INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTORA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
Presenta

María del Socorro Valero Cázarez

Director de Tesis: Dr. Crisólogo Dolores Flores

México, D. F. Septiembre del 2003

INDICE DE TABLAS

TABLA

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA

INDICE DE CONTENIDO

GLOSARIO

Concepciones alternativas. Conocimiento que difiere de aquél que se plantea para ser aprendido.

Concepciones espontáneas. Son aquellas concepciones que surgen en la interacción espontánea con el entorno cotidiano y sirven, ante todo, para predecir la *conducta* de ese entorno.

Concepciones de los estudiantes. Conocimientos que están de acuerdo con los significados aceptados.

Visualización. Está caracterizada por los complejos procesos de interacción entre las representaciones pictóricas externas (gráficas, figuras, etc.) y la formación de imágenes mentales que son procesos internos y propios del individuo. La capacidad para visualizar cualquier concepto matemático o problema, requiere de la habilidad de interpretar y entender la información figurativa sobre el concepto mismo, manipularla mentalmente y expresarla sobre un soporte material (Castro y Castro, 1997). La visualización, desde el punto de vista de la educación matemática, incluye dos direcciones: la interpretación y comprensión de modelos visuales y la habilidad para traducir en imágenes visuales la información que es dada en forma simbólica (Dreyfus, 1993).

Pensamiento y lenguaje variacional. Estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. Es una línea de investigación que posee una triple orientación. Por un lado se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y epistemológico; en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticas del cambio; en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante las estructuras variacionales consideradas en la escuela, el laboratorio y la vida cotidiana (Cantoral, 1999).

Cambio conceptual intencional. Implica el intento deliberado de una persona (o grupo) por un cambio radical de un sistema conceptual a otro porque son seducidos por el poder de ese nuevo sistema conceptual, o porque perciben algún defecto profundo en su visión actual (Ferrari y Elik, 2003).

RESUMEN

En la práctica escolar los profesores de matemáticas utilizan gráficas cartesianas o las representaciones figurales para la enseñanza de las funciones y el análisis de su comportamiento. Pero hay evidencias de que existen muchas concepciones que se generan en la mente de los estudiantes, respecto de estas representaciones, que son inaceptables en la matemática (Wainer, 1992; Mc Dermot, Rosenquist, Van Zee, 1987; Dolores, 1998; Dolores y Guerrero, 2002; Dolores, Alarcón y Albarrán, 2003; Dolores, 2003).

Esta problemática tiene implicaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática de las variables. Por nuestra parte, suponemos que esas concepciones pueden ser removidas de la mente de los estudiantes para acercarlas a concepciones aceptables mediante un proceso sistemático de enseñanza. En razón de lo anterior, esta investigación tiene como objetivo fundamental analizar la estabilidad y cambio de las concepciones alternativas de los estudiantes acerca del análisis de funciones en condiciones instruccionales determinadas.

En el contexto global este trabajo se fundamenta en las ideas que acerca del Pensamiento y Lenguaje Variacional se han generado en el grupo de investigadores organizados en torno del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). En un contexto específico está edificado sobre la base de las concepciones alternativas y el cambio conceptual intencional.

En nuestro país varios investigadores (Cantoral y Farfán, 2000; Dolores 2000) realizan sus trabajos ocupándose de la línea de investigación denominada *Pensamiento y Lenguaje Variacional* la cual estudia la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos, atendiendo a una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza.

Respecto de las concepciones alternativas, de acuerdo a Mevarech y Kramarsky (1997) los niños desarrollan ideas acerca de su mundo, desarrollan significados para palabras usadas en la ciencia y desarrollan estrategias para obtener explicaciones acerca de cómo y por qué las cosas se comportan como tales. Estas categorías de creencias de los niños, teorías, significados, y explicaciones, forman las bases para el uso del término *concepciones de los estudiantes*. Cuando esas concepciones entran en conflicto con los significados aceptados, aparecen las concepciones *alternativas*.

Por otra parte, desde el punto de vista didáctico las concepciones alternativas no pueden permanecer indefinidamente en la mente de los estudiantes; debieran sufrir transformaciones como consecuencia de la puesta en práctica de diseños instruccionales, aunque algunos investigadores advierten que algunas concepciones

alternativas son resistentes al cambio y otras no. Respecto del cambio conceptual Pozo (1996) plantea que:

- No basta con exponer al alumno un modelo explicativo mejor, hay que hacerle ver que *es* mejor
- Para que el alumno pueda comprender la superioridad de la nueva teoría es preciso enfrentarle a situaciones conflictivas que supongan un reto para sus ideas.
- Los conceptos alternativos de los alumnos suelen ser implícitos. Un primer paso para su modificación será hacerlos explícitos mediante su aplicación a problemas concretos.

Otro elemento adicional de los cambios conceptuales radica en la intencionalidad de esos cambios. El cambio conceptual intencional involucra el intento deliberado de una persona por un cambio radical de un sistema conceptual a otro porque son seducidos por el poder de ese nuevo sistema conceptual, o porque perciben algún defecto profundo en su visión actual (Ferrari y Elik, 2003). Desde esta perspectiva, bajo condiciones del mundo real los nuevos y viejos conceptos son influenciados por los moderadores y mediadores del cambio conceptual. Los mediadores estructuran el enfoque completo que alguien posee de un concepto en particular; los moderadores determinan la facilidad o la dificultad con que el individuo intentará cambiar los conceptos existentes.

Con el recuento de las ideas anterior se evidencia el papel relevante que posee el estudio de las concepciones alternativas de los estudiantes sobre el tema del análisis de funciones. En la medida en que se desarrolle investigación encaminada a remover estas concepciones para sustituirlas por otras acordes con el conocimiento científico, estaremos en posibilidad de allanarles el camino a los estudiantes en situación escolar para que, cuando llegue el momento de enfrentarse con los conceptos propios de la matemática del cambio, cuenten con la estabilidad suficiente en sus concepciones para llevar a cabo el análisis gráfico de funciones de acuerdo con las concepciones aceptadas por la disciplina.

Para alcanzar el objetivo de esta investigación nos propusimos la realización del siguiente programa metodológico: indagación de los antecedentes; diseño de las actividades de incidencia e instrucción que a su vez consistieron en: un diagnóstico, formación de las condiciones de partida, diseño de situaciones didácticas, puesta en escena de los diseños instruccionales y análisis de los resultados; finalmente a la luz de los resultados de estas actividades se realizó el análisis de la estabilidad o cambio de las concepciones alternativas sujetas a estudio, a partir del cual concluimos que:

- El grado de estabilidad o cambio de las diferentes concepciones alternativas identificadas es variable
- Algunos estudiantes parecen solo atender a la curva de la función, e ignoran la relación de covariación presente en las gráficas cartesianas. Por tanto, la carencia de razonamiento covariacional en ellos, pareciera ser el origen de algunas de las concepciones alternativas identificadas
- Los cambios en las concepciones no son lineales; se dan en distintos sentidos; hay avances y retrocesos

SUMMARY

In school practice, mathematics professors use cartesian graphics figural representations for teaching functions and analysis of its behavior. But there's evidence of several conceptions which grow in the students minds regarding these representations which are unacceptable in mathematics (Wainer, 1992; Mc Dermot, Rosenquist, Van Zee, 1987; Dolores, 1998; Dolores & Guerrero, 2002; Dolores, Alarcón & Albarrán, 2003; Dolores, 2003).

These questions have implications on teaching and learning process of the mathematics of variables. As for us, we assume these conceptions can be removed from students mind in order to approach them to acceptable conceptions by means of a systematic teaching process. In relation to such thought, this research has as a fundamental goal to analyze the stability and change of the students alternative conceptions regarding to the analysis of functions in particular instructional conditions.

In a full context this work is based on the ideas which about the Thinking and Variational Language have come out from the group of researchers organized around the Educational Mathematics Latinoamerican Committee (CLAME). In a specific context it is built on the foundations of the alternative conceptions and intentional conceptual change.

In our country several researchers carry out their projects focusing on the research line called *Thinking and Variational Language* which studies the link between the didactic systems, attending to a systematic approach which allows to include the four basic elements in the construction of knowledge: its epistemological nature, its sociocultural dimension, the cognitive frames and the models of transmission through teaching.

Regarding to the alternative conceptions, as for Mevarech & Kramarsky (1997) children develop ideas about their world, they develop meanings for words used in science and create strategies to obtain explanations about how and why things behave the way they do. These categories of the children's beliefs, theories, meanings and explanations make the basis for the use of the term *students conceptions*. When those conceptions struggle with the other accepted ones, the *alternative conceptions* then appear.

On the other hand, from the didactic point of view, the alternative conceptions can not stay indefinitely in the students minds, they should suffer transformations as a consequence of the practice of instructional designs even though some researchers observe that some alternative conceptions are resistant to change and others are not. Regarding to the conceptual change Pozo (1996) think that:

- It's not enough to present the student a better explanatory model, we have to make him see what is better
- With the purpose of helping student understand the superiority of the new theory it is fundamental to face him to conflictive situations which may become real challenges to his ideas.

- Students alternative concepts are usually implicit. A first step to their modification will be to make them explicit though their use in concrete problems.

Other additional element of the conceptual changes lies on the purpose of those changes. The intentional conceptual change involves the deliberate attempt of a person looking for a radical change from a conceptual system to another because they are captivated by the power of such new conceptual system, or because they perceive a deep defect on their present vision (Ferrari & Elik, 2003). From this perspective, under conditions of the real word the new and old concepts are influenced by moderators and mediators of the conceptual change. The mediators create the whole approach which someone has about a particular concept; moderators define the simplicity or difficulty the individual will have in order to change the present concepts.

With the inventory of the past ideas it is easy to see how important is the relevant role that the study of students alternative conceptions on the topic of the analysis of functions. As research is developed with the purpose of removing these conceptions in order to substitute them in agreement with the scientific knowledge, we will have the chance to make even the way to the students in school period, so that when the time comes to face their own concept of the mathematics of change, they have the sufficient stability in their conceptions to be able to make the analysis of functions related to the accepted conceptions by the discipline.

In order to reach the objective of this research we set out the design of the following methodological program: background inquiry, design of the activities of incidence and instruction which at the same time are: a diagnosis, a design of the departure conditions of the instructional designs and analysis of results; finally, to the light of these activities we made the analysis of stability or change of alternative conceptions to be studied, from which we conclude that:

- The degree of stability of the different identified alternative conceptions is variable.
- Some students seem to pay attention to the curve of the function and ignore the relationship of co–variation seen in Cartesian graphics. Therefore the lack of co–variational reasoning in them seems to be origin of the identified alternative conceptions.
- Changes of the conceptions are not linear; they happened in different ways; there are advances and turn backs.

INTRODUCCIÓN

Se dice, incluso se acepta, que la escuela tiene como uno de sus fines la formación de una concepción científica del mundo. También es aceptado por la comunidad académica, que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática pueden contribuir al logro de este fin. Pero en los procesos que intencionalmente se ponen en marcha para la consecución de este objetivo se forman una serie de concepciones, muchas de cuales, por no ser compatibles con las aceptadas, suelen convertirse en obstáculos para el alcance del fin mencionado.

Varios investigadores (Confrey, 1990; Mevarech y Kramarsky, 1997; Pozo 1996) que estudian la ciencia intuitiva han analizado las concepciones alternativas, las concepciones espontáneas o las concepciones precientificas y afirman que varias de ellas se arraigan fuertemente en el cerebro de los estudiantes y son difíciles de cambiar mediante la enseñanza tradicional, incluso reiterada.

Nuestro trabajo de investigación se interesa en estudiar la estabilidad o cambio de las concepciones alternativas relativas al análisis de la gráficas de funciones elementales, concepciones ya detectadas por varios trabajos de investigación (Dolores y Catalán, 2000; Dolores, Solache y Díaz, 2000; Dolores y Guerrero, 2002; Dolores, 2002; Dolores, Alarcón y Albarrán, 2002; Dolores, 2003)

Planteamiento del problema. Los programas de matemáticas de la educación media y superior, los principalmente dirigidos a quienes estudiarán ciencias, ingeniería o contabilidad, prevén el que los estudiantes puedan analizar funciones incluso usando los criterios asociados a la derivada. Una de las habilidades necesarias para tal fin es poder *leer* o *interpretar* el comportamiento de funciones a través de sus gráficas usando, además, el lenguaje analítico. Sin duda que la interpretación de las gráficas pasa necesariamente por su visualización, aunque muchos estudiantes son renuentes a aceptarla (Einsemberg & Dreyfus, 1991).

En la práctica escolar los profesores de matemáticas utilizan gráficas cartesianas o las representaciones figurales para la enseñanza de las funciones y el análisis de su comportamiento. Pero hay evidencias de que existen muchas concepciones que se generan en la mente de los estudiantes que son inaceptables en la matemática. Varias investigaciones han reportado que los estudiantes no pueden usar las gráficas para comunicar o extraer información (Wainer, 1992), y que otros no pueden aplicar lo aprendido sobre gráficas en las clases de matemática a la física o a otras materias (Mc Dermot, Rosenquist, Van Zee, 1987). Cantidades mayoritarias de estudiantes, aún después de haber cursado Cálculo Diferencial, no relacionan a la derivada con la velocidad en un t_0 determinado, en cambio la asocian con la ordenada $s(t_0)$ (Dolores, 1998); esta concepción ha sido encontrada además cuando los estudiantes relacionan (a partir de gráficas) la derivada de una función y la función primitiva (Dolores, Guerrero, Medina, 2001).

En los profesores de cálculo del bachillerato también se encontró una gran variedad de concepciones alternativas cuando hacen lecturas sobre el comportamiento de funciones a través de sus gráficas (Dolores y Guerrero, 2002). Una cantidad significativa asocia la condición: $f(x+h)-f(x) = 0$ con los puntos de corte de la gráfica con el eje de las x; análogamente existe tendencia a asociar la condición: $f(x + h)-f(x)>0$ con la región donde la gráfica de la función está por arriba del eje de las x y $f(x + h)-f(x)<0$ con la región donde la gráfica de la función está por debajo de aquel. Los profesores cuestionados no son proclives a diferenciar entre condiciones de comportamiento y condiciones de ubicación de la gráfica en el plano cartesiano. La mayoría asocia consistentemente las condiciones de crecimiento y función positiva, (dadas simultáneamente y en forma escrita), con las regiones correspondientes de las graficas, sin embargo, asocian las condiciones creciente y negativa por un lado, y decreciente y negativa por otro, con aquellos sectores de la gráfica donde sólo es positiva y negativa respectivamente. Para ellos las condiciones de crecimiento y *positividad* o decrecimiento y *negatividad* de la función parecen ser condiciones concomitantes.

Ahora bien, la problemática antes expuesta tiene implicaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática de las variables. Por nuestra parte, suponemos que esas concepciones pueden ser removidas de la mente de los estudiantes para acercarlas a concepciones aceptables mediante un proceso instruccional premeditado. De esto trata fundamentalmente este trabajo. En razón de lo anterior, el problema de la presente investigación se sintetiza en el siguiente cuestionamiento: ¿Son estables o cambiantes las concepciones alternativas acerca del análisis de funciones mediante un proceso instruccional sistemático?

Justificación. Compartimos con el Dr. Dolores (2002) el planteamiento de que el poder analizar el comportamiento de las funciones es uno de los rasgos esenciales que caracteriza al pensamiento variacional. El desarrollo de esta forma de pensamiento en los estudiantes los puede colocar en mejores condiciones para acceder a la matemática superior. Para contribuir al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional se requiere del desarrollo de saberes básicos como el análisis de funciones; no obstante en este proceso surgen una diversidad de concepciones alternativas que hace falta remover para progresar en el desarrollo de esta forma de pensamiento.

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática persiguen como objetivo final lograr transformación de ideas y formas científicas de pensamiento en los estudiantes. Esos cambios y transformaciones se orientan hacia la formación de una concepción científica del mundo; ésta implica la formación de ideas científicas y por tanto la superación de las concepciones espontáneas o alternativas. El pensamiento y lenguaje variacional es una forma de pensamiento científico que requiere de una formación rica en imágenes mentales gráficas. Por ello, es necesario estudiar sistemáticamente esos cambios que obran desde las concepciones alternativas hacia las concepciones científicas aceptables en el trabajo con las gráficas de las funciones.

Si se conocen a profundidad las concepciones alternativas de los estudiantes cuando analizan el comportamiento de las funciones, se pueden crear mejores condiciones para diseñar y ejecutar acciones tendientes a cambiarlas. Las formas tradicionales de enseñanza no atienden a estas concepciones, por eso muchos estudiantes encuentran en las clases ordinarias el terreno propicio para arraigarlas en su pensamiento o en el peor de los casos, ignorarlas o evadir su presencia. He ahí la importancia y la necesidad de estudiarlas concienzudamente.

Objetivo. Este trabajo de investigación tiene como objetivo fundamental analizar la estabilidad y cambio de las concepciones alternativas de los estudiantes respecto al análisis de funciones a través de sus gráficas en condiciones instruccionales determinadas.

Hipótesis. Asumimos que las concepciones alternativas detectadas acerca del análisis de las funciones, pueden ser removidas si se ponen en práctica diseños instruccionales que favorezcan tal cambio conceptual.

Elementos teóricos básicos. En el contexto global este trabajo se fundamenta en las ideas que acerca del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PLV) se han generado en el grupo de investigadores organizados en torno del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). En un contexto específico está edificado sobre la base de las concepciones alternativas y el cambio conceptual intencional.

En nuestro país varios investigadores (Cantoral y Farfán, 2000; Dolores 2000a) realizan sus trabajos ocupándose de la línea de investigación denominada: *Pensamiento y Lenguaje Variacional*. Tal línea de investigación estudia la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos, atendiendo a una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. Para acceder al pensamiento y lenguaje variacional, se precisa entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende pues el conocimiento superficial no resulta suficiente para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de análisis.

Respecto de las concepciones alternativas, en Mevarech y Kramarsky (1997) se hace un interesante análisis que aquí se retoma. Los niños desarrollan ideas acerca de su mundo, desarrollan significados para palabras usadas en la ciencia y desarrollan estrategias para obtener explicaciones acerca de cómo y por qué las cosas se comportan como tales. Estas categorías de creencias de los niños, teorías, significados, y explicaciones, forman las bases para el uso del término *concepciones de los estudiantes*. Cuando esas concepciones entran en conflicto con los significados aceptados, aparecen las concepciones erróneas, errores sistemáticos, preconceptos y concepciones alternativas. Estos términos reflejan diferentes perspectivas de los conocimientos de los estudiantes. Los conceptos erróneos y los errores sistemáticos describen rasgos incorrectos de los conocimientos de los estudiantes que son repetibles y explícitos. Los preconceptos y las concepciones alternativas tienen una connotación más neutral, pues enfatizan el cambio desde los errores de los estudiantes hasta las diferentes maneras en que ellos entienden las tareas dadas. Los términos *concepciones de los estudiantes* se usan para denotar los conocimientos que están de acuerdo con los significados aceptados y *concepciones alternativas* es utilizado para describir al conocimiento que difiere de aquél que se plantea para ser aprendido. Estos términos fueron adoptados ya que enfatizan lo que los estudiantes realmente saben y no lo que no saben, e inducen al lector a ver los procesos de aprendizaje desde el punto de vista de los estudiantes.

Por otra parte, desde el punto de vista didáctico las concepciones alternativas no pueden permanecer indefinidamente en la mente de los estudiantes; debieran sufrir transformaciones como consecuencia de la puesta en práctica de diseños instruccionales. No obstante los investigadores advierten que algunas concepciones alternativas son resistentes al cambio y otras no. Respecto del cambio conceptual Pozo (1996) plantea que éste se produce en las condiciones siguientes:

- El aprendizaje de conceptos científicos no consiste sólo en reemplazar unas ideas cualesquiera por otras científicamente aceptadas, sino que en el aprendizaje existe una cierta conexión genética con la teoría alternativa del alumno y la teoría científica que se le pretende transmitir.

- Para que el alumno pueda comprender la superioridad de la nueva teoría es preciso enfrentarle a situaciones conflictivas que supongan un reto para sus ideas. Es decir, el alumno ha de darse cuenta de que su teoría previa es errónea en ciertas situaciones, en las que conduce a predicciones que no se cumplen. Al mismo tiempo, hay que hacerle ver también que la nueva teoría hace predicciones mejores.

- Por último, a partir de lo anterior, puede deducirse que la toma de conciencia por parte del alumno es un paso indispensable para el cambio conceptual. Los conceptos alternativos de los alumnos suelen ser implícitos. Un primer paso para su modificación será hacerlos explícitos mediante su aplicación a problemas concretos.

Otro elemento adicional de los cambios conceptuales radica en la intencionalidad de esos cambios. El cambio conceptual intencional involucra el intento deliberado de una persona por un cambio radical de un sistema conceptual a otro porque son seducidos por el poder de ese nuevo sistema conceptual, o porque perciben algún defecto profundo en su visión actual (Ferrari y Elik, 2003). Desde esta perspectiva, bajo condiciones del mundo real los nuevos y viejos conceptos son influenciados por los moderadores y mediadores del cambio conceptual. Los mediadores estructuran el enfoque completo que alguien posee de un concepto en particular; los moderadores determinan la facilidad o la dificultad con que el individuo intentará cambiar los conceptos existentes.

Con el recuento de las ideas anterior se evidencia el papel relevante que posee el estudio de las concepciones alternativas de los estudiantes sobre el tema del análisis de funciones. En la medida en que se desarrolle investigación encaminada a remover estas concepciones para sustituirlas por otras acordes con el conocimiento científico, estaremos en posibilidad de allanarles el camino a los estudiantes en situación escolar para que, cuando llegue el momento de enfrentarse con los conceptos propios de la matemática del cambio, cuenten con la estabilidad suficiente en sus concepciones para llevar a cabo el análisis gráfico de funciones de acuerdo con las concepciones aceptadas por la disciplina.

Metodología. La investigación que constituye la parte central de esta tesis, tiene como tema el estudio de los cambios conceptuales, en especial de las concepciones alternativas que surgen cuando se analizan o interpretan las gráficas de funciones elementales. La pregunta principal de la tesis consiste en indagar si esas concepciones son estables o cambiantes como consecuencia de un proceso instruccional intencionalmente diseñado para ello. Para encontrar respuesta a la pregunta planteada nos propusimos la realización del siguiente programa metodológico: indagación de los antecedentes; diseño de las actividades de incidencia e instrucción que a su vez consistieron en: un diagnóstico, formación de las condiciones de partida, diseño de situaciones didácticas, puesta en escena de las situaciones didácticas y análisis de los resultados; finalmente a la luz de los resultados de estas actividades se realizó el análisis de la estabilidad o cambio de las concepciones alternativas sujetas a estudio.

El diagnóstico consistió del diseño, validación y aplicación de un cuestionario a los estudiantes que participaron en la puesta en escena del diseño instruccional; su propósito fue explorar sus concepciones alternativas. La formación de las condiciones de partida incluyó el estudio del concepto de variable, dominio, rango, y graficación de puntos sobre el plano cartesiano. El diseño para ser utilizado en la incidencia instruccional incluyó todas las actividades relativas a la primera parte del libro: *Una introducción a la derivada a través de la variación*, del Dr. Crisólogo Dolores, ampliado y enriquecido con ambientes gráficos. A lo largo de la puesta en escena del diseño instruccional se tomaron los datos para conocer el estado de las concepciones de los alumnos respecto del análisis gráfico de funciones. Habiendo finalizado la puesta en escena del diseño instruccional, se aplicó el post–test, a fin de estudiar los efectos ejercidos por la incidencia instruccional en la estabilidad o cambio las concepciones alternativas detectadas por el pre-test.

Finalmente esta tesis esta estructurada de una introducción y cinco capítulos. En la introducción de manera sintética describimos los aspectos esenciales de la investigación. En el capitulo I se hace una revisión de las investigaciones cercanamente relacionadas con el tema de estudio para conformar un estado del arte. El capítulo II está dedicado al marco teórico, y en éste se analizan los elementos teóricos esenciales que soportan este trabajo. El capítulo III es el espacio reservado para la descripción y análisis de los procesos metodológicos empleados para encontrar las respuestas al problema de la investigación. En el capítulo IV se encuentra un análisis de los resultados encontrados en la investigación y en el Capítulo V se encuentran las conclusiones centradas en el análisis de la estabilidad o cambio de las concepciones alternativas estudiadas.

Capítulo I

ESTADO DEL ARTE

El estado del arte que aquí se presenta fue elaborado mediante revisión y análisis de artículos de investigación y de la currícula de la matemática escolar relativa al análisis de funciones. Respecto de los artículos de investigación la revisión y análisis se centró en la identificación de los objetivos que las guiaron, la metodología utilizada, las condiciones en que fueron realizadas y los resultados obtenidos en cada una de ellas. En la revisión de los planes y programas, atendimos al tema del análisis de funciones, los temas relacionados, el tratamiento sugerido y el enfoque en el que se enmarcan.

1.1 El análisis de funciones y la graficación en planes y programas de estudio

En la escuela primaria mexicana los contenidos de matemáticas incorporados al currículum se articulan en seis ejes: los números, sus relaciones y sus operaciones; medición; geometría; procesos de cambio; tratamiento de la información; predicción y azar. La variación y el cambio se incluye en el eje *Procesos de Cambio*; éste se inicia con situaciones sencillas en el cuarto grado y se profundiza en los dos últimos grados. En él se abordan fenómenos de variación proporcional y no proporcional. El eje conductor está conformado por la lectura, elaboración y análisis de tablas y gráficas donde se registran y analizan procesos de variación. Se culmina con las nociones de razón y proporción, las cuales son fundamentales para la comprensión de varios tópicos matemáticos y para la resolución de muchos problemas que se presentan en la vida diaria.

En la escuela secundaria los programas están organizados en cinco áreas: Aritmética, Álgebra, Geometría, Presentación y Tratamiento y Nociones de Probabilidad. Como se puede ver, el eje procesos de cambio iniciado en la escuela primaria ya no aparece. No obstante los temas relativos a la variación y a las funciones se encuentran integrados a las áreas de aritmética, preálgebra, presentación y tratamiento de la información y álgebra. En el primer grado los contenidos matemáticos incluyen el estudio de razones y proporciones, en preálgebra se inicia el manejo de literales y se trabaja en la elaboración de tablas y gráficas construidas a partir de un enunciado, de situaciones extraídas de la geometría, la física, de datos recolectados por los alumnos, en la estadística, la economía, las diversas ciencias y en la vida cotidiana. Además se trabaja con la utilización de tablas o gráficas para explorar si dos cantidades varían proporcionalmente o no. En segundo año, se trabaja con la iniciación al lenguaje algebraico, ecuaciones lineales, el plano cartesiano, sistemas de ecuaciones lineales y, en la parte correspondiente a Presentación y Tratamiento de la Información se trabaja con ejemplos para introducir la noción de función como una relación entre dos cantidades por medio de la descripción de fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas. También se trata el paso, en casos sencillos, de una tabla o una gráfica a una fórmula (funciones de las formas $y = mx$, $y = mx + b$, $xy = k$). En tercer año, en la parte de álgebra, es en donde se aborda el estudio del análisis de funciones, el estudio en casos sencillos del comportamiento local de una función; estudio de familias de gráficas de la forma $y = mx + b$.

En los planes de estudio del bachillerato, el análisis de funciones se aborda en el curso de Cálculo Diferencial. En este curso incluye la clasificación de funciones; identificación del dominio y el rango; graficación de funciones; continuidad de una función; límites y continuidad de una función; derivación de funciones; análisis de funciones; funciones crecientes y decrecientes; máximos y mínimos relativos (aplicación del criterio de la primera derivada; aplicación del criterio de la segunda derivada); Aplicaciones (aplicación del proceso de determinación de máximos y mínimos de una función, para graficar funciones y resolver problemas de optimización.

En el programa de Matemáticas I de todas carreras de ingeniería de los institutos de la Dirección General de Institutos Tecnológicos de la SEP (DGIT) el análisis de funciones ocupa un lugar importante en la Unidad I (Introducción al Cálculo): Recta numérica y concepto de intervalo, Valor absoluto, Desigualdades, Funciones y sus gráficas, Clasificación y operación de funciones. También se estudian en la Unidad II (Límites y Continuidad) las funciones trascendentes y algebraicas, funciones continuas; en la Unidad IV (Aplicaciones de la Derivada) se estudia la derivada como razón de cambio, ecuaciones de la recta tangente y la normal, máximos y mínimos de funciones, criterios de la primera y segunda derivada.

Como puede apreciarse es manifiesto el interés en los programas, por el estudio de las funciones y sus gráficas, desde la primaria, la secundaria, el bachillerato y la universidad. Aunque es más amplio este estudio en el bachillerato y la universidad. En ellos se incluye el uso de la derivada para la realización de tal estudio, pero entre lo que declaran los programas y lo que manifiestan saber los estudiantes (incluso los profesores) no existe correspondencia. En el siguiente epígrafe exhibiremos algunas evidencias que soportan esta afirmación.

1.2 Los resultados de trabajos de investigación sobre las concepciones alternativas acerca del análisis de funciones

1.2.1 Investigaciones internacionales

Mevarech y Kramarsky (1997) investigaron en torno de las concepciones alternativas de los estudiantes relacionadas con la construcción de gráficas de funciones con 92 alumnos de 2º año de secundaria cuya edad promedio fue de 13.7 años. Los estudiantes fueron examinados antes y después de someterse a la enseñanza formal de graficación, incluida en el plan de estudios de las escuelas israelitas de Tel Aviv. El objetivo de su investigación fue identificar las concepciones y las concepciones alternativas que los estudiantes tenían respecto de la construcción de gráficas para representar situaciones cotidianas y examinar la resistencia de estas concepciones alternativas ante la enseñanza formal acerca de la graficación.

A los estudiantes se les pidió construir gráficas para representar situaciones descritas en cuatro distintos enunciados. Se incluye el primero de ellos a continuación:

> A los sujetos se les pidió construir gráficas para representar las siguientes situaciones:
>
> Sara, Rivka, Raquel y Lía discutieron acerca de si o no sus éxitos en los exámenes se relacionaban con la cantidad de tiempo que ellas se preparan para las pruebas.
>
> A. Sara dice que si ella estudia más sus calificaciones son mejores. Por favor, construye una gráfica que represente lo que dice Sara.
> B. Rivka sostiene que no importa cuánto estudie, siempre obtiene las mismas calificaciones. Por favor construye una gráfica que represente lo que dice Rivka.
> C. Raquel, como siempre, dice que cuando ella estudia cerca de tres horas, sus calificaciones son mejores, pero si estudia más allá de tres horas, se cansa y sus calificaciones son más bajas. Por favor construye una gráfica que represente lo que dice Raquel.
> D. Lía confesó que para ella, generalmente cuando más estudia, sus calificaciones decrecen. Por favor, construye una gráfica que represente lo que dice Lía.

Los estudiantes no habían pasado por una enseñanza formal de graficación y fueron examinados dos veces: antes y después de la unidad de aprendizaje: habilidades de graficación, que forma parte del programa de estudios del curso.

Las investigadoras encontraron varias concepciones alternativas acerca de a función creciente, función decreciente, función constante y función curvilínea e incluso ponderaron su estabilidad y cambio (ver Tabla 1.1). Los resultados de la investigación mostraron que la idea estereotípica de una gráfica, con un sistema de ejes y una línea que sube y baja, pero en donde la gráfica no muestra la información descrita en la narración, el uso de flechas y escaleras para indicar la dirección de la covariación, y el uso de líneas o curvas para conectar las marcas de los ejes (que antes de la instrucción en conjunto ascendieron al 10%, y por ello no se incluyen en la tabla anterior) desaparecieron casi completamente después de que los estudiantes fueron expuestos a la instrucción formal, mientras que las gráficas de un solo punto, series de gráficas, y la conservación de la forma creciente bajo cualquier condición, fueron resistentes a cambiar bajo instrucción tradicional en relación a la graficación. Este resultado sugiere que el aprendizaje relacionado con las convenciones de la representación gráfica cartesiana no pudo mejorar esas concepciones alternativas que estaban enraizadas en fuertes bases experenciales.

Número de estudiantes (porcentajes en paréntesis) que mostraron concepciones correctas y concepciones alternativas antes y después de la instrucción sobre graficación

	Antes de la instrucción	**Después de la instrucción**
Función creciente		
Correcta	57 (59)	77 (83)
Concepción alternativa:		
Gráfica de un punto	22 (24)	13 (14)
Series de gráficas	23 (25)	15 (16)
Conservación de la forma creciente	–	–
Función constante		
Correcta	52 (56)	75 (81)
Concepción alternativa:		
Gráfica de un punto	24 (26)	17 (18)
Series de gráficas	25 (27)	15 (16)
Conservación de la forma creciente	8 (9)	3 (3)
Función curvilínea		
Correcta	35 (38)	56 (60)
Concepción alternativa:		
Gráfica de un punto	20 (21)	19 (20)
Series de gráficas	41 (44)	25 (27)
Conservación de la forma creciente	4 (5)	2 (2)
Función decreciente		
Correcta	51 (55)	61 (66)
Concepción alternativa:		
Gráfica de un punto	21 (22)	16 (17)
Series de gráficas	22 (23)	13 (14)
Conservación de la forma creciente	7 (7)	10 (11)

Tabla I.1

Por otro lado, Janvier (1998) desarrolló una investigación para abordar el estudio de una dificultad importante encontrada por los estudiantes avanzados orientados a la ciencia con un tipo particular de gráfica que tiene que ver con fenómenos que involucran el tiempo y el espacio. A fin de obtener las respuestas que los estudiantes proporcionarían, el investigador aplicó un test de 5 problemas y analizó los procesos de razonamiento subyacentes, infiriendo las causas atribuibles a su entrenamiento. Trabajó con una población de 226 estudiantes de ciencias de college que tomaban un curso de precálculo. En el tercer problema, se les pidió que elaboraran una gráfica en donde se mostrara la variación del tiempo tomado por un aeroplano volando de Montreal a París con respecto a la velocidad. Algunas producciones de los estudiantes se muestran a continuación (Ver Fig. 1.1).

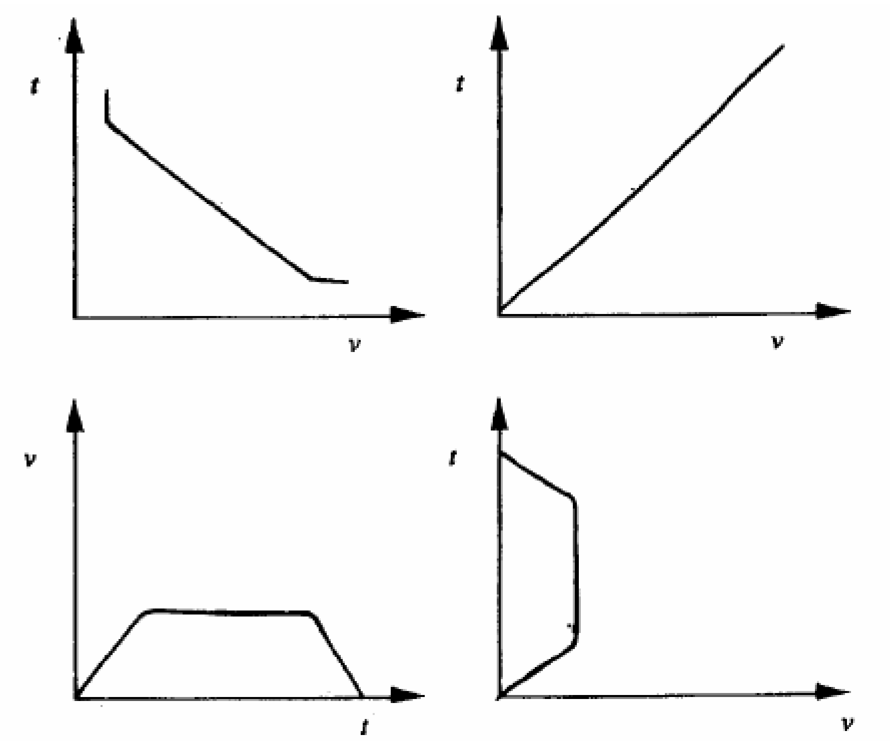
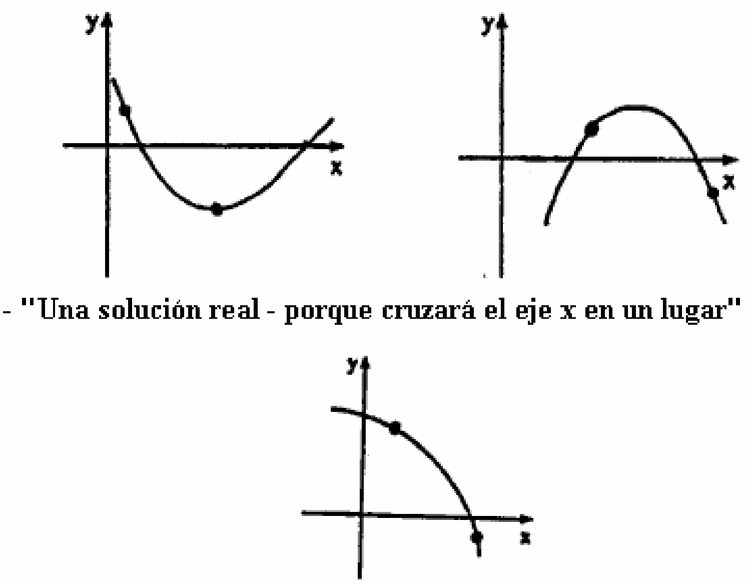


Fig. I.1

En los resultados que obtuvo, Janvier identificó la aparición de la *crónica*, a la que definió como un obstáculo epistemológico que surge durante el análisis o la construcción de una gráfica y consiste en que los enunciados de los problemas son transformados por el solucionador para que encajen con la interpretación que él hace, aún cuando deba intercambiar los ejes. En algunas de las gráficas elaboradas por los estudiantes (Fig. 1.1), la presencia de la crónica se tradujo en la manifestación de una concepción alternativa consistente en graficar la información proporcionada colocando la variable tiempo en el eje horizontal y la variable velocidad en el eje vertical, representando así a la velocidad en función del tiempo, no obstante que el gráfico solicitado en el enunciado debía mostrar la variación del tiempo respecto de la velocidad del avión. Bosquejar una gráfica "cualitativa", menciona el autor, no es un ejercicio ordinario en la mayoría de la currícula de matemáticas. De hecho, las gráficas en matemáticas usualmente van con sus ecuaciones. La ausencia de valores numéricos arrastra una amplia variedad de respuestas. De lo anterior Janvier concluyó que algunas veces los estudiantes (o maestros) comienzan haciendo la pregunta correcta, pero durante la ejecución de la solución son atraídos por algunas herramientas de solución que anteriormente fueron una habilidad de interpretación eficiente pero que, para el problema en cuestión, ya no lo son.

Por otra parte, la investigación realizada por Even (1998) enfoca su atención en el entrelazamiento entre la flexibilidad en el movimiento de una representación a otra de una función, con otros aspectos del conocimiento y la comprensión. Participaron 152 estudiantes de matemáticas de college en su última etapa de educación, prospectos de profesores de matemáticas en su última etapa de preservicio formal de preparación. Se aplicó un cuestionario que incluía problemas de matemáticas no estándar, asumiéndose que en condiciones no estándar, los estudiantes revelarían más claramente las fronteras de sus concepciones. Uno de los problemas aplicados en esta investigación se muestra enseguida.

Problema 1
Si substituyes 1 para x en $ax^2 + bx + c$ (a, b y c son números reales), obtienes un número positivo. Substituyendo 6 da un número negativo. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $ax^2 + bx + c$? Explica.



Respuestas al Problema 1: Enfoque gráfico para el Número de Soluciones Reales

Fig. I.2

Solo 14% de los 152 estudiantes de la primera fase lo resolvieron correctamente, consideraron la función correspondiente a $y = ax^2 + bx + c$, cambiaron las representaciones, y se refirieron a una gráfica mentalmente o realmente la bosquejaron. La mayoría de los estudiantes (cerca del 80%) no mostraron intento alguno por ver otra representación del problema. Durante la entrevista, a siete estudiantes que no resolvieron correctamente el problema cuando contestaron el cuestionario se les preguntó si podrían usar las gráficas para hacerlo. Para tres de ellos esta simple "sugerencia" fue suficiente para hacer la conexión entre las dos representaciones. Los otros cuatro sujetos no usaron la sugerencia de graficar, no hicieron la conexión entre las dos representaciones y no resolvieron el problema. La representación simbólica pareció dominar su pensamiento y fueron incapaces de cambiar la forma de pensar acerca del problema.

Los datos presentados aquí sugieren que los estudiantes que pueden fácil y libremente usar un análisis global de los cambios en una representación gráfica tienen una mejor y más poderosa comprensión de las relaciones entre las representaciones gráfica y simbólica que la gente que prefiere revisar solo algunas características locales y específicas. Es tentador generalizar esta conclusión, dice el autor, respecto del uso de una visión global de la función y una mejor comprensión del significado de las gráficas y las funciones en general. Sin embargo, se presentaron varias situaciones durante la investigación, donde un enfoque puntual fue más poderoso, porque proporcionó información de una solución completa o de una solución parcial que ayudó a la construcción de una solución completa. Even concluye, que las concepciones de los estudiantes respecto del análisis de las funciones están relacionadas con las diferentes formas de enfocarlas o concebirlas. Manejar funciones puntualmente significa graficar, leer o trabajar con puntos discretos de una función ya sea porque se está interesado en algunos puntos específicos solamente, o porque la función está definida sobre un conjunto de puntos. En contraste, algunas veces los estudiantes necesitan considerar la función en una forma global para poder observar su comportamiento.

Por otra parte, Yerushalmy & Shternberg (1998) investigaron con estudiantes que ya habían cursado cálculo con la finalidad de explorar el poder del currículum para alentar a los estudiantes a construir el concepto de función para fundamentar el aprendizaje del álgebra. Plantearon tres problemas, con los que intentaron mostrar un nuevo rol de la representación visual de la función, como modelo para la construcción de representaciones simbólicas, con el apoyo de la tecnología MBL (Laboratorio Basado en Microcomputadoras) para ayudar a vincular las representaciones. Intentaron diseñar un ambiente de aprendizaje que ofreciera a los estudiantes una presentación coherente del concepto de función, enfocándose sobre los procesos que alentaran la experimentación de objetos matemáticos relacionados con las representaciones de las funciones. El enunciado del segundo problema propuesto por los investigadores a los estudiantes, es el siguiente:

> Un cocinero tiene una porción grande de carne a una temperatura que debe ser cocinado tan rápidamente como sea posible. Él tiene a su disposición un horno convencional y un horno de microondas. En el horno de microondas la temperatura se incrementa a una razón constante, y en el horno convencional se incrementa a una razón variable. Usando los resultados de una primera prueba de cocción, el cocinero sabe que aunque la temperatura de la carne en el horno convencional sea siempre más alta que en el horno de microondas, el tiempo de cocción para esta pieza de carne sería de dos horas en uno o en otro horno. ¿Podría ser que el tiempo de cocción sea menor a dos horas usando alguna combinación de estos dos hornos?

Los estudiantes ya habían cursado álgebra, precálculo, y cálculo. Sin embargo, en ninguno de sus cursos se habían enfocado en la modelación o en situaciones de la realidad. La mayoría de los entrevistados intentaron representar la situación simbólicamente pero no pudieron, ya que el problema no incluía ningún dato específico. Finalmente, solo dos estudiantes de séptimo grado, a diferencia de los estudiantes de cálculo de la primera muestra, inmediatamente acudieron a la representación gráfica de la situación para describirla y analizarla. Enfocándose sobre la razón de cambio como clave para la explicación del comportamiento de un fenómeno, los estudiantes tomaron un enfoque gráfico no específico para la solución del problema y tuvieron un gran progreso al representar visualmente la situación usando un lenguaje icónico.

Analizando la contribución de la tecnología MBL a la construcción de las representaciones de la función, Yerushalmy & Shternberg sostienen que los enlaces entre una situación y su relación visual (y en una etapa posterior, el enlace entre símbolos y situaciones) aún son muy frágiles en estudiantes que ya han cursado cálculo. En cambio, cuando se incluyen las ideas presentadas en este artículo en un currículum de preálgebra, dan una nueva dimensión a los problemas usados en contexto. Estas ideas sugieren formas para construir una representación simbólica de una función que modele una situación enlazando gradualmente lo hecho por la computadora con la representación formal de la función. Este enlazamiento o vinculación de diferentes representaciones de una función a través de la tecnología, propicia la generación de situaciones conflictivas que explicitan las concepciones alternativas de los estudiantes relativas a las gráficas de funciones y a sus representaciones simbólicas.

La investigación de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2002) se desarrolló en torno de la habilidad para analizar aspectos covariantes de eventos dinámicos de 20 estudiantes estadounidenses que recientemente habían terminado un curso de cálculo de 2º semestre con las más altas calificaciones. Estos estudiantes representaban la mayoría de los estudiantes que habían obtenido la nota más alta de cinco diferentes secciones, con un profesor distinto para cada sección. Los materiales que usaron en la enseñanza fueron tradicionales, y las clases fueron tradicionales. No usaron calculadoras ni en su curso ni en sus exámenes. Los 20 estudiantes recibieron pago por el tiempo que invirtieron en contestar el test. Seis de estos estudiantes fueron subsecuentemente invitados a participar en una entrevista clínica de 90 minutos por la que también recibieron un pago. Una noción fundamental para este estudio lo constituyó el razonamiento *covariacional*, el que fue definido por los autores como las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variantes mientras se atiende a las formas en las que ellas cambian entre sí.

Uno de los problemas planteados a los estudiantes en esta investigación fue el siguiente:

Dada la gráfica de la razón de cambio de la temperatura a través de un periodo de 8 horas, construir un bosquejo de la gráfica de la temperatura en ese periodo. Asumir que la temperatura en t = 0 es 0 grados Celsius.

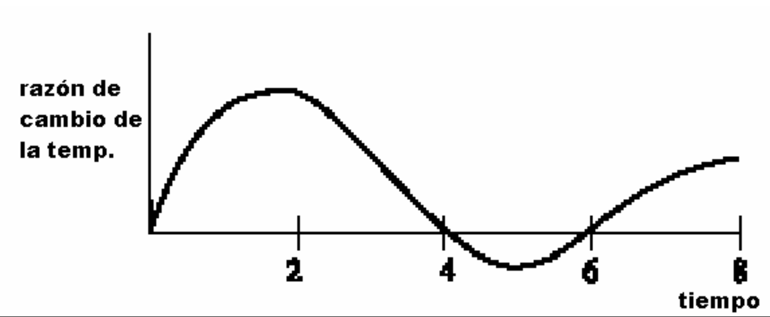


Fig. I.3

Los resultados obtenidos se registran en la Tabla I.2:

Resultados Cuantitativos del Problema de la Temperatura

Tipo de Respuesta	Número de estudiantes que proporcionó cada respuesta
Construyeron una gráfica estrictamente cóncava para todo el dominio	1
Construyeron una gráfica igual a la proporcionada	5
Omitieron cambios en la concavidad en $t = 2$ y $t = 5$	6
Invirtieron la concavidad	4
Todos los aspectos de la gráfica fueron aceptables	4

Tabla I.2

En resumen los resultados a los que llegaron estos investigadores son los siguientes:

- Los estudiantes exhibieron comportamientos que sugirieron que fueron capaces de coordinar cambios en la dirección y cantidad de cambio de la variable dependiente en coordinación con un cambio imaginado de la variable independiente.
- Los estudiantes exhibieron conductas que sugirieron su incapacidad para coordinar consistentemente cambios en la razón promedio de cambio con cambios fijos en la variable independiente para el dominio completo de la función.

- Su capacidad para exhibir conductas que sugirieran coordinación entre la razón instantánea de cambio con cambios continuos en la variable independiente no fue consistente.
- Los estudiantes tuvieron dificultad para explicar porqué una curva es suave y qué representa un punto de inflexión en la gráfica de una función

Todo lo anterior, a juicio de los investigadores, planteó la necesidad de monitorear el desarrollo de las comprensiones de los estudiantes acerca de las funciones y sus habilidades de razonamiento covariacional antes y durante el estudio del cálculo.

Las investigaciones arriba reseñadas ofrecen una variada visión de las dificultades que los estudiantes de diferentes niveles educativos enfrentan cuando se ven precisados a resolver problemas que involucran análisis de funciones y que requieren el uso de diferentes registros de representación a fin de plantear una aproximación adecuada a los mismos, de suerte que puedan llegar a su solución.

1.2.2 Investigaciones nacionales

Hitt (1996) reporta los resultados de una investigación realizada con 30 profesores de matemáticas de enseñanza media a quienes se les aplicaron 14 cuestionarios, que tenía como objetivo identificar las dificultades que presentaban en la articulación de diferentes sistemas semióticos de representación del concepto de función y para identificar los errores en el uso de tales sistemas y las repercusiones en la enseñanza. Las características principales de cada cuestionario eran diversas. En particular el Cuestionario 10, trató sobre la articulación entre el sistema semiótico de representación gráfico y un contexto real (dibujo de un recipiente).

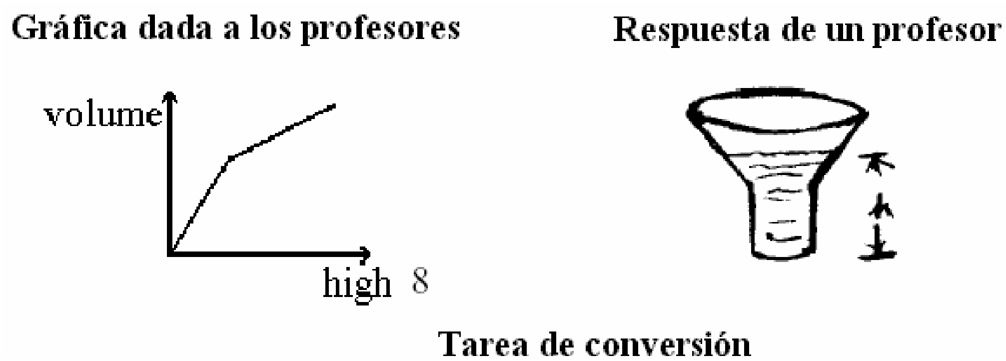


Fig. I.4

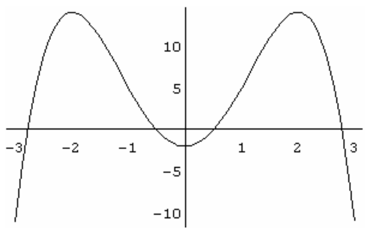
En los resultados obtenidos, el autor, identificó la presencia de una concepción alternativa en los profesores, referida por el autor como *traslación icónica*, (Monk, 1992) que les llevó a relacionar la forma continua del trazo de la gráfica con la forma del recipiente, encontrando que la forma de la gráfica y no el estudio analítico de la información contenida en ella, determinó la forma del recipiente.

Por otra parte, Dolores y Catalán (2000) desarrollaron una investigación trabajando con una población de 24 estudiantes de bachillerato tecnológico. Su objetivo fue desarrollar pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar, especialmente el requerido para deducir la ecuación de la recta a partir de su comportamiento variacional y viceversa, a partir de su ecuación deducir su comportamiento variacional. Utilizaron 7 sesiones de clase de 50 minutos y al término de ellas se aplicó un cuestionario con el propósito de medir algunos aspectos indicativos del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Respecto de la primera fase, en donde se utilizaron las gráficas como elemento visual principal para determinar los cambios, la mitad de los participantes los lograron determinar (aunque con inconsistencias), particularmente cuando las rectas decrecían y los cambios de la variable dependiente eran negativos. En la fase verbal la mayoría de los estudiantes mostraron escasa comprensión de las expresiones de la forma $y = mx + b$. Solo la cuarta parte dio muestras de interpretar esta simbología y representarla gráficamente, aunque los investigadores no se mostraron seguros de que en sus interpretaciones los estudiantes hubieran utilizado la relación de variación directamente proporcional que encierra el coeficiente *m*. En general, Dolores y Catalán encontraron que los participantes mostraron escasa capacidad para visualizar y analizar gráficas, siendo más proclives a realizar operaciones.

En la misma dirección que en el caso anterior Dolores, Solache y Díaz (2002) abordan el problema del escaso desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes que terminan el bachillerato y de los que principian la universidad, especialmente el que se relaciona con los conceptos, procedimientos y relaciones relativos a las variables, funciones, derivadas, y análisis del comportamiento variacional de funciones elementales. Se plantearon como objetivo investigar la influencia que ejercen las situaciones y secuencias didácticas del cuaderno didáctico *Una introducción a la derivada a través de la variación*, en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes de bachillerato en situación escolar. La experiencia pedagógica la concretaron en un curso ordinario de Matemáticas IV, Cálculo Diferencial, con dos grupos de estudiantes de bachillerato tecnológico. Al finalizar la experiencia, los investigadores encontraron que, el 47.8% de los estudiantes confundió la noción de función positiva con la noción de función creciente y además presentaron dificultades en el manejo de la notación de intervalos. El 56% confundió la noción de función negativa con la de función decreciente, presentó dificultades en el manejo de la notación de intervalos y además asociaron el decrecimiento con el menor valor de la ordenada. El 52% de los estudiantes mostraron confusiones tales como: contestar que en donde $f(x)$ es cero $f(x)$ tiene un máximo, y otros dieron como máximo a la ordenada máxima sin mencionar a qué valor de x correspondía. El 56% de los estudiantes evidenciaron tener clara la idea del mínimo de la función. El 21.7% confundieron intervalos con puntos.

En otro trabajo enfocado más a la identificación de concepciones alternativas en profesores, Dolores y Guerrero (2002) realizaron un estudio exploratorio sobre el comportamiento variacional de funciones elementales a través de sus representaciones gráficas y analíticas. Específicamente, la problemática que en esta investigación se abordó tuvo que ver con la escasa correspondencia que establecen los profesores del nivel medio superior, entre las representaciones analíticas sobre el comportamiento de las funciones elementales y sus gráficas cartesianas. Dolores y Guerrero trabajaron con una población de 16 profesores de matemáticas con formación de ingenieros o de normal superior, que impartían clases en instituciones de educación media superior con modalidad de estudios bivalente. A cada uno de ellos se le aplicó un cuestionario. El primero de los reactivos del cuestionario aplicado, se muestra enseguida:

1. La gráfica siguiente corresponde a la función $f(x)$. Subraye la opción u opciones que satisfagan la pregunta: ¿Para qué intervalos se cumple que:



1.A) $f(x + h) - f(x) > 0$, para $h > 0$? a) $-3< x < -2$ b) $-2< x < 0$ c) $0 < x < 2$ d) $-3< x < 0.5$ e) otro: ________

1.B) $f(x + h) - f(x) < 0$, para $h > 0$? a) $-3< x < -2$ b) $-2< x < 0$ c) $0 < x < 2$ d) $-0.5< x < 0.5$ e) otro:________

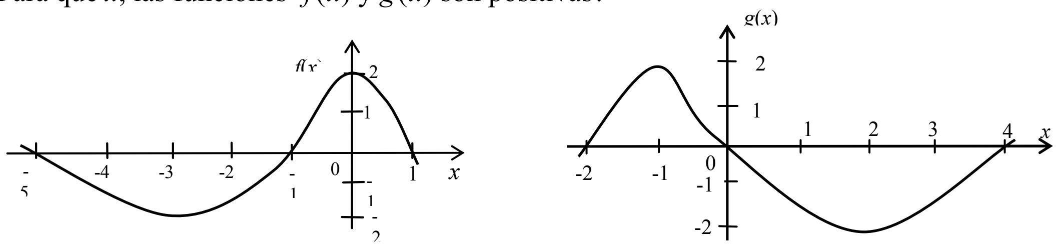
1.C) $f(x + h) - f(x) = 0$, para $h > 0$? a) $x = -3$ b) $x = -0.5$ c) $x = 0$ d) $x = 2$ e) otro: _________

Fig. 1.5

Los resultados que obtuvieron fueron los siguientes: a) los profesores asociaron la expresión: $f(x + h)-f(x) = 0$, (con f continua y $h > 0$ preferentemente *pequeña*), con los puntos de corte de la gráfica con el eje de las x; b) análogamente, existió tendencia a asociar la condición: $f(x + h)-f(x)>0$, con la región donde la gráfica de la función estaba por arriba del eje de las x, región donde se cumple que $f(x)>0$, y por último, los profesores asociaron la condición: $f(x + h)-f(x)<0$, con la región donde la gráfica de la función estaba por debajo del eje de las x, región donde se cumple que $f(x)<0$.

Interesado en estudiar la presencia de estas concepciones en poblaciones de estudiantes, futuros profesores de matemáticas, Dolores (2002) realizó una investigación con siete estudiantes al estilo de pre–experimentos con validación interna *pre−post*. Los estudiantes tenían alguna información previa acerca del análisis de funciones mediante la derivada aunque el diagnóstico reveló muchas deficiencias. Al principio se diseñó y aplicó un cuestionario de diagnóstico para detectar en los participantes sus concepciones, y después se trabajó con ellos durante un periodo de cuatros semanas, un curso−taller de resolución de una serie de ejercicios y problemas relativos al análisis de funciones; al término del curso se aplicó un cuestionario final para explorar el estado de las concepciones alternativas detectadas al principio. Uno de los reactivos incluidos en el cuestionario, que se aplicó antes y después de la instrucción, es el siguiente:

¿Para qué x, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son positivas?



A) De 0 a 1 B) De −3 a 0 C) De −1 a 1 D) De −5 a 0 E) De −5 a −1 F) Otras

Fig. 1.6

Las concepciones alternativas identificadas por Dolores en los estudiantes fueron las siguientes:

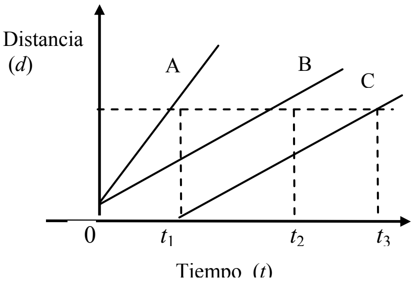
a) Más de la mitad de los estudiantes concibieron que una función es positiva si su gráfica está ubicada en la región donde las x (abscisas) son positivas sin importar que los puntos de la gráfica estuvieran en el primero o cuarto cuadrantes. Parecieron sólo atender al signo de las abscisas para tomar la decisión. De forma similar, la mayoría de los estudiantes concibieron a una función como negativa, si su abscisa es negativa.

b) Respecto de los intervalos en donde una función es creciente o es decreciente, en las repuestas que dieron los estudiantes se observó claramente la tendencia a asociar las regiones de las gráficas de las funciones donde éstas son positivas con la idea de crecimiento y las regiones de las gráficas de las funciones donde éstas son negativas con la idea de decrecimiento.

c) Cuando se exploraron las concepciones de los estudiantes acerca de la noción de estabilidad, se manifestó cierta preferencia por indicar que en $x = 0$ la función se *estabiliza*, aunque fue más notoria la relación que establecieron entre este concepto y los ceros de la función

En la misma dirección que la investigación anterior, Dolores, Alarcón y Albarrán (2002) investigaron las concepciones alternativas acerca de la *lectura* de las gráficas pero ahora con gráficas que representaban movimiento físico. La exploración fue realizada sobre la base de un cuestionario que fue aplicado a estudiantes y profesores de física, participaron 80 estudiantes del 3er. grado de Secundaria, 100 del 3er. grado de Preparatoria y 15 estudiantes universitarios; por parte de los profesores participaron: 13 de secundaria y 40 profesores de física del nivel preparatoria, todos ellos de escuelas ubicadas en la capital del Estado de Guerrero y poblaciones circundantes. El cuestionario se diseñó en el marco de la física y presuponiendo que, por un lado, las gráficas cartesianas son representaciones a partir de las cuales se pueden explorar las concepciones de profesores y alumnos acerca del movimiento físico al plantearles preguntas problemáticas sobre ellas; por otro lado, para dar respuesta a las preguntas problemáticas se requirió poner en juego el pensamiento visual y los conocimientos de física y matemáticas de las personas cuestionadas. El cuestionario estuvo compuesto por el planteamiento de seis situaciones, cada una de las cuales estuvo acompañada por una o varias gráficas (a continuación mostramos uno de los reactivos aplicados):

Situación 3. Las preguntas que corresponden a esta situación están formuladas respecto a las gráficas que abajo aparecen. Éstas muestran la variación de las distancias recorridas por los automóviles A, B y C, respecto del tiempo. Las preguntas se refieren a las velocidades instantáneas y para contestarlas se requiere escribir falso (F) o verdadero (V). Al lado derecho de la gráfica aparecen las proposiciones a juzgar.



a) La velocidad del auto B en t_2 es igual que la de C en el mismo punto ....( )

b) El auto B arrancó con mayor velocidad......................( )

c) La velocidad del auto A en t_1 es igual que la de B en t_2 ( )

Fig. I.7

Las concepciones alternativas encontradas en este trabajo por Dolores, Alarcón y Albarrán son las siguientes:

Los estudiantes concibieron la condición *mayor velocidad media,* como asociada a: la representación gráfica de la ordenada de mayor altura o con el intervalo al que le correspondían las ordenadas de mayor altura; con el segmento rectilíneo de mayor longitud de la gráfica; el segmento rectilíneo horizontal al eje de las *t* (quizá interpretando la gráfica como el *corte transversal* de una carretera que cuando es *plana* el automóvil debe desplazarse con mayor velocidad); con el segmento de recta de mayor pendiente. Esta última concepción casi no se manifestó en estudiantes de secundaria; fue más visible en los universitarios; la proclividad a manifestar las restantes fue más marcada en los de secundaria. En cuanto a los profesores las tendencias notadas en los estudiantes se conservaron, solo que hubo preferencia por el intervalo de las ordenadas de mayor altura; más de la mitad de los profesores de preparatoria la asociaron con el segmento de recta de mayor pendiente.

En cuanto a las *estimaciones de la velocidad media* cuando la gráfica era un segmento rectilíneo paralelo al eje de las *t*, las concepciones alternativas encontradas la asociaron a una la magnitud de la ordenada; otros operaron con los extremos o el medio del intervalo de tiempo con la ordenada constante correspondiente (los multiplicaron o dividieron), ningún estudiante, a excepción de algunos de preparatoria, estimaron que la velocidad fuera de 0 km/h. En los profesores las tendencias fueron similares, aunque la proclividad a asociar la velocidad con la ordenada fue más acentuada en los profesores de secundaria; solo algunos profesores de preparatoria estimaron que la velocidad fuera cero atendiendo quizá a la pendiente de la recta. Cuando el segmento rectilíneo de la gráfica tenía pendiente positiva los estudiantes y profesores asociaron la velocidad media con la magnitud de las ordenadas de los extremos o de la ordenada intermedia, aunque tuvieron preferencia por la ordenada de mayor altura, operaron con la magnitud de la ordenada mayor dividiéndola entre la magnitud de su correspondiente abscisa. Cuando el segmento rectilíneo de la gráfica tenía pendiente negativa afloró una amplia diversidad de concepciones. Las manifestaciones encontradas en los profesores fueron semejantes, aunque muy pocos de ellos obtuvieron la velocidad negativa que cumpliera con las condiciones gráficas mencionadas.

Respecto de la posibilidad de que *dos gráficas*, una de coordenadas tiempo–distancia y otra coordenadas velocidad–tiempo, referidas al movimiento rectilíneo uniforme, *pudieran representar al mismo movimiento*; los estudiantes universitarios y profesores de preparatoria mayoritariamente opinaron que no. La tendencia apuntó a que a mayor nivel educativo corresponden concepciones menos consistentes acerca de la posibilidad de que representaciones gráficas de la velocidad y la distancia modelen a un mismo movimiento. Finalmente la gran mayoría, tanto de estudiantes como de profesores de física que contestaron el cuestionario, asociaron la gráfica cartesiana que se asemejaba a la *trayectoria* para el caso de la caída libre de los cuerpos. Este dato fue sintomático de la concepción que equipara a la trayectoria del movimiento físico con la gráfica cartesiana del mismo.

En un trabajo muy reciente que confirma varios de los hallazgos anteriores, Dolores (2003) centra la atención en las concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato que subyacen en las respuestas a preguntas sobre el análisis de funciones a través de sus gráficas. Una diferencia esencial en este trabajo respecto de los anteriores, es que el investigador fue ajeno al diseño y ejecución del tratamiento instruccional que recibieron los estudiantes examinados. Los cuestionamientos propuestos consisten en la determinación de las zonas o intervalos de crecimiento, decrecimiento, estabilización y la coordinación de propiedades simultáneas tanto de ubicación en el plano como de comportamiento. La investigación fue realizada en 40 estudiantes de bachillerato, justo después de haber estudiando el tema de graficación y análisis de funciones, sin usar derivadas. Las concepciones alternativas encontradas son las siguientes:

Función positiva o negativa. Mayoritariamente los estudiantes sugieren que sólo en la región sombreada de la Fig. I.8 la función $f(x)$ es positiva; indican que pasa lo mismo en la región sombreada de la Fig. I.9. Hay una tendencia a asociar la idea de función positiva si su gráfica está ubicada en la región donde las x son positivas sin importar que los puntos de la gráfica estén por *arriba* o por *debajo* del eje *x*, sólo atienden al signo de las abscisas para tomar la decisión.

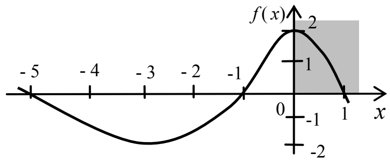


Fig. I.8. Concepción alternativa: los estudiantes prefieren el intervalo: $f(x) > 0$, para $0 < x < 1$

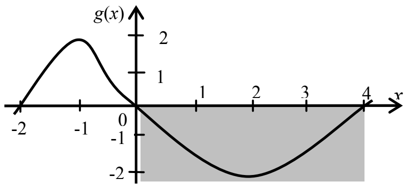


Fig. I.9. Concepción alternativa: $g(x) > 0$ para: $-1 < x < 1$

Las concepciones alternativas respecto de las funciones negativas siguen el mismo patrón. Para los estudiantes cierta función $f(x)$ es negativa preferentemente donde tiene abscisas negativas.

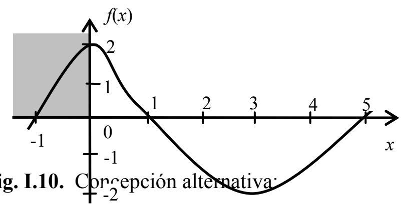


Fig. I.10. Concepción alternativa: $g(x) < 0$ para: $-1 < x < 0$

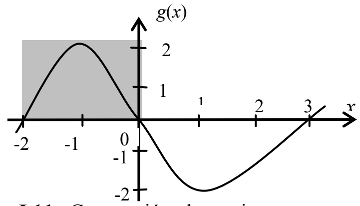


Fig. I.11. Concepción alternativa: $g(x) < 0$ para: $-1 < x < 1$

Función creciente o decreciente. Los estudiantes manifiestan tendencia muy marcada a relacionar a las funciones crecientes con aquella cuyas imágenes son positivas.

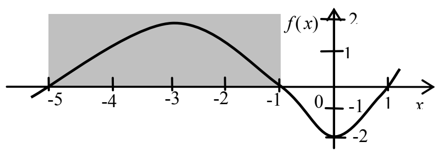


Fig. I.12. Concepción alternativa: $g(x)$ crece, para: $-5 < x < -1$

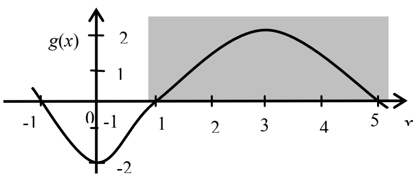


Fig. I.13. Concepción alternativa: $g(x)$ crece, para: $1 < x < 5$

De manera análoga las concepciones alternativas de los estudiantes para las funciones decrecientes son aquellas que asocian a los intervalos donde la gráfica está por *debajo* del eje *x*.

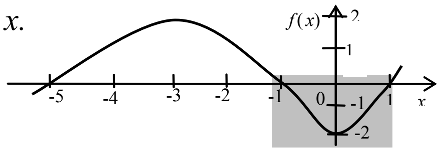


Fig. I.14. Concepción alternativa: $g(x)$ decrece, para: $-1 < x < 1$

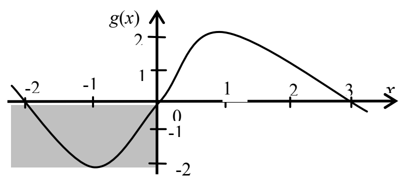


Fig. I.15. Concepción alternativa: $g(x)$ decrece, para: $-2 < x < 0$

El crecimiento es asociado con la gráfica que tiene imágenes de $f(x)$ positivas y análogamente el decrecimiento es asociado con la gráfica con imágenes negativas.

Función que no crece ni decrece. Los estudiantes tienen preferencia por asociar la propiedad de no crecimiento ni decrecimiento de una función con los puntos donde la gráfica corta al eje de las ordenadas o al eje de las abscisas.

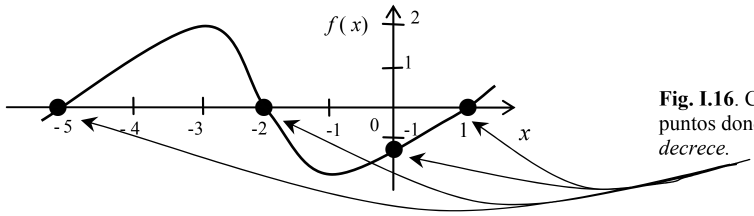


Fig. I.16. Concepción alternativa: puntos donde la función *no crece ni decrece.*

Función positiva y creciente. Prácticamente la totalidad de estudiantes entrevistados indican que la Fig. I.17a representa a una función positiva y creciente, pero sólo un tercio sugieren que la Fig. I.17b lo es; una cantidad más reducida (poco más de $\frac{1}{6}$ del total) aceptan que la Fig. I.17c reúne tales condiciones. Hay una tendencia marcada a no considerar función creciente y positiva si parte de su gráfica está ubicada en el segundo cuadrante (con abscisas negativas) aunque sea creciente. A continuación aparecen las gráficas seleccionadas en orden descendente de preferencia.

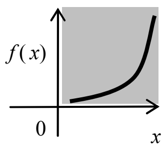


Fig. I.17a

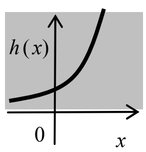


Fig. I.17b

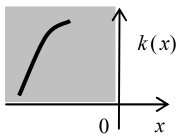


Fig. I.17c

Función positiva y decreciente. La gran mayoría de estudiantes prefiere la Fig. I.18a como la que representa a una función positiva y decreciente; un tercio de los entrevistados eligieron la Fig. I.18b y sólo un poco más de la sexta parte eligieron la Fig. I.18c. La gran mayoría de estudiantes manifiesta una concepción tal que no comparte que una función sea positiva y decreciente si está ubicada en el segundo cuadrante, aunque en efecto sea decreciente.

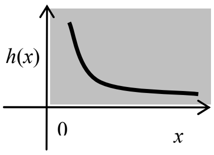


Fig. I.18a

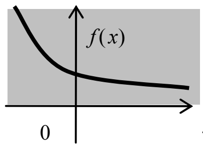


Fig. I.18b

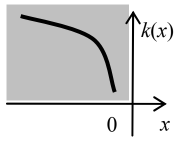


Fig. I.18c

Función negativa y creciente. La mayoría de estudiantes prefieren la Fig. I.19a como función negativa y creciente, pues tiene coordenadas negativas e incluso es en efecto creciente. Las preferencias disminuyen para la Fig. I.19b (y casi se igualan con la Fig. I.19c) que crece y tiene abscisas negativas y positivas; menos favorecida fue la Fig. I.19d que tiene abscisas positivas y ordenadas negativas. Cerca de la mitad de los entrevistados cree que la Fig. I.19c reúne las condiciones, esta gráfica es creciente pero no negativa, lo son sólo sus abscisas, tal concepción asocia a las funciones crecientes y negativas con aquellas gráficas que, en efecto crecen, pero que sólo tienen abscisas negativas; se privilegia el signo de sus abscisas por sobre el signo de sus ordenadas. En orden descendente de preferencia se presentan las gráficas elegidas.

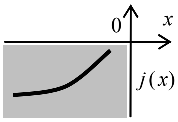


Fig. I.19a

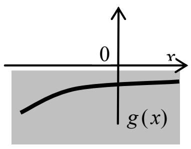


Fig. I.19b

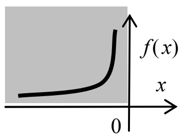


Fig. I.19c

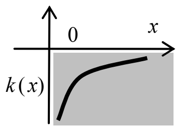
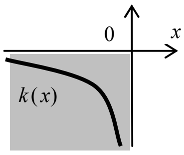
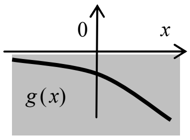


Fig. I.19d

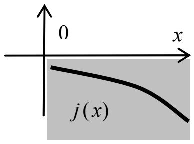
Función negativa y decreciente. De las gráficas dadas, tres de ellas satisfacen estas condiciones: I.20a, I.20b y I.20c; pero en orden descendente de preferencias se ubicaron como abajo aparecen. En las concepciones alternativas notadas se privilegian la asociación de las condiciones de función negativa y decreciente con aquellas gráficas que tienen coordenadas en x e y negativas (la gran mayoría eligió la Fig. I.20a); cuando las abscisas incluyen intervalos positivos y negativos las preferencias declinan notablemente. Se manifiesta también una concepción que asocia a las condiciones dadas, con la Gráfica I.20d ubicada en el segundo cuadrante que en efecto decrece; seguramente el término *función negativa* fue asociado con la idea de *abscisas negativas*



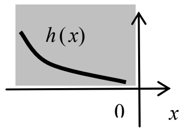
Gráfica I.20a



Gráfica I.20b



Gráfica I.20c



Gráfica I.20d

1.3 Síntesis de los hallazgos en las investigaciones nacionales e internacionales citadas

Como puede apreciarse, las investigaciones antes descritas dan cuenta de una variedad de concepciones alternativas que afloran en estudiantes jóvenes, en estudiantes de bachillerato y universitarios, inclusive en profesores de matemáticas y de física. Estas concepciones han sido identificadas a partir del planteamiento de dos tipos de actividades: actividades que implican construcción de graficas y actividades de lectura y análisis de gráficas. La construcción de gráficas a partir de un enunciado verbal o de una situación real, implica acciones derivadas del cambio de registro; a partir de esas producciones es que los investigadores identifican tales concepciones. Además, las investigaciones que involucraron construcción de gráficas podemos dividirlas en dos grupos: las que usaron tecnología (Yerushalmy y Shternberg, 1998) en donde los estudiantes se vieron precisados a pasar del contexto real al registro gráfico, y aquellas en donde los estudiantes construyeron gráficas sin el uso de tecnología (Mevarech y Kramarsky, 1997; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2002)) en que los estudiantes transitaron del registro verbal al gráfico y el trabajo de Even (1998) en donde una de las actividades supuso el paso de la representación simbólica a la representación gráfica.

La segunda clase de investigaciones están más enfocadas al análisis de gráficas previamente construidas por el investigador; las interpretaciones en este caso están más influidas por lo que el estudiante *observa* o *interpreta* sobre una gráfica dada. A esta categoría pertenece el trabajo de Hitt (11996) en el cual los profesores examinados requirieron transitar del registro gráfico al contexto real.

En otro apartado ubicamos las investigaciones realizadas en nuestro país por el grupo del Dr. Crisólogo Dolores, en virtud de que, en todos estos trabajos, el objetivo fue el desarrollo de pensamiento y lenguaje variacional, a través del desarrollo de actividades de análisis y construcción de gráficas de funciones. En todos estos trabajos, una serie de concepciones alternativas respecto del análisis de funciones han sido reiteradamente encontradas:

- La asociación concomitante entre función positiva y función creciente
- La asociación concomitante entre función negativa y función decreciente
- La asociación entre los puntos donde la ordenada de la función vale cero con los puntos de estabilización de la función
- La concomitancia entre una función positiva con abscisas positivas, la vinculación entre una función negativa con abscisas negativas, la asociación entre una función creciente y positiva, y la concomitancia entre una función decreciente y negativa
- La asociación de intervalos con puntos
- La concepción de que en $x = 0$ la función no crece ni decrece

Las cosas no son muy diferentes en profesores de física y estudiantes de secundaria. En Dolores, Alarcón y Albarrán (2002) encontraron, en gráficas cartesianas de coordenadas tiempo−distancia:

- Asociación entre la mayor velocidad media con la representación gráfica de la ordenada de mayor altura o con el intervalo al que le correspondían las ordenadas de mayor altura;
- Asociación entre la gráfica cartesiana que se asemejaba a la trayectoria para el caso de la caída libre de los cuerpos, con la trayectoria misma;
- La no aceptación de que una gráfica de coordenadas tiempo–distancia y otra de coordenadas velocidad–tiempo puedan representar al mismo movimiento.

Se pudiera pensar que con gráficas sencillas como las rectas, los estudiantes no encontrarían mayores problemas, pero esto no así. En otra investigación, Dolores y Catalán (2000) encontraron en estudiantes de bachillerato que, cuando se utilizaron gráficas como elemento visual principal para determinar los cambios en rectas, sólo la mitad de los estudiantes los lograron determinar, pero también se manifestó una deficiente interpretación gráfica. Solo una cuarta parte de los estudiantes dieron muestras de interpretar la ecuación pendiente–ordenada al origen y pudieron representarla gráficamente, aunque esto no garantizó usaran la relación de proporcionalidad contenida en el coeficiente m. En general, encontraron escasa capacidad para visualizar y analizar gráficas y mayor proclividad a realizar operaciones.

Lo anterior constituye una abundante y variada evidencia de que antes y después de los cursos ordinarios existen varias concepciones alternativas respecto del análisis de funciones en los estudiantes, y también en profesores. Varias de esas concepciones, no se modifican con una enseñanza ordinaria, pues aún después de ella, persisten. Por esa razón, nosotros estamos interesados en investigar cuáles de esas concepciones son removibles y cuales se resisten al cambio, pero en condiciones instruccionales determinadas.

1.4 Hacia dónde se encamina el trabajo

El poder analizar el comportamiento de las funciones es una habilidad esencial del pensamiento variacional (Dolores. 2002b). En el presente trabajo, nos propusimos explorar la evolución de las concepciones alternativas sobre el análisis de funciones en condiciones instruccionales determinadas, enfocando la atención en el análisis de su estabilidad o cambio. El análisis de funciones puede ser visto en diferentes contextos; para nosotros tienen particular interés los contextos gráficos y verbales y en menor medida los analíticos. Para conseguir nuestros propósitos, diseñamos un tratamiento instruccional con el objetivo de, en el marco del desarrollo del pensamiento variacional, lograr la posible remoción de esas concepciones.

Capítulo II

MARCO TEÓRICO

2.1 Acerca del pensamiento y lenguaje variacional

El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. Es una línea de investigación que posee una triple orientación. Por un lado se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y epistemológico; en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticas del cambio; en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante las estructuras variacionales consideradas en la escuela, el laboratorio y la vida cotidiana (Cantoral, 1999).

Como se puede advertir, el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional entre los estudiantes precisa de procesos temporalmente prolongados a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional, como el caso del pensamiento algebraico ampliamente documentado por Artigue (1995). Esa ruptura además, no puede ser sostenida exclusivamente al seno de lo educativo con base en un nuevo paradigma de rigor que se induce simplemente de la construcción de los números reales como base de la aritmetización del análisis, ni tampoco puede basarse sólo en la idea de aproximación, sino, que debe ayudar también a la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio. Para acceder al pensamiento y lenguaje variacional se precisa entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende.

2.2 La Matemática de las variables y la medición del cambio

Los conceptos básicos sobre los cuales está edificada la matemática de las variables son, sin duda, el de variable y el de función (Dolores 2000). Sobre estos conceptos, a su vez, se crearon otros, como el de límite, continuidad, diferencial, derivada e integral. Así mismo, se considera que Descartes en su *Geometría* introduce la variación a la matemática en forma de *magnitudes variables* y plantea una definición muy usual en el bachillerato actual, que la concibe en forma dual: como coordenada variable de un punto que se mueve a lo largo de una curva y en la forma de un elemento variable del conjunto de números. Las *magnitudes* son abstracciones representadas geométricamente y lo *continuo* proviene del continuo físico; las magnitudes variables son abstracciones que representan a *algo* que cambia continuamente. La condición de continuidad de las variables fue necesaria para el establecimiento de las bases del cálculo. Newton consideraba a las magnitudes matemáticas no como compuestas de partículas extremadamente pequeñas sino como descritas por movimientos continuos, continuos en el sentido de que no presentaban interrupciones. El desarrollo ulterior del análisis requería de mayor precisión en la teoría de las magnitudes variables y sobre todo en la definición de número real como valor posible de una magnitud variable. En este empeño, la teoría rigurosa de los límites posibilitó el surgimiento de la teoría de los números reales. Con ello, las magnitudes variables son llevadas a un nivel de abstracción mayor, pues son despojadas de su ropaje geométrico. Ahora, un intervalo es un conjunto de puntos y el rango de variación de una variable, un conjunto de números reales, por lo que una variable numérica, digamos x, "es *cualquier cosa* que puede tomar distintos valores numéricos". Aunado al desarrollo del concepto de variable, el concepto de continuidad pasó, de una concepción geométrica intuitiva, de una variación ininterrumpida generada por movimientos físicos continuos, a un concepto matemático abstracto en términos del límite.

Los fenómenos de la naturaleza están relacionados de alguna manera; las variables que son abstracciones obtenidas de la variación concreta, también lo están. En la búsqueda de las leyes generales que rigen el movimiento de los cuerpos en la naturaleza cobraron una importancia vital estas relaciones. Lo esencial de ellas radica en que algunas variables quedan completamente determinadas por los valores que adquieren las demás. Un tipo particular de relación de correspondencia dio origen a las funciones. Las funciones poseen dos aspectos esenciales, son relaciones especiales de correspondencia entre variables y son expresiones simbólicas. Sin embargo, la posibilidad de *operar* con las funciones, como lo señala Ríbnicov (1987), se relaciona con sus expresiones concretas: con los medios de la geometría y sus expresiones analíticas simbólicas. Y, en efecto, las gráficas y las fórmulas de las funciones permiten realizar operaciones y manipular los procesos de variación.

Por otra parte, un elemento fundamental en nuestro estudio, para entender el proceso de variación de las funciones, es precisar sus aspectos cualitativos y cuantitativos. Los primeros indican cómo cambia una función y los segundos indican cuánto cambia. Las funciones pueden cambiar de maneras muy distintas: unas pueden ser crecientes, otras decrecientes, otras no crecen ni decrecen, unas crecen uniformemente, otras lo hacen en forma variada, etc., pero estas cualidades por sí solas poco dicen sobre su comportamiento; hacen falta los aspectos cuantitativos. Es así que se llega a un punto muy importante sobre la variación: su medición. En primer lugar, los cambios pueden ser apreciados mediante *comparaciones.* No se puede saber si aumenta o disminuye una magnitud si no se comparan al menos dos de sus medidas. Ya que los procesos de variación, poseen la categoría de procesos entonces están compuestos de estados sucesivos. Entre un estado y el que le sigue, o cualquier otro, suceden cambios. El modelo matemático básico para medir la variación es por lo tanto la *diferencia*. Las fórmulas de las funciones permiten determinar con precisión los valores de correspondencia de las variables y las diferencias entre ellos permiten cuantificar lo que cambian. En términos generales, si y es una función de x, es decir, $y = f(x)$, para medir lo que cambia $f(x)$, se requiere primero considerar un *estado inicial* x_i; a este valor de x le corresponde $f(x_i)$. Después de un cambio que experimente x_i, de x_i a $x_i + \Delta x$ (un *estado final*), $f(x_i)$ experimentará también un cambio a un *estado final,* y éste quedará como $f(x_i + \Delta x)$. A un cambio de la variable independiente corresponde un cambio de la variable dependiente.

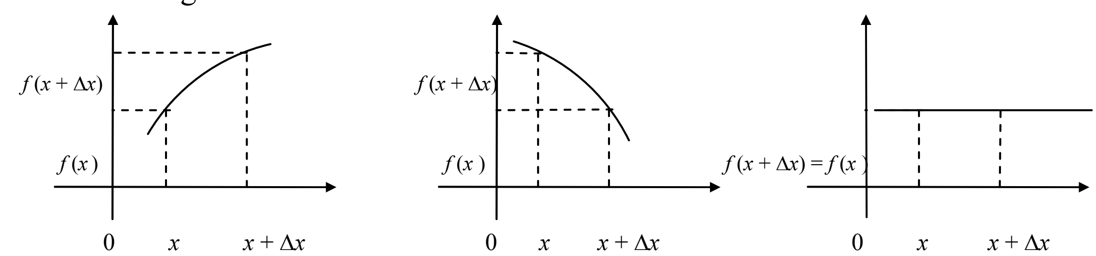
	Estado inicial	Cambio	Estado final	Diferencia
Variable independiente	x_i	Δx	$x + \Delta x$	$(x_i + \Delta x) - x_i = \Delta x$
Variable dependiente	$f(x_i)$	Δf	$f(x_i + \Delta x)$	$f(x_i + \Delta x) - f(x_i) = \Delta f$

Tabla. 2.1

Con las diferencias se puede predecir una enorme variedad de las cualidades del comportamiento variacional de las funciones. Por ejemplo:

- Si $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$ (para todo x perteneciente al intervalo $(x, x + \Delta x)$, y $\Delta x > 0$ preferentemente pequeño) entonces $f(x)$ es creciente.
- Si $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$ (bajo las mismas condiciones anteriores) entonces $f(x)$ es decreciente en el intervalos $(x, x + \Delta x)$.
- Si $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$ (con las condiciones anteriores) entonces $f(x)$ no crece ni decrece en el intervalo $(x, x + \Delta x)$, es decir se mantiene constante, no cambia.

Estas desigualdades, que en el fondo representan las comparaciones entre las ordenadas, nos permiten determinar cómo cambia *f(x)*. La respuesta es más evidente si se utilizan representaciones geométricas:



$f(x + \Delta x) - f(x) > 0$; $f(x)$ crece $f(x + \Delta x)$ - j Fig. 2.1 ce $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$; $f(x)$ es constante

Como se ha podido mostrar, las fórmulas de las funciones permiten determinar con precisión los valores de correspondencia de las variables y las diferencias entre esos valores permiten cuantificar lo que cambian. Una cosa son los valores de correspondencia y otra la forma en que cambia una función. Pero esto último es posible gracias a que se cuenta con las fórmulas, y a la posibilidad de ser representadas geométricamente en el plano cartesiano. En esto radica el poder de las fórmulas y las gráficas de las funciones pues permiten realizar operaciones y con ello, modelar la variación.

2.3 La parte matemática del análisis de funciones

El análisis visual de las funciones elementales es posible, como ya se mencionó, si se dispone de sus gráficas. Sin embargo en el plano matemático existen definiciones y teoremas que hacen posible tal análisis sobre bases rigurosas. Para el caso del crecimiento de una función, se dice que

> Una función $f(x)$ es creciente en (a, b), cuando a un mayor valor del argumento x corresponde un mayor valor de la función.

Esta proposición, traducida al lenguaje analítico queda así:

> Si $f(x)$ es una función continua y $h > 0$ suficientemente pequeña y $f(x + h) - f(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces en ese intervalo $f(x)$ es creciente.

Para probar que esta proposición es verdadera se proponen argumentos como los siguientes:

$$f(x + h) - f(x) = \Delta y \text{ donde } y = f(x) \quad \text{y} \quad \Delta x = h,$$

entonces, como $\Delta y > 0$ y $\Delta x > 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0, \text{ en el intervalo señalado.}$$

Si tomamos

$$\lim \Delta x \to 0 \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

como $dy > 0$ *y* $dx > 0$ entonces

$$f'(x) > 0$$

Esto último también es indicativo de que $f(x)$ es creciente en el intervalo ya señalado. Esta nueva función obtenida, *la derivada*, es una herramienta más poderosa para realizar tal análisis; mediante ella podemos obtener los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función, pero de manera más precisa, pues con los Δy y Δx las imprecisiones son evidentes. Para el caso del decrecimiento de una función, se procede de manera análoga.

En cada una las diferentes proposiciones que arriba se indican para las funciones crecientes y decrecientes, se encuentra la idea de comparación de dos estados de una misma función, un estado antecedente y un estado consecuente. La comparación entre ellos, nos permite cuantificar los cambios sufridos por la imagen de esta función en un cierto intervalo. Y como hablar de cambio es hablar de variación, en todas estas definiciones se encuentra implícito el carácter variacional de las funciones. Sin embargo, solo las proposiciones dadas en términos de la derivada de una función permiten un análisis del comportamiento de las funciones de manera más precisa. Por ejemplo, se pueden calcular los máximos y mínimos.

En este orden de ideas, se dice que

Una función $f(x)$ tiene un máximo en el punto x_1, si su valor en él es mayor que en cualquier otro punto x de cierto intervalo que comprenda el punto x_1. Es decir, la función tendrá un máximo en $x = x_1$, si $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ para todo valor de Δx (positivo o negativo), suficientemente pequeño en valor absoluto.

En forma análoga,

La función $f(x)$ tiene mínimo para $x = x_2$, si $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$, para cualquier valor de Δx (positivo o negativo), suficientemente pequeño en valor absoluto.

Haciendo uso de la función derivada,

Suponiendo que la función $f(x)$ es continua sobre cierto intervalo, al cual pertenece el punto crítico x_1, y es derivable en cada punto del mismo (excepto, posiblemente, el mismo punto x_1) si, al pasar por este punto de izquierda a derecha, el signo de la derivada cambia de *más*, a *menos*, entonces la función admite un máximo en $x = x_1$, es decir, si $f'(x) > 0$, para $x < x_1$ y $f'(x) < 0$ para $x > x_1$, la función tiene máximo en el punto x_1.

Si, al pasar por el punto x_2, de izquierda a derecha el signo de la derivada cambia de *menos* a *más*, la función admite un mínimo en éste punto, esto es, si $f'(x) < 0$, para $x < x_2$ y $f'(x) > 0$, para $x > x_2$, la función tiene un mínimo en el punto x_2.

A su vez, si se cumple que

La función $f(x)$ tiene un máximo ó un mínimo en el punto $x = x_1$, su derivada en este punto se reduce a cero, es decir, $f'(x_1) = 0$.

Todos los elementos anteriores ubican el papel que juega la derivada para precisar con exactitud y rapidez, los valores de las variables en que las funciones alcanzan sus valores óptimos, ya sean estos máximos o mínimos.

Por otra parte, es de fundamental importancia analizar algunos otros aspectos acerca de las funciones. Observemos las figuras siguientes:

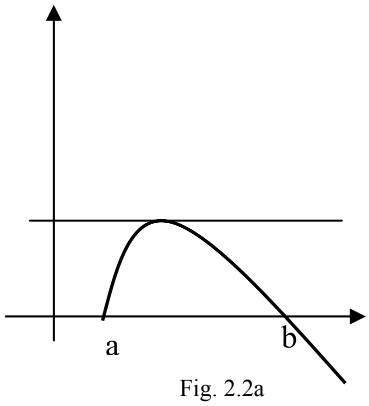


Fig. 2.2a

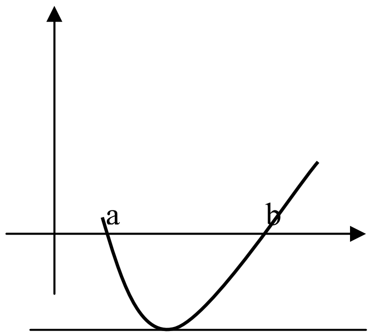


Fig. 2.2b

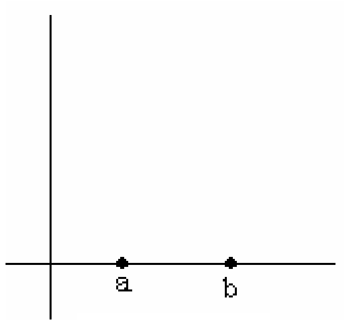


Fig. 2.2c

En cada una de ellas, las gráficas corresponden a funciones $f(x)$ continuas sobre segmentos $[a, b]$ y derivables en todos los puntos interiores de éste, reduciéndose a cero en los extremos $x = a$ y $x = b$, ($f(a) = f(b) = 0$). En cada caso, dentro del segmento $[a, b]$ existe por lo menos un punto $x = c$, donde $a < c < b$, en el que $f\,'(x)$ se reduce a cero, es decir $f\,'(c) = 0$. Esto es cierto en vista de que, si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, debe tener en éste su valor máximo M, su valor mínimo m. Si $M = m$, para toda x, la función $f(x)$ es constante. Pero, en este caso, en cualquier punto del segmento $f\,'(x) = 0$ y quedaría demostrada nuestra afirmación anterior. Suponiendo ahora que $M \neq m$, entonces por lo menos uno de estos números no es igual a cero. Para concretar, supongamos que $M > 0$ y que la función toma su valor máximo cuando $x = c$, es decir, $f(c) = M$. Observamos que c es diferente de a y de b, ya que según la condición $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$. Si $f(c)$ es el valor máximo de la función entonces

$$f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0, \text{ tanto para el } \Delta x > 0, \text{ como para } \Delta x < 0.$$

De aquí se deduce que

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0 \text{ cuando } \Delta x > 0 \text{ y}$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0 \text{ cuando } \Delta x < 0$$

Como inicialmente se había establecido que existe la derivada en el punto $x = c$, entonces, pasando al límite, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, obtenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leq 0, \text{ cuando } \Delta x > 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geq 0, \text{ cuando } \Delta x < 0$$

Pero las expresiones $f'(c) \leq 0$ y $f'(c) \geq 0$ solo son compatibles para el caso de que $f'(c) = 0$. Por tanto, dentro del segmento $[a, b]$ hay un punto c, en el cual la derivada $f'(c)$ es cero. Este hecho garantiza la existencia de máximos o mínimos de funciones derivables aunque con condiciones específicas, es decir que la función corte dos veces consecutivas al eje de las x.

Otra propiedad importante para analizar cualquier función es el sentido de su convexidad.

Se denomina curva *convexa* o *curva convexa hacia arriba* en el intervalo (a, b), a aquella curva que tiene todos sus puntos por debajo de cualquier tangente a ella en ese intervalo

Si la segunda derivada de la función $f(x)$ es negativa en todos los puntos del intervalo (a, b), es decir, si $f''(x) < 0$, la curva $y = f(x)$ tiene su convexidad dirigida hacia arriba en este intervalo.

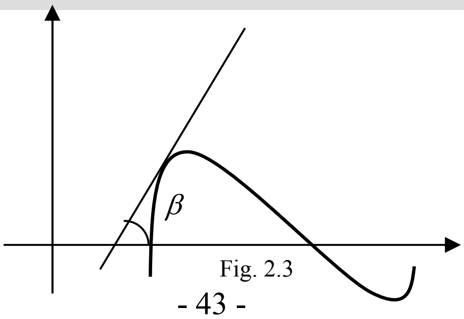


Fig. 2.3

Es decir, la derivada $f'(x)$ es igual a la tangente del ángulo formado por la línea tangente a la curva y el eje x, es decir, $f'(x) = \text{tg } \beta$. Por lo tanto $f''(x) = [\text{tg } \beta]'$. Si $f''(x) < 0$ para cualquier x en el intervalo (a, b), esto quiere decir que tg β decrece a medida que crece x (Fig. 2.4). Desde el punto de vista geométrico está claro que si tg β decrece a medida que crece x, entonces la curva correspondiente será convexa.

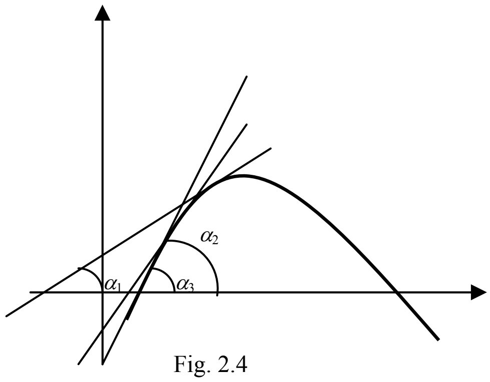


Fig. 2.4

Así mismo, se dice que

La curva es *convexa hacia abajo* o *cóncava* en el intervalo (b, c), si todos sus puntos están situados por arriba de cualquier tangente a ella en este intervalo (Fig. 2.6).

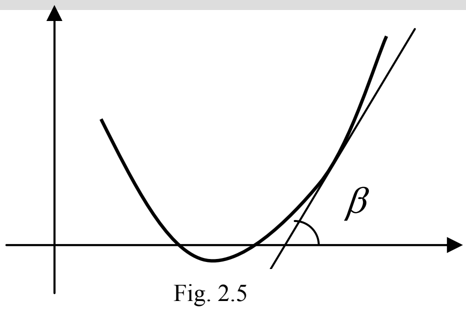


Fig. 2.5

Analíticamente,

Si la segunda derivada de la función $f(x)$ es positiva en todos los puntos del intervalo (b, c), es decir, si $f''(x) > 0$, la curva $y = f(x)$ tiene su convexidad dirigida hacia abajo en este intervalo (la curva es cóncava).

Respecto de las herramientas matemáticas disponibles para el estudio de la convexidad en una función encontramos que García (2003) refiere que, si bien es fácil identificar cuándo existe un punto de inflexión y en qué momento se tiene una curva cóncava o convexa, no es sencillo establecer la diferencia gráfica de los valores numéricos de la segunda derivada. La *curvatura* permite caracterizar el comportamiento de una curva en relación a los cambios de dirección que describe a lo largo de su trayectoria. La propiedad de la circunferencia de mantener constante su curvatura es aprovechada para caracterizar la forma en que se "dobla" una curva plana cualquiera. El asunto es identificar una circunferencia que se comporte localmente como la curva. En principio, la circunferencia debe compartir un punto de la gráfica; la tangente en ese punto debe ser también una tangente para la circunferencia y finalmente la forma de la convexidad debe ser la misma que la circunferencia en un entorno infinitesimal del punto compartido.

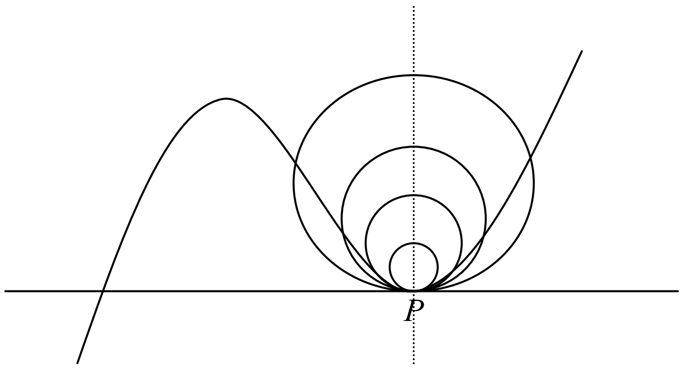


Fig. 2.6

Por otra parte, cuando una función $f(x)$ presenta un cambio en su convexidad en un punto $x = a$, en este punto la función posee un punto de inflexión.

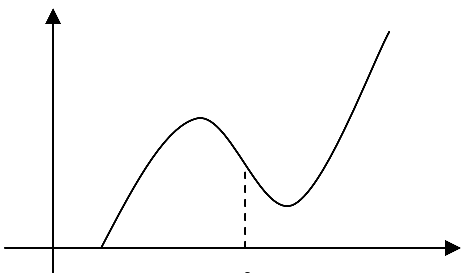


Fig. 2.7

Expresando lo anterior analíticamente,

Si $f''(a) = 0$ ó $f''(a)$ no existe, y la derivada $f''(x)$ cambia de signo al pasar por el valor de $x = a$ entonces, el punto de la curva de abscisa $x = a$ es el punto de inflexión.

Si la segunda derivada $f''(x) < 0$, para $x < a$, y $f''(x) > 0$, para $x > a$, entonces para $x < a$ la curva es convexa y para $x > a$ es cóncava. Por lo tanto en $x = a$ la función tiene un punto de inflexión.

Si la segunda derivada $f''(x) > 0$, para $x < a$, y $f''(x) < 0$, para $x > a$, entonces para $x < a$ la curva es cóncava y para $x > a$ es convexa.

Es así que la determinación de los puntos de inflexión de una función hace posible establecer los intervalos en que la derivada de una función crece y los intervalos en donde ésta decrece. Esta información puede ser utilizada para inferir el comportamiento de la función primitiva.

En general, cada una de las definiciones ofrecidas en términos de la derivada, posibilita el análisis del comportamiento de una función en cada uno de los elementos de su dominio. La utilización sistemática de estas definiciones y propiedades de las funciones continuas son indispensables para analizar el comportamiento de funciones elementales, generar y desarrollar habilidades para su comprensión y utilización consciente por parte de los estudiantes.

2.4 Modelos de cambio conceptual en la instrucción

De acuerdo a Pozo (1996), en los últimos años, en el contexto de los estudios sobre la existencia en los alumnos de concepciones espontáneas erróneas con respecto a los fenómenos científicos, han comenzado a surgir diversas teorías del aprendizaje de conceptos científicos que conciben éste como un proceso de *cambio conceptual* o de transformación de esos conceptos espontáneos en conceptos científicos. Además de su vinculación a los estudios sobre concepciones espontáneas, estas teorías tienen en común el abordar el aprendizaje de conceptos desde una perspectiva instruccional. Se trata de identificar estrategias didácticas que fomenten el cambio conceptual de los alumnos.

2.4.1 Naturaleza de los conceptos espontáneos

Los trabajos que estudian la *ciencia intuitiva* o las concepciones espontáneas (o también *preconceptos*, *ideas previas* o *concepciones erróneas*) de los alumnos son cada vez más numerosos. Sin embargo, la abundancia de trabajos corre paralela a su dispersión. Reunidos bajo la vaga etiqueta del *constructivismo*, estos estudios coinciden en encontrar en los alumnos fuertes ideas, generalmente implícitas, sobre los fenómenos científicos, que suelen ser contrarias a los conceptos científicos que se les pretenden transmitir.

Dejando a un lado otras características, Pozo afirma que las concepciones espontáneas tienen su *origen* en la actividad cotidiana de las personas. Surgen en la interacción espontánea con el entorno cotidiano y sirven, ante todo, para predecir la *conducta* de ese entorno. Están además determinadas en cuanto a su contenido por las limitaciones en la capacidad de procesamiento en los humanos. Otro rasgo característico de las concepciones espontáneas es que se *organizan* en forma de *teorías en acción* o implícitas, *teorías personales* o *teorías causales*. Todas estas denominaciones aluden con diversos matices, a dos características: ante todo, los conceptos espontáneos no se yuxtaponen unos a otros, sino que constituyen estructuras jerarquizadas de conceptos, aunque generalmente implícitas o no conscientes y, en segundo lugar, que esas estructuras de conocimiento tienen una función explicativa. Como consecuencia de su origen en la actividad espontánea y de su organización en teorías, estos conceptos resultan muy *resistentes al cambio*, ya que persisten incluso tras una larga instrucción científica. Se ha comprobado que no se abandonan por simple exposición a los conceptos científicos correctos. Ello ha obligado a desarrollar modelos de cambio conceptual en los que, mediante estrategias didácticas diseñadas con ese fin, se intentan trocar los conceptos espontáneos y erróneos en conceptos científicamente correctos. En opinión de Pozo, esta resistencia al cambio conceptual viene determinada por el origen de los conceptos espontáneos, útiles y altamente predictivos en la vida cotidiana, y por su organización en forma de teorías o *pirámides de conceptos*.

2.4.2 Las condiciones de cambio conceptual

De acuerdo a Pozo, se dice que el cambio conceptual se produce en las siguientes condiciones:

a) El aprendizaje de conceptos científicos no consiste sólo en reemplazar unas ideas cualesquiera por otras científicamente aceptadas, sino que en el aprendizaje existe una cierta conexión genética entre la teoría espontánea del alumno y la teoría científica que se le pretende transmitir. Enseñar ciencia no consiste en proporcionar conceptos a los alumnos sino en cambiar los que poseen. El alumno no abandonará sus ideas espontáneas hasta que encuentre otra teoría mejor que, de acuerdo con las ideas de Lakatos (1978) sobre el cambio de los programas de investigación científica, dé cuenta no solo de lo que explicaban ya sus ideas espontáneas sino de fenómenos nuevos hasta ahora incomprensibles.

b) Para que el alumno pueda comprender la superioridad de la nueva teoría, es preciso enfrentarle a situaciones conflictivas que supongan un reto para sus ideas. En otras palabras, el alumno ha de darse cuenta de que su teoría previa es errónea en ciertas situaciones, en las que conduce a predicciones que no se cumplen. Al mismo tiempo, hay que hacerle ver también que la nueva teoría hace predicciones mejores. De esta forma, el conflicto cognitivo es muy importante en el avance conceptual del alumno.

c) Por último, a partir de lo anterior, puede deducirse que la toma de conciencia por parte del alumno es un paso indispensable para el cambio conceptual. Los conceptos espontáneos de los alumnos suelen ser implícitos. Un primer paso para su modificación será hacerlos explícitos mediante su aplicación a problemas concretos.

2.4.3 Un modelo de cambio conceptual

La figura 2.11 representa un modelo de cambio conceptual desarrollado por Pozo, que pretende integrar o conectar algunos de los mecanismos de aprendizaje que se han venido analizando. El modelo intenta identificar los procesos implicados en el logro de uno de los resultados del aprendizaje más complejos que puedan estudiarse, el cambio conceptual o reestructuración fuerte de los conocimientos. Sin duda, la mayor parte de las situaciones de aprendizaje no alcanzan resultados tan radicales, sino que producen pequeños ajustes o un simple crecimiento del conocimiento. Ello implicaría, desde el punto de vista del modelo presentado, que en esas situaciones el sujeto activaría aquellos procesos de aprendizaje responsables de esos resultados.

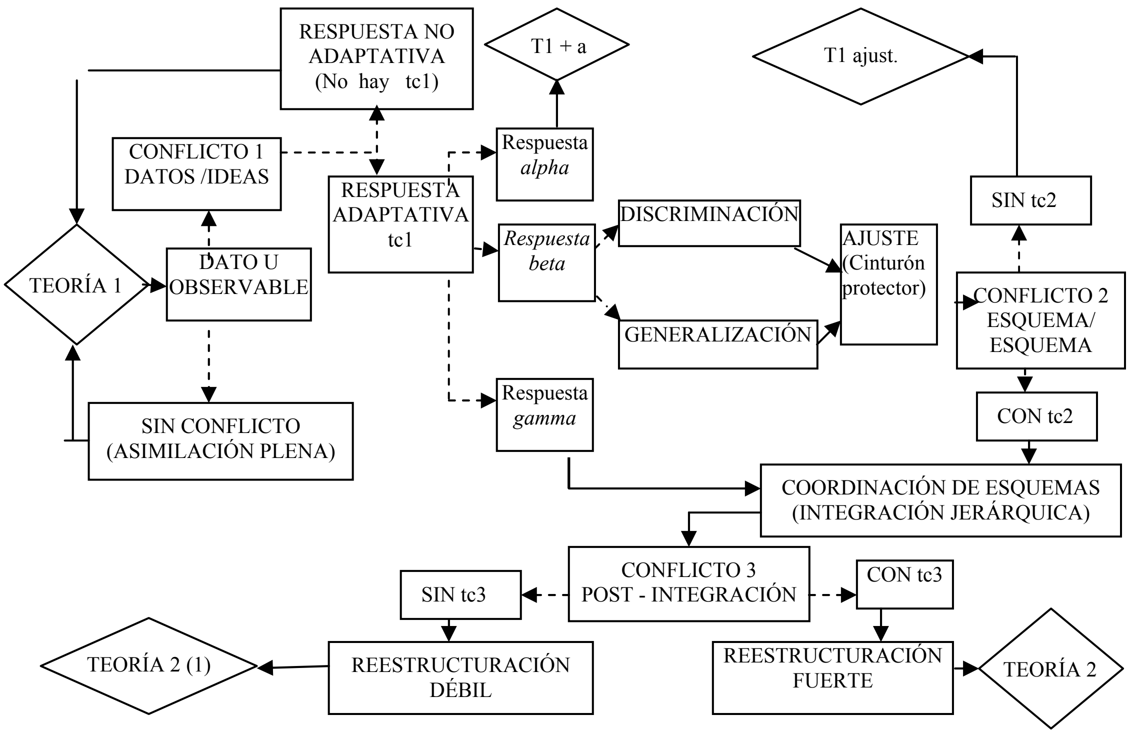


Fig. 2.8

El modelo de cambio conceptual desarrollado por Pozo, se inicia con la situación más elemental de aprendizaje de conceptos, cuando un sujeto dotado de una teoría (T1), implícita o explícita, con respecto a un determinado dominio de conocimientos se enfrenta con una información o un observable relacionado con ese dominio. En esta confrontación entre la teoría y la realidad, podrían suceder en principio dos cosas: que los datos observados fuesen completamente asimilables por T1 o que, por el contrario, entraran en conflicto con alguna de las predicciones que se derivan de T1.

En el primer caso, al no existir ningún desequilibrio, T1 resulta plenamente eficaz y, por tanto, no habrá ningún cambio en la misma. Pero si se produce un conflicto entre teoría y datos, hay dos opciones de entrada: que el conflicto sea detectado por el sujeto o que no lo sea. En caso de no ser detectado, se produciría una respuesta no adaptativa, según la terminología de Piaget (1975) ya que el sujeto no tomaría conciencia del conflicto entre la teoría y los datos, que es el primer tipo de conflicto que puede producirse. Al no tomar conciencia del conflicto, desde un punto de vista funcional la situación es equivalente a la ausencia de conflicto entre datos y teoría, ya que no da lugar a ningún aprendizaje cognitivo.

La respuesta adaptativa al conflicto de tipo 1 supone una toma de conciencia del mismo por parte del sujeto. La toma de conciencia requiere que el sujeto haga explícitas tres cosas: el primer elemento en conflicto, el segundo elemento en conflicto y la diferencia entre ambos. En el caso de la toma de conciencia de los conflictos de tipo 1 (en adelante tc1), lo que el sujeto debe hacer explícito es: a) su teoría o, al menos, ciertas predicciones derivadas de su teoría; b) una información o un observable relacionado con su teoría; y c) la diferencia entre la predicción y el observable.

A partir de tc1, continua Pozo, son posibles tres tipos de respuestas al conflicto observado por parte del sujeto. Puede en primer lugar (respuesta *alpha*) considerar al observable como una excepción o un caso aislado que no afecta directamente a su teoría. En este caso, la toma de conciencia no adquiere un carácter conceptual, sino que se refiere tan solo a las predicciones derivadas de T1, sin afectar directamente a ésta. En consecuencia, no se producirá ninguna modificación conceptual. Por tanto, el sujeto mantendrá su teoría aunque acumulará también el conocimiento de que sufre ciertas anomalías (T1 + a, por teoría 1 con anomalías).

Si la respuesta *alpha* mantiene prácticamente intacta la teoría, en el otro extremo, la respuesta *gamma* consiste en modificar el núcleo o las ideas centrales de la teoría como consecuencia del conflicto observado. En la Figura 2.11 puede verse que la respuesta *gamma* conduce directamente a una coordinación de varios conceptos contenidos en la teoría que desemboca en una integración jerárquica de los mismos. De hecho, puede considerarse que la respuesta *gamma* se producirá únicamente cuando, en fases anteriores de ese mismo aprendizaje, se hayan cubierto las etapas precedentes, de forma que el sujeto haya tomado conciencia del conflicto existente entre varios conceptos presentes en su teoría, de tal modo que los conceptos sean objeto de la conciencia reflexiva del sujeto.

Por tanto, para que se produzca una reestructuración de la teoría será necesario normalmente ajustar ésta a los observables introduciendo cambios en su cinturón protector. Este ajuste se produce cuando el conflicto entre los datos y la teoría da lugar a una respuesta *beta*, que supone introducir modificaciones puntuales en la teoría pero sin que alteren el núcleo central de ésta. En otras palabras, no se cambian los mecanismos explicativos de la teoría sino que únicamente se modifica el dominio de fenómenos a los que se aplican. El ajuste puede suponer tanto una generalización o aplicación de un concepto a un dominio que hasta entonces no le correspondía como una discriminación o reducción del campo de aplicación de ese mismo concepto, dejando fuera algún objeto o fenómeno que hasta entonces explicaba y que pasa a depender de otro concepto.

Se puede decir que los procesos de generalización y diferenciación se realizan en el cinturón protector de la teoría, ya que no afectan a los mecanismos explicativos aceptados sino a la delimitación del campo al que se aplican y a sus mutuas intersecciones. Producen conjuntamente un ajuste progresivo de la teoría a los datos que hace desaparecer, al menos en forma provisional, los conflictos entre ambos. Pero la modificación del ámbito de aplicación de los diversos conceptos de la teoría producirá otro tipo de conflictos, de naturaleza estrictamente conceptual. Como consecuencia de los ajustes realizados, es posible que el campo de activación de dos o más conceptos se solape. Algunos fenómenos serán explicados por dos conceptos en forma contradictoria, llevando a predicciones opuestas.

La resolución de este segundo tipo de conflictos, a diferencia de los anteriores (datos / teoría) sólo será posible si el sujeto toma conciencia de sus propias representaciones, si conceptualiza sus esquemas de conocimiento. En caso de que no se produzca esa conceptualización o toma de conciencia del conflicto entre esquemas (en adelante tc2), el núcleo central de T1 no resultará modificado, no teniendo lugar por tanto ninguna reestructuración. Sin embargo, aún en ese caso, T1 no resultará inalterada, ya que se habrán producido ciertos ajustes en su cinturón de ideas protectoras, que darán lugar a una versión levemente modificada de la teoría anterior, representada en la figura por T1–ajust (T1 con ajuste).
Para que se produzca tc2, el sujeto ha de reflexionar sobre: a) el primer esquema o concepto en conflicto; b) el segundo esquema o concepto en conflicto; c) las relaciones de diferencia y semejanza entre ambos. De esta forma, los esquemas o ideas implícitas que hasta entonces poseía se convierten en conceptos explícitos propiamente dichos.

Ahora bien, la reestructuración producida por la integración jerárquica de los conceptos es aún una reestructuración en sentido débil (Carey, 1985), ya que generalmente la nueva teoría surgida de la reestructuración sigue conviviendo con la teoría anterior (T1). Esta coexistencia entre las dos teorías, o versiones sucesivas de la misma teoría, da lugar a un nuevo tipo de conflictos, estudiados por Piaget (1975) como “conflictos posteriores a la integración”. Estos conflictos requieren una nueva toma de conciencia por parte del sujeto (que Pozo denomina tc3). En este caso de no producirse esa toma de conciencia, la nueva teoría surgida de la reestructuración coexistirá con la vieja teoría (T1) que, no obstante, de haber conflicto, se hallará normalmente sometida a la nueva teoría surgida de la reestructuración. Por ello, en la figura anterior, se ha escogido esta teoría como T2 (1), reflejando la preponderancia de T2.

Para que se produzca tc3, es necesario que el sujeto tome conciencia no ya de esquemas separados en forma de conceptos sino de las propias teorías como tales. Esta reflexión metateórica alcanza a: a) la teoría inicial (T1); b) la nueva teoría surgida de la reestructuración (T2); y c) la relación entre T1 y T2. En este último aspecto es necesario que el sujeto tome conciencia del exceso de contenido empírico de T2 con respecto a T1 (Lakatos, 1978). Este resultado de tc3 será una reestructuración fuerte de la teoría que, según los requisitos establecidos por Carey (1985), afectará no solo a los conceptos que constituyen el núcleo central de la teoría sino también al dominio de aplicación de la misma y a los mecanismos explicativos admitidos. De esta forma, la nueva teoría (T2) no solo hace innecesaria a la anterior (T1) sino que incluso resulta incompatible con ella. Ahora bien, es posible que esa reestructuración fuerte no se produzca casi nunca en contextos cotidianos.

Utilizamos el modelo anterior en esta investigación para guiar nuestra metodología encaminada hacia el logro de un cambio conceptual que permitiera modificar las concepciones alternativas existentes en los estudiantes respecto de la ubicación y comportamiento de las gráficas de funciones y lograr en ellos que estas concepciones fueran acordes con el conocimiento aceptado por la matemática escolar. En nuestra investigación el dato u observable lo constituyeron gráficas de funciones sobre las cuales los estudiantes podrían identificar ubicaciones y comportamientos específicos. El tratamiento instruccional se diseñó de tal forma que las concepciones alternativas de los estudiantes entraran en conflicto constante y consistentemente. En virtud de que algunas de estas respuestas no sufrieron cambios antes y después de las estrategias de enseñanza, se consideraron respuestas no adaptativas.

Por otra parte, en las respuestas en donde sí se observaron variaciones, respuestas adaptativas, de acuerdo a los criterios puestos en juego por los estudiantes para llevar a cabo el análisis gráfico de funciones, se identificó que: a) algunos estudiantes alcanzaron a percibir que su teoría inicial para desarrollar el análisis de funciones no funcionaba, pero solo para algunas de las gráficas de funciones, por lo que consideraron estos casos como excepciones, anomalías de la teoría de acuerdo a Pozo, y sus criterios originales no cambiaron, es decir, la teoría con la que contaban no se alteró (T1 + a); b) en las respuestas de algunos estudiantes se observó un cambio en sus concepciones alternativas iniciales respecto de la ubicación y comportamiento de las funciones en la dirección deseada, sin embargo, al responder a cuestionamientos relativos a los puntos de estabilización de las funciones siguieron aplicando su teoría original, lo que denotó solo un ajuste en las concepciones alternativas iniciales (T1 + ajust) ; c)otros estudiantes mostraron una aproximación aparente hacia las concepciones deseadas, pues se observó que los nuevos criterios que aplicaron no se usaron consistentemente, los aplicaron solo durante la lectura e interpretación de gráficas, no durante la construcción de éstas, esto significa una reestructuración débil de las concepciones iniciales (T2(1)); d) finalmente, solo en las respuestas ofrecidas por algunos estudiantes, se observó una reestructuración fuerte de las concepciones alternativas iniciales, ya que los criterios aplicados por estos estudiantes después de la puesta en escena del diseño instruccional, durante la lectura, interpretación y construcción de gráficas de funciones, resultaron ser consistentes con las concepciones aceptadas en la matemática escolar (T2).

2.4.4 Estrategias de enseñanza dirigidas al cambio conceptual

Se han desarrollado en los últimos años diversos modelos de enseñanza que tienen como objetivo provocar en los alumnos cambios conceptuales. Aunque estos distintos modelos varían en algunos aspectos relevantes, todos ellos comparten una misma lógica, derivada de la asunción de unos mismos supuestos con respecto a la naturaleza del cambio conceptual (Figura 2.13).

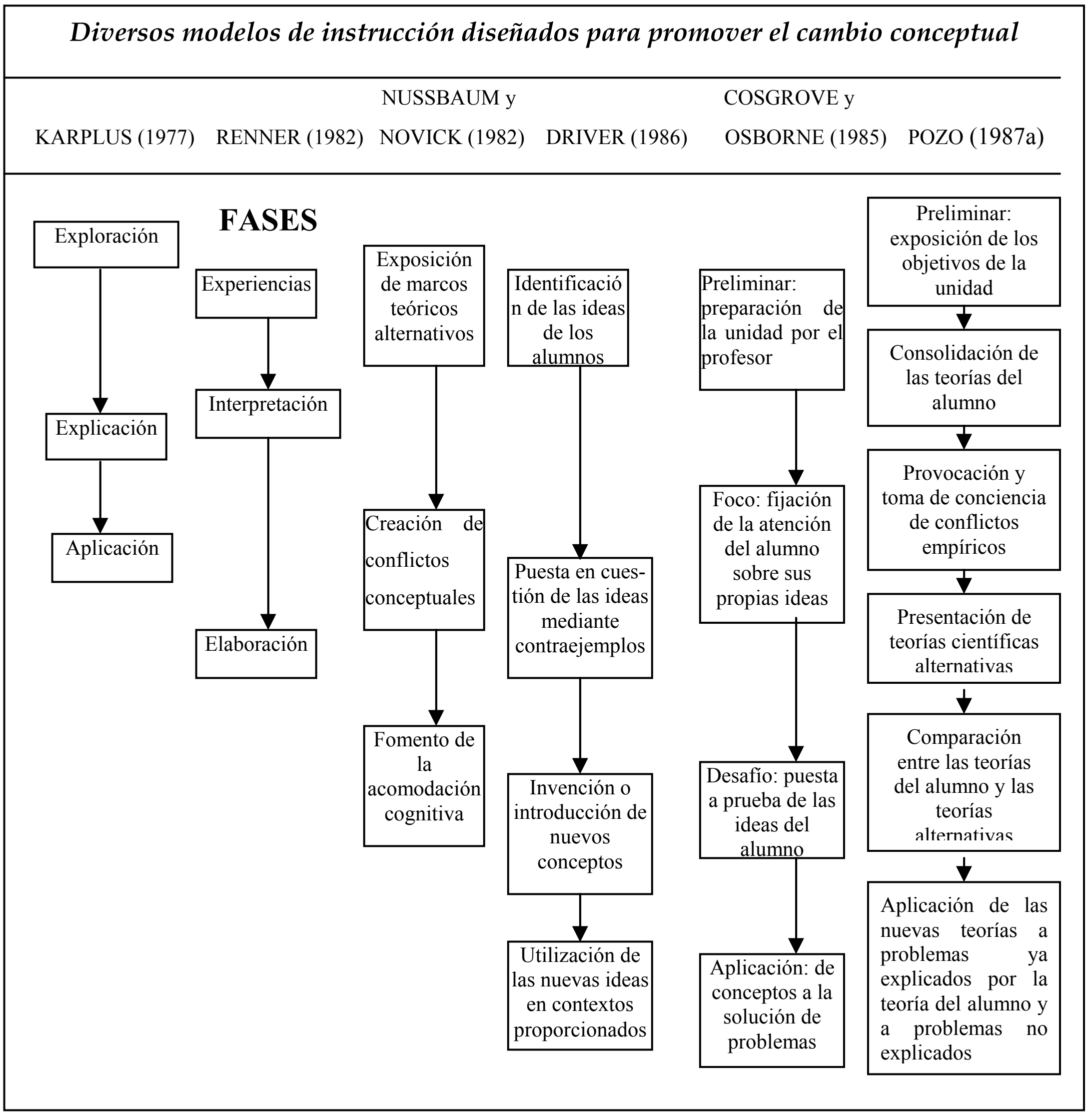


Fig. 2.9

Por encima de sus diferencias, estos modelos comparten mayoritariamente la necesidad de iniciar la actividad con una presentación del material de aprendizaje dirigida a activar o poner en funcionamiento las concepciones espontáneas o ideas previas del alumno. Esto puede lograrse mediante la realización de experiencias, la exploración o incluso la presentación de un modelo conceptual alternativo. En todo caso, esta activación de los esquemas conceptuales del alumno debería conducir a una toma de conciencia de los mismos, convertir las teorías implícitas en un saber explícito y, en último extremo, a la aparición de contradicciones. Una vez suscitados y, en su caso, resueltos los conflictos, es necesario consolidar los conocimientos adquiridos aplicándolos tanto a situaciones explicadas por la teoría anterior como a situaciones de las que aquella teoría no daba cuenta. De esta forma, el alumno puede tomar conciencia del exceso de contenido empírico (Lakatos, 1978) de la nueva teoría.

La estrategia de enseñanza utilizada en nuestro proyecto, incluyó los elementos claves presentes en los modelos mostrados en la Fig. 2.13: exploración de las concepciones iniciales de los estudiantes respecto de la ubicación y comportamiento de las funciones; desarrollo de situaciones didácticas para activar sus esquemas conceptuales a fin de que tomaran conciencia de sus teorías implícitas, sus concepciones alternativas, y con ello promover el surgimiento de conflictos conceptuales para lograr que se percataran de que la nueva teoría explicaba mejor las situaciones.

2.5 El Cambio Conceptual Intencional

Ferrari y Elik (2003) plantean que el cambio conceptual intencional solo es posible en una persona que intenta cambiar su comprensión conceptual, una persona que es el resultado de la síntesis dialéctica de una capacidad biológica para abrigar intenciones, objetos y prácticas culturales que modelen sus estructuras mentales. De aquí que las dos fuentes principales del cambio conceptual identificadas son el deseo personal y la cultura. Una persona, de acuerdo a estos autores, no es solo parte de su cultura en el macro nivel sino que es también parte de la dinámica de las relaciones alrededor de ella en el nivel micro. En este nivel, las emociones son significantes para el cambio conceptual intencional. Desde la perspectiva de los sistemas dinámicos, el cambio puede ser logrado cuando los sentimientos son tan extremos que rompen los patrones o estructuras existentes.

Ferrari y Elik agregan que, para responder a la pregunta de qué cambia en el cambio conceptual se requiere de una buena comprensión de lo que son los conceptos, y por ello establecen que los conceptos son los constituyentes o las unidades más pequeñas del pensamiento y son compartidos entre la gente en una sociedad. Un concepto, continúan, posee una componente interna que juega un rol en la explicación sicológica, y una componente externa que determina cómo el concepto es aplicado en el mundo: una en la mente, consistente en una determinación interna jugando un cierto rol psicológico y otra en el entorno que determina las verdaderas condiciones del mundo real del concepto.

Por otra parte, en relación a la noción de intencionalidad, Ferrari y Elik establecen que cualquier acto mental, ya sea de comprensión o expresado a través de la conducta, necesita referirse a algo si va a ser considerado intencional. Entonces, la intencionalidad del pensamiento de una persona o acción requiere que sea acerca de algo, ya sea un objeto, una percepción, un sentimiento o una conducta. En el caso particular de nuestro proyecto, ese algo está referido a la ubicación y comportamiento gráfico de las funciones.

2.5.1 El Cambio conceptual intencional y no intencional

Ferrari y Elik sugieren que el cambio conceptual intencional implica el intento deliberado de una persona (o grupo) por un cambio radical de un sistema conceptual a otro porque son seducidos por el poder de ese nuevo sistema conceptual, o porque perciben algún defecto profundo en su visión actual (Kuhn, 1964/1981; Piaget, 1975, Piaget y García, 1987). En suma, la visión de Ferrari y Elik del cambio conceptual intencional involucra una desestabilización de los patrones existentes de pensamiento y conducta en los individuos (pensamiento y conducta que es modelado por los padres, profesores, y otros que forman la realidad institucional y el capital cultural de una sociedad y cultura particular).

El cambio conceptual intencional, entonces, involucra un intento deliberado por cambiar los marcos y permitir a los individuos percatarse que algunos elementos que fueron conceptualizados importantes realmente solo son de fondo. La Figura 2.14 muestra la famosa gestalt que puede percibirse como dos caras o como un envase. Un cambio similar en la organización de las ideas de un individuo ocurre cuando es logrado un cambio conceptual. Entonces, el cambio conceptual radical no siempre implica un cambio en los conceptos en si mismos o incluso abandonar un concepto por otro; por el contrario, Ferrari y Elik proponen que es un cambio en los patrones de relaciones y de apreciación de algunos de los conceptos que ya existían, como los más significantes. Tal cambio requiere una reinterpretación de los componentes de toda la imagen o idea.

2.5.2 Influencias sobre el cambio conceptual intencional

Bajo condiciones del mundo real, señalan Ferrari y Elik, los nuevos y viejos conceptos son influenciados por los moderadores y mediadores del cambio conceptual (Figura 2.15). Los mediadores estructuran el enfoque completo que alguien posee de un concepto en particular; los moderadores determinan que tan fácil o difícil el individuo intentará cambiar los conceptos existentes. Estas influencias necesariamente se expanden sobre lo que se ha llamado el modelo "frío" del cambio conceptual, en el cual los paradigmas científicos son dirigidos solo por hallazgos científicos y lógicos. Las condiciones sociales reales requieren desarrollar modelos "calientes", en los cuales el cambio conceptual radical sea dirigido por factores históricos, sociales y motivacionales.

Ferrari y Elik consideran que el marco cultural, el contexto social, y el enfoque ontológico son los *mediadores* críticos del cambio conceptual. El marco cultural media al cambio conceptual a través de narrativas canónicas y conceptos, normas institucionales y prácticas, artefactos físicos de producción (libros y pinturas) y el lenguaje que genera una realidad cultural que estructura la comprensión cultural. Los conceptos sociales específicos median el cambio conceptual a través de la influencia del resto de la gente. Finalmente, los conceptos siempre son entendidos dentro de una categoría ontológica amplia (por ejemplo, sustancia o proceso; mente o materia). El *enfoque ontológico* influencia cómo es integrado el concepto dentro de la ecología conceptual del individuo y, si es "mal clasificada" entonces se vuelve muy difícil de aprender el nuevo concepto, esto es, las intenciones de uno siempre estarán mal dirigidas (Figura 2.15).

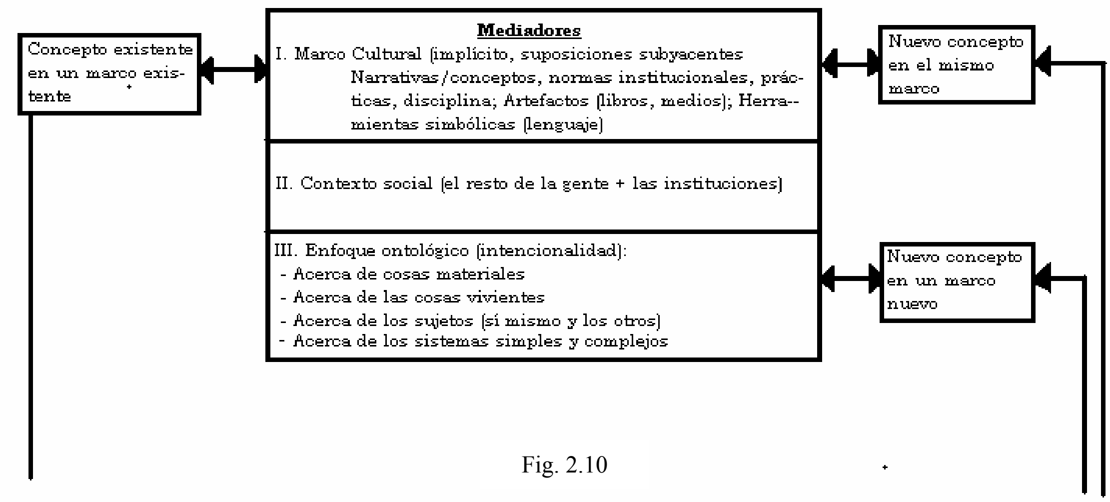


Fig. 2.10

Los *moderadores* son factores que facilitan o impiden el cambio conceptual intencional. Ferrari y Elik proponen tres tipos de moderadores: a) los relacionados con las creencias, incluyendo los conocimientos previos del individuo y la experiencia, b) los relacionados con los afectos, incluyendo la apreciación emocional, la motivación, y los valores, y c) los relacionados con la intención, incluyendo la fuerza de voluntad y la calidad de la autorregulación (Figura 2.16).

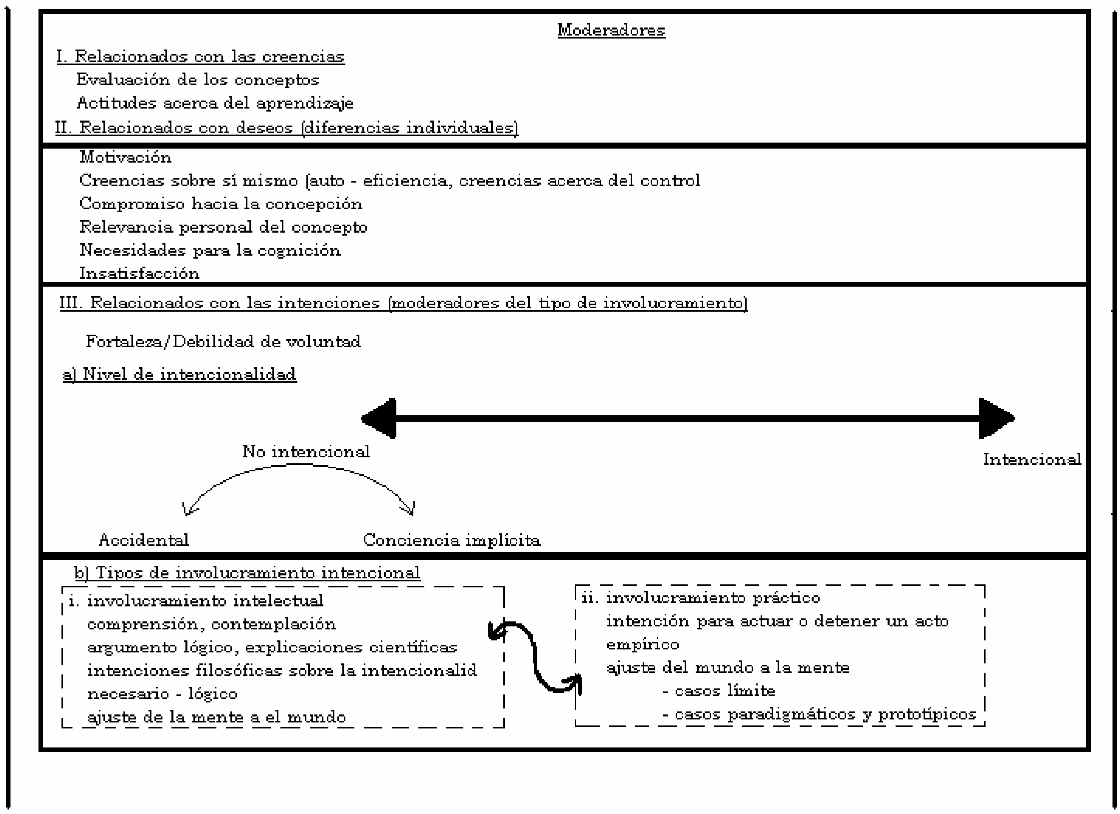


Fig. 2.11

2.5.3 Influencias Relacionadas con la Intención sobre el Cambio Conceptual Intencional

Este tipo de moderadores se refieren a las influencias sobre la fuerza de las intenciones, específicamente, sobre la fuerza de voluntad personal para emprender el cambio conceptual, el cual Ferrari y Elik toman como sinónimo de *volición* (Corno, 1993). La volición es moderada por el *grado de intención* del individuo, el tipo de compromiso intencional, y la calidad de la *auto–regulación* (Figura 2.14). El *grado de intención* existe a lo largo de un continuo, donde el extremo bajo es la falta de intención y el alto es la determinación extrema. El nivel individual de intención es influenciado por las creencias y las emociones de un individuo, incluyendo el conocimiento metacognitivo y los meta deseos (deseos de los deseos). Así como el cambio no es probable si los individuos tienen poca intención de cambio (a menos de que sea un cambio forzado), la determinación extrema por cambiar debería resultar en un cambio conceptual radical defectuoso o positivo, dependiendo de la calidad de la auto–regulación.

La calidad de la auto–regulación se refiere a qué tan efectivamente uno se compromete en un cambio conceptual intencional, donde la baja calidad se refiere a una pobre auto–regulación (una pobre planeación, poco monitoreo o evaluación) y alta calidad se refiere a una auto–regulación excelente (planeación cuidadosa, monitoreo y evaluación). En otras palabras, la auto–regulación efectiva requiere una acción estratégica, basada sobre una cuidadosa auto–apreciación y auto–dirección, que promuevan explicaciones en que voluntad y habilidad estén entretejidas (metacognición y meta deseos).

2.5.4 El cambio conceptual intencional en esta investigación

En esta investigación nuestros esfuerzos se dirigen hacia el logro de un cambio conceptual en los estudiantes respecto de sus concepciones relativas a la ubicación y comportamiento gráfico de las funciones, de forma que éstas se aproximen a las aceptables, aceptables en términos de lo reconocido como tal por la disciplina. Es decir, la intencionalidad a la que Ferrari y Elik se refieren, intentamos provocarla en los estudiantes, aún cuando, la serie de acciones que se emprenden para conseguir tal intencionalidad, para lograr tales cambios, no posee más garantía de éxito, que el estar planeadas tomando en consideración la presencia de concepciones alternativas respecto al tema que nos ocupa y que de entrada son identificadas, la necesidad de provocar constante y consistentemente situaciones en que se expliciten estas concepciones, a la generación a su vez de conflictos conceptuales que evidencien, a los ojos de los estudiantes, la ventaja de la nueva teoría por sobre sus antiguas teorías y el desarrollo de actividades que permitan la consolidación del nuevo conocimiento. En estas condiciones es de esperar una amplia gama de resultados (Fig. 2.15): estudiantes cuyas concepciones no sufran cambio alguno; estudiantes en donde tenga lugar un cambio conceptual defectuoso, es decir, que los estudiantes adquieran concepciones que no son las deseadas; estudiantes en donde solo se logre un cambio conceptual débil en la dirección deseada, esto es, que en ciertas circunstancias las concepciones deseadas se manifiestan y en otras no, y los menos, de acuerdo a la teoría (Pozo, 1996), estudiantes cuyo cambio conceptual respecto de la ubicación y comportamiento de las funciones, se dé, de acuerdo a las concepciones aceptadas por la disciplina.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

La investigación de la cual damos cuenta en esta tesis adopta como tema central el estudio de los cambios conceptuales, especialmente los referidos al análisis de funciones elementales a través de sus gráficas. Los antecedentes ya indicados en el primer capítulo muestran la presencia de concepciones espontáneas que afloran cuando a los estudiantes se les plantean actividades de análisis de gráficas. La pregunta central de esta tesis consiste precisamente en indagar si esas concepciones son estables o cambiantes como consecuencia de un proceso instruccional intencionalmente diseñado para ello. Para encontrar respuesta o respuestas a la pregunta planteada nos propusimos la realización del siguiente programa metodológico:

I. Indagación de los antecedentes

II. Diseño de las actividades de incidencia e instrucción:

   i. Diagnóstico
   ii. Formación de las condiciones de partida del curso
   iii. Diseño de situaciones didácticas
   iv. Puesta en escena del diseño instruccional
   v. Análisis de los resultados

III. Análisis de la estabilidad o cambio de las concepciones de los estudiantes

3.1 Indagación de los antecedentes

Las investigaciones descritas en el Capítulo I, dieron cuenta de una variedad de concepciones alternativas que afloran en estudiantes jóvenes, en estudiantes de bachillerato y universitarios, inclusive en profesores de matemáticas y de física. Estas concepciones fueron identificadas a partir del planteamiento de actividades de lectura y análisis de gráficas y construcción de gráficas a partir de un enunciado verbal o de una situación relacionada con la realidad; a partir de esas producciones es que los investigadores identificaron tales concepciones.

En otro apartado ubicamos las investigaciones realizadas en nuestro país por el grupo del Dr. Crisólogo Dolores, en virtud de que, en todos estos trabajos, el objetivo fue el desarrollo de pensamiento y lenguaje variacional, a través del desarrollo de actividades de análisis y construcción de gráficas de funciones. En todas estas investigaciones, una serie de concepciones alternativas respecto del análisis de funciones fueron reiteradamente encontradas:

- La concepción que considera que una función con imagen positiva es necesariamente creciente.
- La concepción de que una función tiene imagen negativa solo si es decreciente.
- La consideración de los *ceros* de la función como puntos de estabilización
- La concepción de que una función tiene imagen positiva solo si sus abscisas y sus ordenadas son positivas
- La concepción de que una función tiene imagen negativa solo si sus abscisas y sus ordenadas son negativas
- La concepción consistente en considerar a los intervalos como si fueran puntos.
- La concepción de que, en $x = 0$, la función no crece ni decrece.

Lo anterior constituye una abundante y variada evidencia de que antes y después de los cursos ordinarios existen varias concepciones alternativas respecto del análisis de funciones en los estudiantes, y también en profesores. Por esa razón, nosotros estamos interesados en investigar cuáles de esas concepciones son removibles y cuáles se resisten al cambio, pero en condiciones instruccionales predeterminadas.

3.2 Diseño de las actividades de incidencia e instrucción

3.2.1 Diagnóstico

La investigación, en su fase de incidencia a través procesos instruccionales, fue diseñada al estilo de preexperimentos con validación interna pre−post (Hernández, 1997). Las actividades pre–instruccionales consistieron en el diseño, validación y aplicación de instrumentos de diagnóstico a fin de conocer el estado de las ideas de los estudiantes acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas. Los estudiantes cuestionados fueron inmersos después en un proceso instruccional con el fin de estudiar la evolución de esa concepciones.

Los instrumentos de diagnóstico fueron aplicados antes de poner en práctica el diseño instruccional. Mediante estos instrumentos se exploraron sus concepciones previas libres de las posibles influencias que se pudieran ejercer con la puesta en práctica del diseño instruccional. Estos instrumentos de diagnóstico consisten en tres cuestionarios que requirieron de poner en juego procesos de conversión y tratamiento de diferentes sistemas semióticos de representación, como el gráfico, verbal y analítico, pero predominantemente el gráfico. Los cuestionamientos incluidos en estos instrumentos exploratorios (ver Anexo 1) consistieron en la determinación de las zonas o intervalos de crecimiento, decrecimiento, estabilización y la coordinación de propiedades simultáneas tanto de ubicación en el plano como de comportamiento. La aplicación de los cuestionarios fue sin previo aviso y la duración para su solución fue de entre una hora y hora y media, en donde los estudiantes contestaron en forma individual y sin consultar apuntes, calculadoras o bibliografía. La valoración de las producciones de los estudiantes fue analizada bajo la perspectiva cualitativa, pues se pretendió indagar aspectos cualitativos relativos a las concepciones alternativas de los estudiantes.

3.2.2 Formación de las condiciones de partida

En esta etapa el interés estuvo dirigido hacia el estudio del concepto de variable, dominio, rango, y graficación de puntos sobre el plano cartesiano. Se introdujeron las ideas de variable e intervalos de variación, a partir del estudio de fenómenos relacionados con la realidad.

La investigación se llevó a cabo durante la impartición del curso de Cálculo Diferencial e Integral I a un grupo de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas, que se ofrece en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Participaron en la experiencia 14 estudiantes cuyas edades fluctuaban entre los 18 y 21 años. El curso fue trabajado en horario matutino, con tres sesiones de clase semanales: los lunes de 12:00 a.m. a 14:30, los martes de 10:00 a.m. a 11:40 a.m. y los miércoles de 12:00 a.m. a 14:30. El curso inició el 2 de Septiembre del 2002 y concluyó el 29 de Enero del 2003 y su duración fue de 17 semanas; de un total de 136 sesiones de 50 minutos planificadas, fue posible trabajar 125 sesiones efectivas. Cada una de las sesiones de clase fue desarrollada de acuerdo al programa del curso, cuyo diseño obedeció a esta investigación, y que fue proporcionado a los estudiantes al inicio del ciclo escolar.

La mayoría de las actividades que se desarrollaron fueron tomadas del cuaderno didáctico *Una Introducción a la Derivada a Través de la Variación*, (Dolores, 1999), particularmente, las lecciones de la 1 a la 4, que comprenden la PRIMERA PARTE de la obra: **Las variables y las funciones, elementos básicos para el estudio de la variación**: 1. *Las Variables*, 2. *Las Relaciones entre las variables*, 3. *La función: una relación especial entre variables*, 4. *Las gráficas de las funciones* (Tabla 3.1).

1era. FASE: APROXIMACIÓN INTUITIVA UNIDAD I: LAS VARIABLES Y LAS FUNCIONES				
FECHAS	**CLASES**	**TEMAS**	**OBJETIVOS**	**METODOS DE ENSEÑANZA**
Día : Martes 03/09/02	Clase : 2 Horas : 2	Las variables y cómo se representan las variables.	Comprenderá el concepto de variable. Representará intervalos de variación.	Expositivo, de elaboración conjunta, de ejemplificación.
Día : Miércoles 04/09/02	Clase: 3 Horas: 3	Las relaciones entre las variables y la variación.	Comprenderá las funciones como modelos que relacionan a las variables.	Expositivo y de ejemplificación, de elaboración conjunta.
Día : Lunes, Martes 09, 10/09/02	Clase: 4 y 5 Horas : 5	La función como una relación entre variables	Desarrollar la habilidad para la determinar las relaciones entre las variables y su fórmula.	De ejemplificación y de elaboración conjunta.
Día: Miércoles y Lunes 11, 17/09/02	Clase: 6 y 7 Horas : 6	Las gráficas de las funciones.	Desarrollar habilidad para graficar funciones elementales por medio de tabulación	Expositivo, de dirección del trabajo independiente
Día: Miércoles, Lunes y Martes 18,23, 24/09/02	Clase : 8, 9 y 10 Horas : 8	Construcción de gráficas de funciones a través del análisis de sus fórmulas.	Generar habilidad para graficar funciones a través del análisis de sus fórmulas .	De ejemplificación, de elaboración conjunta, de dirección del trabajo independiente, expositivo

Tabla 3.1

3.2.3 Diseño instruccional

Para el diseño instruccional se buscó crear un ambiente gráfico de tal suerte que los estudiantes pudieran adquirir la habilidad de analizar gráficas de funciones. Para ello, las actividades llevadas a cabo en esta etapa se realizaron bajo los siguientes criterios:

- Que los estudiantes utilizaran el registro gráfico y verbal.
- Que posibilitaran la transición del ambiente gráfico al verbal y viceversa.
- Que posibilitaran la aparición de conflictos entre sus concepciones previas y las concepciones aceptables.
- Que posibilitara el análisis y reflexión de sus esquemas conceptuales (su teoría) y el valor de la nuevas concepciones (nueva teoría)

- Que generaran condiciones para poder trascender sus concepciones alternativas.
- Que generaran la posibilidad de discriminación y generalización de las propiedades de las funciones a través de sus gráficas.

3.2.4 Puesta en escena del diseño instruccional

El curso fue estructurado siguiendo un enfoque variacional, considerando al estudio de la variación como un *eje rector* del que se desprendió el contenido matemático a tratar. Bajo estas consideraciones, el contenido matemático no se ciñó necesariamente a la estructura lógico−formal del Análisis Matemático, más bien se trató de una introducción intuitiva e informal, en la primera fase, que tuvo como punto de partida las necesidades de la práctica. Tres nociones físicas fueron las fundamentalmente tratadas: la *variación*, la *rapidez promedio* de la variación y la *rapidez instantánea* de la variación (Tabla 3.2). De aquí que el curso se estructuró en dos etapas. La primera etapa consistió en una aproximación intuitiva hacia los conceptos del cálculo, procedimientos y relaciones fundamentales sobre la base de la creación de un ambiente rico en significados visuales.

UNIDAD II: LA VARIACIÓN Y LA DERIVADA				
FECHAS	**CLASES**	**TEMAS**	**OBJETIVOS**	**METODOS DE ENSEÑANZA**
Día : Lunes 30/09/02	Clase: 12 Horas : 3	¿Cuánto cambia?	Cuantificar el cambio de manera numérica.	Expositivo, de elaboración conjunta, de ejemplificación.
Día : Martes 01/10/02	Clase: 13 Horas : 2	Una notación operativa para cuantificar los cambios.	Que los alumnos se familiaricen con el lenguaje analítico para cuantificar los cambios.	De elaboración conjunta, de dirección del trabajo independiente.
Día : Lunes 7/10/02	Clase: 14 Horas : 3	¿Cómo se comportan los cambios?	Analizar el comportamiento de los cambios para poder describir y predecir el comportamiento de las funciones.	Expositivo, de ejemplificación, de dirección del trabajo independiente.
Día : Martes 08/10/02	Clase: 15 Horas : 2	Los cambios relativos: La rapidez media de variación.	Que los alumnos comprendan que la rapidez es un caso particular de los cambios relativos.	De elaboración conjunta, de ejemplificación.
Día: Miércoles 09/10/02	Clase: 16 Horas: 3	¿Cómo cambia la rapidez y la velocidad media?	Que los estudiantes puedan analizar cómo se comporta la rapidez y la velocidad media.	Expositivo, de elaboración conjunta, ejemplificación.

Día : Lunes y Martes 14, 15/10/02	Clase: 17 y 18 Horas:5	Los cambios infinitamente pequeños y la velocidad instantánea. Interpretación geométrica de la velocidad instantánea.	Que los alumnos puedan calcular la velocidad instantánea por medio de cambios relativos infinitamente pequeños (diferenciales). Que interpreten geométricamente la velocidad instantánea.	De elaboración conjunta, de ejemplificación, dirección del trabajo independiente.
Día : Lunes 21/10/02	Clase: 19 Horas : 3	Calculo de velocidades instantáneas por medios algebraicos. Calculo de las diferencias infinitamente pequeñas.	Utilizar el método algebraico para calcular las velocidades instantáneas. Que puedan obtener diferenciales por medio de las reglas básicas.	De elaboración conjunta, de ejemplificación
Día : Miércoles 23/10/02	Clase: 20 Horas : 3	Otras reglas y fórmulas para calcular diferenciales.	Que los estudiantes trabajen otras reglas y fórmulas para calcular diferenciales.	De elaboración conjunta, de ejemplificación
Día : Lunes 28/10/02	Clase : 21 Horas: 3	La función derivada. Análisis del comportamiento de funciones	Utilizar la función derivada para el analizar el comportamiento de las funciones.	Expositivo, de ejemplificación, de dirección del trabajo independiente.

Tabla 3.2

La segunda estuvo orientada hacia la precisión de sus conceptos y teoremas principales y el manejo de sus procedimientos, todo ello sobre la base de la creación de ambientes de argumentaciones y refutaciones. Mediante este curso pretendimos generar y desarrollar las formas básicas del pensamiento y lenguaje variacional: modelación, predicción, estimación, el cálculo determinístico y análisis general de la variación. El centro de nuestra investigación se ubicó en el trabajo desarrollado en las primeras dos unidades del programa diseñado experimentalmente, aquellas dedicadas al estudio de la variación, la rapidez promedio de la variación y la rapidez instantánea.

3.2.5 Cuestionarios de diagnóstico.

Adicionalmente a los cuestionarios aplicados al inicio y al final del curso, estamos reportando algunos resultados de los primeros dos exámenes parciales aplicados a los estudiantes a lo largo del curso, a los que denominamos intertest 1 e intertest 2 y que revelan el estado de las concepciones de los estudiantes respecto del análisis gráfico de funciones, a medida que la puesta en escena del diseño instruccional fue progresando. El primero de estos exámenes parciales (Anexo 3) fue aplicado el 25 de septiembre del 2002, a tres semanas de haberse iniciado las actividades del curso. El segundo examen parcial (Anexo 4) fue aplicado el 29 de octubre del mismo año, a siete semanas del inicio de la puesta en escena del diseño instruccional.

Los cuestionarios de diagnóstico que constituyeron el pre–test se aplicaron el 2 de Septiembre del 2002, durante la primera clase del curso de Cálculo Diferencial e Integral. El pre–test estuvo constituido por 3 cuestionarios (Anexo 1). Meses después, el 13 de Enero del 2003, en vísperas del cierre del curso, se volvieron a aplicar los mismos instrumentos en lo que constituiría el post–test. Las entrevistas se aplicaron los días 17 y 18 del mismo mes (Anexo 2).

3.2.6 Análisis de los resultados

Se realizaron dos tipos de análisis de los resultados: un análisis global y un análisis longitudinal. El análisis global se realizó con base a los datos colectados en el pretest, intertest 1, intertest 2 y postest a partir de un *diseño de evolución de grupo* (Hernández, 1995), cuyo propósito es examinar cambios a través del tiempo en las concepciones de los estudiantes pero a nivel grupal. Además, para cada uno de los siete estudiantes entrevistados (solo se reportan las entrevistas realizadas el primer día, siete; las siete restantes mostraron evidencia de contaminación, producto de la comunicación con los primeramente entrevistados), se desarrolló un análisis de los datos recabados a partir de un *diseño longitudinal* (ídem) que incluyeron los resultados del pretest, intertest 1, intertest 2 y postest y de las producciones de cada uno de estos estudiantes obtenidas durante su entrevista; este análisis fue de carácter cualitativo. Esto consistió en observar y analizar las producciones de los estudiantes en las actividades variacionales planteadas. Estas producciones, respuestas o procesos de resolución, quedaron plasmadas en los cuestionarios. El desarrollo de las habilidades se valora por lo que los estudiantes son capaces de hacer cuando se les plantea una situación o un problema variacional. Durante las entrevistas, se tuvo la ventaja de contar con las producciones que no fueron plasmadas en el cuestionario, es decir, los dibujos, esbozos, operaciones, o incluso los *borrones* que los estudiantes hicieron, indicadores de sus habilidades o de los obstáculos o dificultades que enfrentaron en el proceso. En cada uno de los análisis longitudinales realizados, se le dio seguimiento a la evolución de las ideas de los estudiantes para identificar la permanencia o cambio de las concepciones que inicialmente manifestaron acerca del análisis de funciones.

CAPÍTULO IV

LAS RESPUESTAS EN EL PRE-TEST, INTER TEST Y POS-TEST

La población con la que se desarrolló la investigación fueron 14 estudiantes del grupo de 1er Semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la UAG. A estos 14 estudiantes se les aplicó el pre–test el primer día de clases, 2º de Septiembre del 2002 de lo que fue su curso de Cálculo Diferencial e Integral en la Ciudad de Chilpancingo, capital del estado de Guerrero. El pre–test estuvo constituido por los **Cuestionarios 1**, **2** y **3** (Anexo 1) y el post–test consistió de los mismos cuestionarios además de una entrevista (Anexo 2).

En el Cuestionario 1, se exploraron las ideas de los estudiantes en torno de la ubicación de las funciones: funciones con imágenes positivas y negativas, en torno del comportamiento de las funciones: funciones crecientes y decrecientes, y en relación a los puntos estables de las funciones. En todo el cuestionario las preguntas fueron planteadas usando lenguaje verbal y gráfico. En el Cuestionario 2, se exploraron las ideas de los estudiantes relativas a la ubicación y al comportamiento de las funciones: funciones con imágenes positivas y crecientes, funciones con imágenes negativas y crecientes, funciones con imágenes positivas y decrecientes, funciones con imágenes negativas y decrecientes y puntos en donde las funciones se estabilizan. En este instrumento, todas las preguntas fueron formuladas usando lenguaje verbal y analítico. En el Cuestionario 3, se analizaron las ideas de los estudiantes en torno de las funciones que cumplen con las condiciones: $f(x)>0$ y $f'(x)<0$, $g(x)<0$ y $g'(x)>0$, $h(x)>0$ y $h'(x)>0$, $y<0$ y $y'<0$, las x para las que se cumple $f'(x)=0$; y la evaluación de $f'(x)=0$. En todo este instrumento se utilizó lenguaje analítico y gráfico. Las preguntas incluidas en la entrevista, planteadas verbalmente, requirieron que los estudiantes construyeran gráficas de funciones con imágenes positivas, funciones con imágenes negativas, funciones con imágenes positivas y crecientes, funciones con imágenes negativas y crecientes, funciones con imágenes positivas y decrecientes y funciones con puntos de estabilización.

El 25 de septiembre del 2002, a tres semanas de haberse iniciado el curso se aplicó un test (Anexo 3) para conocer el estado de sus concepciones respecto del análisis gráfico de funciones. El 29 de octubre, después de siete semanas de iniciada la puesta en escena del diseño instruccional se aplicó otro test (Anexo 4). El 13 de Enero del 2003, aproximándose el final del curso, se volvieron a aplicar los mismos instrumentos exploratorios aplicados al inicio del curso en lo que constituiría el post–test. Las entrevistas se aplicaron los días 17 y 18 del mismo mes.

Enseguida presentamos los análisis longitudinales de los siete estudiantes entrevistados, mismos que incluyen los resultados del los pre–inter–post test. En cada uno de estos análisis, se hace un seguimiento de la evolución de las ideas de estos estudiantes para identificar la permanencia o cambios de las concepciones que inicialmente manifestaron respecto del análisis de funciones. En la segunda parte del capítulo, se presenta el análisis global de los resultados obtenidos.

4.1 Análisis longitudinales

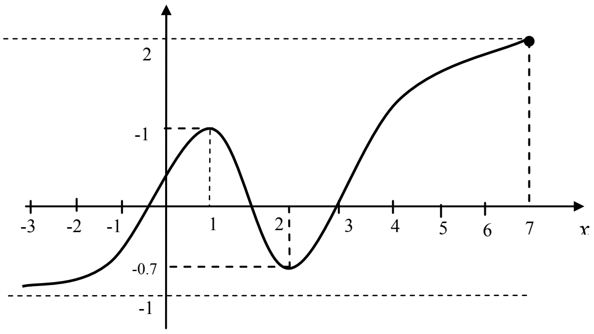
<u>Yuridia</u>

a. Concepciones relativas a la ubicación de la gráfica.

Función con imagen positiva

Pre–test. Cuando se le pregunta por el intervalo donde la función tiene imagen positiva (ver Tabla 4.1), es observable que Yuridia en la respuesta dada a la pregunta 1A (Fig. 4.2) privilegia la función con imagen positiva como aquella que tiene abscisas positivas; en el segundo caso, pregunta 1B (Fig.4.3), es manifiesta explícitamente la relación que establece entre función con imagen positiva con aquella cuya gráfica tiene abscisas positivas. En sus respuestas son apreciables sus inconsistencias; en la primera pregunta su respuesta es aceptable pero en el segundo caso no.

Inter–test. Al analizar la función cuya gráfica se encuentra en la Fig. 4.1,

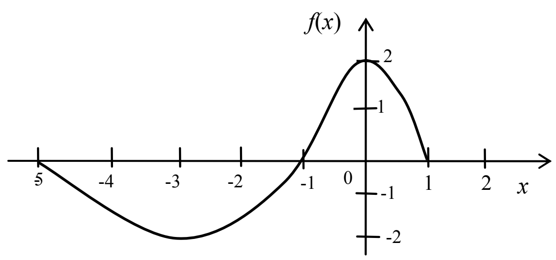


a) ¿Cuál es el dominio de y?______________
b) ¿Cuál es su imagen?__________________
c) ¿Para qué x, y crece? __________________
d) ¿Para qué x, y decrece? _______________
e) ¿Para qué x, y no crece ni decrece?_______
f) ¿Para qué x, $y > 0$? ___________________
g) ¿Para qué x, $y < 0$?___________________
h) ¿Para qué x, $y = 0$?___________________

Fig. 4.1 Función analizada en el test aplicado el 25 de septiembre

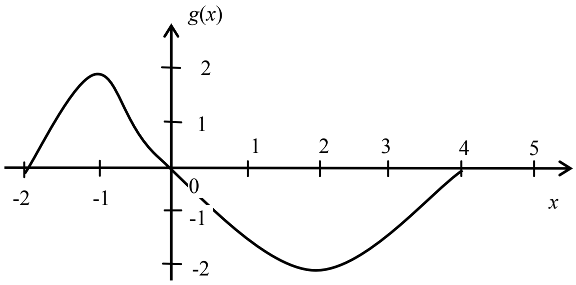
Yuridia contesta que la función es positiva en los intervalos **$–0.4 < x < 1.6$** y **$3 < x < 7$**, respuesta que es aceptable y que denota cambios en sus concepciones respecto de las respuestas dadas por ella en el pre–test.

Post–test. Las respuestas dadas a las preguntas del pre–test después del diseño instruccional son consistentemente aceptables. Esto es confirmado por las gráficas que Yuridia dibujó (Fig. 4.4) cuando se le pidió construir gráficas de funciones con imágenes positivas; en todos los casos las gráficas reúnen las condiciones solicitadas y los argumentos que esgrime son tales como: "es positiva porque la gráfica está por arriba del eje *x*", y "es negativa porque está debajo del eje *x*".



A) De 0 a 1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a –1 F) Otra:_____

Fig. 4.2. Pregunta 1A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 4 C) De 2 a 4
D) De –1 a 2 E) De –2 a –1 F) Otra:_____

Fig. 4.3. Pregunta 1B

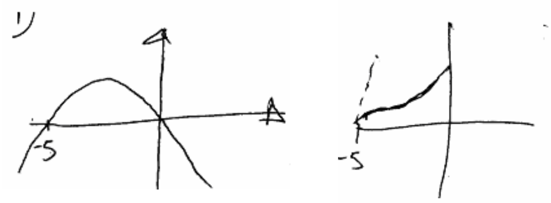


Fig. 4.4 Gráficas para funciones con imágenes positivas, construidas en el post–test

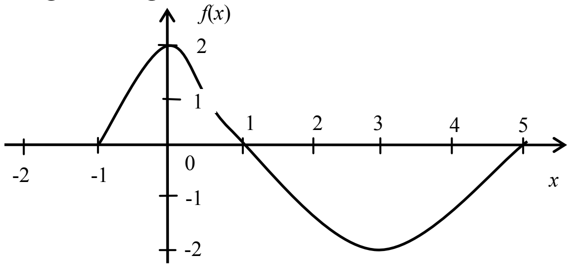
TABLA 4.1 Función positiva	Concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**intertest**	**Postest y entrevista**
La función es positiva donde sus ordenadas son positivas (aceptable)	—	✓	✓
La función tiene imagen positiva si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son positivas	✓	—	—
La función tiene una imagen positiva si su gráfica está ubicada en el primer cuadrante, donde las abscisas y las ordenadas son positivas.	—	—	—
La función es positiva si su gráfica comienza a trazarse arriba del eje de las abscisas	—	—	—
La función es positiva si es creciente	—	—	—
La función es positiva si sus abscisas son positivas y es creciente	—	—	—
El intervalo en donde una función es positiva queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	—	—	—

Función negativa

Pre–test. En las respuestas dadas por Yuridia a la pregunta 3A, relativa al intervalo donde la función tiene imagen negativa (Fig. 4.5, Tabla 4.2), establece relación entre una función con imagen negativa con aquella porción de la gráfica cuyo intervalo tiene abscisas negativas a pesar de que está por arriba del eje *x*; en el segundo caso, en la pregunta 3B (Fig. 4.6), la respuesta es análoga a la anterior: elige como intervalo para la función con imagen negativa donde la gráfica tiene abscisas negativas y ordenadas positivas. Sus repuestas son consistentemente inaceptables pues en ambos casos considera que una función tiene imagen negativa por el sólo hecho de tener abscisas negativas sin importar el signo de las ordenadas.

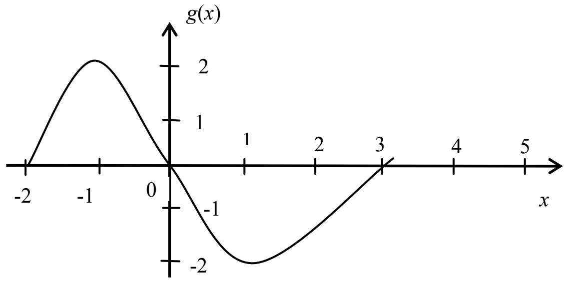
Inter–test. Para Yuridia la función es negativa (Fig. 4.1) en los intervalos **$-\infty < x < -0.4$** y **$1.6 < x < 3$**, intervalos en donde efectivamente la función es negativa. Es apreciable el cambio en sus concepciones iniciales.

Post–test. Las respuestas dadas son consistentemente aceptables, además éstas dan idea de haber logrado mayor generalización ya que propone respuestas aceptables que no estaban contempladas en las opciones dadas. Lo anterior se confirma con las gráficas que Yuridia dibujó cuando se le pidió construir gráficas de funciones con imágenes negativas (Fig. 4.7). En ambos casos sus producciones corresponden a las características especificadas y argumenta, al preguntarle el por qué de sus producciones que: "una función negativa es aquella que se encuentra por debajo del eje *x*". Nótese que dos de tales gráficas son dibujadas con ciertos titubeos, primero las dibuja por arriba del eje *x*; luego corrige.



A) De –1 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De 0 a 5 E) De 3 a 5 F) Otra:_____

Fig. 4.5 Pregunta 3.A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De –2 a –1 E) De 1 a 3 F) Otra:_____

Fig. 4.6 Pregunta 3.B

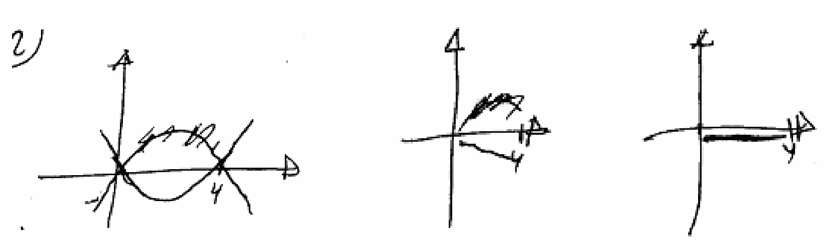


Fig. 4.7 Gráficas para funciones con imágenes negativas dibujadas por Yuridia

TABLA 4.2 Función negativa	Concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**intertest**	**Postest**
La función es negativa donde sus ordenadas son negativas (aceptable)	–	✓	✓
La función tiene imagen negativa si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son negativas.	✓	–	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse abajo del eje de las abscisas	–	–	–
El intervalo en donde una función es negativa queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	–	–	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse debajo del eje de las abscisas	–	–	–
Una función es negativa si es decreciente	–	–	–

b. Concepciones relativas al comportamiento de la función.

Función creciente

Pre–test. Al revisar las respuestas proporcionadas por Yuridia a las preguntas relativas a una función creciente (ver Tabla 4.3) para ambas gráficas de la pregunta 2 del Cuestionario 1 (Figs. 4.9 y 4.10) encontramos que son aceptables y consistentes, pues selecciona los intervalos donde en efecto $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{g(x)}$ crecen.

Inter–test. La función de la Fig. 4.1, para Yuridia es creciente en los intervalos $\boldsymbol{-\infty < x < 1}$ y $\boldsymbol{2 < x < 7}$, respuesta aceptable. Siete semanas después de iniciado el curso, (el 29 de octubre del 2002) se aplica un nuevo test, en donde se pregunta en dónde crece la función de la Fig. 4.8:

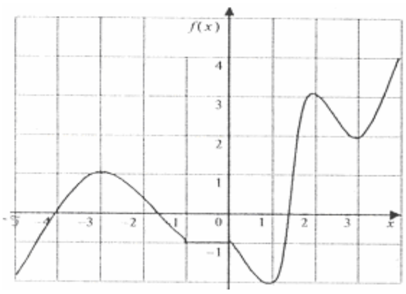


Fig. 4.8. Gráfica de la función analizada en el test aplicado el 29 de octubre del 2002 (a siete semanas de iniciado el curso)

a) ¿Cuánto cambia *f* si *x* cambia de -5 a -4?__ ¿Cuánto cambia *f* si *x* cambia de -1 a 0?___ ¿Cuánto lo hace si *x* cambia de 1 a 2? ____ ¿Dónde creció con mayor rapidez?______

b) Si *x* cambia de izquierda a derecha, es decir $\Delta x > 0$. ¿Para qué *x*, se cumplen las desigualdades siguientes:

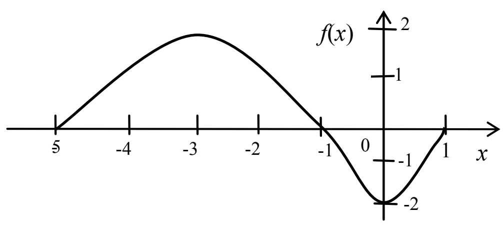
$f(x + \Delta x) - f(x) > 0$: ________________________

$f(x + \Delta x) - f(x) < 0$: ________________________

$f(x + \Delta x) - f(x) = 0$: ________________________

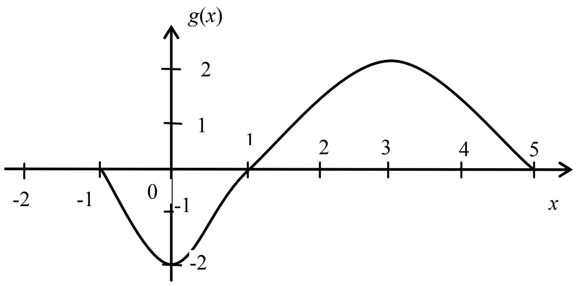
Para esta estudiante la función crece en los intervalos $\boldsymbol{-5 < x < -3}$, $\boldsymbol{1 < x < 2}$ y $\boldsymbol{3 < x < 4}$, respuesta que es aceptable.

Post–test. Las respuestas obtenidas son aceptables. Estos resultados son congruentes con sus producciones realizadas durante la entrevista (Fig. 4. 12), en donde expresa que: “una función es creciente cuando, a medida que crecen los valores en el eje de las ***x***, crecen también en el eje de las ***y***”.



A) De –5 a –1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a –3 E) De 0 a 1 F) Otra:_____

Fig. 4.9 Pregunta 2.A



A) De 1 a 5 B) De –1 a 1 C) De 0 a 3
D) De 0 a 5 E) De –1 a 0 F) Otra:____

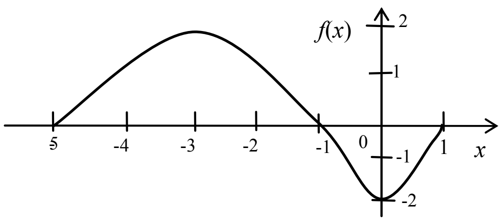
Fig. 4.10 Pregunta 2.A

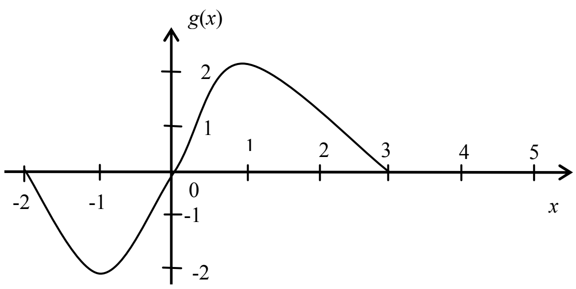
TABLA 4.3 Función creciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es creciente si sus ordenadas son positivas	–	–	–	–
La función es creciente si su imagen es negativa	–	–	–	–
La función es creciente si, a medida que crecen las abscisas crecen sus ordenadas (aceptable)	✓	✓	✓	✓
Si la gráfica de la función sube, la función es creciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	–
El intervalo donde la función es creciente queda determinado por los valores numéricos más próximos a sus límites	–	–	–	–
La función es creciente si sus abscisas son positivas	–	–	–	–

Función decreciente
Pre–test. Igual que en la pregunta anterior, las respuestas proporcionadas por Yuridia (ver TABLA 4.4) para ambas gráficas de la pregunta 4 del Cuestionario 1 (Fig. 4.11 y 4.12) cumplen con la condición especificada.

Inter–test. Para Yuridia la función de la Fig. 4.1 es decreciente en el intervalo $\mathbf{1 < x < 2}$, respuesta que es aceptable. A siete semanas del comienzo del curso, Yuridia considera que la función de la Fig. 4.8, decrece en los intervalos $\mathbf{-3 < x < -1}$, $\mathbf{0 < x < 1}$ y $\mathbf{2 < x < 3}$, respuesta que también es aceptable.

Post–test. No se observa cambio alguno respecto del pre–test. Estos resultados son confirmados por sus producciones durante la entrevista, (Fig. 4.18) durante la cual expresa que “una función es decreciente cuando, a medida que crecen los valores en el eje de las ***x***, disminuyen en el eje de las ***y***”.





A) De –5 a –1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a – 3 F) Otra:_____

A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De –2 a –1 E) De 1 a 3 F)

Fig. 4.11 Pregunta 4.A

Fig. 4.12 Pregunta 4.B

TABLA 4.4 Función decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es decreciente si sus ordenadas son negativas	–	–	–	–

La función es decreciente si, a medida que crecen las abscisas decrecen sus ordenadas (aceptable)	✓	✓	✓	✓
Si la gráfica de la función baja, la función es decreciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	–
La función es decreciente si sus abscisas son negativas	–	–	–	–
La función es decreciente si, además de cumplir esta condición, es negativa	–	–	–	–
La función es decreciente si sus abscisas y sus ordenadas son negativas	–	–	–	–

c. Concepciones relativas a la ubicación y al comportamiento de las funciones.

Función con imagen positiva y creciente. La única gráfica seleccionada por la estudiante en el pre–test (ver TABLA 4.5) en la pregunta 1 del Cuestionario 2 (Fig. 4. 13) tiene imagen positiva y es creciente pero, a diferencia de las otras dos (opciones C y E) que también cumplen con estas condiciones, tiene la particularidad de que sus abscisas son positivas. Es muy probable que la elección haya sido hecha porque las condiciones positiva y creciente, son asociadas fuertemente con gráficas que tienen abscisas y ordenadas positivas; las opciones C y E no fueron elegidas seguramente porque tienen abscisas negativas. En el post–test se manifiestan ideas aceptables de mayor generalización respecto del pre-test, pues no sólo elige la opción A, sino también las opciones C y E. Aquí los cambios conceptuales ganan en generalización. Las producciones de la estudiante durante la entrevista (Fig. 4.14) en donde Yuridia argumenta que "una función es positiva porque la gráfica está por arriba del eje ***x***" y que "una función es creciente cuando, a medida que crecen los valores en el eje de las ***x***, crecen también en el eje de las ***y***" corroboran estas observaciones. De lo anterior encontramos que con posterioridad al post–test en el estudiante coexisten una mezcla de ideas respecto de la ubicación y comportamiento de las funciones

1. Subraya el o los incisos que corresponden a gráficas de funciones que son a la vez **positivas y crecientes**.

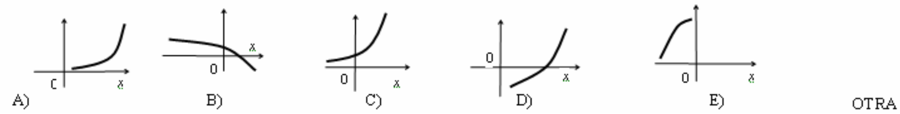


Fig. 4.13 Pregunta 1

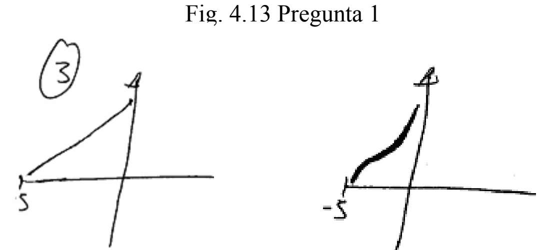


Fig. 4.14 Gráficas para funciones con imágenes positivas y crecientes dibujadas por Yuridia

TABLA 4.5 Función positiva y creciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓

La función es positiva y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	✓	–
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–

Función con imagen negativa y creciente. En este caso encontramos en el pre–test, que la única gráfica seleccionada por Yuridia en la pregunta 2 del Cuestionario 2 (Fig.4. 15) tiene imagen negativa y es creciente, al igual que las gráficas B y E (ver TABLA 4.6) pero, a diferencia de ellas, tiene sus abscisas negativas. Nuevamente la suposición es que la estudiante hace su elección porque asocia fuertemente las condiciones negativa y creciente con gráficas que además de creciente y negativa tienen abscisas negativas; esto explicaría el porqué las gráficas B y E no fueron elegidas. En el post–test se observan ideas aceptables y consistentes pues es evidente que cuando Yuridia elige las opciones B, D y E, ha generalizado su idea de función con imagen negativa y creciente enriqueciendo esta generalización el cambio conceptual. Esto lo corroboramos con los resultados de la entrevista (Fig. 4.16) en donde reitera que: "una función es negativa cuando su gráfica está por debajo del eje ***x***" y que "una función es creciente cuando a medida que crecen los valores en el eje de las ***x***, crecen en el eje de las ***y***".

2. Subraya el o los incisos que corresponden a gráficas de funciones que son a la vez **negativas y crecientes**.

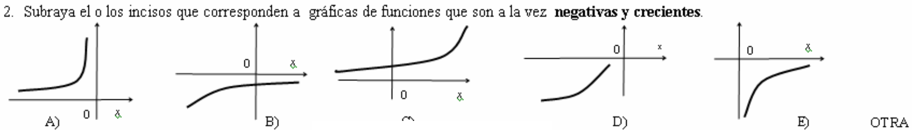


Fig. 4.15 Pregunta 2

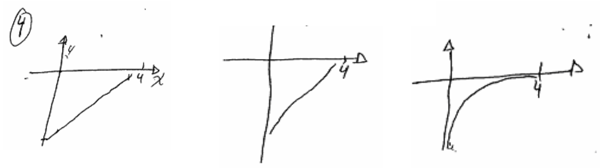


Fig. 4.16 Gráficas para funciones con imágenes negativas y crecientes dibujadas por Yuridia

TABLA 4.6 Función negativa y creciente	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es negativa y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es negativa y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	✓	–
La función es negativa si comienza a trazarse abajo del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–

Función con imagen positiva y decreciente. Cuando a Yuridia se le cuestiona en torno de las funciones con imágenes positivas y decrecientes, en el pre–test, en la pregunta 3 del Cuestionario 2 (Fig. 4.17) solo selecciona la gráfica C (ver TABLA 4.7), que además de tener imagen positiva y ser decreciente, a diferencia de las gráficas A y E que también cumplen estas condiciones, tiene sus abscisas positivas manifestando de esta manera el fuerte vínculo que la estudiante establece entre funciones con imágenes positivas y decrecientes con las gráficas de funciones que tienen abscisas y ordenadas positivas. En el post–test encontramos ideas aceptables y consistentes con un mayor grado de generalización respecto del pre–test y esta observación es reiterada por las producciones de la estudiante durante la entrevista (Fig. 4.18) en donde expresa que "una función es positiva porque la gráfica está por arriba del eje ***x***" y "es decreciente cuando a medida que crecen los valores en el eje de las ***x***, disminuyen en el eje de las ***y***".

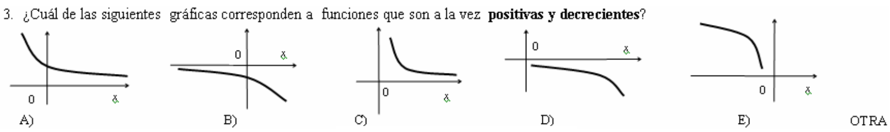


Fig.4.17 Pregunta 3

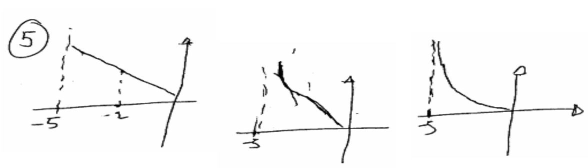


Fig. 4.18 Gráficas para funciones con imágenes positivas y decrecientes dibujadas por Yuridia

TABLA 4.7 Función positiva y decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es positiva y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	✓	–
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es decreciente si baja, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–

Función negativa y decreciente. Al solicitarle a Yuridia que discrimine las funciones con imágenes negativas y crecientes durante el pre–test, (pregunta 4 (Fig. 4.19) se manifiestan concepciones similares a las anteriores. Entre las cinco opciones disponibles ella solo elige aquella gráfica que además de tener imagen negativa y ser decreciente (opción E) posee abscisas negativas (ver TABLA 4.8) lo que muestra su tendencia a privilegiar la asociación de las funciones con imágenes negativas y decrecientes con las gráficas que además de cumplir estas dos condiciones tienen abscisas negativas. En el post–test Yuridia muestra concepciones aceptables y consistentes, cuyo grado de generalización es mayor respecto del pre–test. Las gráficas construidas por Yuridia durante la entrevista (Fig. 4.7 y 4.18) y sus argumentaciones ("una función negativa es aquella que se encuentra por debajo del eje ***x***" y "una función es decreciente cuando a medida que crecen los valores en el eje de las ***x***, disminuyen en el eje de las ***y***") confirman estas observaciones.

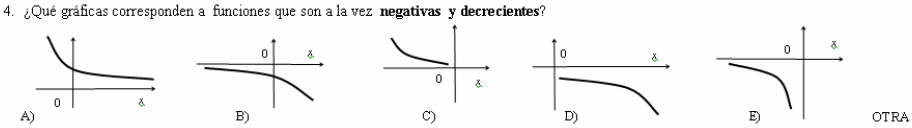


Fig. 4.19

TABLA 4.8 Función negativa y decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es negativa y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es negativa y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	✓	–

d. Concepciones relativas a la estabilidad de una función.

a) Pre–test. Observamos cómo Yuridia, en la pregunta 5 del Cuestionario 1 (Fig. 4.20), ofrece respuestas aceptables y consistentes (ver TABLA 4.9) y debemos hacer notar que incluso identifica como punto donde la función no crece ni decrece a $\boldsymbol{x = -3}$, valor que no formaba parte de las opciones explícitamente disponibles.

   Inter–test. A tres semanas de iniciado el curso, al analizar la función de la Fig. 4.1, esta estudiante opina que ésta no crece ni decrece en $\boldsymbol{x = 1}$ y $\boldsymbol{x = 2}$, respuesta que es aceptable. En el test aplicado siete semanas después del inicio del curso, respecto de la función de la Fig. y, esta estudiante opina que no crece ni decrece en el intervalo $\boldsymbol{-1 < x < 0}$, respuesta aceptable pero incompleta, pues la función tiene dos puntos máximos y dos puntos mínimos. Evidentemente, para esta estudiante la estabilización, en este caso, solo se da en intervalos donde la función es visiblemente horizontal.

   Post–test. Sus respuestas no cambiaron respecto del pre–test, y sus concepciones son corroboradas por sus producciones (Fig. 4.21) y los argumentos esgrimidos durante la entrevista, en donde ella manifiesta que "la función se estabiliza en aquellos puntos en donde no crece ni decrece".

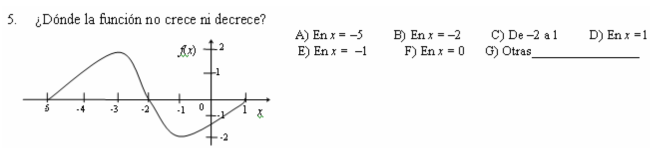


Fig. 4.20

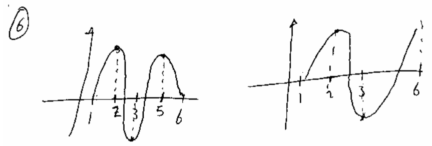


Fig. 4.21 Gráfica de una función con puntos en donde se estabiliza su comportamiento dibujada por Yuridia

TABLA 4.9 Función que no crece ni decrece	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica o en donde ésta sea horizontal (aceptable)	✓	✓	✓	✓
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en los puntos donde la gráfica intercepta al eje x	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en los intervalos donde su gráfica es horizontal	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en sus puntos máximos, en sus puntos mínimos y en las intersecciones con el eje de las abscisas	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en $x = 0$ y $y = 0$	–	–	–	–

b) En el pre–test, para la pregunta 5 del Cuestionario 2 referida a los puntos de estabilización de ***f*(*x*)** (Fig. 4.22) la respuesta de Yuridia es aceptable pero incompleta (ver TABLA 4.10), pues omite considerar $\boldsymbol{x = -1}$ como punto donde ***f*(*x*)** se estabiliza; su respuesta respecto de ***g*(*x*)** es aceptable. En el post–test sus respuestas son aceptables y consistentes observándose un mayor grado de generalización en ellas, e incluso coinciden con sus producciones y argumentos construidos durante la entrevista (Fig. 4.21), en donde ella manifiesta que "la función se estabiliza en aquellos puntos en donde no crece ni decrece".

5. ¿Para qué x, las siguientes gráficas contienen puntos o zonas donde se **estabiliza** el comportamiento de las funciones que representan?

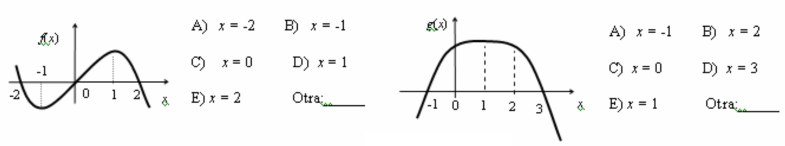


Fig. 4.22

TABLA 4.10 Puntos o intervalos donde una función estabiliza su comportamiento	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Una función se estabiliza en los puntos máximos y mínimos de su gráfica	✓	✓
Una función se estabiliza en los puntos donde la gráfica intercepta al eje x	–	–

Una función se estabiliza en la vecindad de un punto máximo	–	–
Una función se estabiliza en $x = 0$	–	–

e. Concepciones manifestadas usando los registros analítico y gráfico

Funciones que cumplen con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. En el pre–test, en la pregunta 1 del Cuestionario 3 (Fig. 4.25) la respuesta dada por Yuridia es aceptable pero restringida, pues solo elige una (opción E) de las tres gráficas que cumplen con las condiciones especificadas (ver TABLA 4.11), aquella que además cumple con $x < 0$, es decir, establece una asociación entre las funciones que cumplen con $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ y las que cumplen con $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $x < 0$. En el post–test elige solo dos de las gráficas que cumplen las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$; su ganancia en generalidad es mayor en esta última respuesta respecto del pre–test, pero aún es incompleta.

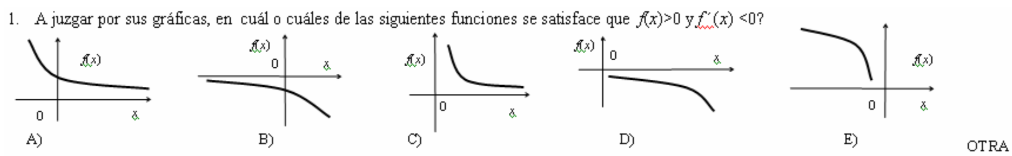


Fig. 4.23

TABLA 4.11 Función que cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $x < 0$ y otra parte que cumple con $x > 0$	–	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, además de cumplir con estas condiciones cumple con $x > 0$	✓	–

Funciones que cumplen con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. La respuesta dada por Yuridia en el pre–test, en la pregunta 2 del Cuestionario 3 (Fig. 4.24) es incompleta pues solo elige una opción (E) de las tres gráficas que cumplen con las condiciones especificadas (ver TABLA 4.12); quizá esto se deba a que esta función es la única que cumple con $x > 0$, es decir, que las condiciones especificadas son asociadas con las condiciones $g(x) < 0$ y $x > 0$. En el post–test elige las tres gráficas que cumplen con $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$, es decir, la respuesta es completa y consistentemente aceptable.

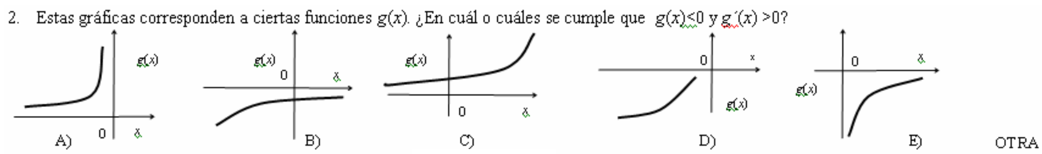


Fig. 4.24

TABLA 4.12 Función que cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $\boldsymbol{x < 0}$ y otra parte que cumple con $\boldsymbol{x > 0}$	–	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ cuando cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{x > 0}$	✓	–

Funciones que cumplen con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$. En la pregunta 3 del Cuestionario 3, en el pre–test, (Fig. 4.25) la respuesta dada por Yuridia es incompleta pues solo elige una (opción A) de las tres gráficas que cumplen con las condiciones especificadas (ver TABLA 4.13); probablemente en esta elección ella esté atendiendo al hecho de que esta función cumple con $\boldsymbol{x > 0}$ y esta condición la relaciona con $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$. Durante el post–test elige las tres gráficas que cumplen con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$.

3. Las siguientes gráficas corresponden a ciertas funciones $h(x)$. ¿Cuál o cuáles de ellas son tales que $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$?

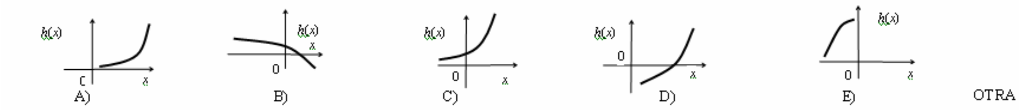
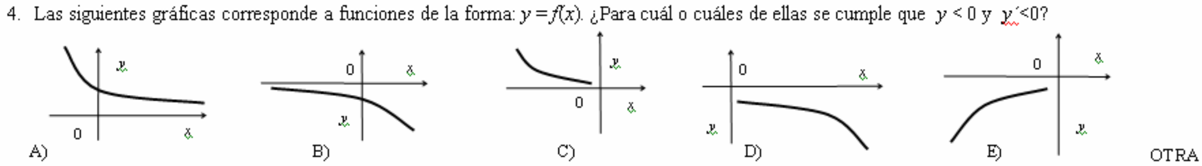


Fig. 4.25

TABLA 4.13 Función que cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x > 0}$	✓	–

Funciones que cumplen con las condiciones: $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{y' < 0}$. En el pre–test, en la pregunta 4 del Cuestionario 3 (Fig. 4.26) la respuesta dada por Yuridia (opción E) no es aceptable (ver TABLA 4.14) pues si bien las ordenadas de $\boldsymbol{y}$ son negativas no satisface $\boldsymbol{y' < 0}$; suponemos que esta función es elegida debido a que se asocian las funciones que cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{y' < 0}$, con las que cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{x < 0}$.En el post–test elige las tres gráficas que cumplen con las condiciones $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{y' < 0}$, es decir, la respuesta es consistentemente aceptable.

4. Las siguientes gráficas corresponde a funciones de la forma: $y = f(x)$. ¿Para cuál o cuáles de ellas se cumple que $y < 0$ y $y' < 0$?



- Fig. 4.26

TABLA 4.14 Función que cumple con las condiciones $y(x) < 0$ y $y'(x) < 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $y(x) < 0$ y $y'(x) < 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $y(x) < 0$ y $y'(x) < 0$ cuando cumple con $x < 0$ y $y < 0$	✓	–

Puntos que cumplen con la condición $f'(x) = 0$. Yuridia contestó, en el pre–test, en la pregunta 5 del Cuestionario 3 (Fig. 4.27) dando uno de los puntos de corte de la curva con el eje x, que en este caso es precisamente el origen. En el post–test, elige los dos puntos que satisfacen la condición (ver TABLA 4.15). En el pre–test es evidente la asociación de la condición $f'(x) = 0$ con el origen o punto de corte de la gráficas con el eje x, en cambio la relación en el post–test es con el máximo y con el mínimo de la función.

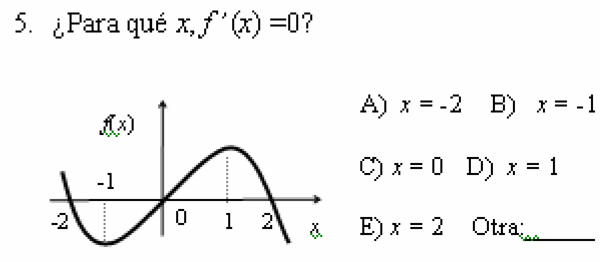


Fig. 4.27

TABLA 4.15 Puntos que cumplen con la condición $f'(x) = 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Los puntos que cumplen con la condición $f'(x) = 0$ son los máximos y mínimos de la función (aceptable)	–	✓
En $x = 0$ se cumple la condición $f'(x) = 0$	✓	–
En sus intersecciones con el eje x se cumple la condición $f'(x) = 0$	–	–

Determinación de la $f'(x)$ en un punto dado. En el pre–test, en la pregunta 6 del Cuestionario 3 (Fig. 4.28) se da una respuesta tal que asocia a $f'(1)$ a la ordenada de la función primitiva en ese mismo punto; para ella la igualdad $f'(1) = f(1)$ es cierta en términos gráficos (ver TABLA 4.16). En el post–test, la respuesta de Yuridia cambia y ahora la asocia con la pendiente de la tangente en ese punto.

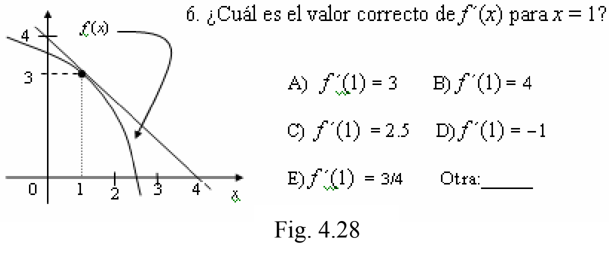


Fig. 4.28

TABLA 4.16 $f'(x)$ en un punto dado	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la pendiente de la tangente a la función en ese punto (aceptable)	–	✓
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la $f(x)$ en ese punto	✓	–
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la abscisa del punto en donde la tangente en el punto x cruza al eje x	–	–

f. Análisis comparativos de las preguntas paralelas. Las planteadas verbalmente y las planteadas analíticamente

Función con imagen positiva y creciente y función que cumple con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$. Al revisar las respuestas de Yuridia a la pregunta planteada verbalmente, en el pre–test asocia las gráficas con imágenes positivas y crecientes con las que además de cumplir estas condiciones tienen abscisas positivas; en el post–test la respuesta es aceptable y consistente, inclusive con las gráficas y las explicaciones que proporcionó durante su entrevista. Cuando se plantea la misma pregunta usando notación analítica, en el pre–test ella relaciona las funciones que cumplen con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$ con las que cumplen con $h(x) > 0$, $h'(x) > 0$ y $x > 0$; en el post–test responde aceptablemente y manifiesta la misma consistencia en ambas respuestas (ver Figs. 4.13, 4.14, 4.25, Tablas 4.5 y 4.12). De los resultados anteriores podemos decir que en este caso, la consistencia en las respuestas de esta estudiante fue muy alta, pues sus respuestas fueron iguales aunque cambiara el lenguaje en el planteamiento de la pregunta.

Función con imagen negativa y creciente y función que cumple con $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. Cuando esta pregunta se plantea en forma verbal, en el pre–test asocia fuertemente las funciones con imágenes negativas y crecientes con gráficas que tienen abscisas y ordenadas negativas; en el post–test las respuestas de Yuridia son aceptables y consistentes, considerando incluso las producciones y comentarios hechos por la estudiante durante la entrevista. Cuando el planteamiento de la pregunta incluye el uso de lenguaje analítico en el pre–test relaciona las funciones que cumplen con $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ con aquellas que, además de cumplir estas condiciones cumplen con $x < 0$, es decir, parece ser que responde atendiendo al operador "<". En el post – test elige las tres gráficas que cumplen con $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ (ver Figs. 4.15, 4.16, 4.24 y Tablas 4.6, 4.11). En esta ocasión, es muy alta la consistencia de las respuestas de Yuridia pues no cambian pese al cambio en el lenguaje usado en la pregunta.

Función con imagen positiva y decreciente y función que cumple con $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. Al plantear la pregunta verbalmente, en el pre–test asocia las funciones con imágenes positivas y decrecientes con las gráficas de funciones que tienen abscisas y ordenadas positivas. En el post–test su respuesta es aceptable. Cuando la pregunta se plantea usando la notación analítica, en el pre–test asocia las funciones que cumplen con $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$, con aquellas que, además de obedecer a estas condiciones, cumplen con $x < 0$. En el post–test elige solo dos de las gráficas que cumplen las condiciones: $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$. Evidentemente, en esta pregunta, el manejo del lenguaje analítico es más complejo para esta estudiante, que el manejo del lenguaje verbal (ver Figs. 4.17, 4.18, 4.23 y Tablas 4.7 y 4.10).

Función con imagen negativa y decreciente y función que cumple con $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{y' < 0}$. Al hacer la pregunta usando lenguaje verbal, en el pre–test, Yuridia asocia las funciones con imágenes negativas y decrecientes con las gráficas que tienen abscisas y ordenadas negativas; en el post–test Yuridia muestra concepciones aceptables y consistentes. Cuando la pregunta se plantea con lenguaje analítico, ella asocia las funciones que cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ **y** $\boldsymbol{y' < 0}$, con las que cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{x < 0}$. En el post–test su respuesta es aceptable. Nuevamente, observamos un desempeño muy consistente por parte de la estudiante, tanto en el pre–test como en el post–test, cuando el cuestionamiento se hace verbalmente y cuando se hace analíticamente (ver Figs. 4.19, 4.26 y Tablas 4.8, 4.13).

Función que no crece ni decrece y función que cumple con $\boldsymbol{f'(x) = 0}$. En el caso de Yuridia, se observan fuertes consistencias en sus respuestas a las preguntas planteadas en forma verbal tanto el pre–test como en el post-test y en la gráficas dibujadas por ella misma en las actividades finales. Sin embargo cuando la misma pregunta fue planteada en términos analíticos en el pre-test la asocia con el origen o el punto de corte de la gráfica con el eje $\boldsymbol{x}$ y en el post-test se nota claramente la asociación que hace con los máximos y mínimos de la curva dada. Al principio del curso su lenguaje analítico es asociado a concepciones alternativas; al final del mismo ese mismo lenguaje es asociado con concepciones aceptables, el lenguaje verbal parece no ofrecer mayores problemas para relacionarlos con las condiciones gráficas de estabilización de las funciones (ver Figs. 4.20, 4.22, 4.27 y Tablas 4.9, 4.10, 4.15).

En términos globales, las respuestas ofrecidas por Yuridia en todos los test conjuntamente con sus argumentaciones dadas durante la entrevista, tienen un amplio grado de generalización, en el ámbito de los registros verbal y gráfico. Esto nos permite suponer que en ella tuvo lugar una reestructuración fuerte de las concepciones alternativas iniciales. En el manejo de las representaciones analíticas y gráficas, Cuestionario 3, su desempeño fue ligeramente menor, lo cual supondría una reestructuración débil respecto de estos dos sistemas de representación.

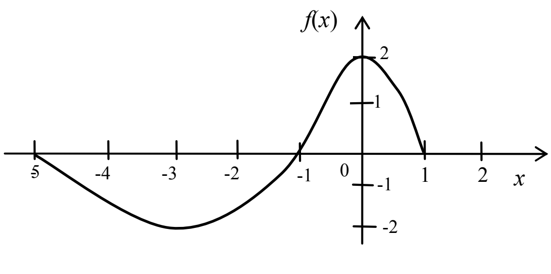
<u>Esteban</u>

a. Concepciones relativas a la ubicación de la función

Función con imagen positiva
Pre–test. Cuando a Esteban, se le pide identificar, en la pregunta 1 del Cuestionario 1, los intervalos en donde $\boldsymbol{f(x)}$ tiene imagen positiva (Fig. 4.29) prefiere el intervalo (opción A) en donde la función, además de tener imagen positiva, tiene abscisas positivas y no selecciona el intervalo donde la función tiene imagen positiva pero tiene abscisas negativas; en el intervalo que seleccionó para la pregunta 1B (opción B,Fig. 4.30), $\boldsymbol{g(x)}$ no tiene imagen positiva, solo tiene abscisas positivas. Estas dos respuestas (ver TABLA 4.17) son consistentes entre sí y muestran la relación que Esteban establece entre una función con imagen positiva con aquella gráfica que tiene abscisas positivas.

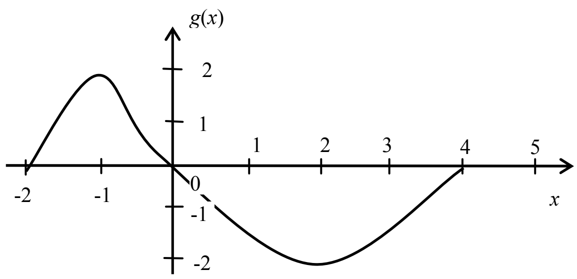
Inter–test. Para Esteban, la función de la Fig. 4.1, es positiva en los intervalos $\mathbf{-0.4 < \boldsymbol{x} < 1.6}$ y $\mathbf{3 < \boldsymbol{x} < 7}$, respuesta que es aceptable

Post–test. Las respuestas para las funciones $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{g(x)}$ (Fig. 4.29 y Fig. 4.30) son aceptables y esta idea parece confirmarse con las producciones y argumentos del estudiante durante su entrevista (Fig. 4.31) en donde manifiesta que "las funciones que están arriba del eje $\boldsymbol{x}$ son positivas". Sin embargo, más adelante en la entrevista, expresa, respecto del signo de las funciones: "es positiva porque los valores que toma en $\boldsymbol{x}$ y en $\boldsymbol{y}$ son positivos" (en la Fig. 4.44, la gráfica de la función la inicia en el primer cuadrante, cruza el eje de las abscisas y termina el trazo en el 4º cuadrante, sin embargo, como las abscisas de la función siguen siendo positivas a pesar del cambio de signo de la función, para él la función aún es positiva). Esta última caracterización que hace de la función con imagen positiva es diferente a la anterior, y es evidencia de falta de consistencia en sus ideas respecto de las funciones con imágenes positivas.



A) De 0 a 1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a –1 F) Otra:_____

Fig. 4.29. Pregunta 1A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 4 C) De 2 a 4
D) De –1 a 2 E) De –2 a –1 F) Otra:_____

Fig. 4.30. Pregunta 1B

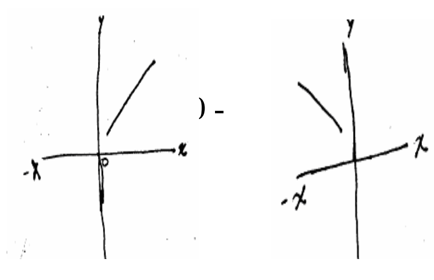


TABLA 4.17 Función positiva	Concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**intertest**	**Postest y entrevista**
La función es positiva donde sus ordenadas son positivas (aceptable)	—	✓	✓
La función tiene imagen positiva si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son positivas	✓	—	—
La función tiene una imagen positiva si su gráfica está ubicada en el primer cuadrante, donde las abscisas y las ordenadas son positivas.	—	—	—
La función es positiva si su gráfica comienza a trazarse arriba del eje de las abscisas	—	—	✓[1]
La función es positiva si es creciente	—	—	—
La función es positiva si sus abscisas son positivas y es creciente	—	—	—
El intervalo en donde una función es positiva queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	—	—	—

Función con imagen negativa

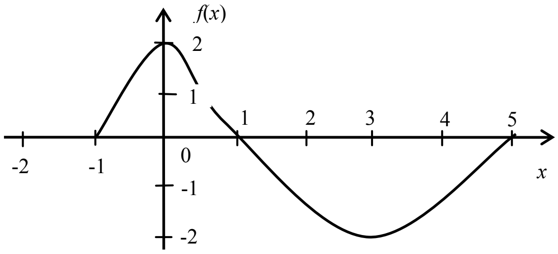
Pre – test. Al interrogar al estudiante en la pregunta 3A del Cuestionario 1, en torno de las funciones con imágenes negativas, (Fig. 4.32) él selecciona como intervalos en donde $\boldsymbol{f(x)}$ tiene imagen negativa primeramente el intervalo donde $\boldsymbol{f(x)}$ tiene imagen positiva y tiene abscisas negativas y enseguida el intervalo en donde esta función tiene imagen negativa. Luego para $\boldsymbol{g(x)}$ en la pregunta 3B (Fig. 4.33) hace lo mismo, selecciona el intervalo donde la función tiene imagen positiva pero tiene abscisas negativas y el intervalo donde efectivamente $\boldsymbol{g(x)}$ tiene imagen negativa. Estas respuestas (ver TABLA 4.18) solo son parcialmente aceptables pero totalmente consistentes entre sí y evidencian la coexistencia de dos concepciones en el estudiante: la primera, una función tiene imagen negativa si posee abscisas negativas; la segunda, la función tiene imagen negativa si se encuentra debajo del eje de las $\boldsymbol{x}$.

Inter–test. Respecto de los intervalos en donde la función de la Fig. 4.1 es negativa la respuesta es $\boldsymbol{-\infty < x < -0.5}$ y $\boldsymbol{1.5 < x < 3}$; es aceptable.

Post–test. Las respuestas ofrecidas (Fig. 4.32 y Fig. 4.33), son consistentemente aceptables y esto se confirma con las gráficas (Fig. 4.34) y la explicación que Esteban proporciona durante la entrevista: "la función es negativa si está debajo del eje de las $\boldsymbol{x}$". No obstante, al continuar con la entrevista, Esteban manifiesta: "debajo del eje $\boldsymbol{x}$

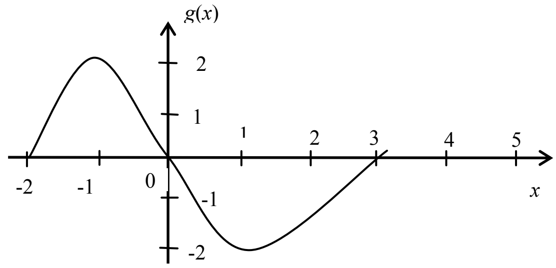
[1] Respuesta encontrada durante la entrevista

pertenecen los números negativos, y al pasar de este lado, los valores que tiene en el eje ***x*** también son negativos, entonces la gráfica sigue siendo negativa" (para Esteban, si la función comienza a trazarse por debajo del eje ***x***, tiene imagen negativa, aunque el trazo de la función obligue cruzar el eje de las ***x***, para terminar en el 2º cuadrante donde las abscisas de la función sean negativas, razón suficiente para que él la considere negativa).



A) De –1 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De 0 a 5 E) De 3 a 5 F) Otra:_____

Fig. 4.32 Pregunta



A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De –2 a –1 E) De 1 a 3 F) Otra:_____

Fig. 4.33 Pregunta

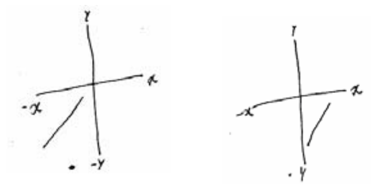


Fig. 4.34 Gráficas de funciones con imágenes negativas dibujadas por Esteban

TABLA 4.18 Función negativa	Concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	intertest	Postest
La función es negativa donde sus ordenadas son negativas (aceptable)	–	✓	✓
La función tiene imagen negativa si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son negativas.	✓	–	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse abajo del eje de las abscisas	–	–	✓
El intervalo en donde una función es negativa queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	–	–	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse debajo del eje de las abscisas	–	–	–
Una función es negativa si es decreciente	–	–	–

b. Concepciones relativas al comportamiento de la función.

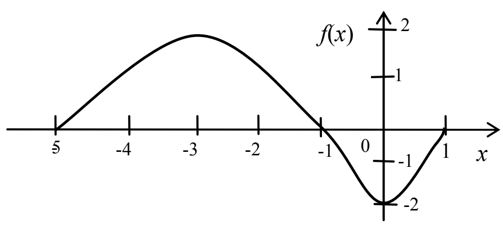
Función creciente

Pre–test. En la respuesta ofrecida a la pregunta 2A (Fig. 4.35) ***f*(*x*)** es creciente y tiene abscisas positivas; en el intervalo correspondiente a la opción D que no fue elegida, la función también es creciente pero tiene abscisas negativas. En la respuesta a la pregunta 2B (Fig. 4.42) ***g*(*x*)** es creciente solo en una porción, y sus abscisas son positivas.

Ambas respuestas (ver TABLA 4.19) en conjunto no son aceptables pero son consistentes entre sí ya que en los dos casos se asocia a las funciones crecientes con las gráficas que tienen abscisas positivas.

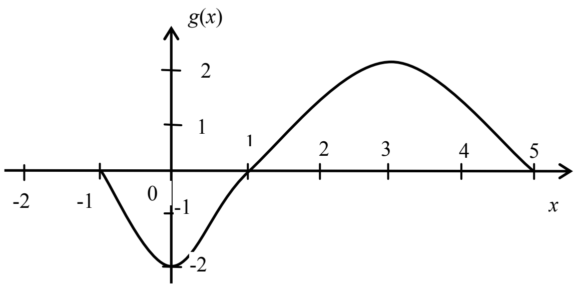
Inter–test. La respuesta dada por este estudiante a la pregunta de en qué intervalo crece la función de la Fig. 4.1 es $\mathbf{-1 < x < 1}$ y $\mathbf{2 < x \leq 7}$. El segundo intervalo es una respuesta aceptable pero el primero no lo es. Sin embargo, revisando con cuidado la gráfica correspondiente observamos que quizás esta respuesta obedece al hecho de que el extremo izquierdo de este intervalo, −1, es el valor en la dirección y a partir de donde sube la curva y, el extremo derecho del intervalo, 1, es el valor tanto en la dirección x como en la dirección y, hasta donde termina este intervalo de crecimiento. Lo anterior sugeriría que este estudiante pone su atención solo en la línea curva y pierde de vista el origen y el contexto de la misma. Más adelante, cuando este estudiante analiza la gráfica de la función de la Fig. 4.8, no contesta a la pregunta acerca de qué intervalos decrece la función.

Post–test. En la respuesta a la pregunta 2A (Fig. 4.35 y Fig. 4.36) la función solo es creciente en una parte, pero en todo el intervalo tiene imagen positiva y en la respuesta a la pregunta 2B sucede lo mismo. Es así que, ambas respuestas no aceptables y si consistentes, muestran que Esteban ahora asocia a las funciones crecientes las gráficas de funciones con imágenes positivas. Al revisar sus producciones (Figs. 4.40 y 4.42) y argumentaciones ofrecidas durante la entrevista, encontramos que para él “una función es creciente cuando se mueve hacia arriba” sin considerar que el crecimiento de la función implica un crecimiento de las abscisas.



A) De −5 a −1 B) De −3 a 0 C) De −1 a 1
D) De −5 a −3 E) De 0 a 1 F) Otra:_____

Fig. 4.35 Pregunta 2.A



A) De 1 a 5 B) De −1 a 1 C) De 0 a 3
D) De 0 a 5 E) De −1 a 0 F) Otra:____

Fig. 4.36 Pregunta 2.A

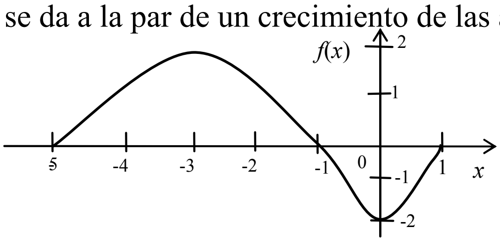
TABLA 4.19 Función creciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es creciente si sus ordenadas son positivas	–	–	–	✓
La función es creciente si su imagen es negativa	–	–	–	–
La función es creciente si, a medida que crecen las abscisas crecen sus ordenadas (aceptable)	–	–	–	–

Si la gráfica de la función sube, la función es creciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	✓[2]
El intervalo donde la función es creciente queda determinado por los valores numéricos más próximos a sus límites	–	✓	–	–
La función es creciente si sus abscisas son positivas	✓	–	–	–

Función decreciente
Pre–test. Al indagar en las respuestas ofrecidas por Esteban, para conocer sus concepciones respecto de las funciones crecientes, encontramos que, en su respuesta (opción A) a la pregunta 4A (Fig. 4.37) ***f*(*x*)** es creciente en una parte y decreciente en otra y tiene abscisas negativas y, en la respuesta (opción A) a la pregunta 4B (Fig. 4.38) ***g*(*x*)** sucede lo mismo. Ambas respuestas (ver TABLA 4.20) no son aceptables pero son consistentes entre sí pues en los dos casos se asocia a las funciones decrecientes con las gráficas con abscisas negativas.

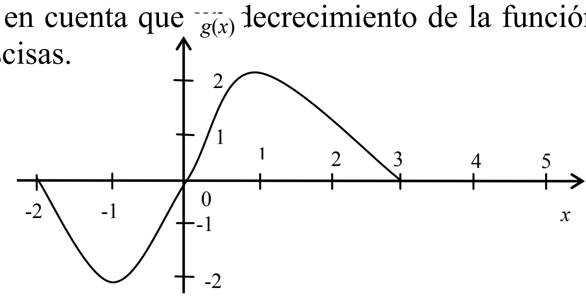
Inter–test. Al analizar la gráfica de la Fig. 4., para este estudiante la función decrece en el intervalo $\mathbf{1 < x < 2}$, respuesta que es aceptable. En el análisis que este joven realiza para la función de la Fig. 4.8, no responde a la misma pregunta.

Post–test. En la respuesta a la pregunta 4A (opción C, Fig. 4.37) la función solo es decreciente en una parte, pero en todo el intervalo tiene imagen negativa y en la respuesta a la pregunta 4B (opción A, Fig. 4.38) sucede lo mismo. Esto nos muestra que ahora Esteban asocia a las funciones decrecientes las gráficas de funciones con imágenes negativas. Revisando sus producciones (Fig. 4.44) y argumentaciones ofrecidas durante la entrevista, encontramos que para él "una función es decreciente cuando se mueve hacia abajo" sin tomar en cuenta que el decrecimiento de la función se da a la par de un crecimiento de las abscisas.



A) De –5 a –1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a – 3 F) Otra:_____

Fig. 4.37 Pregunta 4.A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De –2 a –1 E) De 1 a 3 F) Otra:______

Fig. 4.38 Pregunta 4.B

[2] Respuesta ofrecida por el estudiante durante la entrevista

TABLA 4.20 Función decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es decreciente si sus ordenadas son negativas	–	–	–	✓
La función es decreciente si, a medida que crecen las abscisas decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓	–	–
Si la gráfica de la función baja, la función es decreciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	✓[3]
La función es decreciente si sus abscisas son negativas	✓	–	–	–
La función es decreciente si, además de cumplir esta condición, es negativa	–	–	–	–
La función es decreciente si sus abscisas y sus ordenadas son negativas	–	–	–	–

b. Concepciones relativas a la ubicación y al comportamiento de las funciones.

Función con imagen positiva y creciente. En el pre–test Esteban elige en la pregunta 1 del Cuestionario 2 (Fig. 4.39) solo una de las tres funciones con imágenes positivas y crecientes, la que posee abscisas positivas (ver TABLA 4.21). Nuevamente en este caso, al igual que en respuestas anteriores, asocia la función con imagen positiva con aquella que tiene abscisas positivas. En el post–test selecciona solo dos de las tres funciones con imágenes positivas y crecientes disponibles y, la tercera gráfica (opción D) que él selecciona es creciente, tiene una parte positiva y otra negativa, pero sus abscisas son positivas. Esto prueba que en el post–test continua privilegiando la asociación de las funciones con imágenes positivas con gráficas que poseen abscisas positivas.

1. Subraya el o los incisos que corresponden a gráficas de funciones que son a la vez **positivas y crecientes**.

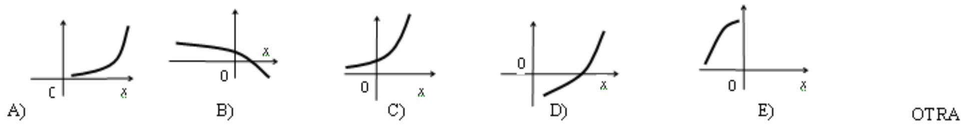


Fig. 4.39 Pregunta 1

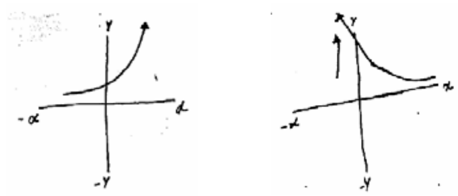


Fig. 4.40 Gráficas para funciones con imágenes positivas y crecientes dibujadas por Esteban

[3] Respuesta ofrecida por el estudiante durante la entrevista

TABLA 4.21 Función positiva y creciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	–
La función es positiva y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	✓	✓
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	✓[4]

Función con imagen negativa y creciente. Al explorar las ideas de Esteban respecto de las funciones con imágenes negativas y crecientes, en el pre–test, él elige en la pregunta 2 del Cuestionario 2 (Fig. 4.41) solo una de las tres funciones con imágenes negativas y crecientes a la vista, la que posee abscisas negativas (ver TABLA 4.22). En este caso el estudiante vincula la función con imagen negativa y creciente con aquella que tiene abscisas negativas. En el post–test selecciona solo dos de las tres funciones con imágenes negativas y crecientes disponibles; la gráfica correspondiente a la opción E, no es elegida porque tiene sus abscisas positivas. Esto muestra que en el post–test el estudiante continúa resaltando la asociación de las funciones con imágenes negativas y crecientes con gráficas que poseen abscisas negativas. Al analizar sus producciones y argumentos ofrecidos durante la entrevista (Fig. 4.42), encontramos que dice: "si la función sube es creciente, si baja es decreciente" (pierde de vista que al crecer o decrecer la función, las abscisas crecen) y agrega: "debajo del eje ***x*** pertenecen los números negativos, y al pasar de este lado (segundo cuadrante), los valores que tiene en el eje ***x*** también son negativos, entonces la gráfica sigue siendo negativa" (el segundo gráfico de la Fig. 4.42 comienza trazándolo debajo del eje ***x*** y, después de cruzar el eje de las abscisas concluye el trazo en el 2º cuadrante, donde la función tiene imagen positiva pero tiene abscisas negativas, razón por la cual él considera que toda esa función tiene imagen negativa). En conjunto, la lectura, interpretación y construcción que Esteban desarrolla con posterioridad al diseño instruccional son evidencia de la existencia de una diversidad de ideas respecto de la ubicación y comportamiento de funciones.

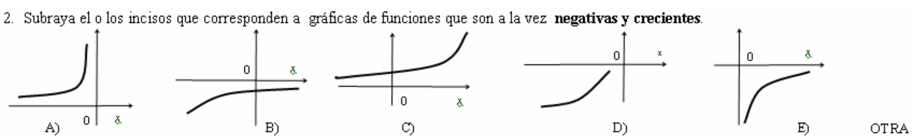


Fig. 4.41 Pregunta 2

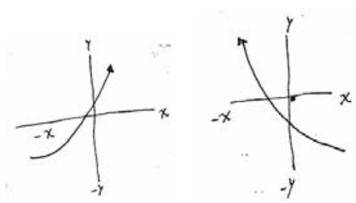


Fig. 4.42 Gráficas para funciones con imágenes negativas y crecientes dibujadas por Esteban

[4] Respuesta ofrecida por el estudiante durante la entrevista

TABLA 4.22 Función negativa y creciente	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es negativa y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	–
La función es negativa y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	✓	✓
La función es negativa si comienza a trazarse abajo del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	✓[5]

Función con imagen positiva y decreciente. En la pregunta 3 del Cuestionario 2 (Fig. 4.43), en el pre–test, Esteban elige solo una de las tres funciones con imágenes positivas y decrecientes a la vista, la que posee abscisas positivas (ver TABLA 4.23). Igual que en respuestas anteriores, asocia la función con imagen positiva y decreciente con aquella que tiene abscisas y ordenadas positivas. En el post–test selecciona las tres gráficas correspondientes a funciones con imágenes positivas y decrecientes. Esto podría ser evidencia de un cambio conceptual positivo pero las respuestas y argumentos anteriores no lo confirman. Explicando la construcción de la figura 4.44 encontramos que dice: "es positiva porque los valores que toma en ***x*** y en ***y*** son positivos" (él comienza a trazar la función en el primer cuadrante, y la termina en el 4º cuadrante; el cambio de signo que sufre la función, para él no es relevante), "y decreciente porque va bajando. Cada vez los valores que toma en ***x*** y en ***y*** son menos, se van haciendo más chicos" (olvida que, sin importar que la función crezca o decrezca, las abscisas crecen).

En conjunto, la lectura, interpretación y construcción que Esteban desarrolla con posterioridad al tratamiento instruccional son prueba de la existencia de una variedad de ideas respecto de la ubicación y comportamiento de funciones.

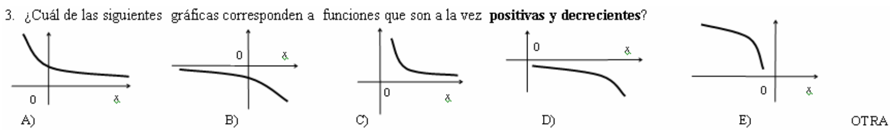


Fig.4.43 Pregunta 3

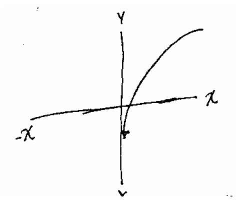


Fig. 4.44 Gráfica para funciones con imágenes positivas y decrecientes dibujadas por Esteban

[5] Respuesta ofrecida por el estudiante durante a la entrevista

TABLA 4.23 Función positiva y decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es positiva y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	✓	–
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es decreciente si baja, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	✓[6]

Función con imagen negativa y decreciente. Cuando en el pre–test, en la pregunta 4 del Cuestionario 2 (Fig. 4.45), a Esteban se le cuestiona en torno de las funciones con imágenes negativas y decrecientes, él solo elige una de las tres funciones con imágenes positivas y decrecientes a la vista, la que posee abscisas negativas (ver TABLA 4.24). Con ello se manifiesta el enlace que establece entre una función con imagen negativa y decreciente con aquella que, además de tener imagen negativa y ser decreciente, tiene abscisas negativas. En el post–test selecciona dos de las tres gráficas de funciones con imágenes negativas y decrecientes de que dispone y además selecciona la gráfica C, que tiene imagen positiva y decreciente pero posee abscisas negativas. Esto nos muestra que el estudiante sigue privilegiando la relación entre funciones con imágenes negativas y decrecientes con funciones decrecientes que tienen abscisas negativas.

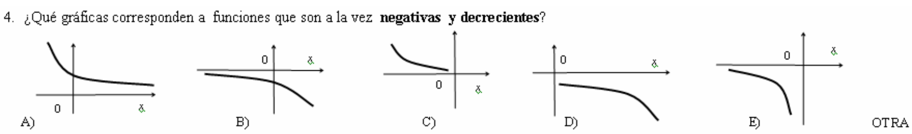


Fig. 4.45

TABLA 4.24 Función negativa y decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es negativa y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	–
La función es negativa y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	✓	✓

c. Concepciones relativas a la estabilidad de una función

a) Pre–test. Indagando en las ideas de Esteban respecto de la estabilidad de las funciones, observamos cómo él, en la pregunta 5 del Cuestionario 1 (Fig. 4.46), solo selecciona el punto ubicado en la parte central de la función ($x = -2$), el cual además, es una intersección de la función con el eje x.

[6] Respuesta obtenida durante la entrevista

Inter–test. A tres semanas de haber iniciado el curso, a juicio de este estudiante la función de la Fig. 4.1 no crece ni decrece en $\boldsymbol{x = 1}$ y $\boldsymbol{x = 2}$, respuesta aceptable. A siete semanas del inicio del curso, respecto de la función de la Fig. 4.8, el estudiante no identifica ningún punto de estabilización. Las concepciones de este estudiante avanzan y retroceden y no parecen estabilizarse respecto de esta pregunta.

Post–test. Los puntos seleccionados por el estudiante son las intersecciones de $\boldsymbol{f(x)}$ con el eje de las abscisas (ver TABLA 4.25), mostrando que se asocia a los puntos en donde una función no crece ni decrece con las intersecciones de la misma con el eje $\boldsymbol{x}$. Revisando las producciones (Fig. 4.47) y argumentos ofrecidos por Esteban durante la entrevista encontramos que dice: “puntos de corte es donde la función se hace cero y el punto de estabilidad es donde la pendiente es cero”. Las palabras anteriores coinciden con la concepción promovida por el tratamiento instruccional al que Esteban fue sometido, sin embargo, no fue esta la concepción que puso en juego durante la lectura e interpretación de gráficas de funciones.

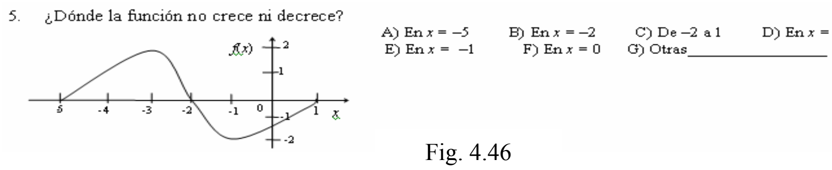


Fig. 4.46

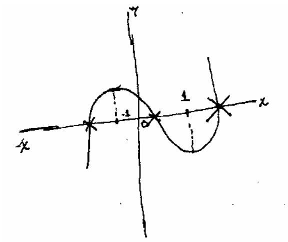


Fig. 4.47 Gráfica de una función con puntos en donde se estabiliza su comportamiento dibujada por Esteban

TABLA 4.25 Función que no crece ni decrece	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica o en donde ésta sea horizontal (aceptable)	–	✓	–	✓
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en los puntos donde la gráfica intercepta al eje x	✓	–	–	✓
Una función no crece ni decrece en los intervalos donde su gráfica es horizontal	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en sus puntos máximos, en sus puntos mínimos y en las intersecciones con el eje de las abscisas	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en $x = 0$ y $y = 0$	–	–	–	–

b) En el pre–test de acuerdo a Esteban, en la pregunta 5 del Cuestionario 2 (Fig. 4.48) ***f*(*x*)** se estabiliza en la parte central de la gráfica donde la función intercepta al eje ***x*** (***x* = 0**) respuesta que no es aceptable, y esta elección es análoga a la de la pregunta 5 del Cuestionario 1; responde de igual forma para ***g*(*x*)** (ver TABLA 4.26) solo que en este caso la función efectivamente se estabiliza en su parte media. Esta respuesta es aceptable y ambas son consistentes. En el post–test sus preferencias para ***f*(*x*)** son aceptables pero para ***g*(*x*)** la respuesta solo es parcialmente aceptable, pues incorpora un punto (opción B) a su respuesta anterior, donde la función no se estabiliza. Esto, aunado a sus producciones y argumentos de la entrevista (Fig. 4.47) ("los puntos de estabilidad son donde la pendiente de la función se hace cero") suponen la presencia de distintas concepciones.

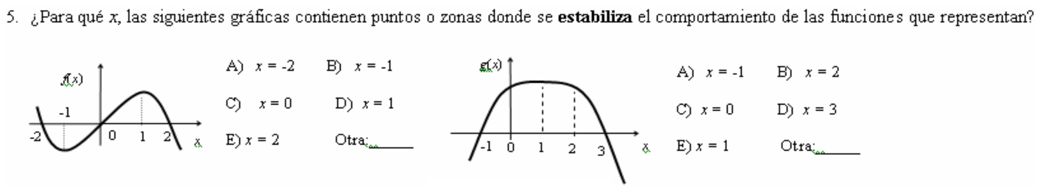


Fig. 4.48

TABLA 4.26 Puntos o intervalos donde una función estabiliza su comportamiento	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Una función se estabiliza en los puntos máximos y mínimos de su gráfica (aceptable)	–	✓
Una función se estabiliza en los puntos donde la gráfica intercepta al eje *x*	–	–
Una función se estabiliza en la vecindad de un punto máximo	–	✓
Una función se estabiliza en $x = 0$	✓	–

d. Concepciones manifestadas usando los registros analítico y gráfico

Funciones que cumplen con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. En la pregunta 1 del Cuestionario 3 (Fig. 4.49) durante el pre–test, la respuesta dada por Esteban es aceptable pero incompleta, pues solo elige una (opción E) de las tres gráficas que cumplen con las condiciones especificadas (ver TABLA 4.27); quizá esto se deba a que, como esta función cumple con $x < 0$, él esté asociando las funciones que cumplen con $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ con las que cumplen con $f(x) > 0$ y $x < 0$. En el post–test elige dos de las gráficas que cumplen con $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ (opciones A y E).

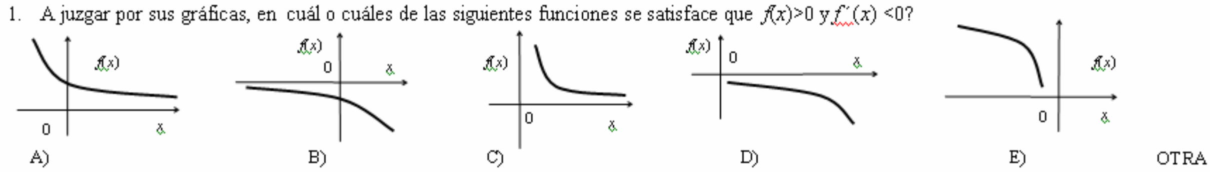


Fig. 4.49

TABLA 4.27 Función que cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $x < 0$ y otra parte que cumple con $x > 0$	–	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, además de cumplir con estas condiciones cumple con $x > 0$	–	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando cumple con $f(x) > 0$ y $x < 0$	✓	–

Funciones que cumplen con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. Cuando se pregunta en relación a las funciones que cumplen las condiciones **$g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$,** en el pre–test, en la pregunta 2 del Cuestionario 3 (Fig. 4.50) la respuesta de Esteban solo incluye la gráfica C, cuya ubicación no corresponde a la especificada. Sin embargo, al revisarla con cuidado encontramos que esta gráfica, por estar ubicada en el 2º y 1er cuadrante, una parte de sus abscisas son negativas (**$x < 0$**) y la otra parte son positivas (**$x > 0$**); es posible que Esteban, para tomar su decisión, sólo esté atendiendo a los operadores "<" y ">" que se encuentran presentes en la expresión **$g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$** (ver TABLA 4.28). En el post–test solo elige dos de las tres gráficas que cumplen con **$g(x) < 0$** y **$g'(x) > 0$** (D y E).

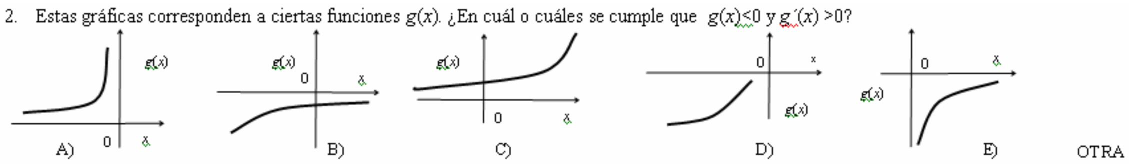


Fig. 4.50

TABLA 4.28 Función que cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $x < 0$ y otra parte que cumple con $x > 0$	✓	–

Funciones que cumplen con las condiciones: $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$. Con relación a las funciones que cumplen con las condiciones **$h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$,** en el pre–test, en la pregunta 3 del Cuestionario 3 (Fig. 4.51) la respuesta dada por Esteban solo incluye una (opción A) de las tres gráficas que cumplen con las condiciones especificadas (ver

TABLA 4.29); seguramente esta elección tiene su origen en que la gráfica de la opción A, cumple además con $\boldsymbol{x > 0}$ y él está evidenciando la vinculación que establece entre las funciones que cumplen con $\boldsymbol{h(x) > 0}$ **y** $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ con las que cumplen con $\boldsymbol{h(x) > 0}$, $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ y $\boldsymbol{x > 0}$. En el post–test elige las tres gráficas que cumplen con $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$, es decir, su respuesta muestra una mayor generalización y ahora es consistentemente aceptable.

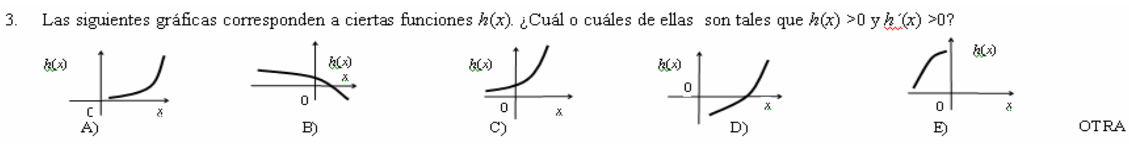


Fig. 4.51

TABLA 4.29 Función que cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x > 0}$	✓	–

Funciones que cumplen con las condiciones: $\boldsymbol{y < 0}$ **y** $\boldsymbol{y' < 0}$**.** En la pregunta 4 del Cuestionario 3 (Fig. 4.52), en el pre–test, la respuesta dada por Esteban solo incluye la gráfica de la opción E, que no cumple con las condiciones $\boldsymbol{y < 0}$ **y** $\boldsymbol{y' < 0}$, pero si cumple con $\boldsymbol{x < 0}$, es decir asocia las funciones que cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ **y** $\boldsymbol{y' < 0}$ con las funciones que cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ **y** $\boldsymbol{x < 0}$ (ver TABLA 4.30). En el post–test, las dos gráficas seleccionadas (C y E) no cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ **y** $\boldsymbol{y' < 0}$ pero si cumplen con $\boldsymbol{x < 0}$, por lo que ahora suponemos que él está relacionando las funciones que cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ **y** $\boldsymbol{y' < 0}$ con las que cumplen con $\boldsymbol{x < 0}$. El único elemento que es constante en sus respuestas es la expresión "**< 0**".

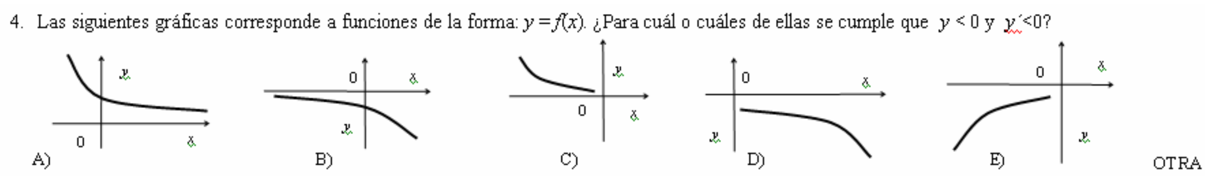


Fig. 4.52

TABLA 4.30 Función que cumple con las condiciones	Concepciones aceptables y concepciones alternativas

$\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$	**Pretest**	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x < 0}$ y $\boldsymbol{y < 0}$	✓	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x < 0}$	–	✓

Puntos que cumplen con la condición: $\boldsymbol{f'(x) = 0}$. En el pre–test, en la pregunta 5 del Cuestionario 3 (Fig. 4.53) en la respuesta se asocia la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ con los puntos en donde $\boldsymbol{x = 0}$, punto donde, en este caso en particular, también se cumple con la condición $\boldsymbol{y = 0}$ y que se encuentra en la parte central de la función. En el post–test, la respuesta de Esteban no cambió (ver TABLA 4.31).

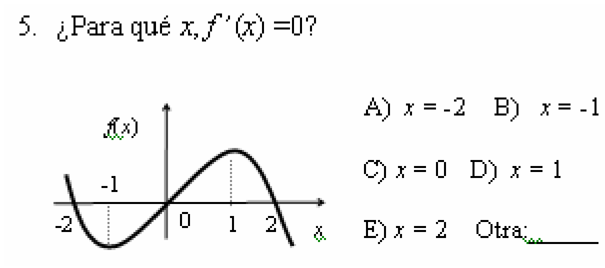


Fig. 4.53

TABLA 4.31 Puntos que cumplen con la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Los puntos que cumplen con la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ son los máximos y mínimos de la función (aceptable)	–	–
En $\boldsymbol{x = 0}$ se cumple la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$	✓	✓
En sus intersecciones con el eje $\boldsymbol{x}$ se cumple la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$	–	–

Determinación de la $\boldsymbol{f'(x)}$ en un punto dado. En la pregunta 6 del Cuestionario 3 (Fig. 4.54), en el pre–test, en su respuesta asocia la derivada de una función en un punto determinado con el valor de la abscisa del punto donde la tangente a la curva intercepta al eje de las abscisas. En el post–test, la respuesta de Esteban cambia defectuosamente (ver TABLA 4.32) pues ahora considera que el valor de $\boldsymbol{f'(x)}$ en el punto en cuestión es igual a la ordenada del mismo.

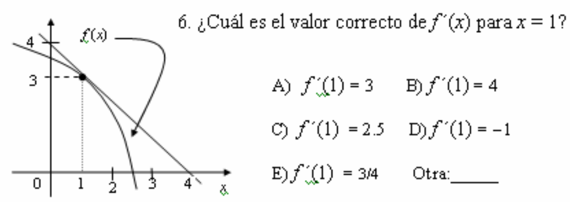


Fig. 4.54

TABLA 4.32 $f'(x)$ en un punto dado	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la pendiente de la tangente a la función en ese punto (aceptable)	–	
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la $f(x)$ en ese punto	–	✓
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la abscisa del punto en donde la tangente en el punto x cruza al eje x	✓	–

e. Análisis comparativos de las preguntas paralelas. Las planteadas verbalmente y las planteadas analíticamente

Función con imagen positiva y creciente y función que cumple con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$. Cuando se plantea la pregunta en lenguaje verbal, en el pre–test asocia la función positiva con aquella que tiene abscisas positivas. En el post–test continua privilegiando la asociación de las funciones con imágenes positivas con gráficas que poseen abscisas positivas. Cuando la respuesta es planteada en lenguaje analítico, su respuesta en el pre–test evidencia la vinculación que establece entre las funciones que cumplen con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$ con las que cumplen con $h(x) > 0$, $h'(x) > 0$ y $x > 0$. (ver Figs. 4.39, 4.40, 4.51 y Tablas 4.21, 4.29). En el post–test elige las tres gráficas que cumplen con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$, es decir, su respuesta muestra un mayor grado de generalización y ahora es consistentemente aceptable. Para esta respuesta, Esteban manifiesta un mejor desempeño cuando la pregunta se plantea en lenguaje analítico.

Función con imagen negativa y creciente y función que cumple con $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. Al cuestionársele a Esteban en torno de las funciones con imágenes negativas y crecientes usando lenguaje verbal, en el pre–test vincula la función con imagen negativa y creciente con aquella que tiene abscisas negativas; en el post–test el estudiante continúa privilegiando la asociación de las funciones con imágenes negativas y crecientes con gráficas que poseen abscisas negativas. Cuando la pregunta se plantea usando lenguaje analítico, en el pre–test parece que Esteban sólo atiende a los operadores "<" y ">" que se encuentran presentes en la expresión $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. En el post–test suponemos que nuevamente su elección se hace en términos de los operadores "<" y ">". Sin importar el lenguaje usado para plantear la pregunta, Esteban no logró superar las concepciones alternativas que manifestó al inicio del curso (ver Figs. 4.41, 4.42, 4.50 y Tablas 4.22, 4.28).

Función con imagen positiva y decreciente y función que cumple con $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. Al explorar las concepciones de Esteban en torno de las funciones con imágenes positivas y decrecientes observamos que en el pre–test asocia la función con imagen positiva y decreciente con aquella que tiene abscisas y ordenadas positivas; en el post–test su respuesta es consistentemente aceptable aunque en las producciones y argumentaciones vertidas por él durante la entrevista, se manifiestan algunas concepciones alternativas. Al explicar la construcción de la figura 4.41 encontramos que dice: "es positiva porque los valores que toma en x y en y son positivos" (él comienza a trazar la función en el primer cuadrante, y la termina en el 4º cuadrante; el cambio de signo que sufre la imagen de la función, para él no es relevante), "y decreciente porque va bajando; cada vez los valores que toma en $\boldsymbol{x}$ y en $\boldsymbol{y}$ son menos, se van haciendo más chicos" (olvida que, sin importar que la función crezca o decrezca, las abscisas aumentan). Al plantear el mismo cuestionamiento usando lenguaje analítico, en el pre–test él asocia las funciones que cumplen con $\boldsymbol{f(x) > 0}$ **y** $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ con las que cumplen con $\boldsymbol{f(x) > 0}$ **y** $\boldsymbol{x < 0}$**;** en el post–test elige dos de las gráficas que cumplen con $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$. Igual que en el pre–test, su respuesta denota falta de consistencia en sus ideas. En este caso, el desempeño de Esteban parece ser mejor cuando la pregunta se plantea en lenguaje verbal que en lenguaje analítico (ver Figs. 4.43, 4.44, 4.49 y Tablas 4.23, 4.27).

Función con imagen negativa y decreciente y función que cumple con $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{y' < 0}$. Cuando la pregunta se hace usando lenguaje verbal en el pre–test, Esteban manifiesta el enlace que establece entre una función con imagen negativa y decreciente con aquella que, además de ser tener imagen negativa y decreciente, tiene abscisas negativas; en el post–test el estudiante sigue privilegiando la relación entre funciones con imágenes negativas y decrecientes con funciones decrecientes que tienen abscisas negativas. Igualmente, en las producciones y comentarios hechos por Esteban en la entrevista, surgen elementos interesantes: "si la función sube es creciente, si baja es decreciente" (no considera que al crecer la función, crecen las abscisas y que, al decrecer, también crecen las abscisas) y además: "debajo del eje $\boldsymbol{x}$ pertenecen los números negativos, y al pasar de este lado, los valores que tiene en el eje $\boldsymbol{x}$ también son negativos, entonces la gráfica sigue siendo negativa" (en el segundo gráfico de la Fig. 4.39, él comienza a trazar la función en el 4º cuadrante, luego la curva atraviesa el 3er cuadrante y la concluye en el 2º cuadrante, donde la gráfica ya tiene imagen positiva, pero tiene abscisas negativas, condición suficiente para que él la considere negativa). Por otra parte, cuando esta misma pregunta se plantea usando lenguaje analítico, en el pre–test asocia las funciones que cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ **y** $\boldsymbol{y' < 0}$ con las funciones que cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ **y** $\boldsymbol{x < 0}$; en el post–test relaciona las funciones que cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{y' < 0}$ con las que cumplen con $\boldsymbol{x < 0}$. En este caso, el desempeño del estudiante es muy irregular y muy poco consistente (ver Figs. 4.45, 4.40, 4.42, 4.44, 4.52 y Tablas 4.24, 4.30).

Función que no crece ni decrece y función que cumple con $\boldsymbol{f'(x) = 0}$. Al plantear la pregunta en lenguaje verbal, en el pre–test Esteban considera que la función se estabiliza en $\boldsymbol{x = 0}$. En el post–test en sus respuestas se asocia la estabilidad de la función con el máximo y mínimo de la función, es decir, la respuesta es aceptable y consistente. Sin embargo, no son estas las ideas que el estudiante usa en la elaboración de sus gráficas y argumentos durante la entrevista, en donde considera que la función se estabiliza en su máximo y mínimo y en sus intersecciones con el eje de las abscisas. Cuando la pregunta se plantea usando lenguaje analítico tanto en el pre–test como en el post–test el estudiante asocia la estabilidad de la función con el punto donde $\boldsymbol{x = 0}$. Es así que, en esta ocasión, la pregunta planteada verbalmente es más accesible al estudiante (ver Figs. 4.47, 4.48 y Tablas 4.26, 4.31).

Una revisión global de las respuestas ofrecidas por Esteban muestra que, después de las actividades de incidencia, algunas de sus concepciones alternativas fueron resistentes al cambio:

a) La asociación de las funciones con imágenes positivas con gráficas que poseen abscisas positivas
b) La asociación de las funciones con imágenes negativas y crecientes con gráficas que poseen abscisas negativas
c) La relación entre funciones con imágenes negativas y decrecientes con funciones decrecientes que tienen abscisas negativas
d) Asociación de los puntos en donde una función no crece ni decrece con las intersecciones de la misma con el eje x.

En el inter–test, al analizar funciones crecientes (Fig. 4.1), aparece la concepción alternativa consistente en determinar un intervalo de crecimiento de la función a partir de los valores en la dirección y, que se encuentran adyacentes a los puntos que limitan al intervalo en cuestión. A partir de esta concepción el estudiante denota que no está considerando la relación de covariación entre la variable dependiente y la variable independiente que se encuentra implícita en la gráfica de una función.

Además, en el post–test, surgieron dos concepciones alternativas que no habían sido identificadas en el pre–test:

a) Una función es positiva si el trazo de su gráfica se inicia arriba del eje de las abscisas; una función es negativa si el trazo de su gráfica se inicia debajo del eje de las abscisas (Figs. 4.40 y 4.42)

b) Una función es creciente si su gráfica sube, sin coordinar los cambios de las abscisas con los de las ordenadas; una función es decreciente si su gráfica baja.

Los resultados obtenidos en el Cuestionario 3, muestran que el manejo de la representación verbal fue más accesible para este estudiante que la representación analítica. Además, respecto del desempeño del estudiante dentro de la representación analítica es importante destacar tres puntos:

a) En las preguntas donde se cuestiona simultáneamente acerca de la ubicación y comportamiento de las funciones, tanto en el pre–test como en el post–test las respuestas en general se dieron en términos de los operadores usados en la expresión analítica presente en la pregunta correspondiente.
b) En el post–test los estudiantes conservaron la concepción alternativa consistente en asociar a los puntos de estabilidad con los ceros de la función
c) En el post–test los estudiantes conservaron la concepción alternativa consistente en asociar a la derivada de una función en un punto determinado con la ordenada de la función correspondiente a ese punto.

Finalmente en este estudiante se observó que sus concepciones respecto de los puntos de estabilización de las funciones, se movieron en diferentes sentidos a lo largo del diseño instruccional.

<u>Agustín</u>

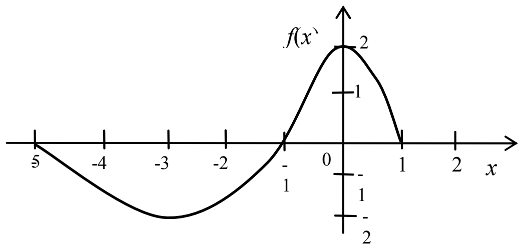
a. Concepciones relativas a la ubicación de la función

Función con imagen positiva

Pre–test. Al explorar las ideas de Agustín relativas a las funciones con imágenes positivas encontramos que (ver TABLA 4.33) para ambas gráficas de la pregunta 1 del Cuestionario 1 (Figs. 4.55 y 4.56) son aceptables y consistentes, pues selecciona los intervalos en donde en efecto la función tiene imagen positiva.

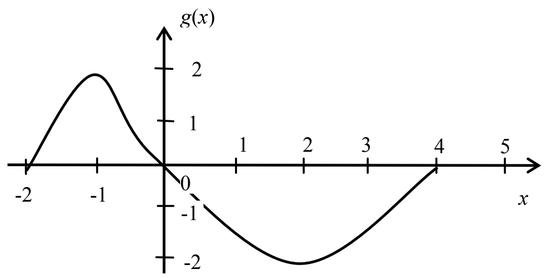
Inter–test. Para la función de la Fig. 4.1, Agustín considera que ésta es positiva en los intervalos **-0.4 < *x* < 1.6** y en **3 < *x* < 7**, respuesta que es aceptable.

Post–test. Sus respuestas son aceptables. Estos resultados son confirmados por las producciones del estudiante durante la entrevista (ver Fig. 4.57), en donde expresa que "la función es positiva porque está encima del eje de las ***x***".



A) De 0 a 1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a –1 F) Otra:_____

Fig. 4.55. Pregunta 1A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 4 C) De 2 a 4
D) De –1 a 2 E) De –2 a –1 F) Otra:____

Fig. 4.56. Pregunta 1B

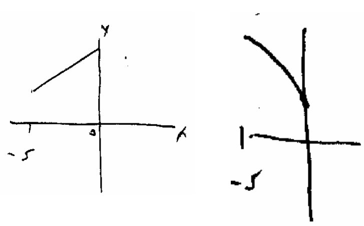


Fig. 4.57 Gráficas de funciones con imágenes positivas dibujadas por Agustín

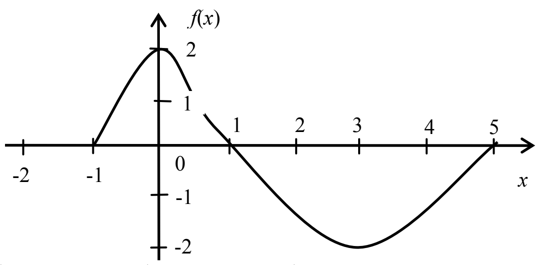
TABLA 4.33 Función positiva	Concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**intertest**	**Postest y entrevista**
La función es positiva donde sus ordenadas son positivas (aceptable)	✓	✓	✓
La función tiene imagen positiva si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son positivas	—	—	—
La función tiene una imagen positiva si su gráfica está ubicada en el primer cuadrante, donde las abscisas y las ordenadas son positivas.	—	—	—
La función es positiva si su gráfica comienza a trazarse arriba del eje de las abscisas	—	—	—
La función es positiva si es creciente	—	—	—
La función es positiva si sus abscisas son positivas y es creciente	—	—	—
El intervalo en donde una función es positiva queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	—	—	—

Función con imagen negativa

Pre–test. En las respuestas dadas por el estudiante a la pregunta 3A (Fig. 4.58) se establece la relación entre una función con imagen negativa con aquella porción de la gráfica cuyo intervalo tiene abscisas negativas a pesar de que está por arriba del eje ***x***; en el segundo caso, en la pregunta 3B (Fig. 4.59), la respuesta es similar a la anterior: elige como intervalo donde ***g*(*x*)** tiene imagen negativa aquel donde tiene imagen positiva y tiene abscisas negativas (ver TABLA 4.34) es decir, en ambos casos considera que una función es negativa por el hecho de tener abscisas negativas sin importar el signo de las ordenadas.

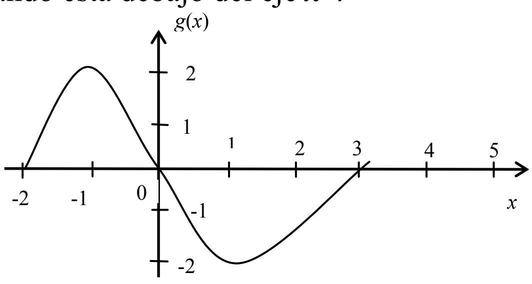
Inter–test. En el análisis de la función de la Fig. 4.1, para Agustín esta función es negativa en los intervalos $-\infty < x < -0.5$ y $1.5 < x < 3$, respuesta que es aceptable.

Post–test. Las respuestas dadas por este estudiante (Fig. 4.58 y Fig. 4.59), cumplen con las condiciones especificadas e incluso denotan una mayor generalización pues propone respuestas aceptables que no estaban disponibles originalmente. Lo anterior se confirma con las gráficas que Agustín elaboró cuando se le pidió construir gráficas de funciones con imágenes negativas (Fig. 4.60). En ambos casos sus producciones corresponden a las características especificadas y argumenta, al preguntarle el porqué de sus producciones que “una función es negativa cuando está debajo del eje ***x***”.



A) De –1 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De 0 a 5 E) De 3 a 5 F) Otra:_____

Fig. 4.58Pregunta 3.A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De –2 a –1 E) De 1 a 3 F) Otra:_____

Fig. 4.59 Pregunta 3.B

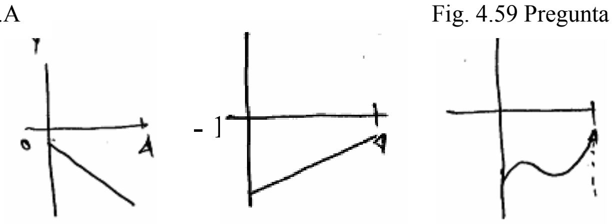


Fig. 4.57 Gráficas de funciones con imágenes negativas

TABLA 4.34 Función negativa	Concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**intertest**	**Postest**
La función es negativa donde sus ordenadas son negativas (aceptable)	–	✓	✓
La función tiene imagen negativa si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son negativas.	✓	–	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse abajo del eje de las abscisas	–	–	–
El intervalo en donde una función es negativa queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	–	–	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse debajo del eje de las abscisas	–	–	–
Una función es negativa si es decreciente	–	–	–

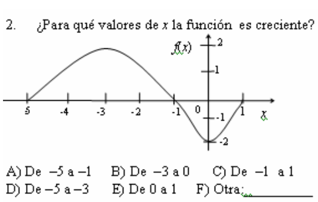
b. Concepciones relativas al comportamiento de la función.

Función creciente

Pre–test. Cuando revisamos las ideas de Agustín en torno de las funciones crecientes, encontramos que sus respuestas (ver TABLA 4.35) para ambas gráficas de la pregunta 2 del Cuestionario 1 (Figs. 4.61 y 4.62) son las siguientes: para la pregunta 2A Agustín asocia función creciente con el intervalo donde la gráfica es positiva, a pesar de que no es creciente en todo ese intervalo; la respuesta que da para la pregunta 2B es similar.

Inter–test. Respecto de la función (Fig. 4.1), para Agustín el crecimiento se da en los intervalos $-\infty < x < 1$ y $2 < x < 7$, la cual es una respuesta aceptable. En el análisis de la función de la Fig. 4.8, Agustín identifica el crecimiento en los intervalos $-4 < x < -1.7$ y $1.4 < x < 4$, respuesta que no es aceptable, pues la función en ese intervalo no es creciente pero si es positiva, por lo que se pone en evidencia la asociación que este estudiante hace entre una función creciente y los intervalos donde la función es positiva. Esta respuesta significaría un retroceso en las concepciones manifestadas hasta el momento.

Post–test. Las respuestas dadas este estudiante cumplen con el comportamiento especificado y esto se corrobora con las producciones (Figs.4.66 y 4.68) y los argumentos ofrecidos durante la entrevista en donde comenta: “una función es creciente cuando sube o cuando su pendiente es menor de 90º”.



0

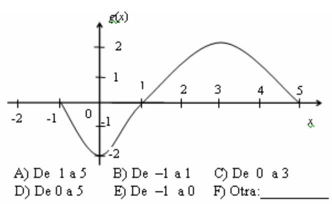


Fig. 4.61 Pregunta 2.A

Fig. 4.62 Pregunta 2.A

TABLA 4.35 Función creciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es creciente si sus ordenadas son positivas	✓	–	✓	–
La función es creciente si su imagen es negativa	–	–	–	–
La función es creciente si, a medida que crecen las abscisas crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓	–	✓
Si la gráfica de la función sube, la función es creciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	–
El intervalo donde la función es creciente queda determinado por los valores numéricos más próximos a sus límites	–	–	–	–
La función es creciente si sus abscisas son positivas	–	–	–	–

Función decreciente

Pre–test. Revisando las concepciones de Agustín en torno de las funciones decrecientes, encontramos (ver TABLA 4.36) las siguientes respuestas para ambas gráficas de la pregunta 4 del Cuestionario 1 (Figs. 4.63 y 4.64): en la pregunta 4A Agustín asocia función decreciente con el intervalo donde la gráfica es negativa, a pesar de que no es decreciente en todo ese intervalo; la respuesta que da para la pregunta 4B es similar.

Inter–test. Al analizar la gráfica de la Fig. 4.1, el estudiante establece que la función decrece en el intervalo **1 < *x* < 2**, respuesta que es aceptable. Luego, en el análisis de la función de la Fig. 4.8, este estudiante identifica su decrecimiento en los intervalos **-5 < *x* < -4** y **-1.7 < *x* < 1.4**, en donde la función no es decreciente pero si es negativa, y esto es una evidencia de la asociación que este joven establece entre una función decreciente y una función negativa. Esta respuesta es evidencia de un retroceso en la concepción de este estudiante respecto de las funciones decrecientes.

Post–test. Las respuestas dadas por este estudiante son aceptables y consistentes (Fig. 4.63 y 4.64). Esto se confirma con las producciones (Fig. 4.70) y los argumentos ofrecidos durante la entrevista en donde comenta: “una función es decreciente cuando baja”.

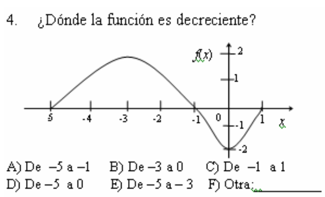


Fig. 4.63 Pregunta 4.A

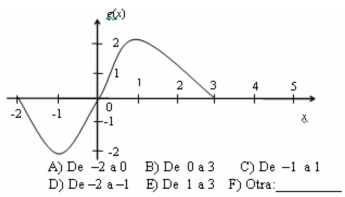


Fig. 4.64 Pregunta 4.B

TABLA 4.36 Función decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es decreciente si sus ordenadas son negativas	✓	–	✓	✓
La función es decreciente si, a medida que crecen las abscisas decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓	–	–
Si la gráfica de la función baja, la función es decreciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	–
La función es decreciente si sus abscisas son negativas	–	–	–	–
La función es decreciente si, además de cumplir esta condición, es negativa	–	–	–	–
La función es decreciente si sus abscisas y sus ordenadas son negativas	–	–	–	–

c. Concepciones relativas a la ubicación y al comportamiento de las funciones.

Función con imagen positiva y creciente. La única gráfica seleccionada por Agustín en el pre–test (ver TABLA 4.37) en la pregunta 1 del Cuestionario 2 (Fig. 4.65) corresponde a una función con imagen positiva y creciente pero, a diferencia de las otras dos opciones (C y E) que también cumplen con estas condiciones, tiene la particularidad de que sus abscisas son positivas. Con esta elección se manifiesta la asociación que él establece entre las condiciones positiva y creciente con gráficas que tienen abscisas y ordenadas positivas; las opciones C y E no fueron elegidas seguramente porque tienen abscisas negativas. Las ideas manifestadas en el post–test son aceptables y denotan una mayor generalización respecto del pre–test, pues no solo elige la opción A, sino también las opciones C y E. Las producciones del estudiante durante la entrevista (Fig. 4.66) en donde él comenta que "una función es positiva cuando está por encima del eje de las ***x***" y "es creciente cuando sube o cuando su pendiente es menor de 90º" confirman estas observaciones.

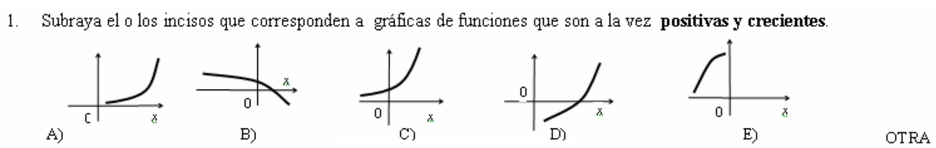


Fig. 4.65 Pregunta 1

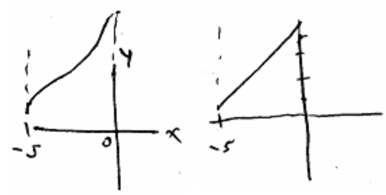


Fig. 4.66 Gráficas para funciones positivas y crecientes dibujadas por Agustín

TABLA 4.37 Función positiva y creciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es positiva y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	✓	–
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–

Función con imagen negativa y creciente. La gráfica seleccionada por Agustín en la pregunta 2 … y es creciente, al … llas, tiene sus ab… ción porque vincula las condiciones negativa … ráficas que tienen abscisas y ordenadas negativas; esto da cuenta del p… B y E no fueron elegidas. En el post–test se observan ideas aceptables y consistentes pues es evidente que cuando Agustín elige las opciones B, D y E, ha generalizado su idea de función con imagen negativa y creciente. Lo anterior se corrobora con los resultados de la entrevista (Fig. 4.68) en donde reitera que: “una función es negativa cuando su gráfica está debajo del eje x” y que una función “es creciente cuando sube o cuando su pendiente es menor de 90º”.

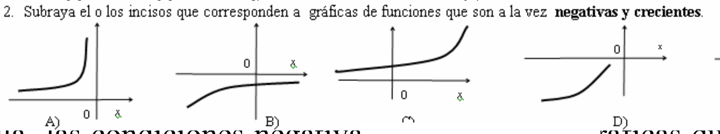


Fig. 4.67 Pregunta 2

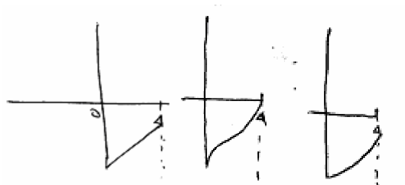


Fig. 4.68 Gráficas para funciones con imagenes negativas y crecientes dibujadas por Agustín

TABLA 4.38 Función negativa y creciente	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es negativa y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es negativa y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	✓	–
La función es negativa si comienza a trazarse abajo del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–

Función con imagen positiva y decreciente. De forma análoga a las preguntas anteriores, en el pre–test, en la pregunta 3 del Cuestionario 2 (Fig. 4.69) Agustín solo selecciona la gráfica C (ver TABLA 4.39), que además de tener imagen positiva y ser decreciente, a diferencia de las gráficas A y E que también cumplen estas condiciones, tiene sus abscisas positivas. El origen de esta elección otra vez lo encontramos en el vínculo que el estudiante establece entre funciones con imágenes positivas y decrecientes con las gráficas de funciones que tienen abscisas y ordenadas positivas. En el post–test encontramos ideas aceptables y consistentes con un mayor grado de generalización respecto del pre–test y esta observación es reiterada por las producciones del estudiante durante su entrevista (Fig. 4.70) en donde expresa que "una función es positiva porque la gráfica está encima del eje ***x***" y "es decreciente cuando baja".

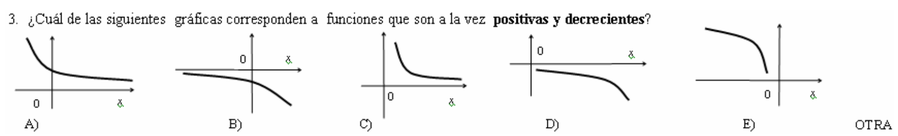


Fig.4.69 Pregunta 3

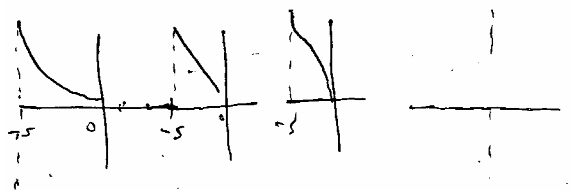


Fig. 4.70 Gráfica para funciones con imágenes positivas y decrecientes dibujadas por Agustín

TABLA 4.39 Función positiva y decreciente	Concepciones aceptables y concepciones

	alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es positiva y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	✓	–
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es decreciente si baja, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–

Función con imagen negativa y decreciente. En la pregunta 4 del Cuestionario 2 (Fig. 4.68) durante el pre–test se manifiestan concepciones similares a las anteriores. A Agustín se le pide seleccionar las gráficas de las funciones con imágenes negativas y decrecientes entre cinco opciones disponibles y él solo elige aquella gráfica que además de tener imagen negativa y ser decreciente (opción E) posee abscisas negativas (ver TABLA 4.40) lo que muestra su disposición a privilegiar la asociación de las funciones con imágenes negativas y decrecientes con las gráficas que tienen abscisas y ordenadas negativas. En el post–test Agustín muestra concepciones aceptables y consistentes que denotan ideas más generalizadas respecto del pre–test. Las gráficas construidas por Agustín durante la entrevista (Figs. 4.60 y 4.68) y sus argumentaciones ("una función es negativa cuando está debajo del eje ***x***" y "es decreciente cuando baja") confirman estas observaciones.

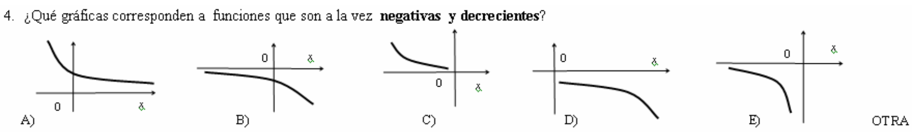


Fig. 4.71

TABLA 4.40 Función negativa y decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es negativa y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es negativa y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	✓	–

d. Concepciones relativas a la estabilidad de una función

a) Pre–test. Observamos que Agustín, en la pregunta 5 del Cuestionario 1 (Fig. 4.70), no elige opción alguna (ver TABLA 4.41).

   Inter–test. En el test aplicado a tres semanas de iniciado el curso, cuando a este estudiante se le cuestiona en torno a los puntos en donde la función de la Fig. 4.1, no crece ni decrece, no da respuesta alguna. A siete semanas de iniciada la puesta en escena del diseño instruccional, para la función de la Fig. 4.8, en opinión de este estudiante esta función no crece ni decrece en el intervalo **-1 < *x* < 0**, en donde efectivamente se cumple esta condición. Sin embargo, esta respuesta no está completa pues la función estabiliza su comportamiento en otros cuatro puntos (máximos y mínimos) que no son identificados por este estudiante, lo cual es una evidencia de que para él, no hay estabilidad en los puntos máximos y mínimos, sino solo en el tramo horizontal de la función.

Post–test. Para la función de la Fig. 4.72 sus respuestas son aceptables e incluso anota un valor que originalmente no estaba disponible explícitamente, lo que muestra un alto grado de generalización de las ideas y estas concepciones son corroboradas por sus producciones (Fig. 4.73) y argumentos construidos durante la entrevista, en donde él manifiesta que "la función se estabiliza en aquellos puntos donde no sube, ni baja, donde se mantiene constante".

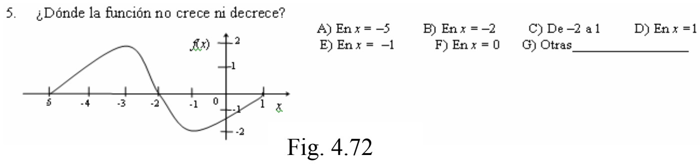


Fig. 4.72

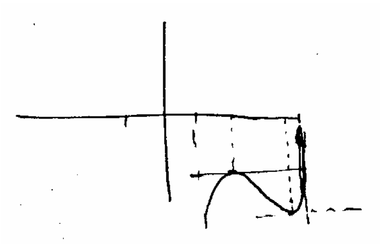


Fig. 4.73 Gráfica de una función con puntos en donde se estabiliza su comportamiento dibujada por Agustín

TABLA 4.41 Función que no crece ni decrece	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica o en donde ésta sea horizontal (aceptable)	–	–	–	✓
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en los puntos donde la gráfica intercepta al eje *x*	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en los intervalos donde su gráfica es horizontal	–	–	✓	–
Una función no crece ni decrece en sus puntos máximos, en sus puntos mínimos y en las intersecciones con el eje de las abscisas	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en $x = 0$ y $y = 0$	–	–	–	–

b) En la quinta pregunta del Cuestionario 2 (Fig. 4.74), en el pre–test para ***f*(*x*)** Agustín solo identifica uno de los puntos de estabilización y para ***g*(*x*)** no proporciona respuesta alguna (ver TABLA 4.42). En el post–test la respuesta para ***f*(*x*)** es aceptable, pero para ***g*(*x*)** además de identificar su único punto de estabilización considera que la función se estabiliza en sus proximidades (***x* = 0.5** y ***x* = 1.5**).

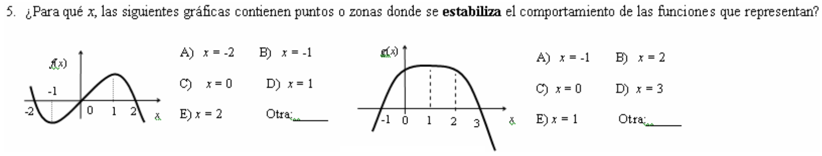


Fig. 4.74

TABLA 4.42 Puntos o intervalos donde una función estabiliza su comportamiento	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Una función se estabiliza en los puntos máximos y mínimos de su gráfica (aceptable)	✓	✓
Una función se estabiliza en los puntos donde la gráfica intercepta al eje *x*	–	–
Una función se estabiliza en la vecindad de un punto máximo	–	✓
Una función se estabiliza en *x* = 0	–	–

e. Concepciones manifestadas usando los registros analítico y gráfico

Funciones que cumplen con las condiciones *f*(*x*) > 0 y *f'*(*x*) < 0. En el pre–test, en la pregunta 1 del Cuestionario 3 (Fig. 4.75) la respuesta dada por Agustín (ver TABLA 4.43) incluye una de las gráficas que cumple con ***f*(*x*) > 0** y ***f'*(*x*) < 0**; la otra no cumple con estas condiciones. Si observamos con detenimiento estas dos gráficas nos daremos cuenta que en ambas encontramos que, en su primera parte, las abscisas cumplen con ***x* < 0** y, en la segunda parte, cumplen con ***x* > 0**. En el post–test su respuesta es consistentemente aceptable.

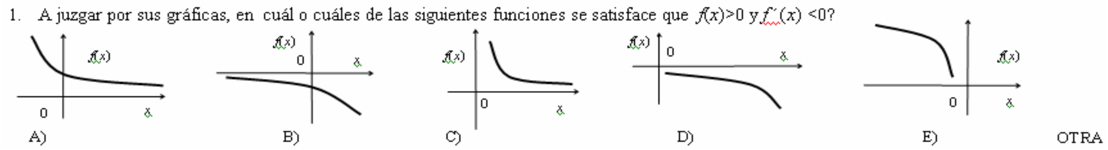


Fig. 4.75

TABLA 4.43 Función que cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $x < 0$ y otra parte que cumple con $x > 0$	✓	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, además de cumplir con estas condiciones cumple con $x > 0$	–	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando cumple con $f(x) > 0$ y $x < 0$	–	–

Funciones que cumplen con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. En la pregunta 2 del Cuestionario 3 (Fig. 4.76) encontramos que en su respuesta, Agustín (ver TABLA 4.44) elige una de las gráficas que cumplen con $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$; la otra no cumple con estas condiciones. Creemos que la explicación a esta respuesta es similar a la formulada en el caso anterior: las dos gráficas seleccionadas tienen al principio una porción donde se cumple $x < 0$ y posteriormente otra porción que se corresponde con la expresión $x > 0$; parecería que Agustín atiende a la presencia de las expresiones "**< 0**" y "**> 0**" presentes en $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. En el post–test su respuesta es congruente con $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$.

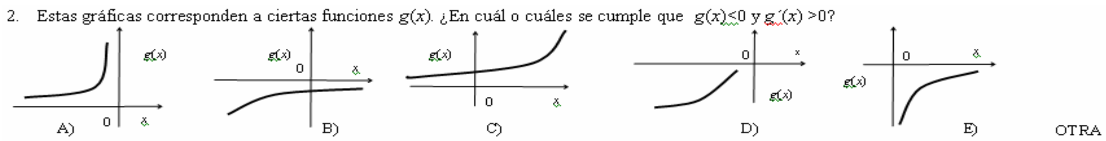


Fig. 4.76

TABLA 4.44 Función que cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $x < 0$ y otra parte que cumple con $x > 0$	✓	–

Funciones que cumplen con las condiciones $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$. En el pre–test, en la pregunta 3 del Cuestionario 3 (Fig. 4.77) en su respuesta, Agustín solo elige una (opción A) de las tres gráficas que cumplen con las condiciones especificadas (ver TABLA 4.45); esta gráfica es la única de las tres que también cumple con la condición $x > 0$ y es posible que esta selección manifieste la asociación que él establece entre las funciones que cumplen con $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$, con las que cumplen con $\boldsymbol{h(x) > 0}$, $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ y $\boldsymbol{x > 0}$. En el post–test elige las tres gráficas que cumplen con las condiciones solicitadas, es decir, la respuesta es consistentemente aceptable.

3. Las siguientes gráficas corresponden a ciertas funciones $h(x)$. ¿Cuál o cuáles de ellas son tales que $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$?

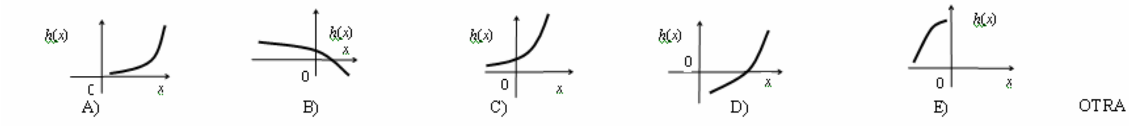


Fig. 4.77

TABLA 4.45 Función que cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ **y** $\boldsymbol{h'(x) > 0}$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x > 0}$	✓	–

Funciones que cumplen con las condiciones $\boldsymbol{y < 0}$ **y** $\boldsymbol{y' < 0}$**.** En la pregunta 4 del Cuestionario 3, en el pre–test, (Fig. 4.78) la respuesta no especifica gráfica alguna (ver TABLA 4.46). En el post–test elige las dos gráficas que cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{y' < 0}$, es decir, la respuesta es consistentemente aceptable.

4. Las siguientes gráficas corresponde a funciones de la forma: $y = f(x)$. ¿Para cuál o cuáles de ellas se cumple que $y < 0$ y $y' < 0$?

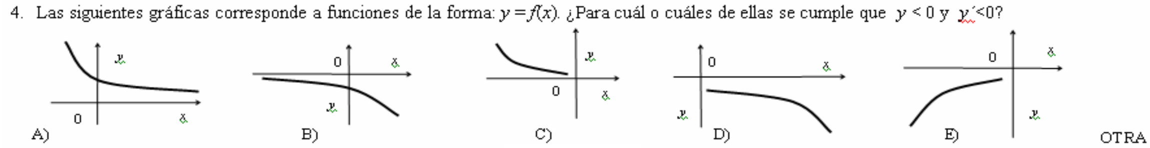


Fig. 4.78

TABLA 4.46 Función que cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ **y** $\boldsymbol{y'(x) < 0}$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x < 0}$ y $\boldsymbol{y < 0}$	–	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x < 0}$	–	–

Puntos que cumplen con las condiciones *f'*(*x*) = 0. En el pre–test, en la pregunta 5 del Cuestionario 3 (Fig. 5.79) en la respuesta no se especifica gráfica alguna (ver TABLA 4.47). En el post–test, la respuesta de Agustín asocia una de las intersecciones de la función con los puntos de estabilidad de la misma.

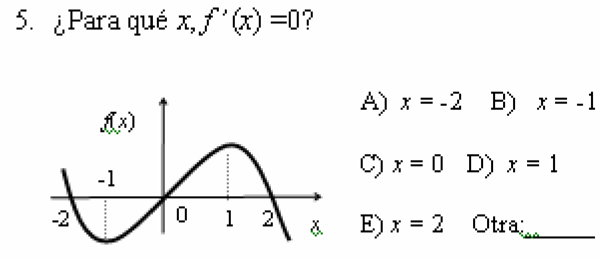


Fig. 4.79

TABLA 4.47 Puntos que cumplen con la condición *f'*(*x*) = 0	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Los puntos que cumplen con la condición ***f'*(*x*) = 0** son los máximos y mínimos de la función (aceptable)	–	–
En ***x* = 0** se cumple la condición ***f'*(*x*) = 0**	–	–
En sus intersecciones con el eje ***x*** se cumple la condición ***f'*(*x*) = 0**	–	✓

Determinación de la *f'*(*x*) en un punto dado. En la pregunta 6 del Cuestionario 3 (Fig. 4.80) tanto en el pre–test, como en el post–test asocia la derivada de la función con el valor de la ordenada en el punto en cuestión (ver TABLA 4.48).

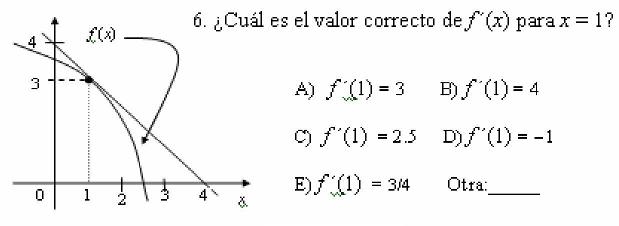


Fig. 4.80

TABLA 4.48 *f'*(*x*) en un punto dado	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La ***f'*(*x*)** en un punto dado es igual a la pendiente de la tangente a la función en ese punto (aceptable)	–	
La ***f'*(*x*)** en un punto dado es igual a la ***f*(*x*)** en ese punto	✓	✓
La ***f'*(*x*)** en un punto dado es igual a la abscisa del punto en donde la tangente en el punto *x* cruza al eje *x*	–	–

f. Análisis comparativos de las preguntas paralelas. Las planteadas verbalmente y las planteadas analíticamente

Función con imagen positiva y creciente y función que cumple con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$. La respuesta ofrecida por Agustín a esta pregunta, usando lenguaje verbal, en el pre–test denota la asociación que él establece entre las condiciones positiva y creciente con gráficas que tienen abscisas y ordenadas positivas; en el post–test su respuesta es consistentemente aceptable. Cuando la pregunta se formula usando lenguaje analítico, en el pre–test asocia las funciones que cumplen con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$, con las que cumplen con $h(x) > 0$, $h'(x) > 0$ y $x > 0$. En el post–test, su respuesta obedece a las condiciones especificadas, mostrando con ello que el cambio de lenguaje usado en la pregunta no influyó en el desempeño del estudiante (ver Figs. 4.62, 4.63, 4.74 y Tablas 4.36, 4.44).

Función con imagen negativa y creciente y función que cumple con $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. La respuesta de Agustín a la pregunta formulada verbalmente, en el pre–test, vincula las condiciones negativa y creciente con gráficas que tienen abscisas y ordenadas negativas; en el post–test la respuesta es consistentemente aceptable, siendo corroborada por las producciones y argumentos elaborados por él en la entrevista. Cuando esta misma pregunta se hace utilizando lenguaje analítico, en el pre–test las dos gráficas seleccionadas tienen al principio una porción donde se cumple $x < 0$ y posteriormente otra porción que se corresponde con la expresión $x > 0$; Agustín parece atender a la presencia de las expresiones "< 0" y "> 0" presentes en $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. Ya en el post–test su respuesta es consistente y aceptable. Pese al cambio de lenguaje en la formulación de la pregunta, Agustín logra superar las concepciones alternativas iniciales en ambos casos (ver Figs. 4.64, 4.65, 4.72 y Tablas 4.37, 4.43).

Función con imagen positiva y decreciente y función que cumple con $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. De forma análoga al caso anterior, cuando la pregunta se plantea con lenguaje verbal, en el pre–test, la respuesta de Agustín denota la relación que él establece entre funciones con imágenes positivas y decrecientes con las gráficas de funciones que tienen abscisas y ordenadas positivas. En el post–test las gráficas seleccionadas por el estudiante poseen la ubicación y el comportamiento especificado. Por otra parte, al plantear la pregunta usando lenguaje analítico, en el pre–test, atendiendo a la presencia de las expresiones "< 0" y "> 0" en $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ Agustín elige dos gráficas. Ya en el post–test su respuesta es consistentemente aceptable. Nuevamente, en el post–test, Agustín logró remover ambas concepciones alternativas iniciales (ver Figs 4.66, 4.67, 4.72 y Tablas 4.38, 4.42).

Función con imagen negativa y decreciente y función que cumple con $y < 0$ y $y' < 0$. Al plantear la pregunta usando lenguaje verbal, en el pre–test la respuesta de Agustín solo incluye aquella gráfica que además de tener la ubicación y el comportamiento especificado cumple con la condición de que sus abscisas tienen el mismo signo que las ordenadas, manifestando así la presencia de una concepción alternativa, misma que se ve removida para el momento en que es examinado el estudiante en el post–test. Cuando él se ve precisado a contestar la misma pregunta formulada con lenguaje analítico, no elige gráfica alguna. En el post–test contesta consistentemente y aceptablemente. En ambos casos, los resultados del post–test son evidencia de que las concepciones alternativas iniciales lograron removerse (ver Figs. 4.68, 4.57, 4.65, 4.75 y Tablas 4.39, 4.45).

Función que no crece ni decrece y función que cumple con $f'(x) = 0$. En el pre–test, al plantear la pregunta verbalmente, Agustín solo identifica uno de los puntos de estabilización. En el post–test, ofrece una respuesta consistente y aceptable pues identifica ambos puntos. Estas ideas son confirmadas por la gráfica y los argumentos que él elabora en la entrevista. En cambio, cuando al estudiante se le plantea la misma pregunta usando lenguaje analítico, en el pre–test no proporciona respuesta alguna y, en el post–test, la estabilidad de la función la asocia a $x = 0$, donde no se cumple la condición especificada. Evidentemente, la pregunta planteada analíticamente encierra mayor dificultad para el alumno respecto del planteamiento verbal (ver Figs. 4.71, 4.76 y Tablas 4.41, 4.46).

La revisión general de las respuestas dadas por este estudiante puede ser evidencia de que la mayoría de las concepciones alternativas inicialmente identificadas sufrieron un cambio en la dirección buscada. Esta conclusión se sustentaría además en los argumentos vertidos por el estudiante durante la entrevista. Sin embargo, al observar los resultados obtenidos en los test intermedios, se tiene evidencia de algunos retrocesos, principalmente respecto del comportamiento de las funciones, lo cual puede ser un indicio de que los cambios que se presentan en las concepciones de este estudiante no se dan en una sola dirección.

Por otra parte, en relación a los resultados obtenidos en el Cuestionario 3, destacan dos de las respuestas dadas por este estudiante:

a) En el post–test asocia una de las intersecciones de la función con los puntos de estabilidad

b) Tanto en el pre–test, como en el post–test asocia la derivada de la función con el valor de la ordenada en el punto en cuestión

Lo anterior demuestra que estas dos concepciones alternativas resultaron tener una gran estabilidad para este estudiante y que el manejo de la representación analítica supuso para él un mayor grado de dificultad respecto de la representación verbal.

Celestina

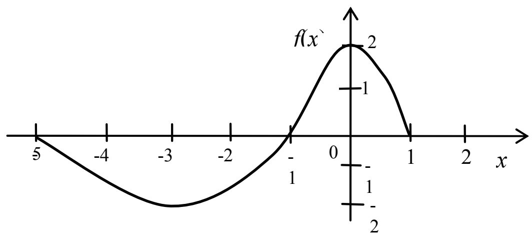
a. Concepciones relativas a la ubicación de la función

Función con imagen positiva

Pre–test. Las respuestas proporcionadas por Celestina (ver TABLA 4.49) para ambas gráficas de la pregunta 1 del Cuestionario 1 (Figs. 4.78 y 4.79) cumplen con el criterio especificado.

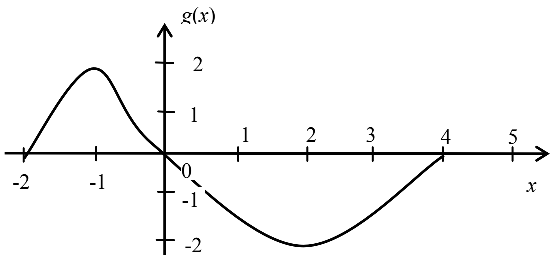
Inter–test. La respuesta ofrecida por esta estudiante respecto de la función de la Fig. 4.1 nos muestra que para ella la función es positiva cuando $x > 0$, es decir, esta estudiante está asociando una función con imagen positiva con el intervalo donde tiene sus abscisas positivas. Esta respuesta representa un retroceso respecto de la concepción manifestada en el test anterior.

Post–test. En la respuesta dada a la pregunta 1A (Fig. 4.78) ella considera que la función con imagen positiva es aquella que es creciente; en el segundo caso, pregunta 1B la respuesta es análoga. Estas respuestas no son aceptables pero sí consistentes entre sí, pues en ambas contesta de manera análoga. Posteriormente, al inicio de la entrevista la estudiante manifiesta que "las funciones son positivas si están arriba del eje $\boldsymbol{x}$" (Fig. 4.80) pero, más adelante, expresa una idea diferente: "una función es positiva si su gráfica comienza arriba del eje $\boldsymbol{x}$ y es negativa si su gráfica comienza debajo del eje $\boldsymbol{x}$ (Fig. 4.91)"; aquí es destacable que para ella la función tiene imagen positiva si empieza a trazarse por arriba del eje x sin importar que la gráfica trascienda hasta la región donde las ordenadas son negativas.



A) De 0 a 1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a –1 F) Otra:_____

Fig. 4.78 Pregunta 1A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 4 C) De 2 a 4
D) De –1 a 2 E) De –2 a –1 F) Otra__

Fig. 4.79 Pregunta 1B

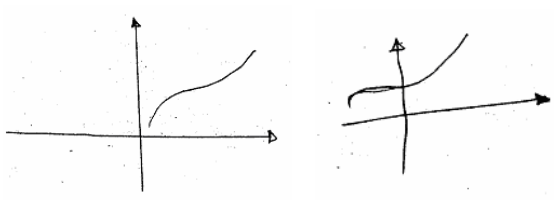


Fig. 4.80 Gráficas de funciones con imágenes positivas dibujadas por Celestina

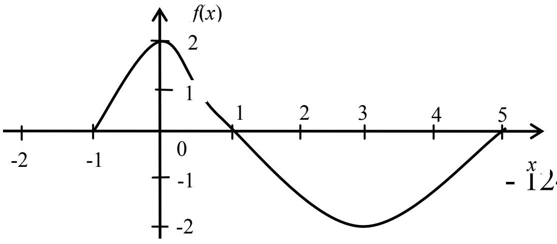
TABLA 4.49 Función con imagen positiva	Concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**intertest**	**Postest y entrevista**
La función es positiva donde sus ordenadas son positivas (aceptable)	✓	—	—
La función tiene imagen positiva si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son positivas	—	✓	—
La función tiene una imagen positiva si su gráfica está ubicada en el primer cuadrante, donde las abscisas y las ordenadas son positivas.	—	—	—
La función es positiva si su gráfica comienza a trazarse arriba del eje de las abscisas	—	—	✓
La función es positiva si es creciente	—	—	✓
La función es positiva si sus abscisas son positivas y es creciente	—	—	—
El intervalo en donde una función es positiva queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	—	—	—

Función con imagen negativa

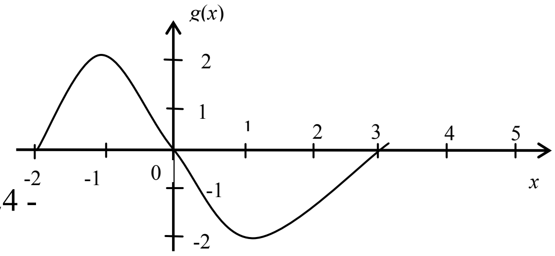
Pre–test. Al indagar en las ideas de Celestina respecto de las funciones con imágenes negativas encontramos, que su respuesta a la pregunta 3A (Fig. 4.81) relaciona la gráfica que tiene abscisas positivas con la función con imagen negativa; por el contrario, la respuesta a la pregunta 3B (Fig. 4.82) sí cumple con la condición especificada y en conjunto, no hay consistencia en ambas respuestas, pues cada una se analiza de forma distinta.

Inter–test. Ella considera que la función de la Fig. 4.1, es negativa cuando $x < 0$, es decir, asocia una función negativa con el intervalo donde las abscisas de la función son negativas.

Post–test. Ambas respuestas son aceptables (ver TABLA 4.50) y consistentes e incluso, en la respuesta a la pregunta 3A considera un intervalo que inicialmente no se encontraba explícitamente disponible, lo que da muestra de generalización de la nueva concepción. Lo anterior, aunado a las producciones (Fig. 4.83) y argumentaciones de Celestina en la entrevista ("la función es negativa porque está debajo del eje de las ***x***") supone que ha alcanzado un alto grado de generalización. Sin embargo, al continuar con la entrevista ella misma agrega: "una función es positiva si su gráfica comienza arriba del eje ***x*** y es negativa si su gráfica comienza debajo del eje ***x***" (no le concede relevancia al hecho de que la función trascienda a regiones donde cambia de signo) (Fig. 4.91).



A) De –1 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De 0 a 5 E) De 3 a 5 F) Otra:_____



A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De –2 a –1 E) De 1 a 3 F) Otra:_____

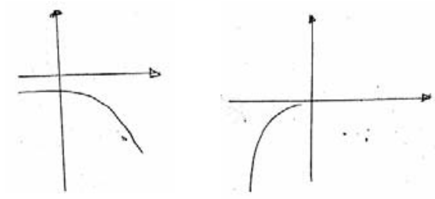


Fig. 4.83 Gráficas de funciones con imágenes negativas dibujadas por Celestina

TABLA 4.50 Función negativa	Concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**intertest**	**Postest**
La función es negativa donde sus ordenadas son negativas (aceptable)	✓	–	–
La función tiene imagen negativa si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son negativas.	✓	✓	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse abajo del eje de las abscisas	–	–	✓
El intervalo en donde una función es negativa queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	–	–	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse debajo del eje de las abscisas	–	–	–
Una función es negativa si es decreciente	–	–	–

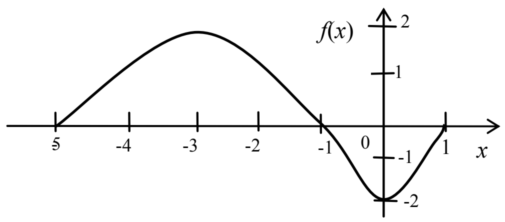
b. Concepciones relativas al comportamiento de la función.

Función creciente

Pre–test. Las respuestas proporcionadas por Celestina (ver TABLA 4.51) para ambas gráficas de la pregunta 2 del Cuestionario 1 (Figs. 4.84 y 4.85) cumplen con la condición especificada, pero solo en la segunda respuesta se observa consistencia pues todos los intervalos donde $\boldsymbol{g(x)}$ es creciente fueron seleccionados por ella; en la primera respuesta la estudiante solo selecciona uno de los intervalos (opción C) donde $\boldsymbol{f(x)}$ es efectivamente creciente.

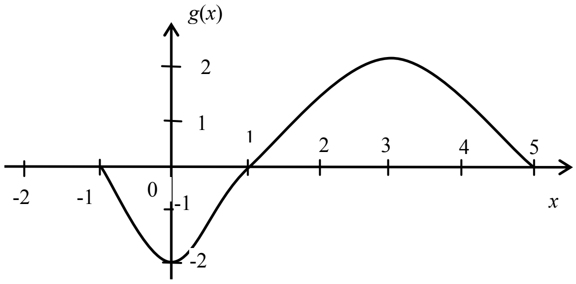
Inter–test. No contesta a la pregunta de en qué intervalos la función de la Fig. 4.1 es creciente. Al cabo de siete semanas de iniciado el curso se aplica otro test y la estudiante tampoco contesta a la misma pregunta pero ahora relacionada a la Fig. 4.8.
Post–test. Ambas respuestas (Fig. 4.84 y Fig. 4.85) son consistentemente aceptables. Luego, revisando sus producciones (Fig. 4.89 y 4.91) y comentarios durante la entrevista encontramos que para ella “una función es positiva si su gráfica comienza

arriba del eje $\boldsymbol{x}$ y es negativa si su gráfica comienza debajo del eje $\boldsymbol{x}$" (para ella no importa que la gráfica entre a regiones del plano coordenado donde la función cambia de signo) y "una función es creciente si crece hacia arriba" (olvida que el crecimiento de la función debe ser concomitante al crecimiento en las abscisas).



A) De –5 a –1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a –3 E) De 0 a 1 F) Otra:_____

Fig. 4.84 Pregunta 2.A



A) De 1 a 5 B) De –1 a 1 C) De 0 a 3
D) De 0 a 5 E) De –1 a 0 F) Otra:_____

Fig. 4.85 Pregunta 2.B

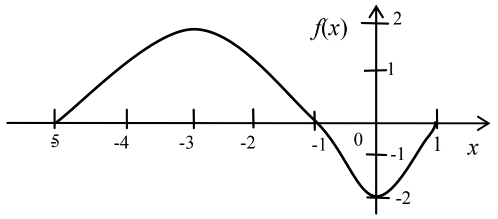
TABLA 4.51 Función creciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es creciente si sus ordenadas son positivas	–	–	–	–
La función es creciente si su imagen es negativa	–	–	–	–
La función es creciente si, a medida que crecen las abscisas crecen sus ordenadas (aceptable)	✓	–	–	–
Si la gráfica de la función sube, la función es creciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	✓
El intervalo donde la función es creciente queda determinado por los valores numéricos más próximos a sus límites	–	–	–	–
La función es creciente si sus abscisas son positivas	–	–	–	–

Función decreciente

Pre–test. Al explorar las concepciones de Celestina acerca de las funciones decrecientes, encontramos que las respuestas proporcionadas por ella (ver TABLA 4.52) para ambas gráficas de la pregunta 4 del Cuestionario 1 (Figs. 4.86 y 4.87) cumplen con la condición especificada, pero solo para $\boldsymbol{f(x)}$ es consistente ya que, en la segunda, la estudiante solo selecciona uno de los intervalos donde la $\boldsymbol{g(x)}$ es decreciente.

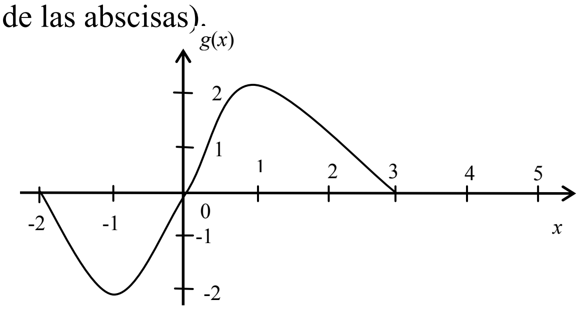
Inter–test. Al analizar la función de la Fig.4.1, no contesta cuando se le pregunta en torno a los intervalos donde la función es decreciente. Similar resultado se obtiene en el test aplicado (Fig. 4.8) a siete semanas del inicio del curso.

Post–test. Ambas respuestas son consistentemente aceptables (Fig. 4.86 y Fig. 4.87). Posteriormente, revisando sus gráficas (Fig. 4.93) y argumentaciones desarrollados en la entrevista encontramos que para ella "una función es positiva si su gráfica comienza arriba del eje $\boldsymbol{x}$ y es negativa si su gráfica comienza debajo del eje $\boldsymbol{x}$" (sin importar que la gráfica se interne en regiones del plano coordenado donde cambia de signo) y "una función es decreciente si crece hacia abajo" (no toma en cuenta que el decrecimiento de la función se acompaña de un crecimiento de las abscisas).



A) De –5 a –1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a – 3 F) Otra:____

Fig. 4.86 Pregunta 4.A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De –2 a –1 E) De 1 a 3 F) Otra:____

Fig. 4.87 Pregunta 4.B

TABLA 4.52 Función decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es decreciente si sus ordenadas son negativas	–	–	–	–
La función es decreciente si, a medida que crecen las abscisas decrecen sus ordenadas (aceptable)	✓	–	–	–
Si la gráfica de la función baja, la función es decreciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	✓
La función es decreciente si sus abscisas son negativas	–	–	–	–
La función es decreciente si, además de cumplir esta condición, es negativa	–	–	–	–
La función es decreciente si sus abscisas y sus ordenadas son negativas	–	–	–	–

c. Concepciones relativas a la ubicación y al comportamiento de las funciones.

Función con imagen positiva y creciente. En la pregunta 1 del Cuestionario 2 (Fig. 4.88), la única gráfica correspondiente a una función con imagen positiva y creciente que no selecciona Celestina es aquella que tiene abscisas negativas y en su lugar selecciona la gráfica D, que tiene una parte positiva y otra negativa, pero cuyas abscisas son positivas. En esta elección se muestra el vínculo que ella establece entre las funciones con imágenes positivas y crecientes con aquellas gráficas que tienen abscisas positivas (ver TABLA 4.53). En el post–test se manifiestan ideas aceptables y consistentes. Sin embargo, revisando sus producciones (Fig. 4.89) y argumentaciones desarrolladas en la entrevista no encontramos consistencia entre la lectura e interpretación y la construcción que Celestina hace de las gráficas de funciones con imágenes positivas y crecientes, pues ella expresa que "una función es positiva si su gráfica comienza arriba del eje ***x*** y es negativa si su gráfica comienza debajo del eje ***x***" (en su opinión no importa que la gráfica se interne en regiones del plano coordenado donde la imagen cambia de signo) y "una función es creciente si crece hacia arriba" (sin considerar que el crecimiento de la función se coordina con el crecimiento de las abscisas).

1. Subraya el o los incisos que corresponden a gráficas de funciones que son a la vez **positivas y crecientes**.

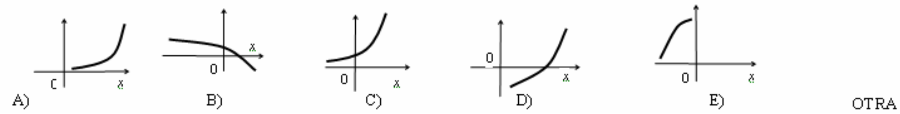


Fig. 4.88 Pregunta 1

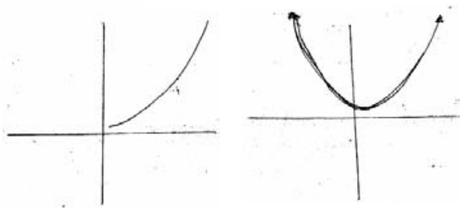


Fig. 4.89 Gráficas para funciones con imágenes positivas y crecientes dibujadas por Celestina

TABLA 4.53 Función positiva y creciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	–
La función es positiva y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	✓	–
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	✓

Función con imagen negativa y creciente. En el pre–test, para la pregunta 2 del Cuestionario 2 (Fig. 4.90) ninguna de las gráficas seleccionadas por Celestina (ver TABLA 4.54) cumplen con las condiciones establecidas. Sin embargo, la gráfica del inciso A corresponde a una función con imagen positiva y creciente pero con abscisas negativas y la imagen de la función de la gráfica C es positiva y creciente pero comienza en el segundo cuadrante es decir, en su primera parte tiene abscisas negativas. Suponemos que a estas razones obedece su elección. En el post–test su respuesta es aceptable pero le falta consistencia, pues no incluye la gráfica B. En sus gráficas (Fig. 4.91) y comentarios elaborados durante la entrevista: "una función es positiva si su gráfica comienza arriba del eje ***x*** y es negativa si su gráfica comienza debajo del eje ***x***" (sin considerar que cuando la gráfica se interna en algunas regiones del plano coordenado cambia de signo) y "una función es creciente si crece hacia arriba" (no tomando en cuenta la coordinación entre el crecimiento de la función con el crecimiento de las abscisas) no encontramos consistencia con la lectura e interpretación que hizo en el post–test de las gráficas.

2. Subraya el o los incisos que corresponden a gráficas de funciones que son a la vez **negativas y crecientes**.

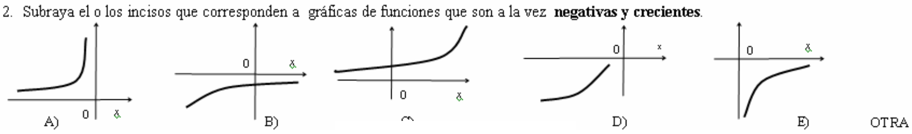


Fig. 4.90 Pregunta 2

TABLA 4.54 Función negativa y creciente	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es negativa y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	–
La función es negativa y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	–	–
La función es negativa si comienza a trazarse abajo del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	✓
La función es negativa y creciente cuando, tiene abscisas negativas.	✓	–

Función con imagen positiva y decreciente. Explorando las ideas de Celestina respecto de las funciones con imágenes positivas y decrecientes, encontramos, en el pre–test, en la pregunta 3 del Cuestionario 2 (Fig. 4.92) que su respuesta es aceptable pero incompleta (ver TABLA 4.55), ya que no incluye la gráfica A que también corresponde a una función con imagen positiva y decreciente y que se encuentra en el 2º y 1er cuadrante. En el post–test sus respuestas son aceptables y consistentes. Sin embargo, las gráficas y los comentarios vertidos por Celestina durante la entrevista (Fig. 4.93): "una función es positiva si su gráfica comienza arriba del eje ***x*** y es negativa si su gráfica comienza debajo del eje ***x***" (sin que para ella sea relevante que la gráfica se interne en regiones del plano coordenado donde las ordenadas son negativas) y "una función es decreciente si crece hacia abajo" (sin coordinar el decrecimiento de la imagen de la función con el crecimiento de las abscisas) no son consistentes con las condiciones que puso en juego en la lectura e interpretación de gráficas que realizó en el post–test.

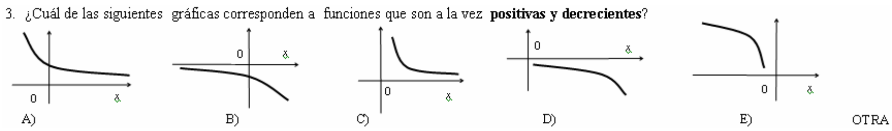


Fig.4.92 Pregunta 3

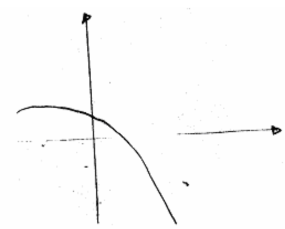


Fig. 4.93 Gráfica para funciones con imágenes positivas y decrecientes dibujadas por Celestina

TABLA 4.55 Función positiva y decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas

	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	✓	–
La función es positiva y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	–	–
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es decreciente si baja, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	✓

Función con imagen negativa y decreciente. Las respuestas proporcionadas por Celestina en el pre–test (ver TABLA 4.56) para la pregunta 4 del Cuestionario 2 (Fig. 4.94) son aceptables, pues selecciona todas las gráficas donde en efecto las funciones tienen imágenes negativas y decrecientes. En el post–test sus respuestas permanecen sin cambio. No obstante lo anterior, como ya lo consignamos previamente, sus producciones (Fig. 4.93) y argumentos elaborados durante la entrevista: "una función es positiva si su gráfica comienza arriba del eje ***x*** y es negativa si su gráfica comienza debajo del eje ***x***" (sin que para ella importe que la gráfica de la función trascienda regiones del plano coordenado donde sufra algún cambio de signo) y "una función es decreciente si crece hacia abajo" (sin coordinar el decrecimiento de la función con el crecimiento de las abscisas) no son consistentes con la lectura e interpretación de gráficas que realizó en el post–test.

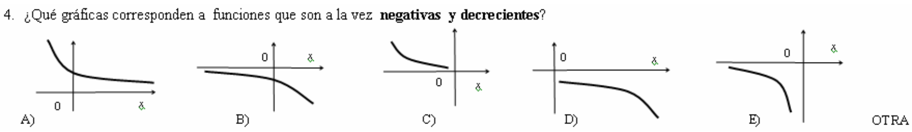


Fig. 4.94

TABLA 4.56 Función negativa y decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es negativa y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	✓	–
La función es negativa y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	–	✓

d. Concepciones relativas a la estabilidad de una función

a) Pre–test. Observamos cómo Celestina, en la pregunta 5 del Cuestionario 1 (Fig. 4.95) asocia al intervalo (-2, 1) con los puntos o zonas estacionarias. Suponemos que esto obedece a que en $x = -2$ y $x = 1$ la función intercepta al eje x.

Inter–test. Para Celestina la función de la Fig. 4.1 no crece ni decrece en $\boldsymbol{x = -0.5}$, $\boldsymbol{x = 1.5}$ y $\boldsymbol{x = 3}$, puntos en donde no se cumple la condición especificada, sino que en esos puntos la función intercepta al eje de las abscisas; esto es indicativo de la asociación que la estudiante está estableciendo entre estas dos condiciones. A la misma pregunta, pero ahora referida a la función de la Fig. 4.8, después de siete semanas de haber iniciado la puesta en escena del diseño instruccional, la estudiante no da respuesta alguna.

Post–test. Para la Fig. 4.95 no identifica valor alguno y, aunque durante la entrevista, ella discrimina aceptablemente los puntos de estabilización: "una función se estabiliza en los puntos donde no crece ni decrece" de la gráfica que construye (Fig. 4.96) estas ideas no se pusieron en juego durante la actividad de lectura e interpretación de gráficas de funciones.

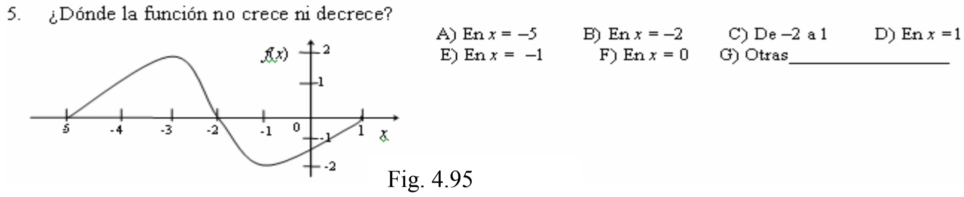


Fig. 4.95

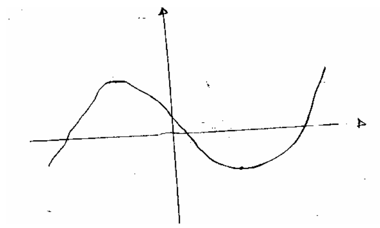
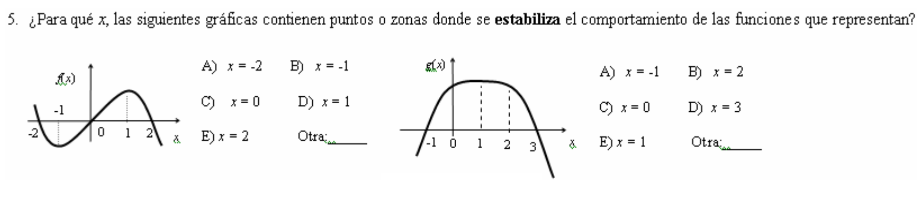


Fig. 4.96 Gráfica de una función con puntos en donde se estabiliza su comportamiento dibujada por Celestina

TABLA 4.57 Función que no crece ni decrece	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	Intertest 1	Intertest 2	Postest y entrevistas
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica o en donde ésta sea horizontal (aceptable)	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en los puntos donde la gráfica intercepta al eje x	–	✓	–	✓
Una función no crece ni decrece en los intervalos donde su gráfica es horizontal	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en sus puntos máximos, en sus puntos mínimos y en las intersecciones con el eje de las abscisas	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en $x = 0$ y $y = 0$	✓	–	–	–

b) Para la pregunta 5 del Cuestionario 2 (Fig. 4.97), en el pre–test, de acuerdo a Celestina, ***f*(*x*)** se estabiliza en ***x* = 0**, es decir, asocia el origen con el punto estacionario solicitado y para ***g*(*x*)** su respuesta es ***x* = 1**, en donde efectivamente tiene máximo (ver TABLA 4.57); en conjunto ambas respuestas no son consistentes, pues se usan distintas condiciones de análisis en cada una. En el post–test la respuesta para ***f*(*x*)** es aceptable, y para ***g*(*x*)** además de identificar su único punto de estabilización considera que la función se estabiliza en su vecindad (***x* = 2**). Tomando en cuenta todo lo anterior y sus



producciones (Fig. 4.96) y argumentos vertidos durante la entrevista: "una función se estabiliza en los puntos donde no crece ni decrece" es evidente la inconsistencia entre sus respuestas.

TABLA 4.58 Puntos o intervalos donde una función estabiliza su comportamiento	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Una función se estabiliza en los puntos máximos y mínimos de su gráfica (aceptable)	✓	–
Una función se estabiliza en los puntos donde la gráfica intercepta al eje x	–	–
Una función se estabiliza en la vecindad de un punto máximo	–	✓
Una función se estabiliza en $x = 0$	✓	–

e. Concepciones manifestadas usando los registros analítico y gráfico

Funciones que cumplen con las condiciones: $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. En el pre–test, en la pregunta 1 del Cuestionario 3 (Fig. 4.98), Celestina elige aquellas gráficas que están por debajo del eje x, las que tienen sus ordenadas negativas; quizá solo atendió a la condición $f(x) < 0$ (ver TABLA 4.58). En el post–test, la estudiante elige las tres gráficas que cumplen ambas condiciones, $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$.

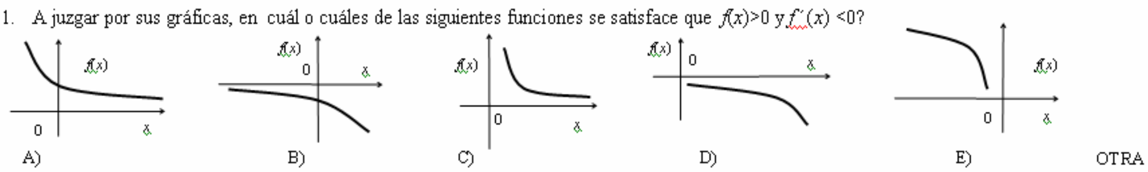


Fig. 4.98

TABLA 4.59 Función que cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $x < 0$ y otra parte que cumple con $x > 0$	–	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, además de cumplir con estas condiciones cumple con $x > 0$	–	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando cumple con $f(x) > 0$ y $x < 0$	–	–

La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{f(x) < 0}$	✓	

Funciones que cumplen con las condiciones: $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. En el pre–test, en la pregunta 2 del Cuestionario 3 (Fig. 4.99) la respuesta dada por Celestina incluye dos gráficas que al principio tienen una parte que cumplen con la condición $x < 0$ y después terminan con una parte que cumple con $x > 0$; parecería ésta la explicación a su respuesta (ver TABLA 4.60). En el post–test elige las tres gráficas que cumplen con $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$, es decir funciones con ordenadas negativas y además crecientes; la respuesta es consistentemente aceptable.

2. Estas gráficas corresponden a ciertas funciones $g(x)$. ¿En cuál o cuáles se cumple que $g(x)<0$ y $g'(x) >0$?

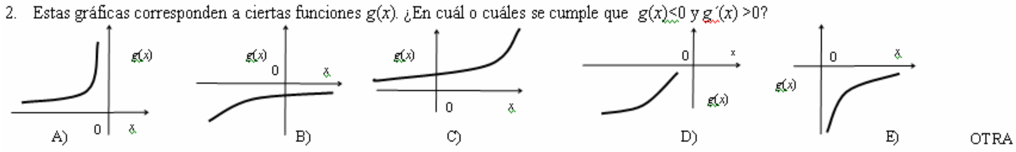


Fig. 4.99

TABLA 4.60 Función que cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $\boldsymbol{x < 0}$ y otra parte que cumple con $\boldsymbol{x > 0}$	✓	–

Funciones que cumplen con las condiciones: $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$. En el pre–test, en la pregunta 3 del Cuestionario 3 (Fig. 4.100) Celestina eligió dos gráficas que cumplen con la condición $\boldsymbol{x} > 0$. Es muy probable que esta elección haya sido tomada solo atendiendo el signo la condición "**> 0**" (ver TABLA 4.61). En el post–test elige las tres gráficas que cumplen con $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$, es decir, la respuesta es consistentemente aceptable.

3. Las siguientes gráficas corresponden a ciertas funciones $h(x)$. ¿Cuál o cuáles de ellas son tales que $h(x) >0$ y $h'(x) >0$?

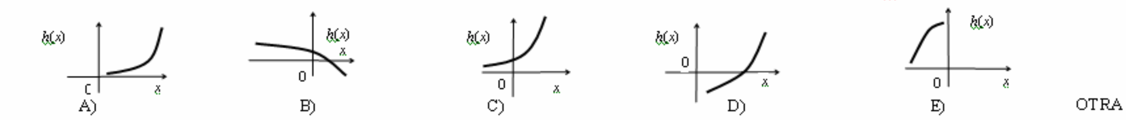


Fig.

TABLA 4.61 Función que cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las	–	✓

abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)		
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x > 0}$	✓	–

Funciones que cumplen con las condiciones: $y < 0$ y $y' < 0$. En el pre–test, en la pregunta 4 del Cuestionario 3 (Fig. 4.101) eligió una gráfica que cumple con $x < 0$ (ver TABLA 4.61). En el post–test, elige las gráficas en las que todas tienen ordenadas negativas; para ella sólo importa la ubicación y el significado; $\boldsymbol{y' < 0}$ parece estar ausente. Los cambios conceptuales se muestran muy endebles.

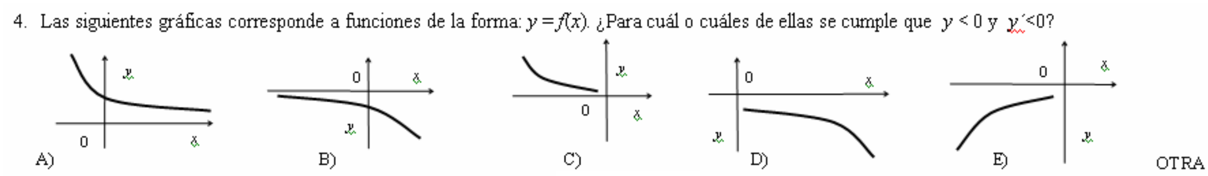


Fig. 4.101

TABLA 4.62 Función que cumple con las condiciones $y(x) < 0$ y $y'(x) < 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x < 0}$ y $\boldsymbol{y < 0}$	–	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x < 0}$	✓	–

Puntos que cumplen con la condición: $f'(x) = 0$. En el pre–test, en la pregunta 5 del Cuestionario 3 (Fig. 4.102), sus repuestas asocian la estabilidad de la función con $\boldsymbol{x = 0}$, con el punto de corte de la gráfica con el eje $\boldsymbol{x}$ o simplemente con el origen. En el post–test, la respuesta de Celestina indica que seleccionó los puntos máximo y mínimo de función (ver TABLA 4.62).

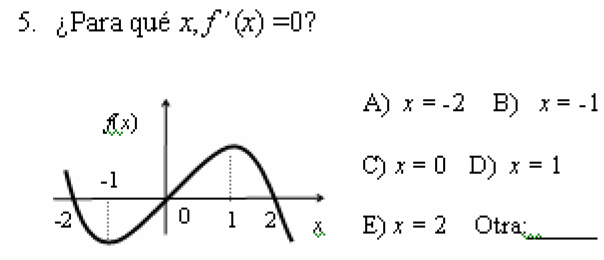


Fig. 4.102

TABLA 4.63 Puntos que cumplen con la condición $f'(x) = 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Los puntos que cumplen con la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ son los máximos y mínimos de la función (aceptable)	–	✓

En $x = 0$ se cumple la condición $f'(x) = 0$	✓	–
En sus intersecciones con el eje x se cumple la condición $f'(x) = 0$	–	–

Determinación de la $f'(x)$ en un punto dado. En el pre–test, en la pregunta 6 del Cuestionario 3 (Fig. 4.103) elige el punto de corte de la gráfica con el eje x (ver TABLA 4.64). En el post–test, la respuesta cambia pero ahora asocia el valor de la derivada con el valor de la ordenada en ese punto.

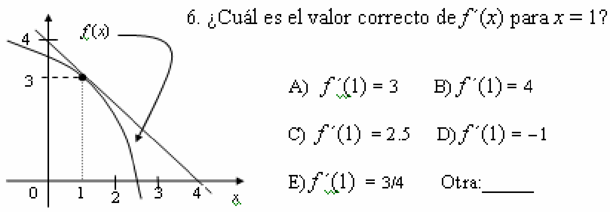


Fig. 4.103

TABLA 4.64 $f'(x)$ en un punto dado	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la pendiente de la tangente a la función en ese punto (aceptable)	–	
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la $f(x)$ en ese punto	–	✓
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la abscisa del punto en donde la tangente en el punto x cruza al eje x	✓	–

f. Análisis comparativos de las preguntas paralelas. Las planteadas verbalmente y las planteadas analíticamente

Función con imagen positiva y creciente y función que cumple con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$. Al plantear la pregunta verbalmente en el pre–test, el criterio de selección de Celestina parece ser la asociación que establece entre las funciones con imágenes positivas con las gráficas que tienen abscisas positivas. En el post–test las respuestas son aceptables y consistentes, aunque esta consistencia no se extiende a las producciones y argumentaciones formuladas durante la entrevista. Cuando la pregunta se formula usando lenguaje analítico, en el pre–test la respuesta parece haberse determinado atendiendo al símbolo "**> 0**" y en el post–test las gráficas elegidas corresponden a la ubicación y comportamiento especificado, evidenciando de esta forma que el desempeño de la estudiante no varía al cambiar el lenguaje en el que la pregunta se plantea (ver Figs. 4.88, 4.89, 4.100, y Tablas 4.53, 4.61).

Función con imagen negativa y creciente y función que cumple con $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. Revisando las respuestas de Celestina cuando la pregunta se hace usando lenguaje verbal, encontramos que en el pre–test éstas son determinadas por la presencia de una concepción alternativa: la función tiene imagen negativa si tiene abscisas negativas o si su gráfica comienza teniendo abscisas negativas (sin importar que después las abscisas se vuelvan positivas), pero en el post–test, su respuesta cambia y solo es parcialmente aceptable y esta inconsistencia de sus respuestas también se manifiesta en las gráficas y explicaciones que la estudiante vertió durante la entrevista. Al formular la preguntar usando lenguaje analítico, encontramos que en el pre–test su respuesta también parece ser determinada por el signo de las abscisas; en el post–test la respuesta es consistentemente aceptable (ver Figs. 4.90, 4.91, 4.99 y Tablas 4.54, 4.60). Todo el cuadro anterior configura un desempeño irregular por parte de la estudiante en esta pregunta, en donde conviene recalcar que después del tratamiento instruccional las respuestas de la estudiante son aceptables y consistentes si el cuestionamiento se plantea usando lenguaje analítico.

Función con imagen positiva y decreciente y función que cumple con $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. Cuando la pregunta se le formuló a Celestina verbalmente, en el pre–test su respuesta fue incompleta, ya que solo selecciona dos de las tres funciones que cumplen con las condiciones especificadas; la gráfica A, que también corresponde a una función con imagen positiva y decreciente, y que se encuentra en el 2º y 1er cuadrante, no fue seleccionada. En el post–test contestó aceptable y consistentemente pero, debe mencionarse que las respuestas anteriores no fueron consistentes con las gráficas y las explicaciones ofrecidas por la estudiante durante la entrevista. Al formular la pregunta usando lenguaje analítico, en el pre–test su respuesta parece determinarse de acuerdo a las funciones que cumplen la condición $f(x) < 0$, pero en el post–test, las gráficas elegidas obedecen a las condiciones especificadas, por tanto, el cambio de lenguaje usado para la formulación de la pregunta, en este caso pareció no ser relevante en el desempeño de la estudiante (ver Figs. 4.92, 4.93, 4.98 y Tablas 4.55, 4.59).

Función con imagen negativa y decreciente y función que cumple con $y < 0$ y $y' < 0$. Al plantear la pregunta en forma verbal, tanto en el pre–test como en el post–test sus respuestas fueron consistentemente aceptables, aunque, como en casos anteriores no fueran consistentes con sus producciones y argumentos formulados en la entrevista. Cuando la pregunta se hizo analíticamente, en el pre–test las gráficas son elegidas si cumplen con la expresión $x < 0$ y en el post–test su respuesta parece determinarse con base a las funciones que cumplen con $y < 0$. Es así que en este caso, el planteamiento de la pregunta con lenguaje analítico representó para el estudiante un mayor obstáculo en comparación al cuestionamiento verbal (ver Figs. 4.94, 4.93, 4.101 y Tablas 4.56, 4.62).

Función que no crece ni decrece y función que cumple con $f'(x) = 0$. En el caso de esta pregunta, las respuestas de Celestina son muy consistentes. En el pre–test, cuando la pregunta se formula verbalmente para Celestina $f(x)$ se estabiliza en $x = 0$, es decir, asocia el origen con el punto estacionario solicitado y en el post–test en su respuesta selecciona el máximo y mínimo de $f(x)$. Cuando la pregunta se hace usando lenguaje analítico, en el pre–test, a juicio de Celestina la función se estabiliza en $x = 0$; en el post–test ella selecciona el máximo y el mínimo de $f(x)$; en ambos casos, sus respuestas son idénticas. Evidentemente, para este cuestionamiento el cambio del lenguaje usado en la redacción de la pregunta no fue relevante para el desempeño de la estudiante (ver Figs. 4.97, 4.102 y Tablas 4.57, 4.63).

Una visión global de las respuestas ofrecidas por Celestina proporciona los elementos necesarios para ubicar que los cambios operados en su teoría inicial tienen un comportamiento muy irregular; pudimos observar varios avances y retrocesos en algunas de sus concepciones. De forma notoria destaca un par de concepciones alternativas que se manifestaron en el post–test:

a) Una función tiene imagen positiva, si su gráfica comienza a trazarse arriba del eje de las abscisas y tiene imagen negativa si su trazo se inicia debajo del eje de las x.
b) Una función es creciente si su gráfica sube, sin que haya coordinación entre los cambios en las abscisas y los cambios en las ordenadas (Figs. 4.89)

Por otra parte, los resultados del Cuestionario 3, están muy equilibrados respecto a los obtenidos en los dos primeros cuestionarios. Aquí conviene destacar especialmente que la concepción alternativa consistente en asociar el valor de la derivada de una función en un punto determinado con el valor de la ordenada en ese punto resultó muy resistente al cambio.

Teodoro

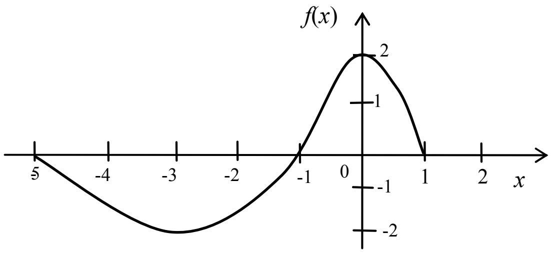
a. Concepciones relativas a la ubicación de la función

Función con imagen positiva

Pre–test. De acuerdo con las respuestas obtenidas en los cuestionarios (ver Tabla 4.65), es observable que Teodoro, en la respuesta dada a la pregunta 1A (Fig. 4.104) concibe a la función con imagen positiva como aquella que tiene abscisas positivas; en el segundo caso, pregunta 1B (Fig.4.105), su respuesta es aceptable.

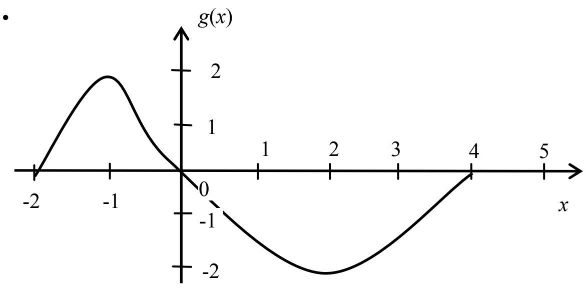
Inter–test. Respecto de la función de la Fig. 4.1, el estudiante opina que la función es positiva en el intervalo $\mathbf{0 < x < \infty}$, denotando lo anterior la asociación que él establece entre funciones positivas con funciones con abscisas positivas.

Post–test. Las respuestas dadas a las preguntas (Fig. 4.104 y Fig. 4.105) cumplen con las condiciones establecidas. Esto es confirmado por las gráficas que Teodoro dibujó (Fig. 4.106) cuando se le pidió construir graficas de funciones con imágenes positivas; en todos los casos las gráficas reúnen las condiciones solicitadas y los argumentos que esgrime son tales como: "las gráficas cuando se encuentran sobre del eje $\boldsymbol{x}$ son positivas y cuando están debajo, se vuelven negativas".



A) De 0 a 1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a –1 F) Otra:_____

Fig. 4.104 Pregunta 1A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 4 C) De 2 a 4
D) De –1 a 2 E) De –2 a –1 F) Otra:_____

Fig. 4.105 Pregunta 1B

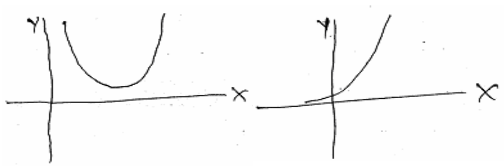


Fig. 4.106 Gráficas de funciones con imágenes positivas dibujadas por Teodoro

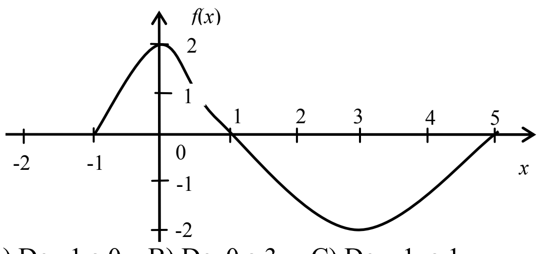
TABLA 4.65 Función positiva	Concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**intertest**	**Postest y entrevista**
La función es positiva donde sus ordenadas son positivas (aceptable)	—	—	✓
La función tiene imagen positiva si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son positivas	✓	✓	—
La función tiene una imagen positiva si su gráfica está ubicada en el primer cuadrante, donde las abscisas y las ordenadas son positivas.	—	—	—
La función es positiva si su gráfica comienza a trazarse arriba del eje de las abscisas	—	—	—
La función es positiva si es creciente	—	—	—
La función es positiva si sus abscisas son positivas y es creciente	—	—	—
El intervalo en donde una función es positiva queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	—	—	—

Función con imagen negativa

Pre–test. En las respuestas dadas por Teodoro a la pregunta 3A (Fig. 4.107) (ver Tabla 4.66), establece una relación entre una función con imagen negativa con aquella porción de la gráfica que corresponde a una función con imagen negativa y creciente; en el segundo caso, en la pregunta 3B (Fig. 4.108), la respuesta es análoga a la anterior: elige como intervalo para la función con imagen negativa aquel donde la gráfica es negativa y creciente.

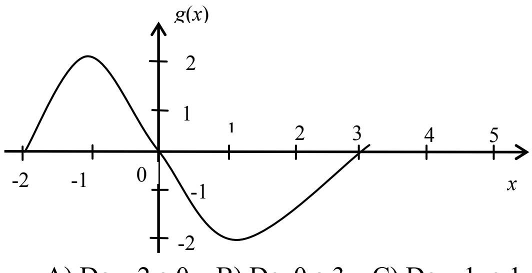
Inter–test.P ara este estudiante la función de la Fig. 4.1 es negativa en el intervalo $\boldsymbol{x < 0}$, mostrando claramente con ello la asociación que él establece entre una función negativa y el intervalo donde sus abscisas son negativas. Parece haberse operado un cambio un su concepción inicial, pero en una dirección que no era la deseada.

Post–test. En las respuestas dadas a las preguntas (Fig. 4.107 y Fig. 4.108) se evidencian cambios, pues en ambos casos éstas respuestas son consistentemente aceptables. Lo anterior se confirma con las gráficas que Teodoro dibujó cuando se le pidió construir gráficas de funciones con imágenes negativas (Fig. 4.109). En ambos casos sus producciones corresponden a las características especificadas y argumenta, con relación a ellas: "una función negativa es aquella que está debajo del eje *x*".



A) De –1 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De 0 a 5 E) De 3 a 5 F) Otra:_____

Fig. 4.107 Pregunta 3A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De –2 a –1 E) De 1 a 3 F) Otra:____

Fig. 4.108 Pregunta 3B

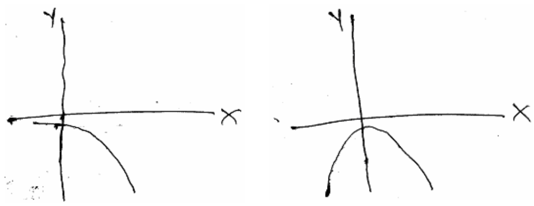


Fig. 4.109 Gráficas de funciones con imágenes negativas dibujadas por Teodoro

TABLA 4.66 Función negativa	Concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**intertest**	**Postest**
La función es negativa donde sus ordenadas son negativas (aceptable)	–	–	✓
La función tiene imagen negativa si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son negativas.	–	✓	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse abajo del eje de las abscisas	–	–	–
El intervalo en donde una función es negativa queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	–	–	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse debajo del eje de las abscisas	–	–	–
Una función es negativa si es decreciente	–	–	–
Una función es negativa si es negativa y creciente	✓	–	–

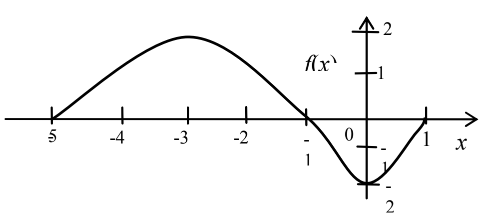
b. Concepciones relativas al comportamiento de la función.

Función creciente

Pre–test. Para la pregunta 2A (Fig. 4.110) Teodoro da una respuesta incompleta, ya que omite el intervalo correspondiente a la opción E, en donde la función también es creciente; para la pregunta 2B (Fig. 4.111) en su respuesta, la función tiene una parte decreciente y otra creciente y es negativa. No hay consistencia en ellas, pues se aplican criterios distintos en el análisis de cada una.

Inter–test. Teodoro contesta que la función de la Fig. 4.1 crece en el intervalo **-3 <** $\boldsymbol{x}$ **< 1**, respuesta que es aceptable pero incompleta.

Post–test. En las respuestas dadas a esta pregunta (Fig. 4.110 y Fig. 4.111) se manifiestan cambios respecto del test anterior, ya que en ambos casos, en los intervalos seleccionados las funciones son crecientes. Esto se confirma con sus producciones y argumentos elaborados durante la entrevista (Figs. 4.115 y 4.117) en donde comenta que “las funciones son crecientes cuando conforme las $\boldsymbol{x}$ vienen de menos infinito, las $\boldsymbol{y}$ suben”.



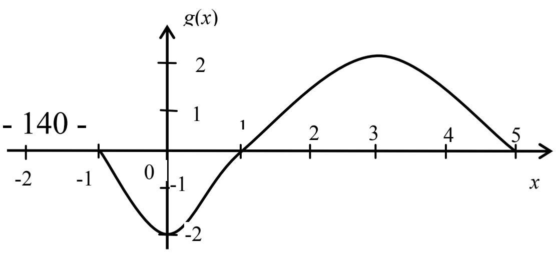


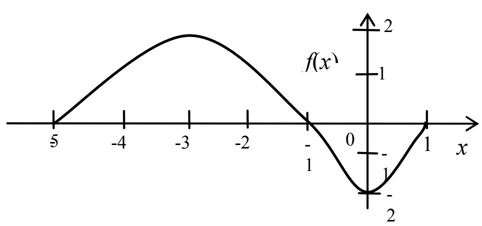
TABLA 4.67 Función creciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es creciente si sus ordenadas son positivas	–	–	–	✓
La función es creciente si su imagen es negativa	✓	–	–	–
La función es creciente si, a medida que crecen las abscisas crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓	–	–
Si la gráfica de la función sube, la función es creciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	–
El intervalo donde la función es creciente queda determinado por los valores numéricos más próximos a sus límites	–	–	–	–
La función es creciente si sus abscisas son positivas	–	–	–	–

Función decreciente

Pre–test. En las respuestas proporcionadas por Teodoro (ver TABLA 4.68) para ambas gráficas de la pregunta 4 del Cuestionario 1 (Fig. 4.112 y 4.113) encontramos que se asocia a las funciones decrecientes con intervalos donde la gráfica tiene abscisas negativas; estas respuestas son consistentes, pues se usa el mismo criterio para la selección de ambas respuestas.

Inter–test. Para Teodoro la función de la Fig. 4.1 es negativa en el intervalo $\mathbf{1 < x < 2}$, respuesta que es aceptable. Esta respuesta significa un cambio respecto de la respuesta inicial.

Post–test. Las respuestas de este estudiante en ambos casos (Fig. 4.112 y 4.113) son aceptables y consistentes. Estos resultados son confirmados por las producciones del estudiante desarrolladas durante la entrevista, (Fig. 4.119) en la que expresa que "las funciones son decrecientes cuando conforme las ***x*** vienen de menos infinito las ***y*** bajan".



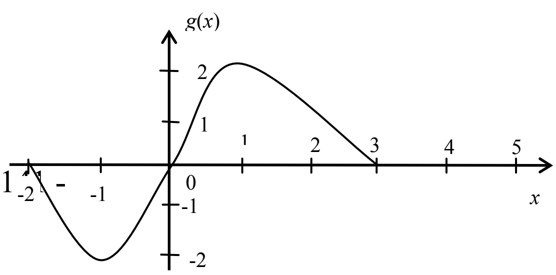


Fig. 4.112 Pregunta 4.A

Fig. 4.113 Pregunta 4.B

TABLA 4.68 Función decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es decreciente si sus ordenadas son negativas	–	–	–	–
La función es decreciente si, a medida que crecen las abscisas decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓	–	✓
Si la gráfica de la función baja, la función es decreciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	–
La función es decreciente si sus abscisas son negativas	✓	–	–	–
La función es decreciente si, además de cumplir esta condición, es negativa	–	–	–	–
La función es decreciente si sus abscisas y sus ordenadas son negativas	–	–	–	–

c. Concepciones relativas a la ubicación y al comportamiento de las funciones.

Función con imagen positiva y creciente. En el pre–test, de las tres gráficas correspondientes a funciones con imágenes positivas y crecientes que Teodoro tiene a la vista en la pregunta 1 del Cuestionario 2 (Fig. 4.114), solo elige dos (ver TABLA 4.69); la gráfica que no es elegida (opción E) tiene sus abscisas negativas. Es probable que la elección se haya hecho porque las condiciones positiva y creciente, son vinculadas con gráficas que tienen abscisas y ordenadas positivas. En el post–test se manifiestan ideas aceptables de mayor generalización respecto del pre–test, pues ahora elige las opciones A, C y E. Las producciones del estudiante durante la entrevista (Fig. 4.115) en donde él argumenta que "las gráficas, cuando se encuentran sobre del eje ***x*** son positivas y cuando están debajo, se vuelven negativas" y "las funciones son crecientes cuando, conforme las ***x*** vienen de menos infinito las ***y*** suben" corroboran estas observaciones.

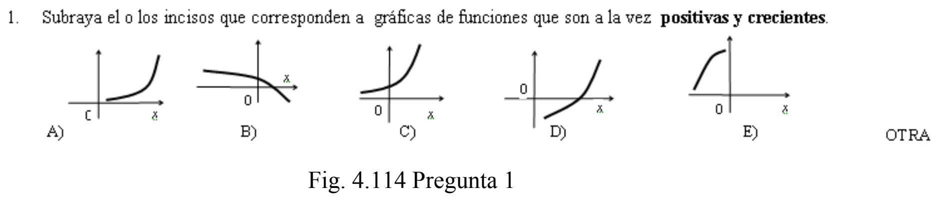


Fig. 4.114 Pregunta 1

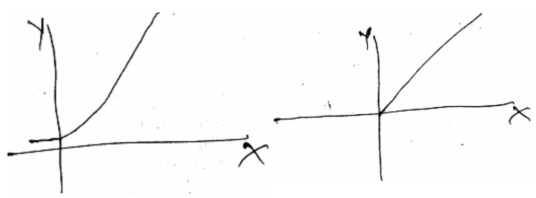


Fig. 4.115 Gráficas para funciones con imágenes positivas y crecientes dibujadas por Teodoro

TABLA 4.69 Función positiva y creciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es positiva y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	✓	–
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–

Función con imagen negativa y creciente. En la respuesta proporcionada por Teodoro en el pre–test (ver TABLA 4.70) a la pregunta 2 del Cuestionario 2 (Fig. 4.116) selecciona las gráficas que cumplen con las condiciones especificadas. En el post–test sus ideas permanecen sin alteraciones. Estos resultados son confirmados por las gráficas elaboradas por el estudiante durante la entrevista (ver Fig. 4.117), en donde expresa que "las gráficas cuando se encuentran sobre del eje ***x*** son positivas y cuando están debajo, se vuelven negativas" y además que "las funciones son crecientes cuando, conforme las ***x*** vienen de menos infinito las ***y*** suben".

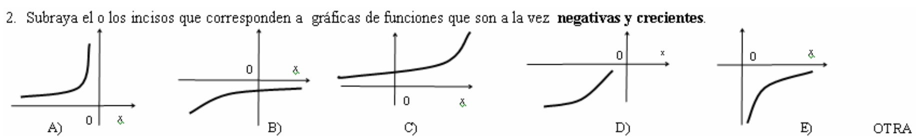


Fig. 4.116 Pregunta 2

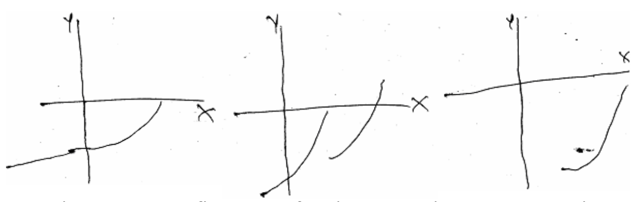


Fig. 4.117 Gráficas para funciones con imágenes negativas y crecientes dibujadas por Teodoro

TABLA 4.70 Función negativa y creciente	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas

	Pretest	Postest y entrevistas
La función es negativa y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	✓	✓
La función es negativa y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	–	–
La función es negativa si comienza a trazarse abajo del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–
La función es negativa y creciente cuando, tiene abscisas negativas.	–	–

Función con imagen positiva y decreciente. En el pre–test, de las tres gráficas correspondientes a funciones con imágenes positivas y crecientes que Teodoro tiene a la vista en la pregunta 1 del Cuestionario 2 (Figs. 4.118), solo elige dos de ellas (ver TABLA 4.71); la gráfica que no es elegida (opción E) tiene sus abscisas negativas. Creemos que su elección obedece a que las condiciones positiva y decreciente, son relacionadas con gráficas que tienen abscisas y ordenadas positivas. En el post–test se manifiestan ideas aceptables de mayor generalización respecto del pre-test, pues ahora elige las opciones A, C y E. Las producciones del estudiante durante la entrevista (Fig. 4.119) en donde Teodoro argumenta que "las gráficas cuando se encuentran sobre del eje ***x*** son positivas y cuando están debajo, se vuelven negativas" y "las funciones son decrecientes cuando, conforme las ***x*** vienen de menos infinito las ***y*** bajan" confirman estas observaciones.

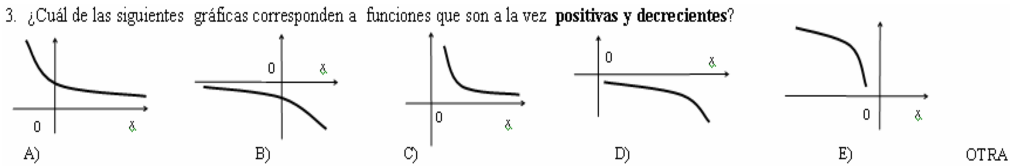


Fig.4.118 Pregunta 3

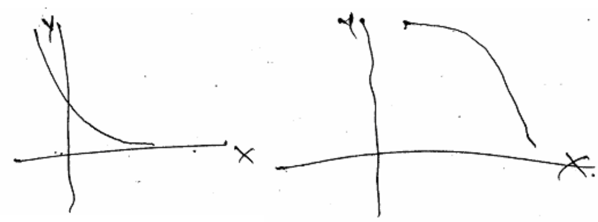


Fig. 4.119 Gráfica para funciones con imágenes positivas y decrecientes dibujadas por Teodoro

TABLA 4.71 Función positiva y decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**

La función es positiva y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es positiva y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	✓	–
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es decreciente si baja, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–

Función con imagen negativa y decreciente. En el pre–test, de las tres gráficas correspondientes a funciones con imágenes negativas y decrecientes que Teodoro tiene a la vista en la pregunta 4 del Cuestionario 2 (Fig. 4.120), solo elige dos de ellas (ver TABLA 4.72); la gráfica que no es elegida (opción B) tiene una parte de sus abscisas positivas y otras negativas. En el post–test se manifiestan ideas aceptables, pues ahora elige las opciones B, D y E, que cumplen con las condiciones especificadas. Las producciones del estudiante durante la entrevista (Fig. 4.119) en donde Teodoro argumenta que "las gráficas cuando se encuentran sobre del eje ***x*** son positivas y cuando están debajo, se vuelven negativas" y "las funciones son decrecientes cuando, conforme las ***x*** vienen de menos infinito las ***y*** bajan" son evidencia de lo expresado anteriormente.

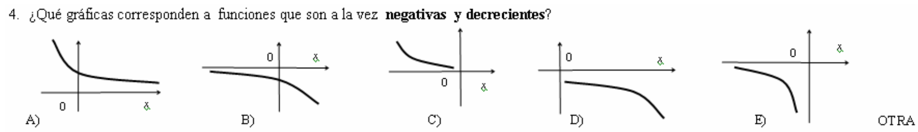


Fig. 4.120

TABLA 4.72 Función negativa y decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es negativa y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	✓	✓
La función es negativa y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	–	–

d. Concepciones relativas a la estabilidad de una función

a) Pre–test. Observamos cómo Teodoro, en la pregunta 5 del Cuestionario 1 (Fig. 4.121), elige ***x* = -5**, punto donde ***f*(*x*)** intercepta el eje ***x***; parece que el criterio de selección tiene que ver con la asociación que él establece entre puntos de estabilización de una función con las intercepciones de la misma con el eje horizontal (ver TABLA 4.73).

Post–test. Su respuesta es incompleta pues no incluye el otro punto de estabilización de ***f*(*x*)**. Revisando sus producciones y comentarios de la entrevista (Fig. 4.122) encontramos que él opina que "una función se estabiliza en aquellos puntos donde no crece ni decrece" y cuando se le sugiere que la función se estabiliza en sus intersecciones con el eje ***x***, él no lo acepta porque, según expresa, "en esos puntos la función crece o decrece.

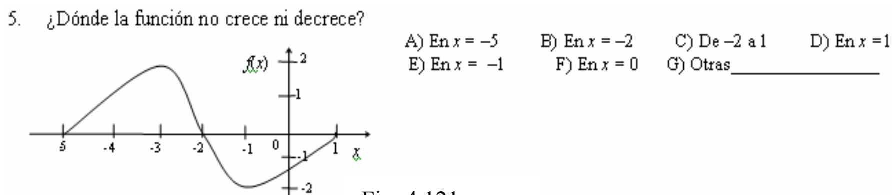


Fig. 4.121

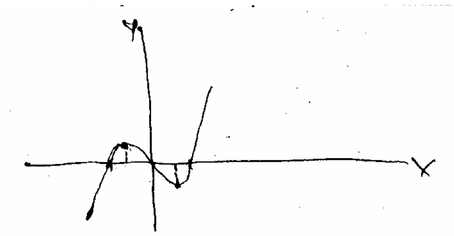


Fig. 4.122 Gráfica de una función con puntos en donde se estabiliza su comportamiento dibujada por Teodoro

TABLA 4.73 Función que no crece ni decrece	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica o en donde ésta sea horizontal (aceptable)	–	–	–	✓
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en los puntos donde la gráfica intercepta al eje x	✓	–	–	–
Una función no crece ni decrece en los intervalos donde su gráfica es horizontal	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en sus puntos máximos, en sus puntos mínimos y en las intersecciones con el eje de las abscisas	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en $x = 0$ y $y = 0$	–	–	–	–

b) En el pre–test, en la pregunta 5 del Cuestionario 2 (Fig. 4.123) él asocia a los puntos de estabilización de $\boldsymbol{f(x)}$ con $\boldsymbol{x = 0}$; su respuesta es idéntica para $\boldsymbol{g(x)}$ (ver TABLA 4.74). Las respuestas anteriores no son aceptables, pero sí son consistentes, pues sus elementos de juicio son iguales en ambos casos. En el post–test, su respuesta es aceptable y consistente para $\boldsymbol{f(x)}$; para $\boldsymbol{g(x)}$ su respuesta también es aceptable pero no es consistente pues incluye un punto ($\boldsymbol{x = 2}$), que si bien se encuentra en la vecindad del único punto de estabilización de $\boldsymbol{g(x)}$, no cumple con esta condición. Revisando las producciones de Teodoro (Fig. 4.122) y sus argumentos durante la entrevista ("una función se estabiliza en aquellos puntos donde no crece ni decrece") encontramos que, en este caso, les faltó consistencia a sus concepciones finales.

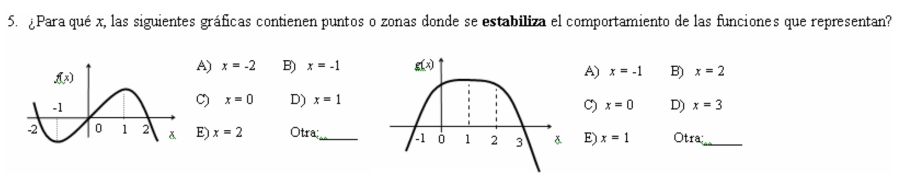


Fig. 4.123

TABLA 4.74 Puntos o intervalos donde una función estabiliza su comportamiento	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Una función se estabiliza en los puntos máximos y mínimos de su gráfica (aceptable)	–	✓
Una función se estabiliza en los puntos donde la gráfica intercepta al eje x	–	–
Una función se estabiliza en la vecindad de un punto máximo	–	✓
Una función se estabiliza en $x = 0$	✓	–

e. Concepciones manifestadas usando los registros analítico y gráfico

Funciones que cumplen con la condición: $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. En el pre–test, en la pregunta 1 del Cuestionario 3 (Fig. 4.124) la respuesta dada por Teodoro cumple con las dos condiciones especificadas pero es incompleta, pues solo elige una (opción C) de las tres gráficas que cumplen con las condiciones especificadas (ver TABLA 4.75); esta elección creemos que se relaciona con el hecho de que la gráfica correspondiente a la opción C además de cumplir con $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$, es la única que cumple con $x > 0$. En el post–test no hay cambio en su respuesta.

1. A juzgar por sus gráficas, en cuál o cuáles de las siguientes funciones se satisface que $f(x)>0$ y $f'(x) <0$?

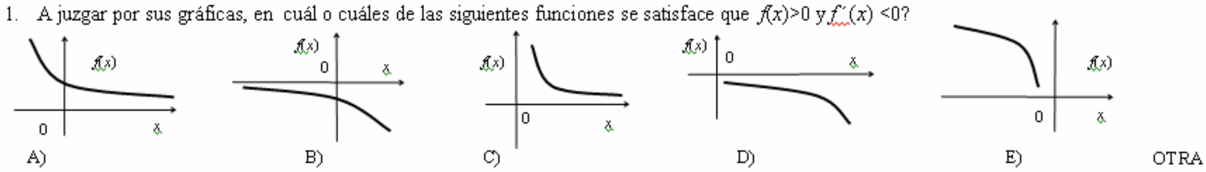


Fig. 4.124

TABLA 4.75 Función que cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $x < 0$ y otra parte que cumple con $x > 0$	–	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, además de cumplir con estas condiciones cumple con $x > 0$	✓	✓
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando cumple con $f(x) > 0$ y $x < 0$	–	–

La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{f(x) < 0}$	–	

Funciones que cumplen con la condición: $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$. En el pre–test, en la pregunta 2 del Cuestionario 3 (Fig. 4.125) la respuesta dada por Teodoro es aceptable pero incompleta, ya que solo elige una (opción D) de las tres gráficas que cumplen con las condiciones especificadas (ver TABLA 4.76); suponemos que la razón de esta respuesta se encuentra en la asociación que se establece entre las funciones que cumplen con $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x)} > 0$ y las que cumplen con $\boldsymbol{x < 0}$ y $\boldsymbol{g(x) < 0}$. En el post–test Teodoro vuelve a elegir la opción anterior y una gráfica más (opción D) cuya ubicación y comportamiento no corresponden a las condiciones especificadas, pero que tiene un elemento en común con la otra gráfica: ambas cumplen con la condición $\boldsymbol{x < 0}$; esto nos hace suponer que el criterio de selección fue la expresión "**< 0**", presente en $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x)} > 0$.

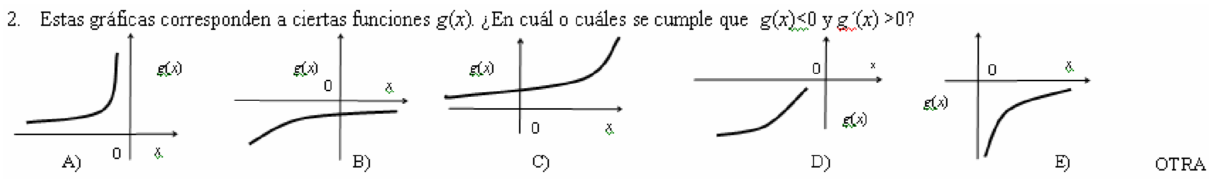


Fig. 4.125

TABLA 4.76 Función que cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $\boldsymbol{x < 0}$ y otra parte que cumple con $\boldsymbol{x > 0}$	–	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ cuando, su gráfica cumple con $\boldsymbol{x < 0}$ y con $\boldsymbol{g(x) > 0}$	✓	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ cuando, su gráfica cumple con $\boldsymbol{x < 0}$	–	✓

Funciones que cumplen con la condición: $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$. En la pregunta 3 del Cuestionario 3 (Fig. 4.126), en el pre–test, Teodoro solo elige la gráfica que además de cumplir con las condiciones especificadas cumple con $\boldsymbol{x > 0}$ (ver TABLA 4.77); es decir, parece asociar las gráficas que cumplen con $\boldsymbol{h(x) > 0}$ **y** $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ con las que cumplen con $\boldsymbol{h(x) > 0}$, $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ y $\boldsymbol{x > 0}$. En el post–test su respuesta no cambia.

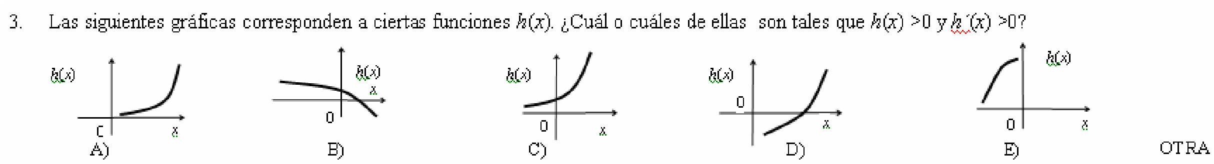


Fig. 4.126

TABLA 4.77 Función que cumple con las condiciones $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	–
La función cumple con las condiciones $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$ cuando cumple con $x > 0$	✓	✓

Funciones que cumplen con las condiciones: $y < 0$ y $y' < 0$. La opción que Teodoro selecciona en la pregunta 4 del Cuestionario 3 (Fig. 4.127), en el pre–test no cumple con las dos condiciones especificadas, pero si cumple con $x < 0$ y con $y < 0$, es decir, para su elección él asocia las funciones que cumplen con $y < 0$ y $y' < 0$ con las que cumplen con $x < 0$ y $y < 0$. En el post–test cambia esta respuesta seleccionando ahora una gráfica (opción D) que si cumple con $y < 0$ y $y' < 0$; esta respuesta es incompleta pues omite seleccionar la otra gráfica (opción D, TABLA 4.78) que igualmente cumple con las condiciones especificadas.

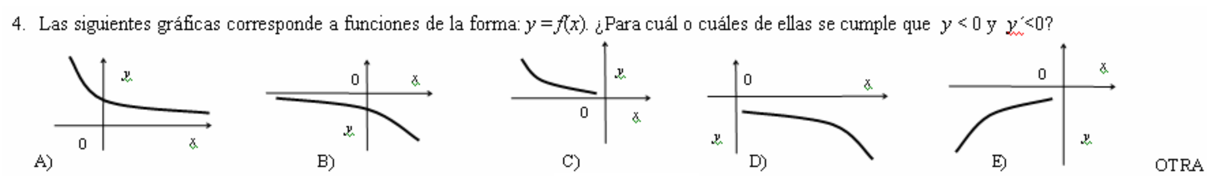


Fig. 4.127

TABLA 4.78 Función que cumple con las condiciones $y(x) < 0$ y $y'(x) < 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $y(x) < 0$ y $y'(x) < 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $y(x) < 0$ y $y'(x) < 0$ cuando cumple con $x < 0$ y $y < 0$	✓	–
La función cumple con las condiciones $y(x) < 0$ y $y'(x) < 0$ cuando cumple con $x < 0$	–	–

Puntos que cumplen con la condición: $f'(x) = 0$. Al indagar en las concepciones de Teodoro respecto de los puntos que cumplen con la condición $f'(x) = 0$ (Fig. 4.128), encontramos que, en el pre–test, su elección es por la opción $x = 0$ (ver TABLA 4.79). En el post–test su respuesta cumple con las condiciones establecidas.

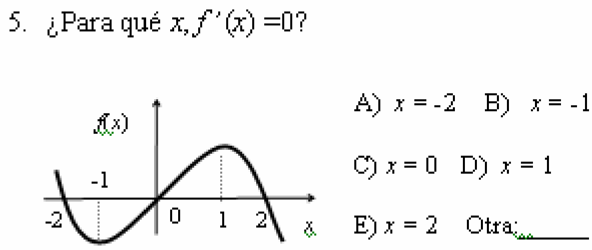


TABLA 4.79 Puntos que cumplen con la condición $f'(x) = 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Los puntos que cumplen con la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ son los máximos y mínimos de la función (aceptable)	–	✓
En $\boldsymbol{x = 0}$ se cumple la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$	✓	–
En sus intersecciones con el eje $\boldsymbol{x}$ se cumple la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$	–	–

Determinación de la $f'(x)$ en un punto dado. La opción seleccionada por Teodoro en el pre–test, en la pregunta 6 del Cuestionario 3 (ver Fig. 4.129) vincula la derivada de la función en $\boldsymbol{x = 1}$ con su ordenada en ese punto (ver TABLA 4.80). En el post–test la derivada de la función se relaciona con el valor de la abscisa en la intersección de la tangente con el eje horizontal.

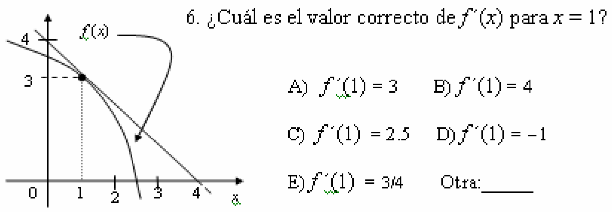


Fig. 4.129

TABLA 4.80 $f'(x)$ en un punto dado	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La $\boldsymbol{f'(x)}$ en un punto dado es igual a la pendiente de la tangente a la función en ese punto (aceptable)	–	–
La $\boldsymbol{f'(x)}$ en un punto dado es igual a la $\boldsymbol{f(x)}$ en ese punto	✓	–
La $\boldsymbol{f'(x)}$ en un punto dado es igual a la abscisa del punto en donde la tangente en el punto x cruza al eje x	–	✓

f. Análisis comparativos de las preguntas paralelas. Las planteadas verbalmente y las planteadas analíticamente

Función positiva con imagen positiva y creciente y función que cumple con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$. Al formularse la pregunta verbalmente, en el pre–test, la respuesta de Teodoro se debe a que las condiciones positiva y creciente, son vinculadas con gráficas que tienen abscisas y ordenadas positivas. En el post–test, su respuesta es aceptable y consistente incluso con sus producciones y argumentos elaborados durante la entrevista. Cuando la pregunta se formula usando lenguaje analítico, su respuesta tanto en el pre–test como en el post–test se define en términos de las funciones que además de cumplir con $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ cumplen con la condición $\boldsymbol{x > 0}$ (ver Figs. 4.114, 4.115, 4.126 y Tablas 4.68, 4.74). En este caso, el planteamiento analítico de la pregunta supone una mayor dificultad para el estudiante respecto del planteamiento verbal.

Función con imagen negativa y creciente y función que cumple con $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$. Al explorar las ideas de Teodoro relacionadas con las funciones con imágenes negativas y crecientes encontramos que, si la pregunta se plantea verbalmente, las respuestas del estudiante tanto en el pre–test como en el post–test son consistentemente aceptables; esta consistencia incluye las gráficas y explicaciones construidas durante la entrevista. Sin embargo, cuando este cuestionamiento se hace utilizando lenguaje analítico, sus respuestas están relacionadas con el vínculo que el estudiante establece entre las funciones que cumplen con $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ y las que cumplen con $\boldsymbol{x < 0}$. Claramente el lenguaje analítico, en este caso, significa mayor dificultad para Teodoro que el lenguaje verbal (ver Figs. 4.116, 4.117, 4.125 y Tablas 4.69, 4.75).

Función con imagen positiva y decreciente y función que cumple con $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$. Cuando la pregunta se plantea usando lenguaje verbal, en el pre–test su respuesta obedece a que las condiciones positiva y decreciente, son relacionadas con gráficas que tienen abscisas y ordenadas positivas; en el post–test la respuesta es aceptable. Al presentar la pregunta usando lenguaje analítico, tanto en el pre–test como en el post–test, su respuesta es incompleta debido a la relación que Teodoro establece entre las funciones que cumplen con $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$, y las que cumplen con $\boldsymbol{f(x) > 0}$, $\boldsymbol{f'(x) < 0}$, $\boldsymbol{x > 0}$. Nuevamente, aquí se observa como el lenguaje analítico encierra mayor dificultad para el estudiante respecto del planteamiento verbal (ver Figs. 4.118, 4.119, 4.124 y Tablas 4.70, 4.74).

Función con imagen negativa y decreciente y función que cumple con $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{y' < 0}$. Revisando las respuestas dadas por Teodoro relativas a las funciones con imágenes negativas y decrecientes encontramos que, cuando la pregunta se plantea verbalmente en el pre–test, su respuesta es incompleta. Las gráficas que elige en el post–test corresponden a funciones con imágenes negativas y decrecientes, es decir, son consistentemente aceptables. Si la pregunta se plantea analíticamente, en el pre–test su respuesta no cumple con las condiciones especificadas porque se asocia las funciones que cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{y'} < 0$ con las que cumplen con $\boldsymbol{x < 0}$ y $\boldsymbol{y < 0}$; en el post–test la respuesta es incompleta, siendo esta una evidencia más de que el lenguaje algebraico supone una mayor dificultad para el estudiante que el lenguaje verbal (ver Figs. 4.120, 4.119, 4.127 y Tablas 4.71, 4.77)

Función que no crece ni decrece y función que cumple con $\boldsymbol{f'(x) = 0}$. En este caso, las respuestas de Teodoro son muy consistentes, pues el cambio del lenguaje utilizado en la pregunta no varió sus respuestas. En el pre–test se asocian los puntos estables de la función con $\boldsymbol{x = 0}$ y en el post–test con los máximos y mínimos de la función (ver Figs. 4.123, 4.128 y Tablas 4.73, 4.78).

Los resultados obtenidos, denotan cambios en las concepciones iniciales de este estudiante aproximándose fuertemente a las concepciones que son aceptadas por la matemática escolar. Sin embargo, las respuestas obtenidas respecto de los puntos de estabilización no tienen suficiente consistencia. Por ello asumimos que en este caso se operó una reestructuración débil.

Por otra parte, las respuestas obtenidas en el Cuestionario 3, muestran claramente que para este estudiante el manejo de la representación analítica supuso un mayor grado de dificultad con relación a la representación verbal, pues en lo general, las respuestas fueron dadas atendiendo solamente a los operadores relacionales presentes en los enunciados y no a las condiciones especificadas.

<u>Jorge</u>

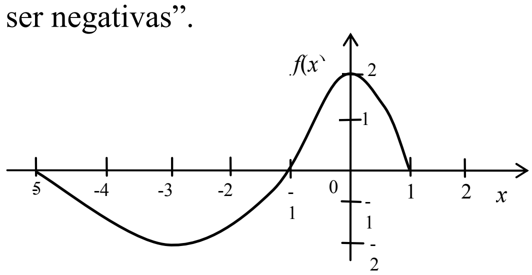
a. Concepciones relativas a la ubicación de la gráfica.

Función con imagen positiva

Pre–test. De acuerdo con las respuestas dadas a los cuestionarios (ver Tabla 4.81), se observa que Jorge, en la respuesta dada a la pregunta 1A (Fig. 4.130) considera a la función con imagen positiva como aquella que tiene abscisas positivas; en el segundo caso, pregunta 1B (Fig.4.131), explícitamente manifiesta la relación que establece entre función con imagen positiva con aquella cuya gráfica tiene abscisas positivas y ordenadas negativas. En sus respuestas son apreciables sus inconsistencias; en la primera pregunta su respuesta es aceptable pero en el segundo caso no.

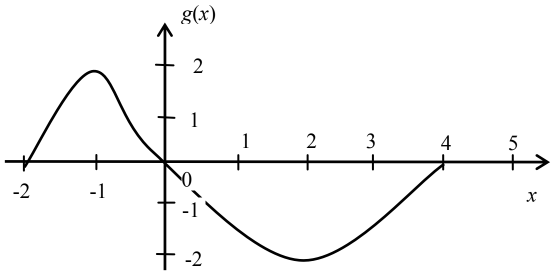
Inter–test. Jorge opina que la función de la Fig. 4.1 es positiva en $x > 3$, respuesta que solo es parcialmente aceptable, pues no en todo ese intervalo se cumple la condición especificada y además no considera otros intervalos donde ésta si se cumple. Nótese además que en el intervalo seleccionado por el estudiante las abscisas de la función son positivas. Suponemos que esto obedece a una cierta asociación que el estudiante establece entre una función con imagen positiva y un intervalo donde además las abscisas son positivas. Esta respuesta significa un cambio respecto de la concepción inicial, pero no en la dirección deseada.

Post–test. Las respuestas dadas a las preguntas (Fig. 4.130 y Fig. 4.131) manifiestan cambios respecto del test anterior, pues sus respuestas en ambos casos son consistentemente aceptables. Esto es confirmado por las gráficas que Jorge dibujó (Fig. 4.132) cuando se le pidió construir gráficas de funciones con imágenes positivas; en todos los casos las gráficas reúnen las condiciones solicitadas y él argumenta que las funciones son positivas “porque están por arriba del eje de las x, si estuviesen abajo iban a ser negativas”.



A) De 0 a 1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a –1 F) Otra:_____

Fig. 4.130 Pregunta 1A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 4 C) De 2 a 4
D) De –1 a 2 E) De –2 a –1 F) Otra:_____

Fig. 4.131 Pregunta 1B

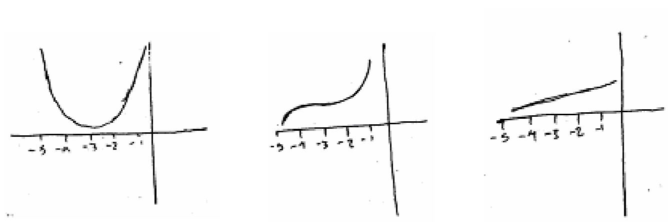


Fig. 4.132 Gráficas de funciones positivas dibujadas por Jorge

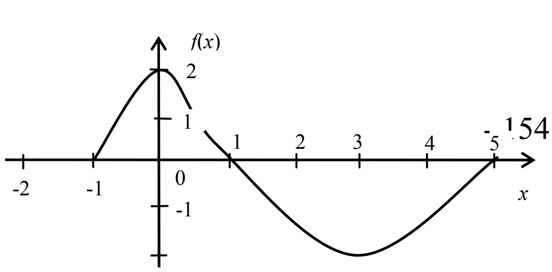
TABLA 4.81 Función positiva	Concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**intertest**	**Postest y entrevista**
La función es positiva donde sus ordenadas son positivas (aceptable)	—	—	✓
La función tiene imagen positiva si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son positivas	✓	—	—
La función tiene una imagen positiva si su gráfica está ubicada en el primer cuadrante, donde las abscisas y las ordenadas son positivas.	—	✓	—
La función es positiva si su gráfica comienza a trazarse arriba del eje de las abscisas	—	—	—
La función es positiva si es creciente	—	—	—
La función es positiva si sus abscisas son positivas y es creciente	—	—	—
El intervalo en donde una función es positiva queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	—	—	—

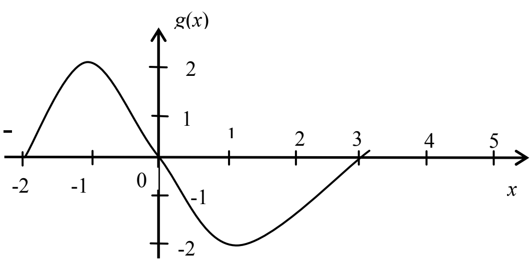
Función con imagen negativa

Pre–test. En las respuestas dadas por Jorge a la pregunta 3A (Fig. 4.133) (ver Tabla 4.82), establece la relación entre una función con imagen negativa con aquella porción de la gráfica cuyo intervalo tiene abscisas negativas a pesar de que está por arriba del eje x; en el segundo caso, en la pregunta 3B (Fig. 4.134), la respuesta es análoga a la anterior: elige como intervalo para la función con imagen negativa donde la gráfica tiene abscisas negativas y ordenadas positivas. Sus repuestas son consistentes pues en ambos casos considera que una función es negativa por el hecho de tener abscisas negativas sin importar el signo de las ordenadas.

Inter–test. A la pregunta relativa a en qué intervalo la función de la Fig. 4.1, el estudiante responde con el intervalo $\frac{3}{2} < x < 3$, respuesta que es aceptable pero que se encuentra incompleta. Es posible que la explicación de esta respuesta se relacione con el hecho de que en este intervalo la curva, además de ser negativa, delimita una región cerrada.

Post–test. En las respuestas dadas a las preguntas de las Figs. 4.133 y 4.1.34 se observan cambios respecto del test anterior, ya que sus respuestas en ambos casos son consistentemente aceptables; además, éstas dan idea de haber logrado mayor generalización pues propone respuestas aceptables que no estaban contempladas en las opciones dadas. Esto se confirma con los bosquejos que Jorge elaboró cuando se le pidió construir gráficas de funciones negativas (Fig. 4.135). En ambos casos sus producciones corresponden a las características especificadas y además él manifiesta: "están debajo del eje de las x porque, si estuviesen arriba, iban a ser positivas".





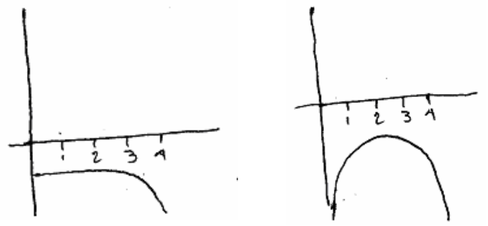


Fig. 4.135 Gráficas para funciones con imágenes negativas dibujadas por Jorge

TABLA 4.82 Función negativa	Concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**Intertest**	**Postest**
La función es negativa donde sus ordenadas son negativas (aceptable)	–	✓	✓
La función tiene imagen negativa si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son negativas.	✓	–	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse abajo del eje de las abscisas	–	–	–
El intervalo en donde una función es negativa queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	–	–	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse debajo del eje de las abscisas	–	–	–
Una función es negativa si es decreciente	–	–	–
Una función es negativa si es negativa y creciente	–	–	–

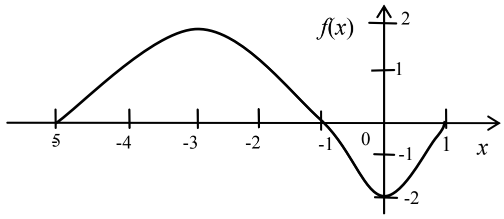
b. Concepciones relativas al comportamiento de la función.

Función creciente

Pre–test. Las respuestas proporcionadas por Jorge (ver TABLA 4.83) para ambas gráficas de la pregunta 2 del Cuestionario 1 (Figs. 4.136 y 4.137) no son aceptables (opción A en ambas respuestas) pero si son consistentes: en la respuesta a la pregunta 2A Jorge relaciona función creciente con el intervalo donde la gráfica corresponde a una función con imagen positiva, a pesar de que no es creciente en todo ese intervalo; la respuesta que da para la pregunta 2B se basa en los mismo elementos de análisis.

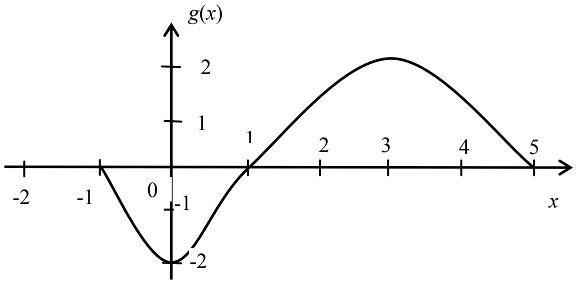
Inter–test. Este estudiante opina que la función de la Fig. 4.1 crece en los intervalos $-\infty < x < 1$ y $2 < x < 7$, respuesta que es aceptable y que denota un cambio respecto de la concepción manifestada anteriormente. Para la función de la Fig. 4.8 Jorge opina que es creciente en los intervalos $-5 < x < -3$, $1 < x < 2$ y $3 < x < 4$, respuesta aceptable y coincidente con su concepción del test anterior.

Post–test. Las respuestas brindadas por este estudiante satisfacen las condiciones especificadas, en coincidencia con las últimas concepciones externadas. Esto se corrobora con las producciones (Figs. 4.141 y 4.143) y los argumentos ofrecidos durante la entrevista en donde comenta: "la función es creciente cuando va subiendo (no abundó más en este comentario, pero todas sus producciones fueron aceptables)".



A) De –5 a –1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a –3 E) De 0 a 1 F) Otra:_____

Fig. 4.136 Pregunta 2A



A) De 1 a 5 B) De –1 a 1 C) De 0 a 3
D) De 0 a 5 E) De –1 a 0 F) Otra:____

Fig. 4.137 Pregunta 2A

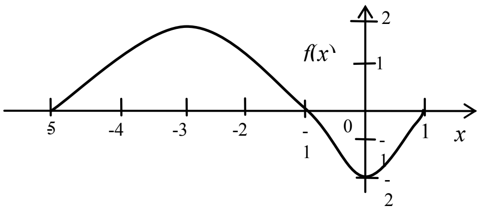
TABLA 4.83 Función creciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es creciente si sus ordenadas son positivas	✓	–	–	–
La función es creciente si su imagen es negativa	–	–	–	–
La función es creciente si, a medida que crecen las abscisas crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓	✓	✓
Si la gráfica de la función sube, la función es creciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	–
El intervalo donde la función es creciente queda determinado por los valores numéricos más próximos a sus límites	–	–	–	–
La función es creciente si sus abscisas son positivas	–	–	–	–

Función decreciente

Pre–test. Las respuestas proporcionadas por Jorge (ver TABLA 4.84) para ambas gráficas de la pregunta 4 del Cuestionario 1 (Figs. 4.138 y 4.139) no son aceptables (opciones C y A, respectivamente) pero si son consistentes: en la respuesta a la pregunta 4A Jorge vincula función decreciente con el intervalo donde la gráfica corresponde a una función con imagen negativa, a pesar de que no es decreciente en todo ese intervalo; la respuesta que da para la pregunta 4B es similar.

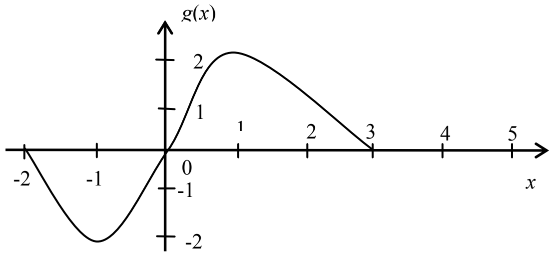
Inter–test. Por otra parte, este estudiante opina que la función de la Fig. 4.1 es decreciente en el intervalo $\mathbf{1 < x < 2}$, respuesta que es aceptable, y que denota cambios respecto de las concepciones manifestadas anteriormente. Con relación a la función de la Fig. 4.8, este estudiante opina que decrece en los intervalos $\mathbf{-3 < x < -1}$, $\mathbf{0 < x < 1}$ y $\mathbf{2 < x < 3}$, respuesta aceptable y que corresponde con las concepciones observadas en el último test.

Post–test. Las respuestas de este estudiante para las funciones de las figuras 4.138 y 4.139 son aceptables y consistentes. Esto se confirma con las producciones (Fig. 4.145) y los argumentos ofrecidos durante la entrevista en donde comenta: "una función es decreciente cuando baja".



A) De –5 a –1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a – 3 F) Otra:_____

Fig. 4.138 Pregunta 4A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De –2 a –1 E) De 1 a 3 F) Otra:_____

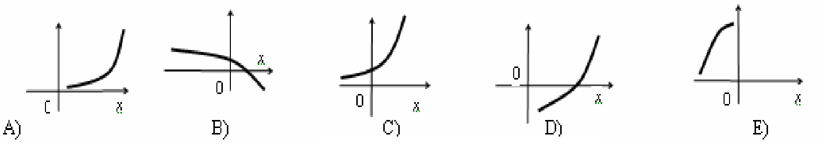
Fig. 4.139 Pregunta 4B

TABLA 4.84 Función decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es decreciente si sus ordenadas son negativas	✓	–	–	–
La función es decreciente si, a medida que crecen las abscisas decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓	✓	✓
Si la gráfica de la función baja, la función es decreciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	–
La función es decreciente si sus abscisas son negativas	–	–	–	–
La función es decreciente si, además de cumplir esta condición, es negativa	–	–	–	–
La función es decreciente si sus abscisas y sus ordenadas son negativas	–	–	–	–

c. Concepciones relativas a la ubicación y al comportamiento de las funciones.

Función con imagen positiva y creciente. En la pregunta 1 del Cuestionario 2 (Fig. 4.140), en el pre–test, la única gráfica correspondiente a una función cuya imagen sea positiva y creciente que no selecciona es aquella que tiene abscisas negativas y en su lugar selecciona la gráfica D (ver TABLA 4.85), que tiene una parte con ordenadas positivas y otra negativas, pero cuyas abscisas son positivas. Creemos que con esta elección se muestra la asociación entre las funciones con imágenes positivas y crecientes con aquellas gráficas que tienen abscisas positivas. En el post–test se manifiestan ideas aceptables y consistentes. Las producciones del estudiante durante la entrevista (Fig. 4.141) en donde él argumenta que "las gráficas cuando suben son crecientes" y "las funciones son positivas porque están por arriba del eje de las ***x***" corroboran estas observaciones.

1. Subraya el o los incisos que corresponden a gráficas de funciones que son a la vez **positivas y crecientes**.



A) B) C) D) E) OTRA

Fig. 4.140 Pregunta 1

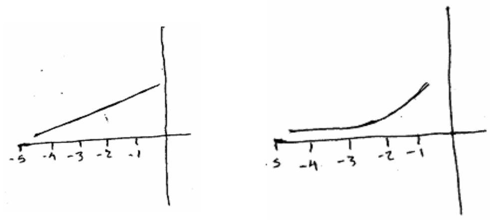
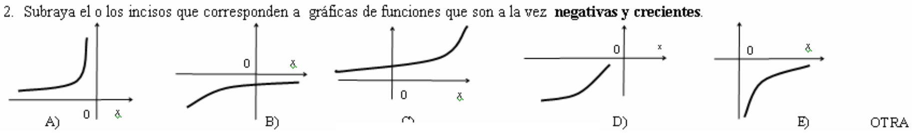


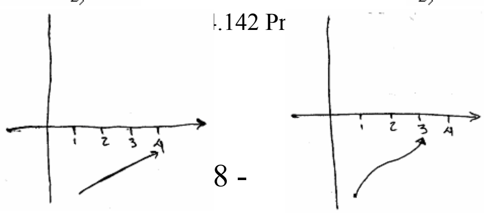
Fig. 4.141 Gráficas para funciones con imágenes positivas y crecientes dibujadas por Jorge

TABLA 4.85 Función positiva y creciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es positiva y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	–	–
La función es positiva y creciente cuando, además de ser creciente, posee abscisas positivas	✓	–
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–

Función con imagen negativa y creciente. En el pre–test, en la pregunta 2 del Cuestionario 2 (Fig. 4.142) selecciona dos de las tres gráficas correspondientes a funciones con imágenes negativas y crecientes que se encuentran a la vista. La tercera gráfica seleccionada tiene una imagen positiva y creciente pero posee abscisas negativas; esta última característica es la razón de que haya sido elegida y es evidencia de la vinculación que el estudiante establece entre funciones con imágenes negativas y crecientes con gráficas que tengan abscisas negativas. En el post–test su respuesta es aceptable (ver TABLA 4.86) y consistente y se ve reforzada por sus producciones (Fig. 4.143) y argumentos durante la entrevista en donde expresa que “las funciones negativas están debajo del eje de las ***x*** porque, si estuviesen arriba, iban a ser positivas” y “son crecientes cuando suben”.



.142 Pr



8 -

Fig. 4.143 Gráficas para funciones con imágenes negativas y crecientes dibujadas por Jorge

TABLA 4.86 Función negativa y creciente	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es negativa y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es negativa y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	✓	–
La función es negativa si comienza a trazarse abajo del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–
La función es negativa y creciente cuando, tiene abscisas negativas.	–	–

Función con imagen positiva y decreciente. En la pregunta 3 del Cuestionario 2 (Fig. 4.144), en el pre–test, Jorge selecciona la gráfica C (ver TABLA 4.87), que además corresponder a una función decreciente con imagen positiva, a diferencia de las gráficas A y E que también cumplen estas condiciones, tiene sus abscisas positivas. Explicamos esta elección con el vínculo que el estudiante establece entre funciones con imágenes positivas y decrecientes con las gráficas de funciones que tienen abscisas y ordenadas positivas. En el post–test se observan ideas aceptables y consistentes con un mayor grado de generalización respecto del pre–test y esta observación es reiterada por las producciones del estudiante durante su entrevista (Fig. 4.145) en donde manifiesta que "las funciones son positivas porque están por arriba del eje de las ***x***" y "una función es decreciente cuando baja".

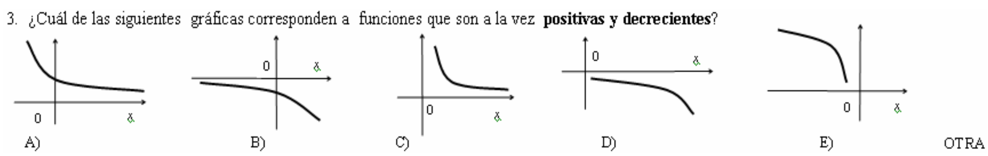


Fig.4.144 Pregunta 3

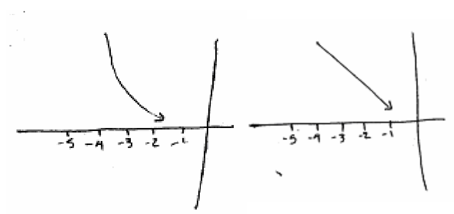


Fig. 4.145 Gráficas para funciones con imágenes positivas y decrecientes dibujadas por Jorge

TABLA 4.87 Función positiva y decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es positiva y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	✓	–
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es decreciente si baja, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–

Función con imagen negativa y decreciente. En el pre–test, en la pregunta 4 del Cuestionario 2 (Fig. 4.146) solo selecciona una de las tres gráficas que cumplen con las condiciones especificadas: aquella cuyas abscisas son negativas (opción E), y de las otras dos gráficas seleccionadas, la primera (opción A) en su comienzo tiene abscisas negativas y toda la segunda (opción C) tiene abscisas negativas (ver TABLA 4.88); en su respuesta, Jorge privilegia la asociación entre funciones decrecientes con imágenes negativas con gráficas que tienen abscisas negativas. En el post–test selecciona las gráficas que cumplen con las condiciones especificadas. Este cambio se ve reforzado por las producciones del estudiante (Figs. 4.135 y 4.145) y sus comentarios de que “las funciones negativas están debajo del eje de las ***x*** porque, si estuviesen arriba, iban a ser positivas” y “una función es decreciente cuando baja”.

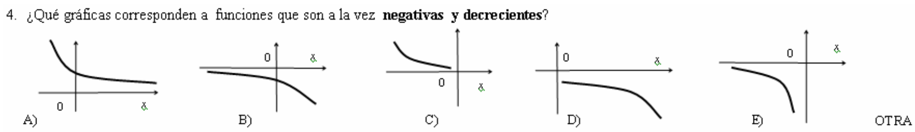


Fig. 4.146

TABLA 4.88 Función negativa y decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y**

		entrevistas
La función es negativa y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es negativa y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	–	–
La función es negativa y decreciente cuando posee abscisas negativas	✓	–

d. Concepciones relativas a la estabilidad de una función

a) Pre–test. Explorando las ideas del estudiante respecto de sus puntos de estabilización, revisamos lo que Jorge contesta a la pregunta 5 del Cuestionario 1 (Fig. 4.147), donde él asocia los puntos de estabilidad de la función con $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; (ver TABLA 4.89).

Inter–test. Cuando este estudiante analiza la función de la Fig. 4.1, considera que la función no crece ni decrece en los puntos $\boldsymbol{x} = \mathbf{-0.5}$, $\boldsymbol{x} = \mathbf{1.5}$ y $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$, puntos en donde la función no cumple con la condición especificada y si por el contrario intercepta al eje de las abscisas, externando con ello la concepción alternativa identificada en el test anterior. Luego, al analizar la función de la Fig. 4.8, manifiesta que para él la función se estabiliza en el intervalo $\mathbf{-1} < \boldsymbol{x} < \mathbf{0}$, respuesta aceptable e incompleta, pero que denota cierto progreso respecto de las anteriores concepciones.

Post–test. El estudiante selecciona todas las intersecciones de la gráfica con el eje de las abscisas y además uno de los puntos donde la función se estabiliza. Esta respuesta no es aceptable pero si consistente, es decir, sus criterios de análisis son aplicados con mucha uniformidad y hay evidencia de la relación que el estudiante establece entre los puntos donde la función no crece ni decrece con sus intersecciones con el eje $\boldsymbol{x}$ y también con el mínimo de la función. Estas ideas las refuerza con sus producciones (Fig. 4.148) y sus argumentaciones vertidas durante la entrevista en donde manifiesta que “la función se estabiliza en su máximo y su mínimo, donde no crece ni decrece y en los puntos donde cruza al eje de las $\boldsymbol{x}$”. Todo lo anterior configura cambios en las concepciones de este estudiante en distintos sentidos, es decir, aproximándose a las concepciones reconocidas por la disciplina y alejándose posteriormente de ellas.

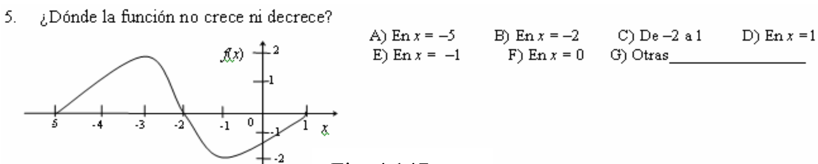


Fig. 4.147

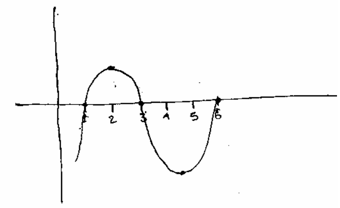


Fig. 4.148 Gráfica de una función con puntos en donde se estabiliza su comportamiento dibujada por Jorge

TABLA 4.89 Función que no crece ni decrece	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica o en donde ésta sea horizontal (aceptable)	–	–	–	✓
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en los puntos donde la gráfica intercepta al eje x	–	✓	–	✓
Una función no crece ni decrece en los intervalos donde su gráfica es horizontal	–	–	✓	–
Una función no crece ni decrece en sus puntos máximos, en sus puntos mínimos y en las intersecciones con el eje de las abscisas	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en $x = 0$ y $y = 0$	✓	–	–	–

b) En el pre–test, en la pregunta 5 del Cuestionario 2 (Fig. 4.149), asocia los puntos de estabilidad de la función con el valor $\boldsymbol{x = 0}$ y con el máximo de $\boldsymbol{f(x)}$; para $\boldsymbol{g(x)}$ la respuesta es parecida pues elige $\boldsymbol{x = 0}$ y una de las intersecciones de $\boldsymbol{g(x)}$ con el eje $\boldsymbol{x}$; estas respuestas no son aceptables, pero en ellas hay consistencia con su respuesta a la pregunta anterior: hay una fuerte relación entre los puntos de estabilidad de las funciones con $\boldsymbol{x = 0}$, y también hay relación de las funciones con sus intersecciones con el eje de las abscisas y con los puntos donde efectivamente se estabiliza (ver TABLA 4.90). En el post–test, la relación entre los puntos de estabilidad de la función con $\boldsymbol{x = 0}$ se ha removido y en su lugar se manifiesta un fuerte vínculo entre las intersecciones de las funciones con el eje $\boldsymbol{x}$ con sus puntos de estabilidad. Las observaciones anteriores se refuerzan con sus producciones (Fig. 4.148) y sus argumentaciones durante la entrevista: "la función se estabiliza en su máximo y su mínimo, donde no crece ni decrece y en los puntos donde cruza al eje de las $\boldsymbol{x}$".

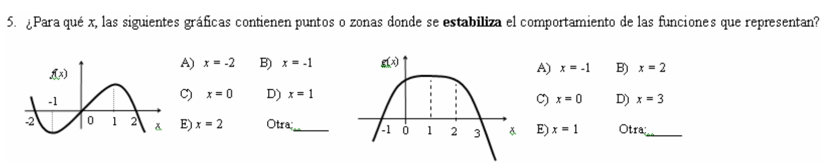


Fig. 4.149

TABLA 4.90 Puntos o intervalos donde una función estabiliza su comportamiento	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Una función se estabiliza en los puntos máximos y mínimos de su gráfica (aceptable)	✓	✓
Una función se estabiliza en los puntos donde la gráfica	–	✓

intercepta al eje x		
Una función se estabiliza en la vecindad de un punto máximo	–	–
Una función se estabiliza en $x = 0$	✓	–

e. Concepciones manifestadas usando los registros analítico y gráfico

Funciones que cumplen con la condición: $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. Al investigar en las ideas de Jorge respecto de las funciones que cumplen con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ (Fig. 4.150), encontramos que en el pre–test él solo selecciona una de las funciones que cumplen con la ubicación y comportamiento indicado, aquella que cumple con $x < 0$; el criterio de selección en ese momento parece estar determinado por la asociación que establece entre las funciones que cumplen con $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ y las que cumplen con $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $x < 0$ (ver TABLA 4.91). Su respuesta en el post–test es consistente y aceptable.

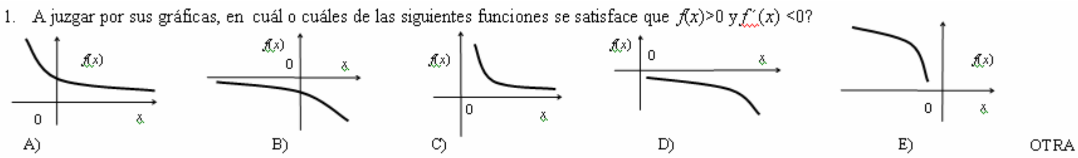


Fig. 4.150

TABLA 4.91 Función que cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $x < 0$ y otra parte que cumple con $x > 0$	–	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, además de cumplir con estas condiciones cumple con $x > 0$	✓	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando cumple con $f(x) > 0$ y $x < 0$	–	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando cumple con $f(x) < 0$	–	

Funciones que cumplen con la condición: $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. En el pre–test, pregunta 2 del Cuestionario 3 (Fig. 4.151) Jorge solo selecciona una de las tres gráficas que cumplen con las condiciones señaladas (ver TABLA 4.92) aquella que corresponde a la expresión $x > 0$, indicando así el vínculo que él establece entre las funciones que son negativas y crecientes con las que, además de cumplir con estas condiciones tienen abscisas positivas. En el post–test, elige las tres gráficas que cumplen con $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$.

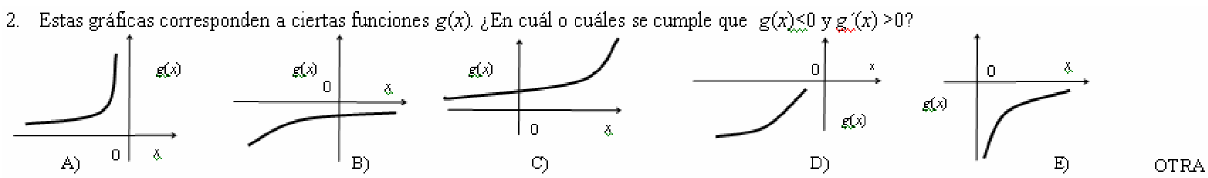


Fig. 4.151

TABLA 4.92 Función que cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $x < 0$ y otra parte que cumple con $x > 0$	–	–
La función cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ cuando, su gráfica cumple con $x < 0$ y con $g(x) > 0$	–	–
La función cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ cuando, su gráfica cumple con $x < 0$	–	–
La función cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ cuando, su gráfica, además de cumplir con estas condiciones cumple con $x < 0$	✓	–

Funciones que cumplen con la condición: $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$. La única gráfica seleccionada por Jorge, como respuesta a la pregunta 3 del Cuestionario 3 (Fig. 4.152), en el pre–test, es aquella que, además de cumplir con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$, cumple con $x > 0$, no obstante que existen dos gráficas más que cumplen con estas condiciones (ver TABLA 4.93); en este caso identificamos una situación similar a las que ya mencionamos anteriormente: relaciona las gráficas que cumplen con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$, con las que cumplen con $h(x) > 0$, $h'(x) > 0$ y $x > 0$. En el post–test, elige solo dos de las tres gráficas que cumplen con las condiciones especificadas.

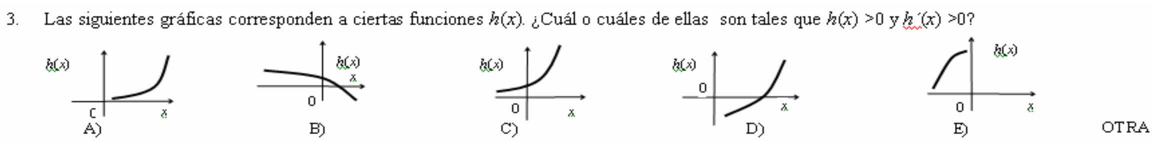


Fig. 4.152

TABLA 4.93 Función que cumple con las condiciones $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las	–	✓

abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)		
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x > 0}$	✓	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x > 0}$	–	–

Funciones que cumplen con las condiciones: $y < 0$ y $y' < 0$. En la pregunta 4 del Cuestionario 2 (Fig. 5.153), en el pre–test, no elige gráfica alguna. En el post–test, selecciona las dos gráficas que cumplen con las condiciones especificadas (ver TABLA 4.94).

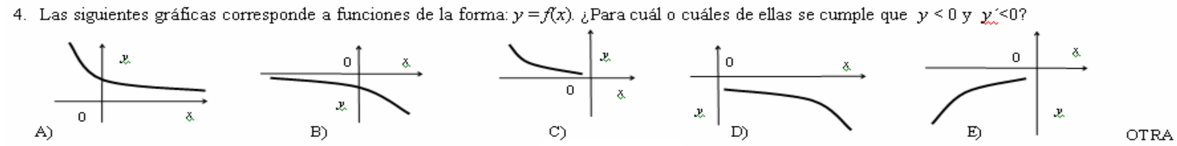


Fig. 5.153

TABLA 4.94 Función que cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x < 0}$ y $\boldsymbol{y < 0}$	–	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x < 0}$	–	–

Puntos que cumplen con la condición: $f'(x) = 0$. En el pre–test, la respuesta dada por Jorge a la pregunta 5 del Cuestionario 3 (Fig. 4.154) incluye dos puntos: una de las intersecciones de la curva con el eje de las abscisas y el otro, el mínimo de la función (ver TABLA 4.95). En el post–test se presentan cambios, ya que la respuesta dada por Jorge incluye los puntos máximo y mínimo de la función.

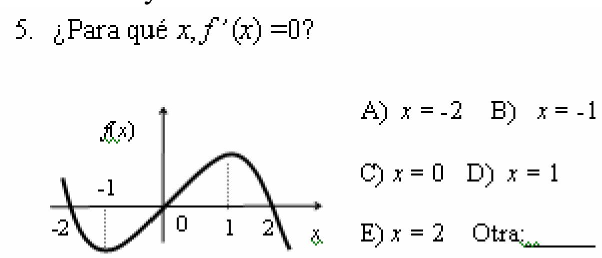


Fig. 4.154

TABLA 4.95 Puntos que cumplen con la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Los puntos que cumplen con la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ son los máximos y mínimos de la función (aceptable)	–	✓
En $\boldsymbol{x = 0}$ se cumple la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$	–	–

En sus intersecciones con el eje x se cumple la condición $f'(x) = 0$	✓	–

Determinación de la $f'(x)$ en un punto dado. Con relación a las ideas que el estudiante manifiesta en el pre–test respecto de la evaluación de la derivada de una función en un punto, pregunta 6 del Cuestionario 3 (Fig. 4.155), encontramos que él obtiene la respuesta de las intersecciones de la tangente a la curva en el punto en cuestión, con los ejes coordenados (ver TABLA 4.96). En el post–test su respuesta es aceptable.

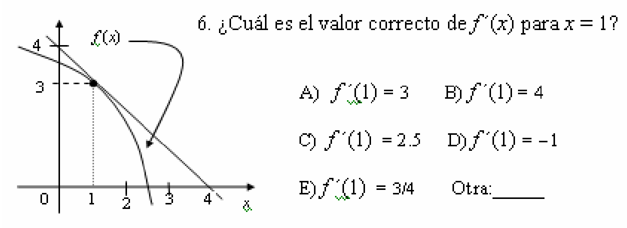


Fig. 4.155

TABLA 4.96 $f'(x)$ en un punto dado	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la pendiente de la tangente a la función en ese punto (aceptable)	–	✓
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la $f(x)$ en ese punto	–	–
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la abscisa del punto en donde la tangente en el punto x cruza al eje x	✓	–

f. Análisis comparativos de las preguntas paralelas. Las planteadas verbalmente y las planteadas analíticamente

Función con imagen positiva y creciente y función que cumple con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$. Cuando la pregunta se plantea verbalmente, en el pre–test se manifiesta la presencia de una concepción alternativa, que consiste en asociar las funciones con imágenes positivas y crecientes con aquellas gráficas que tienen abscisas positivas. En el post–test, la respuesta es consistentemente aceptable, consistencia que también se muestra en las gráficas y explicaciones vertidas por el estudiante durante la entrevista. Al hacer el cuestionamiento en forma analítica en el pre–test, también se manifiesta la concepción alternativa ya referida: relaciona las funciones que cumplen con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$, con las que además cumplen con $x > 0$; en el post–test, selecciona dos gráficas que dan cumplimiento a las condiciones especificadas, pero faltó incluir una gráfica más. El estudiante muestra un mejor desempeño cuando la pregunta se hace verbalmente (ver Figs. 4.140, 4.141, 4.152 y Tablas 4.85, 4.93).

Función con imagen negativa y creciente y función que cumple con $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. Al plantear la pregunta en forma verbal, en el pre–test se manifiesta una concepción alternativa: vincula las funciones con imágenes negativas y crecientes con gráficas que tengan abscisas negativas; en el post–test la respuesta es consistente y aceptable. Si la pregunta se hace usando lenguaje analítico, en el pre–test también hay evidencia de una concepción alternativa: asocia las funciones que cumplen con $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ con las que además de cumplir con esas condiciones también cumplen con $\boldsymbol{x > 0}$; en el post–test la respuesta es aceptable y consistente (ver Figs. 4.142, 4.143, 4.151 y Tablas 4.86, 4.92). El cambio en el lenguaje usado en esta pregunta no supuso un cambio importante en las respuestas del estudiante.

Función con imagen positiva y decreciente y función que cumple con $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$. Cuando el cuestionamiento es formulado en forma verbal, en el pre–test asocia las funciones con imágenes positivas y decrecientes con las gráficas de funciones que tienen abscisas y ordenadas positivas. En el post–test, la respuesta es consistentemente aceptable en coincidencia con las producciones y argumentos formulados por el estudiante en la entrevista. Cuando la pregunta se hace analíticamente, en el pre–test la respuesta es incompleta pues elige solo aquella gráfica que además de cumplir con $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ cumple con $\boldsymbol{x < 0}$; en el post–test la respuesta cumple con las condiciones establecidos (ver Figs. 4.144, 4.145, 4.150 y Tablas 4.87, 4.91). No hay diferencia relevante en las respuestas de Jorge al cambiar el lenguaje usado en la formulación de la pregunta.

Función con imagen negativa y decreciente y función que cumple con $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{y' < 0}$. Cuando la pregunta involucró lenguaje verbal, en el pre–test, privilegia la asociación entre funciones con imágenes negativas y decrecientes con gráficas que tienen abscisas negativas. En el post–test la respuesta ofrecida fue aceptable y consistente, así como también sus producciones y argumentos desarrollados durante la entrevista. Cuando la pregunta se formuló usando lenguaje analítico, en el pre–test no seleccionó gráfica alguna y en el post–test su respuesta fue aceptable y consistente (ver Figs. 4.146, 4.5.135, 4.145, 4.153 y Tablas 4.88, 4.94). El cambio del lenguaje usado en la pregunta no afectó el desempeño del estudiante.

Función que no crece ni decrece y función que cumple con $\boldsymbol{f'(x) = 0}$. Cuando la pregunta se plantea usando lenguaje verbal, en el pre–test Jorge asocia los puntos estables de una función con $\boldsymbol{x = 0}$ y con el máximo de la misma. En el post–test vincula los puntos estables con las intersecciones de la función con el eje de las abscisas; esta concepción también se manifiesta en las producciones y comentarios de Jorge vertidos durante la entrevista. Cuando la pregunta se plantea usando lenguaje analítico, en el pre–test los puntos de estabilidad de la función son asociados con las intersecciones de la gráfica con el eje de las x y con el mínimo de la función. En el post–test, la respuesta es aceptable. En este caso, al estudiante pareció serle más accesible el lenguaje analítico (ver Figs. 4.149, 4.148, 4.154 y Tablas 4.90, 4.95). Todo lo anterior configura cambios en las concepciones de este estudiante en distintos sentidos, es decir, algunas veces, aproximándose a las concepciones reconocidas por la disciplina y otras, alejándose de ellas.

Marisol

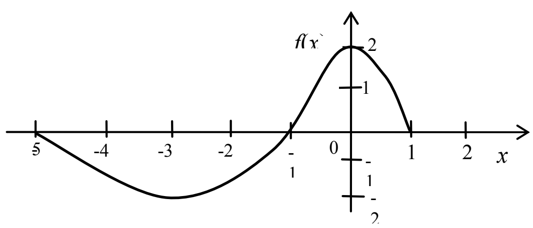
a. Concepciones relativas a la ubicación de la gráfica.

Función con imagen positiva

Pre–test. De acuerdo con las respuestas brindadas por Marisol (ver Tabla 4.97), a la pregunta 1A (Fig. 4.156) ella considera a la función con imagen positiva como aquella que tiene abscisas positivas; en el segundo caso, pregunta 1B (Fig.4.157), es manifiesta la relación que establece entre función con imagen positiva con aquella cuya gráfica tiene abscisas positivas. En sus respuestas son apreciables sus inconsistencias; en la primera pregunta su respuesta es aceptable pero en el segundo caso no.

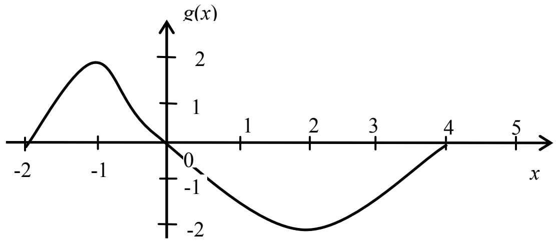
Inter–test. Cuando la estudiante analiza la función de la Fig. 4.1, para ella ésta es positiva en los intervalos $\mathbf{0 < x < 1.5}$ y $\mathbf{3 < x < 7}$, en donde en efecto, la función es positiva, solo que es evidente que omitió la parte de la curva que también, siendo positiva, se encuentra en el segundo cuadrante. Su respuesta parece denotar que una función es positiva si además de cumplir con esta condición, tiene abscisas positivas.

Post–test. Sus respuestas (Fig. 4.156 y Fig. 4.157) manifiestan cambios respecto del último test, pues en ambos casos cumplen con la condición establecida. Todo ello es confirmado por las gráficas que Marisol elaboró (Fig. 4.158) cuando se le pidió construir gráficas de funciones con imágenes positivas; en todos los casos las gráficas reúnen las condiciones solicitadas y los argumentos que usa son tales como: "las funciones son positivas porque están por encima del eje de las ***x***".



A) De 0 a 1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a –1 F) Otra:_____

Fig. 4.156. Pregunta 1A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 4 C) De 2 a 4
D) De –1 a 2 E) De –2 a –1 F) Otra:_____

Fig. 4.157. Pregunta 1B

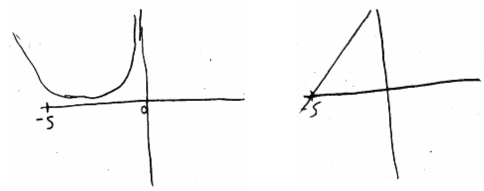


Fig. 4.158 Gráficas de funciones con imágenes positivas dibujadas por Marisol

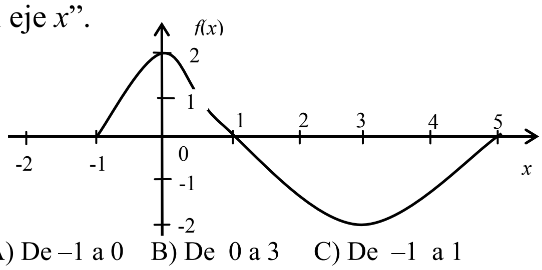
TABLA 4.97 Función positiva	Concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**intertest**	**Postest y entrevista**
La función es positiva donde sus ordenadas son positivas (aceptable)	✓	—	✓
La función tiene imagen positiva si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son positivas	✓	✓	—
La función tiene una imagen positiva si su gráfica está ubicada en el primer cuadrante, donde las abscisas y las ordenadas son positivas.	—	—	—
La función es positiva si su gráfica comienza a trazarse arriba del eje de las abscisas	—	—	—
La función es positiva si es creciente	—	—	—
La función es positiva si sus abscisas son positivas y es creciente	—	—	—
El intervalo en donde una función es positiva queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	—	—	—

Función con imagen negativa

Pre–test. En las respuestas dadas por Marisol a la pregunta 3A (opción A, Fig. 4.159) (ver Tabla 4.98), ella relaciona una función con imagen negativa con aquella porción de la gráfica cuyo intervalo tiene abscisas negativas a pesar de que está arriba del eje x; en el segundo caso, en la pregunta 3B (Fig. 4.160), la respuesta (opción A) es análoga a la anterior: elige como intervalo donde la función es negativa aquel donde la gráfica tiene abscisas negativas y ordenadas positivas. Sus repuestas son consistentes, pues siempre usa los mismos elementos de análisis (en ambos casos Marisol considera que una función es negativa por tener abscisas negativas sin tomar en cuenta el signo de las ordenadas), pero no son aceptables.

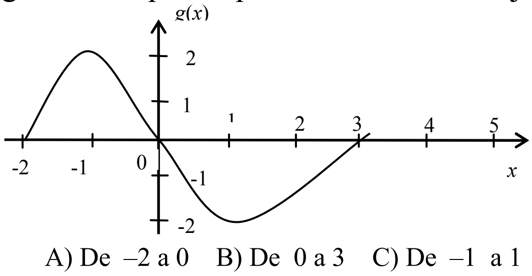
Inter–test. Cuando esta estudiante analiza la función de la Fig. 4.1, considera que esta función es negativa en los intervalos $x < -0.5$ y $1.5 < x < 3$, respuesta que es aceptable y que refleja cierta evolución respecto de las respuestas anteriores.

Post–test. Las respuestas obtenidas en el post–test (Fig. 4.159 y Fig. 4.160), son consistentemente aceptables, además de que dan idea de haber logrado mayor generalización en sus concepciones pues propone respuestas aceptables que no estaban contempladas en las opciones dadas. Lo anterior se confirma con las gráficas que Marisol dibujó cuando se le pidió construir gráficas de funciones negativas (Fig. 4.161) en donde ella argumenta que: “una función negativa es aquella que se encuentra debajo del eje x”.



A) De –1 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De 0 a 5 E) De 3 a 5 F) Otra:_____

Fig. 4.159 Pregunta 3A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De –2 a –1 E) De 1 a 3 F) Otra:_____

Fig. 4.160 Pregunta 3B

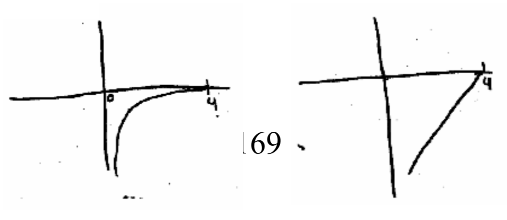


Fig. 4.161 Gráficas para funciones con imágenes negativas dibujadas por Marisol

TABLA 4.98 Función negativa	Concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**intertest**	**Postest**
La función es negativa donde sus ordenadas son negativas (aceptable)	–	✓	✓
La función tiene imagen negativa si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son negativas.	✓	–	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse abajo del eje de las abscisas	–	–	–
El intervalo en donde una función es negativa queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	–	–	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse debajo del eje de las abscisas	–	–	–
Una función es negativa si es decreciente	–	–	–
Una función es negativa si es negativa y creciente	–	–	–

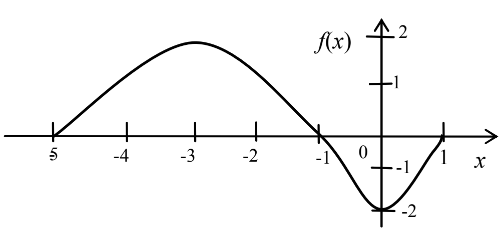
b. Concepciones relativas al comportamiento de la función.

7. 2. 1 Función creciente

Pre–test. En la pregunta 2A del Cuestionario 1 (Fig. 4.162) la respuesta de Marisol es aceptable (opción D); para la pregunta 2B (Fig. 4.163) también es aceptable (opción C, (1, 3)) aunque incluye un intervalo que se encuentra dentro de la opción primeramente seleccionada; ambas respuestas son consistentes entre sí (ver TABLA 4.99).

Inter–test. Cuando esta estudiante analiza a la función de la Fig. 4.1, opina que ésta es creciente en los intervalos $\mathbf{-\infty < \boldsymbol{x} < 1}$ y $\mathbf{2 < \boldsymbol{x} < 7}$, respuesta que es aceptable. Además, al analizar la función de la Fig. 4.8, considera que esta función es creciente en los intervalos $\mathbf{1 < \boldsymbol{x} < 2}$ y $\mathbf{3 < \boldsymbol{x} < 4}$, es decir, intervalos en donde efectivamente la función es creciente, pero en donde además, sus abscisas son positivas. Parecería que esta respuesta obedece a que esta estudiante considera que una función es creciente solo si, además de cumplir esta condición, tiene abscisas positivas. Esta respuesta significaría un retroceso en las concepciones de la estudiante respecto de los resultados obtenidos en el test anterior.

Post–test. Las dos respuestas son consistentemente aceptables e incluso reflejan una idea con mayor grado de generalización respecto del último test, toda vez que se ve reforzada por las producciones de Marisol (Fig. 4.164) y por sus comentarios durante la entrevista: "la función es creciente porque si va de izquierda a derecha, la función va creciendo o sea, va aumentando".



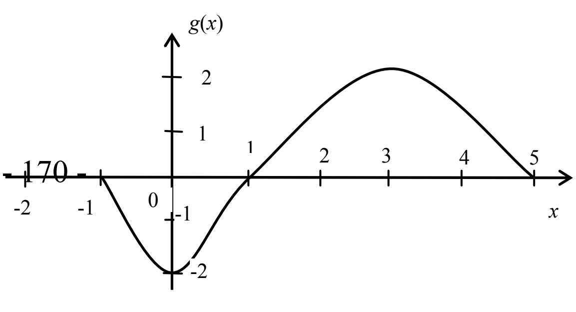


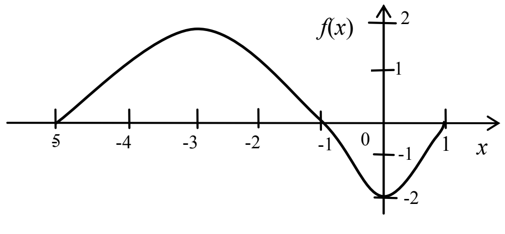
TABLA 4.99 Función creciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es creciente si sus ordenadas son positivas	–	–	–	–
La función es creciente si su imagen es negativa	–	–	–	–
La función es creciente si, a medida que crecen las abscisas crecen sus ordenadas (aceptable)	✓	✓	–	✓
Si la gráfica de la función sube, la función es creciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	–
El intervalo donde la función es creciente queda determinado por los valores numéricos más próximos a sus límites	–	–	–	–
La función es creciente si sus abscisas son positivas	–	–	✓	–

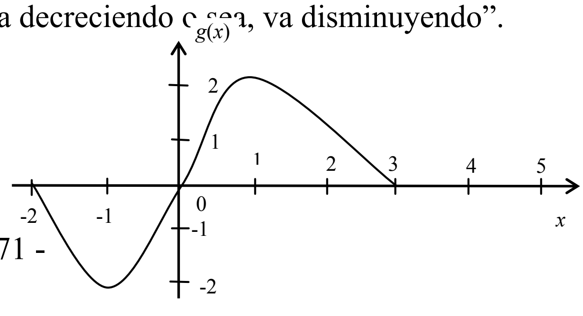
Función decreciente

Pre–test. Al explorar las concepciones de Marisol respecto de las funciones decrecientes encontramos, en la pregunta 4A del Cuestionario 1 (Fig. 4.164) que su respuesta es aceptable (intervalo (-3, -1)), pero el intervalo identificado no abarca toda la parte decreciente de ***f*(*x*)** y para ***g*(*x*)** en la pregunta 4B (Fig. 4.165) solo elige uno de los intervalos (opción D) en donde esta función es decreciente (ver TABLA 4.100).

Inter–test. En las respuestas ofrecidas por esta estudiante cuando analiza el comportamiento de la función de la Fig.4.1, ella considera que la función decrece en el intervalo $\mathbf{1 < x < 2}$, respuesta aceptable. Luego, cuando analiza la función de la Fig. 4.8, ella opina que la función decrece en $\mathbf{-3 < x < -1}$, $\mathbf{0 < x < 1}$ y $\mathbf{2 < x < 3}$, respuesta que es aceptable

Post–test. Las respuestas a ambas preguntas son aceptables y consistentes, ya que todas las opciones elegidas se apegan a la condición especificada. Esta observación se confirma con las producciones (Fig. 4.171) y los argumentos que la estudiante desarrolló durante la entrevista en donde manifestó que: "la función es decreciente porque, de izquierda a derecha, la función va decreciendo o sea, va disminuyendo".





A) De –5 a –1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1

A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1

TABLA 4.100 Función decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es decreciente si sus ordenadas son negativas	–	–	–	–
La función es decreciente si, a medida que crecen las abscisas decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓	✓	✓
Si la gráfica de la función baja, la función es decreciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	–
La función es decreciente si sus abscisas son negativas	–	–	–	–
La función es decreciente si, además de cumplir esta condición, es negativa	–	–	–	–
La función es decreciente si sus abscisas y sus ordenadas son negativas	–	–	–	–

c. Concepciones relativas a la ubicación y al comportamiento de las funciones.

Función con imagen positiva y creciente. Cuando se investigan las ideas de Marisol relativas a las funciones con imágenes positivas y crecientes en el pre–test, de las tres gráficas correspondientes a funciones con imágenes positivas y crecientes que ella tiene a la vista en la pregunta 1 del Cuestionario 2 (Fig. 4.166), solo elige dos (ver TABLA 4.101); la gráfica que no es elegida (opción E) tiene sus abscisas negativas. Suponemos que la elección se hace porque las condiciones positiva y creciente, son vinculadas con funciones que tienen abscisas y ordenadas positivas. En el post–test se manifiestan ideas aceptables de mayor generalización respecto del pre−test, en virtud de que ahora elige las opciones A, C y E. Las producciones de la estudiante durante la entrevista (Fig. 4.167) en donde ella argumenta que "las gráficas cuando se encuentran sobre del eje x son positivas y cuando están debajo, se vuelven negativas" y "la función es creciente porque, si va de izquierda a derecha, la función va creciendo o sea, va aumentando" corroboran estas observaciones.

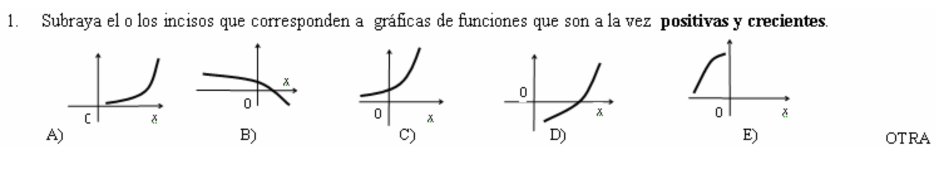


Fig. 4.166 Pregunta 1

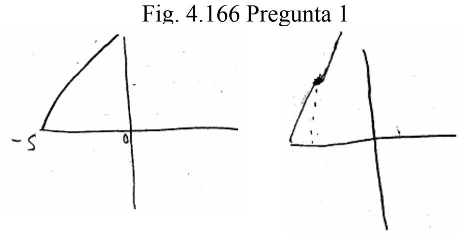


Fig. 4.167 Gráficas para funciones
con imágenes positivas y crecientes dibujadas por Marisol

TABLA 4.101 Función positiva y creciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es positiva y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	✓	–
La función es positiva y creciente cuando, además de ser creciente, posee abscisas positivas	–	–
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–

Función con imagen negativa y creciente. De las tres gráficas correspondientes a funciones con imágenes negativas y crecientes que Marisol tiene a la vista en la pregunta 2 del Cuestionario 2 (Fig. 4.168) en el pre–test, solo elige dos (ver TABLA 4.102); la gráfica que no es elegida (opción E) tiene sus abscisas positivas. Es probable que la selección obedezca a que las condiciones negativa y creciente, son relacionadas con funciones que tienen abscisas y ordenadas negativas. En el post–test se manifiestan ideas aceptables ya que ahora elige las opciones B, D y E. Las producciones de ella durante la entrevista (Fig. 4.169) así lo demuestran; en ellas argumenta que "las gráficas cuando se encuentran sobre del eje ***x*** son positivas y cuando están debajo, se vuelven negativas" y "la función es creciente porque, si va de izquierda a derecha, la función va creciendo o sea, va aumentando".

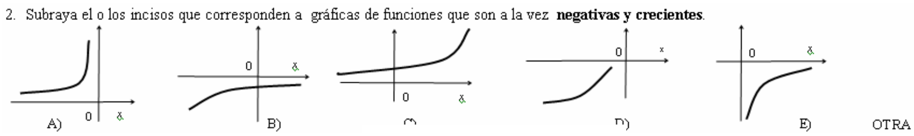


Fig. 4.168 Pregunta 2

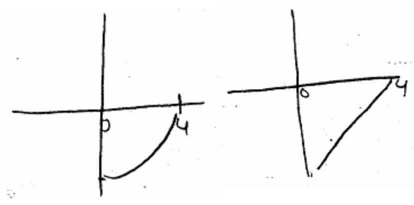


Fig. 4.169 Gráficas para funciones con imágenes negativas y crecientes dibujadas por Marisol

TABLA 4.102 Función negativa y creciente	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**

La función es negativa y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es negativa y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	✓	–
La función es negativa si comienza a trazarse abajo del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–
La función es negativa y creciente cuando, tiene abscisas negativas.	–	–

Función con imagen positiva y decreciente. Respecto de las funciones con imágenes positivas y decrecientes, en el pre–test, la respuesta ofrecida por Marisol a la pregunta 3 del Cuestionario 2 (Fig. 4.170), es aceptable pero incompleta, ya que no incluye a dos gráficas más (C y E) que también cumplen con las características especificadas; la explicación de esta decisión la encontramos en que es posible que ella asocie función con imagen positiva con abscisas positivas y comportamiento decreciente con abscisas negativas y que, como la gráfica A se encuentra en el primer y segundo cuadrante fue seleccionada porque posee abscisas positivas y abscisas negativas. En el post–test la respuesta es aceptable y consistente pues elige las gráficas A, C y E (ver TABLA 4.103) y esta respuesta coincide con sus comentarios vertidos durante la entrevista: "las gráficas cuando se encuentran sobre del eje ***x*** son positivas y cuando están debajo, se vuelven negativas" y "la función es decreciente porque, si va de izquierda a derecha, la función va disminuyendo".

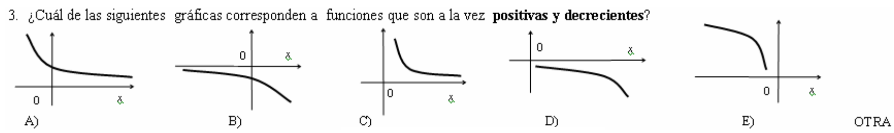


Fig.4.170 Pregunta 3

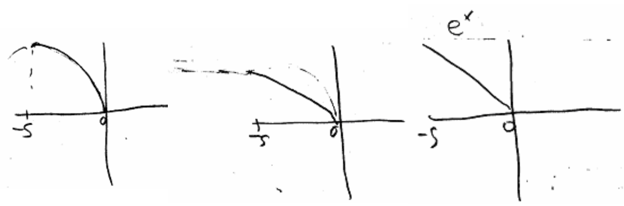


Fig. 4.171 Gráficas para funciones con imágenes positivas y decrecientes dibujadas por Marisol

TABLA 4.103 Función positiva y decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y decreciente cuando, sus ordenadas	–	✓

se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)		
La función es positiva y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	✓	–
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es decreciente si baja, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	–

Función con imagen negativa y decreciente. En el pre–test, de las tres gráficas correspondientes a funciones con imágenes negativas y decrecientes que Marisol tiene a la vista en la pregunta 4 del Cuestionario 2 (Fig. 4.172), solo elige dos (ver TABLA 4.104); la gráfica que no es elegida (opción D) tiene sus abscisas positivas. Suponemos que la razón de esta elección tiene que ver con que las condiciones negativa y decreciente, son asociadas con gráficas que tienen abscisas y ordenadas negativas. En el post–test se manifiestan ideas aceptables de mayor generalización respecto del pre−test, ya que ahora elige las opciones B, D y E. Las producciones de la estudiante durante la entrevista (Fig. 4.173) en donde Marisol argumenta que "las gráficas cuando se encuentran sobre del eje ***x*** son positivas y cuando están debajo, se vuelven negativas" y "la función es decreciente porque, si va de izquierda a derecha, la función disminuyendo" confirman estas observaciones.

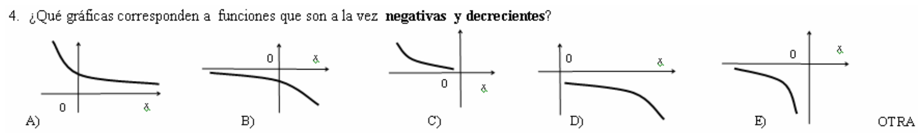


Fig. 4.172 Pregunta 4

TABLA 4.104 Función negativa y decreciente	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es negativa y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función es negativa y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	✓	–
La función es negativa y decreciente cuando posee abscisas negativas	–	–

d. Concepciones relativas a la estabilidad de una función

a) Pre–test. En relación a los puntos donde las funciones no crecen ni decrecen, para la pregunta 5 del Cuestionario 1 (Fig. 4.173) la respuesta de Marisol relaciona los puntos donde la función no crece ni decrece con los puntos en donde $\boldsymbol{f(x)}$ intercepta al eje x.

Inter–test. Cuando esta estudiante analiza la función de la Fig. 4.1, contesta que esta función no crece ni decrece en $\boldsymbol{x = 1}$ y $\boldsymbol{x = 2}$, respuesta aceptable y que significa un progreso respecto de su anterior respuesta. Cuando se le plantea la misma pregunta con relación a la función de la Fig. 4.8, ella solo identifica el intervalo $\boldsymbol{-1 < x < 0}$, respuesta aceptable pero incompleta. Esta respuesta representaría un retroceso en relación a su respuesta inmediata anterior.

Post–test. La respuesta en este caso es aceptable y consistente (ver TABLA 4.105), e inclusive las ideas de la estudiante adquieren mayor generalización pues identifica en sus respuestas un valor que explícitamente no se encontraba disponible. Esto se confirma con las producciones (Fig. 4.174) y los argumentos de la estudiante elaborados durante la entrevista: "la función en sus puntos estables no sube ni baja, o sea no crece, ni decrece".

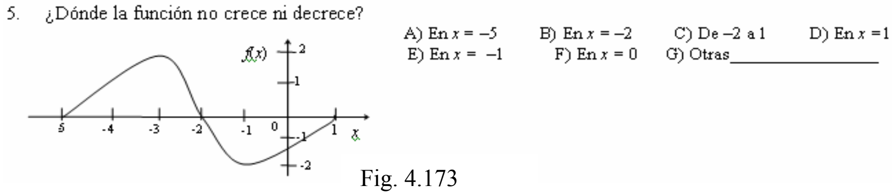


Fig. 4.173

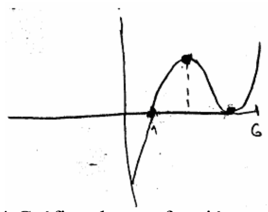


Fig. 4. 174 Gráfica de una función con puntos en donde se estabiliza su comportamiento dibujada por Marisol

TABLA 4.105 Función que no crece ni decrece	Concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica o en donde ésta sea horizontal (aceptable)	–	✓	–	✓
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en los puntos donde la gráfica intercepta al eje x	✓	–	–	–
Una función no crece ni decrece en los intervalos donde su gráfica es horizontal	–	–	✓	–
Una función no crece ni decrece en sus puntos máximos, en sus puntos mínimos y en las intersecciones con el eje de las abscisas	–	–	–	–
Una función no crece ni decrece en $x = 0$ y $y = 0$	–	–	–	–

b) Enseguida, las respuestas dadas por Marisol a la pregunta 5 del Cuestionario 2 en el pre–test (Fig. 4.175) son aceptables, pero incompletas porque para la ***f*(*x*)** no se incluye uno de sus puntos de estabilización; para ***g*(*x*)** la elección es aceptable. En el post–test, para ***f*(x)** la respuesta es aceptable y consistente (ver TABLA 4.106); para ***g*(*x*)** en cambio, no es del todo aceptable ya que, además de elegir el único punto de estabilización de la función, elige otro valor que se encuentra muy próximo a él (***x* = 2**) donde no se cumple la condición de estabilidad.

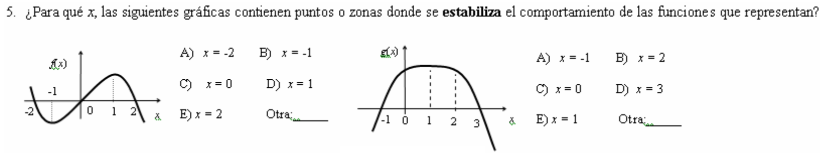


Fig. 4.175

TABLA 4.106 Puntos o intervalos donde una función estabiliza su comportamiento	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Una función se estabiliza en los puntos máximos y mínimos de su gráfica (aceptable)	✓	✓
Una función se estabiliza en los puntos donde la gráfica intercepta al eje *x*	–	–
Una función se estabiliza en la vecindad de un punto máximo	–	✓
Una función se estabiliza en *x* = 0	–	–

d. Concepciones manifestadas usando los registros analítico y gráfico

Funciones que cumplen con la condición: $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. Marisol, en la pregunta 1 del Cuestionario 3 (Fig. 4.176), en el pre–test, selecciona una de las tres gráficas que cumplen con **$f(x) > 0$ y $f'(x)$** < 0 (opción A), que se encuentra en el 2º y 1er cuadrante, y una gráfica (opción B) cuya ubicación no está acorde a lo solicitado. Sin embargo, revisando con cuidado ambas gráficas, podemos observar que en ellas, existe un intervalo con abscisas negativas (**$x < 0$**) y un intervalo con abscisas positivas (**$x > 0$**), es decir, ambas están asociadas con los operadores "mayor que" (>) y "menor que" (<) que se encuentran presentes en las expresiones **$f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$**. Suponemos que este fue el criterio que Marisol usó para elegirlas. En el post–test, son seleccionadas las tres gráficas que cumplen con las condiciones establecidas (ver TABLA 4.107).

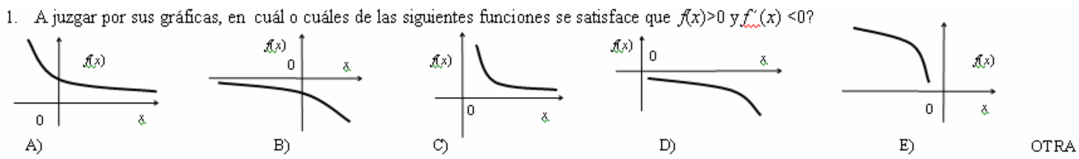


Fig. 4.176

TABLA 4.107 Función que cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus	–	✓

ordenadas (aceptable)		
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $\boldsymbol{x < 0}$ y otra parte que cumple con $\boldsymbol{x > 0}$	✓	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ cuando, además de cumplir con estas condiciones cumple con $\boldsymbol{x > 0}$	–	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{x < 0}$	–	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{f(x) < 0}$	–	

Funciones que cumplen con la condición: $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$. Respecto de las funciones tales que $\boldsymbol{g(x) < 0}$ **y** $\boldsymbol{g'(x) > 0}$, en la pregunta 2 del Cuestionario 3 (Fig. 4.177) en el pre–test Marisol selecciona la gráfica B, que es una de las tres que cumplen con las condiciones especificadas y selecciona la gráfica de la opción C, cuya ubicación no corresponde a la especificada, pero en donde observamos que la gráfica primeramente tiene abscisas negativas ($\boldsymbol{x < 0}$) y posteriormente tiene abscisas positivas ($\boldsymbol{x > 0}$), es decir Marisol, al hacer su selección, parece solo atender a estas dos últimas condiciones. Ya en el post–test, su elección es aceptable y consistente (ver TABLA 4.108).

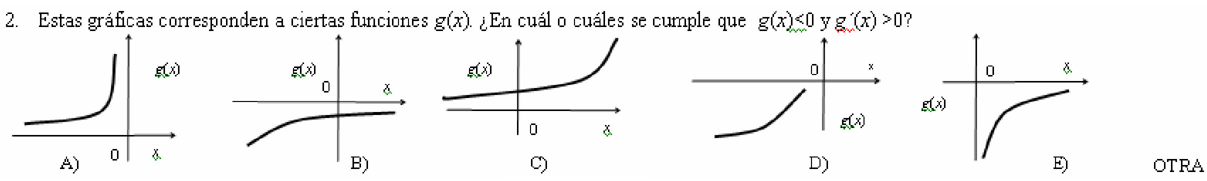


Fig. 4.177

TABLA 4.108 Función que cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $\boldsymbol{x < 0}$ y otra parte que cumple con $\boldsymbol{x > 0}$	✓	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ cuando, su gráfica cumple con $\boldsymbol{x < 0}$ y con $\boldsymbol{g(x) > 0}$	–	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ cuando, su gráfica cumple con $\boldsymbol{x < 0}$	–	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ cuando, su gráfica, además de cumplir con estas condiciones cumple con $\boldsymbol{x < 0}$	–	–

Funciones que cumplen con la condición: $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$. En el pre–test, la respuesta de Marisol a la pregunta 3 del Cuestionario 3 (Fig.4.178) solo incluye dos de las tres funciones que cumplen con $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$; la gráfica que no fue seleccionada (opción E) tiene abscisas negativas y suponemos que por ello fue excluida de la elección. En el post–test, las selecciones de Marisol cumplen con las condiciones especificadas (ver TABLA 4.109).

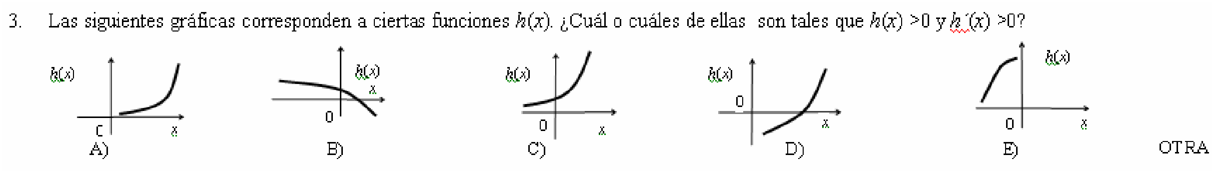


Fig. 4.178

TABLA 4.109 Función que cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ **y** $\boldsymbol{h'(x) > 0}$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	✓
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x > 0}$	✓	–

Funciones que cumplen con las condiciones: $\boldsymbol{y < 0}$ **y** $\boldsymbol{y' < 0}$**.** De las dos opciones elegidas por Marisol en el pre–test como respuesta a la pregunta 4 del Cuestionario 3 (Fig. 4.179) una de ellas cumple con $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{y' < 0}$, y la otra (opción E) cumple con $\boldsymbol{x < 0}$ y $\boldsymbol{y < 0}$; sin embargo, esta gráfica cumple con la condición $\boldsymbol{x < 0}$ y suponemos que a ello se debe su elección. En el post–test, las dos gráficas seleccionadas corresponden a una respuesta aceptable y consistente (ver TABLA 4.110).

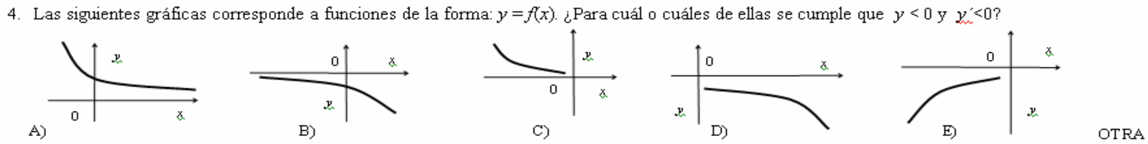


Fig. 4.179

TABLA 4.110 Función que cumple con las condiciones $\boldsymbol{y < 0}$ **y** $\boldsymbol{y' < 0}$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	✓	✓
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x < 0}$ y $\boldsymbol{y < 0}$	✓	–
La función cumple con las condiciones $\boldsymbol{y(x) < 0}$ y $\boldsymbol{y'(x) < 0}$ cuando cumple con $\boldsymbol{x < 0}$	–	–

Puntos que cumplen con la condición: $\boldsymbol{f'(x) = 0}$**.** En el pre–test, la respuesta a la pregunta 5 del Cuestionario 3 (Fig. 4.180) vincula la expresión $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ con $\boldsymbol{x = 0}$, donde ésta no se cumple (ver TABLA 4.111). En el post–test los puntos elegidos son el máximo y mínimo de la función.

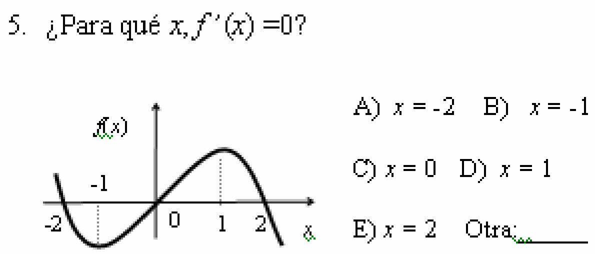


TABLA 4.111 Puntos que cumplen con la condición $f'(x) = 0$	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Los puntos que cumplen con la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ son los máximos y mínimos de la función (aceptable)	–	✓
En $\boldsymbol{x = 0}$ se cumple la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$	✓	–
En sus intersecciones con el eje $\boldsymbol{x}$ se cumple la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$	–	–

Determinación de la $f'(x)$ en un punto dado. En la respuesta a la pregunta 6 del Cuestionario 3 (Fig. 4.181) tanto en el pre–test como en el post–test Marisol relaciona, consistentemente, la derivada de una función en un punto con la ordenada del mismo (ver TABLA 4.112).

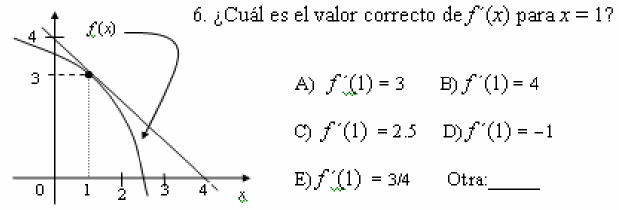


Fig. 4.181

TABLA 4.112 $f'(x)$ en un punto dado	Concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La $\boldsymbol{f'(x)}$ en un punto dado es igual a la pendiente de la tangente a la función en ese punto (aceptable)	–	–
La $\boldsymbol{f'(x)}$ en un punto dado es igual a la $\boldsymbol{f(x)}$ en ese punto	✓	✓
La $\boldsymbol{f'(x)}$ en un punto dado es igual a la abscisa del punto en donde la tangente en el punto x cruza al eje x	–	–

f. Análisis comparativos de las preguntas paralelas. Las planteadas verbalmente y las planteadas analíticamente

Función con imagen positiva y creciente y función que cumple con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$. Al plantear la pregunta verbalmente, en el pre–test, en su respuesta las funciones con imágenes positivas y crecientes, son vinculadas con gráficas que tienen abscisas y ordenadas positivas. En el post–test su respuesta es aceptable y consistente. Con el planteamiento de la pregunta en lenguaje analítico, en el pre–test Marisol asocia las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x)} > 0$ con la expresión $\boldsymbol{x > 0}$. En el post–test su respuesta cumple con las condiciones especificadas (ver Fig. 4.166, 4.167, 4.178 y Tablas 4.101, 4.109). El cambio de lenguaje en la formulación de la pregunta pareció no ser relevante en el desempeño de la estudiante.

Función con imagen negativa y creciente y función que cumple con $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. Si el planteamiento de la pregunta se hace en forma verbal, la respuesta ofrecida por Marisol en el pre–test relaciona las funciones con imágenes negativas y crecientes con gráficas que tienen abscisas y ordenadas negativas. En el post–test la respuesta es aceptable y consistente. Cuando la pregunta se formula analíticamente, en el pre–test Marisol selecciona la gráfica B, que es una de las tres que cumplen con $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ y selecciona la gráfica de la opción C, cuya ubicación no corresponde a la especificada, pero en donde observamos que la gráfica primeramente tiene abscisas negativas ($x < 0$) y posteriormente tiene abscisas positivas ($x > 0$), es decir Marisol, al hacer su selección, parece solo atender a los operadores lógicos "<" y ">"; observamos cómo los comentarios anteriores también aplican para la gráfica B.. Ya en el post–test la respuesta está acorde con las condiciones establecidas (ver Figs. 4.168, 4.169, 4.177 y Tablas 4.102, 4.108). El desempeño de la estudiante, en el post–test, es muy consistente pues no cambia con el cambio de lenguaje en el planteamiento de la pregunta.

Función con imagen positiva y decreciente y función que cumple con $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. Cuando la pregunta se formula en lenguaje verbal, en el pre–test, la respuesta ofrecida por Marisol solo comprende la opción A y no incluye a dos gráficas más (C y E) que también cumplen con las condiciones especificadas; la explicación de esta decisión la encontramos en que es posible que ella asocie función con imagen positiva con abscisas positivas y comportamiento decreciente con abscisas negativas y que, como la gráfica A se encuentra en el segundo y primer cuadrante fue seleccionada porque posee ambas. En el post–test la respuesta cumple con las dos condiciones establecidas. Al formular la pregunta en lenguaje analítico, en el pre–test, elige las gráficas A y B. Como ambas cumplen con $x < 0$ en un intervalo de ellas y en otro cumplen con $x > 0$, quizá la explicación se encuentre en los operadores "< 0" y "> 0", que también se encuentran presentes en las expresiones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ ya que son las únicas dos gráficas que cumplen esta condición. En el post–test las tres gráficas elegidas cumplen con las condiciones especificadas (ver Figs. 4.170, 4.171, 4.176 y Tablas 4.103, 4.107). Igual que en los casos anteriores, la consistencia de las respuestas de la estudiante es alta ya que éstas no cambian al variar el lenguaje usado en la formulación de la pregunta.

Función con imagen negativa y decreciente y función que cumple con $y < 0$ y $y' < 0$. Si la pregunta se plantea verbalmente, en el pre–test hay indicios de la existencia de una concepción alternativa en las ideas de Marisol: las funciones con imágenes negativas y decrecientes, son asociadas con gráficas que tienen abscisas y ordenadas negativas. En el post–test, su respuesta es aceptable y consistente. Al hacer la pregunta usando lenguaje analítico, en el pre–test una de las gráficas seleccionadas cumple con $y < 0$ y $y' < 0$, y la otra (opción E) cumple con $x < 0$ y $y < 0$. En el post–test las gráficas elegidas por la estudiante corresponden a las condiciones especificadas, mostrando que, en este caso, el cambio del lenguaje usado en el planteamiento de la pregunta, no fue relevante en las respuestas de la estudiante (ver Figs. 4.172, 4.173, 4.179 y Tablas 4.104, 4.110).

Función que no crece ni decrece y función que cumple con $f'(x) = 0$. Al plantear verbalmente la pregunta, en el pre–test la respuesta es incompleta pues solo identifica el máximo de $f(x)$ y no su mínimo. En el post–test, las opciones seleccionadas son aceptables y consistentes. Si la pregunta se hace analíticamente, en el pre–test vincula la expresión $f'(x) = 0$ con $x = 0$, donde ésta expresión no se cumple. En el post–test, ambas opciones son aceptables y consistentes. En esta ocasión, nuevamente, el lenguaje verbal resulto ser un poco más accesible que el lenguaje analítico (ver Figs. 4.175, 4.174, 4.180 y Tablas 4.106, 4.111).

Atendiendo a las respuestas de esta estudiante, después de la aplicación del diseño instruccional, se observa un notable desplazamiento de sus concepciones iniciales en la dirección de las concepciones aceptadas por la disciplina. No obstante lo anterior, los cambios en estas concepciones no parecen haber ganado la suficiente generalidad como para considerar que se haya operado una reestructuración fuerte en esta estudiante, a juzgar por sus respuestas en lo relativo a los puntos de estabilización de las funciones; más bien consideramos que en ella se configuró una reestructuración débil. Una observación importante se refiere a que los cambios identificados en algunas de sus respuestas, representan avances y retrocesos, que dan idea de que el estado de las concepciones puede cambiar en distintos sentidos y no necesariamente significan un avance en la dirección deseada.

Por otra parte, en lo relativo a sus respuestas al Cuestionario 3, igualmente se observaron cambios importantes. Sin embargo, en ellas también destaca la permanencia de la concepción alternativa consistente en asociar a la derivada de una función en un punto dado con la ordenada en ese punto.

4.2 Análisis global

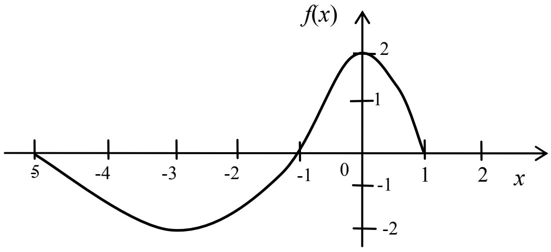
a. Ubicación de la función

Función con imagen positiva

Pre–test. En la pregunta 1A del Cuestionario 1 (Fig. 4.182), respecto de la gráfica $\boldsymbol{f(x)}$, para un 57.14% de los estudiantes la función tiene imagen positiva en el intervalo $\mathbf{0 < x < 1}$, donde efectivamente es positiva y se podría entonces considerar ésta como una concepción aceptable. Sin embargo, $\boldsymbol{f(x)}$ también es positiva en el intervalo $\mathbf{-1 < x < 1}$, y este intervalo solo fue elegido por el 35.71%. Lo anterior muestra que los estudiantes eligen mayoritariamente el intervalo donde las imágenes de la función son positivas, prefiriendo el intervalo donde sus abscisas y sus ordenadas son positivas. En el caso de la gráfica de $\boldsymbol{g(x)}$ (Fig. 4.183), el 50% de los estudiantes indica que la función tiene imagen positiva en el intervalo $\mathbf{0 < x < 4}$, donde la gráfica está por debajo del eje $\boldsymbol{x}$; de forma similar un 7.14% indica que la función tiene imagen positiva en el intervalo $\mathbf{2 < x < 4}$ donde también la gráfica está por debajo del eje $\boldsymbol{x}$. Un 35.71% de los estudiantes eligieron el intervalo $\mathbf{-2 < x < 0}$, en donde las abscisas son negativas y las ordenadas son efectivamente positivas. Una visión de conjunto a las respuestas dadas a ambas preguntas permite inferir que por lo menos 50% de los estudiantes cuestionados concebían en el momento del pre–test que la función tiene imagen positiva si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son positivas sin importar que las ordenadas estén en el primero o cuarto cuadrante. Parecen solo atender al signo de las abscisas para tomar la decisión. Un último detalle, un estudiante (al que denominaremos estudiante E, respondió que *De 2 a 1* la función $f(x)$ es positiva). La explicación de esta respuesta la encontramos en que la lectura del intervalo la hace tomando el valor numérico que se encuentra al inicio de la parte positiva de la curva (el 2 que se encuentra sobre el eje y) y el valor numérico que se encuentra al final de la misma (el 1 que se encuentra sobre el eje x). Esto es una muestra clara de que la relación de covariación implícita en una relación funcional, en él se encuentra ausente por completo.

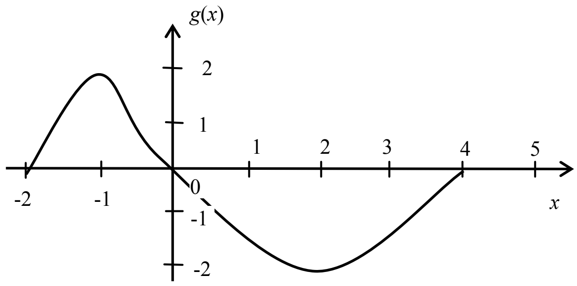
Inter–test. Para un 57.3% de los estudiantes la función de la Fig. 4.184, es positiva en el intervalo $\mathbf{-0.4 < x < 1.6}$ y en $\mathbf{3 < x < 7}$, siendo ésta una respuesta aceptable; para un 14.3% de los estudiantes la función es positiva si además de cumplir con esta condición posee abscisas positivas; un 14.3% considera que la función es positiva si sus abscisas son positivas; un estudiante opina que la función es positiva solo en $\mathbf{x > 3}$ y un 14.3% de los estudiantes no contesta.

Post–test. Observamos que, ninguno de los estudiantes considera que la función (Fig. 4.182) tenga imagen positiva en el intervalo $\mathbf{0 < x < 1}$, donde efectivamente la función tiene imagen positiva y las abscisas son positivas contra un 78.57% que elige al intervalo $\mathbf{-1 < x < 1}$ en donde la gráfica está arriba del eje $\boldsymbol{x}$. En el caso de la gráfica de $\boldsymbol{g(x)}$, ninguno de los estudiantes eligió el intervalo $\mathbf{0 < x < 4}$ donde la gráfica está debajo del eje $\boldsymbol{x}$, y en cambio un 71.43% eligió el intervalo $\mathbf{-2 < x < 0}$ donde la función efectivamente tiene imagen positiva y cuyas abscisas son negativas. Por otra parte, se observa la aparición de dos nuevas concepciones alternativas: la función es positiva si es creciente (21.43% selecciona el inciso b) al analizar ***f***(***x***)) y una función es positiva si sus abscisas son positivas y además es creciente (un 21.43% selecciona el inciso c) al analizar ***g***(***x***)). Un análisis global de las respuestas dadas a ambas preguntas permite establecer que después del diseño instruccional ninguno de los estudiantes concibe que la función tenga imagen positiva en intervalos donde sus abscisas sean positivas, es decir, se tiene un descenso en esta concepción del orden del 50% y, más del 70% de los estudiantes en el post–test conciben a la función con imagen positiva en los intervalos donde la gráfica está arriba del eje ***x***, mostrando un incremento global del 35% en esta concepción respecto del pre–test. También registramos el surgimiento de las dos nuevas concepciones alternativas descritas, con posterioridad a la puesta en escena del diseño instruccional.



A) De 0 a 1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a –1 F) Otra:_____

Fig. 4.182. Pregunta 1A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 4 C) De 2 a 4
D) De –1 a 2 E) De –2 a –1 F) Otra:_____

Fig. 4.183. Pregunta 1B

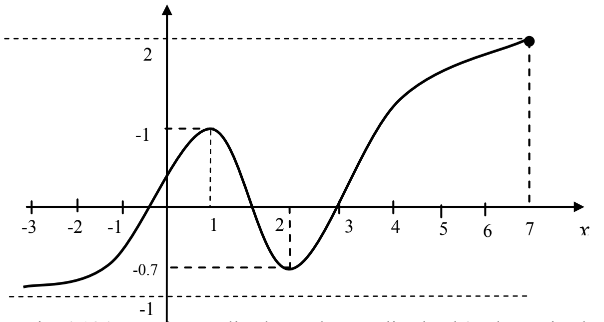


Fig. 4.184 Función analizada en el test aplicado el 25 de septiembre

a) ¿Cuál es el dominio de y?______________
b) ¿Cuál es su imagen?__________________
c) ¿Para qué x, y crece? __________________
d) ¿Para qué x, y decrece? ________________
e) ¿Para qué x, y no crece ni decrece?_______
f) ¿Para qué x, $y > 0$? ___________________
g) ¿Para qué x, $y < 0$?___________________
h) ¿Para qué x, $y = 0$?___________________

TABLA 4.113 Función positiva	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**intertest**	**Postest y entrevista**
La función es positiva donde sus ordenadas son positivas (aceptable)	35.71%	57.3%	71.4%
La función tiene imagen positiva si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son positivas	50%	14.3%	0%
La función tiene una imagen positiva si su gráfica está ubicada en el primer cuadrante, donde las abscisas y las ordenadas son positivas.	0%	14.3%	–
La función es positiva si su gráfica comienza a trazarse arriba del eje de las abscisas	–	–	14.3%[7]
La función es positiva si es creciente	–	–	21.43%
La función es positiva si sus abscisas son positivas y es creciente	–	–	21.43%
El intervalo en donde una función es positiva queda determinado por los	7.14%	–	–

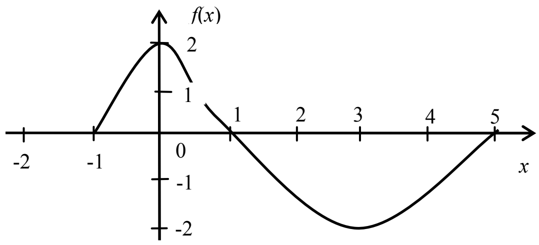
[7] Porcentaje de estudiantes que durante la entrevista evidenciaron esta concepción

valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)			

Función con imagen negativa
Pre–test. En la pregunta 3, del Cuestionario 1 (Fig. 4.185), para $\boldsymbol{f(x)}$ un 57.14% de los estudiantes opina que la función tiene imagen negativa en el intervalo $\mathbf{-1 < x < 0}$, a pesar de que la gráfica está por arriba del eje $\boldsymbol{x}$; en realidad $\boldsymbol{f(x)}$ tiene imagen negativa en el intervalo $\mathbf{1 < x < 5}$, intervalo que es seleccionado por solo un estudiante (7.14%); la mayoría se inclinó por el intervalo donde sólo las abscisas son negativas. Respecto a la gráfica de $\boldsymbol{g(x)}$ (Fig. 4.186), el 64.28% optó por el intervalo $\mathbf{-2 < x < 0}$, donde la gráfica está por arriba del eje $\boldsymbol{x}$; en ese intervalo $\boldsymbol{g(x)}$ tiene imagen positiva y sólo sus abscisas son negativas. Parece que esta última condición fue la que tuvo más peso en la toma de decisión. El 21.43% de los estudiantes seleccionó el intervalo $\mathbf{0 < x < 3}$, donde efectivamente $\boldsymbol{g(x)}$ tiene imagen negativa. Una visión de conjunto a las respuestas a ambas preguntas permite inferir que al menos un 60% de los estudiantes cuestionados conciben que la función tiene imagen negativa si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son negativas sin importar en dónde estén ubicados las ordenadas. Por otra parte, el estudiante E, mencionado en el punto anterior, decide que en el intervalo *De -1 a 2* $f(x)$ es negativa aplicando un criterio similar al ya referido: el -1 corresponde al valor numérico que se encuentra justo en el punto de inicio de la curva donde la función es negativa (sobre el eje x) y el 2 es el valor numérico en donde esta parte de la curva finaliza (sobre el eje y); esta respuesta es muy consistente con la anterior en el sentido de que aplicó el mismo criterio que en el caso precedente, es decir, identifica los intervalos en donde una función es positiva o negativa al margen de la relación de covariación implícita en una relación funcional.

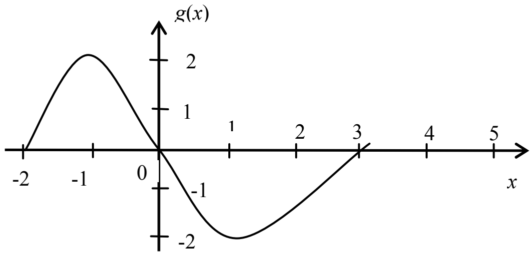
Inter–test. Para 64.3% de los estudiantes la función de la Fig. 4.187, es negativa en los intervalos $\mathbf{-\infty < x < -0.5}$ y $\mathbf{1.5 < x < 3}$, respuesta que es aceptable; para 14.3% de los estudiantes la función solo es negativa en el intervalo $\mathbf{1.5 < x < 3}$, respuesta que es aceptable pero incompleta y la única diferencia que tiene esta parte de la gráfica respecto del otro intervalo que también cumple con la condición especificada, es que es una zona cerrada; para un 7.14% la función es negativa si sus abscisas son negativas y un 14.3% de los estudiantes no contestaron.

Post–test. Para $\boldsymbol{f(x)}$ (Fig. 4.185) ninguno de los estudiantes opinó que la función tuviera imagen negativa en el intervalo $\mathbf{-1 < x < 0}$; en contraste, las preferencias por el intervalo $\mathbf{1 < x < 5}$ subieron a un 85.71%, intervalo en donde la gráfica se encuentra debajo del eje $\boldsymbol{x}$, y que, debe mencionarse, no se encontraba explícitamente disponible. Respecto a $\boldsymbol{g(x)}$ ningún estudiante seleccionó el intervalo $\mathbf{-2 < x < 0}$ donde la función tiene imagen positiva pero cuyas abscisas son negativas y un 85.71% seleccionó el intervalo $\mathbf{0 < x < 3}$ en donde la gráfica está debajo del eje $\boldsymbol{x}$. También se observa la aparición de una nueva concepción alternativa, que consiste en considerar que una función es negativa si es decreciente ya que la preferencia por el inciso b, cuando se pregunta en torno a $\boldsymbol{f(x)}$ cambia de 0% a 14.3%; para $\boldsymbol{g(x)}$ sucede algo similar, pues la preferencia por el inciso c va de 0% a 14.3%; en ambos casos en los incisos b y c mencionados, la función no cumple con la condición especificada y sí en cambio es decreciente. Analizando globalmente los resultados anteriores, podemos decir que después del diseño instruccional ninguno de los estudiantes manifestó que la función tuviera imagen negativa en aquellos intervalos donde ésta tuviera abscisas negativas sin importar que la gráfica estuviera arriba o abajo del eje $\boldsymbol{x}$ y más de un 80% opinó que la función tiene imagen negativa en intervalos donde está debajo del eje $\boldsymbol{x}$. Lo anterior representa una disminución en la concepción alternativa inicial cercana al 60% y un desplazamiento hacia la concepción promovida por el curso, superior al 60%. También, como ya lo consignamos, apareció, con posterioridad a la puesta en escena del tratamiento instruccional, la concepción alternativa consistente en considerar que una función es negativa si su imagen es decreciente.



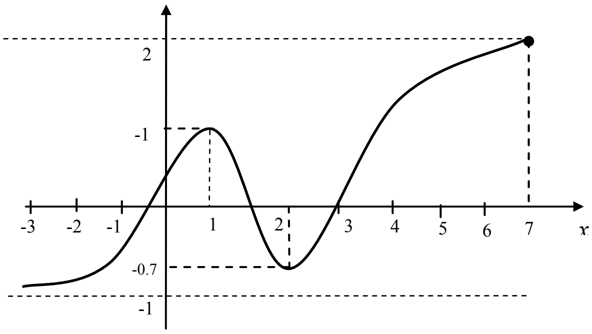
A) De –1 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De 0 a 5 E) De 3 a 5 F) Otra:_____

Fig. 4.185 Pregunta 3A



A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De –2 a –1 E) De 1 a 3 F) Otra:_____

Fig. 4.186 Pregunta 3B



a) ¿Cuál es el dominio de *y*?_______________
b) ¿Cuál es su imagen?___________________
c) ¿Para qué *x*, *y* crece? _________________
d) ¿Para qué *x*, *y* decrece? _______________
e) ¿Para qué *x*, *y* no crece ni decrece?_______
f) ¿Para qué *x*, $y > 0$? ____________________
g) ¿Para qué *x*, $y < 0$?____________________
h) ¿Para qué *x*, $y = 0$?____________________

Fig. 4.187 Función analizada en el test aplicado el 25 de septiembre

TABLA 4.114 Función negativa	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas		
	Pretest	**intertest**	**Postest**
La función es negativa donde sus ordenadas son negativas (aceptable)	7.14%	64.3%	85.71%
La función tiene imagen negativa si su gráfica está ubicada en la región donde las abscisas son negativas. Parecen solo atender al signo de las abscisas para tomar la decisión.	60%	7.14%	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse abajo del eje de las abscisas	–	–	14.3%[8]
El intervalo en donde una función es negativa queda determinado por los valores numéricos más próximos (sin importar si estos son abscisas u ordenadas)	7.14%	–	–
La función es negativa si su gráfica comienza a trazarse debajo del eje de las abscisas	–	–	14.3%

[8] Dos estudiantes durante la entrevista, Esteban y Celestina, evidenciaron esta concepción

Una función es negativa si es decreciente	–	–	14.3%
Una función es negativa si es negativa y creciente	–	–	–

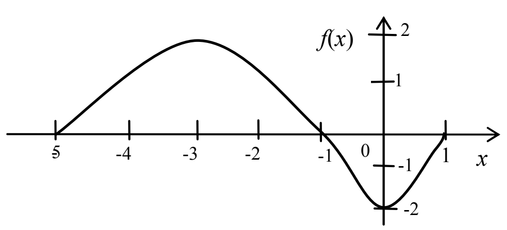
b. Comportamiento de la función

Función creciente

Pre–test. En la pregunta 2 del Cuestionario 2 (Fig. 4.188), para el caso de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x)}$, un 28.57% de los estudiantes optaron por el intervalo $\mathbf{-5 < x < -1}$, donde la gráfica está por arriba del eje $\boldsymbol{x}$, es decir, $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y tiene un intervalo donde crece $\mathbf{-5 < x < -3}$, y otro en donde decrece $\mathbf{-3 < x < -1}$; esta respuesta sugiere que estos estudiantes asocian la función creciente con la región de la gráfica que está por arriba del eje $\boldsymbol{x}$, es decir, donde la función tiene imagen positiva. Un 14.3% manifiestan que la función es creciente en el intervalo $\mathbf{-1 < x < 1}$, donde la función tiene imagen negativa. Un 42.86% indica que la función es creciente en el intervalo $\mathbf{-5 < x < -3}$, donde efectivamente la función cumple esta condición y ningún estudiante selecciona el intervalo $\mathbf{0 < x < 1}$ en donde la función también es creciente. Respecto de $\boldsymbol{g(x)}$ (Fig. 4.189) los estudiantes manifiestan concepciones análogas a las anteriores. El 35.71% de los estudiantes indican que la función crece en el intervalo $\mathbf{1 < x < 5}$ y el 28.57% sugiere que la función crece en el intervalo $\mathbf{0 < x < 3}$; la primera es una asociación de la región de la gráfica que está arriba del eje $\boldsymbol{x}$ con el concepto de crecimiento y la segunda es una respuesta aceptable, pues en ese intervalo la función crece. Tanto para el caso de $\boldsymbol{f(x)}$ como para $\boldsymbol{g(x)}$, en las respuestas que dieron los estudiantes se observa claramente la disposición a asociar las regiones de las gráficas de las funciones donde éstas son positivas con la idea de crecimiento.

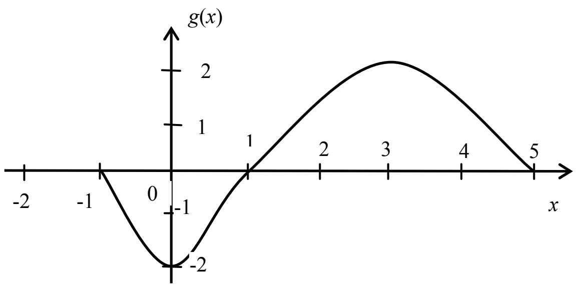
Inter–test. Un 50% de los estudiantes consideraron que la función de la Fig. 4.190 crece en los intervalos $\mathbf{-\infty < x < 1}$ y $\mathbf{2 < x < 7}$, respuesta aceptable. Un 14.3% de los estudiantes opinaron que la función crece en los intervalos $\mathbf{-1 < x < 1}$ y $\mathbf{2 < x \leq 7}$; el primer intervalo creemos que obedece a que en la gráfica, la función parece subir a partir de **-1**, valor que corresponde al eje de las $\boldsymbol{y}$ y llega hasta **1**, valor que también se encuentra sobre el eje $\boldsymbol{y}$; esta respuesta parece denotar que estos estudiantes ignoran que los intervalos sobre los que se cuestiona corresponden a la variable independiente. Un estudiante considera que la función crece en los intervalos $\mathbf{-\infty < x < 1}$ y $\mathbf{-0.7 < x < \infty}$; el primer intervalo es aceptable pero el segundo tiene como extremo izquierdo un valor que, si bien corresponde al eje y, marca el inicio a partir del cual la función comienza a crecer; esta respuesta parece indicar que el estudiante solo observa la curva y pierde de vista el contexto en el cual se ubica. El 28.6% de los estudiantes contestan de forma análoga a esta última respuesta. Nótese que en conjunto suman un 50% los estudiantes que determinan el intervalo en donde una función es creciente, a partir de los valores que se encuentran más próximos a los extremos del intervalo, sin importar si estos valores se encuentran sobre el eje x o el eje y. Para la función de la Fig. 4.191 28.6% de los estudiantes contestaron que en los intervalos $\mathbf{-5 < x < -3}$, $\mathbf{1 < x < 2}$ y $\mathbf{3 < x < 4}$, la función es creciente, respuesta que es aceptable; un 14.3% de los estudiantes eligieron los intervalos $\mathbf{-4 < x < -1.7}$ y $\mathbf{1.4 < x < 4}$, elección que parece evidenciar la asociación que ellos establecen entre función creciente con función con imagen positiva; para un 7.14% de los estudiantes la función crece cuando las abscisas son positivas. Un 43% de los estudiantes no contestaron a esta pregunta.

Post–test. Para el caso de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x)}$ (Fig. 4.188) un 7.14% de los estudiantes optaron por el intervalo $\mathbf{-5 < x < -1}$. En contraste, un 92.86% y un 85.71% seleccionan los intervalos $\mathbf{-5 < x < -3}$ y $\mathbf{0 < x < 1}$ respectivamente, intervalos en donde la función es creciente. Estas cifras permiten establecer que, después del diseño instruccional experimental, la concepción alternativa inicialmente identificada respecto del crecimiento de las funciones es manifestada por menos del 8% de los estudiantes y la concepción promovida por el curso es manifestada por el 85.71% (12 de los 14 estudiantes seleccionaron los intervalos $\mathbf{-5 < x < -3}$ y $\mathbf{0 < x < 1}$ para $\boldsymbol{f(x)}$ y el intervalo $\mathbf{0 < x < 3}$ para $\boldsymbol{g(x)}$, intervalos en donde estas funciones efectivamente son crecientes). Por otra parte, el estudiante E, al que hemos hecho mención en puntos anteriores, después de la puesta en escena del diseño instruccional identifica que, en los intervalos de -5 a -3 y de -2 a 1 la función $f(x)$ es creciente; el primer intervalo efectivamente es una opción aceptable y el segundo intervalo no lo es. Sin embargo, la elección de este segundo intervalo es hecha en base al criterio que este estudiante ya había puesto en juego: el -2 es el punto en donde la curva comienza a ser creciente (sobre el eje y) y el 1 es el punto donde la curva termina de ser creciente (sobre el eje x). Nuevamente, esta elección evidencia la falta de conciencia de la relación de covariación que es inherente a la relación funcional.



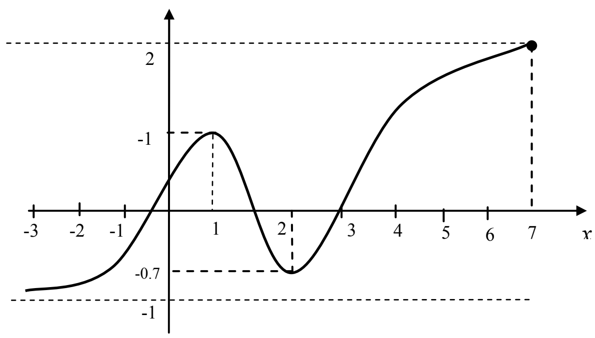
A) De –5 a –1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a –3 E) De 0 a 1 F) Otra:_____

Fig. 4.188 Pregunta 2.A



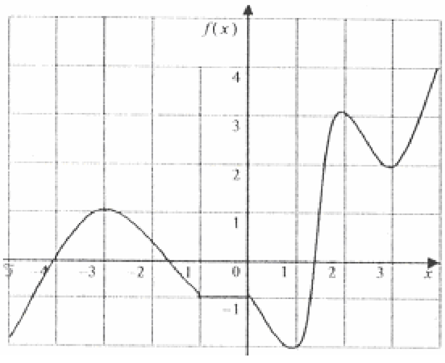
A) De 1 a 5 B) De –1 a 1 C) De 0 a 3
D) De 0 a 5 E) De –1 a 0 F) Otra:____

Fig. 4.189 Pregunta 2.B



a) ¿Cuál es el dominio de y?_______________
b) ¿Cuál es su imagen?____________________
c) ¿Para qué x, y crece? __________________
d) ¿Para qué x, y decrece? ________________
e) ¿Para qué x, y no crece ni decrece?_______
f) ¿Para qué x, $y > 0$? ____________________
g) ¿Para qué x, $y < 0$?____________________
h) ¿Para qué x, $y = 0$?____________________

ido el 25 de septiembre



a) ¿Cuánto cambia f si x cambia de -5 a -4?__ ¿Cuánto cambia f si x cambia de -1 a 0?___ ¿Cuánto lo hace si x cambia de 1 a 2? ____ ¿Dónde creció con mayor rapidez?______

b) Si x cambia de izquierda a derecha, es decir $\Delta x > 0$. ¿Para qué x, se cumplen las desigualdades siguientes:

$f(x + \Delta x) - f(x) > 0$: ___________________________________
$f(x + \Delta x) - f(x) < 0$: ___________________________________
$f(x + \Delta x) - f(x) = 0$: ___________________________________

TABLA 4.115 Función creciente	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es creciente si, cuando crecen las abscisas crecen sus ordenadas (aceptable)	28.6%	50%	28.6%	85.71%
La función es creciente si sus ordenadas son positivas	28.6%	–	14.3%	7.14%
Si la gráfica de la función sube, la función es creciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	14.3%[9]
El intervalo donde la función es creciente queda determinado por los valores numéricos más próximos a sus límites	–	50%.%	–	7.14%
La función es creciente si su imagen es negativa	14.3%	–	–	–
La función es creciente si sus abscisas son positivas	–	–	7.14%	–

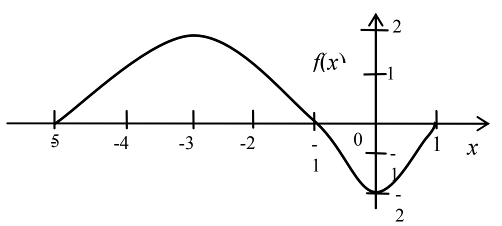
Función decreciente

Pre–test. En la pregunta 4 del Cuestionario 1 (Fig. 4.192), para un 21.43% de los estudiantes la función $\boldsymbol{f(x)}$ decrece en el intervalo $\mathbf{-5 < x < -1}$, para un 14.3% lo hace en el intervalo $\mathbf{-3 < x < 0}$ y poco más del 35.71% sugiere que lo hace en el intervalo $\mathbf{-1 < x < 1}$. En el primer caso la elección de los estudiantes denota la asociación de la idea de decrecimiento con la función que está ubicada en la región donde las abscisas son negativas, el segundo caso es una elección aceptable y en el tercer caso, se percibe una concepción que asocia a la función decreciente con la gráfica que está por debajo del eje $\boldsymbol{x}$, o sea, donde la función tiene una imagen negativa. Al analizar la gráfica de $\boldsymbol{g(x)}$ (Fig. 4.193) el 50% de los estudiantes indican que la función decrece en el intervalo $\mathbf{-2 < x < 0}$, donde la gráfica está por debajo del eje $\boldsymbol{x}$ y además las abscisas de la función son negativas, a diferencia de la gráfica de $\boldsymbol{f(x)}$ que tiene imagen negativa en el intervalo donde $\boldsymbol{x}$ es negativa y otro donde es positiva; quizá a esto se deba la preferencia de los estudiantes a considerar decreciente a una función si su gráfica tiene abscisas y ordenadas negativas. Por otro lado, el 35.71% de los estudiantes eligieron el intervalo $\mathbf{-2 < x < -1}$ y el 14.3% el intervalo $\mathbf{1 < x < 3}$, intervalos donde la función efectivamente es decreciente. Una revisión de conjunto de estos resultados nos permite concluir que al menos un 30% de los estudiantes, antes de incidencia instruccional, asocia a los intervalos en donde la función tiene imagen negativa al comportamiento decreciente de la misma y solo una estudiante concibe el decrecimiento de la función en aquellos intervalos donde, al incrementarse los valores de las abscisas decrecen los valores de las ordenadas.

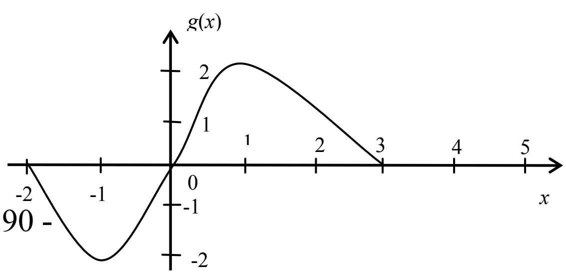
[9] Dos estudiantes durante la entrevista, Esteban y Celestina, evidenciaron esta concepción

Inter–test. Para la función de la Fig. 4.194, un 75.5% de los estudiantes seleccionaron el intervalo $\mathbf{1 < x < 2}$ como intervalo de decrecimiento, respuesta aceptable, pues en efecto en ese intervalo la función decrece. Una estudiante contestó $\mathbf{x = 1}$; en esta respuesta parecería que solo se identifica el inicio del intervalo en donde la función decrece. Un 21.4% de los estudiantes no contestaron. Para la función de la Fig. 4.195, un 21.4% de los estudiantes identificaron los intervalos $\mathbf{-3 < x < -1}$, $\mathbf{0 < x < 1}$ y $\mathbf{2 < x < 3}$, en donde efectivamente la función decrece; un 14.3% de los estudiantes eligieron el intervalo $\mathbf{0 < x < 1}$, respuesta aceptable pero incompleta; de acuerdo a esta respuesta, parecería que los estudiantes están considerando que la función decrece si además de cumplir con esta condición, la función es negativa. Para un 14.3% de los estudiantes la función decrece en los intervalos $\mathbf{-5 < x < -4}$ y $\mathbf{-1.7 < x < 1.4}$, respuesta que no es aceptable pero que denota la asociación que se está estableciendo entre las funciones decrecientes con funciones que son negativas. Para un estudiante la función es decreciente si sus abscisas son negativas. Un 43% de los estudiantes no contestaron a esta pregunta.

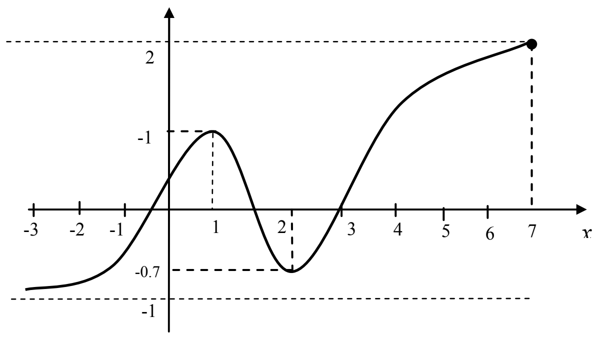
Post–test. Para $\boldsymbol{f(x)}$ (Fig. 4.192) ningún estudiante opina que esta función decrezca en el intervalo $\mathbf{-5 < x < -1}$, un 85.71.3% indica que la función decrece en el intervalo $\mathbf{-3 < x < 0}$ y solo uno de los estudiantes selecciona el intervalo $\mathbf{-1 < x < 1}$. Para $\boldsymbol{g(x)}$, solo uno de los estudiantes (7.69%) opinó que la función decrece en el intervalo $\mathbf{-2 < x < 0}$, un 92.86% de los estudiantes seleccionaron el intervalo $\mathbf{-2 < x < -1}$ y el mismo porcentaje opinó que la función decrece en el intervalo $\mathbf{1 < x < 3}$. Considerando un panorama general de estas cifras podemos decir que, después del diseño instruccional solo uno de los estudiantes conserva la concepción que asocia el carácter decreciente de una función con aquellos intervalos donde la gráfica tiene abscisas negativas, menos del 8% sigue pensando que la función decrece en los intervalos donde la gráfica de la función está debajo del eje de las abscisas y en cambio un 85.71% de los estudiantes (12) identifican el decrecimiento de una función de acuerdo a los conocimientos aceptados por la disciplina. En otro sentido, conviene hacer mención nuevamente de la respuesta del estudiante E, quien en este caso, al analizar el comportamiento de la función $f(x)$ opina que en el intervalo de -3 a -2 la función es decreciente. La explicación de esta respuesta es que efectivamente en $x = -3$ $f(x)$ comienza a ser decreciente y el -2 es el valor numérico (en el eje y, y para el estudiante E, ésta parece no ser propiamente una coordenada) en donde la curva termina su descenso. En esta respuesta nuevamente se reitera el criterio por él puesto en juego para identificar el comportamiento descendente de la función, en donde se encuentra ausente la conciencia de la relación de covariación implícita en una relación funcional.



A) De –5 a –1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a – 3 F) Otra:_____

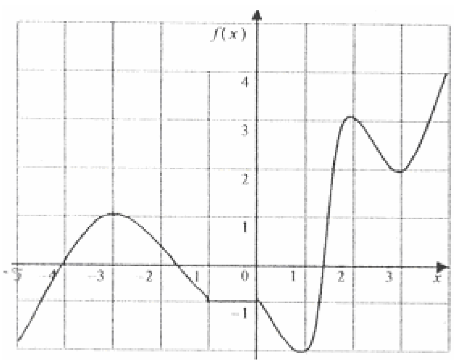


A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De –2 a –1 E) De 1 a 3 F) Otra:______



a) ¿Cuál es el dominio de y?______________
b) ¿Cuál es su imagen?__________________
c) ¿Para qué x, y crece? _________________
d) ¿Para qué x, y decrece? _______________
e) ¿Para qué x, y no crece ni decrece?_______
f) ¿Para qué x, $y > 0$? ___________________
g) ¿Para qué x, $y < 0$?___________________
h) ¿Para qué x, $y = 0$?___________________

Fig. 4.194 Función analizada en el test aplicado el 25 de septiembre



a) ¿Cuánto cambia f si x cambia de -5 a -4?__ ¿Cuánto cambia f si x cambia de -1 a 0?___ ¿Cuánto lo hace si x cambia de 1 a 2? ____ ¿Dónde creció con mayor rapidez?______

b) Si x cambia de izquierda a derecha, es decir $\Delta x > 0$. ¿Para qué x, se cumplen las desigualdades siguientes:

$f(x + \Delta x) - f(x) > 0$: ________________________________
$f(x + \Delta x) - f(x) < 0$: ________________________________
$f(x + \Delta x) - f(x) = 0$: ________________________________

Fig. 4.195 Función analizada en el test aplicado el 29 de

TABLA 4.116 Función decreciente	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
La función es decreciente si, a medida que crecen las abscisas decrecen sus ordenadas (aceptable)	7.14%	75.5%	21.3%	85.71%
La función es decreciente si sus ordenadas son negativas	30%	–	14.3%	7.14%
Si la gráfica de la función baja, la función es decreciente, sin importar si las abscisas crecen o decrecen	–	–	–	14.3%[10]
La función es decreciente si sus abscisas son negativas	21.3%	–	–	7.14%
La función es decreciente si, además de cumplir esta condición, es negativa	–	–	14.3%	–
La función es decreciente si sus abscisas y sus ordenadas son negativas	50%	–	–	–

[10] Dos estudiantes durante la entrevista, Esteban y Celestina, evidenciaron esta concepción

c. Función que no crece ni decrece

a) Pre–test. Según las respuestas a la pregunta 5 del Cuestionario 1 (Fig. 4.196), un 21.43% (ver TABLA 4.117) indica que en $\boldsymbol{x} = \mathbf{-2}$ la función no crece ni decrece, así como también la preferencia por $\boldsymbol{x} = \mathbf{-5}$ es de 14.3% y un 14.3% elige $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$, valores en donde la función intercepta al eje $\boldsymbol{x}$ y no se estabiliza. Solo uno de los estudiantes (7.14%) optó por $\boldsymbol{x} = \mathbf{-1}$ y por $\boldsymbol{x} = \mathbf{-3}$, puntos en donde $\boldsymbol{f(x)}$ se estabiliza. Estas respuestas sugieren que los estudiantes conciben que una función se estabiliza en sus intersecciones con el eje de las abscisas en al menos un 14.3% y los puntos máximos y mínimos solo son asociados con la estabilidad de la función por un solo estudiante.

Inter–test. Para la función de la Fig. 4.194, un 35.7% de los estudiantes elige los valores $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ y $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$, puntos en donde efectivamente la función no crece ni decrece; un 28.6% de los estudiantes seleccionan los valores $\boldsymbol{x} = \mathbf{-0.4}$, $\boldsymbol{x} = \mathbf{1.6}$ y $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$, puntos en donde la función no se estabiliza y si en cambio cruza al eje de las abscisas; un estudiante considera que en $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ la función se estabiliza. 35.7% de los estudiantes no contestaron. En relación a la función de la Fig. 4.195, 57.2% de los estudiantes eligieron el intervalo $\mathbf{-1} < \boldsymbol{x} < \mathbf{0}$, intervalo en donde la función efectivamente no crece ni decrece. No obstante que es aceptable esta respuesta, es incompleta, pues en los puntos $\boldsymbol{x} = \mathbf{-3}$, $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ y en $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$ la función también se estabiliza. Ningún estudiante respondió tomando en cuenta estos puntos. Por otra parte, un estudiante consideró que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ la función se estabiliza. Un 28.6% de los estudiantes no contestaron.

Post–test. Por otra parte, la preferencia por $\boldsymbol{x} = \mathbf{-2}$ (Fig. 4.196) desciende a 14.3% pero las selecciones que favorece a $\boldsymbol{x} = \mathbf{-5}$ no cambian y la preferencia por $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ desaparece; 78.57% optan por $\boldsymbol{x} = \mathbf{-1}$ y un 64.3% indica que la función se estabiliza en $\boldsymbol{x} = \mathbf{-3}$, valor que por cierto no se encontraba disponible explícitamente. Los números anteriores nos muestran que después del diseño instruccional, el 64.3% de los estudiantes asocian el máximo y el mínimo de la función con los puntos donde ésta se estabiliza y un 14.3% aún sigue asociando la estabilidad de la función con los puntos donde ésta intercepta al eje de las abscisas.

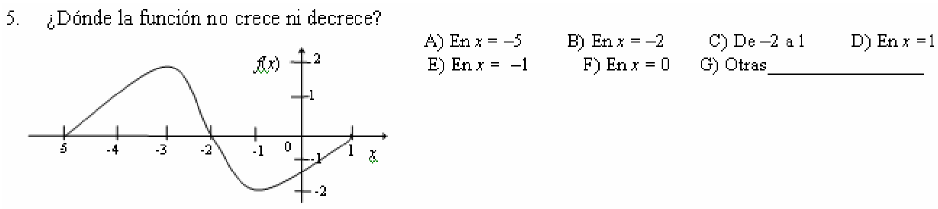


Fig. 4.196 Pregunta 5

TABLA 4.117 Función que no crece ni decrece	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas			
	Pretest	**Intertest 1**	**Intertest 2**	**Postest y entrevistas**
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y	–	–	–	–

en los puntos mínimos de su gráfica o en donde ésta es horizontal (aceptable)				
Una función no crece ni decrece en los puntos máximos y en los puntos mínimos de su gráfica	42.6%	35.7%	–	64.3%
Una función no crece ni decrece en los intervalos donde su gráfica es horizontal	–	–	57.2%	–
Una función no crece ni decrece en los puntos donde la gráfica intercepta al eje x	7.14%	28.6%	–	14.3%
Una función no crece ni decrece en sus puntos máximos, en sus puntos mínimos y en las intersecciones con el eje de las abscisas	–	–	–	14.3%
Una función no crece ni decrece en $x = 0$ y $y = 0$		7.14%	7.14%	–

b) Pre–test. En la respuesta dada a la pregunta 5 del Cuestionario 2 (Fig. 4.197) para 42.9% de los estudiantes $\boldsymbol{f(x)}$ se estabiliza en $\boldsymbol{x = 0}$, punto de intersección de la función con el eje de las abscisas (ver TABLA 4.118), 14.3% de los alumnos considera que $\boldsymbol{f(x)}$ se estabiliza en $\boldsymbol{x = 2}$, otro de los puntos donde la función intercepta al eje $\boldsymbol{x}$; para 42.9% de los estudiantes esta función se estabiliza en $\boldsymbol{x = 1}$, respuesta que es aceptable y solo un 7.14% de ellos conciben que $\boldsymbol{f(\mathrm{x})}$ se estabiliza en $\boldsymbol{x = -1}$, respuesta que también es aceptable. Un 14.3% de los estudiantes considera que $\boldsymbol{g(x)}$ se estabiliza en $\boldsymbol{x = 0}$; a juicio de un 21.43% $\boldsymbol{g(x)}$ se estabiliza en $\boldsymbol{x = 2}$, punto que no cumple con la condición especificada, y un 28.6% considera que $\boldsymbol{g(x)}$ se estabiliza en $\boldsymbol{x = 3}$, punto que es intersección de la función con el eje $\boldsymbol{x}$ y donde ésta no se estabiliza; solo un 28.6% de los estudiantes considera que $\boldsymbol{g(x)}$ se estabiliza en $\boldsymbol{x = 1}$, donde efectivamente se cumple esta condición. Desde una perspectiva de conjunto solo un estudiante asocia los máximos y mínimos de las funciones con la condición de estabilidad, casi un 50% de los estudiantes consideran que las funciones se estabilizan en $\boldsymbol{x = 0}$, cuando en este punto no se cumple la condición señalada y hasta un 28.6% de los estudiantes vincula los puntos donde las funciones interceptan al eje de las abscisas con su estabilidad.

Post–test. Un 85.71% y un 92.86% consideran que $\boldsymbol{f(x)}$ se estabiliza en $\boldsymbol{x = -1}$ y $\boldsymbol{x = 1}$ respectivamente, puntos que son mínimo y máximo de la función; el resto de las concepciones alternativas solo son manifestadas por uno de los estudiantes (7.14%). Para $\boldsymbol{g(x)}$ (Fig. 4.197), un 92.86% (ver TABLA 4.118) considera que ésta se estabiliza en $\boldsymbol{x = 1}$, que es el único punto en donde en efecto, esta condición se cumple; es importante destacar que el número de estudiantes que asumen que $\boldsymbol{g(x)}$ se estabiliza en $\boldsymbol{x = 2}$, punto en donde esta condición no se satisface, aumentó hasta un 42.9% y por ello podemos decir, desde una perspectiva de conjunto, que en esto momento coexisten dos concepciones en los estudiantes: la que asocia los puntos máximo y mínimos de las funciones con sus puntos de estabilidad (85.71%), y la otra, que asocia los puntos vecinos de los puntos de estabilidad con esta condición (42.9%).
Haciendo un recuento de las respuestas a las preguntas 5 del Cuestionario 1, y 5 del Cuestionario 2, podemos decir que después del diseño instruccional el 78.57% de los estudiantes asocian los puntos de estabilidad de las funciones con sus puntos máximos y mínimos, un 42.9% también considera que hay estabilidad en la vecindad de un punto

de estabilidad y un 14.3% aún sigue asociando la estabilidad de la función con los puntos donde ésta intercepta al eje de las abscisas.

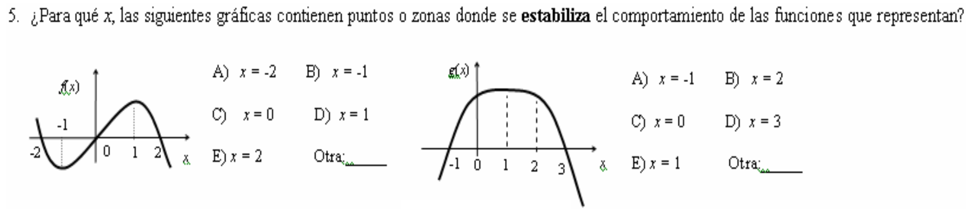


Fig. 4.197

TABLA 4.118 Puntos o intervalos donde una función estabiliza su comportamiento	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Una función se estabiliza en los puntos máximos y mínimos de su gráfica	7.14%	85.71%
Una función se estabiliza en los puntos donde la gráfica intercepta al eje *x*	28.6%	14.3%
Una función se estabiliza en la vecindad de un punto máximo	21.43%	42.9%
Una función se estabiliza en $x = 0$	50%	–

d. Concepciones relativas a la ubicación y al comportamiento de las funciones

Función positiva y creciente. En el pre–test, todos los estudiantes eligieron la gráfica de la función del inciso A para una función creciente y positiva, siendo este un indicador muy halagüeño. Sin embargo, las gráficas de los incisos C y E que también satisfacen las condiciones, solo son seleccionadas por un 50% y un 7.14% respectivamente. De hecho, solo 1 estudiante (7.14%) seleccionó a la vez las gráficas A, C y E. Nótese que un 14.3% de los estudiantes seleccionaron la gráfica del inciso D la cual es efectivamente creciente pero tiene una zona en la que sus imágenes son negativas pero para valores positivos de ***x***. De estas respuestas se percibe una relación muy privilegiada que establecen los estudiantes entre una función con imágenes positivas y además creciente, con funciones que tienen abscisas positivas; cuando la gráfica de la función es creciente pero tiene algunas abscisas negativas, como es el caso de la gráfica del inciso C, la relación coexistente entre función positiva y creciente que establecen los estudiantes, se debilita; se debilita aún más si todas las abscisas son negativas como es el caso de la gráfica del inciso E. De estas respuestas se conjetura que, para decidir, los estudiantes ponderan más el signo de la abscisa que el de la ordenada.

En el post–test todos los estudiantes prefirieron las gráficas A y C como positivas y crecientes y un 57.14% de ellos optaron también por la gráfica E, la cual además de ser positiva y creciente, al estar en el segundo cuadrante tiene abscisas negativas. Esta última cifra creemos que es una evidencia de que en algunos estudiantes, aún después del curso, persiste la relación entre funciones positivas y crecientes con aquellas cuyas abscisas son positivas.

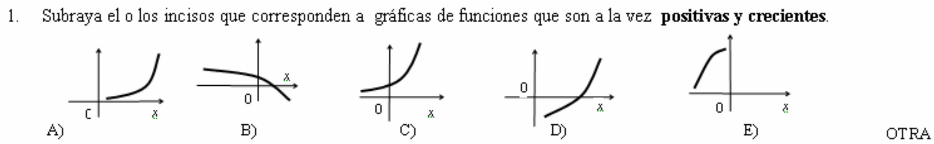


Fig. 4.198 Pregunta 1

TABLA 4.119 Función positiva y creciente	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	7.14%	100%
La función es positiva y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	42.8%	42.8%
La función es positiva y creciente cuando, además de ser creciente, posee abscisas positivas	7.14%	–
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	14.3%[11]

Función negativa y creciente. En el pre–test los estudiantes tienen marcada preferencia por la gráfica que tiene ambas coordenadas negativas (gráfica D) que fue seleccionada por un 64.3%. Las preferencias disminuyen para la gráfica que es, en efecto, creciente y tiene abscisas tanto negativas como positivas (gráfica B) pues la seleccionaron el 42.86%; un porcentaje un poco menor que éste (el 35.71%) seleccionó la gráfica E que es creciente, negativa pero que tiene todas sus abscisas positivas. En esta última respuesta subyace una concepción tal que asocia a las funciones crecientes y negativas con aquellas gráficas que, en efecto crecen, pero que sólo tienen abscisas negativas por sobre el signo de sus ordenadas. Como se puede observar las gráficas B, D y E son las que satisfacen las dos condiciones y sin embargo solo un estudiante (el 7.14%) seleccionó estas tres opciones.

En el post–test la preferencia por la gráfica D, cuyas dos coordenadas son negativas se ve incrementada a un 85.71% y esta misma proporción de estudiantes optan por la gráfica E, que al igual que la D cumple con las dos condiciones, pero cuyas abscisas son positivas. La gráfica B es seleccionada por cerca de un 80%. Ya en este momento un 64.3% de los estudiantes manifiestan que las gráficas B, D y E son negativas y crecientes. Estos números muestran que al final, todavía algunos estudiantes conservan la concepción alternativa inicial.

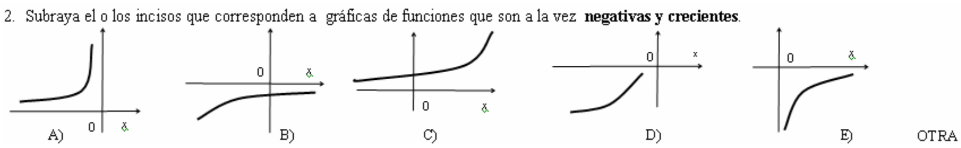


Fig. 4.199 Pregunta 2

[11] Concepción detectada durante la entrevista

TABLA 4.120 Función negativa y creciente	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es negativa y creciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	35.71	64.3%
La función es negativa y creciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	28.6%	14.3%
La función es negativa si comienza a trazarse abajo del eje *x*, y es creciente si sube, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	14.3%[12]
La función es negativa y creciente cuando, tiene abscisas negativas.	7.14%	–

Función positiva y decreciente. En el pre–test, la mayoría de los estudiantes prefieren la gráfica C, el 71.43%, pues tiene ambas coordenadas positivas y en efecto es decreciente. Sin embargo, también las gráficas A y E reúnen las condiciones solicitadas pero fueron elegidas por un porcentaje menor de estudiantes, 21.42% la primera y 7.14% la segunda. En este caso se percibe una concepción tal que privilegia solo las abscisas de la gráfica, pues en C son positivas. También llama la atención que el 14.3% de los estudiantes manifiestan, mediante sus respuestas, estar de acuerdo en que la gráfica D satisface las condiciones; ésta efectivamente es decreciente, pero negativa, aunque sus abscisas son positivas. Esta última propiedad pesó más en la decisión que tomaron. Ninguno de los estudiantes eligieron las tres gráficas de funciones positivas y decrecientes, A, C y E.

En el post–test todos los estudiantes decidieron que la gráfica A es positiva y decreciente y un 92.86% seleccionó la gráfica C. Un porcentaje ligeramente menor a los dos anteriores, pero que quizá es un indicativo de que el signo de las abscisas se sigue asociando al signo de las funciones, un 85.71%, decide que E también es la gráfica de una función positiva y decreciente. La preferencia por la gráfica D, negativa y decreciente pero con abscisas positivas fue nula después del diseño instruccional. En esta etapa un 78.57% de los estudiantes consideran que las gráficas A, C y E son positivas y decrecientes.

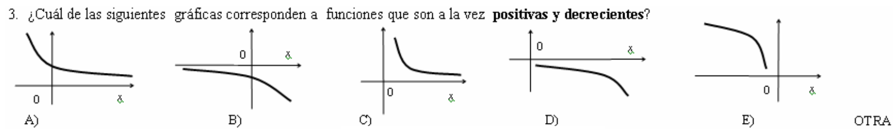


Fig.4.200 Pregunta 3

[12] Concepción detectada durante la entrevista

TABLA 4.121 Función positiva y decreciente	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es positiva y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, cuando crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	7.14%	85.71%
La función es positiva y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas positivas	71.43%	7.14%
La función es positiva si comienza a trazarse arriba del eje *x*, y es decreciente si baja, sin importar el sentido del cambio de las abscisas	–	14.3%[13]

Función negativa y decreciente. En el pre–test, la mayoría de los estudiantes prefieren la gráfica E (93.86%); ésta tiene coordenadas en x y y negativas y además, en efecto decrece. La segunda en preferencias fue D (28.57%) y compartiendo el lugar, B fue seleccionada también por un 28.57%. Obsérvese que la diferencia en el nivel de preferencias de la gráfica E cuyas abscisas y ordenadas son negativas respecto de las otras dos que cumplen también con estas condiciones son del orden del 65% por lo que se percibe la presencia de una concepción tal que asocia funciones con abscisas negativas con funciones negativas y decrecientes. Solo un 14.3% de los estudiantes seleccionaron las tres gráficas B, D y E.

En contraste, en el post–test las preferencias por las gráficas negativas y decrecientes B, D y E son 92.86%, 100% y 100% respectivamente, en donde un 92.86% de los estudiantes seleccionaron a las gráficas de acuerdo a las concepciones promovidas por la incidencia instruccional.

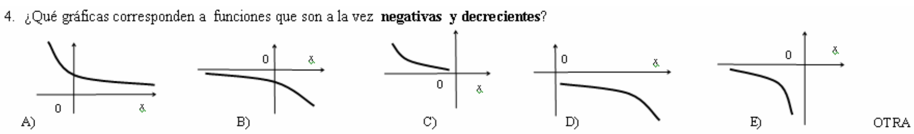


Fig. 4.201 Pregunta 4

TABLA 4.122 Función negativa y decreciente	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función es negativa y decreciente cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	14.3%	92.86%
La función es negativa y decreciente cuando, además de cumplir con estas dos condiciones, posee abscisas negativas	65.3%	–
La función es negativa y decreciente cuando posee abscisas negativas	7.14%	–

e. Concepciones manifestadas usando los registros analítico y gráfico

[13] Resultado obtenido durante la entrevista

Funciones que cumplen con las condiciones: $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. En el momento del pre–test, en la pregunta 1 del Cuestionario 3, las preferencias más altas manifestadas por los estudiantes fueron por las gráficas A, B y E (Fig. 4.202), con porcentajes iguales del orden del 35.71% (ver TABLA 4.123). De estas tres gráficas solo A y E cumplen con las condiciones establecidas y la gráfica B no; sin embargo, la gráfica B en su primera parte tiene abscisas negativas y posteriormente tiene abscisas positivas característica que se puede expresar a través de $x < 0$ y $x > 0$. Ningún estudiante seleccionó simultáneamente las gráficas A, C, E, correspondientes a las condiciones exigidas.

En el post–test, se manifiesta una fuerte variación en los números, pues las gráficas A, C y E, que cumplen con la ubicación y el comportamiento señalado son seleccionados en los porcentajes 85.71%, 71.43% y 85.71% respectivamente; 8 de los estudiantes seleccionaron simultáneamente las gráficas A, C y E (57.14%) y ninguno de ellos manifestó preferencia por alguna de las otras gráficas.

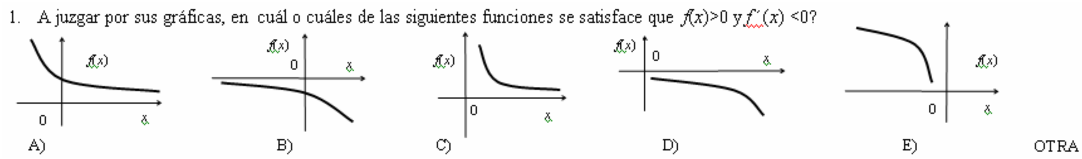


Fig. 4.202

TABLA 4.123 Función que cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	50%
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $x < 0$ y otra parte que cumple con $x > 0$	28.6%	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$cuando, además de cumplir con estas condiciones cumple con $x > 0$	7.14%	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando cumple con $f(x) > 0$ y $x < 0$	7.14%	–
La función cumple con las condiciones $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ cuando cumple con $f(x) < 0$	7.14%	

Funciones que cumplen con las condiciones: $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. En la pregunta 2 del Cuestionario 3 (Fig. 4.203), en el momento del pre–test un 57.14% de los estudiantes eligieron la gráfica C (ver TABLA 4.124), cuya ubicación y comportamiento no corresponde a las expresiones especificadas, pero en donde se observa que, una primera parte de $g(x)$ queda en el segundo cuadrante con sus abscisas negativas ($x < 0$) y la segunda parte de $g(x)$ se encuentra en el primer cuadrante, es decir, tiene abscisas positivas ($x > 0$). Ninguno de los estudiantes eligió simultáneamente las tres gráficas, B, D y E que cumplían con las condiciones especificadas.

En el post–test, por el contrario las gráficas B, D y E son elegidas por un 64.3%, un 78.57% y un 78.57% respectivamente; las preferencias por la gráfica de la función C, caen hasta un 7.14%; 8 estudiantes, un 57.14% del total, seleccionaron las gráficas B, D y E.

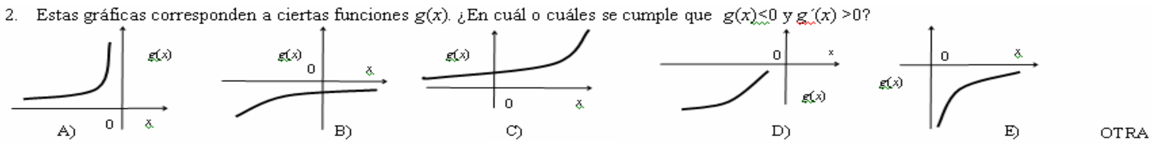


Fig. 4.203

TABLA 4.124 Función que cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	57.14%
La función cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ cuando, su gráfica tiene una parte que cumple con $x < 0$ y otra parte que cumple con $x > 0$	57.14%	7.14%
La función cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ cuando, su gráfica cumple con $x < 0$ y con $g(x) > 0$	7.14%	–
La función cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ cuando, su gráfica cumple con $x < 0$	7.14%	–
La función cumple con las condiciones $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$ cuando, su gráfica, además de cumplir con estas condiciones cumple con $x < 0$	7.14%	–

Funciones que cumplen con la condiciones: $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$. Cuando se indaga en torno de las concepciones de los estudiantes relativas a las funciones que cumplen con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$ (Fig. 4.204), en el pre–test se manifiesta una marcada preferencia por la gráfica correspondiente al inciso A, con un 71.43% (ver TABLA 4.125), función que al igual que las de los incisos C y E que son seleccionadas por un 35.71% y un 0% respectivamente, cumple con las condiciones señaladas. Sin embargo, la gráfica A tiene la particularidad de que sus abscisas cumplen con $x > 0$; es muy posible que la selección de esta gráfica esté asociada con esta característica. Ningún estudiante seleccionó simultáneamente las gráficas A, C y E.

En el post–test la gráfica A es seleccionada por todos los estudiantes y las gráficas C y E, que también cumplen con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$, son elegidas por un 78.57% y un 64.3% respectivamente. Es notable la diferencia que existe entre las preferencias de la gráfica A y las gráficas C y E; la atribuimos a la existencia, todavía después del diseño instruccional, de la concepción alternativa que se había manifestado antes del mismo. El total de estudiantes que seleccionaron simultáneamente las gráficas A, C y E ascienden a un 50% del total.

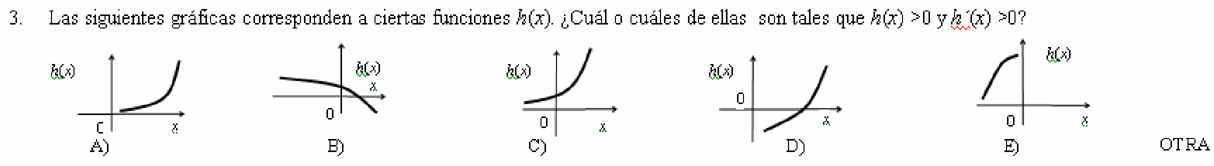
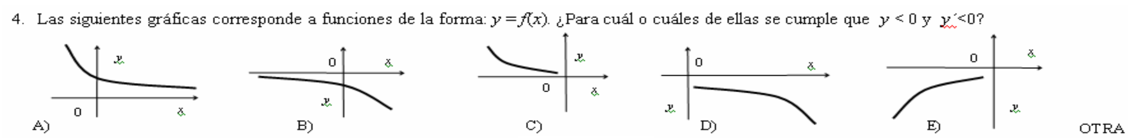


Fig. 4.204

TABLA 4.125 Función que cumple con las condiciones $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran arriba del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, crecen sus ordenadas (aceptable)	–	50%
La función cumple con las condiciones $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$ cuando cumple con $x > 0$	71.43%	35.7%

Funciones que cumplen con la condiciones: $y < 0$ y $y' < 0$. En la pregunta 4 del Cuestionario 3 (Fig. 4.205), se investigan las ideas de los estudiantes en torno de las funciones que cumplen con $y < 0$ y $y' < 0$ y, en el pre–test son dos las funciones por las que los estudiantes mayormente se inclinan: las correspondientes a los incisos B y E, con un 42.9% en ambos casos (ver TABLA 4.126). De estas dos gráficas, solo B cumple con las condiciones establecidas pues la función del inciso E, es negativa y creciente; sin embargo, en ambos casos, las gráficas comienzan en el 3er cuadrante, es decir, sus abscisas en esta región son negativas; parecería que las condiciones $y < 0$ y $y' < 0$, se están vinculando con las condiciones $x < 0$ y $y < 0$.

Después del diseño instruccional las funciones que acaparan las más altas preferencias son las correspondientes a los incisos B y D, aquellas que cumplen con $y < 0$ y $y' < 0$, con porcentajes del 78.57% y 85.71% respectivamente. El total de estudiantes que seleccionaron B y D fueron 9 (un 64.3%).



Fig

TABLA 4.126 Función que cumple con las condiciones $y(x) < 0$ y $y'(x) < 0$	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La función cumple con las condiciones $y(x) < 0$ y $y'(x) < 0$ cuando, sus ordenadas se encuentran abajo del eje de las abscisas y, a medida que crecen sus abscisas, decrecen sus ordenadas (aceptable)	–	64.3%
La función cumple con las condiciones $y(x) < 0$ y $y'(x) < 0$	42.9%	28.575

cuando cumple con $x < 0$ y $y < 0$		
La función cumple con las condiciones $y(x) < 0$ y $y'(x) < 0$ cuando cumple con $x < 0$	7.14%	–

Puntos que cumplen con la condición: $f'(x) = 0$. En la pregunta 5 del Cuestionario 3 (ver Fig. 4.206), en el pre–test, un 71.43% de los estudiantes consideran que la estabilidad de $f(x)$ sucede en $x = 0$; ninguno de los estudiantes asocia el máximo y el mínimo de la función con esta propiedad (ver TABLA 4.127).

En el post–test, solo un 28.57% de los estudiantes continúan asociando $x = 0$ con la estabilidad de la función; en este momento un 71.43% de los estudiantes vinculan la estabilidad de $f(x)$ con sus máximos y mínimos.

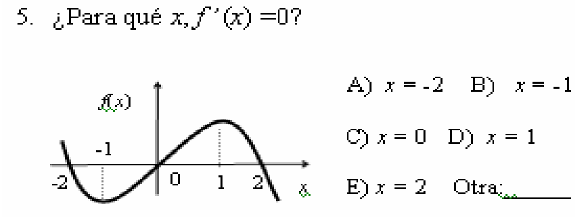


Fig. 4.206

TABLA 4.127 Puntos que cumplen con la condición $f'(x) = 0$	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
Los puntos que cumplen con la condición $f'(x) = 0$ son los máximos y mínimos de la función (aceptable)	–	71.43%
En $x = 0$ se cumple la condición $f'(x) = 0$	71.43%	28.57%
En sus intersecciones con el eje x se cumple la condición $f'(x) = 0$	7.14%	–

Determinación de la $f'(x)$ en un punto dado. En la pregunta 6 del Cuestionario 3 (Fig. 4.207), en el pre–test, un 71.4% de los estudiantes consideran que el valor de la derivada en $x = 1$ es el valor de la ordenada en ese punto (ver TABLA 4.128); ninguno de los estudiantes asocia el valor de la derivada con la pendiente de la tangente a la curva en el punto en cuestión.

En el post–test, un 57.14% de los estudiantes aún sigue evaluando la derivada de la función en $x = 1$ con la ordenada en ese punto y solo un 21.43% de los estudiantes asocia este valor con la pendiente de la tangente a la curva en $x = 1$.

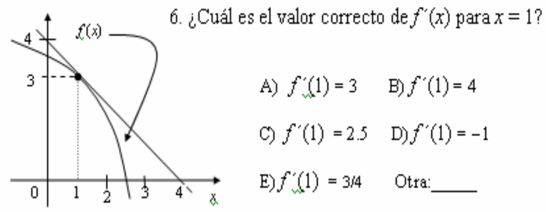


Fig. 4.207

TABLA 4.128 $f'(x)$ en un punto dado	Porcentajes de estudiantes que presentaron concepciones aceptables y concepciones alternativas	
	Pretest	**Postest y entrevistas**
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la pendiente de la tangente a la función en ese punto (aceptable)	–	21.43%
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la $f(x)$ en ese punto	71.4%	57.145
La $f'(x)$ en un punto dado es igual a la abscisa del punto en donde la tangente cruza al eje x	7.14%	–

f. Análisis comparativos de las preguntas paralelas. Las planteadas verbalmente y las planteadas analíticamente

Función positiva y creciente y función que cumple con. $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$. Cuando revisamos las respuestas dadas (ver TABLA 4.123) por los estudiantes a la pregunta 1 del Cuestionario 2 (Fig. 4.198), en el pre–test, si la pregunta se plantea verbalmente, el 100% de los estudiantes seleccionan la opción A cuya abscisas son positivas, y las gráficas de los incisos C y E que también satisfacen las condiciones, solo son seleccionadas por un 50% y un 7.14% respectivamente; los estudiantes ponderan más el signo de la abscisa que el de la ordenada para hacer su elección; solo uno de los estudiantes seleccionó las gráficas A, C y E. En el post–test todos los estudiantes identificaron las gráficas A y C como positivas y crecientes y un 57.14% de ellos optaron también por la gráfica E. Cuando la pregunta se planteó analíticamente, en el pre–test se manifiesta una marcada preferencia por la gráfica correspondiente al inciso A, con un 71.43% (ver TABLA 4.125), función que al igual que las de los incisos C y E que son seleccionadas por un 35.71% y un 0% respectivamente, cumple con las condiciones señaladas, pero que, como ya se explicó líneas arriba, tiene la particularidad de que sus abscisas cumplen con $h(x) > 0$; es muy posible que la selección de esta gráfica esté asociada con esta característica. Ningún estudiante seleccionó simultáneamente las gráficas A, C y E. En el post–test la gráfica A es seleccionada por todos los estudiantes y las gráficas C y E, que también cumplen con $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$, fueron elegidas por un 78.57% y un 64.3% respectivamente. El total de estudiantes que seleccionaron simultáneamente las gráficas A, C y E ascienden a un 50% del total. De acuerdo a los resultados anteriores, el nivel alcanzado de respuestas aceptables fue más alto cuando la pregunta se formuló verbalmente que cuando se hizo analíticamente, tanto antes como después del diseño instruccional.

Registro Verbal **Función positiva y creciente**		Registro Analítico **Función que cumple con. $h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$**	
Pre - test	**Post – test**	**Pre - test**	**Post – test**
7.14%	0%	57.14%	50%

Tabla 4.129

Función negativa y creciente y función que cumple con $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$. En el pre–test, cuando la pregunta se hace usando lenguaje verbal, los estudiantes tienen marcada preferencia por la gráfica que tiene ambas coordenadas negativas (gráfica D) que fue seleccionada por un 64.3%. Las preferencias disminuyen para la gráfica que es, en efecto, creciente y tiene abscisas tanto negativas como positivas (gráfica B) pues la seleccionaron el 42.86%; un porcentaje un poco menor que éste (el 35.71%) seleccionó la gráfica E que es creciente pero que no es negativa sino que todas sus abscisas son negativas. En esta última respuesta subyace una concepción tal que asocia a las funciones crecientes y negativas con aquellas gráficas que, en efecto crecen, pero que sólo tienen abscisas negativas por sobre el signo de sus ordenadas. Solo un estudiante (el 7.14%) seleccionó estas tres. En el post–test la preferencia por la gráfica D, cuyas dos coordenadas son negativas se ve incrementada a un 85.71% y esta misma proporción de estudiantes optan por la gráfica E, que al igual que la D cumple con las dos condiciones, pero cuyas abscisas son positivas. La gráfica B es seleccionada por cerca de un 80%. Ya en este momento un 64.3% de los estudiantes manifiestan que las gráficas B, D y E son negativas y crecientes. Luego, cuando el cuestionamiento se plantea usando lenguaje analítico, (Fig. 4.203), en el momento del pre–test un 57.14% de los estudiantes eligieron la gráfica C (ver TABLA 4.124), cuya ubicación y comportamiento no corresponde a las condiciones especificadas, pero en donde se observa que, una primera parte de $g(x)$ queda en el segundo cuadrante con sus abscisas negativas ($x < 0$) y la segunda parte de $g(x)$ se encuentra en el primer cuadrante, es decir, tiene abscisas positivas ($x > 0$). Ninguno de los estudiantes eligió simultáneamente las tres gráficas, B, D y E que cumplían con las condiciones especificadas. Después del diseño instruccional, por el contrario, las gráficas B, D y E son elegidas por un 64.3%, un 78.57% y un 78.57% respectivamente; las preferencias por la gráfica de la función C, caen hasta un 7.14%; un 57.14% del total de estudiantes, seleccionaron las gráficas B, D y E. Igual que en el caso anterior, tanto en el pre–test como en el post–test el nivel de respuestas aceptables alcanzado fue más alto a partir de un planteamiento verbal de la pregunta que cuando ésta se formuló analíticamente.

Registro Verbal **Función negativa y creciente**		Registro Analítico **Función que cumple con. $g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$**	
Pre - test	**Post – test**	**Pre - test**	**Post – test**
7.14%	64.3%	0%	57.14%

Función positiva y decreciente y función que cumple con $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. En el pre–test, al hacer la pregunta usando lenguaje verbal, la mayoría de los estudiantes prefieren la gráfica C, el 71.43%, pues tiene ambas coordenadas positivas y en efecto es creciente. Sin embargo, también las gráficas A y E reúnen las condiciones solicitadas pero fueron elegidas por un porcentaje menor de estudiantes, 21.42% la primera y 7.14% la segunda. En este caso se percibe una concepción tal que privilegia solo las abscisas de la gráfica, pues en C son positivas. Ninguno de los estudiantes eligieron las tres gráficas de funciones positivas y decrecientes, A, C y E. En el post–test todos los estudiante decidieron que la gráfica A es positiva y decreciente y un 92.86% seleccionó la gráfica C. Un porcentaje ligeramente menor a los dos anteriores, un 85.71% decide que E también es la gráfica de una función positiva y decreciente. En esta etapa un 78.57% de los estudiantes conciben que las gráficas A, C y E son positivas y decrecientes. Si la pregunta se hace usando lenguaje analítico, en el momento del pre–

test, las preferencias más altas manifestadas por los estudiantes fueron por las gráficas A, B y E (Fig. 5.196), con iguales porcentajes del orden del 35.71% (ver TABLA 4.123). De estas tres gráficas solo A y E cumplen con las condiciones establecidas y la gráfica B no; sin embargo, la gráfica B en su primera parte tiene abscisas negativas y posteriormente tiene abscisas negativas condición que se puede expresar a través de $\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$. Ningún estudiante seleccionó simultáneamente las gráficas A, C, E, correspondientes a las condiciones especificadas. Después del diseño instruccional, las gráficas A, C y E, que cumplen con la ubicación y el comportamiento señalado son seleccionados en los porcentajes 85.71%, 71.43% y 85.71% respectivamente, es decir, un 57.14% de los estudiantes seleccionaron simultáneamente las gráficas A, C y E y ninguno de ellos manifestó preferencia por alguna de las otras gráficas. Por tercera ocasión, el nivel de respuestas aceptables alcanzado fue más alto cuando la pregunta se planteó verbalmente que cuando se hizo analíticamente, lo mismo en el pre–test que en el post–test.

Registro Verbal **Función con imagen positiva y decreciente**		Registro Analítico **Función que cumple con. $f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$**	
Pre - test	**Post – test**	**Pre - test**	**Post – test**
0%	78.57%	0%	57.14%

Función negativa y decreciente y función que cumple con $y < 0$ y $y' < 0$. Si la pregunta se formula utilizando lenguaje verbal, en el pre–test, la mayoría de los estudiantes prefieren la gráfica E (93.86%); ésta tiene coordenadas en $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ negativas y además, en efecto decrece. La segunda en preferencias fue D (28.57%) y B fue seleccionada también por un 28.57%. Obsérvese que la diferencia en el nivel de preferencias de la gráfica E cuyas abscisas y ordenadas son negativas respecto de las otras dos que cumplen también con estas condiciones son del orden del 65% por lo que se percibe la presencia de una concepción tal que asocia funciones con abscisas negativas con funciones negativas y decrecientes. Solo un 14.3% de los estudiantes seleccionaron las tres gráficas B, D y E. En contraste, en el post–test las preferencias por las gráficas negativas y decrecientes B, D y E son 92.86%, 100% y 100% respectivamente, en donde un 92.86% de los estudiantes seleccionaron a las gráficas de acuerdo a las concepciones promovidas por el curso. Al formular la pregunta haciendo uso de lenguaje analítico, en el pre–test son dos las funciones por las que los estudiantes mayormente se inclinan: las correspondientes a los incisos B y E, con un 42.9% en ambos casos (ver TABLA 4.126). De estas dos gráficas, solo B cumple con las condiciones establecidas pues la función del inciso E, es negativa pero creciente; sin embargo, en ambos casos, las gráficas comienzan en el 3er cuadrante, es decir, sus abscisas en esta región son negativas; parecería que las condiciones $\boldsymbol{y} < \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{y}' < \mathbf{0}$, se están vinculando con las condiciones $\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{y} < \mathbf{0}$. Después de la incidencia instruccional las funciones que acaparan las más altas preferencias son las correspondientes a los incisos B y D, aquellas que cumplen con $\boldsymbol{y} < \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{y}' < \mathbf{0}$, con porcentajes del 78.57% y 85.71% respectivamente. El total de estudiantes que seleccionaron B y D fueron 9 (un 64.3%). En este caso, como en los anteriores, el nivel de respuestas aceptables es más alto, tanto en el pre–test como en el post–test, cuando la pregunta se formula verbalmente, que cuando se plantea analíticamente.

Registro Verbal **Función negativa y decreciente**		Registro Analítico **Función que cumple con. $y < 0$ y $y' < 0$**	
Pre-test	**Post–test**	**Pre−test**	**Post–test**
14.3%	92.86%	0%	64.3%

Función que no crece ni decrece y función que cumple con $f'(x) = 0$ Cuando el planteamiento es verbal, en la respuesta dada a la pregunta 5 del Cuestionario 2 (Fig. 4.196) en el pre–test para 42.9% de los estudiantes $f(x)$ se estabiliza en $x = 0$, punto de intersección de la función con el eje de las abscisas (ver TABLA 4.117). El 14.3% de los alumnos considera que $f(x)$ se estabiliza en $x = 2$, otro de los puntos donde la función intercepta al eje x; para 42.9% de los estudiantes esta función se estabiliza en $x = 1$, respuesta que es aceptable y solo un 7.14% de ellos conciben que $f(x)$ se estabiliza en $x = -1$, respuesta que también es aceptable. Después del diseño instruccional, un 85.71% y un 92.86% consideran que $f(x)$ se estabiliza en $x = -1$ y $x = 1$ respectivamente, puntos que son mínimo y máximo y de la función. Al hacer la indagación de las ideas usando lenguaje analítico, en la pregunta 5 del Cuestionario 3 (ver Fig. 4.206), en el pre–test, un 71.43% de los estudiantes asocian la estabilidad de $f(x)$ con $x = 0$; ninguno asocia el máximo y el mínimo de la función con esta propiedad (ver TABLA 4.127). En el post–test, solo un 28.57% de los estudiantes continúan asociando $x = 0$ con la estabilidad de la función; en este momento un 71.43% de los estudiantes vinculan la estabilidad de $f(x)$ con sus máximos y mínimos. En este caso, al igual que en todos los anteriores, el nivel de aceptabilidad de las respuestas obtenidas planteando la pregunta verbalmente, es más alto que el obtenido a partir de un planteamiento analítico de la pregunta.

Registro Verbal **Función que no crece ni decrece**		Registro Analítico **Función que cumple con $f'(x) = 0$**	
Pre-test	**Post–test**	**Pre−test**	**Post–test**
7.14%	92.86%	0%	71.43%

g. Análisis comparativo global de las respuestas obtenidas en el pre–test y en el post–test a las preguntas paralelas. Las planteadas verbalmente y las planteadas analíticamente

De acuerdo a todos los resultados anteriores, en todas las preguntas paralelas, el nivel de aceptabilidad de las respuestas dadas a las preguntas planteadas verbalmente fue más alto que el de las respuestas obtenidas cuando la pregunta se formuló usando lenguaje analítico.

Capítulo V

CONCLUSIONES GENERALES

La presente investigación ha sido desarrollada con el propósito de estudiar la estabilidad o cambio de las concepciones alternativas en los estudiantes, respecto del análisis de funciones bajo condiciones instruccionales determinadas. Investigaciones previas han dado cuenta de la existencia (incluso la persistencia) de una amplia gama de concepciones de esta naturaleza en estudiantes de distintos niveles, incluidos aquellos que ya habían estudiado cálculo y en profesores de matemáticas y física.

En la revisión que hicimos a la currícula de matemáticas de nuestro país, encontramos que desde el tercer año de secundaria en los programas se plantea como una de las actividades fundamentales la del análisis de funciones, por tanto se espera que los estudiantes a partir de ese nivel de escolaridad tengan un apropiado desarrollo de las habilidades relativas a esa temática. Sin embargo, existen numerosas evidencias de las que hicimos un amplio recuento en el Capítulo 1, que demuestran que la realidad es muy diferente de lo esperado.

Interesados en esta problemática específica, pero siempre en el contexto global que nos brinda el campo del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, nos planteamos estudiar los cambios o la persistencia de las concepciones alternativas relativas al análisis de funciones. Partimos del supuesto que un diseño instruccional que tuviera como escenario el salón de clase y que propiciara la creación de un ambiente rico en formas gráficas permitiría hacer observaciones y conjeturas sobre estas cuestiones. En términos generales, las estrategias de enseñanza del diseño instruccional, buscaron que las concepciones alternativas que inicialmente manifestaron los estudiantes entraran en conflicto, para lograr fundamentalmente tres propósitos: explicitar su teoría inicial, que los estudiantes se hicieran conscientes de que ésta no funcionaba y que a su vez, tomaran conciencia de que la nueva teoría que se les proporcionaba funcionaba mejor que su antigua teoría.

Cuando los estudiantes analizaron la ubicación y comportamiento de gráficas de funciones de forma independiente, encontramos que, para identificar en dónde las imágenes de las funciones son positivas, antes del diseño instruccional al menos la mitad de los estudiantes concebían positiva a la imagen de una función en los intervalos con abscisas positivas. Después de haber puesto en práctica el diseño instruccional, en el post–test se observó que ninguno de los estudiantes conservó esta concepción y la mayoría de ellos identificó aceptablemente los intervalos. En condiciones digamos, ordinarias de enseñanza, las cosas en cuanto al cambio conceptual, son diferentes. La persistencia de concepciones, aunque en estudiantes más jóvenes (estudiantes de bachillerato) son distintas como se muestra en Dolores (2003), quien investigó las concepciones alternativas presentes en estos estudiantes y concluye que hay una tendencia a asociar la idea de función con imagen positiva si su gráfica está ubicada en la región donde las x son positivas sin importar que los puntos de la gráfica estén por *arriba* o por *debajo* del eje x; sólo atienden al signo de las abscisas para tomar la decisión. Incluso en los profesores las concepciones alternativas también se manifiestan. A este respecto en Dolores (2002) se encontró, investigando la presencia de estas concepciones en futuros profesores de matemáticas, que más de la mitad de ellos conciben que la imagen de una función es positiva si su gráfica está ubicada en la región donde las x (abscisas) son positivas sin importar que los puntos de la gráfica estuvieran en el primero o cuarto cuadrantes.

En la identificación de intervalos donde las imágenes de las funciones son negativas, previo al diseño instruccional, la mayoría de los estudiantes las asociaron con los intervalos de la función donde tiene abscisas negativas. Después de la puesta en escena del diseño instruccional, ninguno de los estudiantes manifestó tal concepción y la mayoría localizó aceptablemente las funciones con imágenes negativas. En contraste con estos cambios conceptuales, Dolores (2003), investigando las concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato que ya habían estudiado el tema bajo un esquema de enseñanza tradicional, encontró que para ellos cierta función $f(x)$ tiene una imagen negativa preferentemente donde tiene abscisas negativas. La persistencia de las concepciones alternativas se encuentra presente incluso en quienes se están preparando para ser profesores de matemáticas. Dolores (2002), investigando las concepciones de estudiantes donde la mayoría de ellos eran profesores de matemáticas en formación, concibieron una función con imagen negativa, si sus abscisas son negativas.

Para el caso de las funciones crecientes, antes de poner en práctica las estrategias de enseñanza del diseño instruccional, casi una tercera parte de los estudiantes concibieron a una función como creciente en los intervalos donde ésta tiene imagen positiva y menos de la tercera parte las identificaron aceptablemente. Después de aplicar el diseño instruccional, la concepción alternativa inicialmente identificada respecto del crecimiento de las funciones fue manifestada por un solo estudiante, el resto identificó a las funciones crecientes aceptablemente.

Este cambio contrasta con lo reportado por Dolores, Solache y Díaz (2002) quienes encontraron, al poner en escena un diseño instruccional similar al usado en nuestra investigación, que el 48% de los estudiantes de bachillerato al terminar la experiencia consideró la función con imagen positiva como equivalente con la noción de función creciente. Así mismo, Dolores (2003), al explorar concepciones en estudiantes de bachillerato que ya habían estudiado el análisis de funciones en condiciones ordinarias de enseñanza, encontró que éstos manifiestan tendencia muy marcada a relacionar las funciones crecientes con aquellas cuyas imágenes son positivas. La fuerte estabilidad de las concepciones alternativas se pone también de manifiesto en las investigaciones realizadas con profesores de matemáticas. Dolores y Guerrero (2002), al realizar un estudio exploratorio sobre el comportamiento variacional de funciones elementales a través de sus representaciones gráficas y analíticas en una población de profesores de matemáticas, que existió tendencia a asociar la condición: $f(x + h) - f(x) > 0$, con la región donde la gráfica de la función estaba por arriba del eje de las x, región donde se cumple que $f(x) > 0$. Dolores (2002) al trabajar con futuros profesores de matemáticas para indagar sus concepciones respecto del análisis de funciones, observó claramente la tendencia a asociar las regiones de las gráficas de las funciones donde tienen imágenes positivas con la idea de crecimiento.

En nuestra investigación, en el caso de las funciones decrecientes, antes de los procesos de incidencia instruccional, una tercera parte de los estudiantes las asoció con los intervalos en donde la imagen de la función es negativa y una proporción un poco menor las vinculó con intervalos en donde la función tiene abscisas negativas. Con posterioridad a la puesta en escena del diseño instruccional, la mayoría las identificó aceptablemente y solo un estudiante conservó las concepciones alternativas iniciales.

Estos resultados difieren de los obtenidos por Dolores, Solache y Díaz (2002) quienes, poniendo en escena un diseño instruccional parecido, encontraron que, estudiantes que terminan el bachillerato y algunos que principian la universidad asocian, en un 56%, la noción de imagen de una función negativa con la de función decreciente. A su vez, los hallazgos de Dolores (2003) contrastan con nuestros resultados. Él investigó en estudiantes de bachillerato que ya habían abordado el análisis de funciones en condiciones ordinarias de enseñanza, el estado de sus concepciones respecto de este tema, y encontró que para ellos el decrecimiento está asociado con la gráfica de funciones con imágenes negativas. Esta situación se repite cuando las investigaciones son llevadas a cabo con profesores de matemáticas. Dolores y Guerrero (2002), al realizar un estudio exploratorio sobre el comportamiento variacional de funciones elementales a través de sus representaciones gráficas y analíticas, encontraron que profesores de matemáticas asociaron la condición: $f(x + h) - f(x) < 0$, con la región donde la gráfica de la función estaba por debajo del eje de las x, región donde se cumple que $f(x) < 0$. En esta misma dirección Dolores (2002), investigando en futuros profesores de matemáticas el estado de sus concepciones respecto del análisis de funciones, encontró que éstos asociaron las regiones de las gráficas de las funciones donde tienen imágenes negativas con la idea de decrecimiento.

Cuando los estudiantes analizaron los puntos en donde una función no crece ni decrece, previo a la puesta en práctica del diseño, solo un estudiante identificó estos puntos aceptablemente; casi la mitad prefirió por los ceros de la función. En contraste, después del proceso instruccional, más de la mitad de los estudiantes consideró que esto sucede en los puntos máximos y mínimos de las funciones, inclusive identificaron uno de los puntos de estabilización de la función que no aparecía explícitamente entre las opciones que se ofrecían para hacer la elección, lo que denotó que en los estudiantes que lo identificaron, hubo un proceso importante de generalización en sus concepciones; una proporción pequeña conservó la concepción alternativa inicial consistente en asociar a los ceros de una función con los puntos en donde ésta no crece ni decrece.

Estos resultados difieren de lo encontrado por Dolores, Solache y Díaz (2002) con estudiantes de bachillerato y principiantes universitarios a partir de la puesta en escena de un diseño instruccional parecido al utilizado en nuestra investigación, encontraron que, un 52% mostró concepciones tales como contestar que en donde $f(x)$ es cero, $f(x)$ tiene un máximo. Así mismo Dolores (2003), al investigar el estado de las concepciones de estudiantes de bachillerato que habían abordado el análisis de funciones en condiciones ordinarias de enseñanza, encontró que tienen preferencia por asociar la propiedad de no crecimiento ni decrecimiento de una función con los puntos donde la gráfica corta al eje de las ordenadas o al eje de las abscisas. A su vez, los resultados de nuestra investigación contrastan con lo encontrado por Dolores y Guerrero (2002) quienes, al trabajar con profesores de matemáticas encontraron que, éstos asociaron la expresión $f(x + h) - f(x) = 0$, con f continua y $h > 0$ preferentemente *pequeña*, con los puntos de corte de la gráfica con el eje de las x, es decir con las x donde $f(x) = 0$. La resistencia al cambio de las concepciones alternativas también se manifiesta en los resultados de Dolores (2002), quien encontró, investigando las concepciones relativas al análisis de funciones en una población de futuros profesores de matemáticas, que fue muy notoria la relación que establecieron los estudiantes entre la noción de estabilidad y los ceros de una función.

Cuando a los estudiantes se les plantearon actividades de análisis de funciones pero donde se requería atender simultáneamente ubicación y comportamiento, en este caso para las gráficas de funciones crecientes con imágenes positivas, antes de la puesta en escena del diseño instruccional, todos los estudiantes seleccionaron la gráfica creciente con imágenes positivas, y con abscisas positivas y las preferencias por las que no cumplían con el último criterio fueron sensiblemente más bajas. Esto evidencia la presencia de la concepción alternativa que asocia a las funciones con imágenes positivas y crecientes con funciones con imágenes positivas, crecientes y con abscisas positivas. Después de la aplicación del diseño instruccional, todos los estudiantes seleccionaron dos de las tres gráficas que cumplían con estos condiciones y la tercera de estas gráficas, ubicada en el segundo cuadrante, donde sus abscisas eran negativas solo fue seleccionada por poco más de la mitad de los estudiantes; creemos que esta fue la razón de su bajo nivel de preferencia, lo que denotaría que la concepción alternativa inicial consistente en asociar las gráficas de funciones con imágenes positivas y crecientes con intervalos donde las funciones tienen imágenes positivas, son crecientes y tienen abscisas positivas, aún se encontraba presente. La resistencia al cambio de esta concepción alternativa también se manifestó en los hallazgos de Dolores (2003) quien encontró, investigando las concepciones de estudiantes de bachillerato que ya habían abordado el estudio del análisis de funciones bajo un esquema de enseñanza tradicional, que hay una tendencia marcada a no considerar una función creciente con imagen positiva si su gráfica está ubicada en el segundo cuadrante (con abscisas negativas) aunque sea creciente.

Cuando nuestros estudiantes analizaron gráficas de funciones para seleccionar a las funciones crecientes con imágenes negativas, antes del diseño instruccional, de las tres gráficas que cumplían con estos condiciones, aquella que además de ser creciente y tener imagen negativa tenía abscisas negativas fue la que tuvo mayor nivel de preferencia, y para las otras dos fue menor y solo un estudiante seleccionó las tres gráficas simultáneamente. En contraste, después de las actividades del diseño instruccional, la mayoría eligió las gráficas que cumplían con las condiciones especificadas. Estos resultados difieren de lo encontrado por Dolores (2003) quien, al investigar las concepciones de estudiantes de bachillerato que ya habían estudiado el análisis de funciones bajo condiciones de enseñanza ordinarias, concluyó que ellos asocian las funciones crecientes y con imágenes negativas con aquellas gráficas de funciones que son crecientes, tienen imágenes negativas, y poseen abscisas negativas.

Al revisar las gráficas para seleccionar aquellas que representan a funciones con imágenes positivas y decrecientes, antes de aplicar el diseño instruccional, la mayoría de los estudiantes eligió la gráfica que, además de ser decreciente y tener imagen positiva, tenía abscisas positivas y las otras dos gráficas que cumplían estas condiciones fueron seleccionadas en cantidades mínimas, denotando así la fuerte presencia de la concepción alternativa consistente en asociar a las funciones decrecientes con imágenes positivas con las gráficas de funciones que además de ser decrecientes y tener imágenes positivas tienen abscisas positivas. Posterior a la puesta en escena del diseño, las tres gráficas que cumplían con estas condiciones fueron seleccionadas por la mayoría de los estudiantes. Este resultado es distinto del de Dolores (2003) quien, investigando las concepciones de estudiantes de bachillerato que ya habían estudiado el tema bajo un esquema de enseñanza tradicional, encuentra que, en su mayoría, manifiestan una concepción tal que no comparte que una función sea decreciente y tenga imagen positiva si está ubicada en el segundo cuadrante, aunque en efecto sea decreciente.

Por otra parte, antes de la puesta en práctica del diseño, la preferencia por la gráfica de la función decreciente con imagen negativa y que además tiene abscisas negativas fue muy alta y las otras dos que cumplen con las condiciones establecidas solo se seleccionaron en una mínima proporción, haciendo evidente la presencia de la concepción alternativa consistente en asociar las gráficas de funciones decrecientes con imagen negativa con gráficas de funciones decrecientes con imagen negativa, y con abscisas negativas. Después del diseño, los niveles de selección fueron casi del 100% por las gráficas que cumplían con estas dos condiciones. Estos resultados contrastan con los hallazgos de Dolores (2003) quien encontró, al investigar las concepciones de estudiantes de bachillerato que ya han abordado el estudio del análisis de funciones en un esquema tradicional de enseñanza, que cuando analizan gráficas de funciones decrecientes con imágenes negativas, se privilegia el signo de sus abscisas por sobre el signo de sus ordenadas.

Respecto de los puntos en donde una función se estabiliza, antes de aplicar el diseño instruccional, para casi la mitad de los estudiantes la función se estabiliza en $x = 0$, donde la ordenada intercepta al eje de las abscisas, y la cuarta parte de los estudiantes vinculó los ceros de la función con los puntos donde las funciones se estabilizan. Después del diseño, la mayoría de los estudiantes manifestó su preferencia por los puntos máximos y mínimos de la función; solo uno de los estudiantes continuó asociando los ceros de la función con los puntos de estabilización de la misma, aunque casi la mitad de los estudiantes asoció la estabilidad de la función con puntos en la vecindad de un punto de estabilización.

En lo relativo al análisis de los funciones planteando las preguntas en términos de la representación analítica y gráfica encontramos que, para las funciones que cumplen con las condiciones $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$, antes del proceso instruccional, las preferencias más altas manifestadas por los estudiantes fueron por tres gráficas, en donde, solo dos de ellas, cumplían con las condiciones establecidas y la tercera no; sin embargo, esta gráfica en su primera parte tiene abscisas negativas y posteriormente tiene abscisas positivas característica que se puede expresar a través de $\boldsymbol{x < 0}$ y $\boldsymbol{x > 0}$, que se encontraban presentes en $\boldsymbol{f(x) > 0}$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$; ningún estudiante seleccionó simultáneamente las gráficas que correspondían con las condiciones especificadas. Después del diseño instruccional, poco más de la mitad de los estudiantes seleccionó las tres gráficas que cumplían con las condiciones especificadas.

Para las funciones que cumplen con las condiciones $\boldsymbol{g(x) < 0}$ y $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ antes de la puesta en escena de las estrategias del diseño instruccional, poco más de la mitad de los estudiantes parecieron hacer su elección en base a un criterio similar al del caso anterior. Después de la incidencia instruccional poco más de la mitad de los estudiantes seleccionó simultáneamente las gráficas que cumplían las condiciones mencionadas, destacando además que la preferencia por la gráfica que cumplía con las condiciones $\boldsymbol{x < 0}$ y $\boldsymbol{g(x) > 0}$ fue una pequeña proporción del total de estudiantes, lo cual constituye un indicio de que la concepción alternativa inicial aún se encontraba presente.

Por otra parte, para las funciones que cumplen con las condiciones $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$, antes de la puesta en práctica del diseño, la mayoría de los estudiantes eligieron la gráfica que cumplía con $\boldsymbol{h(x) > 0}$, $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ y $\boldsymbol{x > 0}$, evidenciando con ello una concepción alternativa a partir de la cual se establece una asociación entre funciones que cumplen con $\boldsymbol{h(x) > 0}$ y $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ con las que cumplen con $\boldsymbol{h(x) > 0}$, $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ y $\boldsymbol{x > 0}$; además ningún estudiante seleccionó simultáneamente todas las gráficas que cumplían con las condiciones establecidas. Después de la puesta en práctica del diseño instruccional, todos los estudiantes eligieron la gráfica que cumplía con $\boldsymbol{h(x) > 0}$, $\boldsymbol{h'(x) > 0}$ y $\boldsymbol{x > 0}$, y un porcentaje sensiblemente menor seleccionó a la gráfica que, no obstante cumplir con las condiciones especificadas, cumplía con $\boldsymbol{x < 0}$. Creemos que esto último es indicativo de que todavía se encontraba presente la concepción alternativa inicial. Simultáneamente estas funciones solo fueron seleccionadas por la mitad de los estudiantes.

Respecto de las funciones que cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{y' < 0}$, antes del proceso instruccional son dos las gráficas que los estudiantes mayoritariamente eligieron (50%). De estas dos gráficas, solo una cumple con las condiciones establecidas pues la otra, es negativa y creciente; sin embargo, en ambos casos, las gráficas comienzan en el 3er cuadrante, es decir, sus abscisas en esta región son negativas; parecería que las condiciones $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{y' < 0}$, se vinculan con las condiciones $\boldsymbol{x < 0}$ y $\boldsymbol{y < 0}$. Después de la puesta en escena del diseño instruccional la mayoría de los estudiantes seleccionó las dos gráficas que reunían estas condiciones. Sin embargo, conviene mencionar que una cuarta parte de los estudiantes eligieron la gráfica que cumplía con las condiciones $\boldsymbol{x < 0}$ y $\boldsymbol{y < 0}$, a pesar de que no cumplía con $\boldsymbol{y' < 0}$, siendo esto señal de la presencia de la concepción alternativa que asocia las funciones que cumplen con $\boldsymbol{y < 0}$ y $\boldsymbol{y' < 0}$ con las que se corresponden con $\boldsymbol{x < 0}$ y $\boldsymbol{y < 0}$.

Con relación a la pregunta de qué puntos cumplen con la condición $\boldsymbol{f'(x) = 0}$, antes de la incidencia instruccional, la mayoría de los estudiantes asociaron la estabilidad de $\boldsymbol{f(x)}$ con $\boldsymbol{x = 0}$; ninguno de los estudiantes asoció el máximo y el mínimo de la función con esta propiedad. Después del proceso instruccional más de la mitad de los estudiantes optaron por los máximos y mínimos de la función y una cuarta parte restante se manifestó por elegir a $\boldsymbol{x = 0}$, punto donde la función interceptaba al eje de las abscisas y donde no se cumplía la condición establecida, indicando la permanencia de la concepción alternativa inicialmente registrada.

Finalmente, al cuestionar en torno al valor de $\boldsymbol{f'(x)}$ para $\boldsymbol{x} = 1$, antes de las estrategias del proceso instruccional, la mayoría de los estudiantes consideraron que el valor de la derivada en $\boldsymbol{x = 1}$ era el valor de la ordenada en ese punto y ninguno de los estudiantes asoció el valor de la derivada con la pendiente de la tangente a la curva en el punto en cuestión. Después del diseño instruccional menos de la cuarta parte de los estudiantes contestó aceptablemente y más de la mitad de ellos continuó asociando a la $\boldsymbol{f'(x)}$ con la ordenada del punto en cuestión, denotando con ello una gran estabilidad en esta concepción alternativa.

Patrones Generales de Concepciones Alternativas

Con las conclusiones anteriores y haciendo una revisión general de los resultados obtenidos, estamos en posibilidad de identificar patrones en las concepciones alternativas encontradas, atendiendo a las concepciones manifestadas por los estudiantes cuando se encuentran en situación de analizar funciones gráficamente.

1. Análisis de funciones usando los registros verbal y gráfico. Identificamos fundamentalmente la presencia de dos patrones generales:

La función es:	**Patrones de Concepciones Alternativas**	
	1 (Asociaciones Concomitantes)	**2 (Omisión del plano cartesiano)**
Positiva	Si sus abscisas son positivas	Si la gráfica de la función comienza a trazarse arriba[1]

[1] Para ellos, arriba significa por encima del eje x

Negativa	Si sus abscisas son negativas	Si la gráfica de la función comienza a trazarse abajo[2]
Creciente	Si sus ordenadas son positivas	Si la gráfica de la función sube[3]
Decreciente	Si sus ordenadas son negativas	Si la gráfica de la función baja[4]
Positiva y Creciente	Si además de cumplir con estas condiciones, sus abscisas son positivas	Si comienza a trazarse arriba y además sube
Negativa y Creciente	Si además de cumplir con estas condiciones, sus abscisas son negativas	Si comienza a trazarse abajo y además baja
Positiva y Decreciente	Si además de cumplir con estas condiciones, sus abscisas son positivas	Si comienza a trazarse arriba y además baja
Negativa y Decreciente	Si además de cumplir con estas condiciones, sus abscisas son negativas	Si comienza a trazarse abajo y además baja

Tabla 5.1

Patrón 1 (Asociaciones Concomitantes). Cuando los estudiantes manifiestan este patrón de concepciones alternativas, establecen una consistente asociación entre abscisas y ordenadas para determinar el signo de las segundas, de acuerdo al signo de las primeras. Además, la identificación del comportamiento de la función se hace a partir de la consistente relación que los estudiantes establecen entre su ubicación y su comportamiento, es decir, si las ordenadas son positivas, la función es creciente; si las ordenadas son negativas, la función es decreciente. Presumimos que detrás de este patrón de concepciones alternativas se encuentra el hecho de que el individuo no pone en juego la relación de covariación existente entre las variables presentadas en forma de gráfica, manifestando con ello deficiencias en su razonamiento covariacional.

Patrón 2 (Omisión del Plano Coordenado). Cuando los estudiantes analizan las gráficas de funciones de acuerdo a este patrón, la ubicación de la función la determinan en términos de dónde comienza su mano a trazar la gráfica. Si su mano comienza el trazo arriba del eje horizontal, para ellos, la función es positiva; si ubican su mano al inicio del trazo debajo del eje horizontal, para ellos, la función es negativa. A su vez, el

[2] Para ellos, abajo significa por debajo del eje x
[3] Para ellos, subir significa que la gráfica vaya hacia arriba, independientemente de lo que suceda en la dirección x
[4] Para ellos, bajar significa que la gráfica vaya hacia abajo, independientemente de lo que suceda en la dirección x

comportamiento de la función se analiza asignando a los términos creciente y decreciente, significados acordes al sentido que estas palabras tienen en el lenguaje coloquial. Es decir, creciente es todo lo que sube y decreciente es todo lo que baja. Pareciera que, para los estudiantes que manifiestan este patrón de concepciones alternativas, el plano cartesiano no existe, pues tienen su propio sistema de referencia con reglas propias. Todo lo anterior se traduce en una suerte de *dislexia*[5] relativa a las gráficas de funciones.

2. Análisis de funciones usando los registros analítico y gráfico. Cuando las preguntas son planteadas en términos de los registros analítico y gráfico, las concepciones alternativas identificadas en algunos estudiantes, configuran el siguiente patrón de concepciones alternativas:

La función cumple con:	**Patrón de Concepción Alternativa**
$f(x) > 0$ y $f'(x) < 0$	Si una parte de la gráfica cumple con $x > 0$ y otra con $x < 0$
$g(x) < 0$ y $g'(x) > 0$	Si una parte de la gráfica cumple con $x < 0$ y otra cumple con $x > 0$
$h(x) > 0$ y $h'(x) > 0$	Si, además de cumplir con las condiciones anteriores, la gráfica cumple con $x > 0$
$y < 0$ y $y' < 0$	Si, además de cumplir con las funciones anteriores, la gráfica cumple con $x < 0$

Tabla 5.2

Cuando los estudiantes manifiestan este patrón de concepciones alternativas, el análisis de las funciones lo hacen atendiendo a la relación que establecen entre los operadores de relación presentes en el enunciado de la instrucción y la variable x.

Por último, en conjunto, todos los análisis realizados nos conducen a concluir que:

[5] *Dislexia* Dificultad específica en el aprendizaje de la lectura en un niño que no presenta ningún otro déficit intelectual o sensorial y que está sometido a un régimen normal de escolarización (Diccionario Enciclopédico Larousse, 1995, Tomo 3, pág. 759). Trastorno del mecanismo de la lectura en el que ésta se efectúa deficientemente, con errores (alteración del orden silábico, confusión de letras (*b* por *p*, *d* por *b*, etc.)) o deformaciones. Se presenta casi siempre en niños con una mala lateralización e insuficiente desarrollo psicomotríz. Suele ir acompañada de disgrafía (dificultad en la escritura) (Enciclopedia Hispánica, 1995 – 1996, Tomo I, pág. 302).

1. Algunos estudiantes parecen solo atender a la curva de la función, e ignoran la relación de covariación presente en las gráficas cartesianas. Pareciera ser que el origen de algunas de las concepciones alternativas identificadas es la carencia de razonamiento covariacional, en el sentido de (Carlson et al., 2002).

2. Algunos estudiantes tienden a ignorar la presencia del plano coordenado cuando construyen gráficas de funciones, y los términos con los que analizan la ubicación y el comportamiento de las mismas poseen significados acordes al sentido que éstos tienen en lenguaje coloquial configurando una especie de dislexia referida a las gráficas de funciones.

3. El grado de estabilidad o cambio de las diferentes concepciones alternativas identificadas en esta investigación es variable. Con posterioridad a la puesta en escena del proceso instruccional se observan cambios conceptuales principalmente en los estudiantes que manifestaron el Patrón 1 de concepciones alternativas (Asociaciones Concomitantes). En contraste, aquellos estudiantes que manifestaron el Patrón 2 (Omisión del Plano Cartesiano) manifiestan una notoria estabilidad en sus concepciones alternativas. Los estudiantes que evidencian el patrón de concepciones alternativas identificado al plantear las preguntas a través de los registros analítico y gráfico, tienen una importante estabilidad en estas concepciones. La concepción alternativa que destaca por su estabilidad es la que consiste en considerar que la derivada de una función en un punto es igual a la ordenada de ese punto (Tabla 4.128).

4. Los cambios en las concepciones no son lineales; se dan en distintos sentidos; hay avances y retrocesos. Evidencias de lo anterior se encuentran en los resultados obtenidos respecto de las funciones con imágenes positivas (Tabla 4.113); de los puntos en donde una función no crece ni decrece (Tabla 4. 117).

RECOMENDACIONES

En virtud de que la presente investigación muestra que en estudiantes que inician su educación universitaria, es notoria la estabilidad de algunas concepciones alternativas que poseen los estudiantes respecto del análisis de funciones, consideramos importante promover e investigar el diseño y puesta en escena de estrategias de enseñanza de diseños instruccionales alternativos desde niveles de secundaria y preparatoria, encaminadas al manejo de la representación gráfica de funciones y en general del análisis de funciones. Estos diseños alternativos podrían enmarcarse en el plano variacional a fin de explorar la incidencia que éstas puedan tener en el desarrollo de procesos de pensamiento que les permitan a los estudiantes identificar la relación de covariación que se encierra en una gráfica cartesiana.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1995) La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp.97-140), Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral R., Farfán R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Contenido en *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8;* Sevilla, España. Grupo Editorial Ibero América, pp. 69-91

Cantoral (1999). Pensamiento y lenguaje variacional en la enseñanza contemporánea en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 12, tomo 1

Carey, S. (1985). Conceptual Change in Childhood, citado por Pozo, J. I. (1996). Teorías cognitivas del aprendizaje, Ediciones Morata, S.L.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe E., Larsen, S., Hsu, E (2002). *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 33, No. 5, pp. 352–378

Confrey J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science and programming. *Review of research in Education.* Vol. 16. Pp. 3-56

Corno, L. (1993). The best–laid plans: Modern Conceptions of Volition and Educational Research, citado por Ferrari M., Elik N.(2003) Influences on Intencional Conceptual Change; Ed, Sinatra G. Pintrich. P, *Intentional conceptual change,* Mahwah, NJ: LEA.

Dolores, C. (2003). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas, concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. (En prensa)

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2003). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol. 5 (3), pp. 225-250.

Dolores, C.; Guerrero L. A. (2002). Concepciones alternativas que, referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores de bachillerato. *Actas de la RELME 16*, la Habana, Cuba, Julio del 2002.

Dolores, C. (2002). Concepciones alternativas que afloran en los estudiantes cuando analizan el comportamiento de funciones a través de sus gráficas. En prensa

Dolores, C. (2001). Los significados del lenguaje variacional en el aprendizaje la matemática de las variables. En prensa

Dolores, C., Catalán, A. (2000) El comportamiento variacional de la función lineal: Una experiencia didáctica con estudiantes del bachillerato. En prensa

Dolores, C. (2000). La Matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *Academia*; Vol. 2 No.20, Universidad Autónoma de Sinaloa

Dolores, C. (1999). Una introducción a la derivada a través de la variación. Grupo Editorial Iberoamericana. México D. F. pp. 54-61

Dolores, C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato*, Tesis doctoral. Instituto Superior Pedagógico: Enrique J. Varona. La Habana, Cuba

Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 173-201.

Ensimberg T., Dreyfus T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. Visualization in Teaching and Learning Mathematics. A project sponsored by *the Committee on Computers in Mathematics Education of the Mathematical Association of America*. Zimmerman W. and Cunningham S. Editors; pp. 25-27

Even, R. (1998) Factors Involved in Linking Representations of Functions, *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 17 Num.1, pp. 105 - 121

Eves, H. (1985). Estudio de las Geometrías, Vol. II. UTHEA. México

Ferrari M., Elik N.(2003) Influences on Intencional Conceptual Change; Ed, Sinatra G. Pintrich. P, *Intentional conceptual change,* Mahwah, NJ: LEA.

García, C. A. (2003). *Estudio Socioepistemológico del Significado de la Tercera Derivada*, Tesis de Maestría, CINVESTAV–IPN, México

Gil, De Guzmán (1993). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias Innovadoras; Ministerio de Educación y Ciencia / Editorial Popular S.A., Madrid España.

Guerrero, L. Medina, M. (2001) *Un Estudio Acerca de las Concepciones de los Estudiantes Sobre el Comportamiento Variacional de las Funciones Elementales*, Tesina de Especialidad en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Hidalgo

Hernández, S. *et al*. (1997). Metodología de la investigación. México: Mc Graw-Hill.

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas, epistemológicos y didácticos; Ed. Fernando Hitt, *Investigaciones en Matemática Educativa*, Grupo Editorial Ibero América.

Janvier, C. (1998). The Notion of Chronicle as an Epistemological Obstacle to the Concept of Function, *Journal of Mathematical Behavior*, Vol.17

Kuhn, T. (1964). Structures of Scientific Revolutions, citado por Pozo, J. I. (1996). Teorías cognitivas del aprendizaje, Ediciones Morata, S.L.

Lakatos, I. (1978). The Methodology of Scientific Research Programmes–Philosophical Papers, citado por Pozo, J. I. (1996). Teorías cognitivas del aprendizaje, Ediciones Morata, S.L.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., Stein M.K. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research* Vol. 60. Pp. 1-64

Mc Dermot L.C., Rosenquist M.L., Van Zee E. H. (1987). Student's difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics, *American Journal of Physics* Vol. 55. Pp. 503-513

Mevarech Z., Kramarsky B. (1997). From verbal description to graphic representation: stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 32 Núm. 3. pp. 229-263

Piaget, J. (1975). *L' Equilibration des structures cognitives. Probleme central du développement*, citado por Pozo, J. I. (1996). Teorías cognitivas del aprendizaje, Ediciones Morata, S.L

Piaget y García, (1983). *Psychogenese et histoire des Sciences*, citado por Ferrari M., Elik N. (2003) Influences on Intencional Conceptual Change; Ed, Sinatra G. Pintrich. P, *Intentional conceptual change,* Mahwah, NJ: LEA.

Piskunov N.1977, Cálculo Diferencial e Integral, Editorial MIR, Moscú

Pozo, J. I. (1996). Teorías cognitivas del aprendizaje, Ediciones Morata, S.L.

Ríbnikov K. (1987). Historia de las Matemáticas. Editorial Mir Moscú., pp. 220

Schooler, J. W. (2000). Consciousness, meta–consciousness and the role of self–report, citado por Ferrari M., Elik N.(2003) Influences on Intencional Conceptual Change; Ed, Sinatra G. Pintrich. P, *Intentional conceptual change,* Mahwah, NJ: LEA.

Sierpinska, A. (1992) On understanding the notion of function. *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Harel & Dubinsky, Editores. MAA Notes, Volumen 25, pp. 23-58.

Spivak, M. (1988). Cálculo Infinitesimal, Ediciones REPLA, S. A.

Solache, J.C., Díaz, R. (2000) El desarrollo del pensamiento variacional. Una experiencia pedagógica en situación escolar en el bachillerato. Tesis de Licenciatura en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero

Tall, D., Vinner, Sh. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. Citado por Dolores, C.,2002. Concepciones alternativas que afloran en los estudiantes cuando analizan el comportamiento de funciones a través de sus gráficas. En prensa

Yerushalmy, M., Shternberg, B. (1998) Charting a Visual Course to the Concept of Function

Zillmer, W. (1981). Complementos de Metodología de la Enseñanza de la Matemática; Editorial de Libros para la Educación, La Habana Cuba.

Planes y Programas de Estudios Revisados

Planes y Programas de Estudios de Educación Básica (SEP)

Programas Maestros del tronco Común del Bachillerato Tecnológico 1988; SEP, DEGTI, SEIT, COSNET

Programas de la Asignaturas Matemáticas I, II, III, IV, 1999 para las Escuelas Preparatorias de la UAG.

Planes y Programas de Estudios de la Universidad Autónoma de Sinaloa

Planes y Programas de Estudios de la Universidad Autónoma de Tamaulipas

Planes y Programas de Estudios de los Colegios de Bachilleres de Tamaulipas

Programas Maestros del tronco Común de las Ingenierías 1988; SEP, DGIT, SEIT, COSNET

ANEXO 1

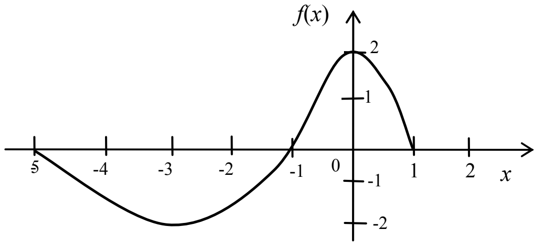
Cuestionario 1

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Av. Lázaro Cárdenas S/N Ciudad Universitaria Chilpancingo Gro. Tel y Fax. 01 747 47 1 56 51

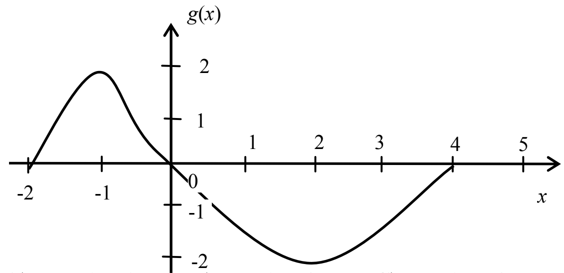
ESTIMADO ESTUDIANTE: ANALIZA CUIDADOSAMENTE LAS GRAFICAS QUE SE PRESENTAN Y CONTESTA CADA UNA DE LAS PREGUNTAS SUBRAYANDO LA RESPUESTA QUE CONSIDERES SATISFACE A CADA UNA DE ELLAS

Nombre_____________**Escuela:** ________**Edad:** _______**Semestre:** _______ **Grupo:**_______ **Espec.**___________

1. ¿Para qué x la función es positiva?

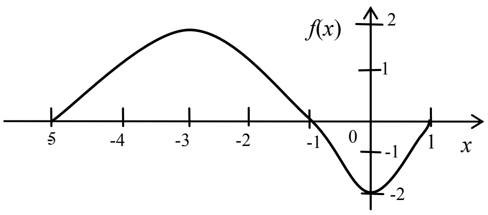


A) De 0 a 1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a –1 F) Otra:_____

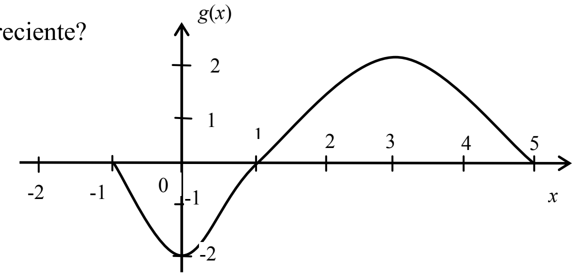


A) De –2 a 0 B) De 0 a 4 C) De 2 a 4
D) De –1 a 2 E) De –2 a –1 F) Otra:_____

2. ¿Para qué valores de x la función es creciente?

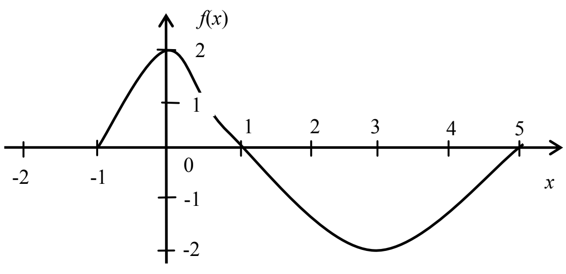


A) De –5 a –1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a –3 E) De 0 a 1 F) Otra:_____

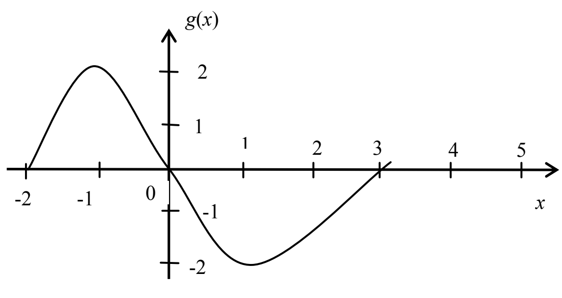


A) De 1 a 5 B) De –1 a 1 C) De 0 a 3
D) De 0 a 5 E) De –1 a 0 F) Otra:_____

3. ¿En qué intervalo la función es negativa?

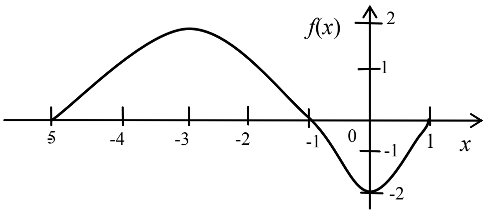


A) De –1 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De 0 a 5 E) De 3 a 5 F) Otra:_____

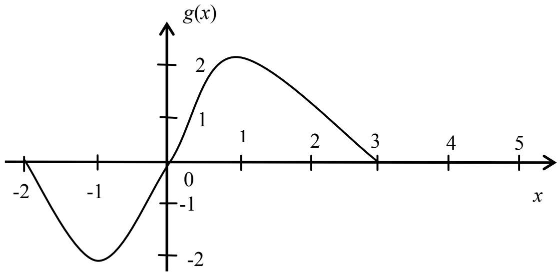


A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De –2 a –1 E) De 1 a 3 F) Otra:_____

4. ¿Dónde la función es decreciente?

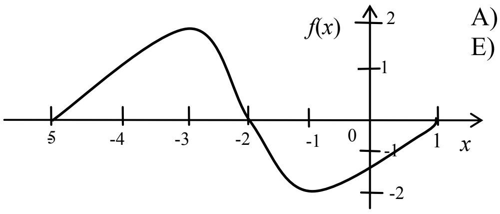


A) De –5 a –1 B) De –3 a 0 C) De –1 a 1
D) De –5 a 0 E) De –5 a – 3 F) Otra:_____



A) De –2 a 0 B) De 0 a 3 C) De –1 a 1
D) De –2 a –1 E) De 1 a 3 F) Otra:_____

5. ¿Dónde la función no crece ni decrece?



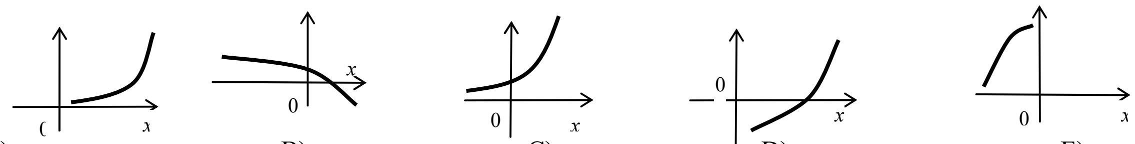
A) En $x = -5$ B) En $x = -2$ C) De –2 a 1 D) En $x = 1$
E) En $x = -1$ F) En $x = 0$ G) Otras_______________

Cuestionario 2

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Av. Lázaro Cárdenas S/N Ciudad Universitaria Chilpancingo Gro. Tel y Fax. 01 747 47 1 56 51

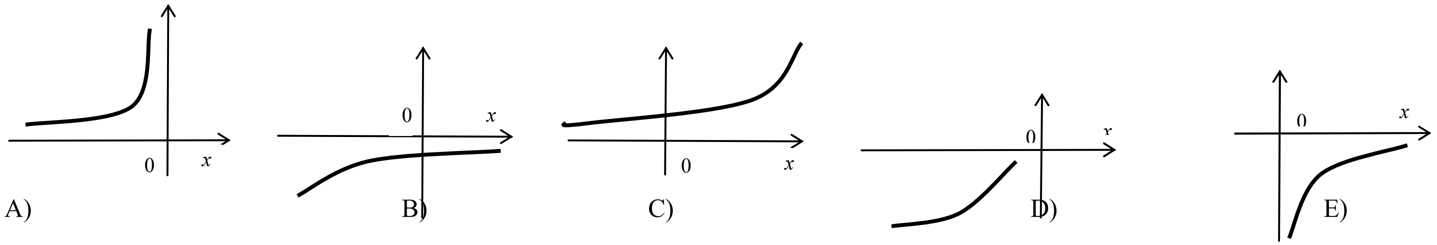
Nombre:______________________________ Edad: _______ Semestre: ____ Grupo:____ Esp.:______________ Fecha de Aplic:_________

1. Subraya el o los incisos que corresponden a gráficas de funciones que son a la vez **positivas y crecientes**.



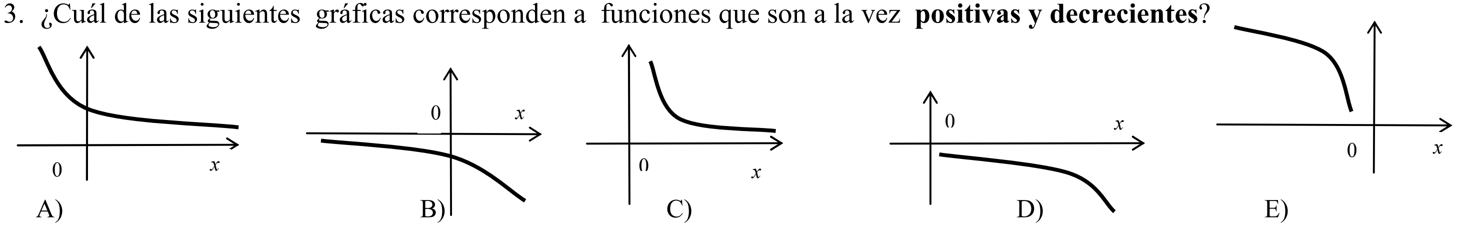
A) B) C) D) E) OTRA

2. Subraya el o los incisos que corresponden a gráficas de funciones que son a la vez **negativas y crecientes**.



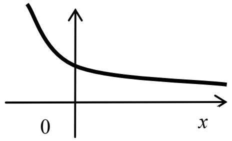
A) B) C) D) E) OTRA

3. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponden a funciones que son a la vez **positivas y decrecientes**?

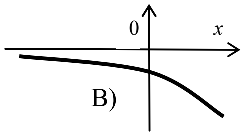


A) B) C) D) E) OTRA

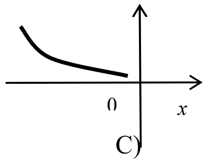
4. ¿Qué gráficas corresponden a funciones que son a la vez **negativas y decrecientes**?



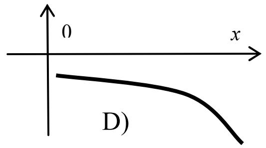
A)



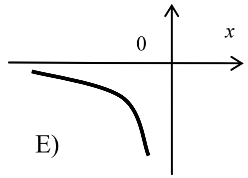
B)



C)



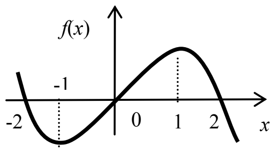
D)



E)

OTRA

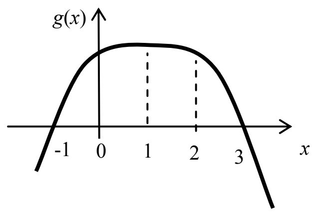
5. ¿Para qué x, las siguientes gráficas contienen puntos o zonas donde se **estabiliza** el comportamiento de las funciones que representan?



A) $x = -2$ B) $x = -1$

C) $x = 0$ D) $x = 1$

E) $x = 2$ Otra:_____



A) $x = -1$ B) $x = 2$

C) $x = 0$ D) $x = 3$

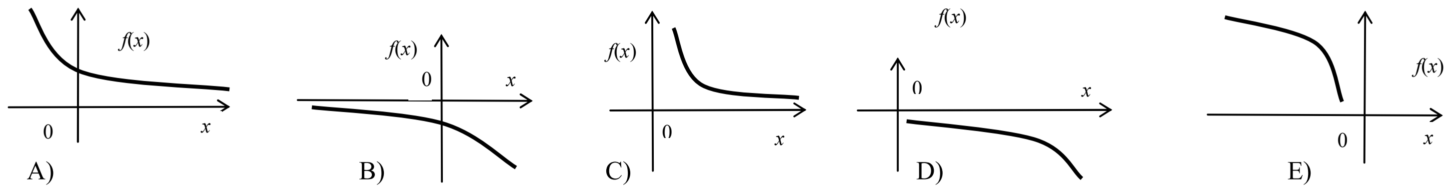
E) $x = 1$ Otra:_____

Cuestionario 3

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Av. Lázaro Cárdenas S/N Ciudad Universitaria Chilpancingo Gro. Tel y Fax. 01 747 47 1 56 51
Cuestionario de exploración de ideas variacionales. Responsables: Dr. Crisólogo Dolores Flores MC . Ma. Del Socorro Valero Cáceres

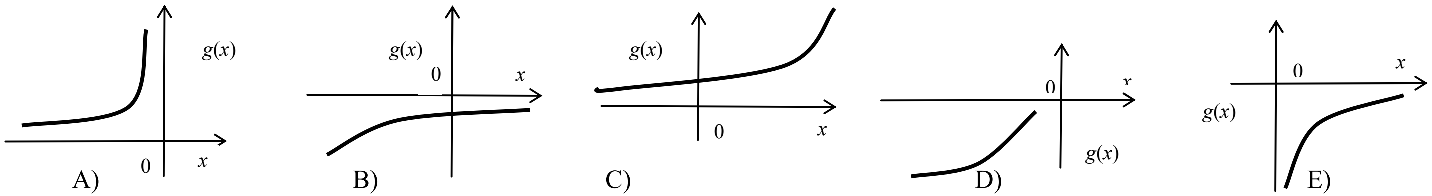
Nombre:______________________________ Edad: _______ Semestre: _____________ Fecha de Aplic:_________

1. A juzgar por sus gráficas, en cuál o cuáles de las siguientes funciones se satisface que $f(x)>0$ y $f'(x)<0$?



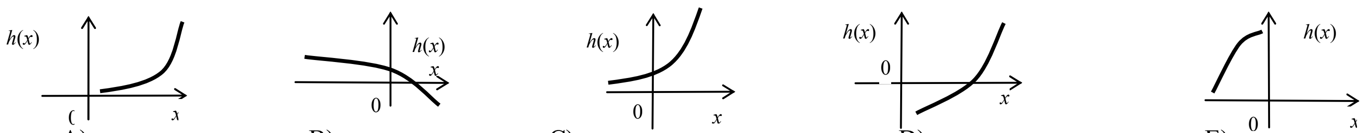
A) B) C) D) E) OTRA

2. Estas gráficas corresponden a ciertas funciones $g(x)$. ¿En cuál o cuáles se cumple que $g(x)<0$ y $g'(x)>0$?



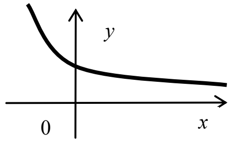
A) B) C) D) E) OTRA

3. Las siguientes gráficas corresponden a ciertas funciones $h(x)$. ¿Cuál o cuáles de ellas son tales que $h(x)>0$ y $h'(x)>0$?

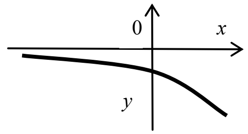


A) B) C) D) E) OTRA

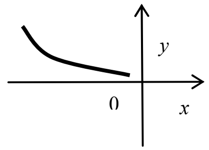
4. Las siguientes gráficas corresponde a funciones de la forma: $y = f(x)$. ¿Para cuál o cuáles de ellas se cumple que $y < 0$ y $y' < 0$?



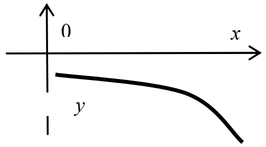
A)



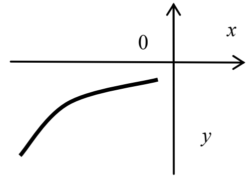
B)



C)



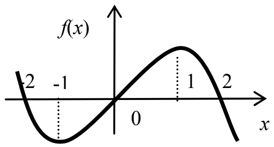
D)



E)

OTRA

5. ¿Para qué x, $f'(x) = 0$?

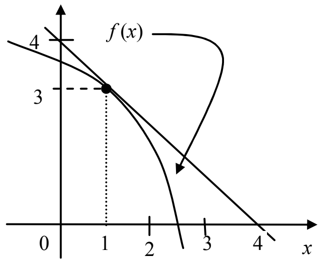


A) $x = -2$ B) $x = -1$

C) $x = 0$ D) $x = 1$

E) $x = 2$ Otra:_____

6. ¿Cuál es el valor correcto de $f'(x)$ para $x = 1$?



A) $f'(1) = 3$ B) $f'(1) = 4$

C) $f'(1) = 2.5$ D) $f'(1) = -1$

E) $f'(1) = 3/4$ Otra:_____

ANEXO 2

Entrevista

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Av. Lázaro Cárdenas S/N Ciudad Universitaria Chilpancingo Gro. Tel y Fax. 01 747 47 1 56 51

ESTIMADO ESTUDIANTE: ANALIZA CUIDADOSAMENTE LAS CADA UNA DE LAS PREGUNTAS SIGUIENTES CONSTRUYE LAS GRÁFICAS QUE SE TE PIDEN

Nombre____

1. Bosqueja la gráfica de una función con imagen positiva
2. Bosqueja la gráfica de una función con imagen negativa
3. Bosqueja la gráfica de una función creciente
4. Bosqueja la gráfica de una función decreciente
5. Bosqueja la gráfica de una función con imagen positiva y creciente
6. Bosqueja la gráfica de una función con imagen negativa y creciente
7. Bosqueja la gráfica de una función con imagen positiva y decreciente

ANEXO 3

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
LICENCIATURA EN MATEMATICAS
Av. Lázaro Cárdenas S/N Ciudad Universitaria Chilpancingo Gro. Tel y Fax. 01 747 47 1 56 51

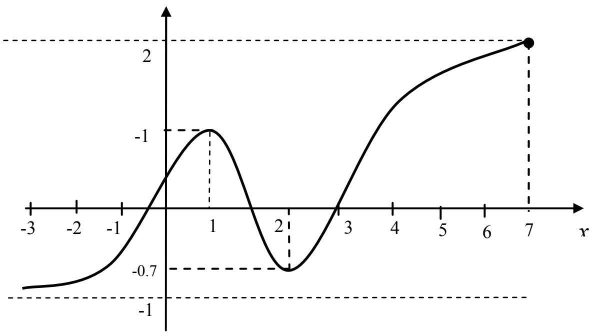
1er Examen parcial de Cálculo Diferencial e Integral. Responsables: Dr. Crisólogo Dolores, MC. Ma. del Socorro Valero

Nombre del estudiante:____________________________ Edad: _______ Fecha de Aplicación:_____________

INDICACIONES: Contesta cada una de las preguntas y resuelve los problemas planteados argumentando ampliamente todos tus procedimientos.

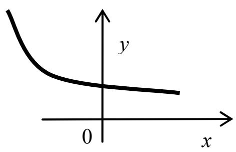
1. En la escala de calificaciones usual, las aprobatorias son mayores iguales que 6 y menores o iguales que 10, las reprobatorias son menores que 6 pero superiores o iguales a 0. Llame c a las calificaciones y represente los intervalos de las aprobatorias por una lado y las reprobatorias por el otro, tanto en forma geométrica como en forma analítica.

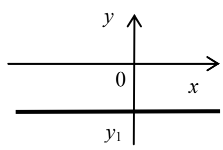
2. El siguiente gráfico muestra el comportamiento de la variable y en función de la variable x. Analiza la gráfica y contesta las siguientes preguntas.

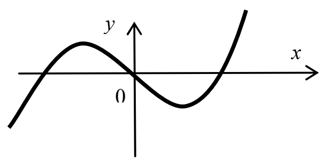


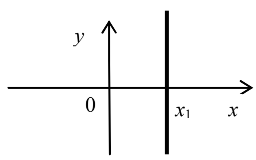
a) ¿Cuál es el dominio de y?_______________
b) ¿Cuál es su imagen?____________________
c) ¿Para qué x, y crece? ___________________
d) ¿Para qué x, y decrece? ________________
e) ¿Para qué x, y no crece ni decrece?_______
f) ¿Para qué x, $y > 0$? _____________________
g) ¿Para qué x, $y < 0$?______________________
h) ¿Para qué x, $y = 0$?_____________________

3. En las gráficas en donde y es constante y x variable escriba una F, en donde y es variable y x variable escriba G, donde x e y sean variables escribe H. Explique su decisión.









A)____________ B)___________ C)___________ D)___________

4. Cuántas y qué funciones se pueden construir de manera que tengan como dominio, D: { 1, 2, 3} e imagen I: {4, 5, 6}. Exhíbalas.

6. Un rectángulo de lados variables y 20 cm. de perímetro se hace girar en torno de uno de sus lados de modo que engendra un cilindro. Obtenga una fórmula para el volumen del cilindro generado como función de su altura. ¿Para qué valores de las variables la función que se obtiene tiene sentido?

ANEXO 4

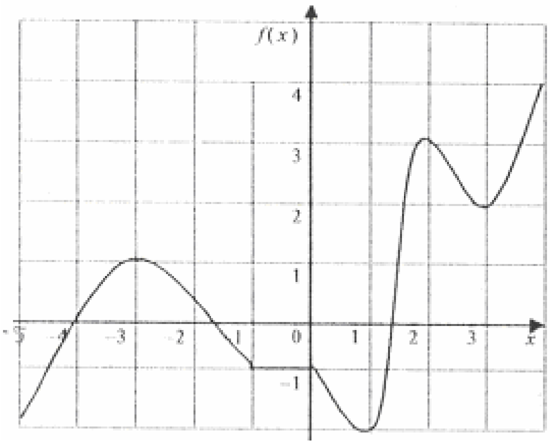
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
LICENCIATURA EN MATEMATICAS
Av. Lázaro Cárdenas S/N Ciudad Universitaria Chilpancingo Gro. Tel y Fax. 01 747 47 1 56 51

2o. Examen parcial de Cálculo Diferencial e Integral. Responsables: Dr. Crisólogo Dolores, MC. Ma. del Socorro Valero

Nombre del estudiante:____________________________ Edad: _______ Fecha de Aplicación:_____________

INDICACIONES: Contesta cada una de las preguntas y resuelve los problemas planteados argumentando ampliamente todos tus procedimientos.

1. La gráfica siguiente muestra el comportamiento de la función $f(x)$. Analícela y conteste lo siguiente:



a) ¿Cuánto cambia f si x cambia de -5 a -4?__ ¿Cuánto cambia f si x cambia de -1 a 0?___ ¿Cuánto lo hace si x cambia de 1 a 2? ____ ¿Dónde creció con mayor rapidez?______

b) Si x cambia de izquierda a derecha, es decir $\Delta x > 0$. ¿Para qué x, se cumplen las desigualdades siguientes:

$f(x + \Delta x) - f(x) > 0$: ______________________________
$f(x + \Delta x) - f(x) < 0$: ______________________________
$f(x + \Delta x) - f(x) = 0$: ______________________________