas que son pertinentes a algún problema en particular, lo que hace posible enfocarse sobre un punto específico que puede ser analizado con profundidad; la entrevista se basa en la idea de que las personas muestran una explicación de su conducta, prácticas y acciones al ser interrogadas al respecto, es decir, que reflexionan sobre sus propias acciones con la ayuda de quien las entrevista.

Éste es el sistema de evaluación que me servirá de parámetro para investigar la eficacia de la metodología de evaluación propuesta por el grupo rumec.

1.5 La metodología de Rumec frente a otras prácticas evaluativas

Con la finalidad de poner en contexto la metodología de evaluación de rumec, presento a continuación un ejercicio comparativo ente ésta y una serie de propuestas que se han venido explorando en distintas instituciones de educación superior.

1.5.1 *Exámenes departamentales* (itsefcp)

En el Instituto Tecnológico Superior Felipe Carrillo Puerto[1] (itsefcp), en México, se implantó a partir de 1999 una evaluación departamental, definida por sus creadores como oportuna, confiable, de amplia cobertura, significativa, representativa e imparcial. De acuerdo con su visión, el sistema de evaluación diseñado permite medir de manera adecuada los distintos niveles de conocimientos matemáticos.

Las razones para mejorar su metodología de evaluación fueron las siguientes:

1. Cada docente elaboraba los reactivos de sus exámenes unilateralmente, de acuerdo a su criterio, experiencia y lo visto en clase.
2. Cada docente calificaba su examen, perdiendo objetividad al asignar una calificación.
3. Los docentes entregaban los resultados de las evaluaciones en tiempos distintos.

[1] *Certificación de Evaluaciones Departamentales de las Ciencias Básicas bajo la Norma iso 9001: 2002,* ponencia presentada en la Facultad de Ciencias de la unam.

La nueva propuesta de evaluación es la siguiente:

1. Se establecen fechas fijas para que los estudiantes presenten su evaluación, la cual abarca todos los temas que deben ser cubiertos por los profesores.
2. Cada docente elabora reactivos que cubren la totalidad de los temas del programa.
3. Los reactivos incluidos en las evaluaciones son seleccionados por un comité de docentes con base en una matriz de nivel de conocimientos.
4. Cada examen es calificado por el comité de docentes apoyándose en una hoja de respuestas que no incluye el nombre del alumno.
5. Los resultados se publican a más tardar en las tres horas posteriores al término de la evaluación.

Similitudes

- Tanto el sistema de evaluación de rumec como el diseñado en el itsefcp muestran preocupación por los resultados obtenidos del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- La facultad busca que los docentes exploren alternativas para replantear el proceso de evaluación.
- Se cuestiona el desempeño del docente frente a dicha actividad.

Diferencias

- Mientras que rumec demanda la optimización del desempeño tanto de los estudiantes como de los profesores en busca de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, la propuesta del itsefcp centra su atención en el actuar de los profesores.
- Para rumec un ingrediente importante es la organización de los estudiantes es equipos de trabajo; el itsefcp, en cambio, no considera este recurso dentro de su propuesta.
- Mientras que para rumec es importante el actuar de los estudiantes a lo largo de todas las actividades de aprendizaje, para el itsefcp sólo importa su desempeño en el examen. Para rumec la evaluación es un proceso y no un resultado.
- rumec no sólo formula una alternativa en la metodología de evaluación, también plantea una nueva opción en la metodología global de enseñanza y aprendizaje.

1.5.2 *Frecuencia de evaluaciones* (unam)

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México,[2] existen diversas prácticas educativas. Entre ellas está la propuesta por un grupo de profesores que considera a la evaluación como un proceso complejo. Para enfrentar esta complejidad proponen la aplicación de evaluaciones parciales y periódicas, de manera que por medio de ellas se reflexione acerca de lo aprendido y, en caso de haber errores, se corrijan antes de seguir adelante. Dentro de las ventajas que presenta este sistema se mencionan las siguientes: registro del error de los estudiantes por escrito y la correspondiente corrección del profesor, la objetividad en la asignación de una calificación representativa del aprovechamiento y avance académico del alumno, la posibilidad de rectificar un error que pudiera cometer el docente al asentar la calificación.

Si además los exámenes están diseñados de manera correcta, se aplican convenientemente y son corregidos con cuidado por el profesor, entonces el sistema presenta ventajas considerables con respecto a otras formas de evaluar. El diseño de un buen examen en matemáticas tiene como objetivo evaluar la comprensión de los conceptos y su aplicación a situaciones nuevas que son susceptibles de ser analizadas y entendidas por medio del aprendizaje de esos conceptos. Los exámenes escritos, para ser buenos instrumentos de evaluación, deben ser elaborados poniendo atención en todos sus aspectos: contenido, originalidad, redacción clara, precisa y con riqueza y elegancia de lenguaje de ser posible.

Similitudes

- Para rumec también los exámenes son un elemento importante de la evaluación, ambos grupos consideran que al elaborar los reactivos de los exámenes se debe poner especial cuidado en el contenido, originalidad, además de redacción clara y precisa.

Diferencias

- Para rumec el proceso de evaluación va más allá de la elaboración, aplicación y corrección de los exámenes de los estudiantes. El proceso de evaluación trata de registrar el desempeño de los estudiantes frente a diferentes actividades, la mayoría de ellas realizadas en equipos colaborativos, que de

[2] Leda Speziale San Vicente, *Exámenes,* ponencia presentada en la Facultad de Ingeniería de la unam.

alguna manera muestren su situación cognitiva, habilidades y actitud frente al aprendizaje. Mientras que para este grupo de profesores de la Facultad de Ingeniería los exámenes son el único elemento que toman en cuenta para decidir la situación y el actuar del estudiante frente al aprendizaje.

1.5.3 *Combinación de estrategias de evaluación* (unam)

Otro grupo de profesores de la Facultad de Ingeniería de la unam (en su División de Ciencias Básicas)[3] preocupados por los altos índices de deserción y reprobación en las 24 asignaturas que coordinan piensan que existen varios elementos que contribuyen a que esto ocurra. Dentro de ellos se encuentran los malos hábitos de estudio de los alumnos, la entrega tardía de calificaciones (tanto en exámenes como de tareas) por parte de los profesores, el exceso de información que abarca cada una de las evaluaciones, la falta de iniciativa de los docentes para incrementar el aprendizaje de sus estudiantes, la ausencia de estrategias didácticas en las cátedras que se imparten, etcétera.

Así, con la finalidad de incrementar el aprendizaje de los estudiantes e identificar los factores que pueden mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, proponen una combinación de distintas estrategias de evaluación:

- *Evaluaciones semanales.* Cada una de las cuales consta de un reactivo elaborado por la facultad referente a los conceptos vistos durante la semana y que ha de ser resuelto en clase en un tiempo de 10 a 15 minutos. Los exámenes se regresan calificados la siguiente clase durante, la que se discuten los errores en los que se incurrió. Los resultados permiten implementar actividades para corregir deficiencias y en caso extremo explicar nuevamente el concepto.
- *Evaluaciones por tema.* Tienen por objetivo evitar la sobrecarga de información por dominar en cada examen. De esta manera se consigue que el alumno no deje pasar demasiado tiempo para estudiar y tratar de asimilar la información, y que cuente con el tiempo necesario para preparar su examen y con ello corregir los malos hábitos.
- *Evaluaciones de recuperación.* Esta estrategia consiste en que los alumnos tengan la oportunidad de volver a realizar los exámenes que no han aprobado, pero con diferentes reactivos. Así, pueden contar con más de una ocasión para mostrar su dominio de los conceptos.

[3] *Evaluación Interactiva: Una forma de incrementar el aprendizaje y acreditación,* ponencia presentada en Foro sobre Evaluación en la unam.

- *Evaluación diagnóstica.* Se aplica con el fin de conocer las deficiencias en el aprendizaje, y en función de ellas preparar las tareas adecuadas para subsanarlas.

Los profesores concluyen que la evaluación iterativa incrementa el aprendizaje y en consecuencia la acreditación, todo ello con la finalidad de que el estudiante obtenga un aprendizaje significativo y no algo superficial para acreditar la materia.

Similitudes

- Existe preocupación por los pobres resultados de aprobación y deserción.
- Se considera que los exámenes ayudarán a revelar algunos de los problemas existentes.

Diferencias

- La teoría de aprendizaje subyacente es conductista, de tipo estímulo-respuesta, ya que se considera que si el estudiante no aprendió un concepto, basta con explicarlo nuevamente. Se reduce el problema de aprendizaje a la mera falta de hábitos de estudio y al exceso de información por cubrir en cada examen. La teoría de rumec, en cambio, se centra en la construcción de estructuras cognitivas, de manera que el trabajo de los docentes consiste en plantear las actividades pertinentes para que éstas se formen; además, el grupo considera que el aprendizaje no se construye de manera jerárquica o lineal, donde los conceptos más complejos preceden a los más elementales.
- rumec no realiza evaluación diagnóstica, no habla de deficiencias sino de situación cognitiva.
- El grupo de investigadores de la Facultad de Ingeniería considera que mediante el incremento del número de evaluaciones se producirá el aprendizaje del estudiante, mientras que para rumec se debe incrementar la cantidad de actividades que provoquen en el estudiante la reflexión acerca de los conceptos estudiados.

1.5.4 *Portafolio (Universidad de Nebraska)*

Otra práctica evaluativa se presenta a través de la técnica de portafolio, la cual se extiende cada vez a más instituciones educativas ya que permite documentar y mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje.[4] La propuesta del portafolio surge de la noción de que la mejor forma de mostrar el desarrollo intelectual de los estudiantes acerca de los conceptos estudiados es apreciando su transformación a través de las actividades planteadas durante el curso. El portafolio contiene el programa de estudio con las metas del curso, las tareas, los ejercicios, los exámenes, los proyectos, las evaluaciones formales de los estudiantes y la evaluación final del instructor.

En la Universidad de Nebraska-Lincoln, el profesor Steven R. Dunbar usa el portafolio para la asignatura de Investigación de Operaciones. El primer día de clases entrega la información general del curso y aplica una prueba de prerrequisitos generales del mismo; dicha prueba se incluye en el portafolio y se compara con la calificación final del curso para mostrar así los progresos en el aprendizaje de los estudiantes. Los documentos que integran el portafolio se vuelven evidencia de la dirección que se toma hacia las metas planteadas inicialmente. El último documento en ser incluido en el portafolio es una reflexión del profesor acerca de qué tan adecuadas fueron las metas, qué progresos logró el estudiante y una serie de recomendaciones para el curso.

Dentro de los beneficios que esta metodología reviste para el profesor están el de poder registrar completamente el desarrollo del curso, lo que es útil para clarificar dónde se puede mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por otra parte, el portafolio muestra no sólo lo que el profesor dice del curso, sino también lo que los estudiantes piensan de éste, tanto de las evaluaciones informales de clase, las evaluaciones formales, las tareas y los proyectos.

Esta práctica evaluativa fue adoptada por el Departamento de Ciencias Matemáticas en la Universidad de Illinois en 1992 para evaluar los programas ofrecidos por la institución.

Similitudes

- Ambas prácticas evaluativas buscan evidencias acerca del aprendizaje de los estudiantes.

Diferencias

- La metodología de evaluación propuesta por rumec busca evidencia del aprendizaje de los estudiantes, la metodología de evaluación a través de

[4] Steven R. Dunbar, "The Course Portfolio in Mathematics Capturing the Scholarship in Teaching", en *Assessment Practices in Undergraduate Mathematics.*

portafolio busca además exhibir las prácticas de enseñanza de los profesores que permitan un replanteamiento del curso.

- La técnica de portafolios no considera al trabajo colaborativo como un elemento importante del aprendizaje, para rumec es un ingrediente esencial en el planteamiento de su metodología.
- rumec escucha la voz del estudiante para conocer su situación cognitiva, no para opinar respecto al diseño del curso.

1.5.5 *Reactivos desarrollados (Universidad de Wisconsin)*

Un grupo de profesores que enseñan la materia de álgebra abstracta en la Universidad de Winsconsin[5] evalúan el conocimiento adquirido por sus alumnos pidiéndoles solucionar problemas y analizando las respuestas que presentan. Para estos profesores lo más importante es que los estudiantes muestren lo que piensan cuando trabajan en las evaluaciones para asegurarse de que aprenden algo.

Después de que la facultad discute cómo determinado problema se relaciona con el material que debe estudiarse y sobre sus posibles aplicaciones, éste es presentado a los estudiantes, quienes deberán entregar la solución por escrito, incluyendo una sección expositora. Esta sección permite al profesor percibir el entendimiento del estudiante referente al problema.

Con tal objetivo, el enunciado del problema incluye algunas preguntas dirigidas a los estudiantes:

- ¿Entiende más o menos acerca del tema después de este problema?
- Explique cómo llegó a la solución.
- Discuta posibles soluciones alternativas.
- Discuta posibles aplicaciones del problema.
- Discuta la conexión entre este problema y su trabajo en clase.
- Describa qué esta pensando y sintiendo mientras trabaja con este problema.
- ¿Puede pensar en un mejor problema para este tema? Si es así, ¿cuál es?

El profesor considera que estas preguntas ayudarán al estudiante a reflexionar más allá de dar respuestas específicas y concretarse a aprender lo necesario para aprobar.

[5] John Koker, "If you want to know what students understand, ask them", en *Assessment Practices In Undergraduate Mathematics.*

Similitudes

- Ambos grupos se preocupan por que el estudiante exhiba su aprendizaje.
- Se busca la retroalimentación del profesor a partir de la exhibición del aprendizaje de los estudiantes.
- Para ambos grupos es importante el actuar del estudiante frente a las actividades de aprendizaje.
- Ambos grupos están interesados en saber cómo llegó el estudiante a la solución.
- Ambas metodologías fomentan en el estudiante la comunicación de su entender acerca de los conceptos estudiados.

Diferencias

- Para rumec el trabajo colaborativo es un ingrediente importante en el aprendizaje de los estudiantes, para el grupo de la Universidad de Wisconsin no es importante.
- Mientras que rumec infiere lo que el estudiante piensa con respecto a un concepto a partir de su actuar frente a actividades y entrevistas, la metodología de los profesores de Wisconsin estudiante que describa su pensamiento acerca del concepto.

2

DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

2.1 Aplicación de la metodología ACE

Durante los semestres agosto-diciembre de 2001 y enero-mayo de 2002 se instrumentó en cuatro grupos de cálculo (92 estudiantes) el ciclo de enseñanza ace planteado por rumec.

Para llevar a cabo la investigación se partió del siguiente plan de trabajo:

1. División del curso en periodos semanales.
2. Distribución de los alumnos en grupos de trabajo permanentes.
3. Diseño de actividades colaborativas a ser realizadas en computadora.
4. Organización de discusiones en el salón de clase.
5. Diseño de ejercicios y tareas tradicionales a ser resueltas de manera colaborativa.
6. Diseño de un primer examen para ser resuelto manera colaborativa.
7. Diseño del segundo examen para ser resuelto de manera individual.
8. Diseño del tercer examen para ser resuelto de manera individual.
9. Diseño del examen final para ser resuelto de manera individual.
10. Registro de la participación de los estudiantes durante las discusiones y resolución de problemas por equipos.

El ciclo de enseñanza ace, propuesto en la teoría apoe, sugiere organizar el curso en periodos semanales de tres sesiones cada uno: la primera dedicada al trabajo en equipo alrededor de una actividad computacional prediseñada, la segunda a una discusión en el salón de clase respecto a las actividades realizadas en el laboratorio de computación, y la tercera a la resolución de ejercicios tradicionales.

2.1.1 *Desarrollo de las actividades de laboratorio*

Los estudiantes instalaron el programa que contenía el lenguaje isetl en cada una de sus computadoras personales, el cual también se encontraba instalado en un laboratorio de computación al cual ellos tenían acceso durante toda la semana de 7:00 a 19:00 horas.

La primera inquietud que manifestaron los estudiantes respecto al lenguaje de programación fue preguntar por las ventajas que su uso podría reportarles en el estudio de las matemáticas.

Al inicio del curso, existía en el ambiente de clase una actitud de rechazo que duró entre 2 y 3 semanas. Para conseguir una actitud de aceptación hacia las actividades, fue necesario convencerlos de que la filosofía del curso planteaba la construcción de estructuras cognitivas previas al encuentro de los conceptos a estudiar. Posteriormente los alumnos integraron las actividades propuestas a su vida escolar.

Cuando se desarrollaba una de las primeras sesiones de laboratorio en torno al concepto de función, uno de los estudiantes exclamó: "¡Ahh! ¡Ya entendí lo que es una función!" Esto nos hizo a todos darnos cuenta de que la realización de tales actividades tenía un efecto importante en la mente de los estudiantes; no sabíamos con claridad cuál era, pero fue evidente que teníamos que poner nuestra mejor actitud hacia el trabajo que debíamos enfrentar.

Durante las primeras sesiones de laboratorio los estudiantes manifestaban muchas dudas respecto a la gramática del lenguaje computacional, por tal motivo se les asignó un horario de asesoría en el laboratorio durante el cual se revisaba su trabajo y se trataba de aclarar cualquier duda respecto a su problema. Se les sugería que durante el desarrollo de la asesoría se encontrarán presentes todos los integrantes del equipo, en la medida de lo posible, para generar una discusión que les permitiera no sólo resolver el problema, sino valorar la importancia de la interacción entre ellos.

Además de isetl, los estudiantes trabajaron también con el software Maple V, programa que les permitió cuestionar el trabajo algebraico y gráfico hecho previamente o durante la resolución de los problemas que entregarían resueltos el viernes de cada semana. Al igual que con isetl, el manejo de Maple V constituyó inicialmente un problema, pero poco a poco se fue incorporado a las actividades cotidianas.

Durante las sesiones de laboratorio, la labor del profesor consistió en plantear preguntas relacionadas con la actividad, tales como ¿qué han hecho?, ¿qué tratan de conseguir con eso?, ¿alguno de ustedes tiene idea de por qué están fallando en la consecución de su objetivo?, ¿la gramática usada es la correcta?, tratando con esto de ayudarlos a explorar los caminos que decidían emprender para conseguir el entendimiento y solución el problema, cuidando de no hacer evidente de momento los posibles errores o aciertos en sus decisiones.

En cada sesión, el profesor circulaba observando y registrando el avance en las actividades, así como la participación de cada uno de los estudiantes, con el objetivo de percibir el nivel de sus reflexiones acerca de los conceptos matemáticos a estudiar y observar sus procesos de construcción de las estructuras cognitivas necesarias para el aprendizaje de dichos conceptos.

Las primeras actividades de laboratorio fueron evaluadas como entregadas o no entregadas. Posteriormente, las condiciones se modificaron: para que la actividad contara en la evaluación debía ser entregada con respuesta.

2.1.2 *Desarrollo de las discusiones en clase*

Las discusiones se realizaban en la segunda sesión de cada semana. Se iniciaba con el planteamiento de un problema que involucraba una actividad computacional que los estudiantes tenían que resolver exactamente en 15 minutos; al inicio del curso tardaban en incorporarse a dicha actividad, lo cual reducía el tiempo dedicado a resolver el problema. Los siguientes 25 minutos se dedicaban a la discusión, y los restantes 10 a concluir y complementar los resultados obtenidos en la sesión de laboratorio y la discusión.

Trató de seguirse este esquema en la medida de lo posible, sin embargo, las sesiones podían desarrollarse de manera completamente diferente a lo planeado, debido principalmente a que las discusiones se extendían más de lo previsto. Para no afectar demasiado la calendarización se recurrió a un procedimiento *ad hoc:* cuando se consideraba que los estudiantes no conseguían avance, se intervenía haciendo cuestionamientos que los ayudaran a aclarar sus ideas.

En las sesiones de discusión el libro de texto del curso[1] desempeñó un papel preponderante. Los estudiantes lo consultaban cada vez con mayor frecuencia, junto con sus apuntes, para proponer la solución a un determinado problema.

Se trató de registrar en la lista de asistencia cada una de las participaciones de los estudiantes y llenar una bitácora con los acontecimientos más relevantes de cada sesión, actividad que se fue complicando cada vez más debido al tiempo insuficiente, ya que se concluía la clase en el límite y en muchas ocasiones se tuvo que omitir el llenado de ésta. Finalmente, se recurrió al uso de una bitácora semanal

[1] Ed Dubinsky, K. Schwingendorf, D. Mathews, *Calculus, Computers and Concepts.* El diseño de este libro fue específicamente concebido para apoyar la aplicación de la estrategia pedagógica ace.

que, aun cuando no describía con detalle lo que había pasado, servía para documentar lo esencial en el desarrollo de las sesiones.

El llenado de la bitácora permitió tener una idea global de la situación académica de cada estudiante, información que pudo usarse para hacerles sugerencias específicas durante la realización de sus actividades y para apoyar el proceso de asignación de calificaciones. Por ejemplo, el registro de las participaciones ayudó a que los estudiantes que se encontraban muy cerca de una calificación pudieran llegar a ella, siempre que ésta fuera aprobatoria.

2.1.3 *Desarrollo de los ejercicios*

Los viernes de cada semana se pedía a los estudiantes que resolvieran series de problemas del libro de texto para ser entregados por equipo los lunes antes de la sesión de laboratorio. El profesor se encargaba de revisar que los estudiantes justificaran cada respuesta y en caso de no hacerlo, la calificación del trabajo disminuía.

2.1.4 *Interacción con los estudiantes y desempeño en el curso*

Al inicio del curso hubo protestas de los alumnos por lo que consideraban era exceso de trabajo, ya que debían invertir gran cantidad de horas para cumplir con las actividades planteadas; se les sugirió que organizarán su tiempo para todas y cada una de ellas

De los 92 estudiantes, 10 dejaron de asistir al curso; se trató de hablar con ellos para conseguir su regreso, ofreciéndoles mayor apoyo, pero sólo se consiguió hacer volver a dos. La situación de abandono en un curso es inevitable, pero fue menor en nuestro caso comparada con la que se da en los cursos tradicionales, en lo que el promedio de abandono es de seis a ocho estudiantes por grupo, mientras que para este curso el promedio fue de dos por grupo. Este hecho, si embargo, no constituye por sí mismo una prueba de que el diseño metodológico de rumec reduce el abandono; sería necesario iniciar una investigación enfocada específicamente a ese tema para tener seguridad al respecto.

En lo que se refiere a las tareas semanales, los estudiantes sugirieron que contarán sólo como entregadas (es decir que no se calificaran). Se discutió y se les convenció de que lo más adecuado para la consecución de los objetivos era que cada tarea se calificara y que formara parte de su calificación general; el argumento que permitió el consenso fue el de que ellos tendrían oportunidad de conocer su situación cognitiva, lo que los ayudaría a tomar mejores decisiones acerca de su participación en el trabajo que planteaba el curso.

Como se pudo confirmar durante la investigación, la actitud de los estudiantes hacia el aprendizaje es un ingrediente fundamental en el curso. Por ejemplo, un alumno que llevaba dos semestres sin estudiar y se consideraba poco apto para el nivel del curso, decidió pedir ayuda en vez de desistir. Se le indicó que el trabajo en equipo era particularmente importante en su caso. A partir de su constante asistencia a las actividades se fue familiarizando paulatinamente con los contenidos y logró aprobar el curso.

La organización en equipos permanentes de alumnos tenía como objetivo que a través del trabajo colaborativo en actividades, tareas y ejercicios se fomentara la interacción entre iguales, situación que contribuiría a que menos alumnos se quedaran rezagados en su proceso de aprendizaje.

Los estudiantes no manifestaron mucha aceptación hacia el diseño del curso al conocer que el primer examen se realizaría de manera colaborativa y que cada integrante del equipo recibiría la misma calificación, pero su reacción fue de mayor rechazo cuando se les informó que aunque el segundo examen lo realizarían de manera individual recibirían dos calificaciones, la de su examen y el promedio de los exámenes de su equipo. Las opiniones en contra no se dejaron esperar: "¿si alguno de nuestros compañeros no estudia, por qué nos tiene que afectar el sólo hecho de pertenecer al mismo equipo?". Se habló del compromiso que adquirían al cursar la materia y de que aun cuando cada estudiante es responsable de su aprendizaje, también adquiere una responsabilidad al trabajar en equipo.

Las discusiones en el salón de clase se llevaban a cabo la segunda sesión de cada semana. Se iniciaba con el planteamiento de actividades a desarrollar de manera colaborativa, lo que podía durar de 5 a 15 minutos, al término de los cuales se procedía a dirigir la discusión en torno a éstas. En dicha discusión se evitaba dar respuestas o explicaciones a fin de estimular la discusión entre los integrantes de los equipos; finalmente, cuando se consideraba apropiado, es decir, cuando se creía que los estudiantes habían construido las estructuras mentales necesarias para aprender el concepto matemático, se procedía entonces a dar las explicaciones, respuestas y notaciones necesarias, así como respuestas, pruebas, ejemplos y contraejemplos para el concepto matemático estudiado.

Estas actividades fueron difíciles de llevar a cabo. Los estudiantes permanecían mucho tiempo hablando de temas ajenos a las mismas, pero cada vez tardaron menos. Con el objetivo de acelerar el inicio de la actividad, el profesor se sentaba con el equipo sin decir nada acerca de lo que hacían; ellos inmediatamente iniciaban la actividad. En el principio del curso muchos de los equipos no terminaban las actividades planteadas para la sesión. El hecho de recorrer el salón de clase durante las actividades permitió al instructor observar qué estudiantes permanecían al margen de la discusión y alentarlos a participar en lo sucesivo.

Al final de cada semana se entregaba una serie de ejercicios tradicionales que los estudiantes resolverían en equipo. Se observó que su estrategia inicial era repartir los ejercicios entre los integrantes, lo que indicaba que no veían la importancia de trabajar colaborativamente para aprender matemáticas. Si por alguna razón tenían dudas sobre su respuesta a algún problema, recurrían a la ayuda del profesor, pero éste les indicaba que lo que se esperaba es que antes de eso discutieran y buscaran la solución entre ellos, y que, en caso de no llegar a una, al menos debían indicar detalladamente sus razonamientos.

Durante esas reuniones se les cuestionaba con frecuencia acerca de lo que habían hecho y por qué lo hacían, de qué manera cada aportación contribuía a resolver el problema. De esta forma, la asesoría del profesor no se reducía a dar respuestas ocasionales, sino a promover la construcción del conocimiento en cada participante.

Los resultados globales de las evaluaciones de los estudiantes bajo la metodología ace se enlistan en el capítulo 4.

2.2 Diseño y aplicación de la entrevista

2.2.1 *Selección de estudiantes*

Posterior al trabajo en los grupos con la metodología ace, se procedió a la aplicación de una entrevista personalizada a algunos de los estudiantes, a fin de usarla como parámetro comparativo para determinar la eficacia de la metodología de evaluación propuesta por rumec.

Del total de los 90 estudiantes que habían cursado la materia de cálculo con el ciclo de enseñanza ace se seleccionó un grupo de 28: diez de ellos pertenecientes al semestre mayo-diciembre de 2001 y los otros 18 pertenecientes al semestre enero-mayo de 2002. La selección de los estudiantes del semestre 2001 fue aleatoria, pero para el caso de los del semestre 2002 se pidió la participación voluntaria; 28 candidatos se apuntaron, de los cuales 18 asistieron a la cita.

2.2.2 *Desarrollo de las entrevistas*

La autora de esta investigación diseñó el cuestionario y las preguntas guía, aplicó la entrevista y analizó las respuestas de los estudiantes para finalmente asignar las calificaciones.

La entrevista consistía de 7 reactivos seleccionados de forma aleatoria de un total de 10. Se estimó un tiempo de trabajo de dos a tres horas con cada estudiante y se concertaron de dos a tres entrevistas diarias.

Se elaboró además una serie de preguntas guía para la entrevista, con las que se buscaba tanto la inducción de respuestas como generar un registro con información que facilitara inferir la construcción de estructuras mentales y apoyar así el proceso de asignación de calificaciones.

El cuestionario del que se extrajeron los reactivos para la entrevista se muestran en el apartado 2.2.5, las preguntas guía prediseñadas se enlistan en 2.2.6 y la transcripción de las entrevistas aparece en el capítulo 3 organizada en torno a los reactivos.

Durante la aplicación de las entrevistas a los estudiantes se trató de crear un ambiente de confianza en el cual sintieran la libertad de expresarse de manera más libre y natural posible. Se sugirió a cada uno que tratara de estar lo más tranquilo posible para que el estrés no fuera un factor que sesgara la información generada por la entrevista.

Antes de iniciar la resolución de algún problema, se trataba de verificar que el entrevistado tenía cabalmente claro el planteamiento preguntándole directamente si entendía el problema. En caso de que el estudiante no lo entendiera, se le sugería que lo leyera nuevamente y una vez comprendido procediera a su resolución.

Durante el desarrollo de la entrevista, el profesor permaneció como observador mientras el estudiante resolvía las preguntas y en caso de detectar titubeo en la respuesta procedía a cuestionarlo acerca de lo que hacía y por qué lo hacia, siempre con el objetivo de provocar la reflexión en torno a su respuesta.

A fin de tener elementos que permitieran clarificar la situación cognitiva del estudiante y facilitar la asignación de una calificación a su respuesta, el profesor solicitaba al estudiante escribir todo lo que pensara que lo ayudaría a resolver el problema y que en caso de decidirse por otra solución, no borrara lo escrito anteriormente.

2.2.3 *Proceso de asignación de calificaciones a las entrevistas*

Para evaluar las respuestas a los problemas planteados en la entrevista se recurrió al uso de una rúbrica diseñada a partir de la teoría apoe (véase Anexo), la cual detalla una serie de criterios cognitivos que permiten ubicar cada respuesta del estudiante en un rango de valores dependiendo del nivel de dominio cognitivo que dicha respuesta revele. La rúbrica señala que:

- Si el estudiante se encuentra en el nivel cognitivo de la *acción,* será solamente capaz de identificar, conocer, traducir o asociar.
- Si el estudiante se encuentra en el nivel cognitivo de *proceso,* entonces es capaz de manipular, realizar, asociar, describir, interpretar, examinar, etcétera.
- Cuando el estudiante percibe al concepto matemático como un *objeto,* es capaz de analizar, explicar, comparar, etc.
- Cuando el estudiante se encuentra en el nivel cognitivo de *esquema,* es capaz de discriminar, concluir, juzgar, etc.

Si por otro lado la respuesta del estudiante no mostraba claridad para decidir una calificación, se hacía una revisión más exhaustiva o se pedía la ayuda de un profesor ajeno a la investigación para que opinara respecto a las habilidades mostradas en la respuesta.

La calificación del entrevistado se determinaba entonces asignando a cada una de sus respuestas un determinado porcentaje de la puntuación total a partir del cotejo con la rúbrica. En este proceso se tomó en cuenta además el desarrollo realizado por los estudiantes en el papel, las anotaciones del profesor sobre su actitud, y las respuestas a las preguntas guía durante la entrevista. De esta manera, se aseguraba que la asignación de la calificaciones a los estudiantes reflejara de manera fiel su situación cognitiva.

Los resultados de la evaluación de las entrevistas a los estudiantes se detallan en el capítulo 4.

2.2.4 *Metodología de comparación de resultados*

Una vez concluido el curso y realizadas las entrevistas, se llevó a cabo un análisis del registro de las respuestas de los estudiantes para deducir si los conocimientos matemáticos que poseían, y que fueron generados por la maduración, construcción y reorganización de sus estructuras mentales, eran acordes con los conceptos estudiados durante el curso. El análisis cuidadoso y detallado a las respuestas dadas por los estudiantes a cada pregunta de la entrevista generó otro registro evaluatorio para cada estudiante.

Por último se llevó a cabo una comparación de las calificaciones generadas por ambos métodos de evaluación: si no se encontraba una marcada diferencia entre ellas, podía concluirse que la metodología propuesta por RUMEC puede emplearse con la seguridad de que describe en buena medida el entendimiento real de los estudiantes, además de ser un sistema de más práctica aplicación que la entrevista.

2.2.5 *Cuestionario para la entrevista*[2]

1. Si la cantidad de una cierta sustancia decrece 4% en 10 horas, encuentra la vida media de la sustancia.

2. Elabora una tabla para cada una de las siguientes funciones, usando las siguientes tablas.

a) $y = f(x) + 3$
b) $y = f(x - 2)$
c) $y = 5g(x)$
d) $y = -f(x) + 2$
e) $y = 3g(x - 1) - 2$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	5	–2	1	4	9

x	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	0	4	2	5	3	8

3. Una función continua satisface la condición $\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$.

a) Explica con tus palabras cuál es el significado de esta expresión.
b) Traza la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla la condición anterior y además sea:
i) Creciente o
ii) Decreciente o
iii) Cóncava hacia arriba. (Puede haber varias respuestas.)

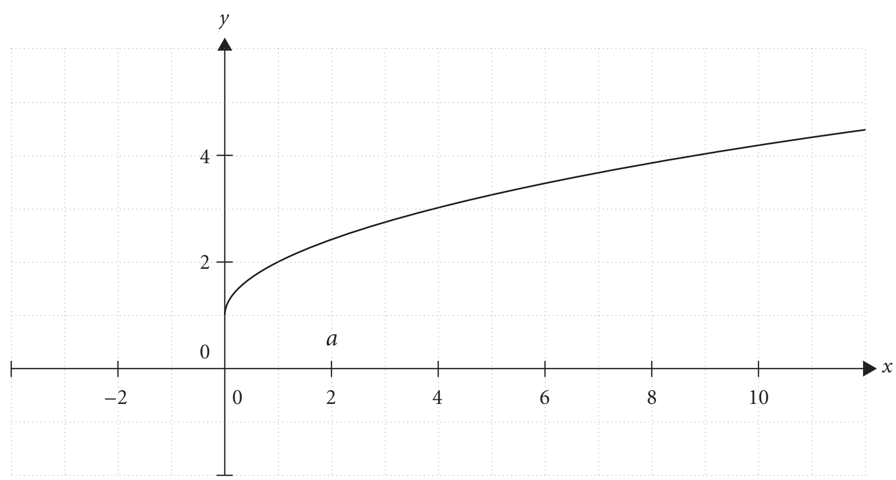
[2] Algunas preguntas fueron tomadas y adaptadas de ideas expresadas en el texto *Applied Calculus,* de Hallett D. Hughes *et al.*, John Wiley & Sons.

4. Traza la gráfica de una función definida para $x \geq 0$ que cumpla con las siguientes propiedades. (Puede haber varias respuestas.)

   a) $f(0) = 2$
   b) $f(x)$ es creciente para $0 \leq x < 1$
   c) $f(x)$ es decreciente para $1 \leq x < 3$
   d) $f(x)$ es creciente para $x \geq 3$
   e) $f(x) \to 5$ cuando $x \to \infty$

5. En la gráfica de $f(x)$ dada abajo marque las longitudes que representan las cantidades del inciso *a)* al *e)*. (Asumiendo que $h > 0$.)

   a) $a + h$
   b) h
   c) $f(a)$
   d) $f(a + h)$
   e) $f(a + h) - f(a)$



6. La cantidad Q en mg, de nicotina en el cuerpo t minutos después de que un cigarro fue fumado está dada por $Q = f(t)$.

   a) Interpreta los enunciados $f(20) = 0.36$ y $f'(20) = -0.002$ en términos de nicotina. ¿Cuáles son las unidades de los números 20, 0.36 y –0.002?
   b) Usa la información de la parte *a)* para estimar $f(21)$ y $f(30)$. Justifica tu respuesta.

7. Encuentra los valores aproximados para $f'(x) = -0.002$ en cada valor de x dado. ¿Dónde es la derivada positiva?, ¿dónde es negativa? y ¿dónde es cero?

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	18	13	10	9	9	11	15	21	30

8. Supongamos que $C(q)$ representa el costo total en dólares por producir una cantidad de unidades de un producto. Los costos fijos de producción son de \$20,000.00. El costo marginal de la función esta dado por $C'(q) = 0.005q^2 - q + 56$.

   a) En la gráfica de $C'(q)$ ilustra gráficamente el costo variable de producir 150 unidades.
   b) Estima $C(150)$, el costo total de producir 150 unidades.
   c) Encuentra el valor de $C'(150)$ e interpreta tu respuesta en términos de costos de producción.
   d) Usa tu respuesta de la parte *b)* y *c)* para estimar $C(151)$.

9. Encuentra la derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{x}{1 + \ln x}$
   b) $f(x) = 2 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3^x - e$
   c) $g(x) = e^{3t}\,\text{sen}(2t)$
   d) $h(x) = \left(\dfrac{x^2 + 2x}{3}\right)^3$

10. Una firma produce una cantidad de algún bien y el costo promedio por artículo esta dado por $a(q) = 0.01q^2 - 0.6q + 13$ para $q > 0$.

   a) ¿Cuál es el costo total, $C(q)$, de producir q bienes?
   b) ¿Cuál es el mínimo costo marginal?, ¿cuál es la interpretación práctica de este resultado?
   c) ¿A qué nivel de producción es el costo promedio mínimo?, ¿cuál es el costo promedio más bajo?
   d) Calcula el costo marginal en $q = 3$. ¿Cómo se relaciona con la parte *c)?* Explica esta relación analíticamente y en palabras.

2.2.6 *Preguntas guía para conducir la entrevista*

Reactivo 1

- ¿Qué significa que una sustancia decrezca el 4% en 10 horas?
- ¿Qué cantidad queda después de 10 horas?
- ¿Qué significa encontrar la vida media de una sustancia?

Reactivo 2

- ¿Qué se modifica en la función original para generar la nueva función, el dominio o el rango?
- ¿Qué hace la transformación al dominio o al rango en cada caso?
- ¿Cómo queda la tabla de la nueva función?

Reactivo 3

- ¿Qué dice $\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$ acerca de la función?
- ¿Puedes decirme más acerca del comportamiento de la función?
- ¿Alguna de las gráficas vistas durante el curso cumple con esta condición?

Reactivo 4

- ¿Qué significa $f(0) = 2$?
- ¿Qué significa $f(x) \to 5$ cuando $x \to \infty$?
- ¿Alguna de las gráficas vistas durante el curso cumple las condiciones pedidas en el problema?
- ¿Qué puedes decirme acerca del comportamiento de la función?

Reactivo 5

- ¿Dónde localizas $f(a)$; puedes señalar sobre la gráfica?
- ¿Cómo identificas $f(a + h) - f(a)$?, muéstralo en la gráfica.

Reactivo 6

- ¿Qué te dice la derivada de una función acerca de la función?
- ¿Qué significa que la derivada de una función sea positiva?
- ¿Qué significa que la derivada de una función sea negativa?
- ¿Qué significa que la derivada de una función sea cero?
- ¿Cómo puedes aproximar el valor de $f(21)$ y $f(30)$?
- ¿Te sirve la información obtenida anteriormente?

Reactivo 7

- Dada una tabla, ¿cuál es el mejor método para aproximar la derivada de la función?

- ¿Es el único método qué conoces para aproximar la derivada?
- ¿Cómo haces para aproximar la derivada en los extremos?

Reactivo 8

- ¿Cuál es el significado de la función de costo marginal?
- ¿Cómo usarías la gráfica del costo marginal para conocer el costo variable de producir 150 unidades?
- ¿Te sirve la información anterior para conocer el costo total de producir 150 unidades?

Reactivo 9

- ¿De qué manera puedes abordar las derivadas de las funciones?
- ¿Qué regla o fórmula usarías para cada caso?

Reactivo 10

- ¿Cómo se define el costo promedio?
- ¿Cuál es la interpretación práctica del costo marginal?

3

TRANSCRIPCIÓN DE ENTREVISTAS

Es de nuestro interés describir de la manera más fidedigna posible la situación cognitiva de los estudiantes al final del curso, esto se trató de conseguir a través de entrevistas personalizadas.

A continuación se describen algunas de ellas:

Problema 1. Si la cantidad de una cierta sustancia decrece 4% en 10 horas, encuentra la vida media de la sustancia.

Estudiante 1

Profesor: ¿Qué significa que una sustancia decrezca 4% en 10 horas?
Estudiante 1: Significa que después de 10 horas sólo queda el 96%.
Profesor: ¿Cómo escribes eso?

El estudiante escribe expresiones erróneas como las siguientes:

$$\frac{1}{2}P_0 = P_0(0.96)^{10k}$$

$$P(10) = P_0(1 - 00.4)$$

Finalmente escribe:

$$0.04P_0 = P_0e^{10k}$$

Cuando se le vuelve a cuestionar acerca del significado de la expresión, dice que ésta significa que una sustancia decrece 4% en 10 horas.

Profesor: ¿Cuánto queda de la sustancia después de 10 horas?
Estudiante 1: Queda 96% de la sustancia.

Profesor: ¿Cómo se refleja lo que dices en la expresión escrita?
Estudiante 1 (Señalando la expresión $0.04P_0 = P_0e^{10k}$): Pues la expresión dice que una sustancia decreció 4% en 10 horas.
Profesor: En tu expresión hay una incógnita k, ¿qué sentido tiene el encontrar su valor y cómo lo encontrarías?
Estudiante 1: La k nos dice cuánto decrece.
Profesor: ¿Cómo encuentras k?
Estudiante: Debo usar logaritmos, porque la incógnita está en el exponente.

Escribe: $$P_0e^{k(1)} = P_0e^{0.4(10)}$$

$$\ln k(1) = \ln 0.4(10)$$

Los cuestionamientos parecían confundir a la estudiante; no mostraba claridad acerca de lo que escribía y por qué o para qué lo escribía.

A pesar de que escribe correctamente la expresión algebraica de la función exponencial, no conoce el papel que juegan las variables que en ella intervienen; es decir, conocer la expresión no le ayuda. Finalmente escribe su respuesta y se observa que para llegar a ella comete errores algebraicos, su solución es incongruente.

Profesor: ¿Cuál es la vida media de la sustancia?
Estudiante 1: Es de aproximadamente 30 horas.
Profesor: ¿Crees que es coherente la respuesta con el planteamiento del problema?
Estudiante 1: Sí.
Profesor: ¿Qué puedes decirme acerca de la respuesta que diste?
Estudiante 1: Que la vida media es de 30 horas.

La estudiante manifiesta conocimiento acerca de la función exponencial, además sabe que el fenómeno está asociado con una función exponencial decreciente; pero su dominio es mínimo, no conoce el significado de las variables que intervienen en la función, su razonamiento intuitivo acerca de la vida media de una sustancia no existe. Sabe que debe usar logaritmos para encontrar el valor de k pero realiza manipulaciones algebraicas erróneas.

Así, la evaluación asignada de acuerdo a la rúbrica es de 2 puntos. Debido a que manifestó un conocimiento muy pobre del manejo de los conceptos necesarios para resolver este problema, además de poca reflexión respecto a sus respuestas.

Estudiante 2

La estudiante escribe: $\frac{1}{2}P_0 = P_0e^{0.06(10)}$.

Profesor: ¿Entiendes lo que te pide el problema?

La estudiante lee cuidadosamente el enunciado.

Profesor: ¿Qué significa que una sustancia decrezca el 4% en 10 horas?
Estudiante 2: ¡Ahh!
Profesor: De acuerdo con la expresión que escribiste, ¿cómo se refleja en el contexto del problema?
Estudiante 2: Me parece que estoy poniendo de la vida media.
Profesor: ¿Por qué crees eso?
Estudiante 2: Usé $\frac{1}{2}P_0$.

Tacha y vuelve a escribir: $0.96P_0 = 0.1P_0e^{0.04(10)}$.

Profesor: ¿Puedes decirme qué significa lo que acabas de escribir?
Estudiante 2: Significa que la sustancia decreció el 4% en 10 horas, pero lo que escribí dice… Tengo equivocada la función, debe quedar así.

Tacha y finalmente escribe:

$$0.96P_0 = P_0e^{k(10)}.$$

Esto hace suponer que cuando los estudiantes contestan mal o no contestan un problema, no es sólo porque no puedan resolverlo, sino porque no entienden lo que se les pregunta o no pueden transformar el problema al lenguaje algebraico de manera adecuada.

Profesor: ¿Qué significa lo que acabas de escribir?
Estudiante 2: Que una sustancia decreció 4% en 10 horas.

Se registraba lo que la estudiante contestaba a los cuestionamientos planteados de la manera más fidedigna posible, se evitaba dar opiniones y no manifestar aprobación o desaprobación en el tono de voz usado.

La estudiante procede a resolver la ecuación para encontrar *k*. Posteriormente se queda pensativa observando el resultado obtenido.

Profesor: ¿Para qué te sirve el valor de *k*?, ¿lo vas a usar?
Estudiante 2: Ya sé cómo decrece la sustancia, por *k,* ahora con *k* calculo la vida media.
Profesor: ¿Qué significa encontrar la vida media?
Estudiante 2: Encontrar cuándo la sustancia se reduce a la mitad.

La estudiante aplica correctamente las propiedades de logaritmos para resolver el problema y finalmente encuentra la vida media de una sustancia.

Se observaron titubeos en la estudiante, quien no manifiesta un dominio total en el manejo del concepto de función exponencial, pero logró corregir sus errores a partir del cuestionamiento y la reflexión, relacionó adecuadamente el concepto de decrecimiento, usó adecuadamente el concepto y propiedades de los logaritmos y finalmente encontró la vida media.

De acuerdo a la rúbrica la calificación otorgada a la solución de este problema fue de 8 puntos.

Estudiante 3

Profesor: ¿Entiendes qué se te pide en el problema?
Estudiante 3: Sí creo que sí. Debo encontrar la vida media de una sustancia que decrece 4% en 10 horas.

El estudiante procede a escribir $0.4P_0 = P_0e^{10k}$.

Profesor: ¿Puedes decirme qué significa tu expresión?

El estudiante se queda algunos segundos observando la expresión.

Estudiante 3: ¿Es incorrecto lo que escribí?
Profesor: No sé, sólo quiero que me digas qué significa.
Estudiante 3: Significa que después de 10 horas queda el 4% de la sustancia.
Profesor: Lee nuevamente tu problema.
Estudiante 3: No, debe quedar así.

El estudiante corrige su expresión y escribe $0.96P_0 = P_0e^{10k}$.

Profesor: ¿Qué significa lo que acabas de escribir?
Estudiante 3: Significa que después de 10 horas queda el 96% de la sustancia.

El estudiante procede a encontrar el valor de *k,* para lo cual usa las propiedades de logaritmos correctamente:

$$\frac{\ln 0.96}{10} = k$$

Profesor: ¿Cuál es el significado que tiene la *k,* es decir, para qué te sirve?
Estudiante 3: Pues, para saber cómo decrece la sustancia.

El estudiante encontró el valor de *k,* pero al tratar de encontrar la vida media tiene exactamente el mismo problema que tuvo al inicio.

Se le cuestiona para tratar de inferir el dominio de los conceptos.

Profesor: ¿Qué significa lo que escribiste?
Estudiante 3: Que la vida media de una sustancia ocurre.
Profesor: Lo que acabas de resolver, ¿cómo te puede ayudar para escribir la expresión algebraica que necesitas?
Estudiante 3: Es poner diferentes valores.
Profesor: ¿Qué necesitas encontrar?
Estudiante 3: La vida media de la sustancia.
Profesor : ¿Cómo te ayuda a encontrar la vida media lo que acabas de escribir?
Estudiante 3: Me equivoqué.

El estudiante procede a corregir su respuesta, finalmente consigue el resultado final correcto.

Profesor: ¿Tu respuesta es congruente al problema?
Estudiante 3: ¿A qué te refieres?
Profesor: ¿De acuerdo al problema planteado crees que tu respuesta puede ser correcta?
Estudiante 3: Yo creo que sí, pero no sé.

Se observa que existen titubeos y poca reflexión a lo largo de su desarrollo y al dar respuesta al problema.

Para conseguir el planteamiento correcto del problema necesita de cuestionamientos externos.

Por lo anterior, el estudiante recibe una calificación de acuerdo a la rúbrica de 7 puntos.

Problema 2. Elabora una tabla para cada una de las siguientes funciones, usando las siguientes tablas.

a) $y = f(x) + 3$
b) $y = f(x - 2)$
c) $y = 5g(x)$
d) $y = -f(x) + 2$
e) $y = 3g(x - 1) - 2$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	5	–2	1	4	9

x	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	0	4	2	5	3	8

Estudiante 4

Profesor: Lee el problema, ¿entiendes lo que pide?
Estudiante 4: Sí.

El estudiante procede a escribir cada una de las tablas para las transformaciones que se piden.

x	0	1	2	3	4	5
y	13	9	6	7	10	14

x	2	3	4	5	6	7
y	10	6	3	4	7	11

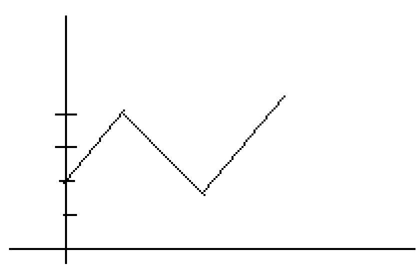
x	0	1	2	3	4	5
y	10	15	25	40	60	75

x	0	1	2	3	4	5
y	–12	–8	–5	–6	–9	–11

x	1	2	3	4	5	6
y	4	7	13	22	34	43

Profesor: Podrías indicarme con tus palabras ¿cómo se está transformando la función original para generar la nueva función?.
Estudiante 4: En la primera las y.
Profesor: ¿Cómo se afecta la función original para generar la nueva función?
Estudiante 4: Sube tres unidades y las x no se alteran.
Profesor: ¿Y en la segunda?
Estudiante 4: En la segunda las x se trasladan a la derecha dos unidades y lo que no cambia son las y.
Profesor: ¿Y en la tercera?
Estudiante 4: En la tercera las y se multiplican por cinco, las x no cambian.
Profesor: ¿Y en la cuarta?
Estudiante 4: En la cuarta a las y se les cambia el signo y se les suma 2.
Profesor: ¿Qué significa lo que acabas de decir si lo trasladas al plano gráfico?
Estudiante 4: Que la función se voltea, todas las y positivas se hacen negativas y las negativas se hacen positivas, y después se les suma dos unidades.
Profesor: ¿Y en la última?
Estudiante 4: En la última cambian las y y las x.
Profesor: Para la transformación $y = -f(x) + 2$. ¿Es lo mismo hacer primero $y = -f(x)$ y luego sumar 2, que sumar 2 a $f(x)$ y luego hacer $-f(x)$?

El estudiante se queda pensando y traza la gráfica de una función cualquiera en sus hojas, no traza las funciones transformadas.



Estudiante 4: No, no es lo mismo.
Profesor: ¿Lo que contestaste con respecto a ellas es correcto?
Estudiante 4: Creo que… no, no es correcto.
Profesor: ¿Por qué?
Estudiante 4: Porque son diferentes las transformaciones.

Procede a corregir la tabla correspondiente al ejercicio *d),*

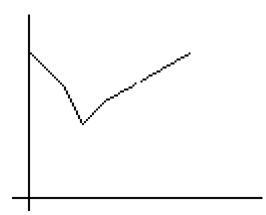
x	0	1	2	3	4	5
y	–8	–4	–1	–2	–5	–9

Este estudiante maneja con habilidad el concepto de función, dominio, rango y transformación de funciones.

El estudiante observaba las expresiones de cada una de las transformaciones y sabía que se modificaba el dominio o el rango de la función original para generar la nueva función. Manifestaba un claro entendimiento del concepto de función y el concepto de transformación de una función. Por tal razón recibe la máxima calificación para la solución a este problema, que es de 5 puntos.

Estudiante 5

Profesor: ¿Entiendes lo que te pide el problema?
Estudiante 5: Sí, necesito trazar los puntos y unirlos por medio de una curva suave para identificar cómo se transforma la función.



Finalmente se concentra en la tabla para escribir las tablas correspondientes a las transformaciones.

Profesor: ¿Para qué trazaste la gráfica si no vi que la usaras?
Estudiante 5: Para comprobar que estaba haciendo bien las cosas.

El estudiante manifiesta un dominio completo de los conceptos necesarios para resolver el problema, no necesita ayuda externa, él mismo construye sus apoyos cognitivos a través del trazo de los puntos dados en la tabla.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x) + 3$	13	9	6	7	10	14

x	2	3	4	5	6	7
$f(x-2)$	10	6	3	4	7	11

x	0	1	2	3	4	5
$5g(x)$	10	14	25	40	60	75

x	0	1	2	3	4	5
$-f(x)+2$	–8	–4	–1	–2	–5	–9

x	1	2	3	4	5	6
$3g(x-1)-2$	4	7	13	22	34	43

Este estudiante recibió la máxima calificación 5 puntos para la solución de este problema.

Estudiante 3

Profesor: ¿Entiendes lo que pide el problema?
Estudiante 3: Me pide que elabore una tabla para las siguientes funciones.

El estudiante elabora correctamente la tabla para las funciones $f(x) + 3$, $f(x-2)$ y $5g(x)$; se queda pensativo por un momento.

Profesor: ¿Entiendes lo que debes hacer?
Estudiante 3: Sí.

A pesar de que dice comprender la situación a resolver, permanece en silencio y pensativo.

Profesor: Para crear esa nueva función, ¿qué debes modificar, el dominio, el rango o ambos?
Estudiante 3: ¿Sólo el rango de la función original?
Profesor: ¿Estás dudando?
Estudiante 3: No se qué transformación debo hacer primero.
Profesor: ¿Crees que afecte el orden?
Estudiante 3: No sé.

Profesor: ¿Por qué no lo verificas?

El estudiante procede a crear dos tablas, una donde las nuevas funciones son

$$-(f(x)+2) \qquad \text{y} \qquad -f(x)+2.$$

Aunque para la primera transformación el estudiante no maneja explícitamente el paréntesis.

Profesor: ¿Qué diferencia hay entre una y otra?
Estudiante 3: El orden.
Profesor: ¿Cuál es la transformación que te pide el problema?
Estudiante 3: Ésta.

El estudiante señala que la tabla que corresponde a la transformación que se pide es $-f(x)+2$.

El estudiante se queda observando el último inciso.

Profesor: Para elaborar la tabla correspondiente a esta transformación, ¿qué se altera, el dominio, el rango o ambos?
Estudiante 3: Ambos
Profesor: ¿Cuál realizarás primero?
Estudiante 3: No sé.

El estudiante empieza a elaborar tablas que corrige y finalmente deja una.

Profesor: ¿Ésta es tu respuesta para el último inciso?
Estudiante 3: Sí

La respuesta dada es errónea, él ha escrito la tabla para la transformación $3(g(x-1)-2)$.

x	1	2	3	4	5	6
$3g(x-1)-2$	0	3	9	18	30	39

Profesor: ¿Quieres revisar tu respuesta?
Estudiante 3: ¿Es incorrecto?
Profesor: No sé, observé que dudabas.

Estudiante 3: No, ésta es la respuesta.

El estudiante aún no maneja correctamente las transformaciones de funciones para generar nuevas funciones, no es capaz de identificar la jerarquía de éstas. Por lo tanto, recibe 3 puntos por las respuestas dadas como solución al problema.

Problema 3. Una función continua satisface la condición $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$.

a) Explica con tus palabras cuál es el significado de esta expresión.

b) Traza la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla la condición anterior y además sea:

i) Creciente o

ii) Decreciente o

iii) Cóncava hacia arriba. (Puede haber varias respuestas.)

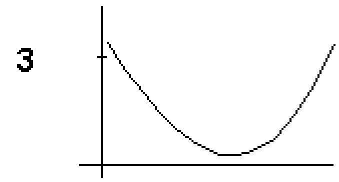
Estudiante 6

Profesor: ¿Qué dice el límite de la función acerca de su comportamiento?
Estudiante 6: El límite te dice de dónde hasta dónde llega la función, es decir, de dónde hasta dónde va.
Profesor: ¿A qué te refieres con eso?
Estudiante 6: A que te indica como se va comportando en este caso conforme la crece.
Profesor: ¿Podrías trazar alguna gráfica que cumpla las condiciones?
Estudiante 6: No se puede trazar una gráfica así.
Profesor: ¿Por qué dices eso?, ¿crees que es imposible trazar una gráfica que cumpla esas condiciones?
Estudiante 6: ¿Cómo podría trazar una gráfica decreciente que cuando $x\to\infty$, $f(x) = 3$?
Profesor: ¿Crees que eso no puede ocurrir?
Estudiante 6: Déjame pensar.

Hace una pausa.

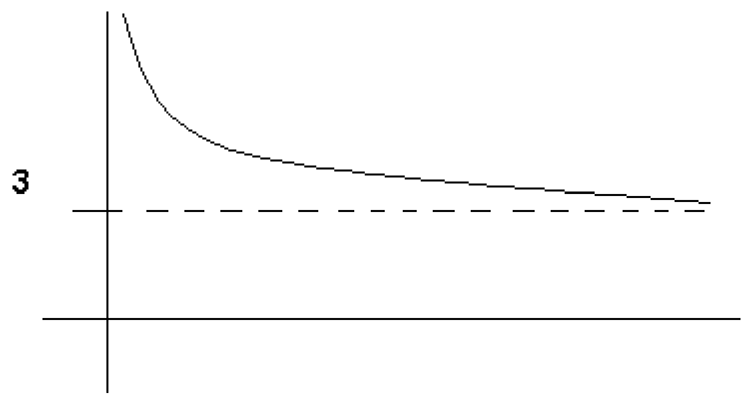
Estudiante 6: ¡Ah! Sólo que sea así.

El estudiante traza la gráfica de una función que cruza en $f(x) = 3$ para algún *x*.



Profesor: ¿Cumple con las condiciones?
Estudiante 6: Sí,… no

Posterior a la discusión y las correspondientes respuestas a las preguntas, traza una posible gráfica como solución al problema.



Profesor: ¿Cumple las condiciones?
Estudiante 6: En la pasada me equivoqué, pero ésta está bien.
Profesor: ¿Habrá otra gráfica que también cumpla la condición?
Estudiante 6: Déjame pensar. Creo que sí…, hay varias.

El estudiante debe ser interrogado a fin de conseguir determinar si entiende el concepto de límite, ya que su primera respuesta indica que no.

Sin embargo, es capaz de construir la función que cumple con las condiciones. No manifiesta un completo dominio del concepto de límite de una función.

La calificación asignada al estudiante de acuerdo a la rúbrica fue 9 puntos.

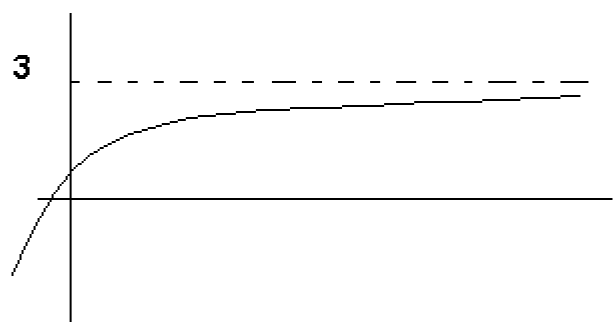
Estudiante 7

Escribe de manera correcta el significado de la expresión $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, pero al trazar la gráfica lo hace incorrectamente.

El estudiante escribe $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, nos dice que conforme x crece más y más, las y se van acercando cada vez más a 3.

Profesor: ¿Puedes decirme más acerca del comportamiento de la gráfica de la función?
Estudiante 7: Mi gráfica no cumple la condición.
Profesor: ¿Por qué crees que tu gráfica es incorrecta?
Estudiante 7: Porque cuando $x \to \infty$, la función se va acercando a 0 y no a 3.

El estudiante tacha su gráfica y procede a trazar una gráfica nueva que cumpla la condición inicial. Lo hace bien.



Profesor: ¿Qué provocó tu reflexión?
Estudiante 7: Si la dejaba como al principio no cumplía porque tendría un valor exacto en x para $y = 3$.
Profesor: ¿Cómo te diste cuenta?
Estudiante 7: Fue como un rayo en mi cabeza, y de repente pensé no puede ser así la respuesta correcta.

Estudiante 5

Profesor: ¿Qué significa la expresión $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$?
Estudiante 5: Significa que cuando $f(x)$ crece más y más, la se aproxima a 3.

El estudiante permanece en silencio durante algún tiempo.

Profesor: ¿Qué piensas?
Estudiante 5: Estoy tratando de imaginarme una función con las condiciones y además que sea creciente o decreciente.
Profesor: ¿Crees que exista?
Estudiante 5: ¿Existe?
Profesor: No sé, ¿piensas que es posible que exista?

Traza algunas gráficas que borra posteriormente, entre ellas una función creciente que cumple con la condición.

Profesor: ¿Ya analizaste todas las gráficas que borraste?
Estudiante 5: Sí, ninguna cumple.
Profesor: ¿Crees que alguna función vista durante el curso cumple con esa condición?
Estudiante 5: ¿Podría ser una exponencial así como $f(x) = -e^{kt} + 3$?
Profesor: ¿Por qué no tratas de trazar la gráfica de esa función y observas si cumple?

El estudiante se queda pensativo, parece que no es fácil pasar del plano algebraico al gráfico y viceversa.

Estudiante 5: ¿Puedo resolverlo después, ya que piense un poco más?
Profesor: Sí.

El estudiante no regresa a resolver el problema completamente, sin embargo se puede observar que plantea una función que cumple con la condición, pero no es capaz de trazar la gráfica. Parece que su respuesta fue dada por un chispazo y después no sabe cómo ocurrió.

De acuerdo con la rúbrica el estudiante recibe 6 puntos.

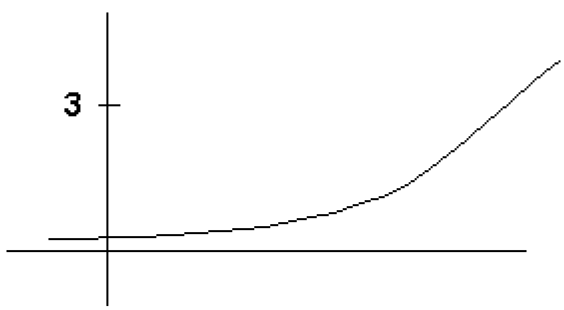
Estudiante 9

Profesor: ¿Entiendes lo que se pide que resuelvas en el problema?
Estudiante 9: Me pide que trace la gráfica de una función que cumpla la condición $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$ y además que sea creciente, decreciente o cóncava hacia arriba,

El estudiante permanece pensativo durante algunos segundos.

Profesor: ¿En qué piensas?
Estudiante 9: Trato de imaginarme una función que cumpla con esto.
Profesor: ¿Qué significa la condición $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$?
Estudiante 9: Significa que conforme la x va creciendo la $f(x)$ se va aproximando cada vez más a 3.
Profesor: Ahora sólo debes pensar en una función que la cumpla y además que sea creciente, decreciente o cóncava hacia arriba.

El estudiante traza una gráfica que no cumple la condición $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$ aunque sí es creciente.



Profesor: ¿Tu gráfica cumple ambas condiciones?
Estudiante 9: Voy a revisarla con cuidado... No, no cumple.

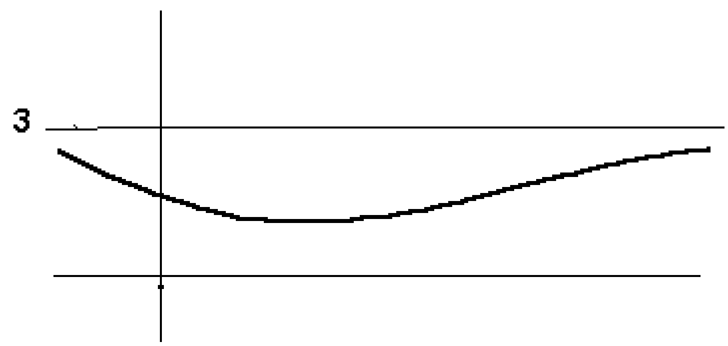
Se observa que borra, traza y vuelve a borrar, se queda pensativo y pregunta:

Estudiante 9: ¿Esta gráfica cumple?
Profesor: No sé, eso lo debes responder tú.

Al inicio el estudiante parece dominar el concepto de límite, pero cuando debe reflejar éste en el trazo de la gráfica de una función, traza una gráfica y no tiene la seguridad de haberlo hecho correctamente.

Estudiante 9: Creo que ésta debe ser la respuesta.
Profesor: ¿Por qué crees que esa gráfica podría ser la respuesta?
Estudiante 9: ¿Lo hice mal?
Profesor: Puedes saber si lo hiciste bien o mal revisando que cumple las condiciones.
Estudiante 9: Ya está bien, sí cumple.

El estudiante traza una gráfica en la que, efectivamente, cuando $x \to \infty$, $f(x) = 3$ pero que no es sólo creciente o decreciente.



El estudiante recibe una calificación de 5 puntos para la solución dada al problema.

Problema 4. Traza la gráfica de una función definida para $x \geq 0$ que cumpla con las siguientes propiedades. (Puede haber varias respuestas.)

a) $f(0) = 2$
b) $f(x)$ es creciente para $0 \leq x < 1$
c) $f(x)$ es decreciente para $1 \leq x < 3$
d) $f(x)$ es creciente para $x \geq 3$
e) $f(x) \to 5$ cuando $x \to \infty$

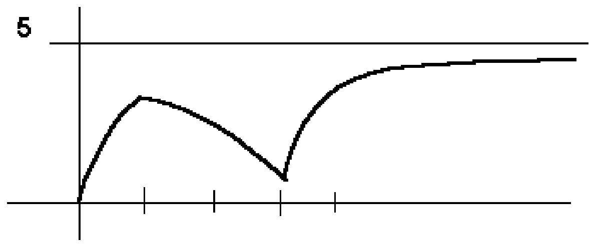
Estudiante 8

Traza varias gráficas que no cumple con algunas condiciones.

Profesor: Tu gráfica debe cumplir todas las condiciones simultáneamente.

Estudiante 8: ¡Ah! ¡Pensaba que tenía que trazar una gráfica para cada una de las condiciones!

El estudiante procede a dibujar una gráfica que va modificando hasta conseguir la que considera correcta.

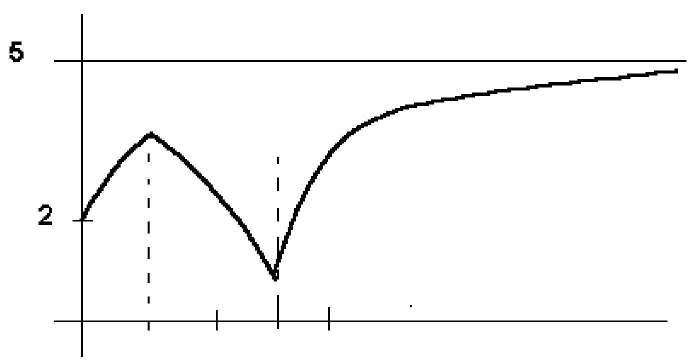


Profesor: ¿Qué significa que $f(0) = 2$?
Estudiante 8: Significa que para $x = 0$, la $y = 2$.
Profesor: ¿Tu gráfica cumple?
Estudiante 8: Pues no.

Permanece pensativo por algunos momentos y hace nuevos intentos de trazos.

Estudiante 8: Pero mi gráfica no cumple.

Después de hacer algunos intentos consigue el trazo de la gráfica adecuada.



La estudiante procede a corregir parte de la gráfica, la nueva gráfica cumple todas las condiciones.

Maneja el concepto de función, el de límite de una función y el de función creciente y decreciente. Por lo tanto se le asigna la máxima calificación según la rúbrica: 10 puntos.

Otro estudiante permanece algunos segundos meditando y empieza a trazar el esbozo de alguna gráfica sobre el cual borra y hace correcciones, hasta que considera que esta última gráfica cumple todas las condiciones.

Profesor: ¿Ya verificaste que se cumplen todas las condiciones?
Estudiante 8: Voy a tratar de revisar, no, no se cumple la segunda condición… en $[0,1)$, la gráfica de mi función no es creciente.

El estudiante procede a corregir esa parte y finalmente traza la gráfica correcta. Resolver este problema fue fácil después de que habían resuelto correctamente el problema anterior, sin embargo, muchas veces se limitan a trazar gráficas que sólo tengan rango positivo. Ningún estudiante entrevistado tuvo la idea de trazar la gráfica de la función en $[1,3)$ con imágenes negativas.

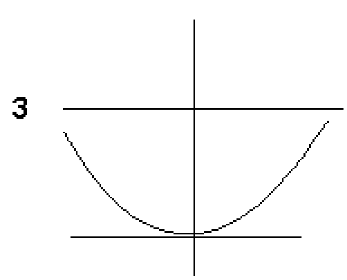
Estudiante 9

Profesor: ¿Entiendes lo que se te pide que hagas en el problema?
Estudiante 9: Sí, voy a trazar la gráfica.

La estudiante traza una gráfica que no cumple las condiciones.

Profesor: ¿Tu gráfica cumple con las condiciones que se pide?
Estudiante 9: Sí.
Profesor: ¿puedes decirme qué significa que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$?
Estudiante 9: Significa que cuando x crece mucho, la $f(x)$ se aproxima a 3.
Profesor: ¿La gráfica que trazaste cumple lo que se pide?
Estudiante 9: Sí, ¿tu dices que no?
Profesor: No sé, sólo te pido que revises si eso ocurre.

El estudiante traza una nueva gráfica, una función cuadrática con vértice en el origen y cuyo rango es de $[0,3]$.



Profesor: ¿Esta gráfica también cumple con las condiciones?

Puede observarse que el estudiante maneja el discurso correctamente, pero no puede avanzar más allá, es decir, no puede determinar que la gráfica trazada no cumple la condición inicial.

Parece ser que el discurso que maneja se encuentra desligado de la interpretación y entendimiento, de manera que la repetición por parte de la estudiante no garantiza nada.

La estudiante recibió una calificación de 3 puntos de acuerdo a la rúbrica.

Estudiante 3

Profesor: ¿Entiendes lo que te pide el problema que hagas?
Estudiante 3: Sí.
Profesor: ¿Puedes explicarme qué significa la expresión $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$?
Estudiante 3: Que cuando x crece mucho la $f(x)$ se acerca a 3.
Profesor: ¿Podrías trazar la gráfica de alguna función que cumpla con esta condición?

El estudiante se queda pensando durante algunos segundos, posteriormente traza la gráfica de una función que no cumple la condición.

Profesor: ¿Cumple la condición que se pide?
Estudiante 3: Sí, déjame pensar, no tengo muy claro si cumple o no cumple.

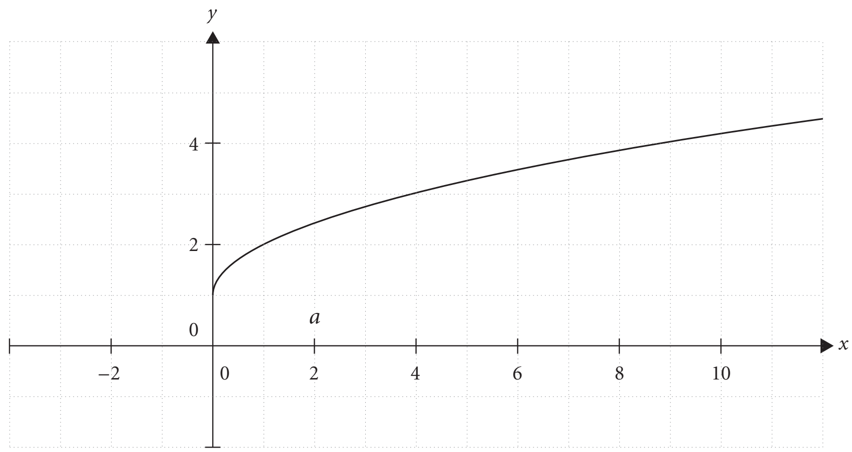
Continúa pensando por un momento, borra y traza otra gráfica.

Profesor: ¿La gráfica de esta función cumple la condición?
Estudiante 3: Sí.

El estudiante efectivamente ha construido la gráfica de una función que cumple con la condición inicial, pero esta construcción no fue inmediata y parecía que no entendía el significado de la condición inicial. Manifiesta dudas y no existe un completo dominio del concepto, por lo cual la calificación asignada de acuerdo a la rúbrica es de 6 puntos.

Problema 5. En la gráfica de $f(x)$ dada abajo marque las longitudes que representan las cantidades del inciso *a)* al *e)*. (Asumiendo que $h > 0$.)

a) $a + h$
b) h
c) $f(a)$
d) $f(a + h)$
e) $f(a + h) - f(a)$

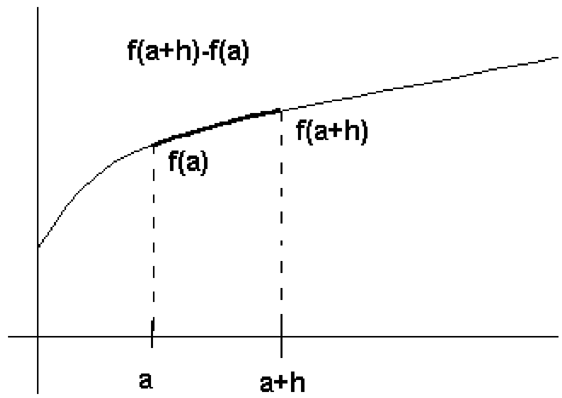


Estudiante 10

Profesor: Señala sobre la ilustración, dónde se encuentra o qué representa $f(a)$.
Estudiante 10: Es el valor que toma f cuando $x = a$.
Profesor: ¿Cómo se forma la gráfica de una función?
Estudiante 10: Por todos los puntos $(x, f(x))$.
Profesor: ¿Entonces puedes identificar a $f(a)$?
Estudiante 10: ¿Sabes? Lo pensé desde un principio pero no lo dije porque estoy un poco nervioso.
Profesor: No tienes por qué estar nervioso, porque además de que no influirá en tu calificación final, el objetivo de la entrevista es conocer con la mayor profundidad posible lo que conoces del curso.
Profesor: Marca con tu lápiz qué representa la diferencia $f(a + h) - f(a)$.
Estudiante 10: ¿Se pide esto?

El estudiante marcaba sobre la gráfica de $f(x)$ los puntos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$, subrayó el segmento de la función entre los puntos anteriores y lo etiquetó como $f(a + h) - f(a)$.

El estudiante maneja el concepto de función de manera correcta, identifica de manera fluida el dominio y rango de la función pero, no es capaz de identificar las longitudes pedidas por el problema.

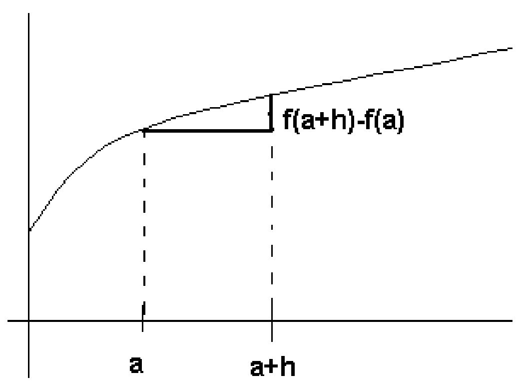


Por lo tanto se le asignaron 3 puntos de acuerdo a la rúbrica.

Estudiante 9

Estudiante 9: Cada punto que forma la gráfica esta dado por $(x, f(x))$, donde la $f(x)$ es una longitud vertical, entonces $f(a+h) - f(a)$ es una diferencia de longitudes verticales.

La estudiante marca ambas longitudes y luego la diferencia de éstas.



Esta estudiante recibió la calificación máxima (5 puntos) para la solución a este problema.

Problema 6. La cantidad Q en mg, de nicotina en el cuerpo t minutos después de que un cigarro fue fumado está dada por $Q = f(t)$.

a) Interpreta los enunciados $f(20) = 0.36$ y $f'(20) = -0.002$ en términos de nicotina. ¿Cuáles son las unidades de los números 20, 0.36 y –0.002?
b) Usa la información de la parte *a)* para estimar $f(21)$ y $f(30)$. Justifica tu respuesta.

Estudiante 11

Profesor: ¿Entiendes el problema?
Estudiante 11: Sí.

El estudiante escribe correctamente el significado de los enunciados $f(20) = 0.36$ y $f'(20) = -0.002$, pero no puede encontrar $f(21)$ y $f(30)$.

Profesor: ¿Qué significa que $f'(20) = -0.002$?
Estudiante 11: Después de 20 minutos, cada minuto decrece 0.002 mg de nicotina en la sangre.
Profesor: ¿Crees que esa información te sirva para estimar $f(21)$?
Estudiante 11: Sí, porque conozco cuánto hay en el minuto 20 y cómo está decreciendo la nicotina en el cuerpo por minuto.

$$f(21) = 0.3 + (-002)(1) = .36 - 0.002 = .358$$

$$f(30) = .36 + (-0.002)(10) = .36 - 0.02 = 0.34$$

El estudiante calcula correctamente $f(21)$ y $f(30)$.

Inicialmente el estudiante no resuelve completamente el ejercicio, pero al cuestionarlo y provocar una reflexión se puede observar que cuenta con las estructuras cognitivas necesarias para resolverlo, es decir, el estudiante posee los conceptos, aunque éstos no surgen de manera inmediata.

La calificación otorgada de acuerdo a la rúbrica fue de 8 puntos.

Estudiante 10

Profesor: ¿Entiendes lo que se pide que hagas en el problema?
Estudiante 10: Sí.

El estudiante escribe correctamente la interpretación de la expresión $f(20) = 0.36$, pero escribe de manera incorrecta la interpretación de $f'(20) = -0.002$.

Escribe:

$f'(20) = -0.002$ significa que la función puede cambia en el minuto 20.

Profesor: ¿Cómo cambia?
Estudiante 10: No lo sé.
Profesor: ¿Para qué te sirve la información que te da la derivada de una función?
Estudiante 10: Te permite saber cómo se comporta la función.
Profesor: ¿Podrías explicar un poco más tu respuesta?
Estudiante 10: Con la derivada sabes cómo es la función.
Profesor: De acuerdo al valor de la derivada que se da podrías decir acerca de la función.
Estudiante 10: Que la función es decreciente.
Profesor: Con ese valor podrías determinar que la función es decreciente.
Estudiante 10: Sí.

El estudiante maneja superficialmente el concepto de derivada de una función, a pesar de que se trata de profundizar en la respuesta, se percibe poco entendimiento de éste.

Profesor: ¿Cuáles son las unidades de las respuestas?
Estudiante 10: ¿Minutos?
Profesor: ¿Cómo sabes que son minutos?
Estudiante 10: Porque te dan la información de la función en el minuto 20

No puede responder acerca de las unidades de las cantidades y menos estimar $f(21)$ y $f(30)$.

De manera que la calificación asignada al estudiante es de 3 puntos.

Estudiante 14

Profesor: ¿Entiendes lo que te pide resolver el problema?
Estudiante 14: Sí, debo decir cuál es el significado de las expresiones.

El estudiante procede a escribir: "$f(20) = 0.36$ es la cantidad de nicotina que queda en el cuerpo en el minuto 20, o sea 0.36 mg; $f'(20) = -0.002$ representa la rapidez con la que se está eliminando la nicotina del cuerpo en el minuto 20."

Estudiante 14: ¿Cómo podría conocer $f(21)$ y $f(30)$?
Profesor: ¿Crees que la información que obtuviste te servirá para responder el inciso siguiente?
Estudiante 14: Déjame pensar.

El estudiante permanece meditando un momento, escribe algunas expresiones y vuelve a borrarlas.

$$\frac{f(21)-f(20)}{1}=\frac{.35998-0.36}{1}=\frac{-0.002}{1}=-0.002$$

$$\frac{f(30)-f(20)}{1}=\frac{(-0.002)^{10}}{10}$$

Estudiante 14: ¿Puedo dejar para después este inciso?
Profesor: Sí.

Al final de la entrevista el estudiante no regresa a resolver el problema. De manera que la calificación asignada es de 5 puntos de acuerdo a la rúbrica.

Problema 7. Encuentra los valores aproximados para $f'(x) = -0.002$ en cada valor de x dado. ¿Dónde es la derivada positiva?, ¿dónde es negativa? y ¿dónde es cero?

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	18	13	10	9	9	11	15	21	30

Estudiante 12

El estudiante recuerda que en alguna actividad del laboratorio aproximaban la derivada de una función por medio de la expresión

$$f'(x)=\frac{f(x+0.001)-f(x)}{0.001},$$

la escribe y pregunta cómo hace si no sabe cuánto es $f(x + 0.001)$.

Profesor: ¿Qué te dice la derivada de una función acerca de la función?
Estudiante 12: Me dice que es creciente o decreciente la función.

Profesor: ¿Qué significa que la derivada de una función sea positiva?
Estudiante 12: Significa que es creciente.
Profesor: ¿Por qué crees que la derivada de una función creciente es positiva?
Estudiante 12: Porque la $f(x+h)$ es mayor que la $f(x)$.
Profesor: Dada una tabla, ¿cómo podrías aproximar la derivada en cada punto?
Estudiante 12: ¡Ahh! Pues la única manera es con los mismos valores de la tabla, donde la h más pequeña está determinada por la siguiente x.

- De $[0,3)$: $f'(x)$ es negativa.
- De $(4,8)$: $f'(x)$ es positiva.
- De $(3,4)$: $f'(x)$ es cero.

El estudiante procede a aproximar la derivada de la función dada numéricamente, pero surge un inconveniente, ¿cómo aproximarla en los extremos?

Profesor: ¿Qué crees que puedas hacer para aproximar los valores de la derivada de la función en los extremos.
Estudiante 12: No sé, tendría que pensar, pero no estoy seguro. Porque para eso tendría que conocer el siguiente valor de la función o el anterior, pero sólo tengo lo que nos da la tabla.

El concepto de derivada de una función es de difícil asimilación para los estudiantes, frecuentemente se observa que pueden encontrar la expresión algebraica de la función derivada pero en realidad no comprenden el significado, de manera que las actividades realizadas durante el curso permiten reflexión y comprensión de tal concepto generando respuestas como la anterior.

El estudiante escribe:

$$\frac{13-18}{1}=-5 \qquad \frac{9-10}{1}=-1 \qquad \frac{4-3}{1}=1 \qquad \frac{15-11}{1}=4 \qquad \frac{30-21}{1}=9$$

$$\frac{10-13}{1}=-3 \qquad \frac{9-9}{1}=0 \qquad \frac{11-9}{1}=2 \qquad \frac{21-15}{1}=6$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	18	13	10	9	9	11	15	21	30
$f'(x)$	–5	–3	–1	0	1	2	4	6	9

El estudiante recibió la máxima calificación (10 puntos) para la respuesta a esta pregunta.

Estudiante 18

Profesor: ¿Entiendes lo que se te pide?
Estudiante 18: Sí entiendo, debo dar los valores aproximados de la derivada para la función.

A pesar de que el estudiante dice entender lo que debe hacer permanece pensativo por algunos minutos.

Profesor: ¿Qué pasa?
Estudiante 18: ¿No tengo la función para poder aproximar la derivada?
Profesor: ¿Y entonces, qué harás?
Estudiante 18: Voy a tratar de encontrar la fórmula.
Profesor: Y si tratas de hacerlo sólo a partir de la tabla, ¿crees que se puede?
Estudiante 18: Sólo puedo hacerlo calculando la razón de cambio promedio, aunque sería una aproximación muy mala de la derivada, porque para aplicar $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ sí debo conocer la función.
Profesor: ¿Y qué decidirás?
Estudiante 18: Pues lo voy a hacer calculando la razón de cambio promedio y daré la aproximación.
Profesor: ¿Crees que es una buena decisión?
Estudiante 18: Creo que es lo único que puedo hacer.
El estudiante procede a calcular la razón de cambio promedio para aproximar la derivada de la función.... vuelve a quedarse pensativo.
Profesor: ¿Qué ocurre?
Estudiante 18: Estoy calculando la razón de cambio promedio y pensando varias cosas al respecto.

Realizaba los cálculos de la razón de cambio promedio para aproximar la derivada de la función, hasta que elabora la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f'(x)$	–5	–3	–1	0	1	2	4	6	9

Profesor: ¿Cómo qué piensas?
Estudiante 18: Pienso en el significado de lo que estoy calculando y en su utilidad.
Profesor: ¿Podrías comentarme más acerca de tus pensamientos?

Estudiante 18: Pienso que la importancia del concepto es grande, porque en realidad es lo que ocurre con una función; es decir, casi nunca tenemos una fórmula, sólo valores aislados y a partir de ellos hay que predecir su comportamiento, esto lo podemos hacer con la rapidez de cambio promedio como una aproximación de la derivada.
Profesor: ¿Esto lo habías pensado en algún otro momento?
Estudiante 18: Pues no, no me parecía importante.
Estudiante 18: ¿Puedo terminar el problema después?
Profesor: ¿Por qué?
Estudiante 18: No sé qué hacer con el último punto que tengo, pero al final lo hago.
Profesor: Está bien.

El estudiante no regresa a resolver el problema, a pesar de que presenta avances en su aprendizaje su dominio no es total, por lo cual recibe una calificación de 7 puntos de acuerdo a la rúbrica.

Estudiante 1

Profesor: ¿Entiendes lo que te pide el problema?
Estudiante 1: Sí…, pero me hace falta la fórmula.
Profesor: ¿Y entonces… qué harás para resolver el problema?
Estudiante 1: Tengo que pensar.
Profesor: ¿Puedes decirme cuál es el significado de la derivada de una función?
Estudiante 1: Pues te dice qué tan rápido cambia la función.
Profesor: Entonces ése es tu problema: decir qué tan rápido cambia la función.
Estudiante 1: Mira si la función es creciente la derivada es positiva, y si la función es decreciente entonces la derivada es negativa.
Profesor: ¿Cómo puedes justificar lo que me acabas de decir?
Estudiante 1: ¿Es incorrecto lo que te dije?
Profesor: No, sólo quiero que me digas por qué ocurre eso.
Estudiante 1: Pues no sé, pero déjame pensar.

La estudiante permanece pensativa, mira la tabla y guarda silencio.

Estudiante 1: Creo que no puedo resolverlo.
Profesor: ¿Quieres regresar después al problema?
Estudiante 1: Sí.

La estudiante decide no regresar. Como puede observarse, sus conocimientos del concepto son elementales y no puede responder satisfactoriamente a ellos ni al problema planteado.

La estudiante recibe una calificación de 4 puntos de acuerdo con rúbrica.

Problema 8. Supongamos que $C(q)$ representa el costo total en dólares por producir una cantidad de unidades de un producto. Los costos fijos de producción son de $20,000.00. El costo marginal de la función esta dado por $C'(q) = 0.005q^2 - q + 56$.

a) En la gráfica de $C'(q)$ ilustra gráficamente el costo variable de producir 150 unidades.
b) Estima $C(150)$, el costo total de producir 150 unidades.
c) Encuentra el valor de $C'(150)$ e interpreta tu respuesta en términos de costos de producción.
d) Usa tu respuesta de la parte *b)* y *c)* para estimar $C(151)$.

Estudiante 13

Profesor: ¿Entiendes lo que pide el problema?
Estudiante 13: Sí, creo que la gráfica de $C'(q)$ está formada por los puntos $(q, C'(q))$, entonces las y son los costos variables; debo buscar la $C'(150)$ y ese será el costo variable de producir 150 unidades.

El estudiante razona adecuadamente para resolver el primer inciso.

Estudiante 13: Para resolver el inciso *b)* debo conocer cuál es la función que tiene como derivada a $C(q)$, es decir debo integrar esa función.

El estudiante escribe:

$$\int (0.005q^2 - q + 56)\,dq$$

$$f(q) = \frac{0.005}{3}q^3 - \frac{q^2}{2} + 56q + C$$

$$C(0) = 20{,}000, \text{ entonces } C(150) = \frac{0.005}{3}(150)^3 - \frac{(150)^2}{2} + 56(150) = 20000.$$

Estudiante 13: ¿Está bien?

Profesor: ¿Por qué crees que esa es la manera de encontrar el valor de $C(150)$?

Estudiante 13: Creo que hay otra, mira ya conozco el costo variable de producir 150 unidades y el problema da los costos fijos, entonces sólo debo multiplicar el costo variable por la cantidad de artículos y sumarle los costos fijos.

Profesor : ¿Si así lo hicieras, qué suposición estás haciendo?

Estudiante 13: ¿Qué; no está bien?

Profesor: ¡Sólo quiero que expliques un poco más tu razonamiento!

Estudiante 13: ¡Ah! Estaría suponiendo que la función de costos es lineal.

Profesor: ¿Qué ocurre si la función de costo es lineal?, ¿Cómo encuentras la función de costo marginal?

Estudiante 13: Derivando la función de costo.

Profesor: ¿Entonces?, ¿crees que eso puede ocurrir?

Estudiante 13: Pues creo que no, porque tiene como derivada una función cuadrática, pero es una cúbica. Pero entonces sí debo integrar.

El estudiante maneja los conceptos aunque no emergen de manera inmediata, la reflexión acerca de su respuesta debe ser provocada.

La calificación asignada a este estudiante fue la máxima de acuerdo a la rúbrica 8 puntos.

Estudiante 14

Profesor: ¿Entiendes lo que pide el problema que hagas?

Estudiante 14: Sí.

Profesor: ¿Qué información da la función de costo marginal con respecto a la función de costo total?

Estudiante 14: Dice qué tan rápido está cambiando el costo de la producción de un artículo conforme aumenta el número de artículos producidos.

Profesor: ¿Te dice cuándo la función disminuye?

Estudiante: Bueno, te dice cómo cambia.

Profesor: ¿Cómo identificas en la gráfica de $C'(q)$ el costo variable de producir 150 unidades?

Estudiante 14: Pues la gráfica de la función $C'(q)$ está formada por los $(q, C'(q))$, o sea que a cada q se le asocia su $C'(q)$, entonces debo buscar la y que le corresponde a $q = 150$.

El estudiante procede a resolver el inciso *c),* calcula, después de hacerlo permanece pensativo.

Profesor: ¿En qué piensas?
Estudiante 14: Estoy pensando cómo a partir de la función de costo marginal puedo encontrar la función $C(q)$, creo que debo realizar una integración.
Profesor: ¿Por qué piensas eso?
Estudiante 14: Porque al integrar esa función voy a encontrar una posible función que generó esta derivada.

Procede a calcular la integral de la función:

$$\int (0.005q^2 - q + 56)\, dq$$

$$C(q) = \frac{0.005}{3}q^3 - \frac{q^2}{2} + 56q + C$$

El estudiante tiene claro por qué debe integrar la función sin problema y vuelve a guardar silencio.

Profesor: ¿Qué ocurre?
Estudiante 14: Trato de pensar en el significado de la expresión $C'(150)$.

El estudiante parece dominar la mecánica del concepto pero presenta dificultad para escribir el significado, es un poco difícil inferir si tiene problemas para expresar las ideas o no entiende el significado de dicha expresión.

Profesor: ¿Qué piensas?
Estudiante 14: No sé cómo usar la parte *b)* y *c)* para estimar $C(151)$.
Profesor: ¿Crees que la información que obtuviste en los incisos anteriores te sirva?
Estudiante 14: No sé cómo usarla.

El estudiante permanece en silencio.

La mecanización de los conceptos matemáticos parece ser lo más fácil para los estudiantes, su aplicación es más difícil.

El estudiante recibió una calificación de 8 puntos a la solución de este problema.

Estudiante 3

Profesor: ¿Entiendes el problema?
Estudiante 3: Sí, mira, la función de costo marginal es una función cuadrática que

abre hacia arriba, entonces si trazo la gráfica y luego identifico sobre ella el punto $(150, C'(150))$. Entonces ya lo resolví.

El estudiante procede a hacer lo que brevemente describió, no presenta problemas para hacerlo. De pronto guarda silencio durante algunos minutos.

Profesor: ¿En qué piensas?
Estudiante 3: Puedo calcular $C'(150)$ sólo sustituyendo en la función de costo marginal.

El estudiante procede a hacer el cálculo y después se queda pensativo.

Profesor: ¿Qué piensas?
Estudiante 3: Cómo encontrar la función de costo total.

El estudiante empieza a realizar cálculos, borra, se queda pensativo y vuelve a escribir.

Profesor: ¿Qué haces?
Estudiante 3: Mira, la función de costo total está dada por los costos fijos más el costo variable por la variable , ya tengo los costos fijos sólo me falta encontrar... no ya tengo el costo variable de producir 150 unidades, entonces ya lo resolví.
Profesor: ¿Qué pasa si asumes que la función de costo total es lineal?, ¿cómo debería ser $C'(q)$?
Estudiante 3: Pues $C'(q)$ es el costo marginal.
Profesor: Otra vez, si la función de costo es lineal, ¿quién sería $C'(q)$?
Estudiante 3: Pues el costo variable o una constante..., pero eso no puede ser porque $C'(q) = 0.005q^2 - q + 56$. Entonces $C(q)$ debe ser una función cúbica.
Profesor: ¿Qué podrías hacer para encontrarla?
Estudiante 3: Pues debo integrar y usar los costos fijos.

El estudiante permanece pensativo, escribe y parece que quiere resolver la integral:

$$\int (0.005q^2 - q + 56)\, dq.$$

Estudiante 3: No me acuerdo cómo resolver esto.
Profesor: ¿Quieres continuar?
Estudiante 3: No, ¿pero si me acuerdo puedo regresar a resolverlo?
Profesor: Sí, por supuesto.

El estudiante continúa resolviendo otro problema y al final de la entrevista le pregunto que si quiere regresar a resolver el problema 8 que dejó incompleto.

Estudiante 3: No, creo que no me acuerdo.

El estudiante recibe una calificación de 5 puntos por su respuesta a este problema.

Problema 9. Encuentra la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{1+\ln x}$

b) $f(x)=2-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+3^x-e$

c) $g(x)=e^{3t}\operatorname{sen}(2t)$

d) $h(x)=\left(\dfrac{x^2+2x}{3}\right)^3$

Estudiante 14

Los estudiantes encuentran sin problema alguno las derivadas de las funciones, todo parece indicar que las reglas y fórmulas de derivación no causaron conflictos.

Profesor: ¿Sabes qué regla o fórmula de derivación debes aplicar en cada caso?
Estudiante 14: Sí.
El estudiante procede a calcular las derivadas de las funciones:

$$y=\frac{x}{1+\ln x} \qquad y'=\frac{(1+\ln x)(1)-x\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+\ln x)^2}$$

$$g(x)=2x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+3^x-e \qquad g'(x)=x+\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}+3^x\ln 3$$

$$y=e^{3t}\operatorname{sen}(2t) \qquad \begin{aligned} y' &= e^{3t}(2\cos(2t))+\operatorname{sen}(2t)(3e^{3t}) \\ &= e^{3t}(2\cos 2t+3\operatorname{sen}(2t)) \end{aligned}$$

$$h(t) = \left(\frac{t^2 + 2}{3}\right) \qquad\qquad h'(t) = \frac{2}{3}t$$

Profesor: ¿En algún inciso utilizas la regla de la cadena?
Estudiante 14: En el inciso *c)* y *d).*
Profesor: ¿Por qué la debes usar ahí?
Estudiante 14: Porque esas funciones están compuestas.
Profesor: ¿Eso qué significa?
Estudiante 14: Significa que es una función de otra función, es decir, que los valores que toma una función dependen de los valores que toma otra función.
Profesor: ¿Para derivar una composición de funciones usas la regla de la cadena?
Estudiante 14: Sí.

Como puede observarse, su respuesta es inmediata, parece que la memorización de las reglas y fórmulas de derivación las tienen muy bien aprendidas.

Los estudiantes entrevistados resolvieron correctamente cada uno de los incisos, sólo 8 de ellos tuvieron algún pequeño error al encontrar la derivada de $y = e^{3t}\,\mathrm{sen}\,(2t)$. Manifestaban que el problema es que van implicadas dos reglas de derivación, la del producto de funciones y la regla de cadena.

Estudiante 15

Profesor: ¿Sabes qué regla o fórmula de derivación debes usar en cada caso?
Estudiante 15: Creo que sí, pero no estoy muy seguro.
Profesor: ¿Podrías decirme para el inciso *c),* qué reglas o fórmulas usas?
Estudiante 15: La regla del producto de dos funciones, pero no sé cómo derivar $f(t) = e^{3t}$
Profesor: ¿La otra función $g(t) = \mathrm{sen}\,(2t)$, sabes cómo derivarla?
Estudiante 15: Es que creo que mi problema se reduce a lo mismo.

El estudiante procede a escribir en su hoja de respuestas, borra y vuelve a escribir; su escritura consiste en sus funciones originales.

$$(e^{3t}) = e^{3t} \cdot 3 \qquad\qquad y' = e^{3t}\,\mathrm{sen}\,(2t)\,.$$

Encuentra correctamente la derivada de la primera función, pero no le ayuda mucho para encontrar la derivada de esta función.

Por lo cual a la mayoría de ellos les fue asignada la calificación de 10 puntos de acuerdo con la rúbrica y los otros estudiantes tuvieron menos puntos de acuerdo a sus errores; este último estudiante obtuvo 5 puntos.

Problema 10. Una firma produce una cantidad de algún bien y el costo promedio por artículo esta dado por $a(q) = 0.01q^2 - 0.6q + 13$ para $q > 0$.

a) ¿Cuál es el costo total, $C(q)$, de producir q bienes?
b) ¿Cuál es el mínimo costo marginal?, ¿cuál es la interpretación práctica de este resultado?
c) ¿A qué nivel de producción es el costo promedio mínimo?, ¿cuál es el costo promedio más bajo?
d) Calcula el costo marginal en $q = 3$. ¿Cómo se relaciona con la parte *c)?* Explica esta relación analíticamente y en palabras.

Estudiante 5

Profesor: ¿Entiendes lo que te pide el problema?
Estudiante 5: Me está pidiendo calcular $C(q)$ a partir de $a(q)$, pero estaba tratando de verificar si esto es lo que pide; es que es muy fácil.

El estudiante procede a resolver el inciso *a)* sin problema alguno, después se queda reflexionando.
El estudiante encuentra la función $C(q) = a(q)q$.

$$C'(q) = 0.01q^3 - 0.6q^2 + 13q$$

$$C'(q) = 0.03q^3 - 1.2q + 13$$

Profesor: ¿Qué debes hacer para encontrar en costo marginal mínimo?

El estudiante procede a resolver el inciso *b),* lo cual hace de manera correcta; posteriormente se queda reflexionando. Dice que $C'(q)$ es la función de costo marginal.

Profesor: ¿Cuál es la interpretación práctica de este resultado?
Estudiante 5: Sabemos que el costo marginal es el costo variable por unidad, entonces estamos buscando el mínimo costo variable.

El estudiante procede a escribir lo dicho en palabras. Sigue escribiendo, creo que empezó a resolver el inciso *c)*.

Profesor: ¿Qué vas a hacer ahora?
Estudiante 5: Quiero encontrar una q para la cual el costo promedio es mínimo.

El estudiante empieza a evaluar la función de costo promedio y así tratar de encontrar la q para la cual ocurre que el costo promedio es mínimo.

Profesor: ¿Crees que es el mejor método para encontrar el costo promedio mínimo?
Estudiante 5: No, creo que no, voy a invertir demasiado tiempo y siempre podría tener la duda si no hay otra más pequeña.
Profesor: Sí, efectivamente. ¿Y entonces, qué harás?
Estudiante 5: Entonces voy a calcular la derivada de $a(q)$ y después igualar a cero y resolver.
Profesor: ¿Para qué te serviría eso?
Estudiante 5: Porque eso me garantiza encontrar todos los máximos o mínimos de $a(q)$.

Como puede observarse, el estudiante presenta claridad en el manejo del concepto de función de costo promedio, en el de máximos y mínimos de una función y en la interpretación del costo promedio mínimo.

Por lo tanto recibió la máxima calificación para este problema, 20 puntos.

Estudiante 17

Profesor: ¿Entiendes lo que pide el problema?
Estudiante 17: Sí, pero no sé cómo encontrar el costo total a partir del costo promedio
Profesor: ¿ Te servirá recordar cómo se define la función de costo promedio?
Estudiante 17: $\dfrac{C(q)}{q}$.

Se queda pensando algunos segundos, por fin escribe $C(q) = a(q)\,q$.

La estudiante procede a calcular $C'(q) = 0$, pero al resolver la ecuación se equivoca.

Profesor: ¿Puedes decirme un poco acerca de tu solución?

Estudiante 17: Pues en estos puntos la función de costo marginal tiene máximo o mínimo.
Profesor: ¿Cómo hiciste para encontrar esos puntos?
Estudiante 17: Resolviendo la ecuación.

A pesar de que se trata de cuestionar un poco más a la estudiante, parece que ya se encuentra cansada y lo que quiere es concluir la entrevista.

Profesor: ¿Qué pasa?
Estudiante 17: Ya no entiendo qué estoy haciendo.
Profesor: Podrías leer el problema y revisar lo que hiciste.
Estudiante 17: Ya me cansé.
Profesor: ¿Quieres continuar?
Estudiante 17: ¿Puedo terminar aquí?
Profesor: Sí, por supuesto.

Esta estudiante recibe de acuerdo con la rúbrica una calificación de 2 puntos.

Estudiante 18

Profesor: Entiendes qué debes hacer para resolver el problema.
Estudiante 18: Sí, debo encontrar la función de costo a partir de la función de costo promedio.

El estudiante procede a escribir $qC(q) = a(q)$, y luego $C(q) = 0.01q^3 - 0.6q^2 + 13q$. Después guarda silencio, parece reflexionar cómo afrontar el problema.

Profesor: ¿Entiendes lo que se te pide en el inciso *b)?*
Estudiante 18: Me pide calcular la función de costo marginal, pero estaba pensando en lo que significa.

El estudiante escribe $C'(q) = 0.03q^2 - 1.2q + 13$.

Estudiante 18: El costo marginal nos dice cuánto cuesta producir una unidad más es un cierto nivel de producción. Mira, por ejemplo el producir la siguiente unidad cuando tu nivel de producción es $q = 10$, es el siguiente:

$$C'(10) = 0.03(10)^2 - 1.2(10) + 13 = 3 - 12 + 13 = 4.$$

Esto quiere decir que producir una unidad más incrementa en 4 la función de costos cuando la producción es de 10. Porque este costo cambia de acuerdo al nivel de producción.

$$C'(10) = 0.03(10)^2 - 1.2(10) + 13 = 3 - 12 + 13 = 4\,.$$

Profesor: ¿Cómo sabes que cambia?
Estudiante 18: Porque la función de costo es cuadrática y tiene derivada diferente en puntos diferentes. Mira, si lo hacemos para $q = 11$, donde los valores ya están muy cerca, tenemos:

$$C'(11) = 0.03(11)^2 - 1.2(11) + 13 = 3.63 - 13.2 + 13 = 3.42\,.$$

Si estamos en nivel de producción mayor, el producir una unidad más nos cuesta menos. Así pasa para cada nivel de producción.
Profesor: ¿Entiendes lo que pide que respondas en el inciso *c)?*
Estudiante 18: Me pide que calcule la q para la cual el costo promedio es mínimo. Debo calcular $a'(q)$.
Profesor: ¿Para qué lo debes hacer?
Estudiante 18: Porque la derivada igual a cero da los máximos o mínimos de la función de costo promedio.

Realizando operaciones el estudiante encuentra que en $q = 30$ la función de costo promedio tiene un punto crítico.

Profesor: ¿Cómo sabes que es mínimo y no máximo?
Estudiante 18: Porque es el único valor que obtengo.
Profesor: Debe existir otra forma de verificar que lo que dices es cierto. ¿Cuál podría ser?
Estudiante 18: Podría usar el criterio de la segunda derivada y de ahí decidir.
Profesor: ¿Qué obtendrías?
Estudiante 18: $a''(q) = 0.02$, lo cual significa que para cualquier valor la segunda derivada es positiva, por lo tanto en $q = 30$ hay un mínimo.
Profesor: ¿Puedes calcular el costo marginal en $q = 3$?
Estudiante 18: Sí, es lo que había hecho, sólo que ahora en distinta q.

El estudiante evalúa el costo marginal en $q = 3$ y permanece pensativo algunos segundos.

Profesor: ¿Estas pensando en cómo resolver el inciso *d)?*
Estudiante 18: Sí.
Profesor: ¿Existe alguna relación entre el costo marginal y el costo promedio mínimo?
Estudiante 18: Creo que sí, pero me cuesta trabajo explicar.
Profesor: ¿te servirá de algo saber que $a(q) = \dfrac{C(q)}{q}$?
Estudiante 18: No sé.

El estudiante permanece en silencio y escribe $qa(q) = C(q)$, borra lo escrito y permanece pensando.

Las respuestas del estudiante al problema 10 comparada con la rúbrica me permiten determinar que la calificación otorgada al estudiante es 15 puntos.

Estudiante 8

Profesor: ¿Entiendes lo que te pide el problema?
Estudiante 8: Sí.

El estudiante escribe $C(q) = qa(q)$, posteriormente, $C(q) = 0.01q^3 - 0.6q^2 + 13q$, $C'(q) = 0.03q^2 - 1.2q + 13$.

Profesor: ¿Qué fue lo que escribiste?
Estudiante 8: Me piden el costo total, que es $C(q)$, luego me piden el mínimo costo marginal, entonces debo encontrar el costo marginal $C'(q)$. Ahora debo encontrar dónde esta función tiene un mínimo.

Sin igualar a cero la función sustituye los valores de los coeficientes en la fórmula general, para resolver ecuaciones de segundo grado. Deja inconclusa su solución.

Profesor: ¿Por qué no resuelves la ecuación?
Estudiante 8: La voy a dejar para resolverla después.
Profesor: ¿Por qué?
Estudiante 8: Porque no sé si lo que estoy haciendo está bien, pero luego regreso a terminar.

El estudiante procede a resolver el inciso *c)*, para lo cual escribe lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
a'(q) &= 0.02q - 0.6 \\
0 &= 0.02q - 0.6 \\
q &= \frac{0.6}{0.02} \\
q &= 30
\end{aligned}
$$

Finalmente el estudiante escribe: "en $q = 30$ la función de costo promedio tiene un mínimo".

Anexa al final:

$$
\begin{aligned}
a''(q) &= 0.02 \\
a(30) &= 9 - 1.8 + 13 \\
a(30) &= 20.2
\end{aligned}
$$

Regresa a terminar de resolver el inciso *a),* para esto hace $C'(q) = 0$.
Resuelve la ecuación cuadrática sin problema.

Profesor: ¿Qué significa tu resultado?
Estudiante 8: Es cuando cuesta menos producir la siguiente unidad.

El estudiante no resuelve el inciso *d)* ni el *b).*

Profesor: ¿Vas a resolver los incisos faltantes?
Estudiante 8: No
Profesor: ¿Por qué no lo harás?
Estudiante 8: Porque en el inciso *d)* no sé cómo explicar analíticamente la relación que existe entre el costo promedio mínimo y el costo marginal.

De acuerdo a las respuestas que dio el estudiante se le asigno una calificación de 10 puntos según la rúbrica.

4

RESULTADOS

4.1 Resultados de la entrevista

4.1.1 *Comentarios generales acerca del desarrollo de las entrevistas*

A pesar de que a los estudiantes se les pidió que reservaran entre dos y tres horas para la entrevista, se les aclaró que no importaba si tardaban un poco más de tiempo, estaba en ellos decidir cuánto; una de las mejores entrevistas, por ejemplo, alcanzó las 3 horas con 22 minutos.

Las entrevistas a los 10 estudiantes del semestre mayo-diciembre de 2001 se llevaron a cabo en 7 días y su análisis se realizó en 15 días; para los 18 estudiantes del semestre enero-mayo de 2002, las entrevistas tomaron 15 días y se invirtió aproximadamente un mes en su análisis. En total, el diseño, aplicación y análisis de las entrevistas se llevó más tiempo del originalmente planeado; incluso la tarea aparentemente simple de transcribir las entrevistas exigía regresar constantemente a la revisión escrita del desempeño de los estudiantes (lo que de paso permitió reparar en hechos que no habían sido cabalmente apreciados con anterioridad).

Para complementar el análisis de las entrevistas se revisaron las notas en que los estudiantes desarrollaban sus operaciones durante los exámenes, las anotaciones y bitácoras del profesor, y la rúbrica (véase Anexo), que contiene los elementos cognitivos que deben manejar los estudiantes para llegar a la solución de los problemas planteados.

Al final de cada entrevista se les preguntaba a los estudiantes qué formato de evaluación les había parecido mejor, el que se implementó durante el curso o la entrevista y por qué. La mayoría de los estudiantes se pronunciaron por la entrevista, argumentando que permite que el profesor conozca lo que el estudiante tiene en su mente y quiere explicar pero que a veces no puede.

4.1.2 *Comentarios generales acerca de lo que hacen y dicen los estudiantes*

Durante el desarrollo de las entrevistas se observó que las representaciones visuales de un problema permite a los estudiantes sentir confianza en lo que hacen, aunque muchas veces no las utilizan. Parece ser que son apoyos para enfrentar el problema.

Con mucha frecuencia durante nuestro desempeño como profesores entrenamos a los estudiantes para resolver problemas en los que es suficiente recordar reglas y fórmulas, lo cual no significa que existe comprensión acerca de lo que hacen. Cuando enfrentan una situación que sale de este esquema se observa gran diversidad de concepciones en torno a un concepto particular.

Los estudiantes presentan dificultades para expresar verbalmente sus ideas acerca de un problema y su posible solución. De manera que es importante fomentar este tipo de expresión de ideas matemáticas con dos objetivos: desarrollar la habilidad comunicativa matemática en el alumno y por otro lado permitir al profesor conocer el nivel de dominio de dicha habilidad a fin de implantar las actividades necesarias para su corrección.

Podemos observar también que después de dar una solución a algún problema el estudiante no se cuestiona acerca de qué tan correcta es ésta y simplemente espera la validación del profesor o del libro de texto. Una de las consecuencias de la evaluación generada a través de exámenes cronometrados, donde los estudiantes deben utilizar el menor tiempo posible en dar la solución, es que no se permite suficiente tiempo para la reflexión.

En algunas ocasiones los estudiantes no comprenden la pregunta y dan la respuesta a lo que entienden. Si por alguna razón concerniente a la redacción del problema el estudiante no lo comprende, no existe el espacio o posibilidad de aclarar su duda. Esta es una desventaja más de una evaluación generada a través de exámenes tradicionales (con papel y lápiz) y con un tiempo límite para su resolución. Al revisar estos exámenes queda fuera de nuestro alcance percibir si un estudiante falla debido a que no tiene dominio del concepto o a que no entendió la pregunta.

La entrevista personalizada permite al profesor conocer con mayor certeza la causa de los errores. A partir de ella es fácil detectar cuando los conceptos son dominados a nivel superficial, sin una completa comprensión y dominio de los mismos, ya que tenemos la posibilidad de preguntar directamente al estudiante y observar el desarrollo de sus razonamientos durante el trabajo con los problemas.

El sistema de la entrevista personalizada permite además detectar concepciones erróneas o no muy claras de algunos conceptos elementales que son fundamentales en la comprensión de conceptos de mayor complejidad.

Por ejemplo, al tratar de resolver el problema 5, algunos de los estudiantes no sabían si debían elegir la h en el eje X (dominio) o en el eje Y (rango); y cuando se les pedía que indicarán gráficamente dónde se encontraba $f(a)$, lo identificaban como un punto sobre la gráfica de $f(x)$. La generalización parece ser un proceso muy difícil de adquirir por parte de los estudiantes; si en el problema 5 la pregunta hubiera sido identificar $f(3)$, no habrían tenido problemas, pero en general les fue difícil identificar $f(a)$.

El aprendizaje de los estudiantes puede ocurrir en los momentos menos esperados. Mediante la evaluación a partir de entrevistas podemos provocar la reflexión y el aprendizaje, además de que nos ayuda a percibir el nivel de estructuras cognitivas relativas a algún concepto, es decir, podemos apreciar si los estudiantes desarrollan un cierto nivel de formación de estructuras cognitivas que les permitan resolver algún tipo específico de problemas, como se ve en el desarrollo de la entrevista al estudiante 18 resolviendo el problema 10.

En la Tabla 4.1 se muestran los resultados de la evaluación generada a través de esta metodología durante la presente investigación.

4.2 Resultado de la evaluación según Rumec

4.2.1 *Comentarios sobre las sesiones de laboratorio*

Las primeras sesiones de laboratorio fueron complicadas para los estudiantes debido a que conocían muy poco del lenguaje isetl. A pesar de que se les había dado algún material referente a éste y dos sesiones introductorias, tardaron entre dos y tres semanas en verlo como parte de su actividad cotidiana; sin embargo, algunos de ellos llegaron a sorprenderme con sus descubrimientos acerca de lenguaje computacional realizando avances inesperados. Teniendo en cuenta el tiempo de adaptación, los primeros reportes se aceptaban aunque estuvieran incompletos, registrándose solamente como entregados; a partir de la tercera semana sólo contaban las actividades terminadas. Vale la pena destacar el hecho de que las actividades computacionales promovieron la integración de los equipos.

4.2.2 *Comentarios sobre los resultados de exámenes*

Se aplicó un primer examen en equipo, cuya calificación fue otorgada a cada integrante por igual. A pesar de que podría suponerse que todos los equipos tuvieron

Tabla 4.1
Resultados de la evaluación generada a través de entrevistas personalizadas

Estudiante	*P1*	*P2*	*P3*	*P4*	*P5*	*P6*	*P7*	*P8*	*P9*	*P10*	*Final*
17	5	5	10	10	3	8	5	10	10	2	**68**
9	5	5	5	3	5	5	10	5	10	5	**58**
7	8	5	8	10	5	5	10	10	10	10	**81**
1	2	5	9	10	3	7	4	6	10	10	**66**
12	7	5	6	10	5	5	10	10	10	10	**78**
2	8	5	10	10	5	10	10	10	10	20	**98**
8	10	5	8	10	5	10	7	5	6	10	**76**
14	5	5	10	10	3	5	6	8	6	8	**66**
13	5	5	10	10	3	7	8	8	10	10	**76**
5	8	5	6	8	5	8	6	8	8	20	**82**
6	9	5	10	10	5	10	8	10	10	15	**92**
16	6	5	6	6	5	8	8	8	5	10	**67**
11	8	5	10	10	5	10	8	8	10	10	**82**
4	10	5	10	10	5	8	10	10	8	10	**86**
3	7	3	5	6	5	7	5	5	10	8	**61**
18	10	5	7	8	5	5	7	10	7	15	**79**
10	4	3	7	7	3	3	7	5	8	5	**49**
15	5	3	5	10	3	5	5	7	7	8	**58**

muy buena calificación, eso no ocurrió debido a la concepción generalizada entre los estudiantes sobre el trabajo en equipo. Sin embargo no fue difícil aceptar la calificación del primer examen.

El segundo y tercer exámenes se realizaron individualmente, cada estudiante recibió dos calificaciones, la de su examen y el promedio de las calificaciones de los integrantes de su equipo. No hubo protestas hasta el momento de conocer la calificación de cada integrante; quienes resultaban afectados se quejaban. Para conciliar, se llegó al acuerdo de que el promedio en equipo disminuyera el porcentaje de participación en la calificación.

Un examen final, de características tradicionales, fue resuelto individualmente y en un tiempo cronometrado.

Los estudiantes manifestaron que la metodología de evaluación les parecía muy estricta e injusta en el sentido de verse afectados por la calificación de alguno de sus compañeros de equipo; sin embargo, en lo general manifestaban haber aprendido y comprendido varios conceptos del cálculo.

4.2.3 *Comentarios sobre las discusiones en clase*

La segunda clase de cada semana consistió en discusiones en tornos a las actividades realizadas en el laboratorio, éstas fueron muy enriquecedoras ya que los estudiantes mostraban su entendimiento referente a algún concepto y por otro lado desarrollaban su habilidad para manifestar sus ideas a través del lenguaje, lo cual les costó mucho trabajo. Las sesiones de una hora se volvieron insuficientes para poder escuchar a los estudiantes que deseaban participar.

4.2.4 *Comentarios sobre la evaluación individual y por equipo*

Los estudiantes fueron organizados en equipos permanentes de no más de cuatro integrantes, para su evaluación se tomó en cuenta tanto el desempeño individual como el trabajo de equipo. La mayoría de los alumnos estaba de acuerdo en que las actividades del curso fueran encargadas y entregadas por equipo. Para recibir asesoría por parte del profesor se pedía que en la medida de lo posible se encontraran todos los integrantes del equipo.

El trabajo en equipo ayudó al crecimiento cognitivo de muchos de los estudiantes que presentaban problemas de entendimiento. Aun cuando algunos de ellos manifestaban agrado y acuerdo por el diseño del curso, se encontraban a disgusto con el formato de evaluación: después del primer examen (realizado y evaluado por equipo) los estudiantes no estaban de acuerdo en realizar su examen individual y recibir además de su calificación el promedio de las calificaciones de los integrantes de su equipo, esta circunstancia provocó que incluso se anulara esta calificación en uno de los grupos participantes.

En la Tabla 4.2 se muestran los resultados de la evaluación generada por la metodología ace durante la investigación.

Tabla 4.2
Resultados de la evaluación generada por la metodología ACE

Estudiante	*Equipo*	*Primer parcial*	*Segundo parcial*	*Tercer parcial*	*Cuarto parcial*	*Final*
17	1	72	54	74	65	**70**
9	2	62	79	73	50	**70**
7	2	62	55	67	68	**70**
1	3	83	52	68	55	**68**
12	3	81	61	63	68	**70**
2	3	83	79	100	97	**91**
8	4	86	59	78	76	**75**
14	5	67	93	62	59	**72**
13	5	67	51	63	67	**70**
5	6	84	75	85	92	**84**
6	8	100	70	100	77	**82**
16	4	87	27	85	46	**62**
11	7	41	79	97	81	**78**
4	1	77	81	71	82	**80**
3	9	81	52	69	57	**66**
18	10	45	95	86	86	**81**
10	10	45	23	57	25	**40**
15	9	74	53	47	47	**55**

4.3 Comparación

4.3.1 *Correlación entre las dos variables*

La correlación es un método estadístico usado para determinar si existe relación entre dos o más variables y la regresión es un método estadístico para describir la naturaleza de la relación entre variables, esto es, positiva o negativa, lineal o no lineal.

El coeficiente de correlación es un parámetro que se usa como medida para determinar si dos o más variables están relacionadas y también para determinar la fortaleza de la relación entre las variables.

Hay dos tipos de relaciones: simple y múltiple. En la relación simple, hay sólo dos variables bajo estudio. La relación simple puede ser positiva o negativa. Una relación positiva existe cuando ambas variables crecen o decrecen al mismo tiempo. En una relación negativa, cuando una variable crece, la otra decrece, y viceversa.

Todos los estudiantes que participaron en la entrevista al final del ciclo escolar habían cursado la materia de cálculo con la metodología de enseñanza propuesta por rumec. Así, para el estudio se tomaron las evaluaciones finales obtenidas con cada metodología, por un lado la generada por la metodología propuesta por rumec y por otro la generada por la entrevista personalizada.

Se realizó una prueba-T (Tabla 4.3) para comparar las dos evaluaciones y se obtuvo lo siguiente: la media de la evaluación final generada por rumec fue de 71.333, mientras que la media de la evaluación final generada por la entrevista fue de 73.5000. A pesar de que este parámetro es casi igual para dos conjuntos con el mismo número de datos, no es razón suficiente para asegurar que los conjuntos de datos se parecen entre sí. Por tal motivo debemos proceder a comparar algunos otros parámetros de los conjuntos de datos, en este caso de las evaluaciones.

Otro parámetro que sirve para comparar dos conjuntos de datos es el análisis de correlación, que se usa para medir el grado de asociación entre dos variables numéricas mediante el llamado *coeficiente de correlación,* cuyos valores varían desde −1, para una correlación negativa perfecta, hasta +1, para una correlación positiva perfecta. Entre mayor sea la cercanía a +1.0 más fuerte es la asociación entre las variables.

La correlación existente entre nuestras dos variables bajo estudio: la evaluación generada por la metodología de rumec y la evaluación generada por las entrevistas personalizadas, fue de 0.871, lo cual habla de una fuerte relación positiva entre dichas variables, lo que indica que el aumento en una de ellas significa un incremento en el valor de la segunda variable.

En el estudio se trabaja con datos pareados, es decir, tenemos los mismos sujetos en dos situaciones diferentes; como es evidente en nuestro caso, ambas muestras tienen exactamente los mismos estudiantes, la primera muestra con las calificaciones finales de los estudiantes mediante la evaluación sugerida por rumec y la otra muestra con esos mismos estudiantes evaluados mediante una entrevista personalizada.

En la Tabla 4.3 aparecen la media, desviación estándar y error estándar tanto de la muestra de cada evaluación por separado como de la diferencia entre ambas; hacia el final de la tabla se detalla el test de hipótesis propiamente dicho. En el caso de la diferencia entre las evaluaciones se tiene un resultado negativo, lo que indica que la evaluación según la entrevista es superior a la propuesta por rumec, con una *t* con un grado de significación de 0.000, de modo que no se rechaza la hipótesis nula de igualdad de medias. Finalmente podemos ver el intervalo de confianza de 95% de la media de la evaluación.

Tabla 4.3
T-Test Paired Samples Statistics

	Mean	*N*	*Standard Deviation*	*Standard Error Mean*
Pair 1: Evaluación según RUMEC	71.3333	18	11.5606	2.7249
Evaluación según entrevista	73.5000	18	12.7982	3.0166

Paired Samples Correlations

	N	*Correlation*	*Sig.*
Pair 1: Evaluación según RUMEC *y Evaluación según entrevista*	18	0.871	0.000

Paired Samples Test

	Paired Differences					*t*
	Mean	*Standard Deviation*	*Standard Error Mean*	*95% Confidence Interval of the Difference*		
				Lower	*Upper*	
Pair 1: Evaluación según RUMEC *– Evaluación según entrevista*	−2.1667	6.2989	1.4847	−5.2990	0.9657	−1.459

Paired Samples Test

	df	*Sig. (2-tailed)*
Pair 1: Evaluación según RUMEC *y Evaluación según entrevista*	17	0.163

Tabla 4.4
Comparación entre la evaluación sugerida por RUMEC y la entrevista personalizada

Estudiante	*Equipo*	*Evaluación RUMEC*	*Evaluación por entrevista*	*Diferencia*
17	1	70	68	**–2**
9	2	70	58	**–12**
7	2	70	81	**+11**
1	3	68	66	**–2**
12	3	70	78	**+8**
2	3	91	98	**+7**
8	4	75	76	**+1**
14	5	72	66	**–6**
13	5	70	76	**+6**
5	6	84	82	**–2**
6	8	82	92	**+10**
16	4	62	67	**+5**
11	7	78	82	**+4**
4	1	80	86	**+6**
3	9	66	61	**–5**
18	10	81	79	**–2**
10	10	40	49	**+9**
16	9	55	58	**+3**

4.3.2 ¿Qué dicen los resultados?

De acuerdo con la Tabla 4.4, se observa que las diferencias entre las calificaciones son muy pequeñas. De manera general hubo más estudiantes que mejorarían su calificación final (11) que estudiantes que la disminuirían (7) empleando el método de la entrevista, esto se debe a que la evaluación a través de entrevistas personalizadas permite al profesor observar con mayor detalle la situación cognitiva de los estudiantes.

5

CONCLUSIONES

5.1 Diferencias generales entre la evaluación mediante entrevistas y la evaluación propuesta por Rumec

De acuerdo con las tablas y el análisis anteriormente expuestos, puede observarse una similitud muy grande entre los dos sistemas de evaluación cuya comparación se llevó a cabo en el capítulo anterior, lo que indica que podemos confiar en la metodología de evaluación propuesto por rumec.

Mediante la evaluación realizada a través de entrevistas personalizadas pueden apreciarse los niveles cognitivos de los estudiantes con mayor precisión y se abre la posibilidad de retroalimentar el aprendizaje de los estudiantes al promover en ellos la reflexión sobre sus respuestas.

Sin embargo, pese a sus ventajas la metodología de evaluación a través de entrevistas personalizadas es difícil de instrumentar en la práctica debido a la gran cantidad de tiempo requerido para su diseño, aplicación y análisis, por lo cual debemos buscar alternativas que permitan obtener la misma calidad de información acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje. Los resultados obtenidos por la presente investigación permiten afirmar que la metodología de evaluación propuesta por rumec constituye una de tales alternativas.

En cualquier caso, el interés del profesor, al evaluar los aprendizajes, debe enfocarse a descubrir el grado en que los alumnos han construido, gracias a la ayuda pedagógica recibida y al uso de sus propios recursos cognitivos, las interpretaciones significativas y valiosas de los contenidos revisados.

5.2 ¿Qué queda por hacer?

Los resultados mostrados en la investigación sugieren que la inteligencia se construye en la medida en que la experiencia no viene simplemente a añadirse al conocimiento anterior, sino que provoca una reorganización y una reestructuración del conocimiento en una totalidad coherente. El progreso está ligado, por lo tanto, a la presencia de un conflicto (una contradicción) entre el objeto de conocimiento y los esquemas utilizados para aprenderlo. El hecho de percatarse de la existencia de una contradicción o conflicto, aún cuando el individuo no pueda resolverlo, constituye en sí mismo un progreso.

La investigación realizada puede enfrentar varias objeciones, entre ellas:

1) El mismo profesor llevó a cabo ambas evaluaciones, por lo cual pudo ocurrir que cuando se aplicaba un método de evaluación se estaba considerando la calificación en el otro método.

Esta investigación presenta la aplicación de una entrevista personalizada a un grupo pequeño de estudiantes y hace un estudio comparativo de sus resultados con los generados por la metodología propuesta por rumec. Con esta presentación no se piensa en un estudio completo, ya que es muy posible que debido a que un profesor ha trabajado con un estudiante durante un semestre sea difícil cambiar la percepción que tiene de él después de una entrevista. Sin embargo, considero que las conclusiones alcanzadas mediante esta investigación pueden tomarse como una buena medida de lo que ocurre al reconsiderar el papel de la evaluación en el diseño de los cursos de matemáticas; para reafirmar dichas conclusiones sería conveniente hacer investigaciones que verifiquen o cuestionen los resultados. Aquí mostramos una evidencia de elementos metodológicos que conducen a ideas por profundizar en estudios ulteriores.

2) Al realizar las entrevistas el profesor podría inferir estructuras cognitivas en los estudiantes que en realidad no existían.

Esta situación trató de evitarse llevando un registro escrito de todo lo que el estudiante decía y de sus intentos para resolver cada problema, de tal modo que el intercambio verbal no fuera el parámetro determinante para juzgar el nivel de aprendizaje de los conceptos. La posterior comparación entre los registros y las transcripciones ayudaron a filtrar las posibles inferencias erróneas.

3) Existe la posibilidad de que el profesor asignara una calificación diferente si la entrevista la hubiera hecho en otro momento con cada estudiante.

Sí, es muy posible que esto ocurriera, pero lo mismo sucede con cualquier metodología de evaluación y a todos los profesores, es decir, si calificamos en días diferentes el mismo examen o la misma actividad podríamos asignar calificaciones diferentes, lo cual depende de factores que están más allá del control de los profesores, tales como el estado de ánimo, la fatiga, el número de exámenes a calificar, etcétera.

4) Si un profesor diferente hubiera realizado la misma entrevista, ¿sería posible que se hubieran obtenido otras calificaciones?

Sí, debido a que cuando un profesor evalúa la respuesta de los estudiantes pone de manifiesto sus propias concepciones sobre el aprendizaje, es decir, lo que para un profesor puede ser muy importante en la respuesta de un estudiante, para otro puede no serlo. Sin embargo, considero que si otros profesores simpatizan con la metodología de enseñanza y la teoría cognitiva descritas en este trabajo, podrían iniciar más investigaciones que confirmen o cuestionen los resultados presentados.

BIBLIOGRAFÍA

Ample, M., Subkoviak, M. *Educational Evaluation Análisis and Responsability*. McCutchan. Berkeley, 1984.

Asiala, M., Ann Brown, David DeVries, Edward Dubinsky, David Mathews. "A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education", *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education,* 6, 2000.

Ausubel, D., Novak, J., Hanesian, Helen. *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. 2ª edición. Trillas. México, 1990.

Baquero, R., *Vigotsky y el aprendizaje escolar*, 2ª edición. Aique. Argentina, 1997.

Bloom, B. *Taxonomy of Educational Objectives Handbook: cognitive domain.* David McKay. Nueva York, 1956.

Bloom, B., Hastings, Th., Madaus, G. *Evaluación del aprendizaje*. Troquel. Buenos Aires, 1975.

Bridgeman, Brus. *Qualitative Psichology,* 2ª edición. Sage Publications, 2000.

Brown, S., Knight, P. *Assessing Learners in Higher Education*. Kogan Page. Londres, 1994.

Calonghi, L. *El problema de la evaluación*. 2ª edición. Iter. Madrid, 1991.

Candau, V. *Investigación y enseñanza. La didáctica en cuestión*. 2ª edición. Narcea. España, 1999.

Cardinet, J. *Evaluation scolaire et practique.* De Boeck. Bruselas, 1986.

Carretero, M., Limón, M. "Razonamiento y enseñanza de la historia", *Rev. Tarbiya* núm. 10. Universidad Autónoma de Madrid. 1995.

Clark, D. *Evaluación constructivista en matemáticas*. 1ª edición. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 2002.

Committee on the Undergraduate Program in Mathematics (cupm). "Assessment of Student Learning for Improving the Undergraduate Major in Mathematics". *Focus: The Newsletter of the Mathematical Association of America* 15(3), junio de 1995, pp. 24-28.

Cottrill, J. *Intructor's Resource Materials for "Calculus, Concepts & Computers and Cooperative Learning"*. 2001.

Cooley, W. *Evaluation Research in Education*. Irvington Publishers, Inc. Nueva York, 1986.

Delgado, J., José Gutiérrez. *Métodos y técnicas de investigación Cualitativa*, 2ª edición. Síntesis. España, 1999.

Díaz-Barriga, F., Lule, M., Rojas-Drummond, S. *Metodología de diseño curricular para educación superior*. 1ª edición. México, 1996.

Dubinsky, E. "Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking", en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht. The Netherlands: Kluwer, 1991, pp. 231-243.

Dubinsky, E. "Assessment in one Learning Theory Based Approach to Teaching", en B. Gold. Mathematical Association of America, 1995.

Dubinsky, E., Tall, D. *Advanced Mathematical Thinking and the Computer in Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer, 1991, pp. 231-250.

Dubinsky, E., Schwingendorf, K. "Constructing Calculus Concepts: Cooperation in a Computer Laboratory", en Carl Leinbach (ed.) *The Laboratory Approach to Teaching Calculus,* maa Notes 20, 1991.

Dubinsky, E. "A Theory and Practice of Learning College Mathematics", en A. Schoenfeld (ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving.* Hillsdale: Erlbaum, 1994, pp. 221-243.

Dubinsky, E. "Pedagogical Change in Undergraduate Mathematics Education", en Bettye Anne Case (ed.) *You're the Professor, What Next,* MAA Notes 35, 1994, pp. 114-119.

Dubinsky, E. "Una aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática post-secundaria". *Educación Matemática* 3 (8), 1996.

Dubinsky, E., Asiala, M., Cottrill, J., Schwingendorf, K. "The Development of Students' Graphical Understanding of The Derivative", *Journal of Mathematical Behavior* 16 (3), 1997.

Dubinsky, E., Mathews, D. "Calculus, Concepts, Computers and Cooperative Learning: A Research-Based Approach to Calculus Instruction", en R. Cantoral (ed.) *El futuro del Calculus,* en prensa.

Dubinsky, E. "A better way of learning requires major changes in the teaching environment", *Proceedings of RECAM Conference,* en prensa.

Dubinsky, E. "A Learning Theory Approach to Calculus", en Z. Karian (ed.) *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education,* MAA Notes 24, 1992, pp. 37-40.

Dubinsky, E. "Research in Collegiate Mathematics Education I", *Issues in Mathematics Education* V. 4, Conference Board of the Mathematical Sciences. American Mathematical Society, 1994.

Dubinsky, E., Schwingendorf, K., Mathews, D., *Calculus, Computers and Concepts*. 2ª edición. McGraw-Hill Publishing, Nueva York, 1994.

Elbow, P. "Prólogo" a P. Belanoff y Dickson (eds.) *"Portafolios". Process and product,* Boynton/Cook Publishers. Gran Bretaña, 1991.

Elliot, J. *La investigación-acción en educación.* 3ª. Edición. Morata. España, 1997.

Erickson, F. *Qualitative Methods in Research on Teaching*. M.C. Wittrock. Nueva York, 1986.

Ernest, P. *The Philosophy of Mathematics Education*. Falmer Press. Basinstoke. Hampshire. England, 1991.

Feldman, A. *Implementing and Assessing the Power of Conversation in the Teaching of Action Research*. Teacher Education Quarterly. Nueva York, 1998.

Fernández, M. *Evaluación y cambio educativo*. 5ª edición. Morata, 1999.

Flórez, R. *Evaluación pedagógica y cognición*. Editorial. McGraw Hill. México, 2001.

Forrest, G. "Oral examinations" en Walberg, H. y G. Haertel (eds), *The International Encyclopedia of Educational Evaluation.* Pergamon Press. Oxford, 1990.

Gago, A. "EL Ceneval y la evaluación externa en México". *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* 2(2) México. Consultado el día 14 de junio de 2003 en el World Wide Web: http://redie.ens.uabc.mx/vol2no2/contenido-gago.html, 2000.

García, R. *La epistemología genética y la ciencia contemporánea.* 1ª edición. Gedisa. España, 1999.

García, R. *El conocimiento en construcción.* 1ª edición. Gedisa. España, 2000.

Gold B., Schwingendorf, K., William, M., *Assessment Practices in Undergraduate Mathematics*, The Mathematical Association of America, 2000.

Goldin, G. *A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Educations Research*. Universidad de Nueva Jersey, 1998.

Guba, G. *Toward a Methodology of naturalistic inquiry in educational evaluation.* Center for Study of Evaluation. Universidad de California. Los Ángeles, 1998.

Gordon, J. *Dimensions of Oral Assessment and Student Approaches to Learning*. Assessment Maters. Londres, 1998.

Harvey, G., Lewis., T. *Assessment: Problems, Developments and Statistical Issues*. John Wiley & Sons. Gran Bretaña, 1990.

Herrera, R. *Modelos de Evaluación.* Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. Chile, 1988.

Hestenes, D., Halloun, I. "Common sense concepts about motion". American Association of Physics Teachers. 1985, pp. 1056-1064.

Hestenes, D., Halloun, I. *The Initial Knowledge State of College Physics Students*, Tempe, Arizona: Department of Physics Arizona State University. 1985, pp. 1043-1055.

Hestenes, D., Wells, M. "A Mechanics Baseline Test". *The Physics Teacher,* 1992, pp. 159-166.

Hestenes, D., Wells, M., Swackhamer, G. "Force Concept Inventory". *The Physics Teachers* vol. 30, 1992, pp. 151-158.

Hubbard, M. *Measuring Medical Education*. Lea & Febiger. Philadelphia, 1971.

Jaramillo, C. "Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del modelo de van Hiele". *Divulgaciones Matemáticas* vol. 9. Colombia, 2001.

Kaufman, R. *Planificación de sistemas educativos*. Trillas. México, 1973.

Kupermintz, H. *Construct validity of mathematics achievement: Evidence from interview procedures.* (CSE Technical Report 493). Universidad de California, Center for the Study of Evaluation. Los Ángeles, 1999.

Labinowicz, E. *Introducción a Piaget. Pensamiento, aprendizaje y enseñanza*. 3ª edición. Addison-Wesley Iberoamericana. México, 1989.

Lafourcade, P. *La evaluación en organizaciones educativas centradas en logros*. 4ª edición. Trillas. España, 1998.

Martínez, E. *Evaluación y acreditación universitaria. Metodologías y experiencias*. 1ª edición. Nueva Edición. Chile, 1998.

Mehrens, W., Lehmann, I. *Medición y evaluación en educación y en psicología*. CECSA. México, 1992.

Menoyo, M. *La evaluación formativa como instrumento de atención a la diversidad.* Editorial Alambique. Barcelona, 1998.

McKernan, J. *Investigación-acción y curriculum. Métodos y recursos para profesionales reflexivos,* 1ª edición. Morata. España, 1999.

National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston. Virginia, 1995.

National Research Council. "Knowing what students know. The science and design of educational assessment". Committee on the Foundations on Assessment. Pellegrino, J. W., Choudowsky, N., Glaser, R. (eds.) Board on Testing and Assessment. Center for Education. Washington, DC, 2001.

Negri, N. *El método clínico-pedagógico de la escuela de Ginebra de Jean Piaget*. ciecc-oea. Washington DC, 1982.

Patton, M. *How to use Qualitative methods in Evaluation*. 2ª edición. Sage Publications. Estados Unidos, 1997.

Patton, M. *Qualitative Evaluation and Research Methods*. 2ª edición. Sage Publications. Estados Unidos, 1990.

Piaget, J. "Comments on Mathematical Education", en A.J. Howson (ed.), *Developments in Mathematical Education, Proceedings of the Second International Congress in Education,* Cambridge Press, 1972.

Piaget, J. "Comments on Vygotsky's Critical Remarks", *Archives the Psychologie* 47, 1979, pp. 237-249,

Parrenoud, P. *La construcción del éxito y del fracaso escolar*. 2ª edición. Morata. España, 1996.

Rueda, M., Díaz Barriga, F. *Evaluación de la docencia. Perspectivas actuales*. 1ª edición. Paidós Educador. México, 2000.

Scriven, M. *The Methodology of Evaluation: Perspectives of Curriculum Evaluation*. Rock McNally, 1967.

Stenhouse, L. *Apuntes de metodología de investigación cualitativa*. Morata. Madrid, 1984.

Stenhouse, L. *La investigación como base de la enseñanza* 1ª edición. Morata. España, 1987.

Stufflebeam, D. *et al*. *Educational Evaluation and Decision Making*, Itasca. Chicago, 1981.

Suchman, E. *Evaluative Research*. Russell Sage Fundation. Nueva York, 1980.

Tyler, R. "Specific Approaches to Curriculum Development", en Gress, J., Purpel, D. (eds.) *Currículo. An introduction to the field.* McCutchan. Berkeley, 1978.

Tyler, R. *Basic Principles of Curriculum and Instruction*. University of Chicago Press. Chicago, 1963.

Walker, R. *Métodos de investigación para el profesorado.* 2ª edición. Morata. España, 1997.

Wolf, D. P. *Assessment As An Episode of Learning*, Bennet & W. C. Ward. Gran Bretaña. 1993.

Anexo

RÚBRICA PARA LA EVALUACIÓN DE LA ENTREVISTA

El siguiente documento describe los criterios usados por rumec para describir la situación cognitiva de los conceptos matemáticos en la mente de los estudiantes, los cuales se ajusta a los criterios que permitieron analizar las respuestas dentro del marco teórico de la investigación.

Pregunta 1

RUMEC	*Criterio*	*Criterio para la pregunta*	*Ponderación:* **10**
Acción	Identificar Conocer Traducir Asociar	• Identifica que el problema se resuelve mediante una función exponencial. • Conoce la expresión algebraica de una función exponencial. • Traduce el problema a una expresión algebraica. • Asocia el concepto de la vida media a una función exponencial.	69-0
Proceso	Manipula Realiza	• Manipula el concepto de función exponencial dándole sentido y significado a cada variable. • Realiza maniobras con las variables en busca de la respuesta.	79-70
Objeto	Analiza Sintetiza	• Analiza el sentido y significado de las variables obtenidas. • Identifica a las variable como parte de un todo.	89-80
Esquema	Evalúa	• Muestra habilidad para aplicar criterios y juicios a la respuesta obtenida.	100-90

Pregunta 2

RUMEC	*Criterio*	*Criterio para la pregunta*	*Ponderación:* **5**
Acción	Reconoce Identificar	• Reconoce una función a partir de una tabla. • Identifica el dominio y el rango de una función	69-0
Proceso	Manipula Describe Experimenta	• Manipula el dominio y el rango de una función dada mediante una tabla para conseguir una nueva función. • Describe de qué manera las transformaciones afectan a la función original para generar otra. • Experimenta a través de la manipulación del dominio y el rango de la función original.	79-70
Objeto	Relaciona Integra	• Relaciona las tablas con las manipulaciones. • Integra las manipulaciones anteriores para generar otras de mayor complejidad.	89-80
Esquema	Decide	• Decide si una transformación es correcta o no.	100-90

Pregunta 3

RUMEC	*Criterio*	*Criterio para la pregunta*	*Ponderación:* **10**
Acción	Conoce Describe	• Conoce el concepto de límite de una función. • Conoce el concepto de función creciente o decreciente. • Describe el concepto de límite de una función.	69-0
Proceso	Ilustra Examina	• Ilustra gráficamente el concepto de límite de una función. • Examina las gráficas corrigiendo las condiciones que no se cumplen.	79-70
Objeto	Experimenta Analiza	• Experimenta el trazo de gráficas hasta conseguir el adecuado. • Analiza cada gráfica justificando su trazo y sus correcciones.	89-80
Esquema	Discrimina Concluye	• Discrimina entre las gráficas trazadas a la que cumple las condiciones. • Concluye cuál debe ser la gráfica correcta.	100-90

Pregunta 4

RUMEC	*Criterio*	*Criterio para la pregunta*	*Ponderación:* **10**
Acción	Conoce	• Conoce los conceptos de función, evaluación de una función, función creciente y decreciente y límite de una función.	69-0
Proceso	Manipula Relaciona Transfiere	• Manipula los conceptos a fin de conseguir el trazo de la función. • Relaciona los conceptos necesarios con la gráfica solicitada. • Transfiere las características verbales a la forma gráfica.	79-70
Objeto	Integra	• Integra los conceptos a una forma gráfica.	89-80
Esquema	Evalúa	• Evalúa la gráfica trazada a partir de con condiciones que debe cumplir.	100-90

Pregunta 5

RUMEC	*Criterio*	*Criterio para la pregunta*	*Ponderación:* **5**
Acción	Identificar Reconoce	• Identifica el dominio y el rango de una función a partir de su gráfica. • Reconoce sobre la gráfica las longitudes señaladas.	69-0
Proceso	Manipula	• Manipula las expresiones algebraicas sobre la gráfica para señalar las longitudes pedidas.	79-70
Objeto	Relaciona	• Relaciona las longitudes pedidas con la gráfica.	89-80
Esquema	Juzga Sintetiza	• Juzga sus respuesta a partir del análisis. • Muestra habilidad para aplicar criterios y juicios a la respuesta obtenida.	100-90

Pregunta 6

RUMEC	*Criterio*	*Criterio para la pregunta*	*Ponderación:* **10**
Acción	Identifica	• Identifica el concepto de evaluación de una función y evaluación de la derivada de una función.	69-0
Proceso	Entiende Manipula	• Entiende el significado de las preguntas. • Manipula la diferencia de significados entre evaluación de una función y evaluación de su derivada.	79-70
Objeto	Conecta	• Conecta la información que tiene de una función en un punto y su derivada en el mismo punto para encontrar la respuesta a las preguntas.	89-80
Esquema	Decide	• Decide si su respuesta es correcta a partir de la información dada en el problema.	100-90

Pregunta 7

RUMEC	*Criterio*	*Criterio para la pregunta*	*Ponderación:* **10**
Acción	Identifica Conoce Asocia	• Identifica la tabla como una función. • Identifica dónde la derivada es positiva, negativa o cero. • Conoce el significado de la derivada de una función. • Asocia la razón de cambio promedio como una aproximación de la derivada.	69-0
Proceso	Clasifica Manipula	• Clasifica los intervalos de la tabla donde la derivada es positiva, negativa o cero. • Manipula la razón de cambio promedio para aproximar la derivada de la función.	79-70
Objeto	Integra Crea	• Integra la información que tiene acerca del valor de una función en un punto y su derivada para formular hipótesis de la respuesta. • Crea la tabla para la derivada de la función a partir del manejo de los conceptos.	89-80
Esquema	Juzga	• Juzga su respuesta a partir del manejo de los conceptos	100-90

Pregunta 8

RUMEC	*Criterio*	*Criterio para la pregunta*	*Ponderación:* **10**
Acción	Conoce Identifica	• Conoce el concepto de función de costo. • Conoce el concepto de costo marginal. • Identifica el concepto de costos fijos.	69-0
Proceso	Relaciona Muestra Manipula	• Relaciona la gráfica de la función de costo marginal con el concepto de costo variable. • Muestra en la gráfica el costo marginal. • Manipula el significado de costo marginal	79-70
Objeto	Explica	• Explica cómo los conceptos anteriores permiten la elaboración de sus respuestas.	89-80
Esquema	Decidir	• Decide si sus respuestas tienens sentido a partir de la información dada.	100-90

Pregunta 9

RUMEC	*Criterio*	*Criterio para la pregunta*	*Ponderación:* **10**
Acción	Conoce Asocia	• Conoce las reglas de derivación correspondientes. • Conoce cuándo usar la regla de la cadena. • Asocia las reglas de derivación para cada función.	69-0
Proceso	Manipula	• Manipula las reglas de derivación para encontrar las derivadas de las funciones. • Manipula la regla de la cadena.	79-70
Objeto	Relaciona	• Relaciona cada función con una regla para derivar funciones.	89-80
Esquema	Discrimina	• Discrimina las reglas para derivar cada una de las funciones.	100-90

Pregunta 10

RUMEC	*Criterio*	*Criterio para la pregunta*	*Ponderación:* **20**
Acción	Conocer Identifica	• Conoce la función de costo total, costo marginal y costo promedio. • Identifica la diferencia entre costo total, costo marginal y costo promedio.	69-0
Proceso	Manipula	• Manipula el costo promedio para obtener el costo total.	79-70
Objeto	Conecta	• Conecta cómo a partir del costo promedio se deduce el costo marginal. • Conecta el concepto de derivada para calcular el costo promedio mínimo.	89-80
Esquema	Explica Evalúa	• Explica la interpretación práctica del resultado obtenido. • Muestra habilidad para aplicar criterios y juicios a la respuesta obtenida.	100-90