Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN

Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar Uruguayo

Tesis que para obtener el grado de
Maestra Ciencias en Matemática Educativa
presenta:

Zenia Yacir Testa Rodríguez

Director de la tesis:

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

Co - director de la tesis:

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

México, D.F., diciembre de 2004

CGPI-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 10 del mes de noviembre del 2004 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda. Un estudio en el sistema escolar uruguayo."

Presentada por la alumna:

Testa	Rodríguez	Zenia Yacir
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A 0 | 1 | 0 | 6 | 8 | 8 |

aspirante al grado de:

Maestra en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Ma. del Socorro Valero C.

Dra. María del Socorro Valero Cázarez

Dr. Gustavo Martínez Sierra

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

CARTA DE CESION DE DERECHOS

En la ciudad de México D. F. el día 15 del mes de diciembre del año 2003, la que suscribe **Zenia Yacir Testa Rodríguez**, alumna del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro: **010688** Adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, manifiesta que es autora intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Ricardo Cantoral Uriza y como Co-director al Dr. Francisco Javier Lezama Andalón.

Y cede los derechos del trabajo intitulado **Procesos de resignificación del valor numérico de la segunda derivada: Un estudio en el sistema escolar Uruguayo** al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de Investigación. Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual gráficas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: milefede@adinet.com.uy Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Yacir Testa

Zenia Yacir Testa Rodríguez

ÍNDICE

Capítulo V

Capítulo VI

Capítulo VII

Capítulo VIII

RELACIÓN DE GRÁFICAS, ESQUEMAS, IMÁGENES Y TABLAS

Gráficos

Esquemas

Imágenes

Tablas

RESUMEN

La presente investigación se enmarca en la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional. La misma fue realizada en Uruguay con estudiantes de sexto año de Educación Secundaria y de tercer año del Instituto de Profesores Artigas.

A partir de nuestra experiencia y del análisis profundo tanto del currículo como de la forma en que se trabaja el concepto matemático “derivada” en los cursos y en los libros de textos, pensamos que los estudiantes son guiados a trabajar con dicho concepto, a conocer su definición, pero únicamente con el enfoque que indica el currículo, sin poner en primer lugar una enseñanza, en el sentido de Cantoral (2000), que favorezca las distintas miradas del concepto, sus relaciones con conceptos o imágenes de estos ya adquiridas, lo que favorecería la formación de una fuerte estructura conceptual.

Destacamos dos aspectos que generaron nuestra investigación:

- Este tipo de trabajo no implica, por un lado, que el estudiante ponga en juego su pensamiento y lenguaje variacional, por lo tanto no posibilita el desarrollo de este tipo de pensamiento fundamental en el entendimiento relacional del tema “derivada”, y por otro lado, que el estudiante deba recurrir a las definiciones de los conceptos involucrados, dado que puede ser suficiente para resolver cierta problemática consultar la imagen asociada al concepto.
- El valor numérico de la función derivada primera es significado gráficamente, relacionándolo con el coeficiente angular de la recta tangente el gráfico en el punto en cuestión, mientras que el valor numérico de la función derivada segunda no entra en juego, si es distinto de cero, y sólo se significa gráficamente a su signo, relacionándolo a la concavidad de la función.

Al comienzo de esta investigación creíamos que en la estructura asociada al concepto “derivada” que los estudiantes habían generado, no estarían presentes significados gráficos del valor numérico de la función derivada segunda. Es en este contexto que nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cuál es el significado gráfico que dan los estudiantes al valor numérico de la función derivada segunda?
- ¿Cuál es el papel que juegan las definiciones del concepto, y/o la imagen del concepto, cuando los estudiantes se enfrentan a actividades que ponen en juego el significado gráfico del valor numérico de la función derivada segunda?
- ¿Cómo influye el Pensamiento y Lenguaje Variacional de los estudiantes al enfrentarse a actividades que los ponen en juego el significado gráfico del valor numérico de la función derivada segunda?

En base a todo lo anterior se elabora una secuencia que esperábamos que en las primeras actividades evidenciara que los estudiantes no significan gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda, pero que en su desarrollo fomentara la reflexión de los estudiantes sobre este tópico, lo que implicaría primero que llevaran a un nivel conciente las limitaciones de su estructura conceptual asociada al concepto en juego (construida en el transcurso de su escolarización), y luego generaran significados gráficos del valor numérico de la función derivada segunda.

El análisis de los resultados ha confirmado nuestras creencias iniciales y pensamos que han surgido ricos elementos a partir de los cuales pudimos responder nuestras preguntas de investigación construyendo explicaciones teóricas del desempeño de los estudiantes con base en el las cuestiones del pensamiento y lenguaje variacional.

SUMMARY

The present investigation is framed in the line of investigation Thought and Variational Language. The same one was carried out in Uruguay with sixth grade students of High School and of third year of the Institute of Professors Artigas.

Starting from our experience and on a analysis of the curriculum and how the mathematical concept of “derivate” is introduced in the courses and in the text books, we think that the students are guided to work with this concept, to know its definition,

but only in the way that indicates the curriculum, without focusing on a teaching in the first place, in the sense of Cantoral (2000), that favors the different looks of the concept, their relationships with concepts or images of these already acquired, what would favor the formation of a strong conceptual structure.

We pointed two important aspects that generated our investigation:

- Important type of work doesn't imply, on one hand, that the student have to use their thought and variacional language, therefore it doesn't facilitate the development of this type of fundamental thought in the understanding relational of the topic “derivate”, and on the other hand, that the student should appeal to the definitions of the involved concepts, since it can be enough to solve certain problem to consult the image associated to the concept.
- The numeric value of the first derivate function is meant graphically, relating it to the angular coefficient of the tangent straight line the graph in the point in question, while the numeric value of the second derivate function is not taken in account, when it is different from zero, and it is only meant graphically to its sign, relating it to the concavity of the function.

At the beginning of this investigation we believed that in the structure associated to the concept “derivate” that the students had generated, they would not be present graphics meanings of the numeric value of the second derivate function. It is in this context that we thought about the following investigation questions:

- Which is the graphic meaning that the students give to the numeric value of the second derivate function?
- Which is it the role of that the definitions of the concept play, and/or the concept image, when the students face activities related the graphic meaning of the numeric value of the second derivate function?
- How does the Thought and Variacional Language of the students influence when facing activities focus on the graphic meaning of the numeric value of the second derivate function?

Based on all the above a sequence was elaborated expecting that in the first activities it evidenced that the students don't mean graphically the numeric value of the second derivate function, but that in its development are encouraged to think about this topic the students on this topic, what would imply this that they make aware of the limitations of their conceptual structure associated to this concept (built in previous courses), and then they generated graphics meanings of the numeric value of the second derivate function.

The analysis of the results has confirmed our initial thoughts and istrong facts have arisen starting from which we could respond our investigation questions building theoretical explanations of the acting of the students based on aspects of the thought and variacional language.

GLOSARIO

Bachillerato o Segundo Ciclo:

Se refiere a los tres últimos años de la enseñanza secundaria en Uruguay. Abarca la franja de edades que va de los 16 a los 18 años aproximadamente.

Ciclo Básico o Primer Ciclo:

Se refiere a los tres primeros años de enseñanza secundaria en Uruguay. Abarca la franja de edades que va de los 13 a los 15 años aproximadamente.

Curso teórico y Curso práctico:

En los últimos dos años de Educación Secundaria (quinto y sexto) los cursos de matemática se dividen en curso teórico y curso práctico los cuales pueden o no ser dictados por el mismo docente. En el curso teórico se trabaja la teoría (axiomas, definiciones, teoremas, etc.) que permiten las generalizaciones necesarias para realizar luego los problemas y/o ejercicios en el curso práctico.

Enseñanza secundaria:

Se refiere a la enseñanza posterior a la primaria. Abarca un total de seis años que se dividen en tres de Ciclo Básico, o Primer Ciclo (1º,2º, 3º) y tres de Bachillerato o Segundo Ciclo (4º, 5º, 6º). La enseñanza secundaria completa habilita al ingreso a la Universidad.

Entendimiento Relacional:

"… is meant what I have always meant by understanding, and probably most readers of this article: knowing both what to do and why." (Skemp, 1976).

Entendimiento Instrumental:

"… I would until recently not have regarded as understanding at all. It is what I have in the past described as "rules without reasons", without realizing that for many pupils and their teachers the possession of such a rule, and the ability to use it, was what they meant by understanding." (Skemp, 1976).

Imagen del Concepto:

"The concept image is something non-verbal associated in our mind with the concept name. It can be a visual representation of the concept in case the concept has visual representation; it also can be a collection of impressions or experiences. The visual representation, the mental pictures, the impressions and he experiences associated with the concept name can be translated into verbal forms. But it is important to remember that these verbal forms were not the first thinking evoked in our memory. They come into being only at later stage". (Vinner, 1991).

Instituto de Profesores Artigas (I.P.A.):

Instituto Nacional de nivel terciario donde se forman los futuros docentes de Educación Secundaria.

Liceos:

Institutos estatales y privados donde se imparten los cursos de Educación Secuandaria.

Pensamiento y Lenguaje Variacional (PLV):

Con PLV hacemos referencia tanto a una línea de investigación como a un proceso cognitivo. Por un lado "El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales." (Cantoral, 2000). Y además "Como parte del pensamiento matemático avanzado, el pensamiento y lenguaje variacional trata sobre las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio por una lado y con los procesos complejos del pensamiento por otro. Exploramos los procesos y los mecanismos funcionales del pensamiento de los que aprenden en una de especie de cognición situada, para enriquecer, a posteriori, las situaciones de enseñanza de la escuela contemporánea." (Cantoral, 2000).

Valor numérico de la función derivada segunda

Dadas la función f , el conjunto $A \subset R$, $f : A \to R$ y $a \in R$, llamaremos valor numérico de la función derivada segunda de f *en* $x=a$ a $f''(a)$.

Visualización:

“En un sentido más amplio, entendemos por visualización a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje de quien aprende. Ahora bien, realizar la actividad de visualización requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a lo numérico, gráfico o algebraico, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales. La visualización entonces, trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diversas representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado y, sobre todo, de la participación en una cultura particular al compartir símbolos y significados” (Cantoral y Montiel, 2003)

Introducción

Dieciséis años de práctica docente directa, sumados a ciertos estudios académicos, me han llevado a considerar que el sistema educativo en el cual me encuentro inserta es un sistema cerrado; en el sentido que la tarea educativa comienza y termina a partir de los objetivos explícitos del currículo a cumplir, en forma totalmente independiente del grupo humano con el cual se está trabajando. Si a lo anterior le sumamos que en Uruguay los programas de la Educación Secundaria son únicos, y además, como podemos ver en el anexo I, muy extensos para las horas de clase de los cursos, podemos observar que, por un lado, los docentes “dictan” los cursos con poca participación real de los estudiantes, y por otro lado se cree que los estudiantes ingresan a cierto curso con conocimientos muy similares y se espera que todos ellos alcancen los mismos conocimientos, determinados por el currículo, para aprobarlo. No parece tenerse en cuenta ni los conocimientos “fuera del currículo” con los que los estudiantes ingresan al aula, ni las posibles construcciones por ellos realizadas que no sean las que indica el currículo; o sea estamos frente a una concepción clásica de la enseñanza-aprendizaje: el profesor enseña y el alumno aprende, a lo cual podemos agregar que lo “enseñado” y “aprendido” parecen ser independientes del grupo humano que lo está trabajando. “[...] a este [al educando] le cabe dócilmente recibir agradecido el paquete y memorizarlo”. (Freire, 1994)

Evidentemente lo anterior viene de la mano de una cierta concepción de los temas a enseñar y de la propia disciplina. Si el estudiante es un ser pasivo en el proceso enseñanza-aprendizaje y el docente es el encargado de transferir los conocimientos a sus estudiantes, parece ser que él es el único que puede considerar cuáles son los conocimientos válidos en el aula y la forma de acceder a ellos. Además, como ya hemos mencionado, en el sistema educativo uruguayo todos los docentes deben cumplir con el mismo currículo, entonces se convierten en una herramienta que parece intentar asegurar cierta “igualdad” en la educación matemática de los estudiantes y en la concepción de los ítems matemáticos presentes en el currículo.

Creemos que éstas son algunas de las causas que, en este sistema educativo, el conocimiento matemático sea visto como algo ya acabado, perdurable en el tiempo e incambiable. Además de las muestras de esta situación que presentaremos en el Capítulo IV, la experiencia laboral en distintos liceos nos ha dado evidencia de la similitud en los mecanismos de enseñanza de los distintos conceptos matemáticos, y en particular el que nos interesa, desde unas cuantas decenas de años atrás.

Las clases centradas en el discurso del profesor parecen brindarle a éste cierta seguridad sobre la transmisión a los estudiantes de los conocimientos matemáticos y el cumplimiento del currículo, pero no brinda la posibilidad que los estudiantes hagan suyo el problema, lo exploren, argumenten, discutan, descubran, creen, en otras palabras que desarrollen su pensamiento matemático. Otra consecuencia negativa de este tipo de práctica educativa es que no posibilita que los estudiantes reconstruyan los conceptos matemáticos, de donde se limitan los significados de éste a los previstos en el currículo, empobreciendo, sin lugar a dudas, al propio concepto. En este sentido, esta investigación pondrá de manifiesto que los estudiantes, en un principio, no pueden asignar significados no establecidos en los currículos escolares, asociados al concepto valor numérico de la función derivada segunda, sino hasta enfrentar problemáticas de naturaleza distinta a las escolares.

Los aspectos mencionados anteriormente llevan a que el conjunto formado por cierto concepto y sus características asociadas, parezca único e inmutable, de donde es transmitido, tanto por los textos como por los docentes, en forma muy similar a los estudiantes año tras año sin brindar la posibilidad de enriquecerlo, por ejemplo generando un espacio para descubrir características de él que no estaban establecidas en el currículo, por ejemplo como la que pone en juego esta investigación. Esta situación no parece ser exclusiva de Uruguay, nuestro grupo de investigación ha detectado esta misma situación en otros países: *en este momentos, quizá la visión más extendida entre los profesores sea aquella que asume que los conceptos matemáticos son entidades ya elaboradas y que solo deben comunicarse a sus alumnos, en una enseñanza pulcra y libres de dificultades, olvidando que esos conceptos deben ser construidos por sus estudiantes como herramientas capaces de tratar con varias clases de situaciones* (Cantoral, 2000). En este sentido asumimos a la matemática como algo vivo y cambiante, con posibilidades de reorganizarse y resignificarse a partir de estudios como éste que investigan sobre cómo piensan los estudiantes ante ciertas situaciones ya sea correcta o no su respuesta. No consideramos que cierto concepto matemático esté determinado por el currículo en el cual se encuentra, ni que el “método” para “enseñarlo” sea guiar a los estudiantes por los ítems de dicho currículo, sino que en este aspecto coincidimos con las concepciones de Freire (1994) cuando afirma que “enseñar no es un acto mecánico de transferir a los educandos el perfil del concepto del objeto. Enseñar es sobre todo hacer posible que los educandos, epistemológicamente curiosos, se vayan apropiando del significado profundo del objeto, a que solo aprehendiéndolo pueden aprenderlo”.

A partir de todo lo anterior, del análisis profundo tanto del currículo como de la forma en que se trabaja el concepto matemático “derivada” en los cursos y en los libros de textos, pensamos que los estudiantes son guiados a trabajar con dicho concepto, a conocer su definición, pero únicamente con el enfoque que indica el currículo, sin poner en primer lugar una enseñanza, en el sentido de Cantoral (2000), que favorezca las distintas miradas del concepto, sus relaciones con conceptos o imágenes de éstos ya adquiridas, lo que favorecería la formación de una fuerte estructura conceptual.

Dada la importancia que tiene en los currículos el tema “derivadas” y sus indiscutidas aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas, es que creemos que su enseñanza no puede descansar en que los estudiantes puedan “repetir” su definición o que apliquen correctamente ciertas reglas. A partir del análisis de los currículos parece que el objetivo de la enseñanza de este tema es realizar correctamente el estudio analítico y la representación gráfica de una función (EARG) donde, en forma mecánica, utilizando tablas o reglas sin razones, se determinan las funciones derivada primera y segunda. En este sentido observamos dos aspectos que generaron nuestra investigación, por un lado que este tipo de trabajo no implica ni que el estudiante ponga en juego su pensamiento y lenguaje variacional, por lo tanto no posibilita el desarrollo de este tipo de pensamiento fundamental en el entendimiento relacional del tema, ni que el estudiante deba recurrir a las definiciones de los conceptos involucrados, dado que puede ser suficiente para resolver cierta problemática consultar la imagen asociada a ellos; y por otro lado que el valor numérico de la función derivada primera es significado gráficamente, relacionándolo con el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico en el punto en cuestión, pero el valor numérico de la función derivada segunda no entra en juego, si es distinto de cero, y solo se significa gráficamente a su signo, relacionándolo a la concavidad de la función.

Es por ello que, tanto esta investigación, como otras que también forman parte de la línea de investigación *Pensamiento y Lenguaje Variaciona*l, intenta determinar elementos, que no están presentes en el currículo, que permitan enriquecer el concepto "derivada" así como comprender este concepto desde el punto de vista del estudiante. Nuestro grupo considera imprescindible el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes para trabajar ricamente los temas de cálculo; y además, en cuanto a este tema específico, distintas investigaciones han mostrado que la noción de derivada se estabiliza en el pensamiento de los estudiantes solo hasta que la noción de derivada sucesiva aparece y se establece un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas. A partir de esta base creemos que se favorecerá este proceso si el estudiante enriquece el concepto de valor numérico de la función derivada segunda con aspectos gráficos y variacionales; es por ello que en este trabajo investigamos cuál es el significado gráfico que asignan los estudiantes al valor numérico de la función derivada segunda, cuál es el papel que juegan las definiciones del concepto, y/o la imagen del concepto, al enfrentarse a actividades que ponen en juego el valor numérico de la función derivada segunda y cómo influye su Pensamiento y Lenguaje Variacional al trabajar en dichas actividades.

Al comienzo de esta investigación creíamos que en la estructura asociada al concepto "derivada" que los estudiantes habían generado, no estarían presentes significados gráficos del valor numérico de la función derivada segunda, y que el trabajar en una secuencia adecuada posibilitaría que los estudiantes reflexionaran sobre este tópico, que llevaran a un nivel conciente las limitaciones de la estructura conceptual construida en el transcurso de su escolarización y generaran significados gráficos del valor numérico de la función derivada segunda. Creemos que la secuencia, especialmente desarrollada para esta investigación, enfrentará a los estudiantes a aspectos del concepto nunca antes tenidos en cuenta, tal vez por no estar presentes en forma específica en los currículos, y permitirá que ellos descubran y propongan formas de solucionar la problemática planteada. A partir del análisis que hemos realizado de distintos elementos creemos que los estudiantes nunca se han visto enfrentados a actividades que pongan en juego el significado gráfico de la función derivada segunda, de donde las actividades propuestas serán para ello realmente situaciones problemas.

En una primer instancia se podría creer que, como esta investigación es realizada con estudiantes de Uruguay, y el análisis de los distintos elementos tiene en cuenta esta situación, las conclusiones y recomendaciones didácticas son para este círculo, pero, con base en el análisis de textos utilizados en varios países, y al intercambio de información, tanto con los integrantes del grupo de investigación al cual pertenezco, como con colegas de distintos países, es que creemos que la problemática que aquí evidenciamos es común a distintos países, de donde confiamos en que esta investigación brinde elementos que pueden ser tenidos en cuenta fuera de estas fronteras.

El análisis de las actividades desarrolladas por los estudiantes brindará elementos que permitan generar actividades tendientes a significar gráficamente el valor numérico de la función derivada segunda, y así reformular la forma tradicional de trabajar el tema "derivadas" en el aula permitiendo, por un lado, enriquecer la acción didáctica, y por otro lado que los estudiantes reconstruyan significativamente el concepto en juego.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Se realiza el análisis de la interpretación gráfica de una función real para los siguientes casos: se conoce su valor numérico, se conoce su valor numérico y el signo del valor numérico de su derivada primera, se conoce su valor numérico y el valor numérico de su derivada primera, se conoce su valor numérico, el valor numérico de su derivada primera y el signo del valor numérico de su derivada segunda, y por último, se conoce su valor numérico, el valor numérico de su derivada primera y el valor numérico de su derivada segunda. A continuación se presentan las tres preguntas de investigación así como una pequeña presentación del Sistema Educativo Uruguayo.

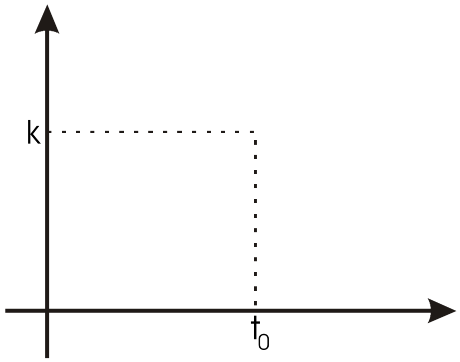
Vivimos en un mundo en el cual todo cambia a nuestro alrededor, inclusive nosotros mismos. Conocer los fenómenos que nos pueden afectar, poder prever lo que ocurrirá, nos permite prepararnos para afrontar los efectos o “cambiar dichos cambios”.

El tiempo no puede avanzarse a deseo, si queremos saber qué ocurrirá con los efectos de un fenómeno M trascurrido un tiempo t a partir de este instante, que llamamos t_0 podemos, por un lado, esperar que transcurra dicho lapso o, por otro lado, podemos intentar predecir qué ocurrirá. Si dejamos transcurrir el tiempo t y observamos el fenómeno ya puede ser tarde para tomar decisiones e imposible modificar los efectos del fenómeno. Si por el contrario buscamos predecir lo que ocurrirá podemos modelizar matemáticamente con base en la información del instante t_0. Si además conocemos cómo cambia, cómo cambian sus cambios, y así sucesivamente, tendremos más información para construir el modelo matemático del fenómeno en cuestión. Es decir, se torna importante conocer a detalle cómo varían los efectos de dicho fenómeno.

El Análisis Matemático nos puede brindar herramientas para determinar las leyes que describen cambios, predecirlos, medirlos y actuar en consecuencia. En muchos casos podemos determinar una función (f) que aproxime los efectos del fenómeno, la variación de f está relacionada con la función derivada primera de la función dada. Si de la función modelizadora (f) conocemos lo que ocurre en el instante t_0 podemos representar la situación gráficamente (Gráfico 1) de la siguiente manera:

Gráfico 1

Representación gráfica de una función f conociendo f(t_0)



Un ejemplo de lo anterior podría ser una tormenta que se está desplazando y nos interesa saber cómo evolucionará. El fenómeno sería la tormenta, el efecto que nos podría interesar estudiar sería la distancia a la cual se encuentra la tormenta de un lugar geográfico dado en función del tiempo que transcurre, también podríamos estar interesados en estudiar el efecto “intensidad de la tormenta”. El dato que tenemos es que para $t = t_0$ la tormenta se encuentra a una distancia k de cierto lugar geográfico G. Por un lado existe la función F que es la que se adecua perfectamente a los efectos del fenómeno (función que desconocemos, y probablemente, no podamos determinar sino solamente aproximar) y por otro lado estamos buscamos una función (f) que aproxime el efecto del fenómeno en una cercanía del instante t_0, o sea en un entorno del real t_0. Por lo tanto estamos intentando determinar una nueva función (f) que aproxime, en un entorno del real t_0, a la función F.

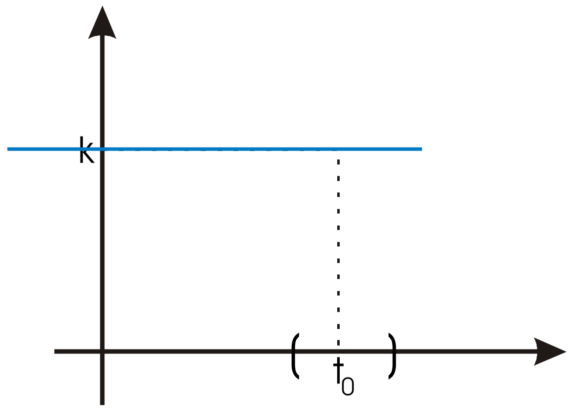
Si además del valor del efecto fenómeno (k) en t_0 conocemos cómo cambia el efecto (variación de la distancia de la tormenta al lugar G) en ese instante t_0 tendremos más datos sobre dicho efecto. Podemos conocer el signo de dicha variación lo cual nos lleva a plantearnos tres casos:

- Si sabemos que la variación es nula, sabemos que en un entorno del real t_0 el efecto se mantiene constante, o sea que la función F será aproximable por la función $f : R \rightarrow R \,/\, f(x) = k$ en un entorno de t_0.

Comentario [t1]: ¿Cómo se explica este caso en términos del ejemplo de la tormenta?

Gráfico 2

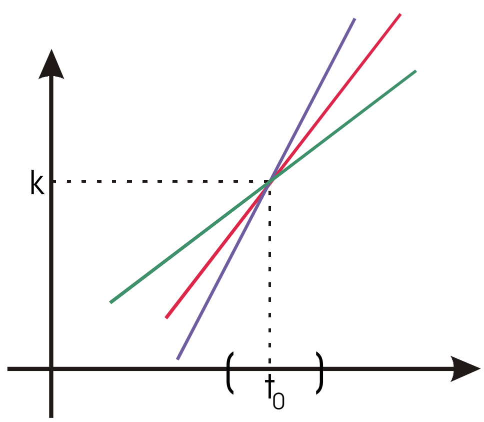
Representación gráfica de una función f conociendo f(t_0) y f´(t_0)=0



- Si sabemos que la variación es positiva, sabemos que en un entorno del real t_0 la medida del efecto aumenta, o sea que la función *F* será aproximable a la función de la forma $f: R \to R \,/\, f(x) = ax - at_0 + k$ en un entorno de t_0 con $a \in R^+$. O sea que la función es aproximable en un entorno de t_0 a una recta de coeficiente angular positivo que pasa por el punto (t_0, k) cuya expresión analítica es la anterior, pero, hay infinitas rectas que cumplen esa condición y con los datos que poseemos no estaríamos en condiciones de determinar cuál de ellas sería la que mejor aproxima al efecto del fenómeno.

Gráfico 3

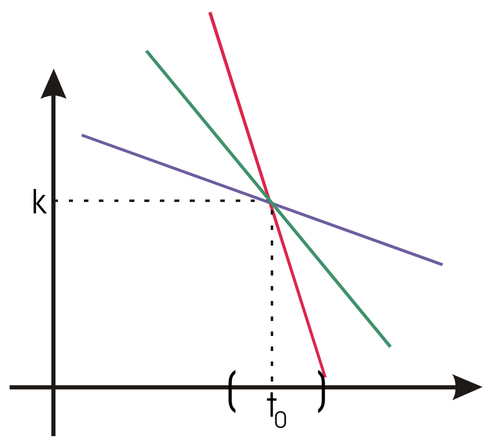
Representación gráfica de funciones f_i conociendo f_i(t_0) y signo de f_i´(t_0) positivo



- En forma similar si la variación de la medida del efecto del fenómeno es negativa podemos encontrar una función de la forma $f: R \to R \,/\, f(x) = ax - at_0 + k$, pero en este caso $a \in R^{-}$. Nuevamente tendríamos infinitas funciones que cumplen las condiciones dadas pero no podríamos optar por la que aproxima mejor a los efectos del fenómeno.

Gráfico 4

Representación gráfica de funciones f_i conociendo $f_i(t_0)$ y signo de $f_i'(t_0)$ negativo

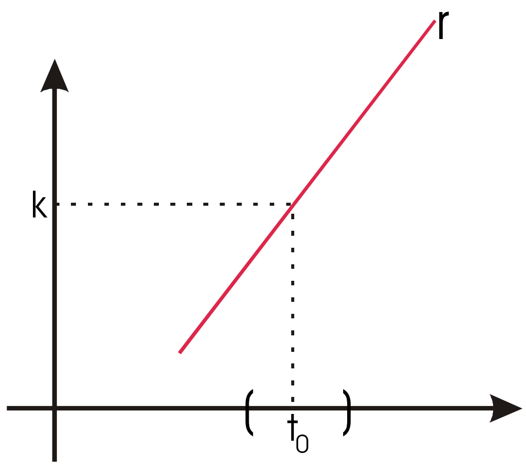


Pero, si además de conocer el signo de la variación, conocemos también el valor de éste, podríamos, de todas las anteriores familias de funciones (T), elegir la que se adecua a esta nueva información. Dado que la variación de una función en un real t_0 se corresponde con el valor numérico de la función derivada de la dada en t_0 sabemos que la función buscada tiene por tangente en $(t_0, f(t_0))$ a la recta (r) de ecuación:

$y = ax - a\,t_0 + k$ siendo "a" el valor de su variación instantánea, o sea el valor numérico de la función derivada de la función que nos interesa aproximar.

Gráfico 5

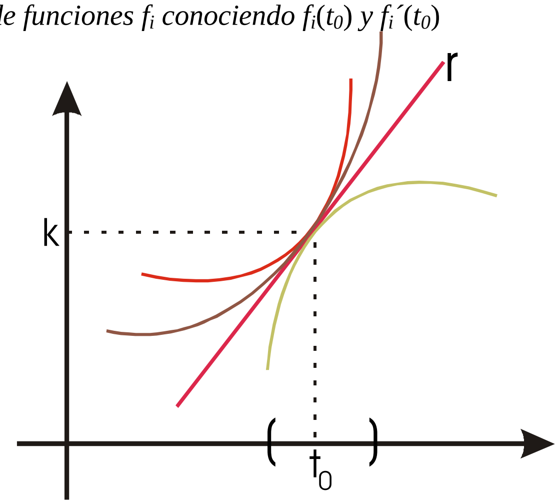
Representación gráfica de una función f conociendo $f(t_0)$ y $f´(t_0)$



Ahora, ¿cuántas funciones podemos determinar que cumplan las condiciones anteriores?, la respuesta es: Infinitas. Tenemos una nueva familia de funciones (*Y*) que aproxima los efectos del fenómeno en un entorno del real t_0 , esta familia de funciones verifica que $Y(t_0) = k$, $Y´(t_0) = a$. Tengamos en cuenta que cualquiera de las funciones de esta nueva familia (*Y*) es una mejor[1] aproximación de la función *F* en un entorno del real t_0, por lo tanto también a los efectos del fenómeno, que cualquiera de las funciones de la familia anterior (*T*).

Gráfico 6

Representación gráfica de funciones f_i conociendo $f_i(t_0)$ y $f_i´(t_0)$



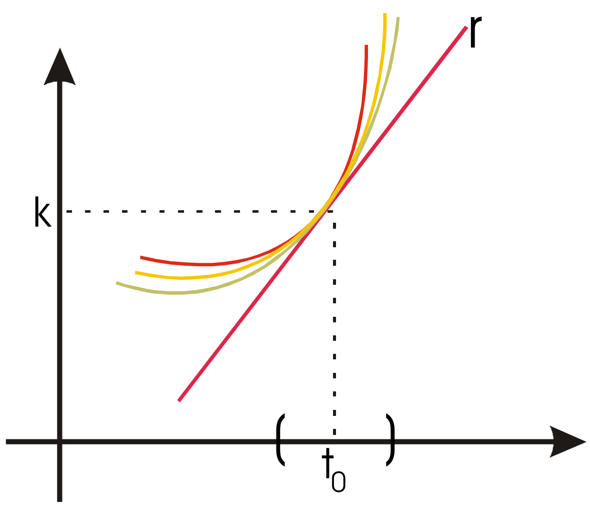
[1] En el caso de la función de la familia *T* que tiene coeficiente principal: $a = Y´(t_0)$ las funciones de la nueva familia (*Y*) no brindan una mejor aproximación sino la misma.

Si además conocemos cómo cambian estos cambios en t_0 , si su variación es positiva o negativa, tendremos nuevamente más datos para aproximar la función F en un entorno del real t_0. Dado que esta variación (positiva o negativa) indica la concavidad (positiva o negativa) de la función en el real t_0 podemos diferenciar dos casos:

- ❖ Si esta variación es positiva podemos determinar una nueva familia de funciones Z que aproxima mejor a la función f en un entorno del real t_0 y por lo tanto a los efectos del fenómeno. De esta nueva familia de funciones sabemos que cumplen que $Z(t_0)$ = K, $Z'(t_0) = a$ y $Z''(t_0) > 0$. De lo anterior podremos representar gráficamente algunas de las funciones de la familia Z:

Gráfico 7

Representación gráfica de funciones f_i *conociendo* $f_i(t_0)$, $f_i'(t_0)$ y *signo* de $f_i''(t_0)$ *positivo*

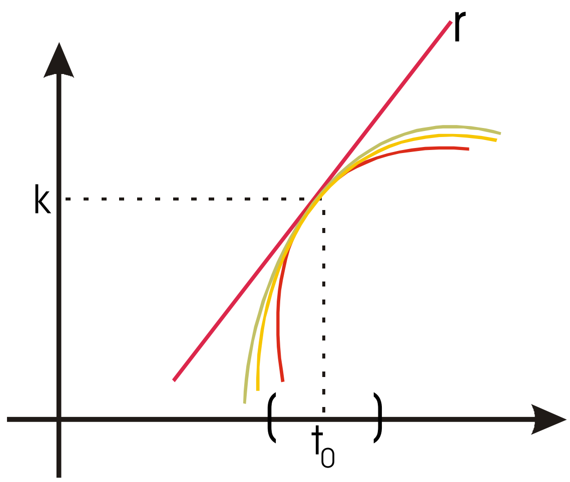


Las funciones de esta nueva familia son, en forma similar a la anterior y con la excepción antes mencionada, una mejor aproximación de la función f en un entorno del real t_0 que las funciones de la familia anterior (Y).

- ❖ En forma similar a la trabajada antes podríamos determinar una familia de funciones que verifique las condiciones dadas en el caso que la variación de los cambios sea negativa, o sea que las funciones de esta familia tendrán concavidad negativa en el real t_0.

Gráfico 8

Representación gráfica de funciones f_i conociendo $f_i(t_0)$, $f_i´(t_0)$ y signo de $f_i´´(t_0)$ negativo



Hasta ahora hemos puesto en primer plano un significado del valor numérico de ciertas funciones, del signo de la variación de dichas funciones, pero hemos observado que si, además de conocer el signo de esta variación conocemos su valor numérico, si podríamos cuantificar dicha variación, obtenemos más datos de la función. También hemos mostrado que, cuantificar estas variaciones, nos da más información sobre el universo de familias que aproximan a una función dada. En forma similar al trabajar con el cambio del cambio de la función, hemos mostrado en qué nos puede favorecer conocer el signo de esta nueva variación en la aproximación de funciones y en la determinación de ellas.

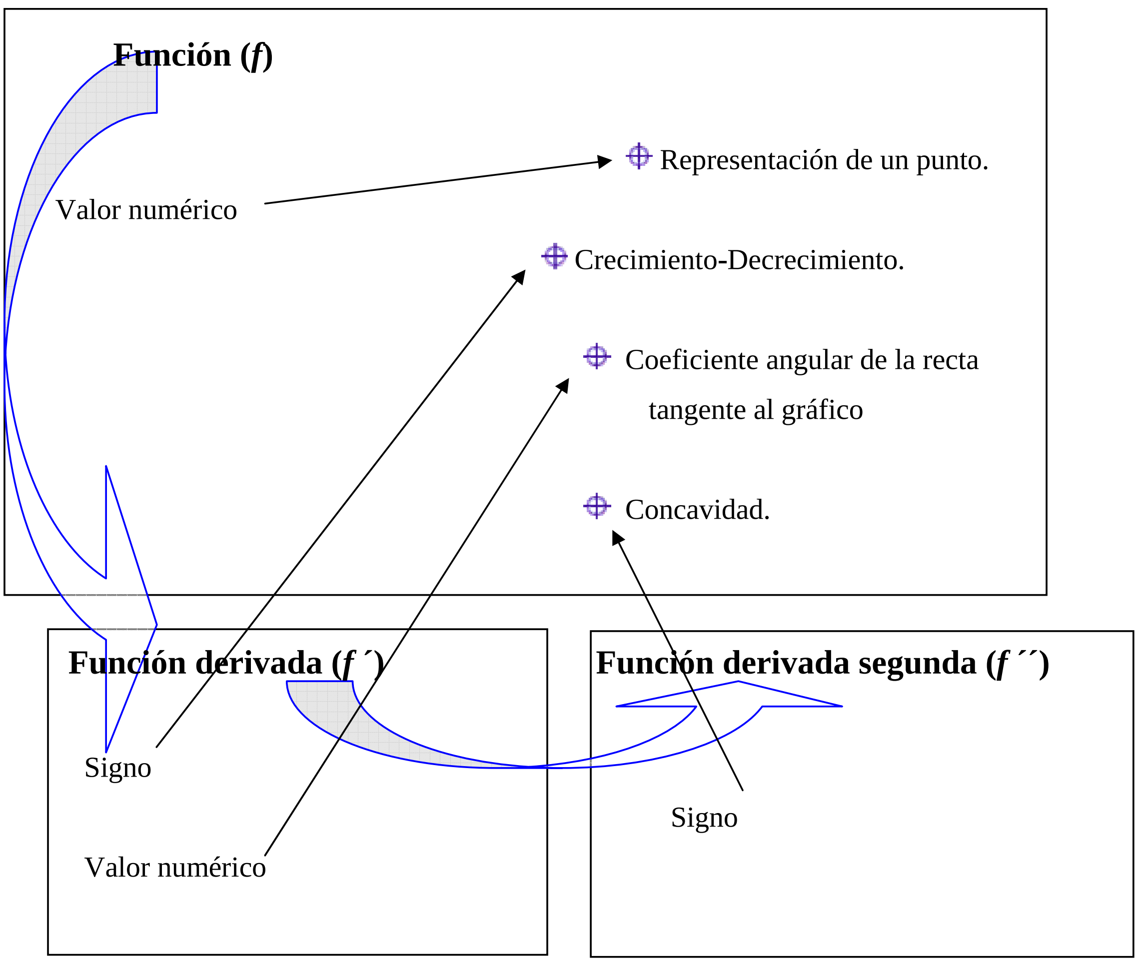
Los cursos de Análisis Matemático, basados en los programas oficiales, que han recibido los estudiantes entrevistados trabajan en estos tópicos matemáticos: función; valor numérico; función derivada primera; signo de la función derivada primera (para relacionarla con el crecimiento-decrecimiento de la función); valor numérico de la función derivada primera (para significarla como el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico en el punto en cuestión); función derivada segunda, signo de la función derivada segunda (para relacionarla con la concavidad positiva-negativa de la función). Pero no hemos encontrado, como se muestra en el Capítulo IV, muestras de trabajo con el valor numérico de la función derivada segunda.

Estos cursos tienen como objetivo el estudio analítico y la representación gráfica de una función dada (*f*), las funciones derivadas de ésta (función derivada primera y función derivada segunda) solo son estudiadas como herramientas para poder graficar la función dada, pero su vinculación es solo mediante algoritmos matemáticos en una de las vías, $(f \to f' \to f'')$, y mediante representaciones geométricas en la otra vía $(f'' \to f' \to f)$. (Muestras de esto se presentan en el Capítulo IV).

La anterior situación la podemos esquematizar en:

Esquema 1

Vinculaciones entre " $f \to f' \to f''$ " *y* " $f'' \to f' \to f$ *comúnmente trabajadas*



A partir del cuadro anterior podemos hacer varias observaciones, en este trabajo solo recalcaremos las relacionadas a él:

- Las vinculaciones “de bajada” solamente son por algoritmos o técnicas de derivación y las “de subida” solo brindan información gráfica: las flechas azules muestran una relación solo algorítmica entre f y f' y entre f' y f'', y las flechas negras muestran una vinculación entre aspectos de las funciones derivadas de la inicial (f' y f'') y aspectos gráficos de la función inicial (f).

- No se establecen relaciones de “subida” entre la función derivada segunda y la función derivada primera.

- No está presente el valor numérico de la función derivada segunda, por lo tanto es imposible, en este marco, poder establecer relaciones entre este valor y la función dada, o entre este valor y la función derivada primera.

- No están presentes ningunas de las funciones derivadas de orden mayor que dos.

- No se establecen relaciones “de bajada” entre aspectos de la función, función inicial o función derivada primera (f y f'), con las funciones derivadas sucesivas de ellas a no ser las de orden siguiente (f' y f'').

Preguntas de investigación

El presente estudio toma la hipótesis de trabajo de la línea de investigación “Pensamiento y Lenguaje Variacional” que considera que la noción de derivada se estabiliza en el pensamiento de los estudiantes solo hasta que la noción de derivada sucesiva aparezca y se tenga un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, hipótesis que surge de los trabajos de Cantoral y Farfán (1998).

Consideramos como requisito fundamental de lo anterior que el alumno desarrolle estrategias variacionales al trabajar con funciones y que logre significar estas variaciones. Dado que no creemos que el concepto de derivada sea construido por el alumno solamente conociendo la definición de derivada de una función en un real y la de función derivada, consideramos que a estos conceptos hay que impregnarlos con significados de variación.

Para significar la variación de un elemento creemos necesario previamente significar el elemento que varía:

Si existe la derivada de una función *f* en un real "*a*" ésta será:

$f\,'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ este límite nos brinda información de cómo y cuánto varía la función *f* en un entorno del real "*a*". Pero, ¿a qué tipo de variación de la función *f* nos estamos refiriendo? A una variación relacionada con la diferencia $f(x)$-$f(a)$, pero, ¿podemos significar esta variación si no significamos previamente a $f(x)$ y $f(a)$?

Consideramos que para que el alumno logre formar la noción de derivada sucesiva y establecer un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas debe incorporar elementos variacionales y significar los distintos elementos relacionados a la variación en estudio.

En el caso concreto de nuestro estudio consideramos que los programas oficiales uruguayos pueden permitir, en el mejor de los casos, que el alumno signifique el valor numérico de una función inicial, de la función derivada primera de la función inicial, lo cual lleva a que solo pueda trabajar con las funciones derivada primera y derivada segunda de la función inicial cercenando la posibilidad de significar funciones derivadas de orden mayor que dos, por lo tanto la construcción de la noción misma de derivada.

Esperamos que este estudio nos brinde herramientas que permitan generar secuencias didácticas para que los alumnos puedan significar el valor numérico de la función derivada segunda, lo que brindará mayores posibilidades de que signifiquen la función derivada tercera y así sucesivamente.

A partir de las observaciones anteriores, y considerando que es necesario que el estudiante signifique el valor numérico de la función derivada segunda, nos planteamos tres preguntas de investigación:

- ¿Cuál es el significado gráfico que dan los alumnos al valor numérico de la función derivada segunda?

- ¿Cuál es el papel que juegan las definiciones del concepto, y/o la imagen del concepto, cuando los alumnos se enfrentan a actividades que ponen en juego el significado gráfico del valor numérico de la función derivada segunda?

- ¿Cómo influye el Pensamiento y Lenguaje Variacional de los alumnos al enfrentarse a actividades que los ponen en juego el significado gráfico del valor numérico de la función derivada segunda?

Basándonos en algunos aspectos de la investigación, como la revisión bibliográfica y la visita a clase, creemos que, en una primera instancia, los alumnos no darán significado gráfico al valor numérico de la función derivada segunda ni se esforzarán a hacerlo. Creemos que una de las causas de esta actitudes es que en los programas de estudio no se establece trabajar, y menos significar, el valor numérico de la función derivada segunda, y deviene lógico que los entrevistados den, en primer instancia, respuestas del tipo "esto no me lo enseñaron" o "no se qué significa" y no intenten dar respuesta a las actividades que los enfrentan a significar este concepto. "La enfermedad didáctica también consiste en creer que, para que alguien aprenda algo, tiene que recibir un curso, o recibir clases sobre ese algo" (Chevallard, et al., 1997)

A pesar de lo planteado en el párrafo anterior, esperamos que, por la forma que fue estructurada la secuencia, los alumnos se cuestionen a lo largo de toda la secuencia, tal vez por primera vez, posibles significados gráficos del valor numérico de la función derivada segunda, que realicen conjeturas, las discutan y traten de validarlas.

Sistema educativo uruguayo

Dado que la presente investigación se realiza con alumnos uruguayos, consideramos necesario brindar un panorama general del sistema educativo uruguayo, el cual se divide en:

- Educación Primaria (de 6 a 11 años)
- Educación Secundaria (de 11 a 17 años)
  - Primer Ciclo (de 12 a 14 años)
  - Segundo Ciclo (de 15 a 17 años)

Obligatorio

- Educación Terciaria o Universidad

El último año del Segundo Ciclo de Educación Secundaria (sexto año) se divide en distintas orientaciones, dependiendo de los estudios terciarios que elegirá el alumno, estas orientaciones son: Ingeniería, Medicina, Economía, Arquitectura y Derecho. De dichas orientaciones solo la orientación Derecho no tiene cursos de matemáticas, en las demás opciones los currículos respectivos contienen los temas funciones, límites, derivadas, estudio y representación gráfica de funciones reales (ver Anexo I).

Los dos últimos años de secundaria se estructuran en base a un curso que se divide en teórico y práctico, que pueden o no ser dictados por el mismo docente. La carga horaria de los cursos de matemáticas se mide en períodos de 40 minutos y depende de cada orientación; en cada caso la carga horaria mencionada es semanal:

- Medicina y Agronomía: Curso de Análisis con 3 períodos de teórico y 2 de práctico.
- Economía: Curso de Álgebra y Geometría Analítica con 3 períodos de teórico y 2 de práctico y curso de Análisis con 3 períodos de teórico y 2 de práctico.
- Arquitectura: Curso de Análisis, Geometría Analítica y Geometría Descriptiva con 4 períodos de teórico y 2 de práctico.

- Ingeniería: Un curso de Análisis con 4 períodos de teórico y 2 de práctico, un curso de Geometría Analítica y Proyectiva con 4 períodos de teórico y 2 de práctico y un curso de Geometría Descriptiva con 3 períodos de teórico y 2 de práctico.

Los currículos de todas las orientaciones son únicos para todo el país, tanto para la educación privada (paga) como pública (gratuita). También se evalúa de acuerdo a una reglamentación común: el alumno puede exonerar la prueba teórica, si ha alcanzado una calificación dada por su docente de 7 sobre 12 en el curso, y obligatoriamente debe rendir una prueba práctica. Estas pruebas son realizadas en forma escrita por el alumno, y tanto la diagramación como la evaluación de éstas están a cargo de un tribunal que debe estar conformado por lo menos por tres docentes.

Si a la existencia de un programa único por curso le sumamos que en cada institución el examen se efectúa con una propuesta común, realizada por todos los docentes que forman el tribunal en cada caso, y se examina a todos los alumnos de una institución a la vez; está implícita una necesidad de coordinación entre los docentes. Esto lleva a que los cursos sean bastante similares, por lo menos en contenidos, a pesar de que sean dictados por distintos docentes.

Una situación similar se da en la educación terciaria, en particular en el Instituto de Profesores Artigas al que pertenecen algunos de los alumnos entrevistados. En esta institución los cursos son aprobados con examen obligatorio que consta de una prueba práctica que se realiza en forma escrita y si ésta es satisfactoria se debe rendir una prueba teórica oral. También en este caso todos los alumnos de cierto curso presentan su examen el mismo día y frente a un tribunal formado por tres profesores como mínimo.

Todo lo anterior intenta dar una idea de que los estudiantes entrevistados han recibido una formación bastante similar, sobre todo en contenidos, más allá del docente o la institución a la cual pertenezcan.

En el presente estudio se aplicó una secuencia a alumnos que recién habían concluido sus cursos del último año del Segundo Ciclo pero que aún no habían rendido el examen correspondiente, y a alumnos de segundo año del Profesorado de Matemáticas (IPA).

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Presentamos brevemente distintas concepciones sobre la investigación en la enseñanza de las matemática haciendo énfasis en la cual se enmarca esta investigación: la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional. Para ello es necesario previamente realizar ciertas referencias sobre la Matemática educativa y la Socioepistemología.

Un criterio muy común en la sociedad es que la enseñanza, sobre todo en el caso de las matemáticas, es unidireccional, pues el docente trasmite los conocimientos y el alumno los recibe con ciertas variaciones que, en general, se las relaciona con la atención que éste presta al discurso de su docente o con ciertas facilidades innatas asociadas a la materia. Se considera que el docente puede lograr que el alumno haga suyo el concepto a enseñar solo con su discurso, o sea el docente expone el concepto y los alumnos lo incorporan en forma casi automática. “Cuando un profesor se encuentra ante sus alumnos en su salón de clase, se espera que enseñe un conocimiento específico y que los estudiantes lo aprenderán” (Cantoral, 2000).

De lo anterior cabe concluir que se espera que todos los alumnos aprendan “casi lo mismo”, ya que el discurso de su docente es el mismo para todos. Sobran los ejemplos de clases muy similares, dictadas por un mismo docente en distintos grupos, inclusive casi la misma clase año tras año, sin importar las características del grupo en cuestión. Presentamos en el Capítulo IV muestras de que en varios casos se expone el tema derivadas de la misma forma a todos los grupos de cierto profesor, y además, la forma de exponer el tema, se mantiene con cierta constancia a pesar de que pasen los años. Parece que se cree que el conocimiento a enseñar es totalmente independiente del grupo humano que lo esté trabajando y de las posibles construcciones que este pueda realizar.

Si los alumnos aprenden solamente a partir de la exposición en clase de los conceptos por parte del docente, ¿por qué son tantas las muestras de fracaso en matemáticas? La concepción clásica de la enseñanza de la matemática considera que “la enseñanza de las matemáticas era un arte, y como tal, difícilmente susceptible de ser analizada, controlada y sometida a reglas. Se suponía que el aprendizaje de los alumnos dependía solo del grado en que el profesor dominase dicho arte y, en cierto sentido, de la voluntad y la capacidad de los propios alumnos para dejarse moldear por el artista" (Chevallard, et al., 1997). A pesar que esta cita está escrita en pasado, son muchas las muestras que esta concepción de la enseñanza de la matemática está presente aún en las instituciones educativas.

Bajo esta concepción clásica bastaría con un docente debidamente preparado en el área, un alumno interesado en aprender, para que se establezca el proceso enseñanza-aprendizaje buscado. Sobran ejemplos de que esto no sucede a pesar de que estén presentes las dos condiciones antes mencionadas. Los resultados de los exámenes finales de los alumnos del curso de análisis de Uruguay muestran que aunque el docente haya presentado la definición de derivada, aunque se hayan demostrado teoremas relativos, esto no es suficiente para que el alumno de signifique ricamente a la derivada.

En forma ingenua podríamos reconocer aspectos positivos de la postura "profesor transmisor de conocimientos acabados". En una clase tradicional el docente solo debe aceptar el programa establecido, sintiéndose libre por poder cambiar el orden del dictado de los temas, reproducir los conceptos matemáticos que están trabajando, sin necesidad de preguntarse sobre estos conceptos, sobre cómo los alumnos los construyen, ya que esta visión implica que el docente transmite los conocimientos al alumno y este los asimilará en forma pasiva. Esta visión brinda una ingenua seguridad, dado que el docente conoce el tema a enseñar, le han indicado cómo secuenciarlo, por lo tanto si se presentan "malos aprendizajes" estos no son su responsabilidad. Si el alumno no logra transferir la definición de derivada a un caso concreto será porque "no ha estudiado lo suficiente", lo que libera de culpas al docente.

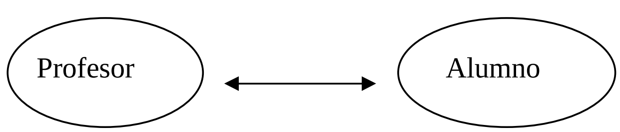
En cambio se percibe necesario que tanto docentes como estudiantes se comprometan, a distintos niveles, con el proceso que se desarrolla en el aula. "El hombre radical, comprometido con la liberación de los hombres, no se deja prender en círculos de seguridad en los cuales aprisiona también la realidad. Por el contrario, es tanto más radical, cuando más se inserta en esta realidad para, a fin de conocerla mejor, transformarla mejor. No teme enfrentar, no teme escuchar, no teme al desvelamiento del mundo. No teme al encuentro con el pueblo. No teme al diálogo..." (Freire, 1970).

Podemos observar que en la actualidad, en Uruguay, los programas provienen de visión de las matemáticas formales (ver Anexo I), los métodos de enseñanza se basan en la memoria y en la adquisición de ciertas técnicas algorítmicas, necesarias pero no suficientes para construir ciertos conceptos. En la mayoría de los casos se encuentra próximo al aprendizaje de “reglas sin razones”, aprendizaje instrumental en el sentido de Skemp, (1976), y en los casos que se establezca un aprendizaje relacional las relaciones, en general, son mostradas por los docente y no descubiertas, o generadas, por los alumnos. Mostramos en la entrevista a docentes (Capítulo IV) que estos exponen a sus alumnos la definición de derivada, que son los docentes los que muestran la relación entre ésta y el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico, y que la participación del alumno es solamente como espectador de dicha presentación. El alumno no descubre las relaciones sino que estas les son transmitidas, y no se da la oportunidad de que pueda buscar nuevas relaciones aparte de las ya planificadas para ser expuestas por el docente.

Lo que caracteriza a la didáctica clásica es que considera que los saberes matemáticos involucrados en cierta actividad escolar no son problemáticos en sí mismos, o que no son parte de la problemática de la didáctica. “Se supone que dichos saberes pueden ser utilizados para explicar hechos didácticos, pero no se acepta ningún tipo de cuestionamiento de estos saberes en base a hechos didácticos” (Chevallard, et al., 1997)

Comentario [t1]: El término situación didáctica es propio de una teoría que ya abandonó a la didáctica clásica ... por lo que la oración es un tanto “contradictoria”

La didáctica clásica considera dos focos, el alumno y el profesor, las nociones de enseñar y/o aprender matemáticas no forman parte de su estudio. Podemos esquematizar esta situación de la siguiente manera:



Dentro de la didáctica clásica podemos diferenciar dos enfoques, uno centrado en el profesor y otro centrado en el pensamiento del alumno.

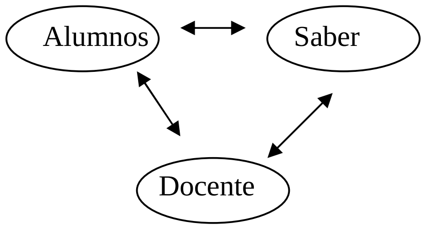
Estudios realizados por Cantoral, R. y Farfán, R. (2003) han mostrado que:

- El enfoque centrado en el profesor busca presentar los contenidos matemáticos de la forma más accesible para los estudiantes y los profesores. Se considera que se puede construir currículos mejores, más eficientes, solo con la reflexión del profesional de la matemática. En este enfoque importa centralmente la opinión del profesional, mientras que los factores cognitivos, afectivos y/o socioculturales no son tenidos en cuenta. Se produce bajo esta visión lo que se cree que la escuela debe consumir, sin estudiar en profundidad la cultura escolar.

- El enfoque centrado en el alumno lleva a que a partir de observar las experiencias de aprendizaje de los estudiantes se busque obtener pautas que orienten el diseño curricular. Este paradigma no tiene en cuenta que la relación que se establece entre estudiantes y objetos matemáticos también está condicionada por concepciones acerca de lo que es la actividad matemática para el estudiante o de lo que signifique para él aprender matemáticas o de su historia personal con la materia hasta el momento. Tampoco tiene en cuenta que las situaciones de enseñanza y sus producciones matemáticas están condicionadas por las características de la costumbre didáctica. No se considera que los distintos grupos sociales en los que se encuentra inmerso el alumno matizan sus procesos de pensamiento.

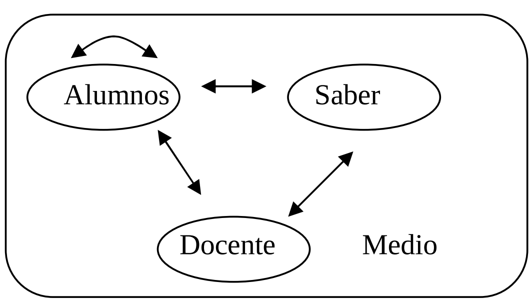
La didáctica fundamental amplía la problemática anterior cuando, al comienzo de la década del 70, Guy Brousseau incluye, como tercer foco de estudio, al saber matemático. De lo anterior las nociones como aprender y/o enseñar matemáticas, concepto matemático, etc, dejan de ser nociones “transparentes” para convertirse en otro de los objetos de estudio de esta didáctica.

Podemos esquematizar este enfoque sistémico de la didáctica fundamental de la siguiente forma:



Otra visión distinta al esquema clásico de la enseñanza, “profesor enseña, alumno aprende”, es la aproximación sociocultural del aprendizaje. En ella no se cree que aprender matemáticas sea una mera copia del exterior, sino que“... los procesos mentales humanos poseen una relación esencial con los escenarios culturales, históricos e institucionales. De modo que se presenta un marco según el cual es posible hablar de distintas formas de pensar matemáticas al considerar que el escenario modifica dichos pensamientos” (Cantoral, 2000). En este marco “enseñar” es crear las condiciones que permitan la apropiación del conocimiento por parte del alumno y “aprender” es hacer suya una situación cuya consecuencia final es la disponibilidad de un conocimiento en su doble estatus, objeto y proceso.

Esto lleva a considerar la aproximación sistémica inserta en un medio que influye, y es influido, por los tres polos. Los fenómenos didácticos, en la aproximación sistémica de la sociepistemología, se estudian desde tres polos: el del saber, el de quien aprende, el de quien enseña, todos considerados en un medio determinado.



“... nuestra forma de aprender matemáticas no puede reducirse a una mera copia del exterior, o digamos que, a su duplicado ... es posible hablar de distintas formas de pensar matemáticas al considerar que el escenario modifica dichos pensamientos.”

(Cantoral, 2000). Es por ello que consideramos que el triángulo sistémico anterior no puede ser estudiado separado del medio en el cual se encuentra inserto dado que este influye sobre las tres componentes y sus relaciones.

“Aunque las preocupaciones por la enseñanza de la matemática y por su mejora progresiva son tan antiguas como la enseñanza misma y ésta tan antigua como la vida en sociedad, el estudio sistemático para localizar los fenómenos que la caracterizan, tendrá apenas, si acaso, unas décadas de existencia entre nosotros”(Cantoral y Farfán, 2003). Por lo tanto debemos tener presente que esta nueva visión de la didáctica de las matemáticas (la Matemática Educativa) es muy actual y, a pesar de estar constituida como una ciencia, continúa desarrollándose.

La aproximación socioepistemológica[2] no considera que el tema a tratar, por sí solo, determine la forma de trabajarlo, ni que esté predeterminado el significado de éste. El saber estará presente, pero no un saber ya acabado, pronto para ser consumido por los estudiantes, sino un saber que será construido en el grupo de trabajo. Si pensamos en el tema derivada, no podemos dejar de lado las vivencias de los alumnos relacionadas con el tema, dado que ellas, los conocimientos previos (no solo curriculares), influirán en la significación que se le de al tema. También se deben tener en cuenta las interacciones que hará el estudiante con sus compañeros, con el docente, las que esperamos que le ayuden a dar significado propio, del grupo, al tema en cuestión.

Comentario [t2]: Si es Resigificado no quiere decir que ya esta construido con un cierto significado??? No es mejor poner que será construido???

El medio, inmediato y mediato, influye transformando esta relaciones por lo tanto también a sus actores. La institución en la cual se encuentra inserto tendrá su concepción pedagógica, la que influye en el sistema didáctico. Luego podemos ubicar al sistema de enseñanza, el que decide, por ejemplo, programas, número de alumnos por grupo, pedagogías (en sugerencias de cómo organizar el curso) lo que también influirá en los actores. A este medio Chevallard (1997) le llama noosfera. Luego podemos ubicar a la sociedad toda, los padres, la cultura propia de cada lugar en especial.

[2] Este acercamiento fue presentado por el Dr. R. Cantoral en dos reuniones académicas como plática inaugural del Seminario de Investigación en Matemática Educativa de Área de Educación Superior del CINVESTAV en México y como conferencia plenaria en la Conference on Research in Mathematics Education en EUA, ambas en setiembre de 1997.

Observemos que depende de las decisiones, o falta de ellas, de los individuos que forman el medio en el cual se inserta el triángulo sistémico que cierto saber sea trabajado, o no, en la escuela así como la forma de acceder, o tener contacto, a él.

Por ejemplo, en las recomendaciones de la Inspección de Matemáticas de Educación Secundaria de Uruguay para el tema "derivada segunda" se plantea:
"*Tema*: Derivada segunda, concavidad puntual y puntos de inflexión.
Contenidos a desarrollar: "Definir derivada segunda, dar ejemplos. Ecuación de la tangente al grafico en un punto. Definir concavidad negativa y positiva en $x = a$. Definir punto de inflexión, dar ejemplos. Demostrar que si $f\,''(a)>0$, entonces f tiene concavidad positiva en $x=a$ (se dejará la demostración del teorema análogo como ejercicio). Condición suficiente para la existencia de punto de inflexión.
Tema: Concavidad en un intervalo
Contenidos a desarrollar: Definir concavidad en intervalos, criterios relativos."

Podemos observar claramente que se encuentra implícita una pedagogía, que se presenta el tema como un paquete para ser transportado al salón de clase, ser presentado al alumno y que éste lo consuma. No se tienen para nada en cuenta las posibles construcciones realizadas por el grupo, por la interacción entre los alumnos, con el docente, las posibles preconcepciones, acercamientos previos, que los alumnos tengan de los conceptos en cuestión. O sea la noosfera está determinando no solo el saber a enseñar sino también la forma de trabajarlo.

Pero, a pesar de reconocer y afirmar que la matemática tiene valor en sí misma, no debemos olvidar que la matemática escolar, en el sistema didáctico de la enseñanza superior, está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas, de donde adquiere sentido y significación como ya lo ha indicado Cantoral (2000). De las recomendaciones de la Inspección de Matemáticas de Educación Secundaria de Uruguay para el tema "derivada segunda" antes presentadas podemos deducir que el estudio de este tema está enfocado a un dominio formal de los elementos y las técnicas que lo componen dejando de lado razones que hacen necesario el estudio de este tema.

La socioepistemología hace énfasis también en el estudio de *qué* enseñar, y no solo en el *cómo* enseñar, incluye además las intuiciones primarias del alumno con el objetivo de rediseñar el discurso matemático escolar. Este acercamiento puede permitir que el estudiante encuentre las razones, que hacen que sea relevante estudiar cierto tema, lo que lógicamente, llevará a que pueda ver el tema en cuestión, y por qué no la matemática, no como algo que debe ser estudiada solo porque es "impuesta", sino por las propias razones que le dan significado.

El problema de estudio presentado en este trabajo no se reduce a secuenciar contenidos matemáticos para que sean más accesibles a alumnos y profesores, ni se centra solo en los aspectos cognitivos que involucra. Por ello encuadramos esta investigación en una aproximación socioepistemologíca, y en particular en el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PLV), la que nos permitirá construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas, fenómenos de producción y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple.

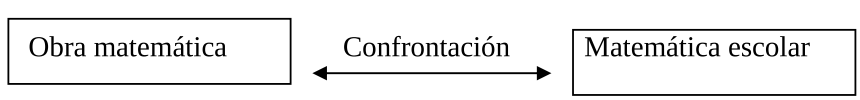
Matemática Educativa

La matemática educativa es una disciplina joven que surge en México hace aproximadamente 30 años. Es una disciplina que se relaciona con otras y cuyo objeto de estudio pertenece tanto al ámbito educativo como al matemático. Según Cordero (2001), ésta debe luchar contra una inercia, que consiste en mirarla como una actividad de servicio para el sistema educativo en contraste a una actividad de estudio que genera conocimiento propio para desarrollarse y responder (ofrecer alternativas) al sistema educativo.

Según Moreno (1995) la Matemática Educativa tiene en su origen la necesidad de caracterizar, con el mayor grado de rigor posible, la actividad, teórica y práctica, que aparece vinculada a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Pero, destaca, que el conocimiento matemático es necesario, pero no suficiente, para la caracterización de esta disciplina. La forma de conocimiento que se espera generar se construye mediante una relación continua con un sistema educativo. En este sentido Cantoral y Farfán (2000) consideran que una de las principales y más recientes contribuciones de esta disciplina es el doble proceso de desarrollo que se nutre de la reflexión matemática al seno de lo didáctico, por una parte el apoyo, por otra, la explicación didáctica con base en la construcción social e individual del conocimiento.

La Matemática Educativa introduce aspectos sociales en las investigaciones didácticas, reconoce que la enseñanza y el aprendizaje constituyen tanto una práctica humana como social. “No mirar los conceptos y sus diferentes estructuraciones conceptuales en forma aislada, sino tratar con las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos” (Cantoral y Farfán, 2003). No se busca enseñar un conocimiento matemático, como lo dice Moreno, ya establecido, inmodificable, sino poner énfasis en cómo se acercan, cómo construyen, cómo interactúan con los conocimientos matemáticos los que aprenden, lo que permitirá comprender mejor a la matemática. Se busca “mejorar los métodos y los contenidos de la enseñanza y proponer las condiciones para un funcionamiento estable de los sistemas didácticos, asegurando entre los alumnos la construcción de un saber viviente, susceptible de evolución, y funcional, que permita resolver problemas y plantear verdaderas preguntas” (Cantoral, 2000). Se desprende claramente que no se considera a la matemáticas como algo estático, ya construido, que solo debe ser “transmitido”, sino como algo dinámico que nace, vive, cambia, a partir de su construcción en distintos escenarios sociales.

“La problemática fundamental de la enseñanza de la matemática que atiende la disciplina matemática educativa, consiste en haber identificado una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. Cada una es de naturaleza y función distintas.” (Cordero, 2001).



Muchas veces la confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar no es tenida en cuenta; como ya hemos descrito en la didáctica clásica no se acepta ningún tipo de cuestionamiento a los saberes matemáticos en base a los hechos didácticos. En esta postura “se ignora la distancia entre las obras matemáticas y su adaptación a las instituciones didácticas, suponiendo implícitamente que dicha adaptación solo puede consistir en una imitación más o menos fiel de las obras matemáticas tal y como fueron producidas" (Chevallard, et al., 1997) Se cree que solamente secuenciando adecuadamente los contenidos de los currículos el conocimiento puede ser "llevado" al aula. No se tienen en cuenta los posibles mecanismos de construcción de tales conocimientos que puedan producirse dentro de un aula, de un grupo social, en especial.

En cambio la socioepistemología reconoce esta diferencia no solo como una forma de optar cómo secuenciar, organizar los elementos en el currículo escolar sino como una confrontación de carácter matemático. Reconocer esta confrontación puede permitir, como nos extenderemos en el tema siguiente, reorganizar la obra matemática.

Dado que consideramos a la obra matemática profundamente distinta a la obra escolar debemos reflexionar sobre el proceso que lleva una a la otra. El saber sabio sufre varias transformaciones hasta que es introducido como un saber escolar, se produce una transposición didáctica (en el sentido de Chevallard). El saber está íntimamente relacionado con su productor, es un saber personal. Cierta persona produce un saber a partir de un proceso interno, luego, para comunicar, compartir, este saber con la comunidad científica debe despersonalizarlo, darle una lógica necesaria y linealizarlo para transformarlo en un saber comunicable.

En este punto el matemático, el sabio, borra todos lo errores que ha cometido, no aparecen las distintas tentativas infructuosas, en general no incluye todas las reflexiones que ha realizado, desaparecen las razones que le llevaron a realizar ciertas acciones. Todos estos aspectos tampoco están presentes en la matemática escolar. En las investigaciones de clases en este estudio presentadas y en el análisis de libros de texto se puede observar que el tema "derivadas" es expuesto al alumno en forma abstracta, fuera del contexto en el cual surgieron estas ideas, no relacionándolo a ninguna problemática, no permitiendo que el alumno le de un significado propio, sino que este tema es presentado solo como un eslabón en la cadena del programa vigente.

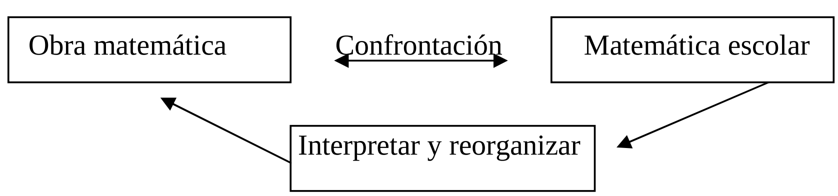
"El saber que produce la transposición didáctica será por lo tanto un saber exiliado de sus orígenes y separado de la producción histórica en la esfera del saber sabio, legitimándose, en tanto saber enseñado, como algo que no es de ningún tiempo ni de ningún lugar y no legitimándose mediante el recurso de la autoridad de un productor, cualquiera que fuere." (Chevallard, 2000). La función principal de cierta obra matemática no tiene como fin ser llevada a la escuela. La obra de Newton, de Leibniz no tenía como fin que se enseñara en la escuela derivadas para estudiar y graficar una función.

No debemos dejar de lado el grupo donde “se piensa” el funcionamiento del sistema didáctico, noosfera para Chevallard, aquí se eligen los temas que formarán el currículo y se secuenciarán, se decide el “saber a enseñar”. El saber a enseñar a su vez sufre ciertas deformaciones para convertirse en un saber enseñado, este es llevado a libros de textos, es adaptado para ser comunicable, transmitido, a los alumnos.

La Matemática Educativa tiene en cuenta los hechos antes mencionados y entre sus objetivos se encuentra la formulación de explicaciones acerca de la construcción del conocimiento matemático, y teorizar acerca de cómo reorganizar la obra matemática a la luz de las investigaciones.

Socioepistemología

Dado que reconocemos la confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, consideramos que las construcciones que se realizan en el aula permitirán interpretar y reorganizar la obra matemática.

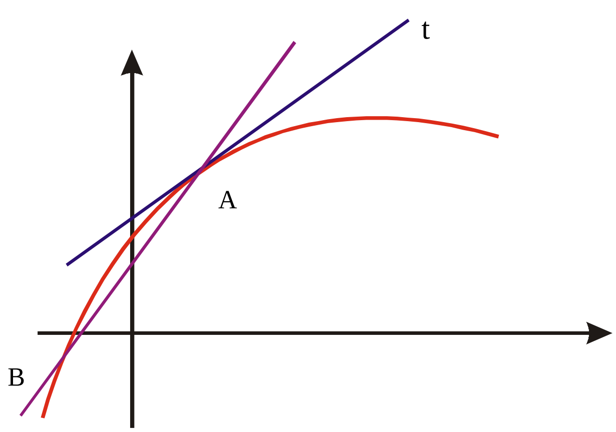


Encontramos epistemologías modelizadas por la actividad matemática, el foco de interés de sus respectivos marcos teóricos está en la actividad matemática que desarrolla el individuo y en la cognición individual respecto a la adquisición del objeto matemático, soslayan al propio humano como tal y a la actividad que realiza dentro del contexto social del salón de clase. En estas epistemologías se "minimiza el papel de la interacción humana en la práctica matemática, se está separando al pensamiento matemático de sus orígenes en contextos sociales y se obscurece el papel que juega el desarrollo y uso de las herramientas para construir el objeto matemático" (Buendía, Cordero, 2002)

Este tipo de epistemologías se presentan muy frecuentemente en clases donde el docente transmite conocimientos ya acabados, sin importar los conocimientos previos de sus estudiantes, sus construcciones, las construcciones del grupo. En este tipo de prácticas docentes los estudiantes solo son actores pasivos en la asimilación del conocimiento que les es transmitido.

Dentro de estas epistemologías podemos encontrar que el tema "derivadas" es presentado, en algunos casos, a partir del gráfico de una función, relacionando a la derivada con el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico en un punto A(a, $f(a)$). Se observa (gráfico 9) que esta tangente (t) es el límite de las secantes que determinan los puntos A(a, $f(a)$) y B(x, $f(x)$) cuando $x \to a$. Luego se pasa a definir derivada de una función en x=a. Ejemplos de estos casos presentamos en el Capítulo IV, donde se presenta una encuesta a docentes, y el análisis de libros de texto.

Gráfico 9



En este tipo de presentación al tema derivadas no se muestran, o se generan, dentro de lo posible, el tipo de problemas que llevaron a la necesidad de "crear" la derivada, ni problemas próximos a los alumnos que permitan significar a la derivada. Podrían ser, en el contexto de los alumnos de Uruguay, la necesidad de predecir, la relación con actividades de materias paralelas (por ejemplo física), retomando actividades que vinculen recorrido-velocidad.

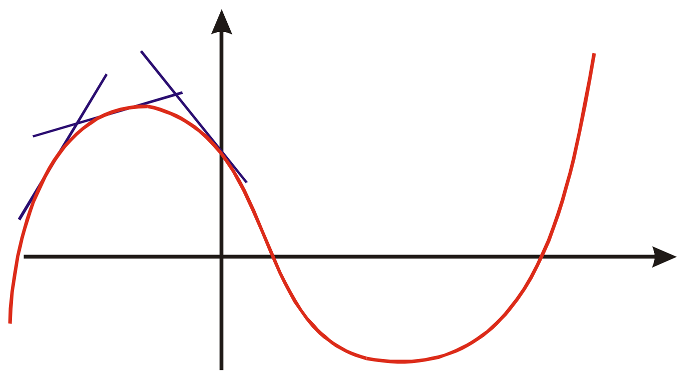
En oposición a este tipo de epistemologías el enfoque socioepistemológico plantea que se deben ampliar los esquemas explicativos, teniendo en cuenta también la actividad humana, la interacción del individuo con su medio, el origen del conocimiento matemático, las herramientas producidas y usadas para la construcción del conocimiento. "...reconocer categorías de conocimientos matemáticos que a priori no están en el currículo, romper el carácter universal de la construcción a partir de reconocer otras, formular nuevas acciones didácticas en las que el diseño de situaciones está sustentado por la actividad humana" (Cordero, 2001).

Dado que para llevar las matemáticas a la escuela debemos reconstruir la obra matemática la socioepistemología propone estudiar los fenómenos didácticos asociados a tales obras que deben ser tenidos en cuenta en dicha reconstrucción. También se debe tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes y que dicha reconstrucción, de ser posible, no se oponga a ellos; y en caso de ser inevitable esta oposición, por ejemplo obstáculos epistemológicos ampliamente estudiados, preverla proponiendo actividades que ayuden al estudiante a superar dicha oposición.

Con un enfoque socioepistemológico de "aprender y enseñar" matemáticas, y en especial el tema derivadas, encontramos la propuesta "Una introducción a la derivada a través de la variación", Dolores (1999). En ella se plantea el abordaje de la función derivada a partir de, entre otros puntos, estudiar variación de funciones, respuesta a una necesidad de predecir, estudiar velocidades instantáneas, donde, en forma natural, el alumno tendría un contacto con derivadas, estaría derivando si aún institucionalizar el concepto y a partir de una necesidad y no de una imposición del concepto por parte del docente.

El tradicional tratamiento que se da a la derivada segunda y a la concavidad de una función, por ejemplo, en los cursos de análisis de sexto año de secundaria en Uruguay, es definir concavidad positiva (o negativa) en un real y en un intervalo, luego se demuestran teoremas que vinculan el signo de la derivada segunda de una función en un intervalo con su concavidad. Se "muestra" al alumno cuando una función presenta concavidad positiva en un intervalo, para luego pasar a definir este nuevo concepto y demostrar teoremas relativos. El trabajo en general se realiza comparando el gráfico de la función con las rectas tangentes a él en dicho intervalo (gráfico 10).

Gráfico 10



Podemos observar que, por ejemplo en el intervalo (-6,0) cualquier recta tangente al gráfico deja a dicho gráfico "por debajo" de ella.

Se define concavidad negativa de una función *f* en un intervalo abierto *I*: *f* presenta concavidad negativa en I sí y solo si $\forall a \in I\ \exists E^{*}{}_{a} / \forall x \in E^{*}{}_{a},\ f(x) < t(x)$ siendo *t* la recta tangente al gráfico de *f* en (*a*,*f*(*a*)).
($t(x)= f\,´(a)\ (x-a) + f(a)$)

Las epistemologías que sustentan este tipo de prácticas consideran a las matemáticas como algo ya construido y estudian el acercamiento del individuo a este conocimiento. En este ejemplo podemos observar que se "impone" la definición de concavidad. En cambio la socioepistemología reconoce al hombre haciendo matemáticas, a la actividad humana como una organización social y una fuente donde se construye conocimiento. Por lo tanto, a diferencia de las anteriores, el conocimiento no está preestablecido, sino que surge de la interacción del individuo, como un ser social, cultural, histórico, con su entorno. Esto lleva a que en un salón de clase no se copien realidades, nociones cognitivas ya existentes fuera de ella, sino que éstas son creadas por y para el grupo, es éste quien asigna el significado, quien crea y desarrolla el conocimiento.

La definición de concavidad (positiva o negativa) puede ser impuesta, como en el ejemplo anterior, o puede surgir del grupo a partir de secuencias didácticas. En el Anexo II se presenta una secuencia, trabajada por las Prof. Ochoviet y Testa (2002), tendiente a dar significado al concepto "concavidad" y en una etapa posterior, en la confrontación, negociación de ideas entre el grupo, llegar a institucionalizar el concepto. Se puede observar que pueden generarse distintas definiciones de concavidad y posteriormente demostrar que son equivalentes. Por ejemplo la definición antes dada, o definir concavidad a partir de comparar el gráfico de la función con rectas secantes, u otras concepciones que surjan del grupo de trabajo.

Por lo tanto, el enfoque socioepistemológico, no considera al conocimiento como algo externo, acabado, que solo debe ser transmitido al alumno, sino que el conocimiento se va construyendo, y reconstruyendo, en las situaciones de interacción que se dan en el aula, se producen resignificaciones de significados en un proceso de negociación. Las explicaciones que se brindan estarán en función de las características propias del humano al hacer matemáticas en contextos socialmente organizados. "... en la actividad humana el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención. Ahí, se construyen versiones diversas respecto a su contenido. Estas versiones se comparan, negocian y reconstruyen en el proceso mismo de la actividad y definen de manera gradual los diversos significados para los humanos" (Cordero, 2001).

La matemática es considerada como una herramienta para modelar, se debe tener en cuenta en qué actividades están interesados los alumnos, cuáles les son familiares, para que, a partir de allí, generar situaciones que permitan hacer construcciones, hacer distinciones entre ellas para seleccionar una clase de actividades y acciones hechas con herramientas. En este uso, en su entendimiento, el individuo reconstruye significados. De esta forma se realiza una reorganización de la obra matemática, que implica el rediseño del discurso matemático escolar, se deben determinar los elementos teóricos que permitan esta reconstrucción de significados en los diferentes niveles escolares, y la actividad humana será la que nos brindará elementos para esta reorganización.

Dentro de esta perspectiva nos interesa el pensamiento matemático y la actividad matemática como una forma de actividad humana. “Nos interesa entender, aún en el caso que su respuesta a una pregunta no corresponda con nuestro conocimiento, las razones por las que su pensamiento matemático opera como lo hace. ... nos interesa analizar las ejecuciones de los alumnos ante tareas matemáticas, tanto simples como complejas, como formas de entender el proceso de construcción de los conceptos y procesos matemáticos; al mismo tiempo sabemos que, en esa labor, su propio pensamiento matemático está, también, en pleno curso de constitución” (Cantoral, 2000). Entender el pensamiento matemático de los estudiantes nos brindará elementos para reconstruir la obra matemática incorporando actividades que fomenten el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos, y como ya hemos indicado, actividades que los enfrenten a posibles obstáculos y les faciliten su superación.

Pensamiento y Lenguaje Variacional (PLV)

En los currículos de enseñanza secundaria de Uruguay se realiza un pequeño acercamiento al trabajo en álgebra en primer año que luego es profundizado en segundo año. A la vez se estudia, en segundo año, funciones elementales introduciéndoles al trabajo con variables. O sea que el alumno se enfrenta, casi simultáneamente, al álgebra y al trabajo con variables. Luego, en los años sucesivos, se profundiza en ambos campos llegando en el último año de Educación Secundaria (sexto), al estudio formal de las matemáticas de las variables.

Que el alumno desarrolle un lenguaje y un pensamiento variacional no está asegurado por la sola inclusión en los currículos de la matemáticas de las variaciones, además consideramos que para que se desarrolle este tipo de pensamiento se precisa de procesos temporalmente prolongados. Como ya lo ha indicado Cantoral (2000), el PLV requiere más que el dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, también se deben realizar cambios en los estilos de pensamiento prevariacional (por ejemplo el pensamiento algebraico), los cuales deben ayudar a la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio.

El alumno debería poder reconocer en las funciones un doble estatus, objeto y proceso. Es muy común que el alumno mantenga la visión de la función como proceso, dado que así fue como les fue transmitida. Pero, ¿qué significa aplicarle un proceso a un proceso? ¿Cómo podemos derivar una función si ésta es aceptada solo como proceso? Consideramos que el alumno, al iniciar cursos superiores debe reconocer a la función como objeto además de cómo proceso, y poder transitar entre función-proceso y función-objeto. En investigaciones realizadas por el equipo de PLV (Cantoral, 2000) se ha detectado que si el estudiante posee un dominio del registro gráfico, será más fácil reconocer, y trabajar, con la función en su doble estatus (objeto, proceso).

En general el trabajo con gráficos es dejado de lado, o relegado a último momento, en los cursos de análisis. En Uruguay, en el último curso de bachillerato, hasta que no se enseña a calcular límites, derivadas, no se grafica la función, lo que lleva a poner solo el acento en lo analítico y presentar unas escasas gráficas al finalizar los cursos. En cambio es necesario que el estudiante desarrolle un dominio gráfico, que pueda transferir información de este registro al analítico (u otros) y viceversa.

Un buen manejo del registro gráfico, poder transferir información de este registro a otro, y de otros al gráfico, facilitará que el estudiante establezca un isomorfismo entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico lo que favorecerá el desarrollo del PLV (como ejemplos, véase Dolores, 1999; Farfán, et al., 2001; Cantoral y Montiel, 2003).

Si a un alumno le preguntáramos cuál es el polinomio de segundo grado a cuyo gráfico pertenecen los puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), es posible que intente resolver el sistema:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

Tal vez con un buen manejo algebraico rápidamente puede escalerizar y resolver el sistema anterior. Si ahora preguntamos cuál sería el polinomio de tercer grado a cuyo gráfico pertenecen los puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), (x_4,y_4) el sistema a plantear sería de 4 por 4. En general si se intenta determinar un polinomio de grado n al cual pertenecen n-1 puntos distintos debemos resolver un sistema de n incógnitas por n ecuaciones. En la resolución de este tipo de sistema, ¿está presente el problema a resolver? ¿El alumno en su resolución está dando significado al nuevo concepto (polinomio de aproximación)? ¿O solo se está aprendiendo, reforzando, un proceso algorítmico el cual no genera significación al problema inicial?

También se podría “mostrar” que se busca una combinación lineal de $y_1,\ldots, y_n$. Por ejemplo en el caso del polinomio de tercer grado: se buscan las expresiones analíticas $m(x)$, $t(x)$ y $r(x)$ tal que:

$P(x)= y_1\, m(x) + y_2\, t(x) + y_3\, r(x)$

Si $x = x_1 \Rightarrow m(x_1)=1,\ t(x_1)= r(x_1)=0$

Si $x = x_2 \Rightarrow t(x_2)=1,\ m(x_2)= r(x_2)=0$

Si $x = x_3 \Rightarrow r(x_3)=1,\ m(x_3)= t(x_3)=0$

O sea que f estará definida por

$$f(x) = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Trabajando luego con más puntos se podría llegar a generalizar obteniendo de esta forma el polinomio de aproximación de Lagrange: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$

Cabría realizar un estudio sobre si el alumno puede llegar a determinar sin más aproximaciones estos coeficientes, o si solo logra entender este planteo luego que éste es presentado por su docente. En este último caso el alumno podría llegar a entender el procedimiento pero tal vez no de una forma relacional sino solamente de una forma instrumental, pasando en el futuro a ser otra “regla sin razón”.

La propuesta presentada por Cantoral y Montiel (2003) brindan una construcción visual del polinomio de interpolación de Lagrange. Para los autores visualizar es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje de quien aprende. Por ello consideran que “realizar la actividad de visualización requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a lo numérico, gráfico o algebraico, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales" (Cantoral y Montiel, 2003).

En dicha investigación se propone un método explicativo que parte de un problema concreto: construir un polinomio para que su gráfico pase por un conjunto dado de puntos en el plano, apoyándose principalmente en las posibilidades que ofrece la visualización. La utilización de este método permitirá al estudiante visualizar, en el sentido de los autores, la construcción que ha realizado y el por qué de ésta, realizando un aprendizaje relacional del tema y no uno instrumental.

"... podemos generalizar el método para expresiones de mayor grado, de tal forma que podamos llegar a una generalización y así construir el polinomio de interpolación de Lagrange. En este caso, conviene centrar la atención en la regularidad que muestran las respectivas expresiones analíticas en los casos que hemos tratado hasta ahora, la recta y la parábola." (Cantoral y Montiel, 2003)

Cabe destacar además que, con este tipo de trabajo, el estudiante establece un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico, lo que favorecerá la transición entre los diferentes registros y la conversión de información de uno a otro. (Farfán, 2001).

Pero, para que el alumno desarrolle un PLV también consideramos necesario un desarrollo de la noción de predicción. Opinamos que esta noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos. El hombre no tiene la facultad de adelantar el tiempo y observar qué sucederá con cierto fenómeno. Si conocemos las condiciones actuales del fenómeno, la forma que estas cambiarán, la forma que cambiarán sus cambios, etc, estamos próximos a conocer su futura condición antes que pase el tiempo deseado. "La noción de predicción desde el punto de vista didáctico, es usada como argumento para el estudio de la variación. En ella entran en juego la variación del fenómeno, la variación de dicha variación, y así sucesivamente. Esto implica hacer surgir, utilizar, la noción de derivada, de derivadas sucesivas y la relación entre ellas." (Cantoral, 2002)

Dentro del currículo de sexto año de secundaria de Uruguay, en todas las orientaciones, se encuentra el tema derivadas, pero solo en la opción ingeniería se encuentra también el tema desarrollo de Taylor. En este caso el enfoque dado es que dicho polinomio es equivalente a la función dada en un entorno de un real. Su relación con los temas anteriores es mostrar que los coeficientes de dicho polinomio son valores numéricos de derivadas sucesivas de la función dada, y su aplicación, en general, es la utilización de éste en el calculo de límites, dado que, en ciertas condiciones, es posible sustituir la función por un polinomio equivalente a ella y "levantar" indeterminaciones.

La serie de Taylor nos permite aproximar el estado futuro de un fenómeno del cual conocemos su estado inicial, su cambio, el cambio de su cambio y así sucesivamente, o sea nos permite predecir. En cambio esta herramienta no es utilizada en estos cursos. Cuando estudiamos la derivada de una función usamos este estudio en el trazado de tangentes al gráfico, $t(x)=f\,'(a)\ (x-a)\ -\ f(a)$ será la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(a,f(a))$; o nos sirve para indicar si f es creciente (si $f\,'(a)>0$) o decreciente ($f\,'(a)<0$) en $x=a$. Pero no nos planteamos ejercicios de tipo "de una función f se sabe que su imagen en $x=a$ es b, su derivada en $x=a$ es c, podrías aproximar el valor de $f(a+\Delta x)$? No se ve a la función t / $t(x) = f\,'(a)\ (x-a) - f(a)$ como una aproximación que permite predecir, con cierto error, valores numéricos.

Coherente a esta forma de trabajo no se trabaja al polinomio de Taylor como una herramienta que permite mejores aproximaciones polinómicas de una función, lo que implicaría mejores formas de predecir imágenes cada vez con menor error. No se plantean ejercicios del tipo: de una función se conoce su imagen, el valor numérico de la derivada primera, de la segunda, de la tercera, en $x=a$, ¿qué podrías decir de la imagen de la función en un entorno de a?

Esperamos que el problema de estudio de esta investigación nos brinde herramientas, producidas por los estudiantes, al investigar el significado gráfico que le otorgan al valor numérico de la derivada segunda. "Hemos concluido, en este sentido, que el manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas parece ser una condición sin la cual la formación de la idea de derivada y en consecuencia de la noción de predicción deviene inevitablemente frágil."(Cantoral, 2000). En este sentido, dado que:

$f''(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$ y $f'''(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f''(x) - f''(a)}{x - a}$, ¿cómo podremos dar significado a la derivada si no damos significado a su valor funcional?

"Como parte del pensamiento matemático avanzado, el pensamiento y lenguaje variacional trata sobre las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio por una lado y con los procesos complejos del pensamiento por otro. Exploramos los procesos y los mecanismos funcionales del pensamiento de los que aprenden en una de especie de cognición situada, para enriquecer, a posteriori, las situaciones de enseñanza de la escuela contemporánea." (Cantoral, 2000). En el presente trabajo nos interesa estudiar las construcciones realizadas por estudiantes, de distintos niveles, para utilizar las herramientas por ellos generadas como base para el rediseño del discurso matemático escolar.

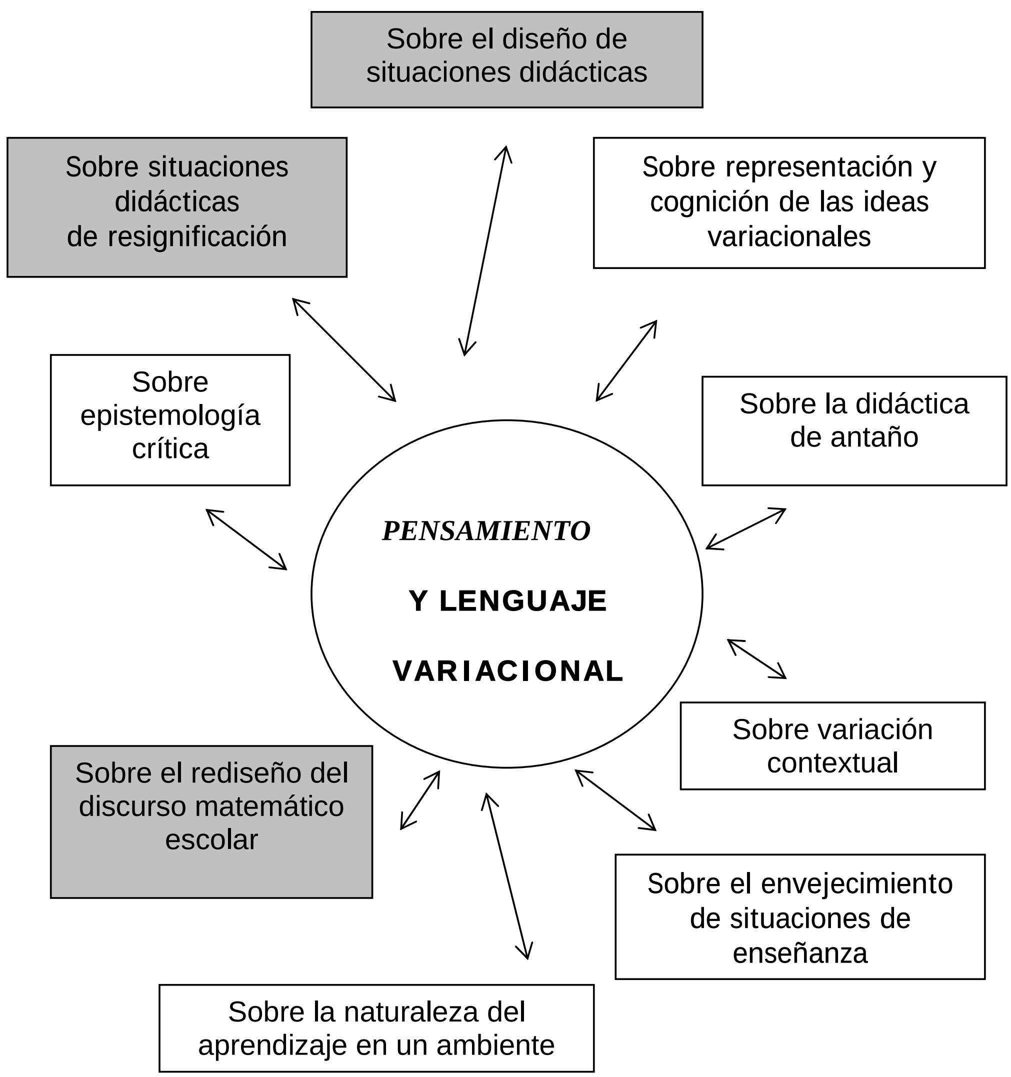
"El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales." (Cantoral, 2000). Es en este sentido que la presente investigación se encuadra en esta línea.

Por un lado realizamos un estudio matemático y epistemológico del tema derivada segunda y entrevistas a docentes de distintos niveles en los cuales se trata el tema matemático de estudio.

Por otro lado nos interesa estudiar el significado que en forma individual se asigna al valor numérico de la derivada segunda, luego cómo este es generado, significado o resignificado, compartido y negociado a partir de la interacción, primero entre los propios entrevistados y luego también con la entrevistadora. Nos interesa observar los diferentes procesos cognitivos y culturales que se hacen presentes cuando las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. Todo esto intentando analizar el punto de vista del que aprende, del que enseña, para, en una segunda instancia, a la luz de los resultados obtenidos, diseñar situaciones didácticas que permitan resignificar el valor numérico de la derivada segunda.

El siguiente esquema nos muestra las líneas de investigación desarrolladas dentro del programa PLV indicando en las que se encuadra el presente estudio.

Esquema 2



COMPONENTE COGNITIVA

Como ya hemos señalado en el Capítulo II, la componente cognitiva se refiere a los procesos mentales de organización del pensamiento. En este sentido desarrollaremos en este capítulo cuatro elementos que lo componen: la imagen del concepto, el pensamiento y lenguaje variacional, la visualización y la aplicación de reglas sin razones. Como ya hemos mostrado el PLV es más que un acercamiento cognitivo, presentaremos los aspectos de él que nos darán base para analizar los resultados obtenidos.

Imagen del concepto

Consideramos que conocer la definición de derivada en un real y de función derivada, así como poder realizar cálculos de derivadas, no es suficiente para que un estudiante haya construido el concepto de derivada. Como se ha evidenciado en estudios anteriores, por ejemplo (Valero, 2000) "una noción tiene diferentes sentidos y que no podemos reducir una noción matemática a su definición" para construir la noción de derivada no podemos limitarnos a su definición, dado que ella alude exclusivamente a la primera derivada y bajo esta perspectiva la naturaleza variacional del concepto no alcanza a percibirse.

Con base en lo anterior aceptamos dos hipótesis:

- Que el estudiante conozca la definición de función derivada no es condición suficiente para que pueda construir el concepto en juego.

- Los estudiantes a pesar de conocer la definición de un concepto no recurren a ella, a no ser que sea imprescindible, por ejemplo que se obtengan contradicciones o que expresamente el problema solicite su utilización, o que hayan sido "entrenados" por un largo período de tiempo para que su sistema cognitivo actúe en contra de lo natural.

Estas hipótesis se basan en estudios realizados por Vinner (1991), él retoma un estudio realizado por Fodor y otros (1980) reportado en el artículo “Against definitions”, en el cual plantea que las personas, en los contextos cotidianos, para entender una palabra no necesariamente recurren a su definición. Con base en algunas evidencias experimentales refutan la afirmación: “Understanding a sentence token involves recovering (i.e. displaying in working memory) the definition of such lexical items as the sentence contains”. Ellos consideran que para comprender una oración dada, generalmente la gente no consulta las definiciones de los términos que aparecen en la misma.

Vinner considera que Fodor no responde qué es lo que se consulta, e investiga cómo funciona esta situación en los contextos técnico tratando de dar una respuesta. Al trabajar en contextos técnicos se espera que se consulten las definiciones, pero los estudios indican que esto no siempre ocurre. En el ámbito técnico parecería ser más importante cómo deberían comportarse las personas que cómo lo hacen en realidad. Dado que nuestro estudio se basa en cómo los estudiantes “en realidad” conciben al valor numérico de la derivada segunda y no cómo “deberían” concebirla es que nos interesa basarnos en los estudios de Vinner en este sentido. A esto deberíamos sumarle que los contextos técnicos, por ejemplo los establecidos en el aula, son también actividades humanas que forzosamente se ven influenciadas por las actividades que realizan en los contextos cotidianos.

“Definitions creates a serious problem in mathematics learning. Its represents, perhaps, more than anything else the conflict between the structure of mathematics, as conceived by professional mathematicians, and the cognitive processes of concept acquisition.” (Vinner, 1991).

Con base en estudios realizados se ha planteado que el nombre de un concepto constituye un estímulo para nuestra memoria, algo se evoca en nuestra memoria, pero usualmente no es la definición del concepto, aunque éste tenga definitivamente una definición. A esto que es evocado es lo que Vinner llama “Concept Image” y nosotros llamaremos “Imagen del Concepto”.

“The concept image is something non-verbal associated in our mind with the concept name. It can be a visual representation of the concept in case the concept has visual representation; it also can be a collection of impressions or experiences. The visual representation, the mental pictures, the impressions and he experiences associated with the concept name can be translated into verbal forms. But it is important to remember that these verbal forms were not the first thinking evoked in our memory. They come into being only at later stage". (Vinner, 1991).

En nuestro estudio aceptamos la existencia de dos "celdas" diferentes en la estructura cognitiva: Una celda para la(s) definición(es) del concepto y otra para la Imagen del Concepto. En base al nivel en el cual se encuentran los entrevistados es de esperar que la celda de las definiciones no se encuentre vacía, deberían conocer la definición de función derivada, de valor numérico, de función derivada segunda. También esperamos que la celda de la Imagen del Concepto, asociada a estos conceptos, no se encuentre vacía. En el análisis de datos detallaremos qué aspectos surgen en ella frente a las distintas preguntas y si esta celda se va modificando sustancialmente, incorporando nuevos elementos al desarrollarse la secuencia.

Cabe destacar que cuando nos referimos a la Imagen del Concepto nos estamos refiriendo a la Imagen del Concepto de una persona en particular, y que esta Imagen puede variar, una persona en particular puede reaccionar en forma diferente frente a la evocación del concepto, en diferentes situaciones.

De lo anterior consideramos para nuestro estudio dos aspectos fundamentales a tener en cuenta:

Por un lado, como planteamos anteriormente, no es suficiente que el estudiante "sepa" la definición de función derivada para que pueda adquirir dicho concepto, debe formar una rica Imagen del Concepto asociada a él**,** la que creemos que necesariamente debe incluir aspectos variacionales, por ejemplo vincular la derivada de una función en un real con la aproximación de su variación, entre otros.

Por otro lado también encontramos en nuestro estudio, como afirma Vinner (1991), que cuando el estudiante, de los niveles en los cuales hemos realizado nuestra investigación, ha incorporado elementos a la celda de la Imagen del Concepto, la definición pasa a ser prescindible para él, permanece inactiva o inclusive olvidada, cuando trabaja en contextos acerca del concepto en cuestión. O sea, los estudiantes no consultan la definición del concepto, aunque la conozcan, en forma natural. En nuestro estudio a pesar que todos los estudiantes entrevistados conocían la definición de derivada, podían reproducirla, no fue utilizada directamente en sus respuestas en la mayoría de los casos.

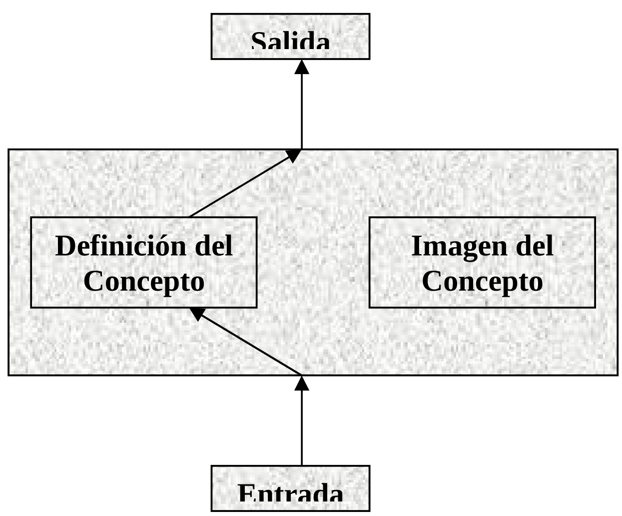
En general los profesores esperan que en el alumno se establezca una relación de dependencia entre la celda que contiene la Imagen del Concepto y la que contiene la definición, se espera además que la Imagen del Concepto se forme a partir de la definición del concepto, o sea a partir de que se forme la celda de la definición, y la celda de la Imagen del Concepto estaría siempre controlada por la de la definición. En cambio la formación de un concepto es un largo proceso que requiere de la interrelación de ambas celdas.

Tomamos de Vinner la esquematización del proceso intelectual que esperan los docentes que realicen los estudiante frente a situaciones problema. Los siguientes tres casos presentan los diferentes caminos que el sistema cognitivo podría generar:

Esquema 3

Caso 1

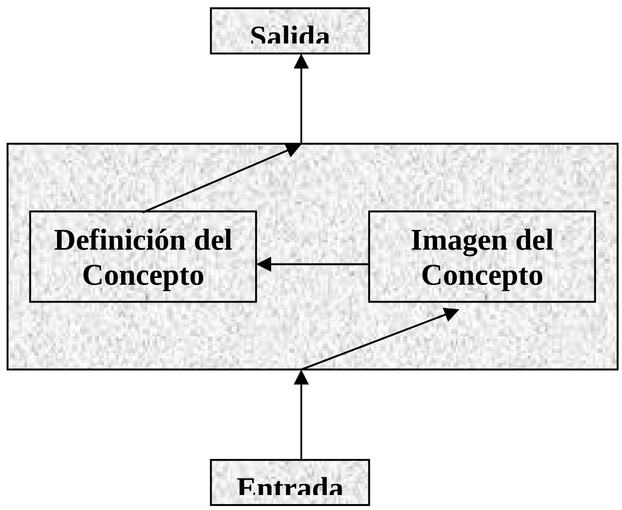
Deducción puramente formal



Esquema 4

Caso 2

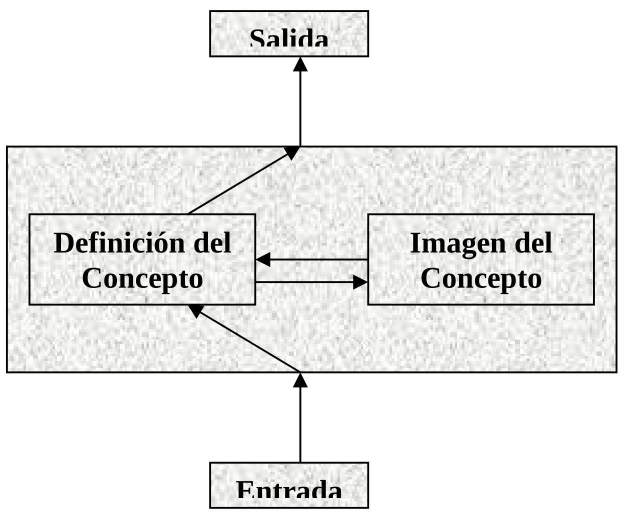
Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo



Esquema 5

Caso 3

Interacción entre definición e imagen.



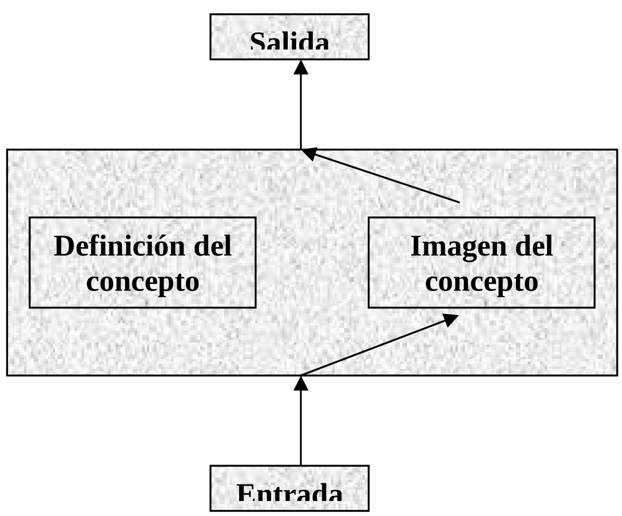
Estos tres casos esperados por el docente implican que se consulte la definición del concepto para dar una solución a la situación planteada y que ésta se surja desde la celda de la definición del concepto. En cambio, con base en los estudios realizados, Vinner afirma que en realidad lo que ocurre es que los hábitos de pensamiento de la vida cotidiana prevalecerán sobre los hábitos de pensamiento impuestos por los contextos técnicos, por lo cual para muchos estudiantes esta será una forma permanente de pensamiento y solo algunos estudiantes, luego de ser entrenados para ello, aprenderán a razonar en el "modo técnico". No se puede esperar que por estar frente a problemáticas planteadas en un sistema didáctico las formas de pensamiento cambien radicalmente, por lo tanto los estudiantes mantendrán formas de pensamientos que aplican, y tienen buenos resultados, en contextos cotidianos. Para que se presentaran los procesos anteriores habría que haber entrenado suficientemente al sistema cognitivo para que actúe contra lo que es normal.

Dado que el tipo de preguntas que hemos realizado en las secuencias no expresan, explícitamente, ni están enfocadas a que los estudiantes repitan las definiciones de los conceptos en juego, creemos a priori que los modelos más apropiados para recrear los procesos que podrían ocurrir en la realización de nuestra secuencia son: el que Vinner considera que es el modelo que realmente ocurre en la práctica (caso 4) y un modelo que agregamos por considerar posible que se presente (caso 5).

Esquema 6

Caso 4.

Respuesta intuitiva



En este modelo la celda de definición del concepto no es consultada al intentar dar respuesta a una situación. Muestras de esto se encuentran en las pruebas que se aplican a los estudiantes para aprobar los cursos de sexto año de secundaria en Uruguay. Por ejemplo, cuando se pregunta si la continuidad de una función en un real implica la derivabilidad de esa función en dicho real los alumnos responden con contraejemplos trabajados en clase, por ejemplo $f:R \to R / f(x)=|x|$ en x=0 función que habitualmente presentan los docentes como contraejemplo del tema a estudio, y no directamente aplicando las definiciones involucradas.

Un ejemplo del tipo de preguntas planteadas en nuestro estudio que creemos, a priori, que motivarán el modelo cognitivo anterior, son las de la actividad I. En esta actividad se solicita "Marca sobre la gráfica de la función *f* los puntos (x,$f(x)$) que consideres cumplen con la condición $f'(x) > 0$" y "Marca sobre la gráfica de la función *f* los puntos (x,$f(x)$) que consideres cumplen con la condición $f''(x) > 0$". Esperamos que los alumnos no consulten las definiciones de los conceptos involucrados, sino la imagen conceptual asociada a ellos, la cual puede contener "fotos" que se vinculan a "si la función es creciente su derivada es positiva", aunque sabemos que esto no siempre se cumple[3].

En las secuencias planteadas en este estudio, esperamos encontrarnos tanto con casos en los que el estudiante recurre solo a la celda de la Imagen del Concepto (caso 4), como otras situaciones en los que el estudiante al no poder dar respuesta al problema solo consultando su Imagen del Concepto recurre a la definición del concepto buscando la respuesta en ella, luego modifica la Imagen del Concepto asociada lo que posibilitaría dar respuesta a la situación problemática.

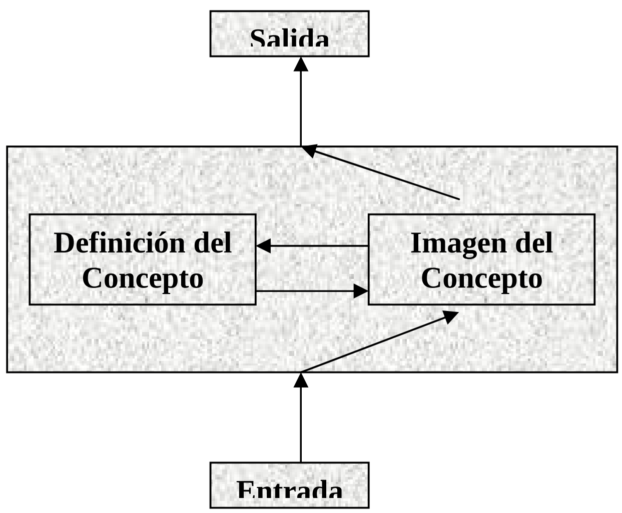
Lo expuesto anteriormente nos brinda argumentos para agregar un nuevo modelo el cual supone que frente a una situación problemática se evoca la imagen asociada al concepto en juego, al ser ésta insuficiente se recurre a la definición, la cual modifica la Imagen del Concepto y se da una respuesta al problema. Esta teoría tiene cabida dentro de nuestro enfoque socioepistemológico dado que reconoce la influencia del medio en los

[3] $f:R \to R / f(x)=x^3$ es creciente en x=0 pero $f'(0)$ no es positiva.

procesos didácticos. Los modos hábitos cotidianos llevan a que el estudiante consulte en primer instancia la Imagen de Concepto; al no poder dar la respuesta desde allí, se hacen presentes ciertos códigos de trabajo en aula, dentro de los cuales se encuentra el trabajo con definiciones. Tomar contacto con la definición de concepto puede ayudar al estudiante a ampliar, o cambiar, la imagen asociada a él y en esta nueva condición la celda de la Imagen del Concepto puede permitirle dar una respuesta. A pesar de que creemos que es posible que se presente este caso en nuestra investigación, compartimos con Vinner (1991) la creencia de que el caso 4 es el que refleja lo que ocurre en la mayoría de los procesos intelectuales que realizan los estudiantes porque ese es el esquema que se activa en los contextos cotidianos, de donde es el caso que esperamos que se presente con mayor frecuencia.

Esquema 7

Caso 5



En estos dos últimos casos el estudiante consulta en primer instancia la celda de la Imagen del Concepto; si ésta es suficiente para dar una respuesta no se consulta la celda de la definición, en el caso que la Imagen del Concepto sea insuficiente para enfrentar el problema se acude a la celda de la definición. En este último caso, luego de consultada la celda de la definición se establece una interacción con la celda de la Imagen del Concepto, enriqueciéndola, para intentar dar una respuesta al problema.

A pesar de que a priori creemos que se puede presentar el caso 5, por ello lo incluimos , compartimos con Vinner que los hábitos de la vida cotidiana, muchas veces reforzados por los discursos docentes, prevalecen y el estudiante no siente la necesidad de consultar la definición. Por lo anterior esperamos que se presente más el caso 4 que el caso 5.

Pensamiento y lenguaje variacional

Como expusimos en el punto anterior, que el alumno sepa enunciar la definición del concepto no asegura su construcción; a esto debemos sumarle que los estudiantes no consultan en forma natural la definición, sino que consultan, por lo menos algunos en principio y muchos en forma permanente, la Imagen del Concepto asociada a éste. Además, para que esa imagen conceptual sea suficiente para enfrentar problemas de cálculo, y en especial problemas relacionados con las derivadas de distintos órdenes de una función, debe contener aspectos variacionales.

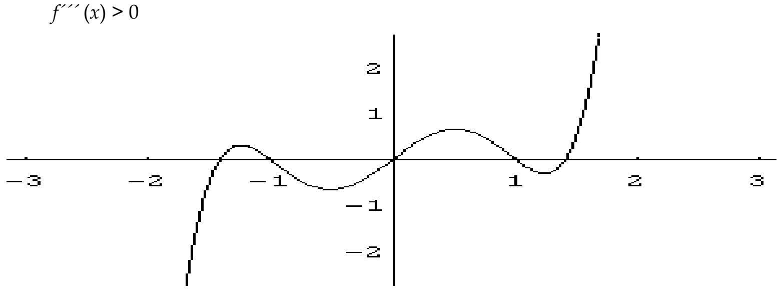
El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en los estudiantes no está asegurado por la imposición de la construcción de los números reales, supone, entre otros aspectos, rupturas con el pensamiento algebraico, manejo significativo de un amplio universo de formas gráficas, incorporar nociones de predicción. No podemos esperar que por la sola imposición del tema “reales” en los cursos el estudiante podrá cambiar sus formas de pensamiento que eran eficaces en el álgebra.

Por ejemplo, en álgebra para demostrar que $A(x)=B(x)$ se pueden generar equivalencias y demostrar que $A(x)-B(x)=0$ o que $A(x)/B(x)=1$ para probar la igualdad dada, en cambio, al trabajar en análisis, como plantea (Artigue, 2000) “esta estrategia a menudo será fuera de alcance o, por lo menos, no la más económica [...]. Por eso tenemos que desenvolver una visión de la igualdad asociada a la idea “proximidad local infinita”, es decir asociada al hecho que, si para una distancia adecuada, $\forall\varepsilon>0$, $d(A,B)<\varepsilon$, entonces $A=B$. Para poder desarrollar esta forma de razonamiento el estudiante debe realizar una ruptura con formas anteriores de razonamiento que en otros ámbitos resultaban exitosas. Encontramos en (Artigue, 2000) “... más de 40% de los estudiantes ingresando la universidad de Francia consideran que, si los números A y B satisfacen la condición: $\forall n > 0, |A - B| < \frac{1}{n}$, no son necesariamente iguales, solamente muy próximos, infinitamente próximos, de cierta manera sucesores". Estos ejemplos muestran que no se ha roto con ciertos esquemas de pensamiento algebraico, lo que dificultará el desarrollo de su pensamiento y lenguaje variacional.

Además compartimos con Cantoral (2000) que "... el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre los estudiantes precisa de procesos temporalmente prolongados a juzgar por los tiempos didácticos habituales". Entonces, ¿podríamos esperar que el alumno pueda desarrollar instantáneamente este tipo de pensamiento al enfrentarse a una situación problemática que requiera de este tipo de enfoque, como por ejemplo la siguiente situación?

Marca sobre la gráfica de la función f los puntos (x,f(x)) que consideres cumplen con la condición

$f'''(x) > 0$



Creemos que no, las situaciones problemáticas que necesitan de un tratamiento variacional ayudarán a que el alumno, al enfrentarse a ellas desarrolle su pensamiento y lenguaje variacional, pero, es necesario ir incorporando a lo largo de distintas etapas actividades que lleven al alumno a desarrollar este tipo de pensamiento.

"Hemos encontrado que la enseñanza y el aprendizaje de situaciones variacionales plantean un gran número de problemas no triviales. Cada concepto avanzado que se desea enseñar, suele apoyarse en conceptos mas elementales y se resiste al aprendizaje si no se antecede por un sólido entendimiento de los conceptos previos"(Cantoral y Farfán, 2000). Creemos que los temas previos al trabajo con derivadas requieren de un desarrollo variacional de los mismos, en cambio este aspecto no se encuentra presente en los currículos. Si el estudiante, y el docente, no ponen en juego los aspectos variacionales implícitos en temas previos al trabajo en derivadas, le será más difícil al estudiante desarrollar su lenguaje y pensamiento variacional al tomar contacto con dicho tema.

"En ciertas condiciones, el profesor, presenta un problema, pero no destina el suficiente tiempo a sus estudiantes para que ellos propongan soluciones y exploren posibilidades y en consecuencia no promueven el desarrollo del pensamiento matemático entre sus alumnos" (Cantoral, 2000). Debemos agregar que a lo anterior se suma que los docentes, muchas veces, buscan en sus estudiantes "LA" respuesta y no "una" respuesta. Si el docente espera dar la definición tradicional de derivada de una función en un real dejará de lado las intervenciones de los alumnos que no estén dirigidas a relacionarla con un límite, el del cociente incremental, aunque estas contengan aspectos muy ricos como, tal vez, los de variación.

De acuerdo a como están secuenciados y enfocados los temas en los programas uruguayos vigentes (Anexo I), para manejar el concepto de función derivada el estudiante previamente debe haber incorporado, entre otros, los conceptos de función y de límite. Al referirnos a incorporar el concepto no nos estamos refiriendo a que el alumno solamente conozca su definición, dado que, como ya hemos expuesto, conocer la definición no asegura la construcción del concepto.

En cuanto al concepto de función nos sumamos a la visión de Cantoral y Farfán (2000) "la naturaleza del concepto de función es en extremo compleja, su desarrollo se ha hecho casi a la par del humano, es decir, encontramos vestigios del uso de correspondencias en la antigüedad, y actualmente se debate sobre la vigencia, en el ámbito de las matemáticas, del paradigma de la función como objeto, analítico. Empero, el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como una fórmula, es decir hasta que logró la integración de dos dominios: el álgebra y la geometría".

Si el estudiante solamente acepta a la función como correspondencia solo verá en el gráfico de ésta a un conjunto de puntos, donde cada uno de ellos indica la correspondencia establecida entre dos reales, pero no puede concebir a éste gráfico como un todo, como un objeto, como el producto final de un proceso. Con esta concepción el estudiante no está poniendo en juego su pensamiento y lenguaje variacional. En cambio, para trabajar en cálculo, el estudiante debe reconocer los infinitos valores que puede tomar la variable en un entorno de un real para investigar cómo varía la función en dicho real, de esta forma sí se está poniendo en juego el tipo de pensamiento antes mencionado.

La definición de límite de una función en un real no brinda herramientas para calcular el límite, por lo tanto los alumnos en el momento de intentar efectuar el cálculo de límites buscan estrategias como calcular valores funcionales[4], o aplican ciertas reglas aprendidas[5] que solucionan ciertas indeterminaciones. Este tipo de trabajos no favorece que el estudiante incorpore el concepto variacional implícito en el límite de una función.

Reconocemos las dificultades asociadas al concepto de límite y al concepto de función que han sido estudiadas por varios investigadores, pero no nos extenderemos en ellas dado que nos interesa resaltar acá la carencia que presentan los cursos en promover en los estudiantes su pensamiento y lenguaje variacional.

Al no hacerse hincapié en los aspectos variacionales de los temas “límites” y “funciones”, se limita el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional del estudiante, esta carencia luego es trasladada al trabajar en otros temas, como por ejemplo “la derivada”. El estudiante puede derivar correctamente una función, pero si solamente entran en juego ciertas reglas de derivación[6] no podrá reconocer el aspecto variacional subyacente en dicho concepto.

Como se presentará en el Capítulo IV, en la observación de clase, en la investigación de bibliografía y en el cuestionario aplicado a docentes, el aspecto variacional de la derivada no juega un papel fundamental en los cursos. Al trabajarse el tema derivada se tiene en cuenta:

- Su definición.

  Como la definición de derivada de una función en un real se refiere al cálculo de un límite, caemos en las limitaciones antes mencionadas: se aplican reglas sin

[4] Lo cual conduce a errores en el caso que la función no sea continua en dicho real.
[5] Del tipo de reglas que Skemp (1976) llama reglas sin razones.
[6] Reglas sin razones en el sentido de Skemp (1976).

razones en el sentido de Skemp (1976) para levantar indeterminaciones y se deja de lado el papel fundamental que juega la variación en la teoría de límites. Encontramos que nuevamente se cercenan las posibilidades de que los estudiantes desarrollen su pensamiento y lenguaje variacional.

A lo anterior debemos sumarle que la definición de función derivada solo se refiere a la función derivada primera, entonces tampoco se pone en primer plano cómo cambia la función, cómo cambian sus cambios, etc, y la relación entre estos cambios y la función. Es decir, que el alumno asocia "derivada" a la derivada primera de una función, establece una iteración y no una relación entre la sucesión de funciones que se determina al considerar las derivadas de distintos órdenes.

- Su interpretación geométrica

Esta apunta a relacionar al valor numérico de la derivada primera en cierto real con el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico en dicho real. Nuevamente no se encuentra presente el aspecto variacional. No se hace hincapié en que la derivada brinda una herramienta poderosa para predecir el comportamiento de una función en un entorno del real, al permitir realizar una aproximación de la misma.

Al introducir el tema derivada de una función en un real, tanto en los libros de textos escolares, como en los desarrollos de los cursos[7], se trabaja observando la variación de la recta secante para determinar que el límite de la esta recta es la recta tangente al gráfico. Pero luego este tipo de razonamiento es dejado de lado y se pasan a calcular analíticamente límites, no se realizan interpretaciones gráficas que permitan reforzar la idea de variación.

- Tablas para derivar.

En este aspecto es dejado totalmente de lado el concepto de variación para pasar a aplicar reglas sin razones como ya antes lo hemos expuesto. En nuestras experiencias de clase y al tomar exámenes encontramos muy frecuentemente casos que para calcular la derivada de funciones del tipo $f : R \to R / f(x) = ax, a \in R^*$, se aplica la regla de la derivada de un producto. Esto muestra que prevalecen las reglas

[7] Evidencias de estos puntos se presentan en el capítulo IV

> sin razones sobre el concepto de derivada de una función, dado que la derivada de esta función puede determinarse mentalmente si se tiene claro cual es la función en juego y que la derivada está relacionada con su variación.
>
> Además, podemos agregar, que el trabajar solo con tablas de derivación lleva a que el estudiante establezca un fuerte vínculo entre el concepto de derivada y las técnicas de derivación, en detrimento de la relación establecida entre ésta y la variación de la función.
>
> De lo anterior no estamos abogando a que sean dejadas de lado las tablas de derivación, dado que reconocemos el "ahorro" que ellas producen, pero consideramos que el uso indiscriminado de ellas produce un alejamiento de posibles valiosas significaciones de los conceptos en juego.

Este tipo de trabajo no motiva que el estudiante desarrolle su pensamiento y lenguaje variacional, lo que jugará en su contra al concebir el concepto de función derivada como organización de derivadas sucesivas. Además esta forma de trabajar el tema derivadas disminuirá las posibilidades de aplicaciones futuras de ella, dado que "En las prácticas humanas, en las disciplinas de referencia, la derivada no se entiende exclusivamente como el límite del cociente incremental, sino como una forma de estudiar la evolución de un proceso de cambio, de crecimiento o de decrecimiento. (Cantoral, 2000).

Visualización

Dado que nos interesa estudiar, entre otros, cuál es el significado gráfico que dan los estudiantes al valor numérico de la función derivada segunda es que debemos puntualizar qué entenderemos por visualización. Responder alguna de las preguntas que se presentarán en la secuencia supone la visualización de los conceptos allí comprendidos.

En nuestro trabajo, con relación a la visualización, nos basaremos en las ideas de visualización de Zimmermann y Cunningham (1991) y Cantoral y Montiel (2003).

Tenemos particular interés por estudiar lo que señalan Zimmermann y Cunningham (1991) como “the student’s ability to draw an appropriate diagram (with pencil and paper, or in some cases with a computer) to represent a mathematical concept or problem and to use the diagram to achieve understanding, and as an aid in problem solving. In mathematics visualization is not and end in itself but a means toward and end, witch is understanding. Notice that typically, one does not speak about visualizing a diagram but visualizing a concept or problem. To visualize a diagram means simply to form a mental image of the diagram, but to visualize a problem means to understand the problem in terms of a diagram or visual image. Mathematical visualization is the process of forming images (mentally, or with pencil and paper, or with the aid of technology) and using such images effectively of mathematical discovery and understanding”.

También tendremos en cuenta que “En un sentido más amplio, entendemos por visualización a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje de quien aprende. Ahora bien, realizar la actividad de visualización requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a lo numérico, gráfico o algebraico, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales. La visualización entonces, trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diversas representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado y, sobre todo, de la participación en una cultura particular al compartir símbolos y significados” (Cantoral y Montiel, 2003)

Deseamos explorar en nuestro estudio si los estudiantes visualizan por medio de gráficos las situaciones problemáticas que involucran valores numéricos de la función derivada segunda, por ejemplo investigar cómo analizan el comportamiento de los gráficos de dos funciones que poseen igual valor numérico en un real, igual valor numérico de sus funciones derivadas en un real, pero distinto valor numérico de la función derivada segunda aunque el signo de estos sean iguales entre sí: $f : R \to R$, $g : R \to R$, $f(a)=g(a)$, $f\,´(a)=g´(a)$, $f\,´´(a)>g\,´´(a)>0$. En nuestro estudio esperamos que los estudiantes visualicen mediante un gráfico situaciones como estas,

$g''(a) > f''(a)$ (f y g funciones reales) en el caso que $g''(a)>0$ y $f''(a)<0$, aunque creemos que no será así si sig ($f''(a)$) = sig (g $''(a)$).

Según Barwise y Etchemendy (1991), por mucho tiempo los sicologístas se han interesado por las relaciones entre visualización y los mecanismos del razonamiento humano. A pesar que algunos matemáticos o docentes reconocen el valor de los diagramas como herramientas visuales, la representación visual no tiene el lugar que merece en esa comunidad. Se miran con desdén las pruebas que hacen un exagerado uso de diagramas, en algunos casos ni son consideradas como pruebas, y lo que es peor, hemos transmitido esta opinión a nuestros alumnos. "[The diagram] is only an heuristic to prompt certain trains of inference; ... it is dispensable as a proof.-theoretic device; indeed, ... it has no proper place in the proof as such. For the proof is a syntactic object consisting only of sentences arranged in a finite and inspectable array.". Tennant, N. en (Barwise y Etchemendy, 1991).

En el sistema didáctico que se encuentra esta investigación, los enfoques usuales dados a los cursos, coinciden con los reportados por Cantoral (2000): "Desde el punto de vista del sistema de enseñanza, tradicionalmente el curso que antecede al análisis es un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, tocando con mayor o menor énfasis el estudio de función, habitualmente sobre la definición de Dirichlet-Bourbaki. La enseñanza tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado a los argumentos visuales, por no considerarlos como matemáticos, entre otras causas." Davis y Hersh (citado en Dreyfus y Eisenberg, 1991), plantean que "…it seems as though the influence of the Bourbaki school which emphasizes the analytic expression of mathematical ideas, has been so ingrained into our psyche that we consider it as being the only acceptable way of professional communication. To many in our profession, a proof without words is not a proof!"

En esta sobrevaloración de los procedimientos analíticos, y el correspondiente rechazo de la visualización por parte de docentes y del sistema en su conjunto, en algún sentido cercenan las estrategias propias del pensamiento visual de los estudiantes. No visualizar un problema puede ir en detrimento de su resolución, pues restringe la construcción de conceptos, y por tanto repercute en el desarrollo de los procesos de pensamiento.

Dreyfus y Eisenberg (1991) señalan que en la enseñanza: “the visual characteristics of the problem were not even considered. And that seems to be exactly the problem; visual aspects of a concept are rated secondary to the concept itself” que “although the visual interpretations are often know to students and their teachers, oftentimes they are not in the core of this knowledge and are not exploited in thinking processes”

Hay docentes que para demostrar (analíticamente) un teorema en clase realizan un diagrama para organizar su razonamiento, aunque dicho diagrama muchas veces se haga “a escondidas”, sin que lo vean los estudiantes, cómo si estuvieran “saliéndose del guión”. A pesar de que el discurso del docente transmite la importancia de los procesos analíticos frente a los visuales encontramos que los docentes y matemáticos también recurren a ellos. Encontramos comentarios al respecto de Hilbert, en (Dreyfus y Eisenberg,1991) “I have given a simplified proof. Of part (a) of Jordan´s theorem. Of course, my proof is completely arithmetizable (otherwise it would be considered non-existent); but, investigating it, I never ceased thinking of the diagram (only thinking of a very twisted curve), and so do I still when remembering it.”

La causa de estas formas de proceder, entre otras, pueden ser las planteadas por De Guzmán (1996): “las tendencias formalistas imperantes durante una buena parte del siglo 20 han relegado a segundo término la visualización, tratándola en algunos casos con desconfianza y con sospecha.”. También apoyan estas opiniones lo planteado por Dreyfus y Eisenberg, (1991) donde exponen la postura de colegas universitarios los cuales, luego de asistir a un seminario por ellos dictado, plantearon que the diagrams could be used to generate a proof, they certainly were not proofs in and of themselves” y “there is one and only one way to communicate mathematics, and “prof without words” are not acceptable”.

Que la comunidad matemática rechace, o no acepte como prueba matemática válida los diagramas, puede ser una de las causas que lleva a que el docente “esconda” el aspecto visual de su razonamiento mostrando a sus alumnos una demostración puramente formal y analítica no “viciada” de imágenes. Esta actitud de los docentes será transmitida a sus estudiantes por lo cual no debería haber sorpresa en su actitud frente a pruebas visuales como opinan Dreyfus y Eisenberg (1991). Más adelante expondremos las posibles razones, planteadas por estos autores y otros, del rechazo de los estudiantes a visualizar en matemáticas.

Al principio de su formación los estudiantes recurren a representaciones en forma natural, por ejemplo para obtener la suma de dos naturales, luego al pasar a cursos superiores van abandonando esta práctica por no considerarla matemática, correcta, parece que a medida que avanzan los curso de matemática solo es formalmente válido el razonamiento analítico y el numérico.

Aparte de los casos en los que la visualización es rechazada por no considerarla matemática encontramos otro tipo de casos en los cuales el docente no necesita recurrir a ciertas visualizaciones del teorema en cuestión, pero no explota las interpretaciones gráficas posibles limitando así las posibilidades de que sus estudiantes visualicen la situación, como el ejemplo que presentamos en el siguiente párrafo.

“... students often have only a mechanical understanding of basic calculus concepts [...] because students haven´t achieved a visual understanding of basic underlying notions” Mundi referido en (Dreyfus y Eisenberg,1991). Una de las razones de esto puede ser que los docentes no buscan dar interpretaciones visuales de los conceptos dados, de los teoremas demostrados, lo que puede llevar a que los estudiantes no desarrollen su entendimiento visual. Un ejemplo en el cual los alumnos logran un entendimiento mecánico y no se aprovecha la representación gráfica para lograr un entendimiento visual de los conceptos involucrados es la determinación de la función derivada de la función polinómica de primer grado y de la función constante. En los libros de texto consultados se determina en forma analítica la derivada de la función polinómica de primer grado y de la función constante.

- En el primer caso:

$f : R \to R \,/\, f(x) = mx + n,\ m \neq 0$, para hallar la derivada de f en x=a se calcula $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{mx + n - (ma + n)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{m(x - a)}{x - a} = m \Rightarrow f´(a) = m\ \forall x \in R \Rightarrow f´(x) = m$ con $f´: R \to R$

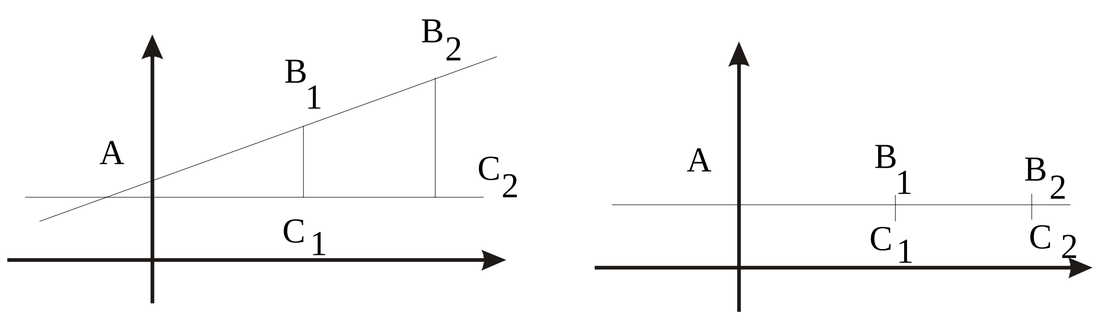
- En el segundo caso:

$f : R \rightarrow R \,/\, f(x) = k,\ k \neq 0$, para hallar la derivada de f en x=a se calcula

$$\lim_{x \to a} \frac{n-n}{x-a} = 0 \Rightarrow f'(a) = 0\ \forall x \in R \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ con } f': R \rightarrow R$$

No se presenta en ninguno de estos dos casos una interpretación gráfica de dichas situaciones. No se estimula a que el estudiante visualice las situaciones en juego, que encuentre una concordancia entre lo analítico y lo visual. En cambio, se podría presentar la problemática anterior con un apoyo gráfico, como se presenta en el gráfico 11, lo que ayudaría al estudiante a visualizar los conceptos: si se presentaran los gráficos de ambas funciones se podría observar que en uno de los casos los triángulos AB_iC_i, $A(a, f(a))$, $B_i(x, f(x))$, $C_i(x, f(a))$ son semejantes, y en el otro se determinan triángulos degenerados dado que uno de sus catetos (B_iC_i) es un punto. Este tipo de trabajo permitiría, en particular, visualizar la función derivada de dichas funciones sin ser requisito previo calcular los límites necesarios para su determinación analítica, y en general favorecer el desarrollo del pensamiento visual. "The work of Mundy, Dick, Monk, Swan y Vinner supports the preliminary finding by the authors that students have a strong tendency to think algebraically rather than visually. Moreover, this is so even if they are explicitly and forcefully pushed towards visual processing. It has been claimed that many learning difficulties, at least in the calculus, could be alleviated or even avoided if students were brought to internalize the visual connotations of calculus concepts." (Dreyfus y Eisenberg, 1991).

Gráfico 11



Relacionamos la idea recién presentada con las investigaciones de Cantoral (2000) "Esta revisión detallada de la literatura contemporánea nos permite reconocer que han sido explicadas, bajo diversos marcos teóricos, una gran cantidad de dislexias escolares. Una de ellas, señala que la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aun siendo capaces de derivar una función, no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación. Así también, pueden encontrar una derivada sin asumir que el resultado obtenido mediante la derivación sea a su vez una nueva función susceptible de derivación. De modo que podemos encontrar entre los estudiantes consideraciones como las siguientes: Si $f(2)=0$, entonces $f'(2)=0$, pues f en 2 es constante. O bien, si $f(x)=x^2$, entonces $f'(x)=2x$, $f''(x)=2$ y por último, $f'''(x)=0$, pues "no existe" una cuarta derivada". Si se estimula al estudiante a visualizar la función, sus derivadas sucesivas, con trabajos como el presentado en el párrafo anterior, pensamos que se podrían disminuir las dislexias antes presentadas.

Consideramos que un estudiante visualiza el concepto "concavidad negativa" si imagina que en $x=4$ el gráfico de la función estará por debajo de la recta tangente a él en dicho punto, si tiene en cuenta las posibles "formas" que tendrá dicho gráfico en un entorno de 4 (gráfico 12), así como formas que no pueden tener (gráfico 13).

Gráfico 12

Gráficos de funciones con concavidad negativa en x=4

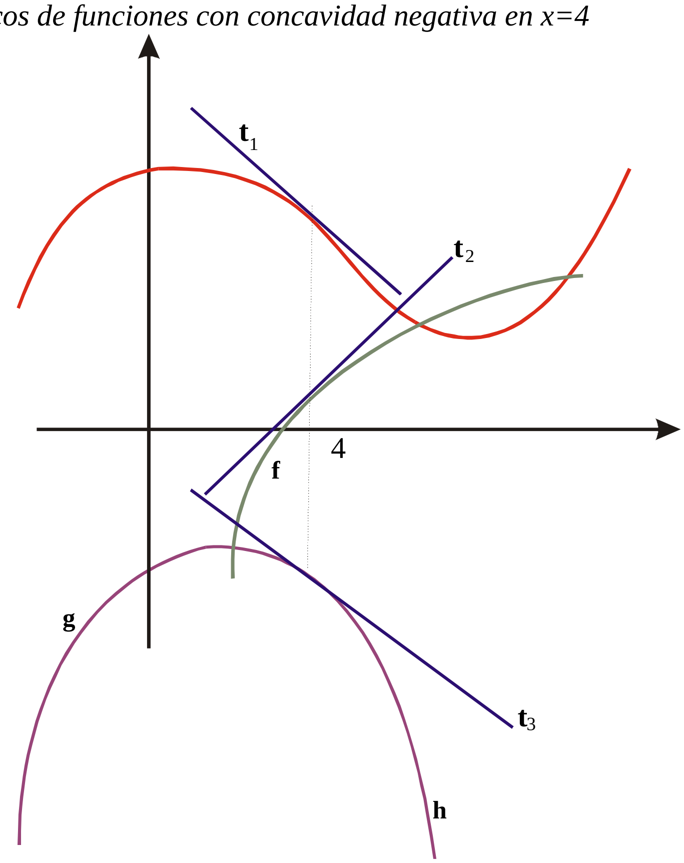
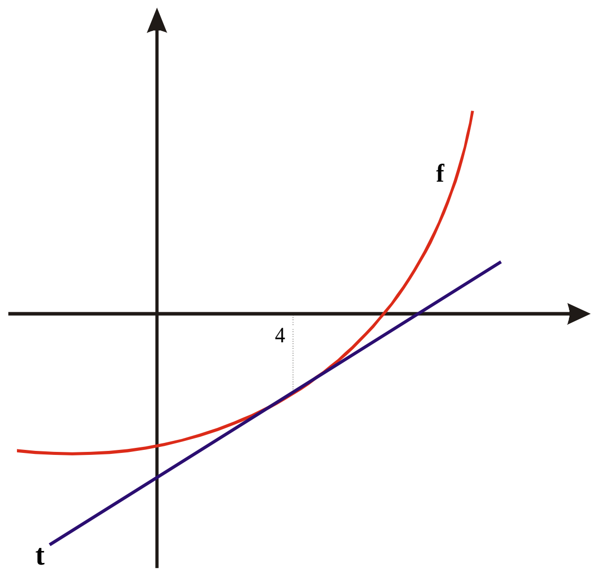


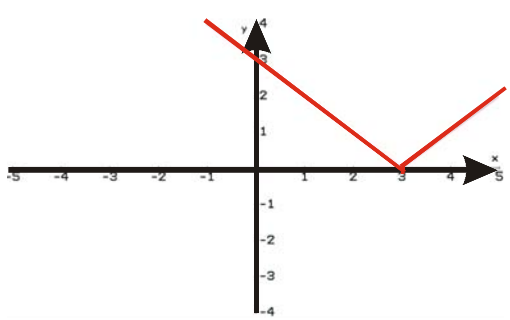
Gráfico 13

Gráfico de función con concavidad positiva en x=a



De Guzmán (1996) opina que “nuestra percepción es muy prioritariamente visual y así no es de extrañar en absoluto que el apoyo continuo en lo visual esté tan presente en las tareas de matematización, no solo en aquellas que, como la geometría, se refieren más directamente a la exploración específica de aspectos del espacio, sino también en otras, como el análisis, que nacieron para explorar los cambios de los objetos materiales en sí mismos y en sus aspectos espaciales”. Es muy probable que cualquier docente al pensar en una función que no sea derivable en *x*=3 visualice inmediatamente un gráfico similar al de la figura 1, y, luego, piense en su expresión analítica. ¿Serán muchos los casos en que ocurra la contrario? ¿Serán muchos los casos en los cuales nuestra primer idea es la expresión analítica de una función que cumpla la condición antes mencionada? ¿Serán muchos los casos en que se piense primero, primero que nada, en expresiones analíticas, por ejemplo en $f : R \rightarrow R / f(x) = |x-3|$? Nosotros consideramos que no.

Gráfico 14



Según De Guzmán (1996), “la visualización ha sido la tónica general en el trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos. Uno u otro tipo de imagen acompaña constantemente sus especulaciones, probablemente aun las más abstractas, aunque la naturaleza de esta imagen presenta una variedad de individuo a individuo mucho mayor de lo que sospechamos. La visualización, como vemos por estas muestras, ha jugado un importante papel en el desarrollo del pensamiento matemático. Como tenía que ser, dada la naturaleza cognoscitiva del hombre, tan condicionada por los elementos visuales, intuitivos, simbólicos, representativos, y como corresponde a la naturaleza de la matemática y a sus propósitos.”

Entonces, ¿no deberíamos considerar como una de la condiciones necesarias para que el alumno entienda el concepto de derivada es que pueda visualizar el concepto? Como, por ejemplo, estando en condiciones de esbozar el gráfico de una función f / $f'(2)=-3$ y $f''(2)=5$. ¿O deberíamos creer que solamente conociendo la definición del concepto “derivada” es que ya lo ha incorporado?

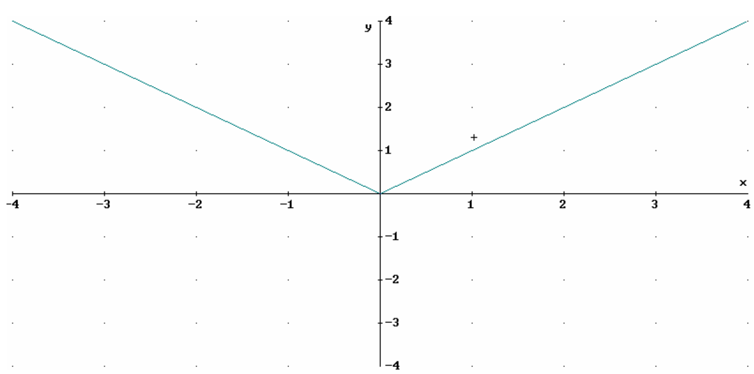
En nuestra opinión, no debemos creer que visualizar es un sustituto superficial de entender, sino que es un componente más del entendimiento, relaciona cada concepto matemático con la imagen conceptual asociada a él. Para De Guzmán (1996), “La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta. Según el reporte ViSC de la National Science Foundation, citado en Zimmermann y Cunningham (1991), la visualización debería ser “knowledge obtained by contemplation of ideas already in the mind...”. Por lo tanto consideramos que si el alumno logra visualizar el concepto $f''(2)=5$, si puede establecer relaciones entre el aspecto gráfico, numérico y analítico de dicho concepto, estará más próximo a su entendimiento.

Encontramos que muchos autores presentan una dicotomía entre lo analítico y lo visual, en muchos casos se apoya la visualización, en otros se la deja de lado por no ser “matemática”, también encontramos el modelo propuesto por Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996) en el cual proponen que lo analítico y lo visual son mutuamente dependientes: : “We propose an alternative model, the Visualizer/Analyzer or VA model, that assumes visualization and analysis to be mutually dependent in mathematical problem solving, rather than unrelated opposites. Our model provides one description of how this mutual dependence might function. We end by considering how pedagogical approaches might be designed in consonance with this model to help students coordinate visual and analytic thinking”. Nosotros compartimos esta opinión, por un lado creemos que la visualización es necesaria en matemática, en cálculo, y en especial en nuestro tema de estudio, pero debe establecerse una relación entre los aspectos visuales y los analíticos del problema, o concepto dado.

Como dijimos antes, creemos que al pensar en una función no derivable en x=3 viene a la mente el gráfico de una función que lo cumpla antes que su expresión analítica. Pero esto no significa que por imaginar un gráfico que aparentemente no es derivable en un real se ha construido el concepto de derivabilidad. A esto le sumamos que debemos estar prevenidos de los peligros involucrados en la visualización, estar conciente de estos peligros debe llevarnos a analizar las figuras “más allá de lo que los ojos ven”. Este tipo de análisis de las figuras ayudará a que se construyan los conceptos involucrados.

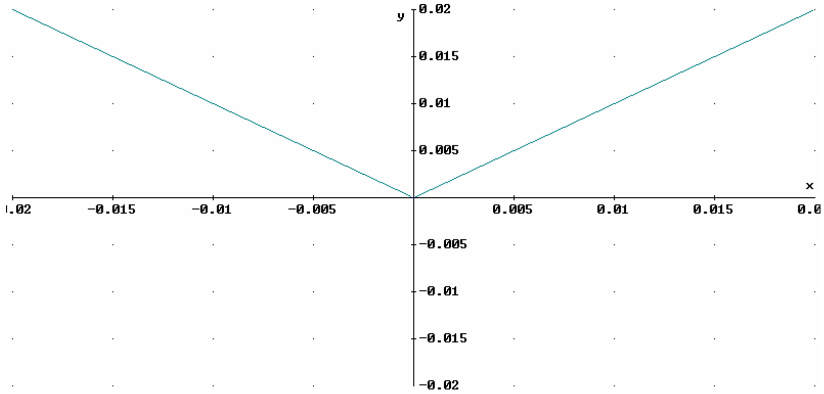
Ejemplificaremos lo expuesto en el párrafo anterior:
Si observamos el gráfico 15 de una función f podríamos creer que dicha función no es derivable en x=0.

Gráfico 15



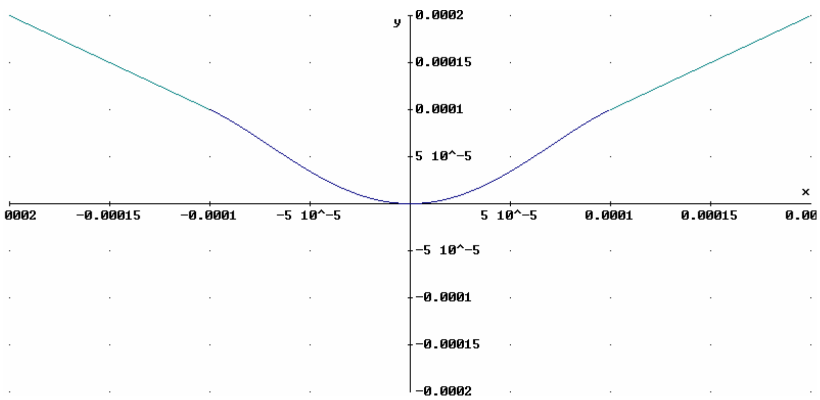
Si hacemos un zoom veríamos el gráfico 16

Gráfico 16



Si continuamos haciendo acercamientos veríamos que ya no podríamos confirmar que la función *f* no sea derivable en *x*=0.

Gráfico 17



Creemos que para que un estudiante pueda construir el concepto de derivada debe haber incorporado a su imagen conceptual características gráficas de dicho concepto, pero además debe ser consiente de los "malas interpretaciones" que pueden tener dichas imágenes y poder reflexionar sobre ello. Al enfrentarse a situaciones donde las estrategias visuales y analíticas son posibles, las personas pueden aprender combinando estas dos maneras de pensamiento.

En este ejemplo en concreto se esperaría que frente a la observación de los gráficos anteriores el estudiante, o el docente, considere que no son suficientes para asegurar o negar la derivabilidad de la función en *x*=0, para ello necesita conocer su expresión analítica:

La expresión analítica de la función f es: $f(x) = \begin{cases} |x| & si\ x \geq 10^{-4} \\ -\dfrac{10^{12}}{2}x^4 + \dfrac{3}{2}10^4 x^2 & si\ x < 10^{-4} \end{cases}$

Por lo tanto creemos que lo analítico y lo visual deben estar relacionados apoyando un aspecto al otro y permitiendo en esta interrelación un mejor entendimiento de los conceptos involucrados. A este respecto Zimmermann y Cunningham (1991) consideran que "Visual thinking and graphical representations must be linked to other modes of mathematical thinking and other forms of representation. One must learn how ideas can be represented symbolically, numerically and graphically, and to move back and forth among these modes. One must developed the ability to choose the approach most appropriate for a particular problem, and to understand the limitations of these three dialects of the language of mathematics."

A manera de síntesis de lo que hemos expuesto seleccionamos algunos aspectos positivos de la visualización y otros que merecen ser tenidos en cuenta para favorecer los procesos de enseñanza-aprendizaje:

Algunos aspectos positivos de la visualización:

- Es mucho más fácil de recordar. Un diagrama es fácilmente recordable. Cuando un estudiante escucha el nombre de un concepto, como ya hemos expuesto, recurre a la imagen conceptual asociado a él, y luego, quizás, la definición. "auxiliar potente para la retención de forma unitaria y sintética de los contextos que surgen recurrentemente en el trabajo" (De Guzmán, 1996).

- Ahorra tiempo, en un gráfico podemos dar toda la información en forma más rápida que con palabras. Por ejemplo, si graficamos el desplazamiento de una persona en función del tiempo un día dado, será mucho más rápido que si redactamos todos sus movimientos. Una imagen simple puede darnos mucha información que llevaría demasiadas oraciones expresarla. "La imagen es, muy frecuentemente, vehículo eficaz de transmisión rápida de las ideas" (De Guzmán, 1996).

- "La imagen es, muy frecuentemente, una ayuda poderosa en la actividad subconsciente en torno a los problemas complicados de la teoría" (De Guzmán, 1996).

- Implica mayor nivel cognitivo que las pruebas lingüísticas, permite la evolución del sistema perceptivo. No se dan los datos justos. Puede haber más o menos datos, el alumno debe buscar los que necesita para resolver el problema. Esto implica que debe pensar, decidir, qué información es relevante y cuál no. Aspecto que consideramos muy importante.

- Permite ahorrar casos. En muchos casos las soluciones tienen un cierto argumento simétrico. Se pueden reducir los casos a discutir mostrando la simetría del gráfico de una función.

- Muchas veces no se puede evitar la representación, ¿podríamos entender el concepto de concavidad positiva (o negativa) sin nunca haberlo visto representado? "Individuals can profit greatly if they are given opportunities no form meannings that assist them in making sense of their mathematics. Based on our evidence we concluded that visualization is an important component of this meaning-making" (Solano y Presmeg, 1995)

- "Visualization offers a method of seeing the unseen. It enriches the process of scientific discovery and fosters profound and unexpected insights". (Informe ViCS, citado en Zimmermann y Cunningham, 1991). "La imagen es, muy frecuentemente, ayuda poderosa en la actividad subconsciente en torno a los problemas complicados de la teoría" (De Guzmán, 1996).

Como muestra Gascón (2001) los docentes se ven influenciados por las perspectivas epistemológicas de la institución, de su medio, y estas se reflejan en su modelo docente. Tal vez por ello, porque los diagramas no son muy bien vistos por sus colegas, por la comunidad matemática, es que son dejados de lado sin que medie una seria reflexión sobre pros y contras. Creemos que sería conveniente que se tuvieran en cuenta los diagramas realizados al comienzo, durante, el desarrollo de una demostración por parte del matemático, así como los que ayudan a construir los conceptos en juego, y no solo que transmitamos a nuestros alumnos la situación ya algoritmizada, sin mostrar estos diagramas que fueron los que permitieron llegar a cierto conocimiento, generar en los estudiantes un pensamiento visual y la posibilidad de generar nuevos conocimientos.

Reglas sin razones

Skemp (1976) observa que, muchas veces, una misma palabra es usada en el mismo idioma, país y contexto, con dos significados cuya diferencia no es trivial, de lo cual deduce que se pueden esperar serias confusiones.

En el contexto de las matemáticas una de las palabras que considera que es usada con dos significados distintos es *entendimiento*. “It was brought to my attention some years ago by Stieg Mellin-Olsen, of the Bergen University, that there are in current use two meanings of this word. These he distinguished by calling them “relacional understanding” and “instrumental understanding””. (Skemp, 1976).

Cabe destacar que, a partir de las observaciones de clase y de nuestra propia experiencia como docentes, creemos que esta confusión se presenta en la actualidad de los cursos de matemática. Cuando un docente o un estudiante consideran que “se ha entendido el tema derivadas”, ¿significa que el estudiante puede derivar correctamente? ¿significa que el estudiante ha comprendido el concepto?

Se intenta hacer una especie de clasificación de estos dos tipos de entendimiento de la cual podemos deducir sus notables diferencias: Por entendimiento relacional “is meant what I have always meant by understanding, and probably most readers of this article: knowing both what to do and why. Instrumental understanding I would until recently not have regarded as understanding at all. It is what I have in the past described as “rules without reasons”, without realizing that for many pupils and their teachers the possession of such a rule, and the ability to use it, was what they meant by understanding.” (Skemp, 1976).

Consideramos que el entendimiento instrumental del tema derivadas no favorece la construcción del concepto de derivada, que el alumno pueda aplicar reglas de derivación correctamente no implica que haya adquirido este concepto que es mucho más profundo que solamente “aplicar reglas”. Además agregamos que en muchos casos, ha pesar que el estudiante haya aprobado el curso que tiene entre sus objetivos principales el estudio analítico y representación gráfica de funciones reales, no ha hecho suyas nociones e implicancias elementales asociadas a dicho concepto.

Otra palabra en el contexto de las matemáticas que Skemp considera que es utilizada con dos significados muy distintos es la palabra matemáticas, “The second one is even more serious: it is the word mathematics itself. For we are not talking about better and worse teaching of the same kind of mathematics”. “I used to think that maths teachers were all teaching the same subjet, some doing it better than others. I now believe that there are two effectively different subjects being taught under the same name: “mathematics.” (Skemp, 1976).

Las dos materias anteriores las llama: matemática relacional y matemática instrumental. Es directa la deducción de los distintos objetivos y métodos de cada una. Basándonos en las investigaciones de Skemp (1976) enumeraremos ventajas de cada una de ellas.

Matemática instrumental:

- Es usualmente fácil de entender, a veces mucho más fácil. Es fácil memorizar algunas reglas de derivación y nos puede llevar a creer que “sabemos derivar”. “If what is wanted is a page of right answers, instrumental mathematical can provide this more quickly and easily.” (Skemp, 1976).
- Las recompensas son más inmediatas y más aparentes. Como en algunos casos permite lograr el éxito más fácil y rápidamente puede llevar a aumentar la autoconfianza del estudiante. “It is nice to get a page of right answers, and we must not under – rate the importance of the feeling of success which pupil get from this” (Skemp, 1976).
- Se puede obtener a menudo la respuesta correcta más rápidamente que con el entendimiento relacional, porque involucra menos conocimiento.“This difference is so marked that even relational mathematicians often use instrumental thinking” (Skemp, 1976).

La matemática relacional:

- Es más adaptable a pruebas nuevas. El entendimiento relacional, conociendo no solo como funciona el método sino también el por qué, puede permitir relacionar el método con el problema, y posiblemente adaptar el método a nuevos problemas. Sabemos que si $f(x)=4x$ entonces $f\,'(x) = 4$, si no sabemos el porqué de esta regla, el cómo se obtuvo, no podremos deducir la expresión de $f\,'(x)$ en el caso que $f(x)=3e^{4x}$. "Instrumental understanding necessitates memorising which problems lems a method works for and which not, and also learning a different method for each new class of problems". (Skemp, 1976).
- Es más fácil de recordar. En la matemática instrumental el estudiante debe recordar una serie de reglas, aparentemente no relacionadas, y recordar también cuál se utiliza en cada situación. "But knowing also how they are inter-related enables one to remember them as parts of a connected whole, which is easier. There is more to learn – the connections as well as the separate rules– but the result, once learned, is more lasting. So there is less re-learning to do, and long – term the time taken may will be less altogether" (Skemp, 1976). Si el estudiante debe recordar cada regla de derivación de cada función elemental, sin entender el por qué de ellas, será más difícil que elija la adecuada y casi imposible que pueda deducir nuevas reglas. En cambio, si el sabe que estas reglas son, por ejemplo, el producto del cálculo de un límite, $\underset{x \to a}{lím} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ y el por qué de este límite, no necesita memorizarlas todas y puede generar nuevas reglas para nuevas situaciones.
- "Teaching for relational understanding may also involve more actual content. …. Ideas required for understand a particular topic turn out to be basic for understanding many other topics too. ….Unfortunately the benefits which might come from teaching them are often lost by teaching them as separate topics, rather than as fundamental concepts by which whole areas of mathematics can be inter-related". (Skemp, 1976). Un ejemplo es la regla "si $f\,'(a)>0$ entonces f creciente en $x=a$". Se puede enseñar esta "regla" y, aunque el estudiante no comprenda el por qué puede aplicarla exitosamente pero sin contenido real. En cambio, si se realizó un aprendizaje relacional del

concepto derivada y su interpretación geométrica esta “regla” está relacionada con estos ítems y es fácilmente deducible de ellos.

- El conocimiento relacional puede ser efectivo como una meta en sí mismo. Skemp (1976) opina que sus estudios han mostrado que en este tipo de trabajo la necesidad de compensaciones y castigos externos es mayormente reducido, haciendo más fácil lo que usualmente se llama lado motivacional del trabajo del docente. Considera que los estudiantes se sienten más partícipes de la construcción del conocimiento, obtienen satisfacción del entendimiento relacional lo que les puede motivar a explorar nuevas áreas, a construir nuevo conocimiento, inclusive conocimientos no previstos por el docente.

Veamos a continuación un ejemplo que ocurre muy frecuentemente en las aulas y que lleva a que la matemática instrumental cercene a la matemática relacional llevando a un empobrecimiento de la capacidad de desarrollo intelectual de los estudiantes:
En el estudio gráfico y analítico de funciones reales, los estudiantes en general “siguen” ciertos pasos:

- Estudio del dominio de la función.
- Calculo del límite en puntos de discontinuidad.
- Determinar las asíntotas.
- Derivar la función, deducir intervalos de crecimiento, decrecimiento.
- Estudio de los puntos de no derivabilidad.
- Cálculo de extremos relativos.
- Derivada segunda, deducir intervalos de concavidad positiva, de concavidad negativa.
- Cálculo de puntos de inflexión, tangente al gráfico en dichos puntos.

Encontramos muchos docentes y libros de texto que indican que se deben seguir este recetario, sino el estudio de una función está incompleto. Aspecto que sabemos no es real.

Proponiendo ejercicios donde no es necesario "todo" este estudio podremos observar si el alumno solo sigue mecánicamente los pasos a dar, o ha alcanzado un entendimiento relacional de este estudio.

Al proponer el estudio de una función real del tipo:

$$f\ /\ f(x) = \begin{cases} x + 4 \ si\ x \leq -3 \\ x^2 - 8\ si\ -3 < x < 9 \\ e^x\ si\ 9 \leq x \end{cases}$$

Los alumnos, si poseen un entendimiento relacional de este tema:

- No deberían estudiar asíntotas infinitas, puesto que en la primer zona deberán dibujar una recta y ella misma es la asíntota. En la tercer zona la gráfica de la exponencial es conocida para ellos, se puede graficar sin estudio previo, a no ser en *x*=9.
- Tampoco deberían derivar. En la primer y segunda zona por las razones ya expuestas, y la segunda zona corresponde a un sector del gráfico de una parábola en la cual conocen otros métodos para encontrar su mínimo y luego saber cuál será su comportamiento en este intervalo.

Por la forma que se ha planteado la secuencia de la investigación que estamos presentando, así como por el estudio del marco didáctico en el cual están inmersos los estudiantes entrevistados, podremos diferenciar los casos que el posible significado que asignen los estudiantes al valor numérico de la derivada segunda sean producto de un aprendizaje relacional de los que sean producto de un aprendizaje instrumental.

ELEMENTOS DE LA COMPONENTE DIDÁCTICA

La componente didáctica en nuestro enfoque, hace referencia al medio en el que se establecen las relaciones entre alumno, docente y saber. De este medio hicimos una revisión de textos, tanto de aula como de consulta de los estudiantes uruguayos; así como un análisis de los programas uruguayos del curso de análisis de sexto año de Educación Secundaria estudiando similitudes y diferencias en el tratamiento de la funciones derivada primera y derivada segunda. A continuación evidenciamos el tratamiento escolar de la interpretación gráfica de los conceptos "valor numérico de la función derivada primera" y "signo del valor numérico de la función derivada segunda" (en un intervalo de reales y en un real). Los elementos que se expondrán surgen de dos visitas, en carácter de observador, realizadas a un grupo de sexto año de Educación Secundaria. Por último presentaremos las observaciones obtenidas a partir de una encuesta realizada a docentes sobre sus consideraciones en la forma de tratar el tema y el significado gráfico que otorgan al valor numérico de la función derivada segunda.

Revisión de textos

Dado que investigamos el significado que asignan los alumnos al valor numérico de la función derivada segunda, buscaremos en los textos la forma en que se trabaja:

- Derivada
- Interpretación gráfica de la derivada primera y de un valor numérico en particular.
- Valor numérico de la derivada primera
- Derivadas sucesivas. En particular derivada segunda.
- Interpretación gráfica de la derivada segunda y/o de un valor numérico en particular.
- Valor numérico de la derivada segunda.

Se expondrá la forma de trabajar los temas que forman parte de nuestro estudio en algunos de los textos sugeridos por la Inspección Docente de Matemáticas para Uruguay incluyéndose otro que, a pesar de no ser recomendado por la Inspección Docente de Matemática, utilizan muy frecuentemente los alumnos.

Las lista de los libros sugeridos por la Inspección Docente de Matemáticas para el curso de Análisis del último año de Educación Secundaria acompaña los programas vigentes y obligatorios para toda la enseñanza nacional es la siguiente:

- Matemática de sexto. Balparda y Lois.
- Funciones Reales. Matemáticas para sexto año. Giovannini, E.
- Análisis matemático. Luis Belcredi.
- Calculus. Apóstol
- Calculus. Spivak
- Matemática II C.U.V. Miguel de Guzmán
- Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Demidovich
- Elementos de cálculo diferencial e Integral Tomo I y II. Sadosky
- Cálculo diferencial e integral. Colección Schaum - Frank Ayres
- Análisis Matemático. J. Rey Pastor, J. Pi Calleja y A. Trejo (Volumen I)

A pesar de esta sugerencia, sabemos que la mayoría de los alumnos no consultan los libros, sino que estudian en el material de clase dado por su profesor. En algunos pocos casos encontramos que los alumnos consultan algunos de los tres primeros, todos de autores nacionales, así como “Matemáticas de sexto. Funciones” (Duffour). Es por esto que centraremos nuestra atención en estos cuatro textos y en dos más de los recomendados.

Desarrollo del tema en los textos

- ***Balparda y Lois***, (1993). Matemáticas Sexto-Para el trabajo en clase. Ediciones de la Plaza, Montevideo Uruguay.

Este libro es recomendado para las opciones Medicina-Agronomía y Economía.

Se introduce el concepto de cociente incremental y de derivada de una función a partir de un ejercicio que presenta la expresión analítica de una función que relaciona recorrido con tiempo transcurrido, se calculan velocidades medias e instantáneas. Luego se pide representar gráficamente la función dada, calculando a partir del gráfico velocidades medias, vinculándolas con el coeficiente angular de la cuerda determinada, y velocidades instantáneas, vinculándolas con el coeficiente angular de la recta tangente en cuestión.

Se deduce a partir de la interpretación del gráfico de una función la pendiente de la recta tangente a dicho gráfico en un punto y se define tangente a la gráfica de una función *f* (su pendiente se define como $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$)

A continuación se define derivada de una función en *x*=*a* pasando a redefinir la ecuación de la recta tangente al gráfico al vincular el límite anterior con el valor numérico de la derivada de la función en *x*=*a*..

Luego pasa a demostrar el teorema que relaciona derivabilidad con continuidad de una función en un real. Define función derivada y determina la función derivada de funciones elementales y álgebra de derivadas.

En el ejercicio 17 (de 24) del capítulo se enuncia "Dada una función *f* y su derivada *f* ´; en cada punto en que *f* ´ sea derivable existirá la función (*f* ´)´. A esta función se le llama función derivada segunda de *f* y se anota *f* ´´." Luego se pide calcular algunos valores numéricos de *f* ´´, para ciertas funciones dadas.

Se demuestran los teoremas que relacionan monotonías y extremos de una función con la derivada de dicha función en un real. También se demuestran los teoremas de Fermat, Rolle y Lagrange, sus aplicaciones, y condiciones suficientes de existencia de extremos relativos. Se define concavidad positiva (y negativa) de una función en *x*=*a* a partir de comparar la función con la tangente:

"*f* presenta concavidad positiva en *a* si y solo si:

i) *f* es derivable en *a*.

ii) Existe un E_a incluido en D(*f*) tal que si $x \in E^*_a$ entonces $f(x)>f(a)+f\,'(a)\,(x-a)$”

Se define punto de inflexión, se recuerda que $f\,''(a)$ es la derivada de $f\,'$ en “*a*” y se enuncian los siguientes teoremas, demostrándose solo el primero:

Teorema 1: (H) $f\,''(a)>0$ (T) *f* presenta concavidad positiva en *a*

Teorema 2: (H) $f\,''(a)<0$ (T) *f* presenta concavidad negativa en *a*

Teorema 3: (H) $f\,'$ es continua en *a*, $f\,''$ cambia de signo en un E^*_a (T) *f* presenta un punto de inflexión en *a*.

Se puede observar que aunque la visualización del valor numérico de la derivada primera juega un papel principal en su conceptualización, cuando se trabaja con la derivada segunda no se realiza una interpretación equivalente del valor numérico de ésta. Además solo se hace mención al signo del valor numérico de la derivada segunda de una función para vincularlo a la concavidad de dicha función en un real.

Tampoco encontramos que se haga referencia a órdenes superiores de derivadas, ni que se asigne un significado al valor numérico de la derivada segunda.

- ***Giovannini, E. (1998) Funciones Reales. Uruguay***

Este libro es recomendado por la Inspección Docente de Matemáticas para las opciones Ingeniería y Economía.

Comienza recordando la ecuación analítica de la recta y dando significado al coeficiente angular de ésta. A partir de gráficos de funciones se presenta una noción intuitiva de recta tangente a un gráfico. “Una aproximación a la definición es considerarla como el *límite* de una recta secante que pase por el punto. No tiene sentido hablar de límite de una recta pero sí del límite de sus coeficientes angulares”

Luego realiza unas consideraciones que denomina intuitivas interpretando a partir del gráfico el límite de las rectas secantes y la relación entre sus coeficientes y el coeficiente de la recta tangente al gráfico dado. Observa que $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = tg\alpha$,

siendo α el ángulo formado por la recta tangente y el eje de las abscisas.

Realiza una noción intuitiva de velocidad instantánea observando que el cociente anterior ha sido trabajado en física usando la variable "*t*" que representa tiempo y *f*(*t*) la abscisa de una partícula en movimiento a lo largo del eje, en el instante de tiempo *t*. Entonces $\frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ es la velocidad media en el intervalo de tiempo[*a*,*t*]. Observa que si *t* tiende a "*a*" se obtiene la velocidad instantánea en "*a*". También se observa que si *f*(*t*) representa cualquier otra magnitud variable con el tiempo el límite cuando *t* tiende a "*a*" puede escribirse como la velocidad instantánea de la variación de *f*(*t*).

Nombra cociente incremental de una función y define derivada de una función en un real. Luego define recta tangente al gráfico de una función. Define a continuación función derivada

Se define "derivadas sucesivas o de orden superior" haciendo mención especial a la derivada segunda. Se presenta la definición formal por recurrencia.

Presenta las derivadas de algunas funciones elementales y operaciones con funciones derivables.

Se demuestran los teoremas que relacionan monotonías y extremos de una función con la derivada de dicha función en un real. También se demuestran los teoremas de Fermat, Rolle, Lagrange y Cauchy, sus aplicaciones, y condiciones suficientes de existencia de extremos relativos.

Demuestra teoremas que vinculan monotonías en intervalos con la derivada, así como condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos. La segunda de estas condiciones es "El criterio de la derivada segunda"

Hipótesis: $f'(a)=0$ y $f''(a)>0$

Tesis: *f* presenta en "*a*" un mínimo relativo en sentido estricto con tangente horizontal.

Podemos observar que lo que importa de la imagen de la derivada segunda es el signo de su valor numérico, pero no su valor numérico en sí.

Para definir concavidad comienza comparando el gráfico de una función en un intervalo con las rectas tangentes a ella en distintos puntos en los casos que, la función es creciente con concavidad positiva, luego negativa, y decreciente con concavidad positiva, luego negativa. Pero luego considera los casos en que la función sea continua y no derivable en uno de sus puntos y observa que no podría trazar la recta tangente al gráfico en dichos puntos. Por esto compara ahora el gráfico de la función con las cuerdas definidas por dos puntos cualquiera de él.

Llama *r*(*x*) al segundo miembro de la ecuación de la recta $y = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1)$ determinada por los puntos $P(x_1, f(x_1))$ y $Q(x_2, f(x_2))$ del gráfico. A partir de comparar las imágenes en dicha recta y en la función define "La función *f* se dice que es cóncava o tiene concavidad positiva estricta en el intervalo *I* si para todo par de puntos x_1 y x_2 del intervalo, con $x_1<x_2$ se verifica la desigualdad $r(x) - f(x) > 0$ si $x \in (x_1, x_2)$" En forma similar define concavidad negativa en un intervalo.

Demuestra la condición suficiente de concavidad estricta en un intervalo: Si $f''(x)>0$ para todo elemento de un intervalo abierto *I*, entonces la función *f* tiene concavidad positiva estricta en *I*.

Demuestra también los siguientes teoremas relativos a la derivada segunda:

- H) $f''(x)>0$ si $x \in I$, *I* intervalo abierto.

  T) $f(x) - [f(c) + f'(c)(x-c)] \geq 0$ si $x \in I$, siendo *c* un punto cualquiera de *I*.
- H) f'' es continua en *a*, *f* tiene en *a* un punto de inflexión.

  T) $f''(a)=0$
- H) f' continua en *a*. $\exists \partial > 0$ / $\begin{cases} f''(x) > 0 \; si \; a - \partial < x < a \\ f''(x) < 0 \; si \; a < x < a + \partial \end{cases}$

  T) *f* tiene en a un punto de inflexión.

Se observa nuevamente que al valor numérico de la derivada segunda no se le asigna ningún significado especial, sino que solo se tiene en cuenta su signo. Además es este caso encontramos que sí se realiza una introducción visual al tema concavidad, similar al trabajo introductorio a derivadas, pero no se hace una interpretación geométrica del valor numérico de la derivada segunda.

- ***Belcredi, L. Zambra, M. y Deferrari, D. (2001). Análisis Matemático. Colección Mosaicos. Montevideo, Uruguay.***

Este texto es recomendado para las opciones Ingeniería y Economía.

Realiza una introducción a la derivada de una función en un punto determinando la velocidad media de un móvil siendo $f(x)$ la posición del móvil en el instante x. Entonces la velocidad media es el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo transcurrido: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Luego indica que la velocidad instantánea es $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

A continuación considera la representación gráfica de una función f, dos puntos $A(x_0, f(x_0))$ y $B(x, f(x))$ de la curva y la ecuación de la recta que ellos determinan. Observa que cuando x tiende a x_0, B se aproxima a A y la recta AB se aproxima a la tangente al gráfico en A e indica: “La tangente que pasa por el punto $A(x_0, f(x_0))$ tiene entonces como coeficiente director el límite de los coeficientes directores de las rectas AB anteriores. Es decir la tangente tendrá por ecuación $y - f(x_0) = m\,(x-x_0)$, siendo $m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,”. A partir de esta observación define derivada de una función en un punto.

Muestra un ejemplo de cálculo de derivada en un punto y de la relación de este valor, el valor numérico de la derivada en un real, con el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico en el punto en cuestión.

Define función derivada, determina la función derivada de ciertas funciones elementales y pasa a trabajar en el álgebra de derivadas.

Demuestra los teoremas que vinculan el signo del valor numérico de la derivada primera con las monotonías y los extremos relativos de la función, así como los teoremas de Rolle, Lagrange, sus consecuencias y el teorema de Cauchy.

Define derivadas de orden superior de una función dando dicha definición por recurrencia haciendo mención especial a la derivada segunda.

Bajo el título "Interpretación geométrica de la derivada segunda" encontramos la interpretación geométrica del *signo* de la derivada segunda en el caso que sea distinto de cero. Estudia la posición relativa del gráfico de una función respecto a las rectas tangentes a él en un intervalo y antes de definir concavidad positiva y negativa demuestra el siguiente teorema:

Sea f una función que admite derivada segunda en un intervalo I, C su representación gráfica y (t) la tangente a C en un punto cualquiera de abscisa x_0 de I.

Entonces:

a) Si $f''(x)>0$ sobre I, entonces C está por encima de (t) en I.
b) Si $f''(x)<0$ sobre I, entonces C está por debajo de (t) en I.

Muestra como ejemplo a la función f definida por $f(\mathrm{x}) = x^3$ que tiene por función derivada segunda a $f''(x) = 6x$.

A continuación define concavidad positiva y negativa y punto de inflexión: "Se dice que una función definida sobre I tiene concavidad positiva (o hacia las y positivas) si su representación gráfica está por encima de sus tangentes en cada punto de dicho intervalo"

Demuestra el teorema que indica que si x_0 es un punto de inflexión de una función f que admite derivada segunda en un entorno de x_0 entonces $f''(x_0) = 0$. A continuación muestra que el recíproco no es válido considerando la función cuya expresión analítica es $f(x) = x^4$.

A pesar de que en este libro encontramos el título "Interpretación geométrica de la derivada segunda" no se presenta una interpretación gráfica, ni de otro tipo, del valor numérico de la derivada segunda a no ser del signo de este.

- ***Duffour***, (1998). *Funciones, funciones. Matemática de sexto todas las orientaciones*. Ediciones Matemática 2000. Uruguay

Este texto no es recomendado por la Inspección Docente de Matemáticas, pero es utilizado por los alumnos, por eso se incluye en este estudio.

Se introduce el tema "Derivada de una función" trabajando incremento y cociente incremental de una función.

"Una característica de la curva que no depende de que grande o pequeño sea el Δx, es considerar el COCIENTE INCREMENTAL (la división entre el Δy y el Δx)

COCIENTE INCREMENTAL $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ „

Se observa la importancia de que cuanto más pequeño sea el incremento en la *x* más exactitud se tendrá de la forma en que varía la función. A partir de esta observación se define derivada de una función en un punto.

"Se define a la derivada de una función, en un punto *x*, como el límite del cociente incremental cuando el incremento de las *x*, tiende a cero. Se anota $f\,'(x)$:

$$f\,'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{lím} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si existe el límite del cociente incremental, o sea que la función *f*(*x*) tiene derivada finita en cada punto *x*, queda definida una correspondencia, entre cada punto *x*, y la derivada de la función en ese punto. Por lo cual el valor de la derivada depende de *x*, de modo que la derivada es a su vez una función."

No se define formalmente función derivada, sino que se plantea:
"Si el incremento de las *x*, se toma a partir de un punto variable *x*, el límite del cociente incremental se expresa como:

$$f\,'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{lím} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ „}$$

Luego calcula las derivadas de las funciones exponencial, raíz cuadrada y seno.

Nombra la derivada de una función en un punto recalcando la diferencia entre ésta y la derivada de la función: “El estudiante debe diferenciar perfectamente a la función derivada $f\,'(x)$ y al valor numérico $f\,'(a)$.”

Se realiza a continuación la interpretación geométrica de la derivada. Se observa “Cuando el incremento de las *x* tiende a cero o sea $\Delta x \to 0$ o $x \to a$ el punto *B* se aproxima al punto *A*, la recta *AB* secante a la curva se convierte en la tangente a la curva en el punto *A*. El coeficiente angular de la secante se transforma en el coeficiente angular de la tangente.

$$m_t = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f\,'(a)$$

Es decir que el valor numérico de la derivada en un punto mide el coeficiente angular de la recta tangente a la cuerda en el punto *a*.”

Podemos observar que se le asigna una interpretación geométrica y gráfica al valor numérico de la función derivada.

Se continúa dando la ecuación de la recta tangente al gráfico de una función, pasando luego a demostrar los teoremas de álgebra de derivadas. También se demuestran los teoremas que relacionan monotonías, puntuales y en intervalos, y extremos de una función con la derivada de dicha función en un real o en un intervalo.

Indica que se define concavidad positiva y negativa en un punto, comparando el valor numérico de la función y de la tangente para los elementos de un entorno del punto: “ $\exists \delta > 0 / \forall x \in E^*(a,\delta),\ f(x) > t$ ”, aunque solo escribe una condición suficiente.

Se enuncian y demuestran los teoremas de condición suficiente para que se presente concavidad positiva o negativa:
“Si una función tiene derivada segunda finita; es condición suficiente para que presente concavidad positiva en un punto, que dicha derivada sea positiva en el punto.”

"Hipótesis: Existe $f\,''(a)$ y es positiva. Tesis: $f(x)$ presenta concavidad positiva en un entorno de a."

Es muy llamativo que se use la expresión "derivada segunda" y el ícono $f\,''$ sin haberlos mencionado antes, sin una definición o un comentario previo sobre estos nuevos conceptos. Además podemos observar que en el enunciado del teorema se presenta una ambigüedad sobre *la función derivada segunda* y el *valor numéric*o de la derivada segunda en un real.

Luego de definir punto de inflexión se enuncian y demuestran los teoremas de condición necesaria y condición necesaria y suficiente para la existencia de punto de inflexión:

- Si existe $f\,''(a)$ y la función presenta un P.I. en $x=a$ entonces $f\,''(a) = 0$
- Es condición necesaria y suficiente para que exista un P.I. en a que $f\,''(a) = 0$ y que la derivada segunda cambie de signo a la derecha y a la izquierda del punto a.

Podemos observar que solo se refiere al valor numérico de la derivada segunda en el caso de que éste sea cero, en los teoremas relativos a puntos de inflexión, o el signo de dicho valor numérico. No se encuentra un estudio, ni un comentario, sobre el valor numérico de la derivada segunda ni una interpretación gráfica de éste.

- ***Rey Pastor, J. Pi Calleja, J. y Trejo, A. (Volumen I)(1969). Análisis Matemático. Editorial Kapelusz. Buenos Aires. Argentina.***

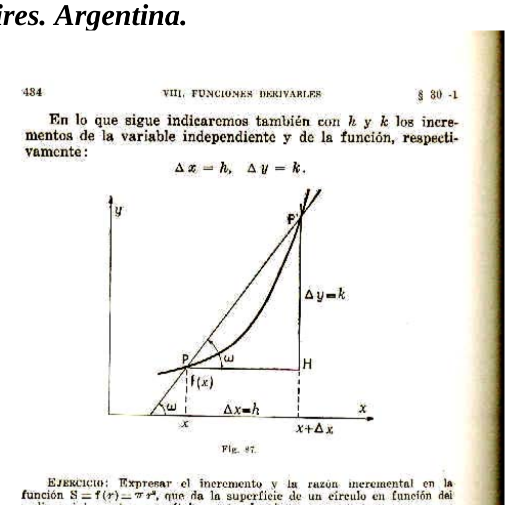
(pag. 433-469, 515)

Imagen 1

Define incremento y razón incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ e indica que

"este cociente representa la rapidez media


484 VIII. FUNCIONES DERIVABLES § 30 -1

En lo que sigue indicaremos también con h y k los incrementos de la variable independiente y de la función, respectivamente:

$$\Delta x = h, \quad \Delta y = k.$$

Fig. 87.

EJERCICIO: Expresar el incremento y la razón incremental en la función $S = f(r) = \pi r^2$, que da la superficie de un círculo en función del de crecimiento en el intervalo (x, $x+\Delta x$). Indica a continuación: “su interpretación geométrica es muy sencilla: nos da el coeficiente angular de la secante *PP´´* pues en el triángulo *PHP´* se tiene $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\omega$”

Bajo el título “noción de derivada” observa que se tendrá una idea más precisa de la rapidez de crecimiento de $f(x)$ en P cuanto menor sea “h”, que por esto se considerará el límite del cociente anterior cuando h tiende a cero.

“Dicho límite se llama derivada de la función $y = f(x)$, y se indica $y´$:

$$y´ = lím \frac{k}{h} = lím \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad para \quad h \to 0”$$

Luego de calcular la derivada de algunas funciones se realiza la interpretación gráfica del límite anterior observando que cundo el punto *P´* se aproxima al *P* la secante *PP´* tiende a la recta tangente en *P* de donde:

“ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\omega$, o sea: $y´ = \mathrm{tg}\omega$.”

Determina la ecuación de la tangente a una curva igualando el coeficiente angular de esta recta al “valor de la derivada en x_1”

Estudia el movimiento rectilíneo de un móvil, llegando a obtener una relación entre la velocidad del móvil y la derivada de la función que define el movimiento del punto sobre la recta en función del tiempo transcurrido, $s = f(t)$.

“Llamaremos velocidad en el instante t, al límite de la velocidad media en el intervalo (t, $x+\Delta t$) cuando $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_m = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

, pero este límite es, por definición, la derivada: $v = s´ = f´(t)$”

Luego de estudiar linealidad de la derivación, la derivada de una función de función (función compuesta) y la derivada de algunas funciones en particular pasa a establecer los criterios de crecimiento y decrecimiento.

Trabaja en los teoremas:

- Si $f\,'(x_0)>0$, la función $f(x)$ es estrictamente creciente en x_0.
- Si $f\,'(x_0)<0$, la función $f(x)$ es estrictamente decreciente en x_0.
- Si la función $f\,'(x)$ es derivable, es decir, admite derivada finita, en el punto x_0, es condición necesaria para que en él tenga un máximo o un mínimo, que sea $f(x_0)=0$.

Al presentar tres criterios para la determinación de máximos y mínimos de una función expone:

1. Estudiar directamente la variación de la función en el entorno del punto crítico.
2. Estudiar la variación de la derivada.
3. Formar la derivada de la derivada, o derivada segunda $f\,''(x) = Df\,'(x)$; cuando esta existe y no se anula, entonces el problema queda resuelto como veremos.

Observemos que por primera vez se menciona la derivada segunda.

Define concavidad "diremos que la curva es cóncava hacia las *y* positivas en *M*, si todos los puntos de la curva, suficientemente próximos a *M*, están situados por arriba de la tangente *t*" y puntos de inflexión para luego resumir:

a) $f\,''(x_0) > 0$, concavidad hacia arriba.

b) $f\,''(x_0) < 0$, concavidad hacia abajo.

c) $f\,''(x_0) = 0$: $\begin{cases} c_1)\ \textit{cambia de signo};\ \textit{punto de inflexión} \\ c_2)\ \textit{pasa de } + \textit{ a } +;\ \textit{concavidad hacia arriba} \\ c_3)\ \textit{pasa de } - \textit{ a } -;\ \textit{concavidad hacia abajo} \end{cases}$

Luego, cincuenta páginas más adelante, al trabajar fórmula de Taylor define derivada sucesiva haciendo mención a la derivada segunda, tercera y luego definiendo por recurrencia:

$$\begin{cases} f\,'(x) = Df(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ f^{(n+1)}(x) = Df^{n}(x) \end{cases}$$

Observamos que nuevamente solo se hace consideración al valor numérico de la derivada segunda en el caso de que éste sea cero, en los teoremas relativos a puntos de inflexión, o el signo de dicho valor numérico. Tampoco, en este texto, se realiza un estudio, ni un comentario, sobre el valor numérico de la derivada segunda ni una interpretación gráfica de éste.

También podemos destacar que al darse la definición de derivadas de orden mayor que uno por recurrencia no se establecen relaciones entre la derivada de orden p ($p>1$) y la función inicial, u otra de las derivadas de orden distinto a p-1 o p+1.

❖ ***Sipvak, M. (1992). Calculus. Editorial Reverté S. A. Barcelona, España.***

Recomendado para las opciones ingeniería y economía.

Imagen 2

(Pág 197- 283; 302-313)

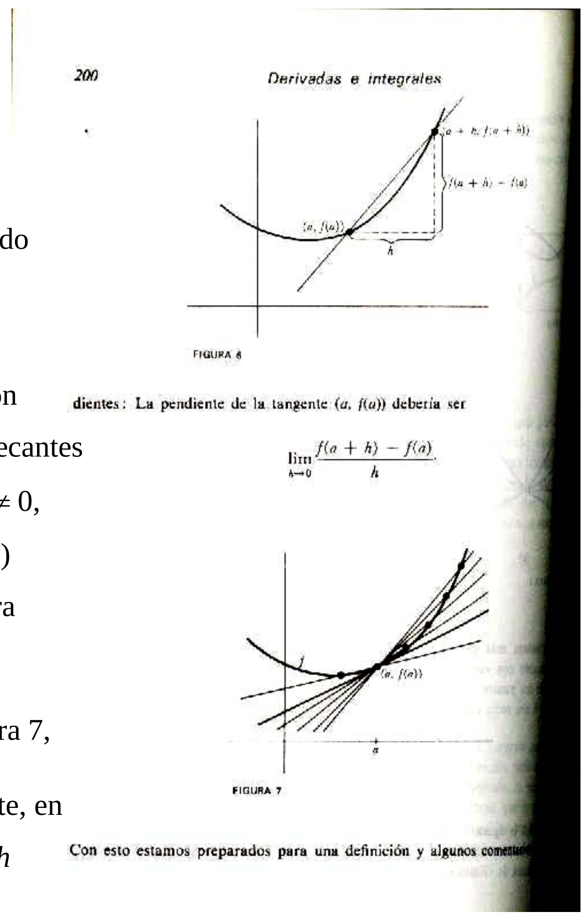

200 Derivadas e integrales

FIGURA 6

dientes: La pendiente de la tangente $(a, f(a))$ debería ser

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

FIGURA 7

Con esto estamos preparados para una definición y algunos comenta

Hace una introducción al tema discutiendo posibles definiciones de recta tangente a un gráfico para concluir “una manera más prometedora de abordar la definición de tangente podría ser empezando con secantes y utilizando la notación de límites. Si $h \neq 0$, entonces los dos puntos distintos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ determinan,como muestra la figura 6, una recta cuya pendiente es $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Como muestra la figura 7, la tangente en $(a, f(a))$ parece ser el límite, en algún sentido, de estas secantes cuando h se aproxima a cero”

A partir de estas observaciones define que una función es derivable en "*a*" si existe el límite del cociente anterior cuando $h \to 0$, utiliza la notación $f\,'(a)$, determina la ecuación de la recta tangente al gráfico en un punto y define función derivada.

Realiza una interpretación física de la derivada asociándola con la velocidad instantánea de una partícula en movimiento. A partir de un ejercicio muestra la notación de Leibniz aunque luego continúa trabajando en general con la primer notación.

Al final de este capítulo observa que a partir de una función f podemos obtener su función derivada, $f\,'$, y dado que también es una función, puede aplicarse el concepto de derivabilidad y obtenerse una nueva función $(f\,')'$ o $f\,''$ que recibe el nombre de derivada segunda de f.

"La derivada segunda es un concepto particularmente importante en física. Si $s(t)$ es la posición en el tiempo t de una partícula que se mueve a lo largo de una recta, entonces $s''(t)$ recibe el nombre de aceleración en el tiempo t."

Luego define por recurrencia:
$f^{(1)} = f\,'$
$f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$, llamando derivas de orden superior a $f^{(k)}$ para $k \geq 2$.

En el capítulo siguiente (10) se trabajan las derivadas de algunas funciones elementales y el álgebra de derivadas.

El capítulo 11 tiene el nombre de "Significado de la derivada", se definen puntos máximos, y mínimos, de una función, así como puntos máximos, y mínimos, locales.

Se demuestran los siguientes teoremas que dan significado gráfico a $f\,'(x)$:

- Sea f una función definida sobre (a,b). Si x es un máximo (o un mínimo) para f sobre (a,b), y f es derivable en x, entonces $f\,''(x)=0$.

Para demostrar el teorema se trabaja con el límite del coeficiente angular de las secantes *AB*, y *BC* siendo $B(x,f(x))$, $A(x+h,f(x+h))$ con $h<0$ y $C(x+h,f(x+h))$ con $h>0$.

- Si f está definida sobre (a,b) y tiene un máximo (o un mínimo) local en x, y f es derivable en x, entonces $f''(x)=0$.

- (Teorema de Rolle). Si f es continua sobre $[a,b]$ y derivable sobre (a,b) y $f(a) = f(b)$ entonces existe un número x en (a,b) tal que $f'(x) = 0$.

- (Teorema del valor medio). Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un número x en (a,b) tal que $f'(x) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$.

Es llamativo que al demostrar este teorema no se realice una interpretación gráfica de él.

- Si f y g están definidas en el mismo intervalo y $f'(x)=g'(x)$ para todo x del intervalo, entonces existe algún número c tal que $f + c = c$.

- Si $f'(x)>0$ para todo x del intervalo, entonces f es creciente en el intervalo; si $f'(x)<0$ para todo x del intervalo, entonces f es decreciente en el intervalo.

- Supongamos $f'(a)=0$. Si $f''(a)>0$, entonces f tiene un mínimo local en a; si $f''(a)<0$, entonces f tiene un máximo local en a.

- Supongamos que existe $f''(a)$. Si f tiene un mínimo local en a, entonces $f''(a)\geq 0$; si f tiene un máximo local en a, entonces $f''(a)\leq 0$.

Bajo el título “Apéndice. Convexidad y Concavidad” encontramos:

“Aunque la gráfica de una función puede trazarse con bastante exactitud sobre la base de la información suministrada por la derivada, hay algunos aspectos sutiles de la misma para cuya aclaración hace falta examinar la derivada segunda. Hemos sometido estos detalles hasta aquí de intento porque, aún sin tomarlos en consideración, el trazado de gráficas es por sí suficientemente complicado y la información adicional que con ellos se obtendría no justifica el esfuerzo. (...) A pesar de estas observaciones desalentadoras, vale bien la pena asimilar la información que aquí presentaremos, ya que las nociones de convexidad y concavidad tienen mucha mayor importancia que la que deriva de ser meros auxiliares en el trazado de gráficas. Además, las demostraciones tienen un agradable sabor geométrico poco frecuente en los teoremas de cálculo infinitesimal. De hecho, la definición básica es de naturaleza geométrica”.

Del párrafo anterior podríamos deducir que el autor, en principio, no considera necesario el estudio de la función derivada segunda para realizar el gráfico de la función inicial, y que la información que ella puede brindar no justifica el esfuerzo. Luego otorga un valor a dicho estudio, sobre todo basado en que las demostraciones tienen un enfoque geométrico.

Nuevamente encontramos signos de que el estatus de la función derivada segunda no parece alcanzar al de la función derivada primera.

En este apéndice se define:

Una función f es convexa en un intervalo, si para todo a y b de este intervalo, el segmento rectilíneo que une $(a,f(a))$ con $(b,f(b))$ queda por encima de la gráfica de f.

Una función f es convexa en un intervalo, si para a, x y b del intervalo con $a<x<b$ se tiene $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

En forma similar se define función cóncava.

Se realizan observaciones intuitivas a partir de interpretar el gráfico de una función convexa y luego se formalizan al demostrar los siguientes teoremas:

Teorema 1

Sea f convexa. Si f es derivable en a, entonces la gráfica de f queda por encima de la tangente por $(a,f(a))$ excepto en $(a,f(a))$ mismo. Si $a<b$ y f es derivable en a y en b, entonces $f'(a)<f'(b)$.

Lema

Supóngase que f es derivable y f' creciente. Si $a<b$ y $f(a)=f(b)$, entonces $f(x)<f(a)=f(b)$

Teorema 2

Si f es derivable y f' es creciente, entonces f es convexa.

Teorema 3

Si *f* es derivable y la gráfica de *f* queda por encima de cada tangente excepto en el punto de contacto, entonces *f* es convexa.

Teorema 4

Si *f* es derivable en un intervalo y sus tangentes la cortan una sola vez, entonces *f* es cóncava o convexa en ese intervalo.

Nuevamente observamos que no se presenta una interpretación del valor numérico de la función derivada segunda, ni un significado de él.

Análisis de programas uruguayos

El tema *estudio analítico y representación gráfica* de una función es estudiado en el sistema educativo de Uruguay en los cursos de tercer año de bachillerato diversificado. Es tratado en todas las orientaciones (Medicina, Arquitectura, Ingeniería) que llevan curso de matemáticas. A pesar de que en cursos anteriores pueden haber graficado funciones, interpretado gráficos de funciones, es en este curso cuando por primera vez estudiarán límites, derivadas, de una función.

Este curso se divide en curso teórico y curso practico en distintos horarios. El curso práctico tiene un bloque semanal de 80 minutos, el curso teórico dos horas semanales en las orientaciones medicina y economía, y cuatro en las opciones arquitectura e ingeniería. Los alumnos que cursan sexto año tienen aproximadamente 17 años y luego pasarían a estudios terciarios.

Se puede observar que en todas las opciones se trata el tema funciones, derivadas primera y segunda, relaciones de éstas con la función y representación gráfica de funciones.

Podemos establecer ciertas diferencias y similitudes en el tipo de relaciones estudiadas entre, las funciones derivadas primera y segunda, de una función.

Diferencias

- **En la definición.**

  - Se define en forma particular la derivada primera a partir de la función, estableciendo una relación entre ambas.

Sea *f* una función real y existe un entorno de *a* incluido en su dominio. Se llama **derivada de *f* en x=*a*** al límite $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ si este existe y es finito.

Sea *f*:A→R, $\acute{A} = \{x \in A / \ f \ \textit{es derivable en } x\}$, si $\acute{A} \neq \{\ \}$ definiremos una nueva función $f\,\acute{}$ (función derivada de f) tal que $f\acute{}: \acute{A} \to R$ y su grafo es $G = \{(x, y) \in \acute{A} * R / y = f\acute{}(x)\}$

  - Se define a la función derivada segunda como la derivada de la función derivada primera sin establecer una relación directa con la función inicial.

"Supongamos que la función *y* = *f*(*x*) es derivable en un segmento [*a*,*b*]. Los valores de la derivada *f* ´(*x*) dependen de *x*, es decir, la derivada *f* ´(*x*) también es función de *x*. Derivando esta última función obtenemos la llamada segunda derivada de la función *f*(*x*). La derivada de la primera derivada se denomina derivada de segundo orden o segunda derivada de la función primitiva y se designa por el símbolo *y*´´ o *f* ´´(*x*)." (Piskunov, 1986)

- **Interpretación gráfica**

  - Se realiza una introducción gráfica del tema derivada primera de una función:

Como se ha mostrado en el estudio de los libros de texto, y se mostrará en la visita a clase, se realiza una introducción gráfica al tema. Se relaciona, a partir de la observación del gráfico de una función *f*, que la imagen por medio de la función *q* cuya expresión analítica es $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ de un real *x* coincide con el coeficiente angular de la recta secante al gráfico de la función *f* en los puntos $A(a,f(a))$ y $B(x,f(x))$. Luego se muestra que el límite de la función *q* cuando *x* tiende a "*a*" es el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico de *f* en *A*.

- No se realiza una introducción gráfica de la derivada segunda de una función.

- **Relación entre la función y el valor numérico de las derivadas.**

- Se establece una relación entre la función y el valor numérico de la derivada primera.

Se muestra que la recta tangente al gráfico de la función *f* en $A(a, f(a))$ tiene ecuación
$y - f(a) = f\,'(a)\,(x-a)$.

En los cursos se enfatiza que la derivada primera de una función en $x=a$ coincide con el coeficiente angular de la tangente a su gráfico en $x=a$.

- No se establece una relación directa entre la función y el valor numérico de la derivada segunda.

Similitudes

- **Relación entre la función y el signo de las derivadas.**

- Si una función tiene derivada positiva (negativa) en $x=a$ entonces será estrictamente creciente (decreciente) en $x=a$.

$f\,'(a)>0 \Rightarrow f$ creciente en $x=a$.

Por hipótesis $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0$, por teorema de conservación del signo $\exists$

E^*_a / sig $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ = sig $f'(a) \Rightarrow \forall x \in E^*_a$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$.

Si $x \in E^*_a$ y $x<a \Rightarrow x-a<0$, como $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \Rightarrow f(x)<f(a)$ (I)

Si $x \in E^*_a$ y $x>a \Rightarrow x-a>0$, como $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) > 0 \Rightarrow f(x)>f(a)$ (II)

De (I) y (II) f es estrictamente creciente en $x=a$.

- Si una función tiene derivada segunda positiva (negativa) en $x=a$ entonces tendrá concavidad positiva (negativa) en $x=a$.

$f''(a)>0 \Rightarrow f$ presenta concavidad positiva en $x=a$.

Debemos probar que $\exists\ E_a / \forall x \in E^*_a\ \ f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$

Como $\exists\ f''(a) \Rightarrow \exists\ f'(x)$ y $f(x)$ en E_a.

Consideramos la función auxiliar d / $d(x)= f(x) -(f(a) + f'(a)(x-a))$

$d(a) = 0$

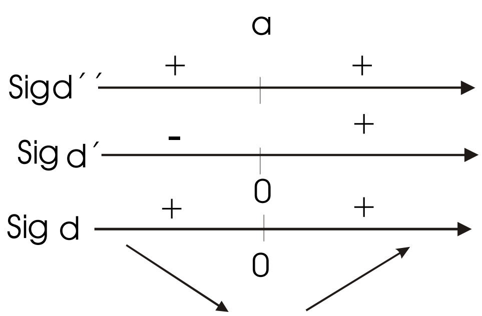
$d'(x) = f'(x) - f'(a)$

$d'(a) = 0$

$d''(a) = f''(a) > 0$

Como $d''(a)>0 \Rightarrow \exists\ d'$ es estrictamente creciente en E_a.

Resumiendo $\exists\ E_a / \forall x \in E^*_a$ se cumple:



De donde $\exists\ E_a / \forall x \in E^*_a\ \ d(x)>0 \Rightarrow \exists\ E_a / \forall x \in E^*_a\ \ f(x) -(f(a) + f'(a)(x-a))>0 \Rightarrow$

$\exists\ E_a / \forall x \in E^*_a\ \ f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$

También podemos encontrar teoremas similares a los anteriores relacionando el signo de las derivadas en un intervalo $[a,b]$ con el crecimiento (o la concavidad) de la función en dicho intervalo.

- Si una función tiene derivada positiva (negativa) en el intervalo (a,b) entonces será estrictamente creciente (decreciente) en (a,b).
- Si una función tiene derivada segunda positiva (negativa) en el intervalo (a,b) entonces tendrá concavidad positiva (negativa) en (a,b).

- **Relación entre puntos críticos**

- Si $f(a)$ es extremo relativo de f en $x=a$ y f es derivable en $x=a$, entonces $f\,'(a)=0$

Como f es derivable en $x=a \Rightarrow \exists\ f\,'(a) \in R$. Por propiedad de tricotomía de reales se cumple una y solo una de estas tres condiciones: $f\,'(a)>0$ o $f\,'(a)<0$ o $f\,'(a)=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } f\,'(a)>0 \Rightarrow f \text{ estrictamente creciente en } x=a\text{, absurdo por hipótesis} \\ \text{Si } f\,'(a)<0 \Rightarrow f \text{ estrictamente decreciente en } x=a\text{, absurdo por hipótesis}\end{array}\right\} \quad f\,'(a)=0$$

- Si en $x=a$ la función presenta un punto de inflexión y existe $f\,''(a)$ entonces $f\,''(a) = 0$.

La demostración de este teorema es muy similar a la anterior:

Por hipótesis $\exists\ f\,''(a) \in R$. Por propiedad de tricotomía de reales se cumple una y solo una de estas tres condiciones: $f\,''(a)>0$ o $f\,''(a)<0$ o $f\,''(a)=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } f\,''(a)>0 \Rightarrow f \text{ presenta concavidad positiva en } x=a\text{, absurdo por hipótesis} \\ \text{Si } f\,''(a)<0 \Rightarrow \text{f presenta concavidad negativa en } x=a\text{, absurdo por hipótesis}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow f\,''(a)=0$

A lo anterior debemos agregar que, en muchos grupos, no se trabaja en el curso teórico el tema derivada segunda y, además en el curso práctico, si se llega a trabajarlo, solo se la utiliza para determinar la concavidad (positiva o negativa) del gráfico de una función.

Esto es causa, según los docentes, de lo extenso que son los programas vigentes haciendo imposible tanto la demostración de todos los teoremas y aplicaciones de cada tema, así como el trabajo en todos los temas que indica el programa.

Evidencias del tratamiento escolar

Observación de clases

Ubicándonos en el grupo

Las dos visitas realizadas se llevaron a cabo en un grupo de sexto año de medicina de un liceo público en el curso de matemática teórico. La primer visita corresponde al momento que se introduce el tema derivadas, y la segunda se realiza al momento de trabajarse el concepto de concavidad y su relación con la derivada segunda.

El curso teórico del grupo visitado tuvo en total 69 horas-clases (cada una de 40 minutos) y el curso práctico 44.

De los 42 alumnos inscriptos en el curso, algunos pocos de ellos, a pesar de estar inscriptos, no han concurrido al curso y otros lo han ido abandonando. Al momento de la visita aproximadamente 28 alumnos concurren en forma regular al curso, de estos solo 5 tienen calificación que les permite exonerar el curso teórico (calificación 7 o más sobre 12).

Dado que la investigación se realizó con alumnos de Uruguay nos interesa estudiar la forma que es abordado el tema por los docentes uruguayos, pero hay muestras que es abordado en forma similar por docentes de otros países: “Por lo que respecta a la derivada, diremos que ésta se introduce al seno escolar como una medida de la inclinación de la recta tangente a una curva. Es decir, el concepto de derivada se presenta en clase mediante una explicación que utiliza a la pendiente de la recta tangente a los estudiantes de entre 16 y 18 años de edad. Ello presupone que la noción de pendiente, que fue introducida a estudiantes de entre 12 y 14 años de edad, haya adquirido una cierta estabilidad funcional. Una vez definida la derivada como la operacionalización de la estrategia visual anterior, se suele iniciar su tratamiento mas bien algorítmico y teórico que consiste en enseñar a derivar diversas funciones y a demostrar algunos teoremas" (Cantoral 2000). Como podremos observar la forma de trabajar el tema derivadas en los cursos de bachillerato de Uruguay y México es similar, pero diferente.

Primer visita

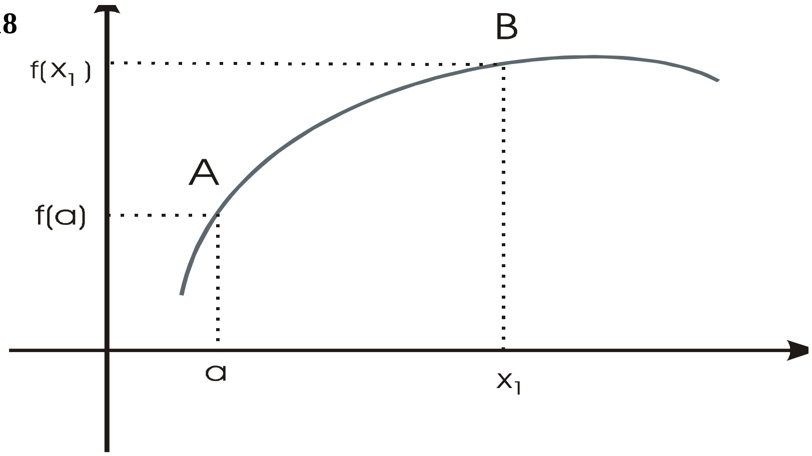
La visita se realiza en un modulo, que corresponde a 80 minutos. La clase corresponde a la número 48-49 del curso teórico de sexto año de medicina. En el momento de la visita hay 25 alumnos.

La profesora me indica que en la clase anterior se trabajo ecuación de la recta. Se vieron los casos: ecuación de la recta que pasa por dos puntos $\left(y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)\right)$,ecuación de la recta conociendo su coeficiente angular y el punto de corte con el eje de las ordenadas $(y = mx + n)$, y ecuación de la recta que pasa por un punto dado con coeficiente angular dado $(y - y_0 = m(x - x_0))$.

La profesora comienza la clase dibujando en el pizarrón el grafico de una función continua, de concavidad negativa, en el cuadrante I, estas características no son indicadas a los alumnos. Al realizar el grafico indica "supongamos que esta gráfica corresponde a la de una función f que relaciona el tiempo transcurrido con la posición de un móvil, si llamamos "*x*" a la variable tiempo, *f*(*x*) indica la posición del móvil en el instante *x*".

Profesora: Consideremos dos puntos *A* y *B* de la gráfica, si sus coordenadas son $A(a,f(a))$ y $B(x_1,f(x_1))$, ¿qué significa?

Gráfico 18



Alumnos: Quedan en silencio.

P: ¿Qué significa que el punto *A* pertenezca al grafico de *f*, ¿qué relación hay entre las coordenadas, qué significan esas coordenadas en esta función?

A: Que a "*a*" le corresponde $f(a)$.

P: Sí, ¿y qué significan esas variables?

A: x es tiempo y $f(x)$ la posición.

P: Sí, pero, ¿qué relación hay entre ellas en el caso que *A* pertenece al gráfico?

A: ... que para el instante "*a*" el móvil está en $f(a)$

P: Muy bien, en el instante "*a*" el móvil se encuentra en $f(a)$, y ¿qué relación indica *B*?

A: Lo mismo.

P: ¿Qué?

A: ...que en el instante x_1 el móvil se encuentra en $f(x_1)$.

P: Bien. Así que tenemos un móvil del cual sabemos que en el instante "a" su posición es $f(a)$ y en el instante "x_1" su posición es $f(x_1)$. ¿Cómo calculan en física la velocidad media del móvil entre los instantes "a" y "x_1"?

A: Dividiendo las diferencias.

P: ¿Qué significa eso?

A: Restamos las "f" y las "x" y las dividimos.

A: Calculamos los deltas y los dividimos.

P: Pase uno al pizarrón a hacerlo.

Pasa un alumno llamado Jorge, escribe: $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

P: ¿Qué significa eso?

A: La resta.

A: La diferencia.

P: Por favor escribí como calculas esos deltas.

Jorge escribe: $\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a}$

P: Muy bien. ¿Dónde estaría representado en el grafico esta diferencia? (La profesora indica con el dedo $f(x_1)$-$f(a)$)

El alumno toca con el dedo el segmento determinado por los puntos $(0,f(a))$ y $(0,f(x_1))$.

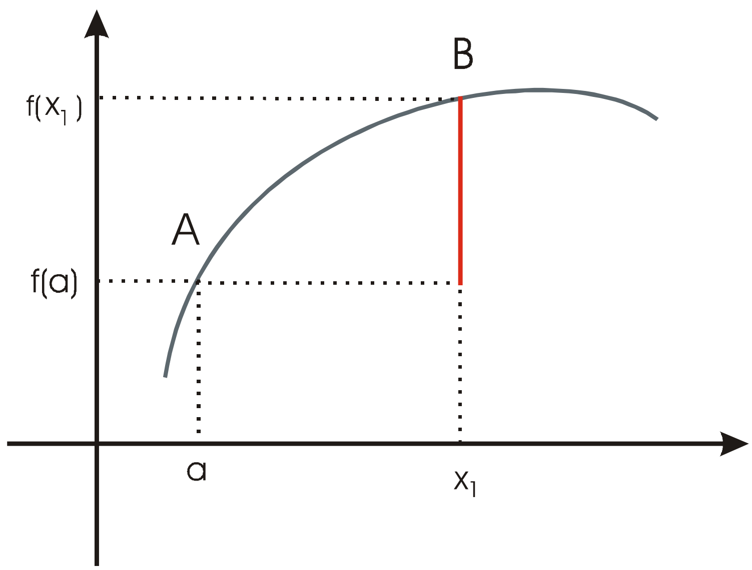
P: Observa que ese segmento es igual a este (toca el segmento determinado por *B* y la proyección ortogonal de $(0,f(x_1))$ sobre la recta determinada por *B* y $(x_1,0)$).

J: Sí... es lo mismo...

P: Marcalo con rojo por favor.

El alumno marca:

Gráfico 19



P: ¿Y la otra diferencia?

A: Abajo.

J: Acá (toca el segmento determinado por $(a,0)$ y $(x_1,0)$).

P: Sí, pero ese segmento es igual a...

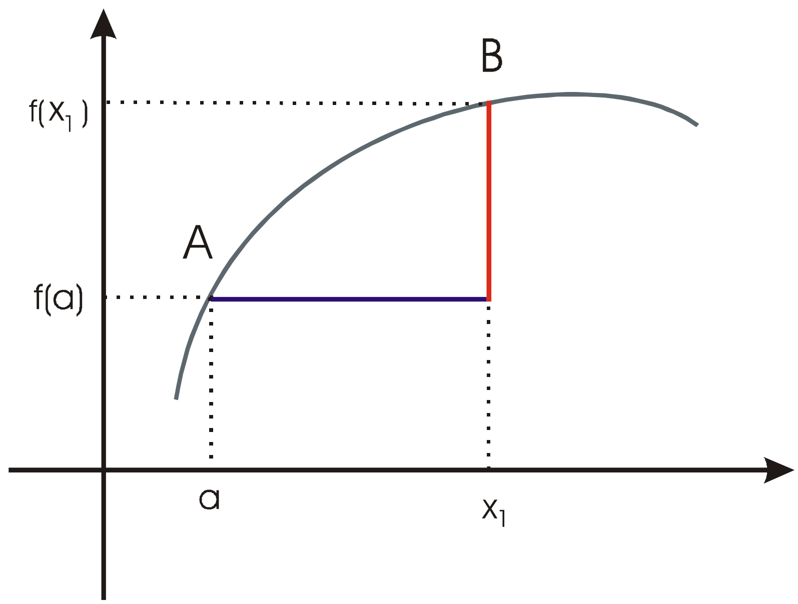
El alumno mira al pizarrón. Otro alumno le dice “arriba, el que está arriba”.

J: Ah, sí, éste.

P: Marcálo con azul.

Jorge marca el segmento buscado:

Gráfico 20



P: Bien, gracias.

Jorge se sienta.

P: ¿Qué relación hay entre este cociente y el grafico?

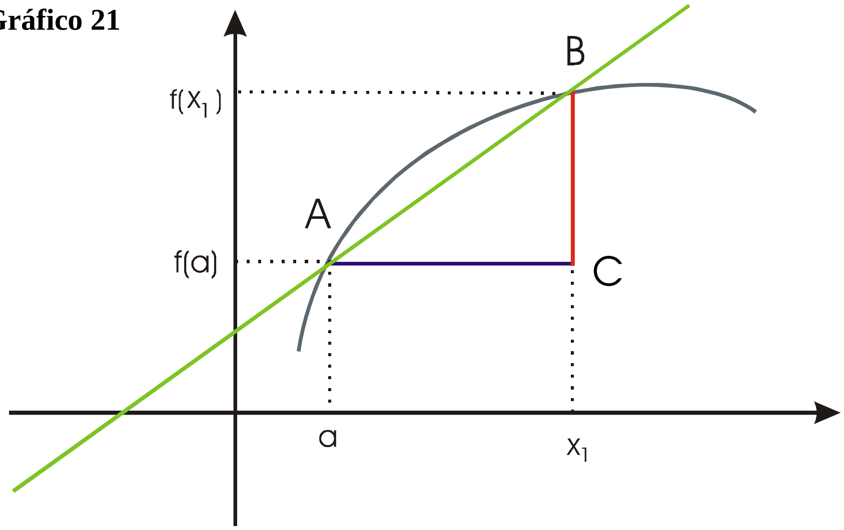
A: Es la velocidad media.

P: Si, del móvil, ¿pero dónde, en el grafico, vemos representado este cociente?

A: Silencio.

P: Tracemos la recta que determinan los puntos *A* y *B*....Llamémosle *C* a este punto.

Gráfico 21



A: Queda un triangulo rectángulo

P: Muy bien. Observemos ese triangulo *ABC*, ¿qué indica el cociente? (marca el cociente incremental)

A: Son los catetos.

P: Sí... Observen el triangulo y la recta, ¿qué relación indica este cociente?

A: Ah!!!!!! Esa cosa de la recta....el ángulo.

A: El angular... espere (Busca en el cuaderno) El coeficiente angular!!!!!

A: Sí, eso.

P: Muy bien, ¿y qué significa el coeficiente angular? ¿Qué relación hay entre este coeficiente y la recta?

A: La tangente!!!!!!!

P: Sí, la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas, llamémosle α_{AB} (lo anota en el dibujo) . Pase uno a escribir la ecuación de esta recta.
Laura: ¿Puedo usar el cuaderno?

P: Claro

Pasa Laura y escribe: $y = mx+n$.

P: ¿Cuál sería el coeficiente angular de esta recta?

Laura toca el cociente $\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}$ ya escrito por Jorge en el pizarrón , la profesora lo recuadra.

P: ¿Cómo le podemos llamar?

L: Coeficiente.

P: Muy bien, pero, ¿con qué letra lo podemos indicar?

A: m.

P: Bien, llamémosle m_{AB} porque es el coeficiente angular de la recta AB (escribe m en el recuadro) Entonces, ¿qué representa este cociente?

$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} \rightarrow m_{AB}$$

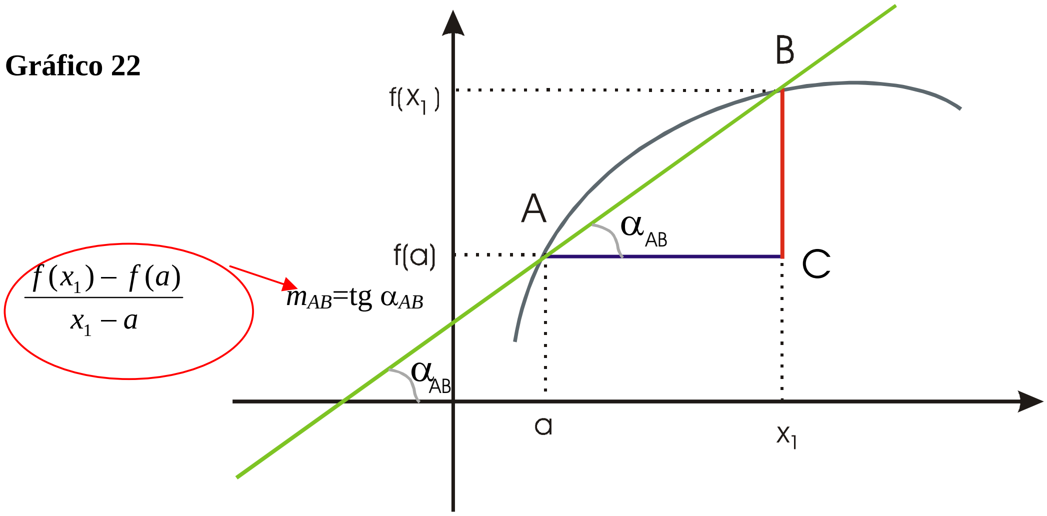
A: Al coeficiente angular.

P: ¿De qué?

A: De la recta.

P: Muy bien, entonces el cociente (toca el C.I.) corresponde al coeficiente angular de la recta AB e indica la velocidad media del móvil en el intervalo $[a, x_1]$. Recordemos que $m_{AB} = \text{tg}\ \alpha$ (agrega esta igualdad al recuadro).

Gráfico 22



P: Si queremos ahora calcular la velocidad media en otro intervalo [a, x_2], ¿cómo haríamos?

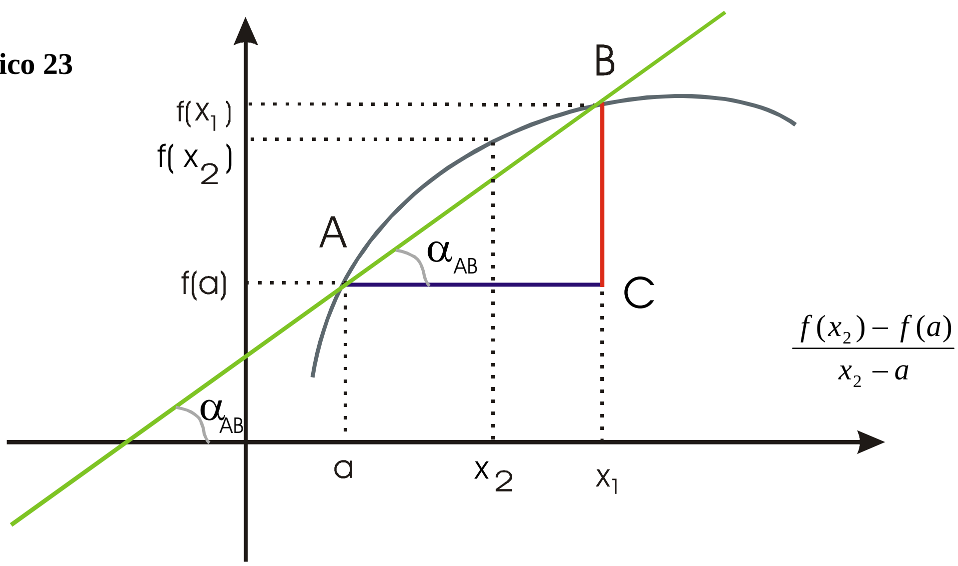
A: Lo mismo.

P: Pase uno a hacerlo.

Pasa una alumna llamada Claudia. Ella considera un punto sobre el eje a la derecha de x_1, la profesora le indica que desea calcular la velocidad media en un intervalo menor, que considere el nuevo punto entre a y x_1.

Claudia considera x_2 entre a y x_1, el punto del grafico que le corresponde esa abscisa y la ordenada de este último. Luego realiza el mismo razonamiento y escribe:

Gráfico 23



P: Bien, gracias. Ahora quiero seguir calculando velocidades medias de intervalos [a, xi] a medida que xi se aproxima a "a". No haremos todas las rectas porque rayaríamos mucho el grafico y no podríamos ver que esta ocurriendo. Pase uno con una regla y la vamos ubicando como si fueran las distintas rectas.

Pasa Diego al pizarrón regla en mano.

P: ¿Que harás ahora?

D: Tomo otro punto.

P: Bien, ¿donde?

D: Acá (marca un punto entre a y x_2).

P: Bien, ¿cuál sería la recta ahora que debes considerar?

Diego coloca la regla sobre A y un supuesto B_3 de abscisa x_3.

P: Bien. Si ahora consideramos otro...

Diego marca un supuesto x_4 y pone la regla sobre A y un supuesto B_4.

P: ¿Qué ocurre con esos puntos del gráfico?

A: Se acercan a A.

P: Muy bien. ¿Están todos de acuerdo?

A: Sí.

P: ¿Y que pueden decir de las distintas rectas AB_i?

A: Silencio.

P: Andá colocando la regla de las formas que irían variando las rectas secantes. ¿A qué se van acercando?

A: Pasan por *A*.

D: A la tangente.

P: Muy bien. Observen que todas las rectas AB_i pasan por *A*, pero se van aproximando a la recta tangente al grafico en *A*.

La profesora toma la regla y hace el movimiento que irían haciendo las distintas secantes.

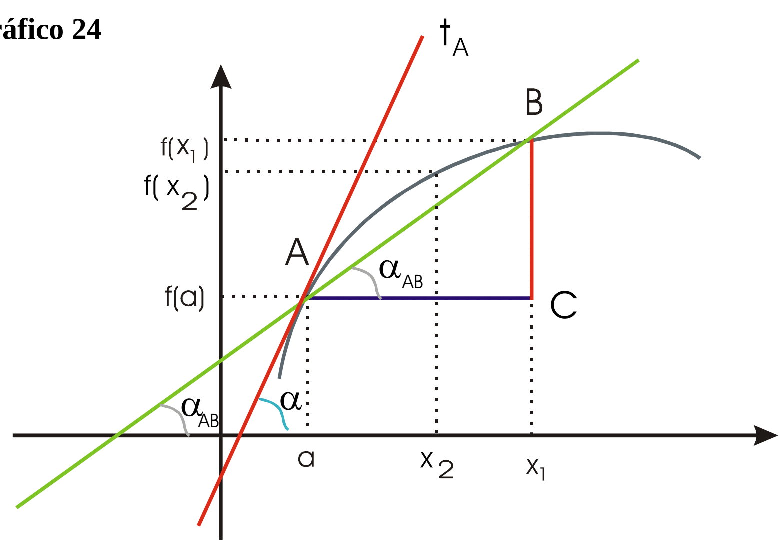
P: ¿Ven que se van aproximando a la tangente en *A*?

A: Sí.

B: Bien, tracémosla entonces. Llamémosle α al ángulo que forma con el eje de las abscisas.

La profesora traza con rojo la recta tangente al gráfico en *A*.

Gráfico 24



P: Resumiendo, *x* se aproxima a "*a*" (escribe $x \to a$) entonces *B* se aproxima a ...

A: *A*.

P: Bien (escribe. $B \rightarrow A$), la recta *AB* se aproxima a...

A: La tangente.

P: Bien, llamémosle *t* a la recta tangente al gráfico en *A* (escribe $AB \rightarrow t$). El ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas, α, ¿a qué se aproxima?

A: Silencio.

P: Observen, la rectas AB_i se aproximan a la recta *t*, los ángulos que forman esas rectas se van a aproximar... (con la regla va mostrando el supuesto movimiento de las rectas e indica con el dedo el ángulo en cuestión).

A: Al de la tangente.

P: Claro. El ángulo que forman las distintas secantes con el eje de las abscisas tiende al ángulo que forma la recta tangente con el eje, le habíamos llamado α. (Escribe $\alpha_{AB} \rightarrow \alpha$). Y el coeficiente angular de las rectas *ABi* ¿a qué se aproxima?

A: ... al de la tangente.

P: Bien, llamémosle *m* (escribe $m_{ABi} \rightarrow m$).

P: En este ejercicio en concreto, ¿qué indicaba este cociente?

A: El coeficiente angular.

P: Si, muy bien, pero... ¿qué estábamos intentando calcular?

A: La velocidad.

P: La velocidad media del intervalo $[a,x_I]$. Entonces, si x_i se aproxima a “a”, ¿la velocidad media a qué se aproxima?

A: Silencio.

P: Si estamos calculando la velocidad media de un intervalo $[a,x_i]$ cada vez mas chiquito, x_i se esta acercando a “a”, ¿la velocidad media se esta pareciendo a qué?

A: Silencio.

P: ¿No recuerdan de física la velocidad instantánea?

A: Sí.

P: Bien, entonces, si el intervalo de tiempo considerado cada vez es menor, es “a” y un poquito más, es casi como estar calculando la velocidad en “a”. ¿Entienden?

A: Sí.

P: Bien, entonces, la velocidad media de los intervalos $[a,x_i]$ cuando x_i se aproxima a “a” se aproxima a...

A: La velocidad en “a”.

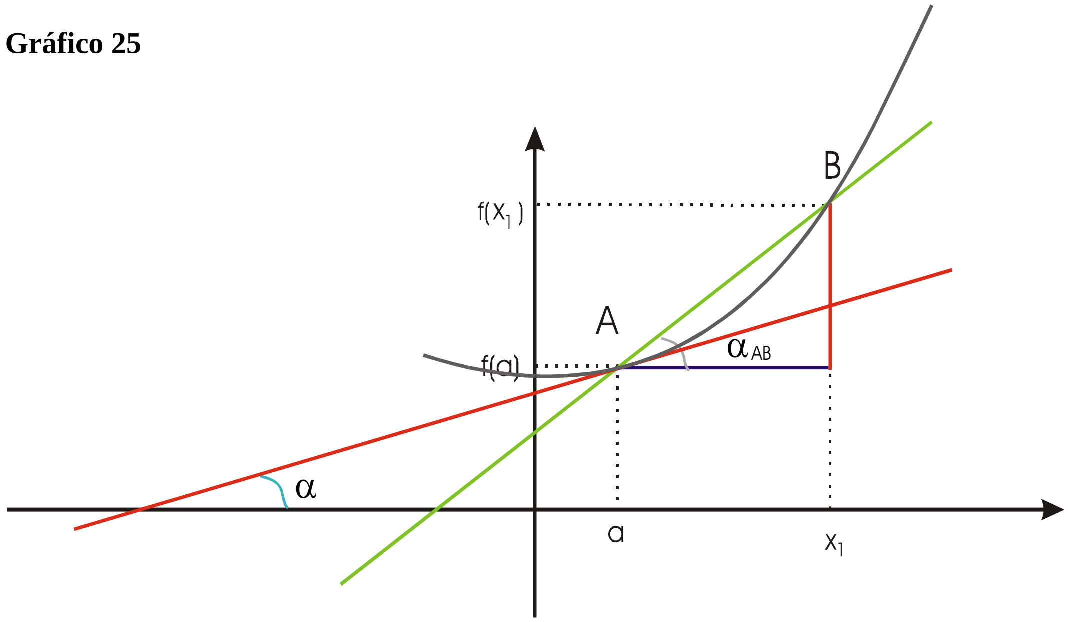
P: Muy bien, a la velocidad instantánea del móvil en el instante “a”. Recordemos que el cociente se aproxima al coeficiente angular de la recta tangente.

Borra el pizarrón.

P: Ahora imaginemos una función f cualquiera y consideremos dos puntos A y B de su grafico.

La profesora dibuja nuevamente una función en el cuadrante I pero ahora con concavidad positiva y considera dos puntos A y B del grafico.

Gráfico 25



P: Sea una función *f* real y un punto *A* fijo de su grafico y un punto *B* genérico de su grafico de coordenadas *A*(*a*, *f*(*a*)) y *B*(*x*, *f*(*x*)) (Escribe *f* función real, $a \in D(f)$)

P: Llamaremos función cociente incremental de *f* a la función *q* / $q(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Observemos que $D(q)=D(f)-\{a\}$

P: Observemos qué nos indica esta función (traza la recta *AB*, el ángulo que forma con el eje de las abscisas y marca el triangulo *ABC*).

A: Es lo mismo que antes.

P: Sí, solo que ahora es una función cualquiera, no tiene porque estar relacionando tiempo con posición... La función cociente incremental nos indica....

A: Silencio.

P: Observen la recta, es igual que antes...

A: El ángulo.

P: Bien, no es el ángulo sino el coeficiente angular de la recta, la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas...

P: Si calculamos el limite de esta función cuando *x* tiende a "*a*", la recta *AB* tiende...

A: A la tangente.

P: Bien, y el límite de esta función da...

A: Indeterminado!! Cero sobre cero.

P: Muy bien, pero indeterminado no es un resultado. Como no tenemos la expresión analítica de la función tratemos de buscar ese limite interpretando el grafico.

A: Silencio.

P: Si esta función indicaba el coeficiente angular de la recta *AB* su límite cuando *x* tiende a "*a*" va a ser el coeficiente angular de...

A: La tangente.

P: Muy bien!! Entonces, si existe este límite será el coeficiente angular de la recta tangente al grafico en *x*=*a*, o sea la tangente trigonométrica del ángulo que forma con el eje de las abscisas.

P: Con esta idea vamos a definir un nuevo concepto.... Dada una función real *f* y un entorno de un real "*a*" incluido en su dominio, diremos que *f* es derivable en *x*=*a* si y solo si el límite del cociente incremental de *f* existe y es finito.

Escribe: *f* es una función real, $\exists \quad Ea \subset D(f)$.

f es derivable en *x*=*a* $\Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe y es finito.

Observación: Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe y es finito f es derivable en $x=a$ y $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in R$. Notaremos este límite con $f\,'(a)$ y le llamaremos derivada de f en $x=a$.

P: De acuerdo a esta definición, ¿cuándo no sería derivable una función?

A: Silencio.

P: ¿Cuándo dijimos que era derivable una función en un real? Lean la definición.

A: Cuando el límite del cociente incremental es finito.

P: ... y algo más, se exige algo más...

A: Existe.

P: Muy bien, entonces, ¿cuándo no sería derivable?

A: Si ese límite no existe.

A: O es infinito.

P: Muy bien. Anoten: Una función no es derivable en un real a cuando el límite de cociente incremental para x tendiendo a "a" no existe o es infinito.

P: ¿Cómo haremos para calcular la derivada de una función en un punto entonces?

A: Silencio.

P: Por ejemplo, sea $f : R \to R \,/\, f(x) = 4x - 2$ (la escribe en el pizarrón) quiero saber si es derivable en $x=3$, y de ser así calcular la derivada en ese valor. ¿Qué debo hacer?

A: Calcular el límite.

P: Muy bien, pasá a escribirlo.

Pasa Daniela y escribe: $\underset{x \to a}{lím} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \underset{x \to 3}{lím} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \underset{x \to 3}{lím} \dfrac{4x - 2 - 10}{x - 3}$

$= \underset{x \to 3}{lím} \dfrac{4x - 12}{x - 3} = \underset{x \to 3}{lím} \dfrac{4(x - 3)}{x - 3} = 4$

P: O sea, 4 es...

D: La derivada.

P: Escribiremos $f\,'(3) = 4$.

La profesora dicta ejercicios similares para que los alumnos los realicen de tarea.

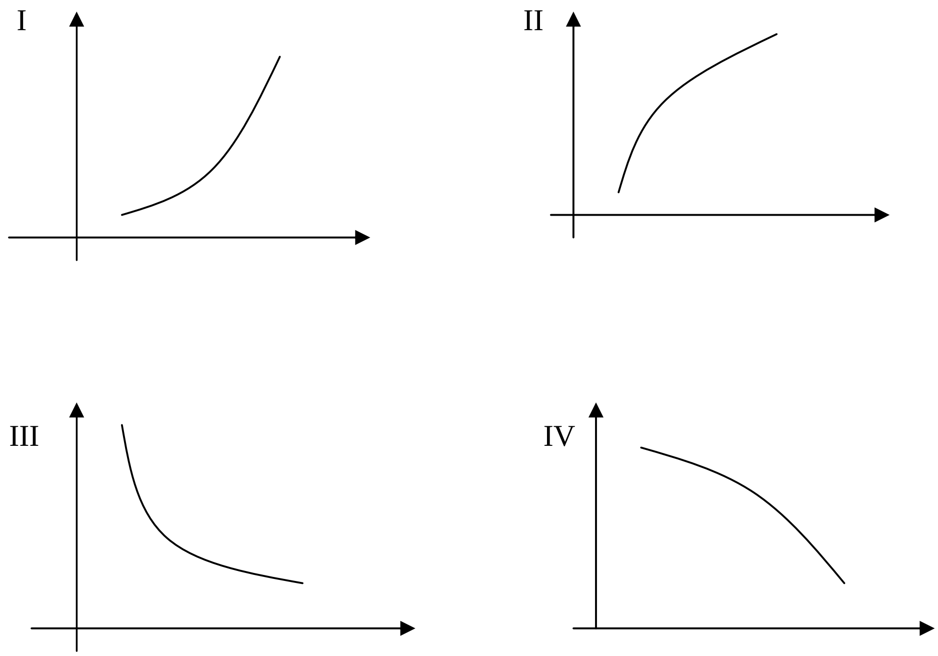
La profesora me indica que en la clase siguiente calcularan derivadas puntuales de algunas funciones y luego definirá función derivada para determinar las derivadas de funciones elementales y tabular.

Segunda visita

La visita corresponde a un módulo (80 minutos) de teórico al mismo grupo de sexto de medicina que se hizo la primer visita. Corresponde a la clase número 66-67, la penúltima del curso. La profesora me indica que debido al atraso en el programa no se definiría formalmente derivada segunda ni se demostrarán los teoremas correspondientes.

La profesora dibuja en el pizarrón cuatro gráficas correspondientes a dos funciones crecientes, una con concavidad positiva y otra con concavidad negativa, y de dos funciones decrecientes, nuevamente una con concavidad positiva y otra con concavidad negativa. Las cuatro funciones están definidas en un intervalo cerrado de reales, y sus gráficos están comprendidos en el primer cuadrante.

Gráficos 26



Profesora: Observando estos gráficos, ¿qué pueden decir de las funciones?

Alumnos: Son continuas.

A: No están definidas para todos los reales.

A: Son derivables.

P: Muy bien. ¿Qué pueden decir del crecimiento?

A: Las I y II son crecientes y las III y IV son decrecientes.

A: Unas tienen derivadas positivas y otras negativas.

P: De a uno, levantando la mano, ¿cuáles tienen derivada positiva y cuales negativas?

Luis: Las crecientes tienen derivada positiva y las decrecientes negativa.
Nadia: La I y II tiene derivada positiva y las III y IV negativa.

P: Sí, a partir del gráfico parece ser que estas funciones definidas en un intervalo son derivables, sus derivadas no son cero, no hay tangentes horizontales en ese intervalo. Así que parece que la derivada de las funciones correspondientes a los gráficos I y II son positivas, porque además de todo eso las funciones son crecientes. En los casos III y IV corresponden a funciones decrecientes, derivables y sin tangentes horizontales, así que la derivada de cada una será negativa en estos intervalos. ¿Están todos de acuerdo?

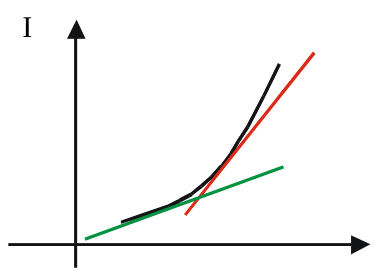
A: Sí.

P: Pase uno al pizarrón y trace distintas rectas tangentes al gráfico I.

Pasa Alejandra.

P: ¿Qué observan de la posición entre el gráfico y algunas de las rectas tangentes que trazó la compañera?

Gráfico 27



A: Tocan en un solo punto.

A: No pasan para el otro lado.

A: Están del mismo lado.

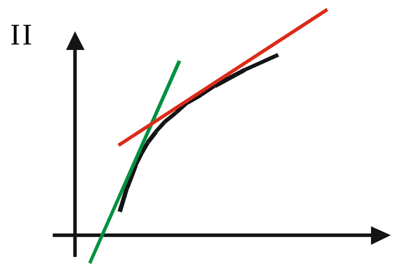
A: La gráfica está arriba de las rectas.

A: Las rectas quedan debajo.

P: Muy bien. Ahora hagamos lo mismo con el gráfico II.

Pasa Julio al pizarrón:

Gráfico 28



P: Que observan ahora?

A: Lo mismo al revés.

A: Están las rectas arriba.

A: .. la gráfica abajo.

P: Podemos observar que estos dos gráficos corresponden a gráficos de funciones crecientes, pero en un caso si trazamos las rectas tangentes a estos gráficos las rectas quedan por arriba del gráfico y en el otro caso por debajo. Hagan lo mismo con los otros gráficos en sus cuadernos.

Los alumnos copian las gráficas y trabajan algunos en forma individual, otros discuten con compañeros comprobando resultados.

P: ¿Qué han observado?

A: Lo mismo.

A: La tercera queda arriba y la cuarta abajo.

A: Es lo mismo que antes.

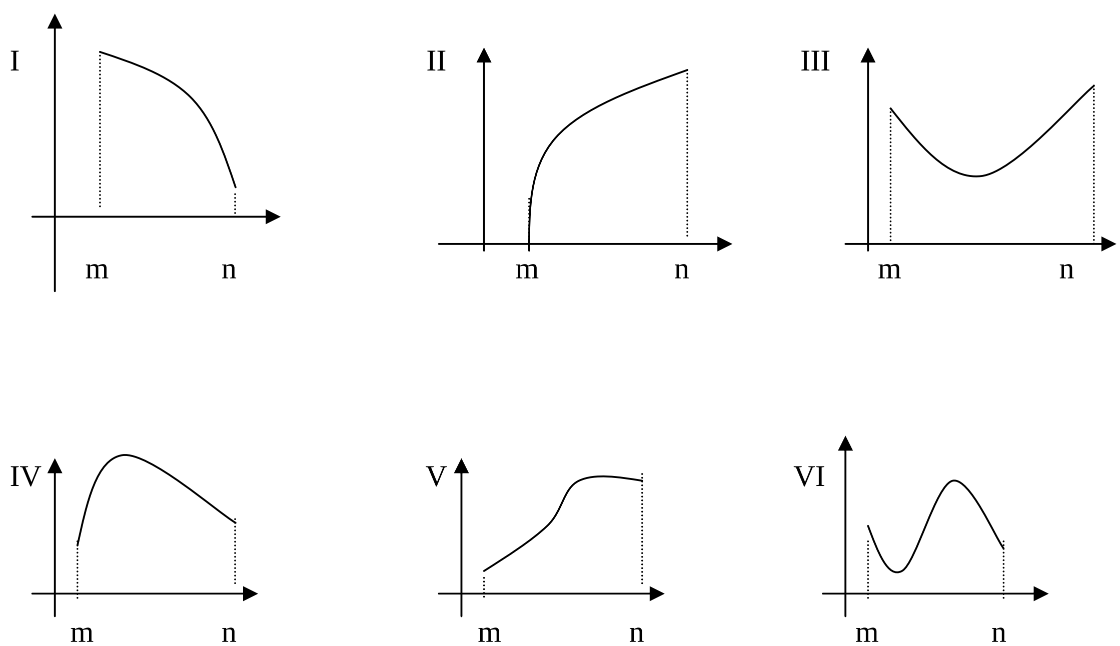
P: Pase uno al pizarrón a hacerlo.

Pasa Julio nuevamente y traza distintas rectas tangentes a los últimos gráficos.

P: Observen que en los dos primeros casos las gráficas corresponden a funciones crecientes, pero si trazamos las rectas tangente a ellas en el primer caso quedan por debajo de la gráfica, o la gráfica por arriba, es lo mismo, ¿no?, y en el segundo caso las rectas quedan por arriba. En los dos últimos casos las gráficas corresponden a funciones decrecientes y nuevamente si trazamos las rectas tangentes a ellas en un caso quedan por arriba y en otro por debajo. Digan en cada caso cómo les parece que quedaran las rectas tangentes a estos gráficos en el intervalo [*m*,*n*].

Dibuja en el pizarrón:

Gráficos 29



P: En la I, las rectas tangentes al gráfico en el intervalo dado quedan por...

A: Arriba.

P: Del gráfico. ¿En la II?

A: Por arriba también.

P: ¿En la III?

A: Por debajo.

P: ¿En la IV?

A: Por arriba.

P: ¿En la V?

A: Primero por abajo y después por arriba.

P: Muy bien. Observemos que hay un punto del gráfico que separa la zona donde las rectas tangentes al gráfico quedan por debajo de éste y luego quedan por arriba. Pase uno a marcar ese punto del gráfico.

Pasa un alumno y luego de discusiones con el grupo de tipo “un poco más a la derecha”, “un poco más a la izquierda” ubica el punto de inflexión.

P: ¿Y en la última?

A: Lo mismo al revés.

A: Primero por abajo y después por arriba.

P: Pase uno a marcar el punto de cambio.

Un alumno marca el punto de inflexión.

P: No definiremos formalmente este nuevo concepto ni demostraremos los teoremas correspondientes. En forma intuitiva trabajaremos este concepto. Escriban: en los casos que las rectas tangentes al gráfico de una función en un intervalo queden por debajo de éste, diremos que la función presenta concavidad positiva en dicho intervalo. Se puede demostrar un teorema que indica que si la derivada segunda de una función es positiva en un intervalo I, la función presenta concavidad positiva en dicho intervalo, o sea que si trazamos las rectas tangentes al gráfico en I estas quedarán...

A: Por abajo.

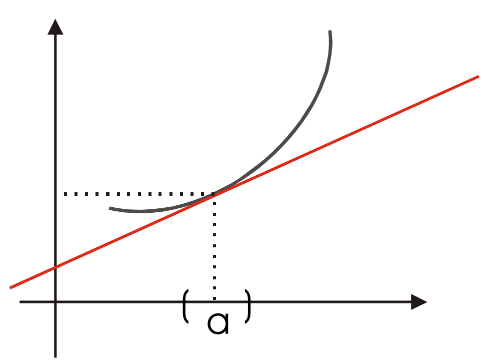
P: Muy bien. En forma similar, en los casos que las rectas tangentes al gráfico de una función en cierto intervalo queden por arriba de éste, diremos que la función presenta concavidad negativa en ese intervalo. ¿Qué dirá el teorema correspondiente?

Los alumnos leen lo que habían escrito antes y responden: "si la derivada segunda de una función es negativa en un intervalo I, la función presenta concavidad negativa en dicho intervalo, o sea que si trazamos las rectas tangentes al gráfico en el intervalo estas quedarán por arriba".

P: Del gráfico. (La profesora dicta lo que los alumnos dijeron para que lo escriban en el cuaderno).

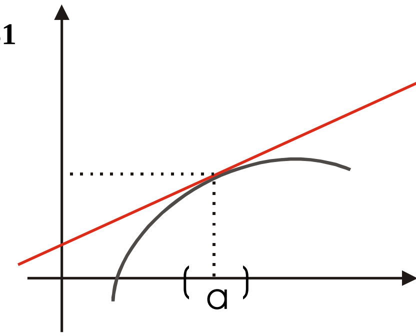
P: También podemos hablar de concavidad puntual, o sea trabajar en un entorno de un punto. Diremos que una función presenta concavidad positiva en $x=a$ si y solo si existe un entorno del punto en el cual la gráfica se encuentra por arriba de la tangente al gráfico en el punto $(a, f(a))$. Esto no es la definición formal... (Hace un dibujo)

Gráfico 30



P: Lo mismo si tiene concavidad negativa en un punto...

Gráfico 31



P: Se puede demostrar un teorema, escriban "Si la derivada segunda de la función en $x=a$ es positiva la función presenta concavidad positiva en $x=a$, o sea que si trazamos la recta tangente al gráfico en $x=a$ esta quedará por abajo del gráfico". ¿Cómo será el teorema para el caso que la concavidad sea negativa en $x=a$?

Los alumnos leen el cuaderno y dicen "Si la derivada segunda de la función en $x=a$ es negativa la función presenta concavidad negativa en $x=a$, o sea que si trazamos la recta tangente al gráfico en $x=a$ ésta quedará por arriba"

P: Del gráfico.

La profesora dicta lo que los alumnos dijeron para que lo escriban en el cuaderno.

P: Observemos los dos últimos casos. En el V la función presenta primero concavidad...

A: Positiva.

P: Bien, y luego...

A: Negativa.

P: Sí. Al punto donde cambia la concavidad le llamaremos punto de inflexión. Se puede demostrar un teorema que indica que si una función admite derivada segunda en un punto de inflexión ésta será cero. Hay otro teorema, que tampoco demostraremos, que indica que si en un semientorno derecho de un real "*a*", el signo de la derivada segunda es opuesto al signo de la derivada segunda en el semientorno izquierdo, la función presenta un punto de inflexión en $x=a$.

P: Aunque no demostraremos los teoremas de los que estuvimos charlando los enunciaremos y pueden buscar la demostración en los libros.

Teorema

Sea f una función que admite derivada segunda en un intervalo I,

- Si $f´´(x)>0 \ \forall \ x\in I$, entonces f presenta concavidad positiva en I.
- Si $f´´(x)<0 \ \forall \ x\in I$, entonces f presenta concavidad negativa en I.

Teorema

Dada una función f continua en $x=a$, si existe un entorno de a contenido en el dominio de la función tal que $\begin{cases} f´´(x) > 0 \, \forall x \in E^{*+} \, a \\ f´´(x) < 0 \, \forall x \in E^{*-} \, a \end{cases}$ entonces f tiene un punto de inflexión en $x=a$.

Teorema

Dada una función f continua en $x=a$, si existe un entorno de a contenido en el dominio de la función tal que $\begin{cases} f´´(x) < 0 \, \forall x \in E^{*+} \, a \\ f´´(x) > 0 \, \forall x \in E^{*-} \, a \end{cases}$ entonces f tiene un punto de inflexión en $x=a$.

La profesora deja de tarea gráficos para que indiquen intervalos de concavidad positiva, negativa, puntos de inflexión y otros en los cuales les indica crecimiento, concavidad de la función y los alumnos deben realizar el esbozo de ésta.

Comentarios

- Al comenzar a trabajar con la función derivada primera se interpreta gráficamente $f´(a)$, mientras que al trabajar con la función derivada segunda se interpreta el signo de $f´´(x)$ con $x \in I$.

- En instancias posteriores se trabaja el significado gráfico del signo de $f\,'(a)$[1], pero no se trabaja el significado gráfico de $f\,''(a)$.
- Nuevamente encontramos muestras de asignar significado gráfico al valor numérico y al signo de $f\,'(a)$, pero en el caso de trabajar con $f\,''(a)$ solo se le significa gráficamente su signo y no su valor numérico.

Encuesta y entrevista a los docentes

Se realiza una encuesta, y en los casos necesarios una posterior entrevista, a docentes que dictan el curso de Análisis de sexto año liceal. Con ella se espera descartar, o apoyar, nuestra hipótesis de que éste tema es trabajado en forma muy similar, por razones ya antes expuestas, por la mayoría de los docentes.

La encuesta es realizada en forma oral para que los docentes no leyeran las siguientes preguntas antes de haber respondido la correspondiente. De esta forma sus repuestas no estarían influenciadas por las próximas preguntas. Sus respuestas son registradas en forma escrita y al terminar la encuesta, si cabía alguna aclaración extra u otra pregunta, se realizaba la entrevista.

A partir de la encuesta podemos deducir que:

- Todos los docentes entrevistados introducen el tema “derivadas” a partir de su interpretación gráfica.
- Otorgan un significado al signo del valor numérico de la función derivada primera y a dicho valor numérico en si (el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico en el punto en cuestión).
- Otorgan un significado al signo del valor numérico de la función derivada segunda, pero no así a dicho valor numérico.
- Realizan ejercicios donde se pone en juego el signo del valor numérico de la función derivada primera y de dicho valor numérico, ejercicios utilizando el signo del valor numérico de la función derivada segunda, pero no ejercicios con valores numéricos distintos de cero de la función derivada segunda.

[1] Se demuestran teoremas relativos.

- Al preguntar qué significado tiene para el docente el valor numérico de la función derivada segunda lo asociaban a aceleración, desarrollo de Taylor.

La encuesta confirmó nuestra hipótesis, la totalidad de los profesores encuestados no trabaja el valor numérico de la función derivada segunda en sus cursos. Además, la celda correspondiente a la imagen del concepto, evocada en el momento de la entrevista, o es muy pobre o se encuentra vacía.

ELEMENTOS PARA LA COMPONENTE EPISTEMOLÓGICA

A partir de nuestra creencia inicial, que se ha fortalecido con las evidencias presentadas, de que tanto estudiantes, como la mayoría de los docentes, no significarían gráficamente el valor numérico de la función derivada segunda, sino solo el signo de este, presentamos nuestro análisis del significado gráfico del valor numérico de la función derivada segunda.

Consideramos que los estudiantes, y algunos docentes, no otorgan un significado al valor numérico de la función derivada segunda más allá de la noción que se tiene comúnmente de función derivada segunda, como derivada de otra función dada en un real. Normalmente no se le asigna un valor numérico a esta representación gráfica de la derivada, menos aún se le asigna a dicho valor numérico una interpretación gráfica.

La información que nos proporciona la derivada segunda en relación a una función es el "signo de la concavidad; (positiva o negativa)", este argumento "nos permite determinar puntos de inflexión", y en algunos casos se asume como "la derivada de la derivada primera de una función". Encontramos que ante la pregunta ¿qué información nos proporciona el valor numérico de la segunda derivada de una función?, los docentes entrevistados (Capítulo IV), lo relacionan con la concavidad (positiva o negativa) pero no se tiene en cuenta que esta relación se establece entre el signo de dicho valor numérico pero no con el valor numérico en sí de la derivada segunda.

Entonces, ¿qué significado tiene el valor numérico de esta función para alumnos y docentes? ¿Qué diferencias podemos encontrar entre una función f y otra g un entorno de un real "a" si $f''(a) = 5$ y $g''(a) = 8$? ¿Qué diferencias podemos encontrar en los gráficos de dichas funciones al cumplirse estas condiciones? ¿Qué significado asignan los alumnos y docentes a estas dos expresiones? ¿Cómo construyen este significado los estudiantes?

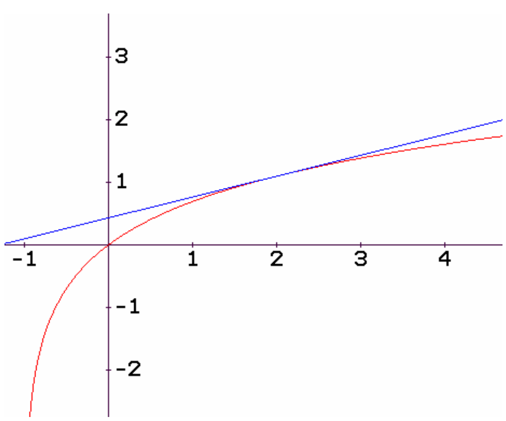
Cantoral, (2000) señala que "la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión". De modo que aun siendo capaces de derivar una función, no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación. Así también, pueden determinar la función derivada de una función dada sin asumir que el resultado obtenido mediante la derivación sea a su vez una nueva función susceptible de derivación."

Pero, ¿cómo podremos derivar una función, en este caso la función derivada segunda, si no hemos dado significado a su valor numérico? ¿Puede tener significado $\underset{x \to a}{lím} \dfrac{f''(x) - f''(a)}{x-a}$ si no le hemos otorgado un significado propio a $f''(a)$?

Además, basándonos en experiencia de aula, hemos podido observar que, en muchos casos, aunque los estudiantes asignen un significado al valor numérico de la derivada primera de una función dada, e incluso logren visualizar el concepto, esto no ocurre así con la derivada segunda.

Los estudiantes pueden determinar analíticamente, sin grandes dificultades, las derivadas sucesivas de una función dada. En general pueden relacionar el valor numérico de la derivada primera con el coeficiente angular de la tangente al gráfico en dicho punto.

Gráfico 32



$f: R^{+} \to R \,/\, f(x) = Ln(x+1)$

Entonces:

$$f':R^{+} \rightarrow R \,/\, f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

Aplicando la “fórmula” de la recta tangente en (a, $f(a)$):

$t(x)= f\,'(a)\ (x\text{-}a)+f(a)$ obtienen

t) $t(x)=\frac{1}{3}(x\text{-}2)+Ln\ 3$ que es la recta tangente al gráfico de f en (2,Ln3)

En cambio, cuando se trabaja con la derivada segunda, se desliga la interpretación geométrica de esta, no se propicia la visualización del concepto, solo se asigna una interpretación al signo del valor numérico de la derivada segunda y no así al valor numérico en si. Muestras de esto las encontramos en el Capítulo IV donde se realiza el análisis de libros de texto y se presentan los resultados de la encuesta a docentes.

Los alumnos aplican las “reglas” de derivar sin conciencia ni razón clara, (Skemp, 1976), lo que imposibilita que le asigne significado, valor, a las derivadas sucesivas y a la interpretación geométrica de estas. Para determinar el crecimiento de una función, sus extremos, su concavidad, sus puntos de inflexión, basta con derivar; para derivar, basta con conocer las técnicas de derivación, basta conocer ciertas reglas aunque carezcan de sentido. Pero, cuál es el significado que asocian los alumnos a la derivada de una función? Creemos que preguntas del tipo “observando los gráficos de las funciones f y g, es $f\,''(3)<g''(3)$”, enfrentarán al alumno no a cálculos analíticos sino a favorecer la generación de significados a dichos conceptos.

Compartimos la tesis de las investigaciones que forman parte de los antecedentes de ésta, en las cuales se considera que la noción de derivada se llega a estabilizar en el pensamiento de los alumnos cuando se adquiere la comprensión de las derivadas sucesivas. Para ello no es suficiente que solo se conozcan, y se aplique exitosamente, las reglas de derivación. Creemos que se debe construir un significado al valor numérico de la función derivada segunda, lo que luego permitirá poder estudiar su variación. Lo cual tendrá varios aspectos positivos, por un lado puede ayudar a estudiar la variación de la función derivada segunda, y por otro, lograr visualizar este concepto permitirá que éste sea resignificado de una forma más rica.

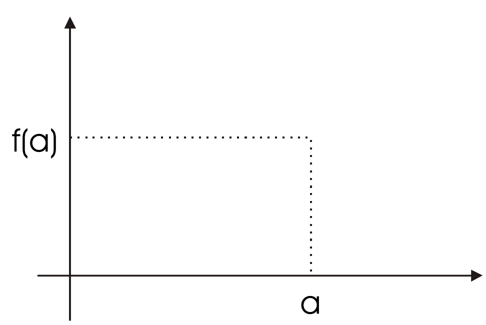
"En nuestras experiencias con profesores en servicio en la educación media y superior y con sus estudiantes hemos constatado que en caso de que logren incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, entonces manejan a la función no solo como objeto sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad, en otras palabras, en caso de tener un dominio del contexto geométrico/visual tanto en la algoritmia, la intuición, así como en la argumentación será posible el tránsito entre las diversas representaciones." (Cantoral, 2000).

Como dijimos antes a los estudiantes no se les presentarán problemas al comparar las imágenes de la función derivada segunda de una función f y de otra g en los casos que sus argumentaciones se encuentren en un contexto analítico, pero creíamos, y lo comprobamos en las actividades que se presentan en este trabajo, que no sería así en el contexto gráfico. "El problema didáctico en consecuencia, estriba fundamentalmente en la dificultad cognitiva para adquirir maestría en el contexto geométrico, por ejemplo, en el plano de la argumentación es mucho más fácil mostrar la existencia de una raíz doble algebraicamente que geométricamente, razón por lo que en la enseñanza se acude al refugio algorítmico con facilidad." (Cantoral, 2000). Muestras de esto las encontramos en la investigación presentada por García y Testa (2002) donde se observa que algunos alumnos recurren a procesos analíticos para contestar preguntas que requieren una respuesta en un contexto gráfico.

Analizaremos ahora algunos de los aspectos matemáticos del problema:

Si de una función real f sabemos que $f(a)=b$, podemos asociar esta información analítica a una imagen visual. Sabemos que el punto $A(a, f(a))$ pertenece al gráfico de f.

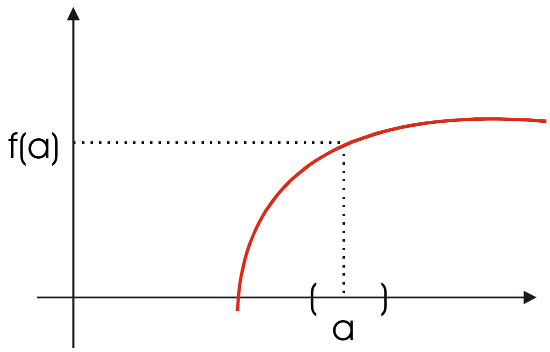
Gráfico 33



Si además sabemos que $f\,'(a) = c$, podemos asegurar que:

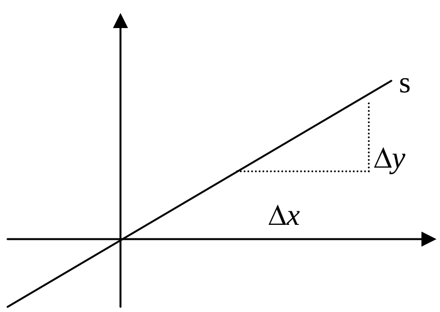
1) f es continua en $x=a$, entonces podemos afirmar que existe un entorno de a en el cual existe $f(x)$, por existir el límite de $f(x)$ cuando "x" tiende a "a". Podemos visualizar estos datos en un gráfico:

Gráfico 34



2) el gráfico de f (llamémosle G) será tangente en $x=a$ a una recta de coeficiente angular c, llamémosle r.

Una posible imagen que acude a nuestra mente al pensar en una recta de coeficiente angular "c" es una que pase por el origen y cumpla dicha condición. A esta recta le llamaremos s.

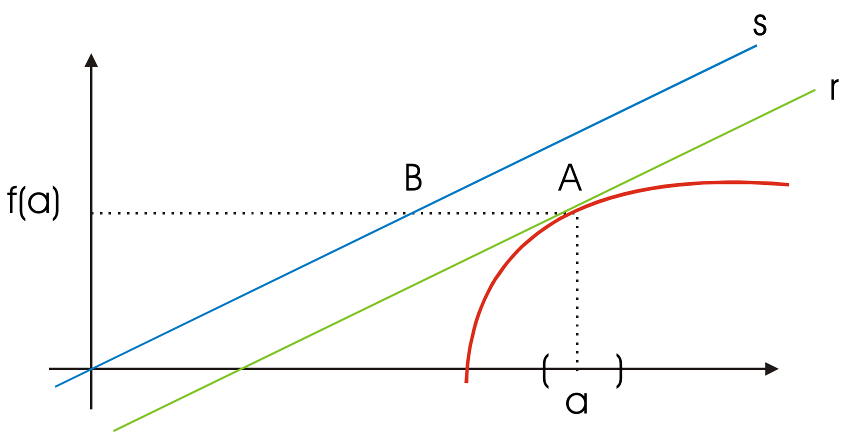


$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c$$

Como además sabemos que la recta buscada (r) es tangente a G en el punto $A(a,f(a))$ debemos trasladar la recta s hasta el punto A. Para ello debemos determinar la traslación que hace corresponder s con r.

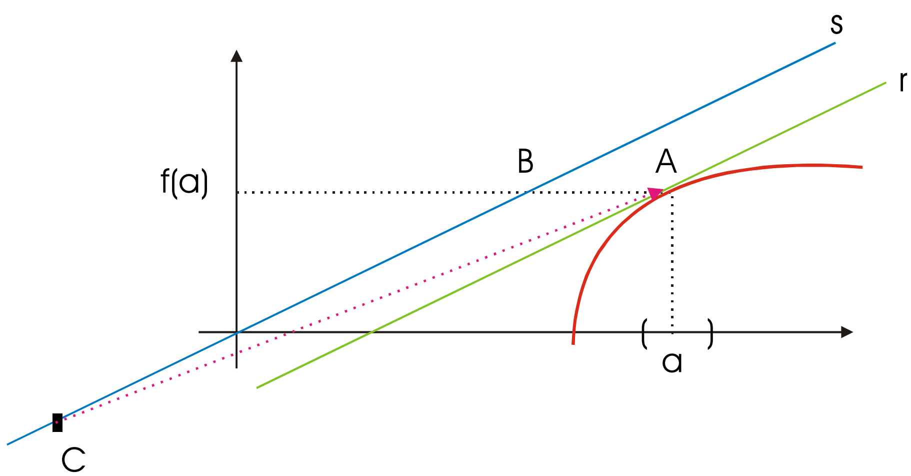
Observemos que una traslación, tal vez la más natural a elegir, es la traslación de vector *BA* (T_{BA}). Se cumple que T_{BA} (*s*) = *r* y T_{BA} (*B*) = *A*.

Gráfico 35



Pero, debemos prestar atención a que si elegimos cualquier punto (*C*) de la recta *s* se cumple que T_{CA} (*s*) = *r* y T_{CA} (*C*) = *A*, siendo *r* la recta tangente al gráfico *G* en *A* buscada. Tal vez por eso no se hace tanto hincapié en la posibilidad de elegir distintos puntos de la recta *s*, dado que el más fácil de elegir es el que tiene igual ordenada que *A*.

Gráfico 36



Como la condición de tangencia es una condición local, se cumplen las condiciones en un entorno de $x=a$. Sería algo así como preguntarnos qué “parte” de la recta *s* debemos “llevar” hasta el punto *A*. Además, es seguro, que no importa la “parte” de la recta elegida para que en una traslación quede tangente a *G* dado que en cualquier traslación la imagen de una recta es otra recta paralela a ella.

Hasta el momento sabemos de la función *f* que:

- $f(a)=b$
- $f\,'(a)=c$

Ahora agregamos el dato que $f\,''(a)=d$.

Como reportamos en esta investigación se asocia $f\,''(a)=d$ con la curvatura de la función en el punto en cuestión, o sea, se considera que a mayor valor numérico de la derivada segunda será la función “más abierta”, o “más cerrada”, sin tener en cuenta que esta condición depende también del valor numérico de la función $f\,'$ en ese punto.

En una curva plana (correspondiente al gráfico de una función *f* con derivada segunda continua), la curvatura en el punto $(x,f(x))$ está determinada por la función k / $k(x)=\dfrac{|f''(x)|}{\sqrt{\left[1+(f'(x))^2\right]^3}}$ y el radio de curvatura por la función r / $r(x)=1/k(x)$

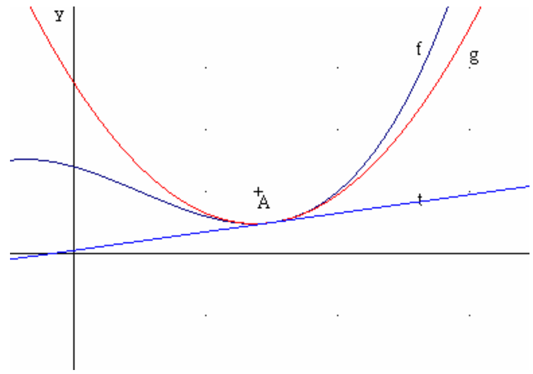
Si $f\,''(a)>g\,''(a)$, puede ocurrir que la curvatura de *f* sea mayor, menor, o igual que la de *g* en $(a,f(a))$ y $(a,g(a))$ respectivamente, dado que, como hemos dicho, también influye en ellas $f\,'(a)$ y $g\,'(a)$. Es por esta razón que incluimos casos de este tipo en la secuencia de nuestra investigación.

En cambio lo que sí podemos asegurar es que la función *f* será aproximable en un entorno de a por una función polinómica de segundo grado de coeficiente principal $\dfrac{f\,''(a)}{2}$. Dicha función polinómica tendrá su expresión analítica de la forma:

$$g(x)=\frac{f\,''(a)}{2}(x-a)^2+f\,'(a)(x-a)+f(a)$$

Podemos visualizarlo gráficamente:

Gráfico 37

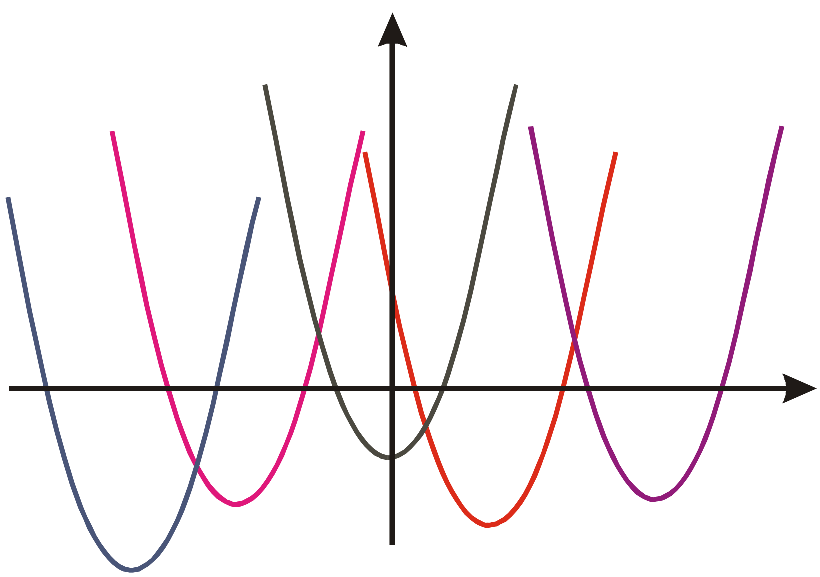


Para incorporar esto debemos:

1) Aceptar que hay una única función polinómica de segundo grado que aproxima mejor a la función en x=a.
2) Reconocer que hay una familia de parábolas cuya expresión analítica tiene coeficiente principal $\frac{f''(a)}{2}$ que son congruentes por medio de una traslación. A esta familia de parábolas de llamaremos FP_k, siendo k=$\frac{f''(a)}{2}$

Existe una familia de parábolas, cuyos gráficos son congruentes por medio de una traslación, donde cada parábola tiene asociada una función cuya expresión analítica es $f(x)= k\,(x-\alpha)^2+\beta$, con α y β parámetros y k constante:

Gráfico 38

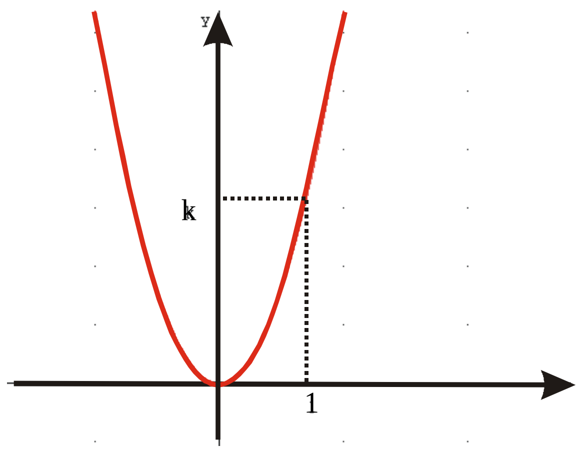


Diremos que todas estas parábolas tienen “abertura” *k*, este término es tomado de las respuestas de los estudiantes a la actividad planteada. Observemos que el coeficiente principal de cada expresión analítica asociada es *k*.

Este es otro concepto que consideramos que debe incorporarse, se debe reconocer una constante (*k*) en esta familia de parábolas.

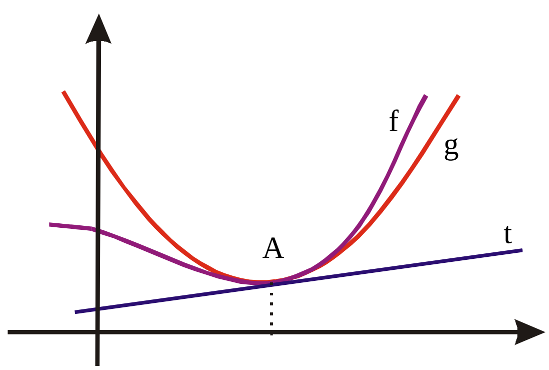
Cuando pensamos en esta familia de parábolas es natural que elijamos como representante de ellas a la que tiene vértice en el origen. Su expresión analítica será de la forma $g(x)= k\,x^2$ ($\alpha = \beta = 0$).

Gráfico 39



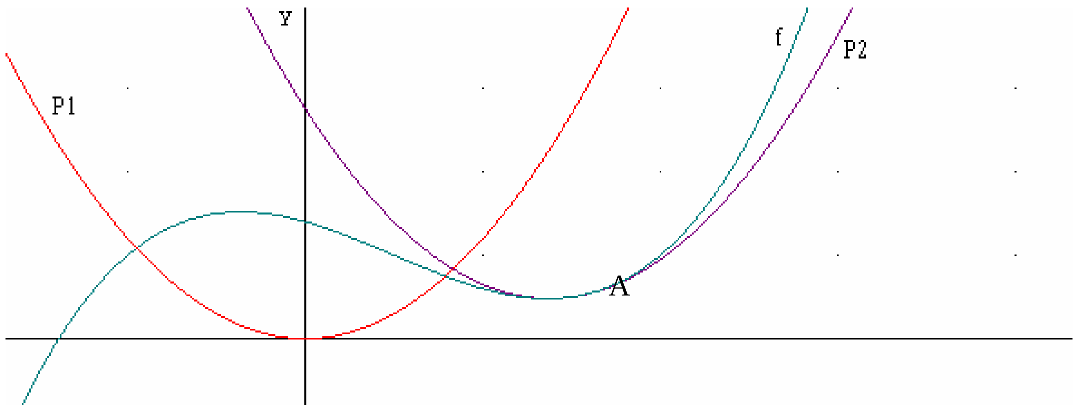
O sea que si sabemos que una función *f* cumple que $f''(a)=d$ sabemos que tendrá asociada una parábola de la familia $d/2$ ($PF_{d/2}$), o sea que la función *f* será aproximable en un entorno del real “*a*” por una función polinómica de segundo grado de coeficiente principal $d/2$ y que los gráficos de ambas funciones serán “parecidos” en dicho entorno.

Gráfico 40



La parábola buscada es de la familia de las generadas por $f(x)=\frac{d}{2}\ x^2$, o sea que hay una traslación que hace corresponder la parábola $P1$, de expresión analítica $f(x)=\ \frac{d}{2}\ x^2$, con la buscada ($P2$).

Gráfico 41



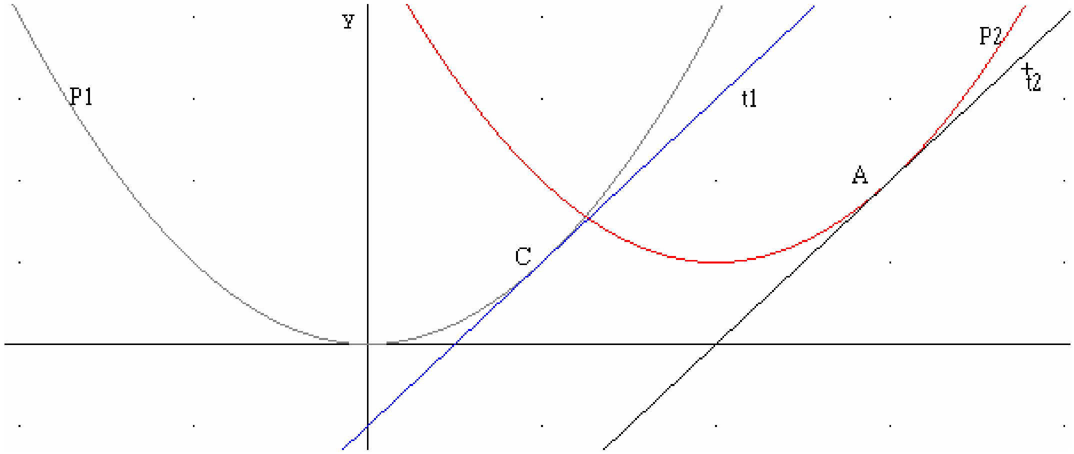
El problema ahora se diferencia del de la recta tangente dado que no podemos elegir cualquier punto C de la parábola $P1$ para que $T_{CA}\,(P1) = P2$

¿Cómo elegimos el punto C?

Sea T_v la traslación tal que $T_v\ (P1)=P2$.

Sabemos que si trazamos la tangente a P_2 en A (t_2) se cumple que existe t_1 tangente a $P1$ en C tal que $T_v\ (t_1)=t_2$ y que ambas rectas son paralelas. O sea que las ecuaciones de ambas rectas tienen el mismo coeficiente angular.

Gráfico 42



Analíticamente:

t_2 tiene por ecuación $y = mx+p$ con $m = f\,'(a)$ entonces la ecuación de t_1 será de la forma $y = f\,'(a)\,x+ q$, como la ecuación de P_1 es de la forma $g(x) = \dfrac{f\,''(a)}{2}\,x^2$, debemos determinar el valor de x para el cual $g\,'(x) = f\,'(a)$:

$g'(x)=f\,''(a)\,x$, entonces $f\,''(a)\,x = f\,'(a)$ si y solo si $x = f\,'(a) / f\,''(a)$.

Entonces el punto C buscado es de coordenadas $\left(\dfrac{f'(a)}{f''(a)}, g\left(\dfrac{f'(a)}{f''(a)}\right)\right)$.

$$C\left(\frac{f'(a)}{f''(a)}, \frac{f^{2\prime}(a)}{2f''(a)}\right)$$

Aplicando la traslación de vector CA a P_1 obtenemos P_2.

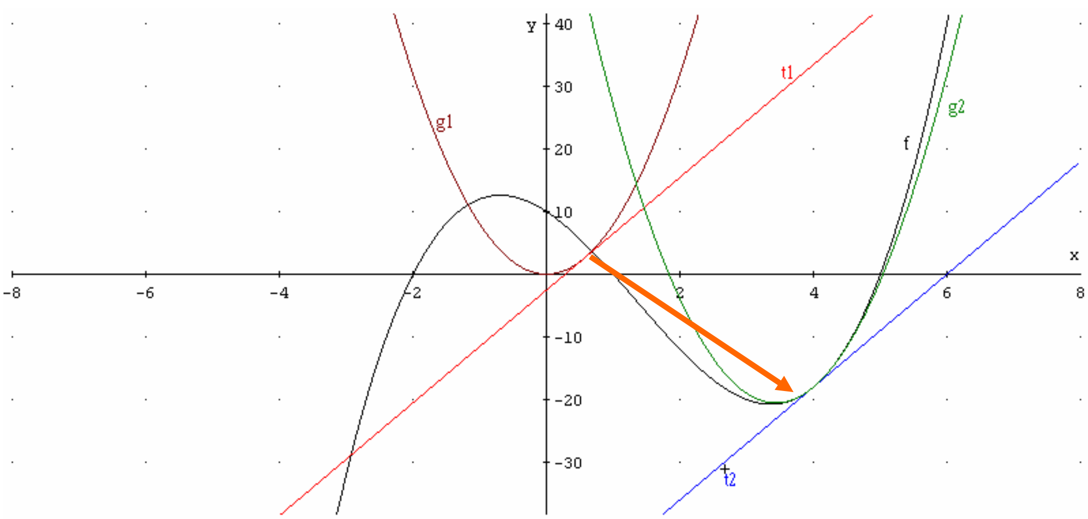
Visualmente:

Teniendo graficada la función $g1(x)=\frac{f''(a)}{2}x^2$, la función f y su recta tangente ($t2$) en el punto A, se puede buscar aproximar la recta tangente ($t1$), con tecnología o no, al gráfico de $g1$ que sea paralela a la recta tangente $t2$.

Esto permitirá que se pueda determinar, o mejor dicho darnos una idea de la "parte" de la parábola que al trasladarla será tangente a la función dada.

Creemos que sería conveniente utilizar tecnología que permita determinar exactamente las funciones involucradas, pero con un programa que permita "mover" los gráficos, trasladarlos, se podrá hacer un buen tratamiento del tema desde un contexto visual.

Gráfico 43



En suma, dada una función real f, si conocemos el valor numérico de $f''(x)$ en $x=a$, $f''(a)=d$, nos formamos una imagen de la familia de parábolas de abertura $d/2$, de ellas elegimos la de vértice en el origen. Sabemos que la función f es aproximable a una parábola de esta familia, similar a la representada. Ahora debemos determinar "qué parte" de la parábola será la que aproxima al gráfico de f, o sea, qué punto de la parábola debo trasladar para que coincida con $A(a,f(a))$. Para ello visualizamos la tangente al gráfico de *f* en *A*, aproximamos la tangente a la parábola, paralela a la dada, y esa será zona que aproximará al gráfico de *f*.

Gráfico 44

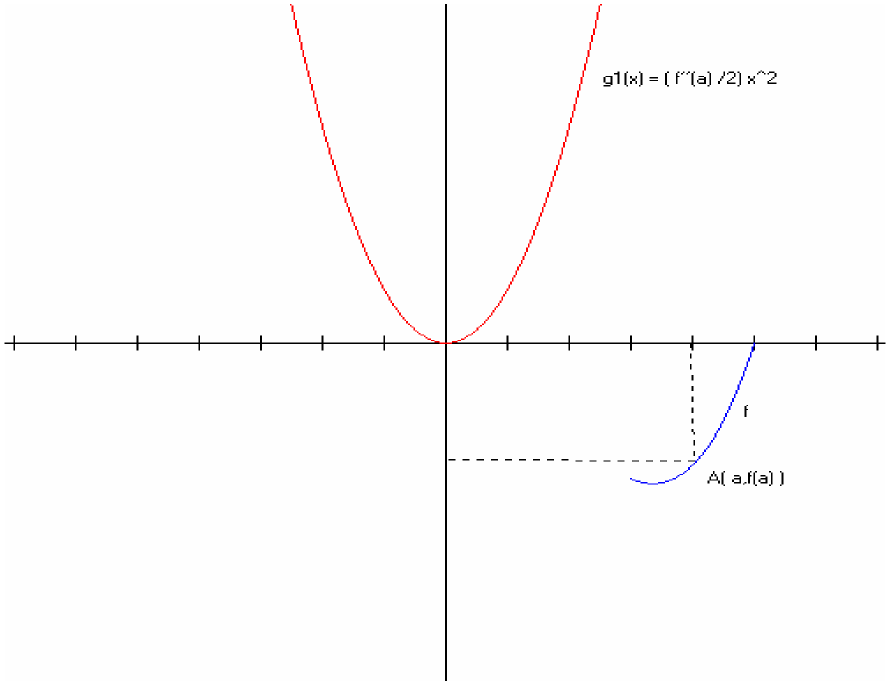
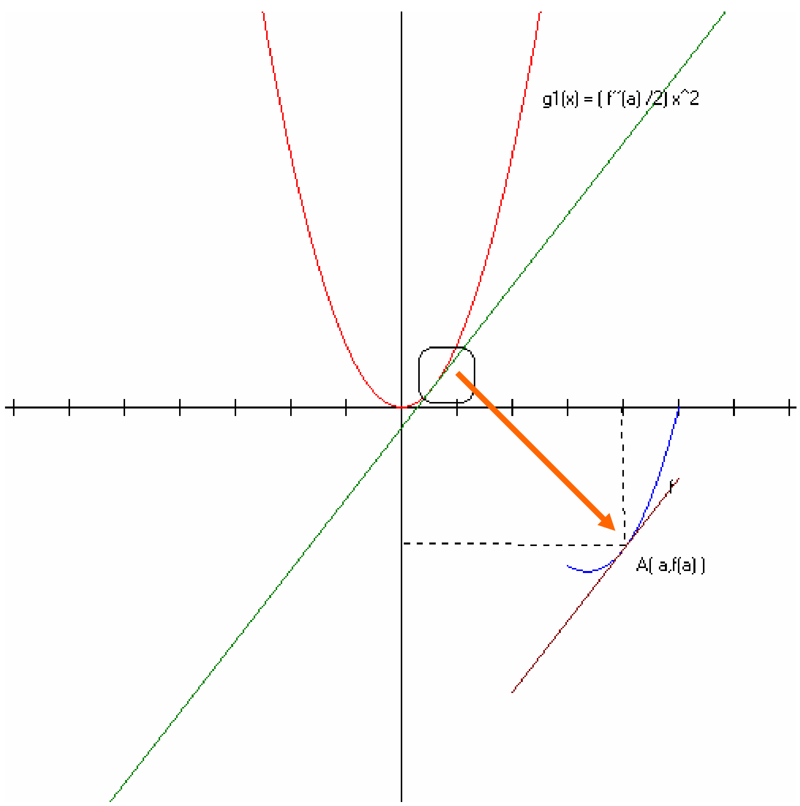


Gráfico 45



Solo reportaremos la investigación de significado que asignan al valor numérico de la derivada segunda alumnos y profesores. Queda para otra instancia realizar una secuencia para que el alumno determine la parábola que aproxima a una función en x=0 usando el valor numérico de la derivada en x=0, para luego continuar el trabajo en un punto cualquiera del gráfico.

ANTECEDENTES

En este capítulo presentaremos una síntesis de investigaciones anteriores que han sido tenidas en cuenta en este estudio. Dado que no hay estudios previos en este tema, o similares, con estudiantes uruguayos, ni tampoco hemos encontrado estudios similares del significado del valor numérico de la función derivada segunda, hemos buscado estudios estrechamente relacionados con el tema. Dentro de estos estudios hemos considerado las tesis de maestría de García, M. (1998) "Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo" y de González, R. (1999) "La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación" y la de Valero, M. (2000). "La derivada como una organización de las derivadas sucesivas"; así como investigaciones reportadas por Dolores, C. (1989),Cantoral, R. (1988) y Vinner, S. (1991) en cuanto a los obstáculos en el concepto de tangente y estudios de Brousseau sobre los obstáculos epistemológicos asociados a dicho concepto.

Curiosamente en Uruguay, a pesar de que desde la creación del Instituto de Profesores Artigas (IPA) en la década del 50 se ha incorporado la didáctica al currículo de la formación de docentes, no se han desarrollado al momento, investigaciones en este aspecto. Es por esto que, a pesar de que nuestra investigación está realizada con estudiantes uruguayos, no hemos podido incorporar antecedentes de investigaciones realizadas en Uruguay en este tema en el área de la Matemática Educativa.

En cuanto al estudio específico del significado del valor numérico de la función derivada segunda tampoco hemos encontrado estudios similares, pero sí estudios estrechamente relacionados con el tema. Los resultados de las investigaciones realizadas por el equipo de investigación que conforma el PLV proporcionan una referencia al tema dado que muchos de ellos centran su atención en "la derivada", es por ello que realizamos un estudio de ellos.

Nos interesa enfatizar una de las observaciones que realiza María Dolores García (1998) en su tesis de maestría titulada: "Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo", dado que encontramos que, la forma como se introduce el tema "derivadas", en los cursos que ella ha investigado en México es similar a la forma de introducirlo en Uruguay: "Encontramos hoy en día que el concepto de derivada se introduce en la enseñanza a través del concepto de pendiente de la recta tangente, el cual se presenta a los estudiantes, de manera gráfica, observando que las rectas secantes se mueven hacia la recta tangente"

De lo anterior, y de la revisión de textos presentada en el Capítulo IV, podemos señalar que la introducción al concepto de derivada, y en particular al concepto de valor numérico de la función derivada primera, tiene su base en una interpretación gráfica de ella. En cambio hemos mostrado que no ocurre esto en la interpretación del valor numérico de la función derivada segunda.

Dado que reconocemos obstáculos epistemológicos asociados al concepto de recta tangente es que no hemos incluido en nuestra investigación casos que enfrenten al estudiante a dichos obstáculos, pues no son ellos nuestro objetivo de estudio.
Por lo que toca a los obstáculos epistemológicos, ellos son un tipo de errores que no son producto de la ignorancia, de la duda o del azar, como suponían las teorías conductistas del aprendizaje, sino que son la consecuencia de un conocimiento anterior que se manifiesta falso o no apropiado a una nueva situación. Guy Brousseau, retoma la noción de obstáculo epistemológico de Bachelard y la lleva a la didáctica de la matemática. Considera que la noción de obstáculo misma está en vías de constituirse y de diversificarse; no es fácil decir generalidades pertinentes sobre el tema, vale más hacer estudios caso por caso.

Brousseau (1983) plantea las manifestaciones de los obstáculos en didáctica de las matemáticas:

- Errores: Se manifiesta por sus errores, pero esos errores no son debidos al azar. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, son reproducibles, persistentes. Además esos errores, en un mismo sujeto, están ligados entre ellos por una fuente común, una manera de conocer, una concepción característica, coherente sino correcta, antigua y que ha tenido éxito en todo un dominio de acciones. No desaparecen radicalmente, de un solo golpe, resisten, persisten, luego resurgen, se manifiestan mucho tiempo después que el sujeto haya rechazado de su sistema cognoscitivo consciente el modelo defectuoso.

Por ejemplo es común que los alumnos no consideren como tangente a un gráfico a la recta que si lo es en los casos que en el punto de tangencia se da también un punto de inflexión. Esto es debido a que el concepto griego de tangente, concepto presente en nuestros alumno, deja a la curva en un entorno del punto en un mismo semiplano respecto a su tangente. En cambio si en ese punto se presenta un cambio de concavidad, para todo entorno de él, la curva no quedará contenida en uno solo de los semiplanos que quedan determinados.

- Franqueamiento: El obstáculo está constituido como un conocimiento de objetos, relaciones, métodos de aprehensión, previsiones con evidencias, consecuencias olvidadas, ramificaciones imprevistas, etc. Va a resistir el rechazo, intentará, como se debe, adaptarse localmente, de modificarse al menor precio, de optimizarse sobre un campo reducido siguiendo un proceso de acomodamiento bien conocido.

Por ejemplo, en el caso 3 de los casos estudiados por Vinner (1991) (presentado en este capítulo) el estudiante, aceptando que la recta tangente y el gráfico solo pueden tener un punto de contacto, puede trazar una, o varias, rectas tangentes al gráfico de manera que formen un ángulo con la semirrecta que forma parte del gráfico.

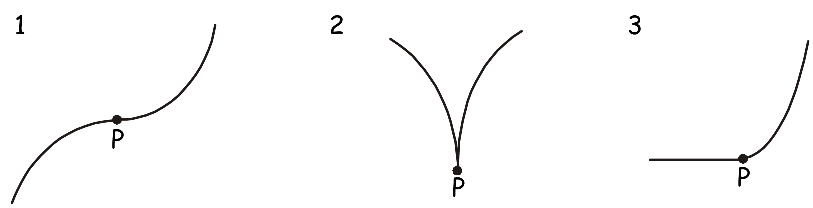
- Características informacionales de un obstáculo: Es siempre el fruto de una interacción del alumno con su medio y más precisamente con una situación que hace el conocimiento "interesante", "óptima" en un cierto dominio definido por características numéricas "informacionales " de este conocimiento.

Por ejemplo en el caso 2 estudiado por Vinner (1991) el estudiante podría trazar como recta tangente al gráfico la recta perpendicular por P a la real tangente. Esta recta tendría solo un punto de contacto con el gráfico y dejaría a éste en un solo semiplano respecto a ella, aspectos que forman parte del concepto de tangente que ha generado el estudiante.

Respecto a estos obstáculos haremos referencia a tres investigaciones reportadas por Dolores (1989),Cantoral (1988) y Vinner (1991).

Vinner (1991) en su estudio encuentra que los estudiantes tienen mayores dificultades en el trazado de rectas tangentes a un gráfico en tres casos: el caso que estas tengan más de un punto de contacto con la gráfica, en el que sean verticales y en el caso que el punto de contacto corresponda a un punto de inflexión de la curva.

Imagen 3



Teniendo en cuenta este estudio es que no incluiremos estos tipos de gráficos en nuestro estudio dado, como ya hemos expuesto, que no es nuestro objetivo de estudio e incluirlos enfrentaría al estudiante a obstáculos epistemológicos que distraerían su atención del punto que queremos que se centren.

Dolores (1989) realizó un trabajo experimental con cuatro estudiantes con el objetivo de que afloraran los obstáculos de naturaleza epistemológica que los estudiantes presentan, así como la forma en que ellos tratan de construir el concepto de derivada en su perspectiva geométrica. Los obstáculos detectados en la experiencia:

- El trazado de tangentes a curvas no cónicas. Primero manifiestan que no es posible, luego realizan distintos intentos para trazarla, entre ellos la adaptación de métodos clásicos por ellos conocidos.
- La transición de la concepción global a la concepción local de tangencia. Para superar la crisis a la que se enfrentan por su concepción clásica griega de tangente trazan la recta tangente teniendo cuidado de no prolongarla para que no corte nuevamente a la curva. En los casos que la vuelve a cortar dicen que es tangente y secante a la vez.

- Trazado de rectas tangentes en puntos de inflexión. Consideran que es imposible trazar una recta tangente por dicho punto.

Cantoral (1988) por su parte, investiga los aspectos conceptuales de la evolución de la noción de tangente y sus relaciones con la de derivada y se centra en los obstáculos didácticos de origen epistemológico que revelan dificultades inherentes al concepto mismo. Algunas de ellas:

- "El estudiante no se percata de que la forma usual de calcular la derivada en un punto, requiere que la variable independiente tome el valor prohibido"
- El estudiante no admite que la recta tangente a una curva diferenciable sea única.
- El estudiante no acepta que mediante un proceso infinito logre obtener la pendiente de la recta tangente.

Basándonos en estas investigaciones es que hemos sido cuidadosos al elegir las situaciones que formarían parte de la secuencia que presentaríamos en nuestra investigación. En nuestra secuencia no presentamos a los estudiantes a estas situaciones tan estudiadas que implicarían enfrentarlos a un obstáculo epistemológico del concepto recta tangente a una curva.

En la misma línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional González (1999) plantea como hipótesis que:

- La noción de derivada se estabiliza en el pensamiento de los estudiantes solo hasta que la noción de derivada sucesiva aparece y se establece un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas.
- Los estudiantes estarían en mejores condiciones de apropiarse de los procedimientos y de los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral cuando estén en condiciones de desarrollar estrategias variacionales tanto desde el punto de vista de su pensamiento como de las diversas formas que tome su representación.

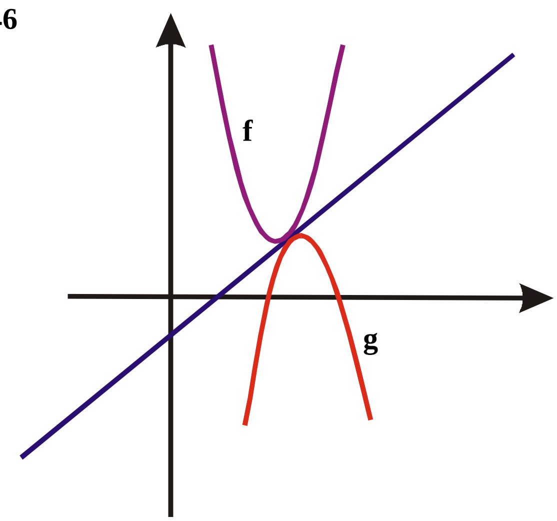
Podemos observar cómo estas hipótesis se relacionan fuertemente con las nuestras, razón por la cual pusimos atención a la conclusión de dicho trabajo de investigación:

"En los problemas referidos a la derivada segunda, cuando se les pide dar dos formas gráficas que cumplan con la condición $f''(a)>g''(a)$ las únicas respuestas que aparecen, consisten en dibujar una curva cóncava hacia arriba y otra curva cóncava hacia abajo. Esto obedece a que una es negativa y otra positiva. En la etapa de validación se planteó la pregunta ¿por qué no proponen dos cóncavas hacia arriba y dos cóncavas hacia abajo? No pudieron contestar"

Estas observaciones reafirman nuestra hipótesis, que los alumnos no dan significado, por lo menos gráfico, pero también en un sentido mas amplio, al valor numérico de la derivada segunda, sino solamente al signo de ésta. Es por eso que los entrevistados pueden encontrar funciones que verifiquen la relación $f''(a)>g''(a)$ en el caso que $f''(a)>0>g''(a)$, están significando $f''(a)>0$ y $g''(a)<0$, pero no así en los casos $0>f''(a)>g''(a)$ y $f''(a)>g''(a)>0$. En estos dos últimos casos el significado del signo del valor numérico de la función derivada segunda (positivo o negativos) no es suficiente y debe tenerse en cuenta el valor numérico en sí.

En dicha investigación se ha constatado que los alumnos reconocen que $f''(a)>g''(a)$ en el caso que se uno de esos valores sea negativo y el otro positivo. O sea, podríamos representarlo con funciones cuyos gráficos sean del tipo:

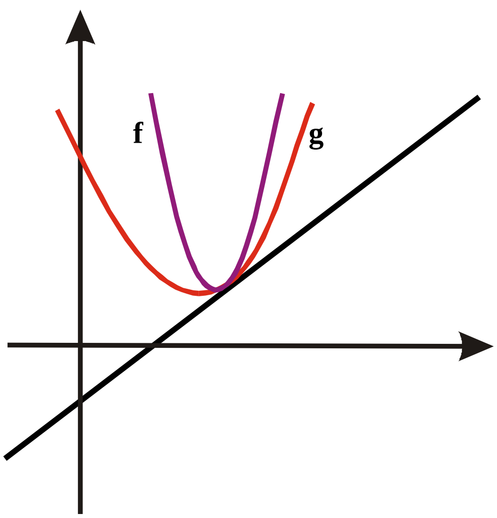
Gráfico 46



En este tipo de casos una de las funciones (f) presenta concavidad positiva en $x=a$, por lo tanto evidentemente $f''(a)>0$; y la otra función (g) presenta concavidad negativa en $x=a$, por lo tanto $g''(a)<0$. De estos dos datos los alumnos pueden concluir fácilmente que $f''(a)>g''(a)$. Solo deben haber podido establece una relación entre la concavidad de una función y el signo del valor numérico de la derivada segunda de dicha función. En cambio no es necesario, para resolver este tipo de problemas, haber significado al valor numérico de la función derivada segunda.

En cambio con funciones que tengan representaciones gráficas similares a las siguientes no es suficiente para poder establecer una comparación entre los valores numéricos de sus respectivas derivadas segundas conocer la relación entre la concavidad (negativa o positiva) y el signo del valor numérico de la derivada segunda.

Gráfico 47



Tanto en las investigaciones que estamos presentando como antecedentes, como en ésta misma, parece ser que los estudiantes han incorporado las relaciones entre la concavidad de una función y el signo de la función derivada segunda. Pero esta relación, como dijimos antes, no es suficiente para comparar los valores numéricos de las derivadas segundas de ambas en el punto $x=a$. El concepto de concavidad hacia arriba o hacia abajo (positiva o negativa), es insuficiente para estudiar distintos tipos de variaciones de la derivada segunda, ya que solo brinda información sobre el signo de esta última. El gráfico anterior brinda la información de que $f''(a)>0$ y que $g''(a)>0$, lo que no es suficiente para comparar $f''(a)$ con $g''(a)$. Comparar el signo de ambos reales ya no es suficiente para comparar dicho reales, debemos trabajar con los reales en sí y no solamente con su signo, las variaciones que introduce centrar la atención en el valor son considerables al momento de entender el cálculo.

Es en este sentido que consideramos que los estudiantes, para poder representar conceptos como derivada tercera, deben dar un significado más rico al valor numérico de la derivada segunda. Si la derivada tercera está relacionada con la variación de la derivada segunda, ¿cómo podremos establecer esta variación si solo la reconocemos si varía de estados fijos: valores positivos a negativos (o viceversa) y no podemos reconocer esta variación cuando la variación se establece dentro de reales del mismo signo?

En las conclusiones de esta tesis también se observa que:

"Los problemas referidos a tercera derivada no pueden resolverse aún en grupo".

En el presente estudio hemos obtenido una conclusión similar, la única pregunta referida a la derivada tercera, presentada en un contexto gráfico, no pudo ser resuelta por los entrevistados. Faltaría estudiar si luego de asignar un significado gráfico al valor numérico de la derivada segunda los estudiantes pueden trabajar con el concepto de derivada tercera en un contexto gráfico de forma más exitosa.

Por otro lado Valero (2000), retoma las dos interrogantes, planteadas en González (1999) y plantea su problema de investigación en los siguientes términos:

"Comprobar, a través de la puesta en escena de una situación didáctica específica, que la noción de derivada se estabiliza en el pensamiento de una población de estudiantes del CBTis 164, solo hasta que la noción de derivada sucesiva aparece y se establece un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas"

En sus conclusiones encontramos que:

"...si la noción de derivada se acompaña de la definición y la explicación que aparece en la didáctica actual, entonces se está destinando al estudiante a reducirse a la algoritmia, como resultado de su incapacidad para comprender."

Valero (2000) indica que, tanto como en la investigación reportada por Gonzáles (1999), en la suya también se observa que:

"los problemas referidos a la segunda derivada, cuando se les pide dar dos formas gráficas que cumplan con la condición $f''(a) > g''(a)$ las únicas respuestas que aparecen, consisten en dibujar una curva cóncava hacia arriba y otra curva cóncava hacia abajo."

Nuevamente aparecen el mismo tipo de soluciones dadas por los estudiantes. No se hacen presentes ejemplos que lleven a graficar funciones con distinto valor numérico, para un real dado, de la función derivada segunda pero ambos valores numéricos del mismo signo. Esto refuerza nuestra hipótesis que los alumnos solo asocian significado al signo del valor numérico en cuestión, pero no a éste en sí.

Valero (2000) considera que una de las razones de esta situación podría ser consecuencia de que durante el tratamiento instruccional previo a la puesta en escena de las situaciones didácticas, se hicieron varios ejercicios en donde esta situación quedó bien identificada.

A pesar que en nuestro caso no realizamos un tratamiento instruccional previo a la puesta en escena de la secuencia, creemos que también se ven influenciadas este tipo de respuesta por el tratamiento escolar que se hace del tema. Sobre este punto ya nos hemos extendido en el desarrollo de la dimensión didáctica de nuestro problema de estudio en el Capítulo IV.

En cuanto a la incorporación de situaciones que exigieran significar la derivada tercera Valero (2000) indica: "al revisar los resultados de la primera puesta en escena, y darnos cuenta que los estudiantes tenían serias dificultades para evaluar primeras y segundas derivadas, se decidió eliminar el problema donde se hacía mención a la tercera derivada y ya para la puesta en escena final, éste no apareció."

Este especto nos puede estar indicando cuan profundas son las dificultades que se presentan en los estudiantes al momento de estudiar la variación de la función derivada segunda, sobretodo cuando ésta no cambia su signo, lo que daría una base para el estudio de la función derivada tercera.

La actividad I de nuestra secuencia formó parte de un conjunto de actividades propuestas por Cantoral (2000) en una investigación sobre pensamiento y lenguaje variacional en contexto gráfico. Los resultados obtenidos son similares a los obtenidos en nuestra investigación:

- Pregunta 1: “ Los estudiantes suelen recordar, basados en su enseñanza previa, que la ubicación en los cuadrantes I, II, III y IV determina el signo de la imagen de la función; de modo que las ordenadas positivas están en los dos primeros cuadrantes, mientras que las negativas en los restantes. De ahí que contesten esta cuestión con relativa facilidad”

Lo mismo ocurre en nuestra investigación, solo un alumno de los entrevistados responde marcando la zona del gráfico que se encuentra en el cuadrante I.

- Pregunta 2: “Los estudiantes, en esta oportunidad, confunden con frecuencia el signo de la derivada con el de la función, en otro caso, recuerdan que las pendientes de las tangentes a la curva determinan el signo de la derivada, de modo que se tendrá para pendientes positivas correspondientes derivadas positivas. Este cambio de registro, la pregunta planteada en el contexto simbólico con apoyo visual, y la respuesta construida en el contexto visual, resulta mucho más complicado para los estudiantes y ello se expresa en dos sentidos, por un lado la proporción de respuestas acertadas es bajo y por otro las explicaciones que utilizan son escasas y evidentemente escuetas.”

Solo tres alumnos responden confundiendo los conceptos. Los que responden correctamente asocian, en su mayoría, valor numérico de la función derivada primera positivo a gráfico creciente.

- Pregunta 3: “Como podíamos prever, ahora la situación resultaría más compleja. Pues exige de niveles progresivos de abstracción. El recurso dominante en las respuestas de los alumnos suele ser la memoria. Puesto que ellos suelen recordar que la segunda derivada positiva se corresponde con la concavidad hacia arriba, en tanto que la concavidad hacia abajo está asociada con la segunda derivada negativa. Aunque no dispongan de explicación alguna para explicar su razonamiento, pueden contestar a la pregunta. A juzgar por el análisis que hemos hecho de sus respuestas, no se desprende la existencia de algún otro argumento que permita enfrentar la situación planteada. De hecho, es usual entre los alumnos disponer de un método mnemotécnico para establecer estas correspondencias, "es cóncava hacia arriba entonces retiene más agua, si lo es hacia abajo retendrá menos agua, de hecho tirará el agua". Este símil con una cubeta llena de agua puede aparecer como una estrategia para refrescar la memoria. Naturalmente, ello no parece implicar estrategias propiamente variacionales".

Solo tres alumnos confunden los conceptos. Es interesante observar que uno de ellos lo hace, como indica Cantoral, al consultar su memoria. Consulta su imagen conceptual asociada al concepto concavidad positiva y parece que el elemento presente en ella en ese momento es el relacionado con la concavidad negativa. Los estudiantes que responden correctamente también parecen haber consultado su imagen conceptual asociada al concepto "concavidad positiva", no se presentan indicios que hallan consultado la definición del concepto ni que hallan desarrollado aspectos variacionales, como el de la recta tangente, para responder la pregunta.

- Pregunta 4: "Esta pregunta suele plantear un reto especial, tanto a los estudiantes como a los profesores pues aunque entienden efectivamente el enunciado del problema, no pueden construir una respuesta que les parezca convincente. Esta dificultad se agudiza si en la pregunta elevamos el orden de la derivada involucrada, dado que se carece de elementos cognitivos y didácticos que les permitan construir una respuesta adecuada. Consideramos que es hasta este momento en que ellos encuentran en situación de aprendizaje, ya que la serie de tareas anteriores le permiten, aunque fuese solo con recursos mnemotécnicos dar una respuesta a las preguntas planteadas. Empero, la cuarta cuestión plantea una problemática no prevista por ellos; el éxito en la pregunta radica en poder descifrar los códigos variacionales y articularlos en signos variacionales, pues la respuesta habrá de ser construida. En este momento los estudiantes y los profesores suelen entrar en una situación de aprendizaje muy rica. Solo quienes han dominado algunas de las estrategias del pensamiento y el lenguaje variacional, pueden abordarla eficazmente".

Aquí se presenta una diferencia sustantiva con nuestra investigación, nuestros entrevistados no pueden responder, pero, en la instancia de trabajo individual tampoco se presentan evidencias de que realicen intentos por responderla. Encontramos respuestas del tipo “no me lo enseñaron”, “no se”. Creemos que una posible explicación a esta actitud es que como estas cuatro preguntas formaban parte de la actividad I, y eran cinco actividades, no intentaron resolverla y prefirieron continuar con las siguientes actividades. Esta actitud también se presenta cuando se enfrentan a significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda, en una primera instancia encontramos respuestas similares a la dadas en la pregunta 4, pero luego, dado que es un tipo de pregunta que se repite a lo largo de la investigación, intentan, y en muchos casos lo hacen, dar una explicación.

El estudio de estos antecedentes enriqueció nuestra investigación. Por un lado al constatar la similitudes y diferencias entre algunos aspectos de las investigaciones presentadas y la nuestra, aunque como dijimos al principio no hemos encontrado ninguna investigación que tenga por objetivo específico el estudio del significado gráfico que dan los estudiantes al valor numérico de la función derivada segunda. Por otro lado, nos basamos en los antecedentes presentados para no incluir en nuestra secuencia aspectos relacionados a los obstáculos asociados al concepto “recta tangente a un gráfico” que pudieran distraer la atención de nuestro objetivo de estudio dado que “las dificultades en el aprendizaje de un concepto o en la asimilación del campo que les da cabida, no provienen exclusivamente de la forma en que se presentan habitualmente en clase, ni de las diferencias propias de profesores, alumnos, textos, programas o sistemas educativos, sino también, y es en estas que se centra esta plática, en aquellos obstáculos didácticos de origen epistemológico que revelan dificultades inherentes al concepto mismo” (Cantoral, 1988).

DISEÑO Y APLICACIÓN DE LA SECUENCIA

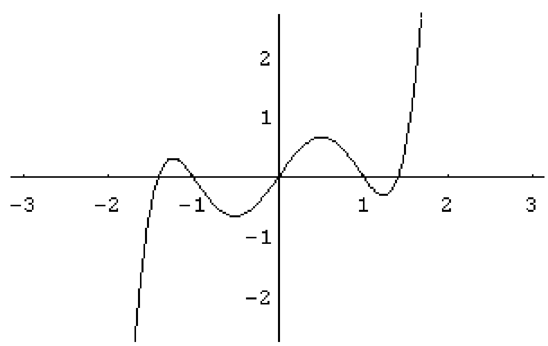
En el presente capítulo se expone la secuencia aplicada a los estudiantes y la justificación de cada una de las actividades y preguntas que la conforman. Se indica la forma y etapas que tuvo la aplicación de dicha secuencia así como una breve descripción sobre cada uno de los equipos y subgrupos de estudiantes que participaron.

Justificación de la secuencia

ACTIVIDAD I

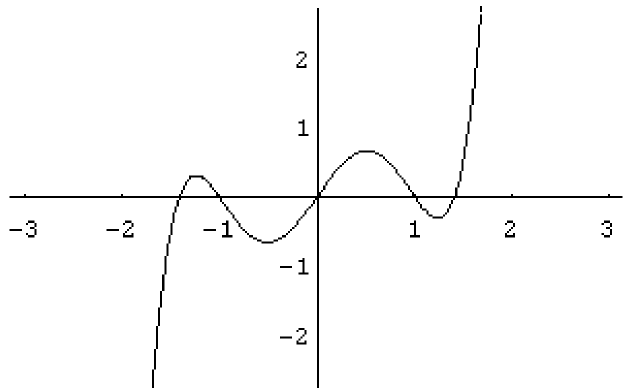
Pregunta 1

Marca sobre la gráfica de la función f los puntos (x,f(x)) que consideres cumplen con la condición $f(x) > 0$



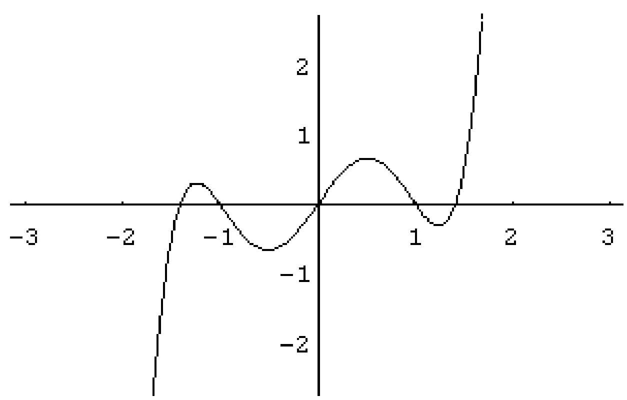
Pregunta 2

Marca sobre la gráfica de la función f los puntos (x,f(x)) que consideres cumplen con la condición $f\,'(x) > 0$



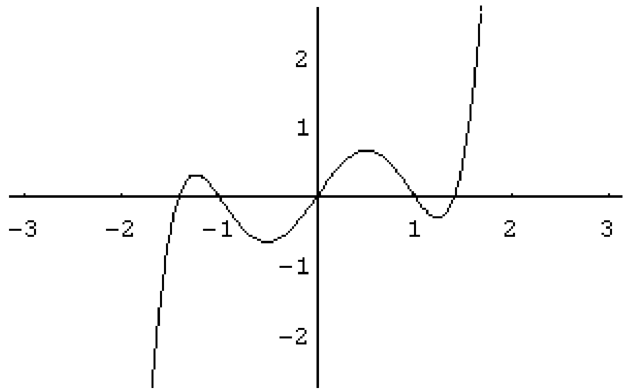
Pregunta 3

Marca sobre la gráfica de la función f los puntos (x,f(x)) que consideres cumplen con la condición $f\,''(x) > 0$



Pregunta 4

Marca sobre la gráfica de la función f los puntos (x,f(x)) que consideres cumplen con la condición $f'''(x) > 0$



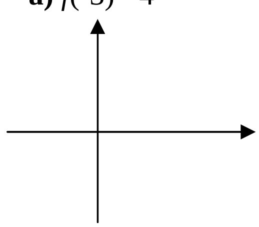
El objetivo general de esta actividad es enfrentar al estudiante a preguntas sobre la función que requieren una interpretación gráfica. Esperamos que a los estudiantes no se les presenten grandes problemas al trabajar en las primeras tres preguntas. En cambio, al enfrentarse a la pregunta cuatro, creemos que se presentarán mayoritariamente dos situaciones: responderán que no saben, que no se los han enseñado por lo cual no realizarán esfuerzos para responderla, o realizarán diversos intentos pero no darán una respuesta.

Nos interesa, aunque creemos que si se presentan respuestas serán en muy pocos casos, estudiar los distintos argumentos y estrategias que realizan los estudiantes al intentar responder la pregunta cuatro.

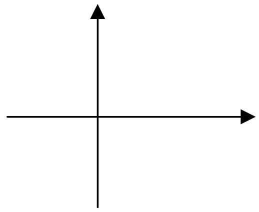
ACTIVIDAD II

I) Siendo f una función real, en cada caso realiza un esbozo del gráfico de *f* para que cumpla la condición dada, explica ampliamente.

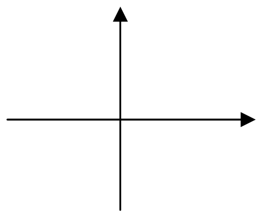
a) $f(-3)= 4$



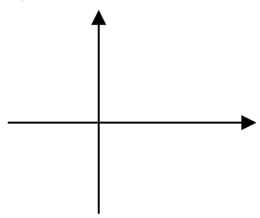
b) $f\,'(2)=3$



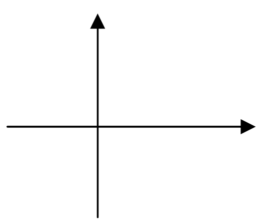
c) $f\,'(4) = -2$



d) $f\,''(1)= 4$



e) $f\,''(3)= -2$



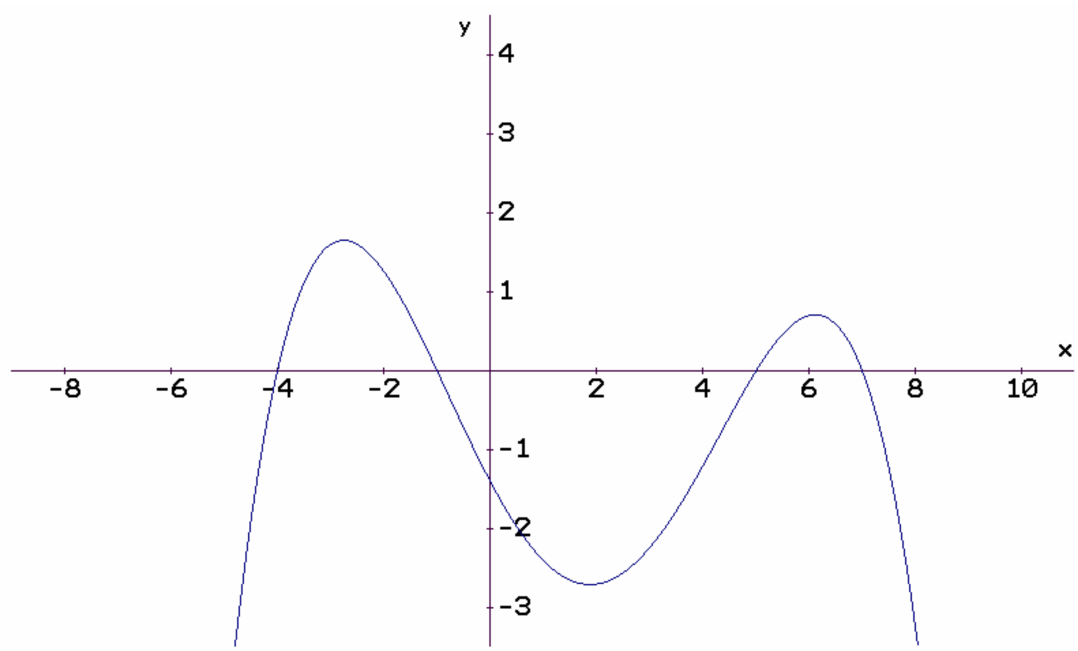
El objetivo general de esta actividad es observar si el estudiante puede convertir información que está dada en forma analítica e icónica, sobre una función y las funciones derivadas primera y segunda, a información presentada en una gráfica. El objetivo específico es realizar un primer acercamiento al significado que le otorgan los estudiantes al valor numérico de la función derivada segunda

Nos interesa observar si los estudiantes ponen en juego el valor numérico, o solo el signo del valor numérico de los tres tipos de funciones dadas (f, f ´ y f ´´).
En estas actividades se investiga si el estudiante asocia el valor numérico de la función derivada primera de la función con el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico de dicha función en el punto en cuestión, o solamente el signo de éste y lo que le determinaría el crecimiento o decrecimiento de la función inicial. El mismo aspecto observaremos con el valor numérico de la función derivada segunda; si solo hacen referencia al signo de éste podrán asociarlo a la concavidad, si hacen referencia al valor del real nos interesa observar con qué aspectos lo relacionan.

Se cree que en esta instancia solo asignaran significado al signo del valor numérico de la función derivada segunda (positivo, negativo o cero), pero no al valor específico de este.

ACTIVIDAD III

Dado el gráfico de una función *f*:



Indica cuál afirmación es seguramente falsa, cuál es seguramente verdadera, cuál podría ser verdadera, en cual no lo puedes contestar. Explica ampliamente tu respuesta.

a) $f''(-3,8)= 1$
b) $f''(1)=-2,5$
c) $f''(5)=-3$
d) $f''(1)<f''(8)$
e) $f''(-5)<f''(-3,8)$
f) $f''(2)<f''(3)$

En las partes a, b y d se investiga si el alumno diferencia, a partir del gráfico, cuándo la derivada segunda en cierto real es positiva y cuando negativa. Se le pide que explique para conocer los significados que construye al dar la respuesta.

En estas preguntas intentamos que el estudiante deba resignificar el valor numérico de la función derivada segunda en un real en contexto gráfico. Ya no se compara a este real solo con cero, sino que se investiga también qué información brinda al estudiante sobre el gráfico de una función f que $f''(a)>f''(b)$ en el caso que ambos reales tengan el mismo signo. Se le pide que explique para conocer los significados que construye para dar la respuesta.

ACTIVIDAD IV

Sean *f* y *g* dos funciones reales, realiza en cada caso un esbozo, en un mismo sistema de ejes cartesianos, del gráfico de dichas funciones, en un entorno del punto en cuestión, de modo que se cumplan las condiciones dadas.

Los objetivos generales de estas preguntas son:

1) *Que el alumno exponga el preconcepto generado por la enseñanza: "La función derivada segunda sirve para estudiar la concavidad de la función inicial", "valor numérico de la derivada segunda negativo en x=a entonces la función presenta concavidad negativa en x=a" o "valor numérico de la derivada segunda positivo en x=a entonces la función presenta concavidad positiva en x=a"*
2) *Enfrentar al alumno a comparar gráficos de funciones en las cuales las imágenes de las funciones derivadas segundas tienen el mismo signo pero no son iguales. Investigar qué significado le asocian a esta situación.*
3) *Investigar si el significado gráfico que asocian los estudiantes al valor numérico de la derivada segunda está o no relacionado con el valor numérico de la función y/o con el de su derivada primera.*

a) $f(3)=g(3)=5$
$f´(3)=g´(3)=-2$
$f´´(3)= -4$, $g´´(3)=8$

Este caso nos interesa observar qué diferencias establecen los estudiantes entre el gráfico de una función con valor numérico de la función derivada segunda positivo y el de una con valor numérico de la función derivada segunda negativo.

Esperamos que lo asocien a concavidad positiva y negativa de las funciones respectivamente. En este caso coinciden las imágenes de ambas funciones y el valor numérico de sus derivadas primeras.

b) $f(3)=g(3)=-2$
$f´(3)=g´(3)= 4$
$f´´(3)= 4$, $g´´(3)=8$

En este caso también coinciden las imágenes de ambas funciones y el valor numérico de sus derivadas primeras, pero el valor numérico de la derivada segunda de cada función es y distinto pero del mismo signo: positivo. Esta situación obligará al estudiante a dar otro significado gráfico al valor numérico de la derivada segunda en un real, más allá que solamente relacionarlo a concavidad positiva o negativa.

Se cree que se relacionará este valor con "un gráfico más abierto o más cerrado"[8], o sea se cree que asociarán a mayor valor numérico de la función derivada segunda mayor, o menor curvatura de la función.

c) $f(3)= g(3)=5$
$f´(3)=g´(3)=-2$
$f´´(3)= 8$, $g´´(3)= 4$

Este es un problema similar al anterior, se intenta observar si el estudiante mantiene su conjetura anterior. Aparte de dar ahora un valor negativo a la

[8] Término dado al nuevo concepto por los estudiantes entrevistados

imagen en la derivada segunda se realiza otro cambio importante: se intercambian los valores numéricos de la función derivada segunda. Con este intercambio esperamos observar si los estudiantes mantienen un bosquejo similar al realizado en la parte anterior, o si intercambian las funciones: la más abierta se intercambia por la más cerrada.

- *Si se presenta el cambio mencionado en el párrafo anterior estaríamos conjeturando que se verifica una de nuestras hipótesis de trabajo, que los estudiantes establecerían una relación directa entre el valor numérico de la función derivada segunda y la curvatura de la función.*

d) $f(3)=2$, $g(3)=5$
$f'(3)=g'(3)=2$
$f''(3)= g''(3)=4$

- *Nos interesa observar genéricamente las relaciones que establecen los estudiantes entre los gráficos de dos funciones en el caso que tienen igual valor numérico sus respectivas funciones derivadas primeras y segundas.*
- *En forma más específica podremos observar en esta pregunta si el significado gráfico asociado por los estudiantes al valor numérico de la función derivada segunda también está relacionado con el valor numérico de la función inicial; o si este elemento no influencia, y la relación que han establecido se mantiene en los gráficos dado que en este caso ambas funciones tienen el mismo valor numérico de la función derivada segunda en x=3.*

e) $f(2)= 5$, $g(2)=3$
$f'(2)=g'(2)=4$
$f''(2)= 4$, $g''(2)= 8$

- *Nuevamente enfrentamos a los estudiantes a "comparar" gráficos de funciones cuyas derivadas segundas en un real tienen el mismo signo pero son distintas. Se agrega la variante que el valor numérico de las funciones derivadas primeras respectivas es igual, pero el valor numérico de las funciones iniciales son distintas en el real en estudio.*

- *Creemos que se mantendrá la conjetura de "gráfico más próximo (o más alejado) de la tangente respectiva y que no influirá el valor numérico de la función inicial.*

f) $f(1)=g(1)=4$
$f\,'(1)=5$, $g\,'(1)=2$
$f\,''(1)= 4$, $g\,''(1)=8$

- *Nuevamente los valores numéricos de las funciones derivadas segundas tienen el mismo signo pero son distintos. En este caso esperamos observar si los estudiantes mantienen su conjetura aunque varíe el valor numérico de las funciones derivadas primeras respectivas en un real. Se intenta determinar si el significado gráfico asociado al valor numérico de la derivada segunda también está relacionado con el valor numérico de la función derivada primera.*

g) $f(1)=g(1)=4$
$f\,'(1)=5$, $g\,'(1)=2$
$f\,''(1)= g\,''(1)=8$

- *Este caso es similar al anterior en que la única variante está en el valor numérico de las funciones derivadas segundas, lo cual ayudará a determinar si el significado gráfico que asignan los estudiantes al valor numérico de la derivada segunda es o no independiente del valor numérico de la derivada primera.*

- *Creemos que el estudiante establecerá una relación directa entre el valor numérico de la derivada segunda y la curvatura ("más abierta o más cerrada") de la función en dicho punto sin tener en cuenta el valor numérico de la derivada primera.*

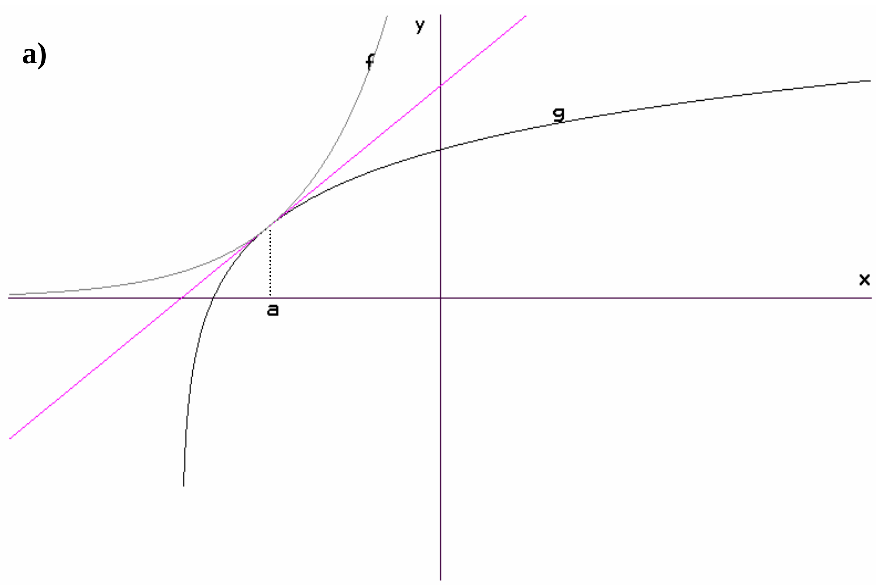
- No olvidemos que los estudiantes entrevistados no han tenido contacto con el concepto de curvatura de una curva en un punto y la relación que esperamos que establezcan es con el concepto en sí y no con su nombre. Esta relación, aunque no es correcta en este caso, también está permitiendo que ellos resignifiquen un concepto matemático con el cual no han interactuado en sus cursos.

ACTIVIDAD V

- *Esta actividad, a diferencia de la anterior, enfrenta al estudiantes a preguntas realizadas en un contexto gráfico. En la actividad anterior el alumno debía realizar esbozos de los gráficos de funciones a partir de los datos dados, ahora, debe interpretar los gráficos para obtener datos sobre el valor numérico de las funciones, y de sus derivadas.*

Compara en cada caso $f(a)$ con $g(a)$, $f\,'(a)$ con $g\,'(a)$ y $f\,''(a)$ con $g\,''(a)$, si es posible, si no lo es justifica. En todos los casos las rectas trazadas son tangentes a uno de los gráficos, o a ambos, en $x=a$.

a)

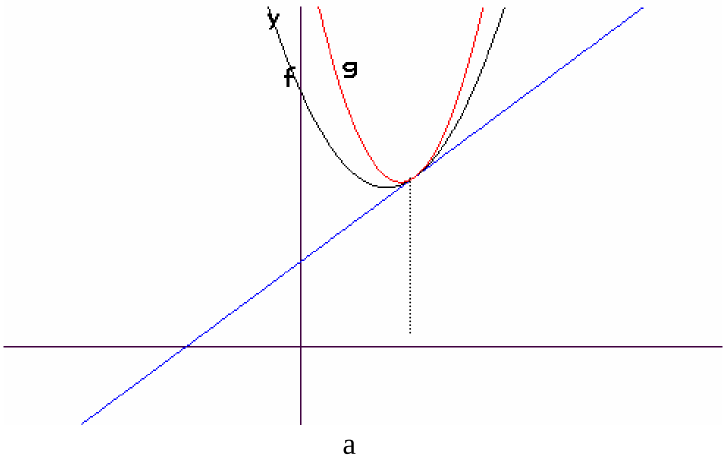


$f(a)\ldots g(a)$
$f\,'(a)\ldots g\,'(a)$
$f\,''(a)\ldots g\,''(a)$

- *En este item se espera que el alumno compare sin grandes dificultades las imágenes de las funciones f y g, de sus funciones derivadas primeras y segundas.*

- *Esperamos que asociando concavidad positiva en x=a a $f\,''(a)>0$ y concavidad negativa en x=a a $g''(a)<0$, deducirá que $f\,''(a)>g\,''(a)$.*

b)

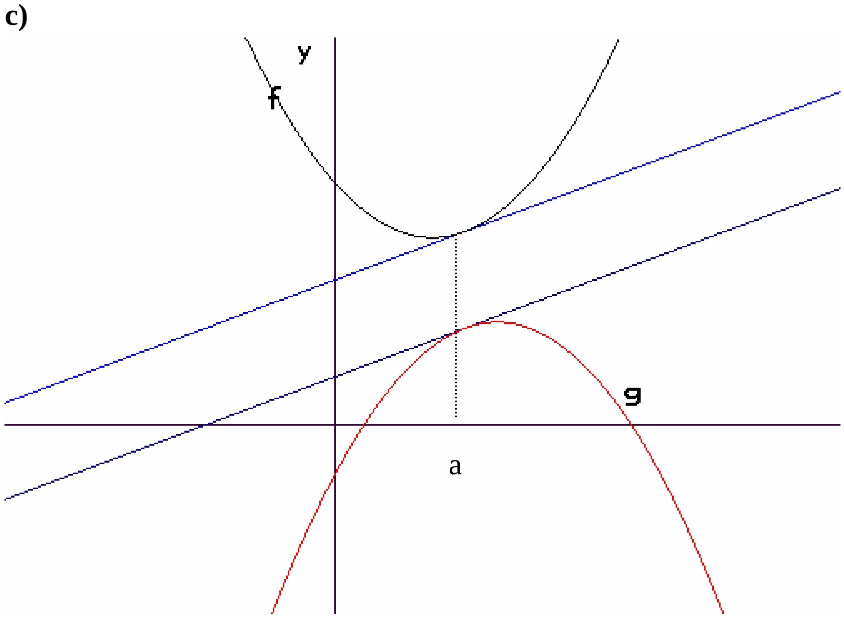


f(*a*)…*g*(*a*)
f ´(*a*)…*g* ´(*a*)
f ´´(*a*)…*g* ´´(*a*)

- *Este caso les lleva a comparar las imágenes de las funciones derivadas segundas en el caso que ambas tienen concavidad positiva en el real a trabajar.*

- *Nos interesa observar, en el caso que el estudiante haya establecido una conjetura anterior, si la mantiene en este nuevo tipo de preguntas; y si no la ha establecido aún si este tipo de preguntas planteadas en un contexto gráfico les ayuda a establecer posibles conjeturas.*

c)

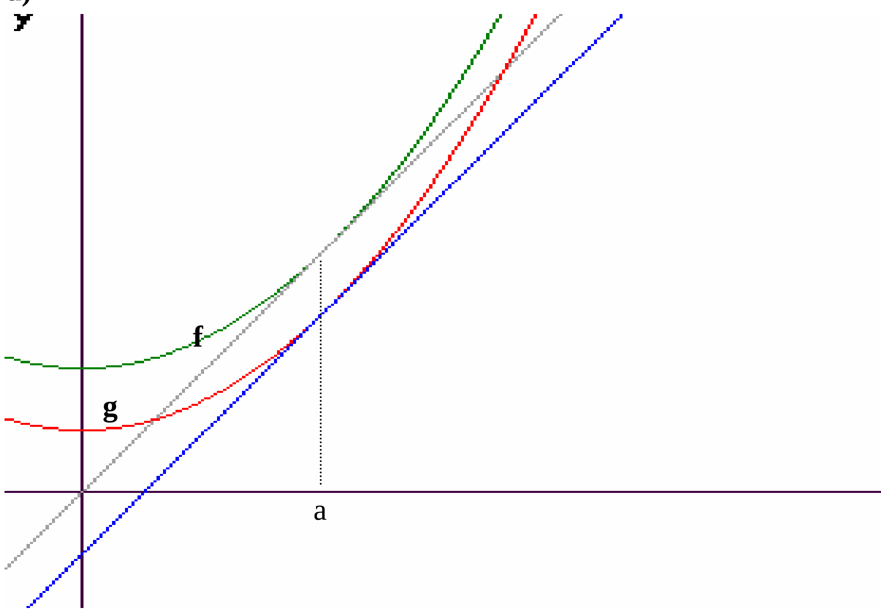


f(*a*)…*g*(*a*)
f ´(*a*)…*g* ´(*a*)
f ´´(*a*)…*g* ´´(*a*)

- *En esta pregunta nuevamente se presenta el caso que las funciones tienen distinta concavidad (positiva y negativa) en los puntos de estudio. A diferencia de la pregunta a), en ésta se varían las imágenes de la función intentando determinar si esta variación influye en la respuesta del tercer ítem.*

- *Creemos que esta pregunta no generará dificultades, que los estudiantes nuevamente asociarán la concavidad negativa, o positiva de la función con el signo del valor numérico de la función derivada segunda lo que les permitirá responder el tercer ítem.*

d)

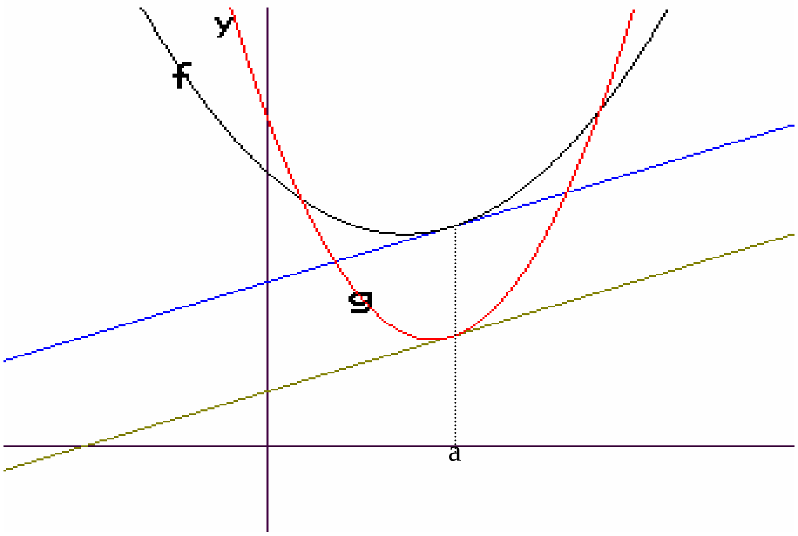


$f(a) \ldots g(a)$
$f'(a) \ldots g'(a)$
$f''(a) \ldots g''(a)$

- *Esta pregunta apunta a observar si el estudiante que haya establecido una conjetura anterior la mantiene, y si no ha establecido aún una conjetura acerca de la interpretación gráfica del valor numérico de la función derivada segunda, si este tipo de preguntas planteadas en un contexto gráfico les ayuda a establecerlas.*

- *Esperamos que los dos primeros ítem no presenten dificultades y que en el tercero la mayoría de los entrevistados asignen igual valor numérico en x=a a las funciones derivadas segundas involucradas.*

e)



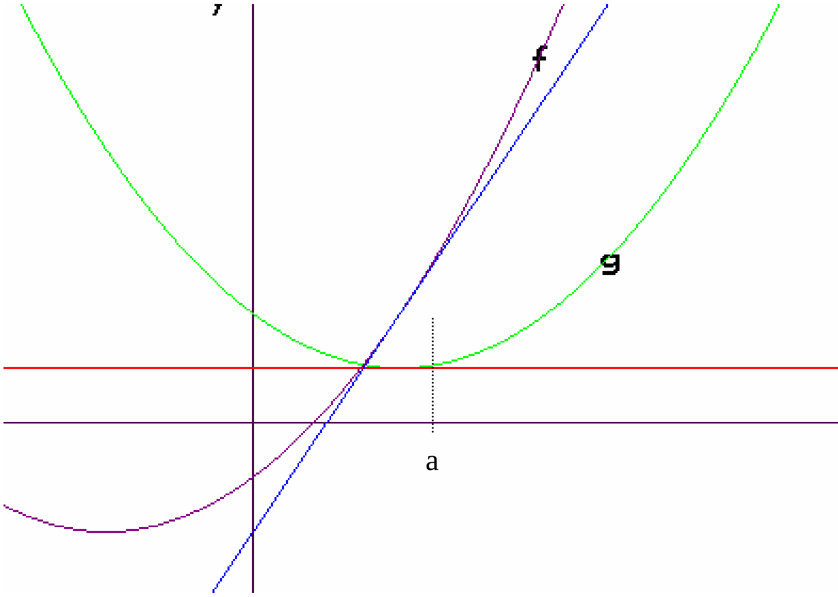
$f(a) \ldots g(a)$
$f\,'(a) \ldots g\,'(a)$
$f\,''(a) \ldots g\,''(a)$

- *En esta pregunta, a diferencia de la pregunta b), las imágenes de las funciones en x=a son distintas. Se espera investigar si la respuesta dada al ítem tres está influenciada por las imágenes de la función.*

- *Se identificará también si mantienen la conjetura que han establecido, si ya lo han hecho, y si este tipo de preguntas, realizadas en este contexto, les facilita la formación de nuevas conjeturas.*

- *En las tres próximas preguntas se trabaja con gráficos de funciones que cumplen que* $f\,''(a)=g\,''(a)$. *Dado que una de nuestras hipótesis de trabajo era que asociarían* $f\,''(x)$ *con la curvatura de f en x es que enfrentamos a los entrevistados a tres casos en los cuales la curvatura varía, por variar la imagen de las funciones derivada primeras involucradas, pero las funciones derivadas segundas de f y g tienen igual valor funcional en los valores a comparar*

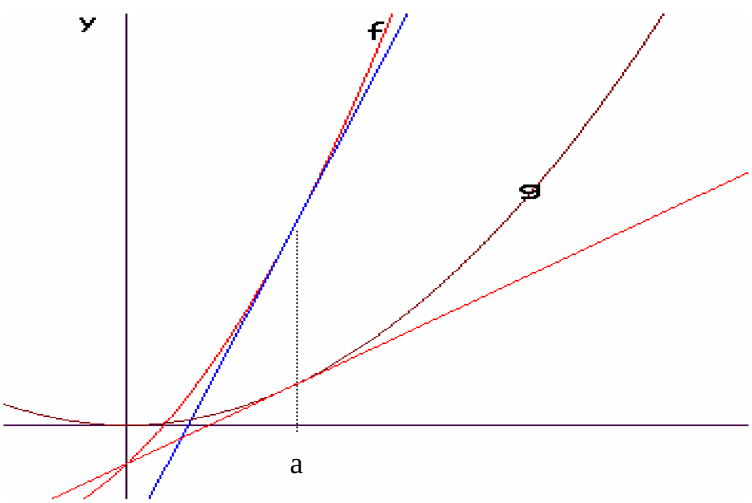
f)



$f(a)\ldots g(a)$
$f\,'(a)\ldots g\,'(a)$
$f\,''(a)\ldots g\,''(a)$

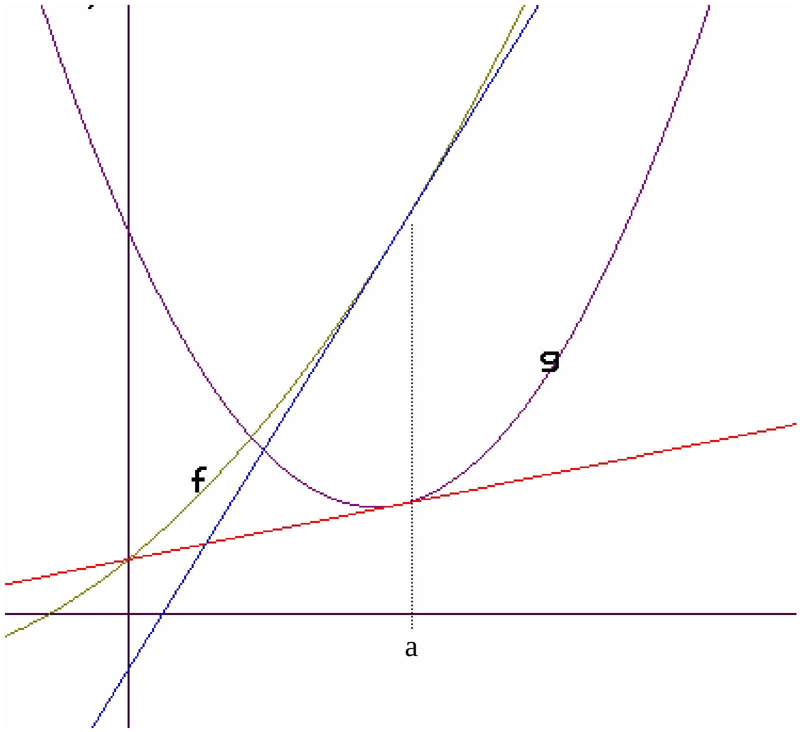
Creemos que continuarán con su conjetura y establecerán, de acuerdo a ella, un orden entre f ´´(a) y g´´(a), si f es más abierta de g en x=a entonces f ´´(a) será mayor (o menor) que g ´´(a). Lo cual estaría confirmando que el significado gráfico que asignan los entrevistados a f ´´(x) es independiente a el valor de f ´(x).

g)



$f(a)\ldots g(a)$
$f\,'(a)\ldots g\,'(a)$
$f\,''(a)\ldots g\,''(a)$

h)



$f(a)\ldots g(a)$
$f'(a)\ldots g'(a)$
$f''(a)\ldots g''(a)$

Aunque no es el objetivo de esta investigación creemos que los estudiantes al finalizar la secuencia reconocerán que nunca habían significado gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda sino solo al signo de éste, y que la secuencia generó un espacio para comenzar a resignificar este concepto.

Población y aplicación de la secuencia

La actividad se realiza en tres etapas, en la primera los alumnos trabajan en forma escrita e individual en la secuencia, luego, en la segunda etapa, se dividen en dos subgrupos de tres y discuten y confrontan resultados obtenidos pudiendo o no llegar a plantear conjeturas comunes, luego en la última etapa se plantea una discusión entre ambos subgrupos, pudiendo o no llegar a una puesta en común de ideas, realizándose en esta etapa las intervenciones que son consideradas necesarias por parte de la entrevistadora. La primer etapa es registrada en forma escrita con las pruebas entregadas, la segunda se grava en audio y la tercera en audio y video. No se fijó tiempo límite para cada etapa sino que éste dependió del trabajo del grupo.

La secuencia fue aplicada a tres equipos de estudiantes; dos de alumnos del IPA que aunque en algunos casos hayan cursado cálculo no han aprobado aún el examen correspondiente, y un equipo de alumnos de sexto año de secundaria, tres de ellos de opción medicina y tres de opción economía, que sí acaban de terminar el curso de análisis correspondiente a este grado pero no han dado aún el examen.

Todos los estudiantes han participado en forma voluntaria, fuera del horario de sus cursos, inclusive, en alguno de los casos, los cursos habían finalizado y estaban en período de examen. Este tipo de experiencia fue novedosa para ellos y participaron sabiendo que esta no influiría en sus calificaciones de los cursos de matemáticas.

El equipo 1 está compuesto por Lucia, Juan, Maximiliano, Alejandro, Jimena y Santiago, todos ellos estaban cursando calculo de segundo año del IPA, aunque no todos darían el examen correspondiente en el siguiente período. Para la segunda parte de la actividad el equipo se divide en el subgrupo A formado por Lucia, Juan y Maximiliano y en el subgrupo Subgrupo B constituido por Jimena, Alejandro y Maximiliano.

El equipo 2 está integrado por Patricia, Gastón, Ignacio, Sebastián, Luciana y Leticia, los primeros tres compañeros del curso de sexto año opción medicina y los demás del curso con opción economía. Los subgrupos se conformaron teniendo en cuenta que no quedaran con alumnos de la misma opción. El Subgrupo A se formó con Patricia, Luciana y Gastón; y el Subgrupo B con Leticia, Ignacio y Sebastián.

El equipo 3 está integrado por tres estudiantes por lo cual las etapas dos y tres se transforman en una sola. Los integrantes son: Anabel, Fernando y Bonifacio, ninguno de los tres ha cursado completamente el curso de análisis correspondiente a segundo del IPA, por lo cual tampoco han dado el examen correspondiente.

Nos interesa entrevistar a un equipo que solamente ha cursado análisis correspondiente a secundaria y otros dos equipos que, aunque no hayan cursado completamente el curso siguiente de cálculo, por lo tanto no han rendido aún el examen, han tenido un contacto más profundo con el cálculo. De esta forma podremos estudiar diferencias y similitudes en el significado gráfico que otorgan estos dos tipos de equipos al valor numérico de la función derivada segunda.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presentará el análisis de las actividades el cual se realizará en dos etapas. Primero el análisis de las producciones escritas de los estudiantes al trabajar inicialmente en forma individual, la trascripción y/o resumen de dicha producción se encuentra en el Anexo III. En esta instancia analizaremos las respuestas dadas por cada equipo a cada actividad. En una segunda instancia presentaremos el análisis de los resultados obtenidos a la luz de las consideraciones teóricas. En este último caso incluimos los diálogos (tanto de los distintos subgrupos como de los equipos) que nos permitieron realizar el análisis tendiente a responder nuestras tres preguntas de investigación.

Análisis inicial de la actividad individual escrita

ACTIVIDAD I

Partes 1, 2 y 3

Equipo 1

- Las respuestas dadas son las que esperábamos. Creemos que Juan confunde concavidad negativa con concavidad positiva porque aplica una regla sin razón, no consulta la definición del concepto sino su imagen de éste, la cual, al momento de ser consultada, contiene elementos erróneos.

Equipo 2

- Podemos observar que en este equipo se presentan dificultades al responder las tres primeras preguntas, aspecto que no ocurre en los otros dos equipos entrevistados. Los estudiantes intentan responder las preguntas consultando su imagen del concepto y nunca recurren, por lo menos no dejan registro escrito de ello, a la definición de los conceptos involucrados.

Equipo 3

- Nuevamente las respuestas a las tres primeras preguntas están dentro de lo esperado.

Parte 4

Equipo 1

- Nuevamente aparecen el tipo de respuestas esperadas. Observamos que Maximiliano intenta establecer una relación entre las primeras tres actividades y la cuarta. Cabe destacar que, si se realizaron intentos para responder esta actividad, no fueron registrados por los estudiantes.

Equipo 2

- Encontramos que en un primer enfrentamiento a conceptos nuevos los estudiantes no intentan significarlos, sino que recurren a expresiones que dan a entender que, si no se los han enseñado, ellos no deben saberlo, y no realizan intentos para significarlos por ellos mismos.

Equipo 3

- Dos estudiantes realizan intentos para responder esta pregunta, uno de ellos marca una zona pero no justifica el por qué.

ACTIVIDAD II

Partes a, b y c

Equipo 1

- Las respuestas caen dentro de lo esperado. Es interesante observar como va evolucionando el lenguaje utilizado por Alejandro, primero se refiere a que la tangente es negativa, luego, aunque continua con este tipo de expresión, aclara que el coeficiente es –2.

Equipo 2

- Parece que dos estudiantes dan un significado gráfico a $f'(x)$, y otra solo al signo de éste. Tres estudiantes no significan en esta instancia al valor numérico de la función derivada primera ni al signo de éste.

Equipo 3

- Solo un alumno otorga, en esta instancia, significado gráfico al valor numérico de la función derivada primera en x=2, los demás otorgan significado gráfico al signo de éste.

Pregunta d

Equipo 1

- Podemos observar que Santiago y Jimena determinan la expresión analítica de una función que les asegure que cumple la condición pedida. En cambio, los demás solo dibujan el gráfico de una función que tenga concavidad positiva, inclusive escriben $f''>0$ aunque la condición pedida era $f''(1)=4$ y no solo $f''(1)>0$.

Equipo 2

- Dos estudiantes significan gráficamente el signo del valor numérico de la función derivada segunda, no al real en sí, asociándolo a la concavidad de la función. Uno de ellos, a pesar de dibujar el gráfico de una función con concavidad positiva en el punto indicado, hace explícito que relaciona a la función derivada segunda con los cambios de concavidad. Los otros cuatro estudiantes en esta instancia no significan ni la función derivada segunda, ni los valores numéricos ni el signo de estos.

Pregunta e

Equipo 1

Observamos que los estudiantes mantienen los argumentos anteriores, cuatro de ellos continúan teniendo en cuenta solo el signo del valor numérico de la función derivada segunda y no el valor numérico en sí.

Equipo 2

Dos estudiantes mantienen el significado que asignan a la expresión $f''(a)=b$, si $b>0$ la función presenta concavidad positiva en $x=a$, y si $b<0$ la concavidad es negativa. No se presenta un significado del valor numérico en sí de $f''(a)$ sino solo de su signo.

Equipo 3

Los tres estudiantes asocian significado gráfico al signo de $f''(a)$, relacionándolo con la concavidad de f en $x=a$, pero no asocian significado al real en sí.

ACTIVIDAD III

Parte a

Equipo 1

La confusión con el signo de la concavidad lleva a que tres estudiantes se enfrenten a la situación de dar significado gráfico al valor numérico de la función derivada segunda, y, en esta instancia no logran significar.

Partes b y c

Equipo 1

Maximiliano comienza a establecer relaciones que le permitan significar al valor numérico de la función derivada segunda. Busca una relación entre la cercanía del punto en cuestión y el P.I. (punto de inflexión).

Equipo 2

- A diferencia de la actividad anterior, en la cual las preguntas eran realizadas en un registro simbólico y las respuestas dadas en uno gráfico, en esta actividad, donde las preguntas son realizadas con apoyo del registro gráfico, dos estudiantes más dan significado gráfico al signo del valor numérico de la función derivada segunda.

- Dos estudiantes significan gráficamente el signo del valor numérico de la función derivada segunda pero aún no encuentran elementos para significar gráficamente su valor.

Equipo 3

- Nuevamente confirmamos que estos estudiantes han establecido una relación entre el signo del valor numérico de la función derivada segunda y el gráfico de ésta, esta relación la podemos definir en términos de concavidad.

- Los estudiantes se enfrentan a que asociar al real $f\,''(a)$ los conceptos "concavidad positiva" o "concavidad negativa" no es suficiente para determinar algunos aspectos gráficos de funciones en las cuales los valores numéricos de sus funciones derivadas segundas son distintos, pero de igual signo, aunque haya una relación entre este concepto y el signo de dichas funciones derivadas segundas.

Partes d y e

Equipo 1

- Hasta ahora solo Maximiliano intenta establecer relaciones que le permitan significar gráficamente a $f\,''(a)$, los demás parecen asumir que no tienen elementos para significarlo, y no realizan intentos para lograrlo, solo reconocen la relación entre el signo de este real y el gráfico.

Equipo 3

- Un estudiante indica que no tiene elementos par responder esta pregunta.

- Dos estudiantes la responden deduciendo el crecimiento de la función derivada primera. Están buscando una estrategia que les permita responder una pregunta que involucra interpretaciones a las cuales nunca se habían enfrentado.

Parte f

Equipo 1

- Maximiliano continúa manteniendo su conjetura que el valor numérico de la función derivada segunda en un real x depende de la proximidad del punto $(x,f(x))$ al PI. Lucia y Juan parecen reconocer que necesitan más elementos para poder responder dado que conocer solo el signo no es suficiente.

Equipo 2

- Un estudiante manifiesta que cuando en dos reales la concavidad de la función tiene el mismo signo no posee elementos para comparar los valores numéricos de la función derivada segunda correspondientes.

Equipo 3

- Observamos que los estudiantes tratan de generar estrategias para enfrentar el problema, estas estrategias parecen basarse en el estudio del crecimiento de la función derivada segunda.

ACTIVIDAD IV

Parte a

Equipo 1

- Todos significan el valor numérico de la función f, el de su derivada primera, pero solo Maximiliano parece continuar con su conjetura inicial que le permite significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda, los demás solo significan el signo de dicho real.

Equipo 2

- Los cuatro estudiantes que realizan esta actividad parece que significan gráficamente el signo del valor numérico de la función derivada segunda, aunque dos de ellos no significan gráficamente, en esta instancia, al valor numérico de la función derivada primera.

Equipo 3

- Los estudiantes que en la actividad anterior no habían significado gráficamente al valor numérico de la función derivada primera ahora sí lo hacen. Podemos observar que todos trazan la recta tangente al gráfico de coeficiente angular 2.

- Nuevamente encontramos que establecen una relación entre el signo del valor numérico de la función derivada segunda y la concavidad de ésta, pero no una relación entre el gráfico y el valor numérico mencionado.

Partes b y c

Equipo 1

- A partir de las respuestas dadas por Santiago, Juan y Jimena a las dos preguntas anteriores parece que han establecido una conjetura: a mayor valor numérico de la función derivada segunda en $x=a$ el gráfico de la función estará más alejado de su recta tangente en $x=a$ en un entorno reducido de a. Observemos que la proximidad a la tangente correspondiente del gráfico de la función f es mayor que la de la función g cuando $f''(x)>g''(x)$ (parte c) y menor cuando $f''(x)<g''(x)$ (parte d). Cuando los estudiantes expresan “a mayor valor numérico de la función derivada segunda” están comparando dos reales positivos, tal vez por eso generalizan sin necesidad de tener en cuenta el valor absoluto de dichos reales.

- Maximiliano continua conjeturando que el valor de $f''(x)$ dependerá de la proximidad de $(x,f(x))$ al P.I. Observamos que en sus respuestas la función que tiene menor valor numérico su derivada segunda en $x=a$ es esbozada con un P.I. próximo a $(a,f(a))$, en cambio la otra función no cambia la concavidad en el entorno dibujado.

Equipo 2

- Los tres estudiantes que realizan esta actividad parece que establecen una relación entre el signo del valor numérico de la función derivada segunda y su gráfico: “a mayor valor numérico de la función derivada segunda el gráfico de ésta será más “abierto (o más cerrado)”.

- Ignacio y Sebastián parecen mantener la conjetura anterior, de la cual podemos deducir una relación entre el valor numérico de la función derivada segunda y la curvatura de esta.

Equipo 3

- Aparecen el tipo de conjeturas que esperábamos.

- A partir de los bosquejos realizados, en cuanto a la tercer condición, parece que Ana y Bonifacio asocian a mayor valor numérico de la función derivada segunda un gráfico “más alejado” de la tangente en un entorno del real en cuestión. En cambio Fernando aplica la relación en forma inversa. O sea que podemos pensar que los tres han establecido una relación entre el gráfico de una función y el valor numérico de la función derivada segunda.

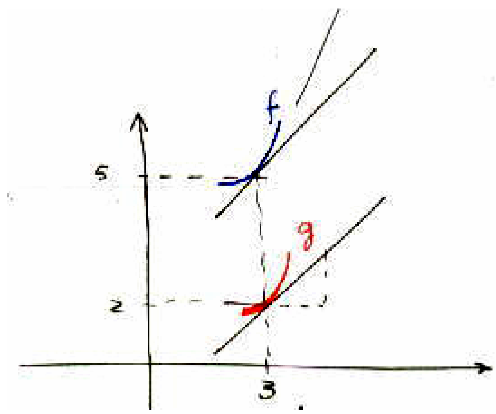
- Los tres mantienen su conjetura inicial en la cual establecen una relación entre el valor numérico de la función derivada segunda y el alejamiento (concepto ya definido) del gráfico de la función a la recta tangente respectiva.

- Se plantean dos conjeturas opuestas: a mayor valor numérico de la función derivada segunda mayor “alejamiento” de gráfico a la recta tangente respectiva; y a mayor valor numérico de la función derivada segunda “menor” alejamiento de gráfico a la recta tangente respectiva.

Parte d

Equipo 1

Imagen 4



- Todos parecen coincidir que en estas condiciones los gráficos de *f* y *g* estarían a igual "proximidad" (como muestra el dibujo) de la recta tangente correspondiente.

Equipo 2

- Los cuatro estudiantes que realizan esta actividad parece que asocian a igual valor numérico de la función derivada segunda la misma "proximidad" a la tangente correspondiente.

- De los cuatro estudiantes que dan significado gráfico al valor numérico de la función derivada segunda dos no se lo dan al valor numérico de la función derivada primera.

Equipo 3

- En este caso ambas conjeturas coinciden, tienen este aspecto en común; a igual valor numérico de las funciones derivadas segundas igual alejamiento de los gráficos a las rectas tangentes respectivas.

- Observemos que los tres estudiantes mantienen su conjetura inicial.

Parte e

Equipo 1

- Santiago y Juan mantienen su conjetura que el gráfico es más apretado cuanto mayor es el valor numérico de la función derivada segunda. Parece que Lucía también adopta esta conjetura en las últimas gráficas. El concepto “más apretado” se correspondería al concepto ya definido “más alejado” de la tangente respectiva y al concepto “más cerrado” que aparece luego.

- Maximiliano parece mantener su conjetura que $f''(a)>g''(a)$ si $(a,g(a))$ está más próximo a un P.I. que $(a,f(a))$.

Equipo 2

- Ignacio y Sebastián parecen mantener su primer conjetura estableciendo una relación entre el valor numérico de $f''(a)$ y el gráfico de f en $x=a$.

- Hasta este momento podríamos decir que la relación que han establecido se podría definir en términos de curvatura, dado que en todos los casos $f'(a)=g'(a)$, lo que lleva a que la relación entre la curvatura de ambas funciones en $x=a$ sea directamente proporcional a $f''(a)$ y $g''(a)$ respectivamente.

Observemos que el valor de la curvatura de una función en $x=a$ depende de los valores numéricos de la función derivada primera y de la función derivada segunda en $x=a$. Si al comparar las curvaturas de dos funciones en $x=a$, las derivadas primeras en $x=a$ de estas dos funciones son iguales, la curvatura pasaría a depender, y en proporción directa, solo de los valores funcionales de las funciones derivadas segundas en $x=a$.

Si $f'(a)=g'(a)$

$$\frac{|f''(a)|}{\sqrt{\left(1+(f'(a))^2\right)^3}} > \frac{|g''(a)|}{\sqrt{\left(1+(g'(a))^2\right)^3}} \Leftrightarrow |f''(a)| > |g''(a)|$$

Equipo 3

Podemos observar que los estudiantes mantienen sus primeras conjeturas, hasta ahora dos opuestas, aunque en el caso de Ana en esta pregunta no se logra diferenciar las características de su dibujo.

Dado que en todos los casos hasta acá presentados $f'(a)=g'(a)$, las conjeturas que han establecido los estudiantes las podemos plantear en términos de curvatura, en un caso se estaría presentando una relación directa entre el valor numérico de la función derivada segunda y la curvatura de la función y en otro caso la relación sería inversa.

Partes f y g

Equipo 1

Parece que tres alumnos ya han establecido una relación entre el valor numérico de la función derivada segunda y el gráfico de la función inicial, la cual abarca aspectos más amplios que solo considerar el signo de su concavidad. Además es interesante observar que dos de ellos han establecido la misma relación "a mayor valor numérico de la función derivada segunda el gráfico de la función es más abierto en un entorno del real". El estudiante restante estableció que cuanto más alejado de un P.I. está el punto $(x,f(x))$ menor será $f''(x)$.

Equipo 2

Los estudiantes que habían establecido una conjetura para interpretar gráficamente la comparación entre $f''(a)$ y $g''(a)$ en el caso que $f'(a)=g'(a)$ no dan muestras de si la mantienen o si la descartan en el caso que $f'(a)\neq g'(a)$.

Equipo 3

No podemos establecer aún si Fernando ha cambiado su conjetura inicial, pasando a una similar a la de sus compañeros, o solo ha cometido un error inconsciente en su dibujo respecto a su conjetura anterior.

Parece que dos de los estudiantes mantienen sus conjeturas anteriores más allá de que en estas situaciones $f\,'(a)$ sea distinta a $g\,'(a)$. En estos casos ya no podemos establecer estas conjeturas como relaciones directas entre el valor numérico de la función derivada segunda y la curvatura de la función dado que esta última también está determinada por el valor numérico de la función derivada primera.

ACTIVIDAD V

Equipo 1

Como esperábamos los dos primeros ítems no parecen presentar dificultades a excepción de una estudiante que confunde la condición del coeficiente angular con la del término independiente.

En el tercer ítem todos coinciden al comparar valores numéricos de la función derivada segunda en el caso en que ellos tienen distinto signo. En los casos que tienen el mismo signo parece que los estudiantes se dividen en dos grupos, uno que a mayor valor numérico de la función derivada segunda[9] le asocia un gráfico más alejado de la tangente correspondiente en el punto en cuestión y el grupo que le asocia un gráfico menos alejado de dicha tangente.

Es interesante observar que Maximiliano ha debido considerar otra estrategia distinta que la que utilizó en las actividades anteriores para resolver este último ítem dado que en ninguno de los gráficos se presenta un PI.

Las respuestas dadas por Maximiliano a las preguntas que involucran valores numéricos de la función derivada segunda, con su nueva estrategia, coinciden en su mayoría con las respuestas dadas por los estudiantes que habían realizado otras conjeturas para responder las actividades anteriores.

[9] Creemos que no es planteado en términos de valores absolutos porque la secuencia en los casos no triviales, para evitar distraer la atención del objetivo principal, llevaba a comparar $f''(a)$ y $g''(a)$ ambos positivos.

Equipo 2

- Observamos que en los dos primeros ítem se plantean problemas al comparar los valores numéricos de las funciones derivadas primeras.

- En el tercer ítem todos coinciden en sus respuestas cuando $f''(a)>0$ y $g''(a)<0$ y todos menos uno de los entrevistados en el caso que $f''(a)=g''(a)$ con $f'(a)=g'(a)$.

- Ignacio parece establecer una conjetura, aunque indica que no sabe si está bien, en la que establece una relación entre el valor numérico de la función derivada segunda y el gráfico de ésta: “Se me ocurre que $f''(a)$ es mayor que $g''(a)$ porque el gráfico es más abierto”. En los demás estudiantes no podemos determinar aún si han establecido alguna conjetura dado que varían el tipo de sus respuestas de una situación a otra.

Equipo 3

- En los primeros dos ítems se presenta una coincidencia total de las respuestas de los estudiantes.

- Parece que en general las conjeturas de los tres estudiantes se han vuelto una, estableciendo que a mayor valor numérico de la función derivada segunda el gráfico de la función estará más alejado de la recta tangente correspondiente.

- Es muy interesante observar que Fernando no responde la primer pregunta, aunque en las actividades anteriores mostró que tenía internalizada la relación entre el signo del valor numérico de la función derivada segunda y la concavidad de la función. Esto puede deberse a que la creación de conjeturas sobre el significado gráfico de $f''(a)$ ha desplazado, por lo menos en el momento de responder esta pregunta, a los elementos que antes formaban parte de su imagen del concepto.

Análisis de los resultados a la luz de las consideraciones teóricas

- **¿Cuál es el significado gráfico que dan los alumnos al valor numérico de la función derivada segunda?**

En una primera instancia los estudiantes entrevistados cuando se enfrentan a preguntas que implican significar el valor numérico $f\,''(a)$ solo significan el signo de éste relacionándolo con la concavidad (positiva o negativa) del gráfico de la función f en $x=a$. Muestras de ello las hemos presentado al analizar las respuestas escritas de la Actividad II partes *e* y *d*, en las cuales realizan bosquejos de gráficos de funciones con concavidades positivas o negativas. Otras muestras de la asociación a este significado las encontramos en las discusiones grupales:

Subgrupo A del equipo 1

- Actividad II d

Lucía: Ah! Con $f\,''$ tengo problemas.

Santiago: Me llevo mal.

Lucía: Me llevo mal. Se si es positiva o negativa sí, pero después... no sé.

Juan: Pa, yo no sé, si es positiva seguro toda la recta (*se refiere al gráfico de la función*) está por encima de la tangente, sé que existe tangente, porque si es de clase dos pero seguro que también es derivable, de clase uno, hay tangente y está toda por arriba. Cómo es la tangente no sé, pero... tiene una de estas formas.

Santiago: Si, yo más o menos lo demostré de la misma forma. Con concavidad positiva en dos, tomando 4. Pero no sé cómo traducirlo en un gráfico. Yo hice esto como hacíamos el año pasado pero no sé la diferencia en qué será.

Podemos observar que estos estudiantes plantean un significado gráfico del valor numérico de la función derivada segunda, pero en esta instancia se han dado cuenta que no han significado al valor en sí.

Además, como analizamos en el capítulo IV, las respuestas de los estudiantes en una primera instancia, están influenciadas por el tratamiento curricular que se ha realizado del tema, tanto en los textos como en sus cursos, donde solo se significa gráficamente al signo de $f''(a)$ *asociándolo a la concavidad de la función en* $x=a$.

Cabe destacar lo expresado por un estudiante "Yo hice esto como hacíamos el año pasado pero no sé la diferencia en qué será", podríamos deducir que la fundamentación de la regla es que ella fue aplicada el año anterior, pero el estudiante no presenta evidencias de que haya incorporado razones, en el sentido de Skemp, R. (1976), que validen esta regla, por lo cual, en el mismo sentido, la podríamos considerar una regla sin razones.

- Actividad III e

Lucía: Bueno el *e*... no puedo afirmar nada.

Juan: En el *e* puse: no puedo afirmar nada porque son los dos del mismo signo.

En el caso que el signo de $f''(a)$ *sea igual al de* $g''(a)$ *dan muestras de reconocer que carecen de elementos para comparar los gráficos de las funciones f y g en* $x=a$. *Lo que no podemos deducir de este diálogo es si los estudiantes consideran que esta pregunta no tiene respuesta, o que ellos no pueden dar una respuesta y no lo intentan.*

- Actividad IV

Lucía: (risas) Qué problema con la concavidad!!!

Juan: A mí lo que me queda es que parece que no son funciones porque me quedan medio así, medio elipsongas...

Lucía: No, yo tuve problemas con la derivada segunda.

Cabe destacar que estos estudiantes aplican correctamente las técnicas de derivación, cuando se refiere a "problemas con la derivada segunda" es en referencia al significado gráfico que se le pide que le asigne a ésta.

► Actividad V

Lucía: Como que da la posibilidad que no sea posible compararlos, y yo al principio pensé que las derivadas segundas nunca las íbamos a poder comparar.

Juan: En este caso tal vez.

Lucía: ... antes de la teoría de la chatura.

Juan: En esta como en la d, tal vez no se puedan comparar, por eso yo puse “parecen iguales” (*se refiere al valor numérico de las funciones derivadas segundas*)

Cuando indican que tal vez no es posible comparar estos valores, se podría interpretar que no están considerando al valor numérico de la función derivada segunda como un real, o a que nunca se vieron en la necesidad de establecer diferencias y similitudes entre los gráficos de funciones a partir del valor numérico de sus derivada segundas. Dado que estos estudiantes han dado muestras de no estar dentro de la primer interpretación posible es que consideramos la segunda, y ello puede ser consecuencia del tratamiento didáctico que se ha realizado del tema, en el cual, como mostramos en el capítulo de la componente didáctica, nunca se presentan al estudiantes significaciones gráficas de $f\,''(a)$*, ni casos de comparar comportamientos de los gráficos de funciones a partir del valor numérico de la función derivada segunda.*

Confirmando lo planteado en el párrafo anterior, el siguiente diálogo muestra la influencia del tratamiento curricular del tema en las primeras respuestas de los estudiantes. Cuando Juan dice “la sé pero...” se debe estar refiriendo a que puede determinar la función derivada segunda de una dada pero nunca habían intentado significar su valor numérico gráficamente. También muestra de esta influencia es la expresión “yo al principio pensé que las derivadas segundas nunca las íbamos a poder comparar”, podemos interpretar que como nunca se presentaron en los cursos situaciones que implicaran comparar valores numéricos (del mismo signo) de la función derivada segunda nunca se presentaría esa situación.

En el análisis del tratamiento curricular del tema derivadas que realizamos en el capítulo IV dimos muestras de la similitud que se presenta en el tratamiento del tema entre distintos profesores y en distintos momentos. Esto puede llevar a que algunos de los estudiantes crean que si sus docentes no les han enseñado cierto ítem ellos nunca se verán en la necesidad de usarlo, por lo tanto no es necesario aprenderlo.

- Actividad IV

Juan: Es que en realidad con la derivada segunda como que mucho no se trabaja, o sea la sé pero...

Lucía: Yo me di cuenta de que nunca me habían hecho estas cosas...

Juan: Ahí va... yo como que cuando lo estaba haciendo como que pensaba ¿y esto?

Lucía: Es más, yo al principio decía no puedo ver nada y al final...

Juan: Dijiste tá...

Lucía: No, claro, hay que pensar un poquito. No puede ser que ninguna se pueda hacer..

Lucía: Claro.

Estos diálogos, como la actividad toda con los tres equipos, confirmó nuestra idea inicial de que los estudiantes no se habían enfrentado anteriormente a problemas que implicaran significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda. Esto lleva a que las actividades planteadas relativas a ese aspecto hayan representado realmente un problema y no ejercicios tipo que conllevan respuestas mecánicas de repetición.

Subgrupo B del equipo 1

- Actividad II parte d

Jimena: En la d la derivada segunda en 1 vale 4

Alejandro: Concavidad positiva

En este diálogo debemos resaltar que aunque hacen explícito el dato $f''(a)=b$, donde b es un real dado, solo significan gráficamente al signo de b pero no al real b en sí.

Equipo 1

- Actividad II d, e.

Lucía: No, nosotros ahí tuvimos en cuenta que la concavidad fuera positiva, y en el otro que fuera negativa.

Nuevamente es evidente que en estos dos casos los estudiantes asignan, en esta instancia, significado gráfico al signo del valor numérico de la función derivada segunda y no al valor numérico en sí como lo pedía la actividad.

Subgrupo A del equipo 2

- Actividad II

Patricia: La derivada segunda te da la concavidad.

- Actividad II d

Luciana: En 1 tiene concavidad positiva.

- Actividad II e

Luciana: En 3 tiene concavidad negativa.

- Actividad V b

Patricia: Las derivadas segundas son iguales porque tienen las dos concavidad positiva.

En forma similar a lo analizado en el equipo anterior, encontramos en este subgrupo varias respuestas de las cuales podemos deducir que estos estudiantes frente expresiones del tipo $f''(a)=b$ le asignan un significado gráfico al signo de b, asociándolo con la concavidad de f en $x=a$, pero no al valor de b.

Subgrupo B del equipo 2

- Actividad II d, e

Ignacio: Yo lo que le puse es una gráfica de concavidad positiva y la e con concavidad negativa.

Leticia: ¿En cualquier lado?

Ignacio: Sí, con cualquier imagen.

- Actividad III e, f

Ignacio: Y tá, la e no la pude contestar, la *e* y la *f* no las pude contestar porque en los dos casos era la misma concavidad

Leticia: Las dos negativas...

Sebastián: Sí de última lo que queda pensar es que acá la gráfica es mucho más cerrada que acá.

Ignacio: Sí, pero yo no se que es, porque no me lo dijeron.

Sebastián: Tá... pero si nos vamos a poner a discutir eso...

Ignacio: Esto no nos enseñó la profesora.

En una primer instancia parece que la regla que han establecido, que relaciona al signo de f ´´(a) con el gráfico de f en x= a, les permite resolver algunos de los problemas planteados. En cambio, al intentar comparar f ´´(a) con g ´´(a), ambos de igual signo, reconocen que la regla anterior no es suficiente.

Equipo 2

- Actividad III c

Sebastián: Hay concavidad negativa en ese punto, pero no sé si es – 3

Ignacio: Claro, el valor numérico no sé que significa. El valor numérico –3 no sé qué quiere decir en la gráfica.

Equipo 3

- Actividad II d

Ana: La derivada segunda vale 4 o sea que la concavidad es positiva. Puede ser arriba del eje o abajo o ...

Entrevistadora: ¿Están de acuerdo?

Fernando: Concavidad positiva pero no se si se puede ampliar a algo más.

...

Entrevistadora: ¿Ustedes están usando el dato que la función derivada segunda en 1 vale 4?

Fernando: No, que es positiva.

Ana: La concavidad es positiva.

Bonifacio: Se usa que es positiva.

Entrevistadora: ¿Es lo mismo decir que la función derivada segunda en 1 es positiva a decir que la función derivada segunda en 1 es 4?

Ana: No tengo más herramientas.

Fernando: Yo no usé el dato que $f''(1)=4$.

- Actividad III c

Ana: Ahí hay concavidad negativa pero no sabemos.

Bonifacio: Hay concavidad negativa.

Ana: f'' es un valor negativo pero no se si es -3 o -7.

De estos últimos diálogos también se puede deducir que los estudiantes se han dado cuenta que el significado gráfico asignado en una primer instancia a $f''(a)$, signo de la concavidad, no es suficiente para resolver algunas de las situaciones propuestas. Además es interesante que los alumnos son concientes que la solución que han planteado no contradice los datos dados pero tampoco pueden asegurar que sea correcta.

A partir de las evidencias presentadas en esta primer instancia confirmamos nuestra consideración inicial, que los estudiantes no darían, en una primera instancia, significado gráfico al valor numérico de la función derivada segunda sino solamente signo de este. El significado gráfico dado por los estudiantes al signo de $f''(a)$ está relacionado con la concavidad de la función f en $x=a$: los estudiantes asocian $f''(a)>0$ con una función que en $x=a$ tiene concavidad positiva; y si el real anterior es menor que cero lo asociarán a una función que tenga concavidad negativa en $x=a$. En algunos casos son consientes de que carecen de elementos para enriquecer el significado gráfico asociado a $f''(a)$ del cual están haciendo jugar solo el signo.

Además cuando un estudiante intenta realizar una conjetura sobre el gráfico de la función f a partir de conocer $f''(a)$ otro compañero le indica que ese concepto no fue enseñado por la profesora y deciden no discutirlo. Los estudiantes en una primera instancia intentan resolver la actividad utilizando los conocimientos que han sido validados en sus cursos, aunque ellos sean insuficientes para resolver la actividad. Al percatarse de esta insuficiencia surgen algunas conjeturas, en un equipo parecen no ser, al inicio, aceptadas fácilmente por no estar avaladas por un docente.

También cabe destacar cómo la componente didáctica, desarrollada en el capítulo IV, influencia fuertemente las respuestas de los estudiantes. Los estudiantes intentan responder las preguntas planteadas utilizando elementos trabajados en sus cursos de matemáticas y se asombran cuando son interrogados sobre aspectos de la función derivada segunda que, como hemos presentado evidencias, no han sido tratados en sus cursos.

En una segunda instancia, luego de cumplirse varias etapas de las actividades, los entrevistados observan que pueden asignar un significado gráfico al valor numérico de la función derivada segunda que no depende solo del signo de éste, sino del valor en sí. Muestras de ello las presentamos en las siguientes transcripciones:

Subgrupo A del equipo 1

- Actividad II d

Juan: Yo lo que pensé, pero más adelante, es que mientras más grande sea el valor numérico de la derivada segunda es como más...

Lucía: Más apretada.

Juan:... más apretada. Yo pensaba en las parábolas, si tengo x^2 y tengo $3x^2$ la $3x^2$ es más apretada.

Lucía: Yo también.

Santiago: Claro, se aprieta más contra el eje.

Juan: Claro.

Santiago: Yo pensé lo mismo. Se me ocurrió tomar un ejemplo, $2x^2$, hice la derivada primera, la derivada segunda, me queda cuatro, claro para todos los puntos. En definitiva es una que cumple eso, en definitiva sí.

Juan: De última tá, más bien, funciones que lo cumplieran hicimos todos.

Juan: En la otra parte lo mismo

Santiago: Podría haber sumado cualquier cosa de grado uno...

Juan: Te hubiera quedado igual.

Santiago: ...me habría dado lo mismo.

Juan: Ahí va.

Es interesante observar que la conjetura que han establecido sobre la relación entre $f''(a)$ *y el gráfico de f en x=a es la que esperábamos. La relación se puede enunciar, utilizando los términos dados por los estudiantes como: "a mayor derivada segunda en x=0 el gráfico de f se aprieta más contra el eje Oy en un entorno de 0". En este caso está comparando dos reales positivos, por lo que al decir "mayor valor" coincide con "mayor valor absoluto". Observemos que en el ejemplo dado por los estudiantes el eje es perpendicular a la recta tangente a los gráficos en x=0, por lo tanto esta relación se puede plantear en términos de curvatura. Además, en este caso, se cumple la relación de proporcionalidad directa entre los valores numéricos de las funciones derivadas segundas y las curvaturas de las funciones iniciales porque el valor numérico de la función derivada primera en los ejemplos que presentan es 0, o sea que la curvatura, en estos casos, está directamente relacionada con el valor numérico de la función derivada segunda en x=0.*

► Actividad IV b

Juan: En el *b* tengo *g* por adentro.

Lucía: Ah, viste... yo ahí...

Juan: Yo tengo g por adentro porque es...

Santiago: Yo tomé que *f* estaba... estaba entre *g* y la recta...

Juan: Claro, entre *g* y la recta, por eso es que *g* es como más apretada, como *g ´´* es mayor es más apretada la otra es más achatada.

Lucía: Yo no lo hice así.

Santiago: Es una interpretación, pero en verdad tengo la duda, yo no sé si es así realmente...

Juan: Si *f* es de segundo grado es así... de última...

Santiago: Porque si fuera la derivada primera es mayor que el otro es más...

Juan: Claro, lo ves al toque.

Santiago: ... es más visible...

....

Juan: Yo seguí el mismo razonamiento de la primera, si es más apretada tiene mayor derivada segunda.

Ahora este equipo pasa a comparar el gráfico no con el eje sino con la recta tangente al gráfico en el punto en cuestión. Aparecen los conceptos "apretada" y "achatada", *que luego intentarán definir. Observamos nuevamente la asociación entre mayor valor numérico de la función derivada segunda y mayor curvatura de la función inicial.*

► Actividad V

Santiago: ... significa que *f* está más vertical que *g*.

Lucía: Pero eso lo da la derivada.

Juan: Eso te lo da la derivada primera.

Santiago: Sí.

Lucía: La chatura te la da la derivada segunda.

Juan: Claro.

Lucía: A mayor chatura, mayor derivada segunda.

Juan: ... y si se cumple está bueno, es un criterio, yo cuando voy a dibujar la tangente...

Lucía: Yo lo primero que voy a enseñar a mis alumnos es la chatura.

En este diálogo los estudiantes hacen explícita su conjetura "a mayor chatura mayor derivada segunda", no olvidemos que han estado comparando reales positivos, por eso no tienen en cuenta la relación de "chatura" para casos donde $f''(a)<0$.

Subgrupo B del equipo 1

► Actividad II d

Jimena: A mi me costó pila pensar esto.

Maximiliano: A mi también. El tema es esto, yo lo pensé así: si $f''(1) = 4$ quiere decir que la derivada segunda...o sea, que ese punto no está tan cerca de un punto de inflexión como podría estar otro. Yo lo pensé así.

......

Alejandro: Yo puse concavidad negativa y no puse más nada.

Maximiliano: Estamos todos de acuerdo con que la concavidad es la misma, pero como diferenciamos entre 4 y 2 por ejemplo?

Jimena: Claro, ni idea! Por el punto de inflexión...

Maximiliano: La idea es esa.

Uno de los estudiantes plantean otro tipo de conjetura sobre la relación entre $f''(a)$ *y el gráfico de la función f. En esta conjetura el P. I. jugará un papel principal.*

► Actividad III c

Alejandro: En la *c* si puede ser.

Maximiliano: No, pará pará.

Jimena: Yo le puse que no sabía.

Maximiliano: Para mi no.

Jimena: ¿Por qué?

Maximiliano: *f ´´* de 5 es un número demasiado alto respecto a la proximidad del punto al punto de inflexión, por ahí cerca tenés un punto de inflexión.

Alejandro: Claro, claro.

Jimena: Pero es negativo ¿no?

Maximiliano: Claro, es negativo.

Jimena: Pero no sé... es negativo mirá la concavidad.

Maximiliano: Si, si, si, estoy de acuerdo que es negativo.

Jimena: ya pasó el punto de inflexión, fijate que es en 5.

Maximiliano: Si, es negativo, eso lo puse ¿no? pero para mi tiene que ser más chico (*se refiere "más chico" en valor absoluto*) está demasiado cerca del punto de inflexión como para ser un 3.

Alejandro: Yo puse que puede ser ¿y vos?

Jimena: Yo puse que no puede ser, pero no sé porque no puede ser, fijate ....

Maximiliano: Yo estoy de acuerdo que es negativo, pero no ese valor

Alejandro: Puede ser, está cerca....

Maximiliano: Está muy cerca del punto de inflexión!!!

En este diálogo Maximiliano explica un poco más su conjetura estableciendo una relación que podría explicitarse como "a menor valor numérico de $f''(a)$ *el punto en cuestión está más próximo a un P. I. Lo que no logra deducirse del diálogo es si sus compañeros han comprendido su conjetura.*

Equipo 1

Actividad IV b

Juan: Acá nosotros pensamos la misma cosa.

Entrevistadora: ¿Los tres lo mismo por separado?

Juan: Sí, los tres por separado y cuando nos juntamos habíamos pensado lo mismo. La teoría de "La Chatura", la teoría de la chatura... *(se arregla en el banco como aprontándose a presentar la teoría*). Porque nosotros pensamos.... además los tres pensamos el mismo ejemplo: una parábola. Mientras mayor es el coeficiente mayor es la derivada...

Entrevistadora: ¿Qué derivada?

Juan: La segunda. Cuanto más es la derivada segunda más apretada te queda *(pone los dedos pulgar e índice haciendo una U y los va cerrando)* la función, los tres pensamos lo mismo. Después como que siempre a mayor derivada segunda hacíamos como dibujos más apretados *(pone los dedos pulgar e índice haciendo una U y los va cerrando)* que las otras.

Entrevistadora: Entonces están dando una definición: una función es más apretada...

Risas.

Juan: Sí, me gustó, definición de "apretada"

Risas.

Juan: Pero también está "la chatura".

Entrevistadora: ¿Qué?

Juan: Más "apretada" o menos "chata". Una función es más chata si tiene menor derivada segunda.

Entrevistadora: Haceme la forma con la mano.

Deja los cuadernos y hace un movimiento con la mano que dibuja una forma similar a : 

Juan: Cuanto más "horizontal" (hace signos de comillas con las manos) quiere decir que tiene menor derivada segunda.

Entrevistadora: ¿Y eso quiere decir más chato o menos chato?

Juan: Eso quiere decir más chato. Y más apretada es la otra. *Hace una U muy cerrada con los dedos.*

Alejandro: Más vertical.

Juan: Sí, más vertical.

Alejandro: Cuando tiene mayor derivada segunda.

Entrevistadora: ¿Y ustedes qué opinan de esto? *Refiriéndose al otro grupo de 3.*

Maximiliano: Yo acá no me había dado cuenta, pero en el 5, no me acuerdo por qué, también se me ocurrió eso...de que fuera... *(pone los dedos pulgar e índice haciendo una U y los va cerrando)*

Jimena: Ah sí, ahora se cambió de bando.

Risas.

Maximiliano: No, en serio, lo tengo anotado, lo pensé en el 5 en todas las partes.

Risas.

Maximiliano: Siempre a mi me daba mayor, a ustedes menor, o al revés, pero la idea era la misma.

Entrevistadora: ¿Qué fue lo que pensaron ustedes?

Alejandro: Pensamos lo mismo, en la parábola, pero a menor abertura era menor la derivada segunda.

Entrevistadora: ¿Qué es “abertura”?

Alejandro: *Hace con un dedo la forma de una* U.

Jimena: Lo mismo que ellos llaman “chatura” para nosotros es “abertura”.

Entrevistadora: ¿Qué quiere decir que tenga menor abertura?

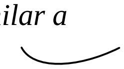
Jimena: Que es más apretada...

Risas.

Jimena: Pará... para nosotros que tenga menor abertura es que es más chata *(hace una U cerrada con los dedos).*

Entrevistadora: Haceme la forma de una con mayor abertura.

Jimena: Es más “chato” *Hace con los dedos pulgar e índice una forma similar a*



Entrevistadora: Pero ¿se pueden poner de acuerdo?

Juan: Claro, es un problema de nombres, es la forma de llamarle.

Entrevistadora: No, están diciendo algo contradictorio, hay una contradicción entre lo que dice cada grupo, no es solo los nombres. En estas condiciones no pueden llegar a un acuerdo.

Jimena: Claro.

Juan: La parábola con mayor abertura es la x^2, todas las demás van a quedar adentro de esa. *Coloca las dos manos formando una* U *y las va cerrando.*

Lucía: Ahí va.

Entrevistadora: ¿Esa es la parábola de mayor abertura decís vos?

Juan: No, no...

Risas.

Juan: ...de coeficiente mayor a uno. Si te tomás una del tipo $x^2/1000$ queda una cosa así (*coloca ambas manos formando una U muy abierta* )

Santiago: Chatura tendiendo a cero.

Risas.

Santiago: Después vamos a aclarar si es algo más o menos lógico o es un bolazo. *Refiriéndose a la entrevistadora.*

Risas.

Jimena: Tienen razón ellos, con mayor derivada segunda es menor la abertura.

Alejandro y Maximiliano: Sí.

Entrevistadora: Pero podemos discutirlo, *(refiriéndose a Jimena, Maximiliano y Alejandro)* si ustedes no están de acuerdo y creen que era como ustedes lo habían planteado...

Alejandro: No, no, está bien así.

El diálogo anterior muestra claramente el significado gráfico que ha asociado este equipo al valor numérico de la función derivada segunda. Cabe destacar la coincidencia de los seis estudiantes en esta asociación, aunque Maximiliano en una primera instancia había planteado su conjetura en términos de P. I., pero como en la Actividad V las funciones no presentan P. I. cambia su estrategia pasando a considerar una nueva conjetura que es similar a la que han planteado sus compañeros.

La conjetura que ha planteado este equipo es la que esperábamos, aunque al hablar de "menor" o "mayor" no aclaran que es en valores absolutos, esto puede ser porque en la actividad solo se comparan valores numéricos positivos de las funciones derivadas segundas.

También es interesante destacar que el significado gráfico que han asociado al valor numérico de la función derivada segunda, aunque hayan intentado definirlo, está planteado en términos de conjetura, dado que indican que luego esperan aclarar si es lógico o un "bolazo".

Debemos observar que este equipo ha expresado razones que avalan sus conjeturas, razones estas discutidas por todos los integrantes y aceptadas como válidas. Por lo tanto consideramos que la regla que han establecido es una regla con razones, y que su práctica de resolución del problema ha generado un entendimiento relacional de éste.

Además consideramos que han logrado visualizar el problema planteado, porque, basándonos en las concepciones de Zimmermann y Cunningham (1991) sobre visualización, planteadas en el Capítulo III, hemos presentado evidencias de que los estudiantes de este equipo han formado imágenes mentales, las cuales han llevado al papel, que les han permitido descubrir y entender los conceptos matemáticos en juego. También nos basamos en las concepciones sobre este tema de Cantoral y Montiel (2003), y también presentamos evidencias de que estos estudiantes han dado muestras de generar la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje. De lo anterior creemos que la visualización de la situación planteada les ha permitido resignificar el concepto en juego.

Subgrupo A del equipo 2

- Actividad V b

Luciana: Yo puse mayor (*la derivada segunda)* la de f porque... (*risas*) es más grande.

Gastón: ¿Cómo más abierta?

Luciana: Claro. Si.

Gastón: Yo también puse eso, es más abierta.

Es interesante observar como este subgrupo, de estudiantes que acaban de terminar secundaria, se plantea una conjetura similar a la del equipo de estudiantes que cursan niveles terciarios; y además, la conjetura planteada es la que nosotros esperábamos.

Subgrupo B del equipo 2

- Actividad IV b

Ignacio: La b, la misma imagen

Leticia: Sí.

Ignacio: La misma tangente...

Leticia: Sí, pero no sé cómo ponerlas, ¿una más arriba?

Ignacio: Sí, por un pálpito...

Sebastián: Yo me di cuenta de eso pero después...es como más grande...

Ignacio: Sí, como la concavidad, más grande...

- Actividad V e

Ignacio: Y la derivada segunda...

Sebastián: ...es mayor la de *f*.

Ignacio: Yo puse que es mayor la de f porque era más abierta.

Sebastián: Yo puse por lo mismo, porque era más grande.

Ignacio: Yo recién acá me di cuenta, porque de las concavidades no tenía ni idea.

Sebastián: Yo también.

- Actividad V h

Ignacio: Y la derivada segunda es mayor la que está más abierta.

En ambos subgrupos del equipo se presenta la conjetura esperada, conjetura ésta que se ha formulado también en los dos equipos analizados: a mayor valor numérico de la función derivada segunda el gráfico de la función es más "abierto". Es necesario marcar la no intervención de Patricia y Leticia en los respectivos diálogos, en el cual sus compañeros hacen explícita la conjetura que relaciona al valor numérico de la función derivada segunda con el gráfico de la función inicial. Por lo anterior es que, hasta esta instancia, no contamos con elementos para conocer el significado gráfico que han asignado estas dos estudiantes al valor numérico de la función derivada segunda, en el caso que lo hayan asignado.

Equipo 2

- Actividad III c

Sebastián: Hay concavidad negativa en ese punto, pero no sé si es – 3

Ignacio: Claro, el valor numérico no sé que significa. El valor numérico –3 no sé qué quiere decir en la gráfica.

- Actividad III f

Ignacio: No lo puedo contestar, porque en ambos casos es positiva la concavidad, está en que una gráfica sea más abierta que la otra, no sé que quiere decir.

En estas respuestas encontramos indicios de que estos estudiantes reconocen que los conceptos "concavidad positiva", "concavidad negativa" son insuficientes para responder las preguntas aquí planteadas. Ignacio hace explícito que no asigna significado gráfico al valor numérico de la función derivada segunda aunque ya ha dado muestras de que sí lo asigna a su signo. En estas primeras respuestas aparecen algunas palabras que podemos vincular a las conjeturas de los otros equipos.

- Actividad IV b

Ignacio: La misma imagen y la misma tangente y las dos gráficas que...*(hace movimientos con los hombros como diciendo "no sé...")*

Sebastián: Algo hice, para diferenciar la derivada segunda, que una era mayor que la otra y más abierta la concavidad *(hace con los dedos índice y pulgar la forma de una parábola y los abre y cierra intentando mostrar "cambio de concavidad")*

Entrevistadora: ¿Qué opinan de eso?

Ignacio: Yo lo puse al azar, puse dos gráficas una más abierta que la otra, pero no sé cuál es más abierta que la otra, tal vez son iguales.

...

Ignacio: *(Hace movimientos de hombros como "no sé...)* No se, capaz que si es más abierta en vez de ser más mayor el valor numérico es menor, cuanto más abierto menor valor numérico.

...

Sebastián: Yo puse que cuanto mayor sea la derivada segunda *(hace con los dedos índice y pulgar la forma de una parábola y los abre y cierra intentando mostrar* *"cambio de concavidad")*, más abierta va a ser la gráfica, pero, ¿por qué?, no se.... porque me pareció nomás.

Podemos observar que un estudiante hace explícita su conjetura, igual a la planteada en los otros equipos, aunque destaca la carencia de bases para ella. El otro compañero comparte la conjetura aunque también da muestras de considerarla sin fundamentos. Lo interesante que debemos destacar es que aunque ellos dan muestras de considerar su conjetura poco sólida, la base de sus dudas están en si la relación se establece entre "gráfico más abierto" y mayor valor numérico de la función derivada segunda o entre "gráfico más abierto" y menor valor numérico de la función derivada segunda. O sea que sí consideran que existe una relación entre el valor numérico de la función derivada segunda y la "abertura" del gráfico de la función inicial, aunque no pueden determinar si esta relación es directa o inversa.

► Actividad V e

Ignacio: La derivada segunda...

Sebastián: Lo mismo.

Ignacio: Si, es la misma discusión.

Entrevistadora: Entonces ¿cuál les parece que sería mayor?

Sebastián: La derivada segunda de *f*.

Ignacio: ¡¡Yo me la jugué a que era la de *f* !!

Risas

Ignacio: Pero porque se me cantó *(antojó).*

Entrevistadora: O sea que están manteniendo que a mayor valor numérico de la función derivada segunda...

Leticia: Es más abierta *(hace con los dedos índice y pulgar la forma de una parábola y los abre y cierra intentando mostrar "cambio de concavidad")*

Ignacio: Es más abierta.

► Actividad V f

Entrevistadora: ¿Continúan manteniendo el mismo criterio?

Sebastián: Lo mismo, *f* es más abierta.

Entrevistadora: ¿Qué relación están planteando entre el gráfico y la derivada segunda?

Ignacio: *(con las dos manos forma una U y cierra y abre las manos*) Que la concavidad es más abierta o más cerrada.

Entrevistadora: ¿En relación a qué?

Ignacio: A un entorno.

Entrevistadora: Que *f* tenga mayor derivada segunda que *g* en un real quiere decir que...

Ignacio: Que la gráfica de *f*....

Leticia: Es más abierta.

Ignacio: Ahí va, que es más abierta que la de *g*.

En ésta etapa el equipo hace explícita la conjetura que ha establecido, similar a la del equipo anterior: que a mayor valor numérico de la función derivada segunda el gráfico de la función inicial es más "abierto". La diferencia con el equipo anterior es que éste no plantea en el concepto "abierto" que exista una relación entre el gráfico de la función y la recta tangente en el punto a considerar, sino solo la relación con las parábolas de distinto coeficiente principal.

Debemos destacar que en este equipo, a diferencia del anterior, no se presentan razones relacionales que avalen la conjetura planteada. Las razones expresadas son del tipo "por un pálpito", "Pero porque se me cantó", "Yo me la jugué a que era la de f", de lo que no podemos asegurar que se haya realizado un entendimiento relacional del tema, sino que más bien podríamos creer que se ha realizado un entendimiento instrumental. Han generado una regla sin razones.

Equipo 3

- Actividad III c

Fernando: la derivada segunda debe ser un poco grande en valor absoluto, porque la tangente ... porque el gráfico está casi pegado a la tangente....

Bonifacio: ¿Por qué?

Fernando: ...y eso indica... que la concavidad... Yo hice una actividad con la función cuadrática, ir viendo el coeficiente y ver que pasa con el gráfico, si el gráfico está más abierto o más cerrado (*hace con los brazos la forma de una parábola y los abre y cierra*).

Bonifacio: ¿Vos dijiste que para valores chicos se abre?

Fernando: Si, se abre mucho.

Bonifacio: Yo había pensado una conclusión similar a ésta. La derivada segunda de una función polinómica de segundo grado es el coeficiente del termino de mayor grado.

Fernando: El coeficiente principal claro.

Bonifacio: La derivada segunda de $8x^2$ te da 8, no 16.

Fernando: A claro, es el doble del coeficiente principal.

Bonifacio: Y de ½ x^2 te da 1. Más chica la concavidad, se abre más.

Fernando: Cuánto más cercano a 0 se abre más. Se parece más en el punto el gráfico a la tangente, en un entorno de 0 ¿no?. Por eso no puede ser –3, porque acá la tangente está casi pegada al gráfico..., cuanto más pegada está la tangente al gráfico, la concavidad es más pequeña... en valor absoluto.

....

Fernando: El valor de la derivada segunda que sea más grande o más chico no solo el signo se refiere a esto (abre y cierra manos en U).

Entrevistadora: ¿Qué opinan?

Bonifacio: Me quedé pensando: para esas parábolas, aunque parezca más curva la parte de abajo que las ramas, tiene la misma concavidad siempre, la derivada segunda tiene el mismo valor la derivada segunda de x^2 es 2.

Fernando: Ah, claro, te entiendo... es constante.

Bonifacio: Es igual en el codito de abajo que en las ramas. Echa un poco por tierra lo que dice él. Decía que si la curva está muy pegada a la tangente, el valor de la derivada segunda es muy chico, y esto demuestra que no es así.

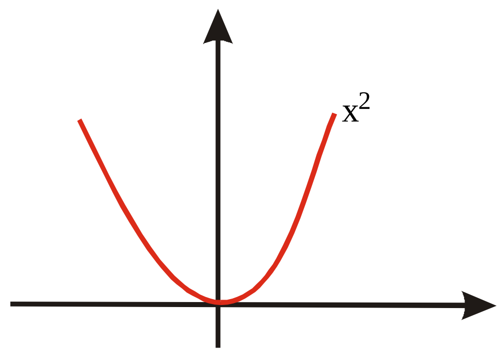
Fernando: Bueno, para una misma tangente, si es válido. Si te situás en una misma tangente sí se cumple lo de más abierto o más cerrado, es para una tangente, si la tangente varía ya no se cumple.

Ana: La función x^2 tiene siempre la misma derivada segunda, pero en un entorno del vértice se aleja más rápido de la tangente, y en el más infinito, se pega más...

Fernando: Si, si. Por eso. Son distintas tangentes. Yo estaba pensando en 0, una concavidad en un punto y para una misma tangente.

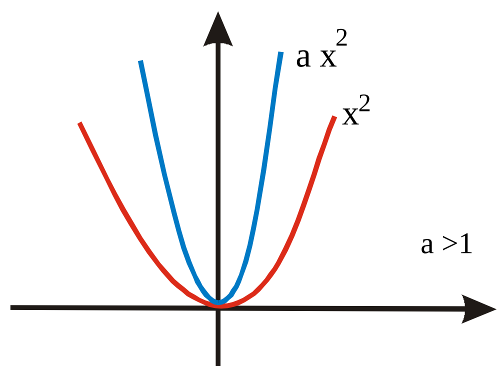
Dibuja en el pizarrón:

Imagen 5



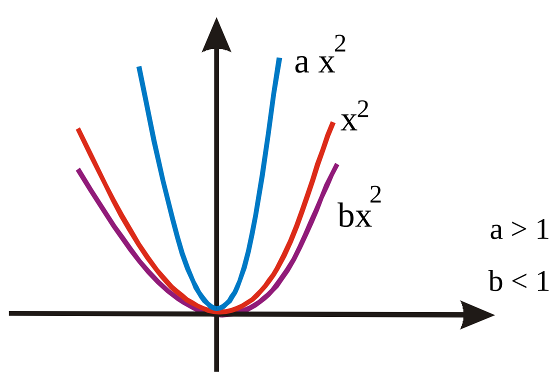
Fernando: Para valores mayores:

Imagen 6



Fernando: Yo siempre estaba hablando acá (x=0) una sola tangente, para mayores valores de "*a*", el gráfico de la parábola se aleja más de la tangente. Si considerás otra para valores de "*a*" menores que 1, el gráfico de la parábola se acerca más a la tangente.

Imagen 7

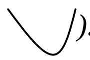


► Actividad IV a

Ana: Tiene una concavidad positiva, otra negativa y comparten la tangente.

Fernando: Yo hice claramente que una esté más separada de la tangente que la otra. Eso era la clave, siempre hablando en valor absoluto. Miré no solamente el signo sino el valor que nos está indicando algo sobre el gráfico. La de g sería la que en valor absoluto es mayor, la derivada segunda, por eso su gráfico está más separado de la tangente.

► Actividad IV e

Ana: Una está más... no sé cómo llamarle... más cerrada o más abierta... la que está más arriba está más (*hace con la mano:*  *)*, la otra (*hace con la mano:*  *).*

Fernando: Sí, sí, g está más alejada de la tangente. Están comparando siempre para una misma pendiente.

►Actividad IV f

Fernando: Acá yo hice algo... pero ahora tengo más herramientas. Yo hice la *g* más separada, pero ahora como tienen distinta pendiente no sabría qué decir.

Podemos observar que en una primera instancia este equipo establece una conjetura similar a la planteada por los otros dos equipos. Cabe destacar que en forma individual varios estudiantes plantean en términos generales una conjetura similar a la conjetura esperada, y luego de los tres equipos surge dicha conjetura. En este equipo se ha planteado en términos de: a mayor menor numérico de la función derivada segunda, en valor absoluto, el gráfico de la función se "pega" más a la tangente. Pero luego, en la discusión, observan que ella no es válida en todos los casos y que también entra en juego en esta relación la recta tangente, el coeficiente angular de ella, o sea el valor numérico de la función derivada primera. Reformulan su conjetura planteándola similar a: si $f\,'(a)=g\,'(a)$ *y* $\left|f''(a)\right|>\left|g''(a)\right|$ *el gráfico de la función g estará más "pegado" a su recta tangente en* $x=a$ *que el gráfico de la función g a la suya.*

Cabe destacar que en esta instancia el equipo ha enriquecido el significado gráfico dado al valor numérico de la función derivada segunda. Este es el único equipo que, aunque en principio haya establecido una conjetura que podemos describirla en términos de curvatura, en la discusión posterior se rompe la posible referencia a la curvatura dado que reconocen que la conjetura inicial no es válida si $f\,'(a)\neq g\,'(a)$.

De las evidencias presentadas podemos deducir que los estudiantes de este equipo han generado una regla con razones y un entendimiento relacional del tema en discusión. Las razones generadas surgen luego de argumentaciones, contraejemplos, discusiones y validaciones por parte del equipo.

En éste equipo es evidente que han logrado visualizar la situación planteada, que han podido convertir información del registro gráfico a otros y viceversa. La visualización de los distintos conceptos involucrados fue clave al momento de definir la conjetura final, dado que ella permitió establecer las primeras, presentar contraejemplos, etc.

En base a las evidencias planteadas a modo de resumen en respuesta a la pregunta que nos planteamos consideramos que los estudiantes entrevistados en una primer instancia frente a una actividad que implica significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda solo significan el signo de dicho valor. Esta significación gráfica está dada por la relación entre el signo del valor numérico de la función derivada segunda y la concavidad del gráfico de la función inicial en el punto en cuestión.

En etapas posteriores los estudiantes enriquecen este significado gráfico al pasar de significar solo al signo de $f''(a)$ *a significar al real* $f''(a)$ *en sí. En los tres equipos se ha presentado la misma conjetura, ésta relaciona al valor numérico de la función derivada segunda en x=a con la "proximidad" del gráfico de la función inicial a la recta tangente en x=a, la podríamos enunciar como: Si* $f''(a)>g''(a)>0$ *entonces el gráfico de g estará más "próximo" su recta tangente en x=a que el de f a la suya. Luego uno de los equipos observó que esta relación solo era verdadera en el caso que el valor numérico de las funciones derivadas primeras en el real dado fueran iguales. La conjetura anterior se transforma en otra que podemos enunciar: Si* $f''(a)>g''(a)>0$ *y* $f'(a)= g'(a)$*, entonces el gráfico de g estará más "próximo" su recta tangente en x=a que el de f a la suya.*

Se destacan algunas diferencias entre el equipo formado por estudiantes de secundaria y los formados por estudiantes de nivel terciario en cuanto al tipo de reglas usadas y el tipo de aprendizaje realizado. En el primer caso los estudiantes expresan distintas reglas sin razones en el sentido de Skemp (1976) y, como ya hemos presentado al *analizar su equipo, dan muestras de realizar un entendimiento instrumental del tema. En cambio en los otros equipos se presentan evidencias de aprendizajes relacionales del tema, y las reglas que aplican son en su mayoría reglas con razones, en el sentido de Skemp (1976).*

También consideramos diferencias en la visualización de la situación planteada en los distintos equipos. En los equipos 1 y 3, y algunos estudiantes del equipo 2 han dado muestras, las cuales hemos presentado en este capítulo, de visualizar el nuevo concepto, o los nuevos aspectos de un concepto que ya "conocían". Al realizar esta afirmación estamos considerando que las evidencias presentadas dan muestras de que los estudiantes han representado, transformado, generado, comunicado, documentado y reflejado información visual en su pensamiento y lenguaje; aspectos estos requeridos en la definición de visualización dada por Cantoral y Montiel (2003), en la cual nos basamos, que desarrollamos en el Capítulo III. En cambio de las entrevistas no podemos deducir que todos los integrantes del equipo 2 han logrado visualizar el concepto en juego.

- **¿Cuál es el papel que juegan las definiciones del concepto, y/o la imagen del concepto, cuando los alumnos se enfrentan a actividades que ponen en juego el significado gráfico del valor numérico de la función derivada segunda?**

Subgrupo A del equipo 1

- Actividad III a

Juan: Claro. La primera está mal.

Lucía: Falsa

Juan: Seguro que es falsa. La segunda...

Lucía: Falsa.

Juan: Claro, yo puse que puede ser y es por el mismo motivo falsa.

Lucía: Pero, ¿por qué pusiste que puede ser?

Juan: Y yo pen... en realidad me pareció que... estaba pensando que...concavidad positiva....entendés? Hacia abajo... (*Hace gesto con la mano formando una "U" invertida*)

Lucía: Ah!!

Juan: Estaba asociando carita carita...

Lucía: ¿A vos también te pasó lo mismo?

Santiago: No, yo acá puse que no.

Juan: ...carita triste con concavidad positiva. Pero no, está bien, estoy de acuerdo...

S: Claro, yo acá puse que no. Es un intervalo donde la función tiene concavidad positiva.

J: Ahí va...

Es notorio que la imagen del concepto evocada por Juan está relacionada a una asociación muy común enseñada por algunos docentes y aplicada por varios alumnos:

concavidad positiva $\leftrightarrow$ *carita feliz* 

concavidad negativa $\leftrightarrow$ *carita triste*  .

Cabe creer que en las respuestas dadas en una primera instancia surgen de la aplicación de una regla sin razones, donde no entra en juego la definición del concepto, porque si así fuera no hubiera habido confusión en la relación establecida entre el concepto y su representación gráfica. Cuando una compañera le hace ver su error el estudiante inmediatamente lo reconoce y, justamente por haber aplicado una regla sin sentido creemos que al confrontarla en forma mental con la definición es que puede desecharla tan rápidamente.

De la explicación dada por el estudiante del por qué de su primer respuesta se desprende que para contestar la pregunta ha consultado su imagen asociada al concepto "concavidad" y no la definición de dicho concepto. De aquí que, basándonos en la clasificación dada por Vinner (1991) que presentamos en el Capítulo III, consideramos que este tipo de proceso intelectual se encuentra dentro del caso 4: respuesta intuitiva.

Podemos observar que cuando su compañera confronta la respuesta dada por Juan este realiza otro tipo de proceso intelectual, el cual se puede considerar dentro del modelo 5 que hemos agregado a los cuatro modelos de pensamiento planteados por Vinner (1991), dado que el alumno se ve enfrentado a que la primer respuesta dada al consultar su imagen del concepto no es correcta, consulta entonces la definición, modifica la imagen del concepto y da una nueva respuesta a la situación planteada.

- Actividad V

Juan: Sí, pero de hecho si vos mirás en el punto... también considerás... no solo el punto.

Lucía: Todas las derivas son un límite, así que...

Juan: También la podés aproximar por una recta si querés.

Lucía: Sería en un entornito....

Santiago: La derivada segunda.

Lucía: Es el límite de $f'(x)$ menos $f'(a)$ sobre x menos a, no es en el punto.

Juan: Ahí va, vos estás hablando de un límite, es en un entorno.

Santiago: Recién me doy cuenta que nunca consideré la definición de límite para hacer la derivada.

Juan: Yo tampoco.

Dos alumnos del subgrupo hacen explícito que no han recurrido a la definición de límite para hacer la derivada. Suponemos entonces que lo que ha consultado para resolver las situaciones planteadas es su imagen asociada al concepto, la cual ha sido suficiente para resolver varias de las situaciones planteadas en cuanto a la función derivada primera. Dado que la imagen asociada al concepto en juego es suficiente para resolver las situaciones planteadas no se hace necesario, para los estudiantes en esta instancia, consultar la celda de la definición de este.

Subgrupo B del equipo 1

- Actividad III

Jimena: La primera puse: no puede ser porque en –3,8 ahí la concavidad en negativa

Maximiliano: Ahá!!!

Jimena: Si, ahí la concavidad es negativa

Maximiliano: Claro!!!! A claro, claro, yo me equivoqué, en vez de negativa puse positiva, pero quise poner eso. Claro!!!!

Jimena: Yo le puse que no.

Alejandro: Totalmente, yo le puse que puede ser, pero nada que ver.

En este subgrupo se presenta una situación muy similar a la dada en el subgrupo anterior, dos estudiantes asocian la representación gráfica de una función con concavidad negativa en x=a con $f''(a)>0$*. Suponemos que han respondido luego de haber consultado exclusivamente su imagen asociada al concepto "concavidad", luego cuando una compañera les hace presente su error modifican inmediatamente su imagen del concepto. A igual que planteamos en relación al subgrupo anterior, creemos que la definición del concepto "concavidad negativa" no fue consultada al dar las primeras respuestas, sino muy probablemente no hubieran sido erróneas, y si lo fueran los estudiantes hubieran tenido herramientas para defender su primer respuesta, en cambio podemos observar que no la defienden, sino que por el contrario, reconocen inmediatamente su error.*

De lo anterior es que nuevamente creemos poder diferenciar dos instancias distintas respecto al tipo de proceso intelectual puesto en juego basándonos en la clasificación dada por Vinner (1991). En primer lugar consideramos que se realiza un proceso intelectual se encuentra dentro del caso 4, respuesta intuitiva; y luego podemos considerarlo dentro del modelo 5 que hemos agregado.

Equipo 1

- Actividad I 2

Juan: En la segunda cuando es creciente

Jimena: Cuando crecía

Lucía: Cuando "shh" *(mueve el dedo de abajo hacia arriba)*

Alejandro: Donde la tangente es positiva

Podemos ver como Lucía verbaliza aspectos de su imagen asociada al concepto "función creciente". Es claro que al responder esta pregunta no utilizó la definición del *concepto sino que fue suficiente con consultar la imagen asociada a él, de ahí que no se viera en la necesidad de consultar la definición de este.*

Este es otro de los procesos intelectuales que creemos que forman parte del caso 3, respuesta intuitiva. Lo anterior indica que solo consultando la imagen del concepto el estudiante ha podido dar una respuesta que le pareció satisfactoria del problema, esto hace que no necesite recurrir a la definición del concepto en juego.

- Actividad I 3

Juan: Acá hubo un problema de interpretación: había que marcar donde f'' fuera positiva, ellos lo hicieron bien, y yo hice al revés, marqué donde era negativa

Entrevistadora: ¿Y que zona había que marcar?

Juan: Cuando era... *(con el dedo hace como una parábola de concavidad positiva)*

Como ya habíamos planteado antes, en relación al cambio de respuesta dado por Juan, el estudiante ha modificado, al interactuar con sus compañeros, la imagen asociada al concepto "concavidad positiva", en la cual se encuentran aspectos sobre la "forma" de los gráficos que cumplen esa condición.

- Actividad IV b

Juan: La segunda. Cuanto más es la derivada segunda más apretada te queda la función *(pone los dedos pulgar e índice haciendo una U y los va cerrando)*, los tres pensamos lo mismo. Después como que siempre a mayor derivada segunda hacíamos como dibujos más apretados *(pone los dedos pulgar e índice haciendo una U y los va cerrando)* que las otras.

......

Entrevistadora: ¿Y eso quiere decir más chato o menos chato?

Juan: Eso quiere decir más chato. Y más apretada es la otra (h*ace una U muy cerrada con los dedos).*

Alejandro: Más vertical.

Juan: Sí, más vertical.

Alejandro: Cuando tiene mayor derivada segunda.

Entrevistadora: ¿Y ustedes qué opinan de esto? *Refiriéndose al otro grupo de 3.*

Maximiliano: Yo acá no me había dado cuenta, pero en el 5, no me acuerdo por qué, también se me ocurrió eso...de que fuera... *(pone los dedos pulgar e índice haciendo una U y los va cerrando)*

Los estudiantes dan evidencias de haber generado una nueva imagen asociada al concepto valor numérico de la función derivada segunda, la cual contiene aspectos de significación gráfica. Es interesante destacar que los alumnos, primero en forma independiente, y luego en equipo han generado imágenes asociadas a este concepto que al verbalizarlas parecen muy similares.

►Actividad IV e

Juan: *f* es más chata, paralela pero más chata.

Jimena: Voy entendiendo tu chatura.

Risas

Entrevistadora: ¿Comparten todos?

A coro: Sí.

Jimena: Voy entendiendo tu criterio de chatura.

Podemos destacar que Jimena expresa que va comprendiendo el nuevo concepto, "chatura", cuando va enriqueciendo la imagen asociada al concepto, dado que con anterioridad Juan ha dado una seudo definición del concepto pero recién, al presentar más ejemplos, es que Jimena indica "Voy entendiendo tu criterio de chatura". Podríamos deducir que para que los estudiantes sientan que han "entendido" un concepto es necesario tener una rica imagen de él más que solo conocer su definición.

► Actividad V b

Maximiliano: Ahora se me ocurrió acá, ahora me pareció más claro en el caso *b*, el tema de la chatura. La derivada segunda, viene a ser la derivada primera de la derivada primera, a mí se me ocurrió ver como que los empinamientos, a ver si me explico: los empinamientos de las rectas tangentes en los puntos son mucho... las que tienen la forma más chata son más empinadas que las otras.

Por primera vez se hace explícita una seudo definición de función derivada segunda, y junto a ella la puesta en palabras de imágenes asociadas al concepto derivada primera, *esta combinación parece haber ayudado al estudiante a significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda. Creemos que el proceso intelectual que ha realizado el estudiante en esta instancia lo podemos ubicar en el caso 3 del esquema de Vinner (1991): Interacción entre definición e imagen.*

▶ Actividad V

Jimena: Yo razoné la derivada es la pendiente de la tangente en a. La derivada primera de una función es hacer $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Maximiliano: El límite.

Juan: El límite de eso.

En este diálogo Jimena hace explícita la utilización de una seudo definición de derivada primera en x=a, además muestra relaciones entre este concepto y otros que pueden estar presentes en la imagen asociada a dicho concepto.

Era de esperar que la celda de la imagen asociada a conceptos que los estudiantes ya habían trabajado no estuviera vacía, muestras de ello hemos dado en las anteriores transcripciones, pero no así la asociada al concepto que implica la representación gráfica del valor numérico de la función derivada segunda. Entonces, dado que los estudiantes no han dado indicios de utilizar muchas de las definiciones involucradas, y han hecho explícita la no utilización de otras, es que consideramos que la imagen conceptual asociada a lo conceptos ya conocidos, que se ha puesto en juego ha sido suficiente, en la mayoría de los casos, para resolver las situaciones que les hemos planteado. En cambio, frente a la asignación de significado gráfico al valor numérico de la función derivada segunda, su imagen del concepto "concavidad" no era suficiente para resolver la problemática, muestras de ello hemos presentado en el análisis de la primer pregunta de investigación. Esto último ha llevado a que los estudiantes modificaran su imagen asociada a este concepto generando un nuevo concepto del cual, en algunos casos, han intentado dar una definición.

Creemos que en los casos que los alumnos han dado muestras de dar respuestas consultando solo la imagen asociada al concepto "concavidad" y luego, frente a *confrontaciones de compañeros, cambian inmediatamente la respuesta, representan situaciones donde se ha realizado un aprendizaje relacional del concepto, que luego, tal vez con el paso del tiempo y su utilización mecánica, se convirtió en un conocimiento instrumental, pero, frente a una pequeña reflexión del tema se hace presente el primer tipo de aprendizaje dado que es más duradero e internabilizable por las relaciones que establece con otros conceptos.*

Subgrupo A del equipo 2

- Actividad IV

Lucía: Ta, yo qué sé... lo mismo... de las concavidades y el crecimiento ... capas que está todo mal.. no sé, en 3 las funciones decrecen ¿no? y en 3 tienen concavidad *f* negativa y *g* positiva, ¿no? ¿Les parece? ¿Ese es el dato que da? Y con las otras lo mismo. Observo las imágenes, si decrece o crece y las concavidades, si es positiva o negativa.

*Podemos observar que al leer "f ´(*3*)=g ´(*3*)=-2" la estudiante no consulta las definiciones de los conceptos involucrados: función, imagen, derivada primera, etc, sino la imagen asociada a dichos conceptos, y esta imagen contiene funciones decrecientes. Lo mismo ocurre con "f ´´(*3*)=-4 y g ´´(*3*)=8", consulta la imagen asociada a los conceptos en juego la que contiene elementos referidos al gráfico de funciones con concavidad negativa, y con concavidad positiva. Nuevamente la imagen asociada a los conceptos en juego le permiten resolver la situación sin necesidad de consultar la definición. Nuevamente estamos frente a un proceso intelectual que se puede considerar dentro del caso 4 de los propuestos por Vinner (1991): respuesta intuitiva.*

- Actividad V g

Gastón: ¿Y en la segunda (*derivada segunda*) qué pusiste?

Luciana: *f* menor que *g*.

Gastón: ¿Por? Si tienen concavidad positiva.

Patricia: Pero esto como que tiene intermedia, estoy media confundida, hay negativa, hay positiva y no se si hay otra...

Luciana: No, no puede haber.

Patricia: Estoy media confundida.

Es interesante destacar en estas intervenciones de Patricia la aplicación de reglas sin razones, hasta ahora la imagen conceptual asociada a "concavidad positiva" "concavidad negativa" había sido suficiente para resolver los problemas planteados, al enfrentarse a esta nueva situación parece modificarse esta imagen conceptual incorporando imágenes de "concavidades intermedias" basándose en reglas sin ninguna razón aparente.

Subgrupo B equipo 2

- Actividad V e

Ignacio: Yo puse que es mayor la de *f* porque era más abierta.

Sebastián: Yo puse por lo mismo, porque era más grande.

A partir del diálogo anterior podemos deducir que los alumnos no han significado gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda basándose en definiciones de los conceptos involucrados sino que han generado una imagen asociada a conceptos como $f\,''(a)>g\,''(a)>0$*, la cual les está permitiendo resolver las situaciones planteadas. En la trascripción de varios momentos de la puesta en escena estos estudiantes han manifestado que a pesar que haber encontrado un método, o regla, para resolver las situaciones planteadas dudan de la validez de algunos de sus puntos, por lo cual, como ya hemos destacado, creemos que en esos casos han aplicado una regla sin razón.*

- Actividad V f

Ignacio: *f* prima de *a* mayor que *g* prima de *a*.

Sebastián: Yo puse menor.

Leticia: Menor...

Ignacio: ¿Por qué? La derivada de *f* es mayor, porque está más inclinada.

Sebastián: ¿La derivada primera? No, para mí no, está más así....

Ignacio: Mirá. A mi me explicó la profesora que cuando tenés un coeficiente angular 5 tenés que contar un punto a la derecha y cinco para arriba...

Sebastián: A mí eso no me enseñaron...

Ignacio: Fijate que acá está más inclinada.

Sebastián: Claro...

De este diálogo podemos deducir que para resolver el problema planteado los estudiantes no han hecho uso de la definición del concepto "derivada" ni de los otros conceptos involucrados. Es claro que uno de ellos se basó en una regla que solo parece apoyarse en la autoridad del docente, es tal vez por esto que es tan rápidamente aceptada por el otro estudiante.

Equipo 2

- Actividad I 4

Ignacio: ¿Alguien contestó la 4?

A coro: No!!!!!!!!!

Entrevistadora: ¿Por qué nadie contestó la 4?

Ignacio: Porque no sabemos qué significa.

Leticia: Qué es la derivada tercera.

Entrevistadora: ¿Y qué les parece que es la derivada tercera?

Ignacio: La derivada de la derivada de la derivada

Patricia: La derivada de la derivada segunda, pero, qué da, no sabemos.

Entrevistadora: ¿Qué quiere decir "qué da"?

Sebastián: Claro, la primera da el crecimiento, la segunda la concavidad....

Ignacio: Una da el crecimiento, la otra la concavidad y la otra no sabemos. Algo dará, algo que se aprende en facultad, yo qué se.

Risas.

Es muy interesante observar como los estudiantes no consideran "saber qué significa" un concepto aunque conozcan la definición de él, o algunos aspectos de ella, sino que consideran que necesitan más elementos para "saber qué significa" el concepto. "Crecimiento", "concavidad" pueden ser verbalizaciones de aspectos presentes en las *imágenes asociadas a los conceptos “derivada primera” y “derivada segunda”. En este caso parece que los estudiantes dan signos de necesitar más la imagen del concepto que su definición al momento de enfrentarse a las situaciones planteadas.*

Debemos recordar que en el equipo 1 se dio una situación similar a la aquí presentada, lo cual hace que nuestra primer deducción cobre más fuerza: para que los estudiantes sientan que han “entendido” un concepto es necesario tener una rica imagen de él más que solo conocer su definición

- Actividad II c

Ignacio: Porque si dice $f'(4)=-2$ te está dando el coeficiente angular, de la tangente

Luciana: Sí, pero también te da que decrece, yo puse que decrecía...

Ignacio: También.

Entrevistadora: Dijeron “también”, entonces ¿qué les parece?

Sebastián: Cuando hacés la tangente mostrás que decrece. *(Hace señas con la mano tratando de simular rectas con coeficiente angular positivo y otras con coeficiente angular negativo).*

....

Entrevistadora:¿Les parece necesario trazar la tangente o no? Porque la compañera dijo que si era decreciente ya se cumpliría que la derivada en 4 fuera -2. Y ustedes indicaban que era mejor trazar la tangente. ¿Es necesario trazar la tangente?

Luciana: No, si decrece ... para mí lo que te dicen es que decrece.

Ignacio: Lo que pasa es que si hacés la tangente estás aprovechando todos los datos que te dan. Creo.

De este diálogo se pueden deducir diferencias en las imágenes evocadas por los estudiantes asociadas al concepto valor numérico de la función derivada primera. Creemos que la imagen del concepto evocada por Ignacio es más rica que la evocada por Lucía, dado que contiene más elementos. Lucia parece no conocer, o no tener presente en ese momento, las relaciones entre este concepto y el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico, es tal vez por esta razón que no están presentes estos aspectos en la imagen asociada al concepto evocado.

- Actividad II d

Ignacio: Marqué un punto cualquiera en 1 y después hice una gráfica que en 1 fuera con concavidad positiva pero no la hice pasar por el 1, que no sé si está bien, capaz que tiene que pasar por el 1.

Entrevistadora: ¿Los demás qué opinan?

Luciana: Yo hice lo mismo, que en 1 fuera concavidad positiva.

Ignacio: Sí, pero ninguna imagen en especial, acá no decía.

Entrevistadora: ¿Los demás que opinan, los que no la habían trabajado en ésta actividad?

Leticia: No estoy segura.

Sebastián: Lo que sabría hacer es poner concavidad negativa o positiva, nada más.

Entrevistadora: Eso es lo que sabrías ¿qué es lo que no sabrías?

Sebastián: La concavidad más abierta, más cerrada

Entrevistadora: ¿Qué opinan los demás?¿Saben ustedes si es más abierta o más cerrada?

Silencio

De este diálogo podemos suponer algunos aspectos presentes en la imagen asociada al concepto valor numérico de la función derivada segunda evocada por los estudiantes. Ignacio y Sebastián evocan aspectos gráficos de funciones que presentan concavidad positiva. Sebastián parece considerar que su imagen del concepto es "incompleta" al indicar "lo que sabía hacer" y luego "lo que no sabía hacer". De aquí que consideramos que su imagen del concepto se está enriqueciendo. No hay indicios de que consulten la definición de los conceptos en juego.

- Actividad IV b

Sebastián: Algo hice, para diferenciar la derivada segunda, que una era mayor que la otra y más abierta la concavidad *(hace con los dedos índice y pulgar la forma de una parábola y los abre y cierra intentando mostrar "cambio de concavidad")*

Esta es otra evidencia que apoya nuestro anterior análisis, este estudiante está generando una imagen asociada al concepto valor numérico de la función derivada segunda que le permite significar situaciones donde $f''(a)>g''(a)>0$. Nuevamente no encontramos indicios que haya consultado la definición de los concepto involucrados, *parece que solamente consultado la imagen de ellos ha podido resolver la situación y no se ha visto en la necesidad de recurrir a las definiciones.*

- Actividad V e

Entrevistadora: O sea que están manteniendo que a mayor derivada segunda...

Leticia: Es más abierta *(hace con los dedos índice y pulgar la forma de una parábola y los abre y cierra intentando mostrar "cambio de concavidad")*

- Actividad V f

Entrevistadora: ¿Qué relación están planteando entre el gráfico y la derivada segunda?

Ignacio: *(con las dos manos forma una U y cierra y abre las manos*) Que la concavidad es más abierta o más cerrada.

En ambos diálogos frente a la pregunta de la entrevistadora que intenta que hagan explícita la relación que han determinado los estudiantes se apoyan en gestos que pueden ayudar a enriquecer la imagen asociada al concepto en juego.

De las respuestas, diálogos, que se han dado en este equipo no hemos encontrado indicios de que hayan recurrido a la definición de alguno de los conceptos en juego. En cambio sí hemos dado evidencias de respuestas que se apoyan en la imagen que han evocado del concepto. Es por esto que creemos que la mayoría de los procesos intelectuales que han realizado los estudiantes pueden ser estandarizados en el caso 4 de Vinner (1991): respuesta intuitiva.

A diferencia del equipo anterior, que consultando la imagen del concepto en juego daban una respuesta a la situación planteada, en este quipo no se evidencian casos donde al consultar la imagen del concepto surjan contradicciones, o sea insuficiente para presentar una solución y que, frente a ello, los alumnos hallan consultado la definición del concepto. O sea, en los casos que se presenta un proceso intelectual que hemos llamado " respuesta intuitiva" los estudiantes no consultan la definición del concepto porque ha sido suficiente con consultar la imagen de éste, pero también hemos presentado evidencias que en los casos en que consultar la imagen del concepto *no permite dar una respuesta los estudiantes no han recurrido a la definición del concepto.*

Lo anterior puede ser una evidencia de lo analizado en el Capítulo III: estos estudiantes aun no han sido entrenados para razonar en el modo técnico. Recordemos que este equipo está formado por alumnos que acaban de terminar sus estudios de secundaria y aun no han tenido estudios terciarios.

También creemos que la "regla" que han generado los estudiantes, para responder a las preguntas que implican significar gráficamente el valor numérico de la función derivada segunda, es una regla sin razones relacionales, sino que se basa en la intuición. Muestras de esto hemos presentado en las transcripciones anteriores. Es interesante observar que este equipo acepta reglas sin razones, aprendizajes instrumentales, que solo se basan en intuiciones o argumentos de poder.

Equipo 3

- Actividad III a

Ana: La derivada segunda en –3.8 es igual a 1... ¡que boba! Puse mal, estoy chicata.
Bonifacio: Es falsa.
Ana: Sí, es falsa.
Entrevistadora: ¿Por qué?
Ana: Porque en ese punto tiene concavidad negativa.

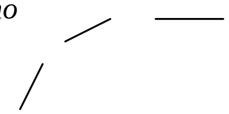
Al justificar su respuesta Ana presenta indicios de haber consultado la imagen asociada a los conceptos que intervienen en el planteo y no la definición de ellos. Como hemos presentado en el Capítulo IV la definición de concavidad está dada en términos de distancia entre puntos del gráfico y de cierta recta, en unos casos tangente y en otros secante, no aparece en ella la función derivada segunda. En la definición de función, de función derivada segunda, de imagen, no está presente el concepto de concavidad. Basándonos en estos dos aspectos es que deducimos que Ana no ha consultado las definiciones involucradas, dado que ellas no vinculan estos dos aspectos. En cambio creemos que ha consultado la imagen del concepto $f''(a)<0$ *la cual contiene aspectos* *del gráfico de funciones que cumplen esa condición: las que presentan concavidad negativa.*

▶ Actividad III d

Fernando: Yo estoy pensando... Acá yo puse verdadero porque $f\,'$ es decreciente en $(-\infty,-3)$ entonces $f\,''$ en –5 es menor que en –3.8.

Entrevistadora: ¿Cómo te das cuenta que $f\,'$ es decreciente?

Fernando: Porque el gráfico viene de $-\infty$ con concavidad negativa y cada vez hay menos... se va aproximando a cero, $f\,'$ decrece porque la tangente cada vez se va haciendo más horizontal, entonces la derivada segunda...

(hace con la mano )

Ana: Yo estoy de acuerdo con vos en que $f\,'$ decrece por lo que la derivada segunda es negativa, pero lo que no me queda tan obvio es que si $f\,'$ es decreciente podés comparar a $f\,''$, ¿en qué te basas?

Fernando: $f\,'$ decreciente...

Silencio.

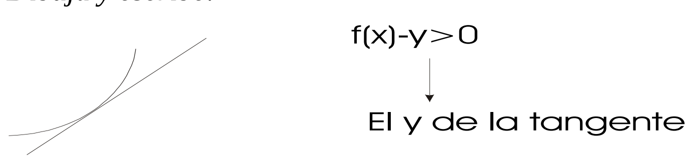
Bonifacio: ¿No hay una definición de la derivada segunda con respecto a distancia a la tangente?

Concavidad positiva cuando estaba por arriba de la tangente y la diferencia de distancia en $f(x)$ y la tangente era positiva, y es negativa (*la concavidad*) cuando la diferencia es negativa.

La concavidad negativa se podría calcular como la sumatoria de todas esas distancias, no sé, no sé en qué intervalo...

La derivada segunda es positiva porque en un punto está por arriba...

Dibuja y escribe:



Fernando verbaliza algunos aspectos que contiene su imagen del concepto función derivada primera decreciente que ha evocado. Para determinar que el concepto *“función derivada primera es decreciente” no parece haber consultado las definiciones correspondiente, ha sido suficiente consultar su imagen del concepto. Nuevamente estamos frente a un proceso intelectual que se puede considerar dentro del caso 4 delos propuestos por Vinner (1991): respuesta intuitiva.*

Observemos que un estudiante considera necesario recurrir a la definición del concepto frente a la evidencia de que no han encontrado una solución a la situación planteada. Creemos que un posible proceso intelectual que ha realizado este estudiante es el que Vinner (1991) considera como interacción entre definición e imagen, caso 3.

La evidencias que hemos presentado confirman los aspectos que desarrollamos en el Capítulo III sobre los modos de pensamiento que se presentarían. De los casos estudiados, del análisis de las transcripciones, se puede deducir que los hábitos de pensamiento de la vida cotidiana prevalecieron sobre los hábitos de pensamiento impuestos por los contextos técnicos.

La mayoría de los procesos intelectuales analizados se pueden ubicar dentro del caso 4, respuesta intuitiva, de los esquematizados por Vinner (1991); los estudiantes consultan solo la imagen del concepto al intentar dar solución a la situación planteada, como esta imagen es suficiente para generar una respuesta no se sienten en la necesidad de consultar la definición del concepto. En cambio no hemos encontrado evidencias sobre los tipos de procesos intelectuales que esperan la mayoría de los docentes que ocurran: el caso 1, deducción puramente formal, y el caso 2, deducción siguiendo el pensamiento intuitivo; sí hemos evidenciado una situación que consideramos que se encuentra dentro del caso 3, interacción entre definición e imagen, todos ellos dentro de la clasificación de Vinner (1991).

- **¿Cómo influye el Pensamiento y Lenguaje Variacional de los alumnos al enfrentarse a actividades que ponen en juego el valor numérico de la función derivada segunda?**

Subgrupo A del equipo 1

Actividad II d

Juan: Yo lo que pensé, pero más adelante, es que mientras más grande sea el valor numérico de la derivada segunda es como más...

Lucía: Más apretada.

Juan:... más apretada. Yo pensaba en las parábolas, si tengo x^2 y tengo $3x^2$,la $3x^2$ es más apretada.

Lucía: Yo también.

Santiago: Claro, se aprieta más contra el eje.

Juan: Claro.

Santiago: Yo pensé lo mismo. Se me ocurrió tomar un ejemplo, $2x^2$, hice la derivada primera, la derivada segunda, me queda cuatro, claro para todos los puntos. En definitiva es una que cumple eso, en definitiva sí.

El estudio de cómo varía la familia de parábolas cuya expresión es de la forma $f(x)=ax^2$ *permitió a estos estudiantes observar similitudes y diferencias en el comportamiento de sus gráficos y a partir de allí generar conjeturas sobre el significado gráfico del valor numérico de la función derivada segunda.*

Reconocer a una de las parábolas como parte de una familia con ciertas similitudes y diferencias, y no como un gráfico aislado, evidencia un pensamiento variacional dado que permite establecer relaciones entre las variaciones de las expresiones analíticas de las funciones, de sus gráficos y el valor numérico de la función derivada segunda. Este diálogo evidencia que por lo menos dos estudiantes han puesto en juego ese tipo de pensamiento.

Actividad IV c

Lucía: en el c sí lo pude hacer...

Juan: En el c me quedó *f* por adentro.

Lucía: *f* por adentro.

Santiago: A mí no...me quedó *g*...

Juan: No. f por adentro te quedó.

Santiago: ¿A esto le llaman "por adentro"?

Lucía: Risas.

Juan: Metida adentro, g entre medio.

Santiago: A tá.

Lucía: Todos hicimos el mismo razonamiento entonces.

Juan: Por las parábolas.

Lucía: El mete las parábolas por ahí, tan tan...

Juan: Ahí va, yo en realidad las pensé y dije tá, si las cumplen estas.

Santiago: Ahora, si esto estuviera bien sería bárbaro (*maravilloso*). Si llega a estar mal...

Juan: Claro...

Santiago: Porque todos tuvimos profesores distintos, por lo menos en quinto, en sexto (se refiere a años de preparatorio)...

Juan: ... y nos quedaron las mismas ideas...

Nuevamente el estudio de la variación de las parábolas les permite establecer una relación "por dentro" que será base de sus conjeturas. Si los estudiantes hubieran asumido cada parábola como un gráfico independiente, con características propias, y no como un gráfico perteneciente a una familia en la cual las variaciones determinan las similitudes y diferencias de los elementos de dicha familia, tal vez no hubieran podido generar herramientas para significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda.

► Actividad IV d

Juan: Y la otra son como iguales, iguales de abiertas, en la *d*, son abiertas iguales porque *f´´* también es igual. Yo qué se...

Santiago: Yo la veo como trasladada hacia arriba.

Lucía: ¿Sí.? Sí, como en un entornito son iguales.

Santiago: La misma cosa.

Juan: ¿No? Y f más arriba.

En este diálogo se evidencian otras consecuencias de su pensamiento variacional, han establecido similitudes entre las parábolas que se corresponden en una traslación, similitudes éstas básicas para significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda. El pensamiento variacional les permite reconocer estas dos parábolas como parte de una misma familia y no como gráficos independientes; y a su vez, trabajar con elementos de una misma familia determinado los elementos fijos y los variables permite a los estudiantes desarrollar su pensamiento y lenguaje variacional.

Los estudiantes están planteando una relación, que llaman "igual", entre los gráficos que está determinada en un entorno de un punto. Logran determinar la igualdad entre las variaciones de las funciones f y g, y determinar la igualdad entre las variaciones de sus funciones derivadas primeras. Reconocer estas constantes les está permitiendo significar gráficamente aspectos gráficos de las funciones derivadas haciendo una ruptura entre la asociación derivada-fórmula. Por lo tanto el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional está permitiendo en estas actividades enriquecer los significados de conceptos que ya conocían y significar nuevos.

▶Actividad IV e

Juan: Claro, como que la *g* es más apretada. En la parte *e* la función *g* es más apretada porque tiene mayor derivada segunda.

Santiago: ¿Más vertical, digamos...?

Juan: Ahí está...

Lucía: "Teorema" (risas)

Juan: Ahí está. A mayor derivada segunda más apretada, tipo definición... (*risas*). Y tá, nos quedó igual.

Los estudiantes están estableciendo una relación entre la variación de la función derivada segunda y la variación del gráfico de la función inicial. De esto resaltaremos dos aspectos, por un lado el desarrollo de su pensamiento y lenguaje variacional al establecer relaciones entre aspectos que varían, y por otro el enriquecimiento del concepto "derivada segunda". Respecto a este último aspecto la derivada segunda deja de ser algo estático a lo cual solo se le calcula el signo para convertirse en algo variable en donde esa variación está generando nuevos conceptos que permite enriquecer su significado.

► Actividad IV f

Juan: La *f*... me quedó más chata, más abierta...

Santiago: Yo tomé como que se cortaban ahí...

Juan: Sí, se cortan, pero de lo chato la *f* es más chata. No?

Lucía: Sí, la *f* es más chata.

Santiago: Sí, para los mayores que 1 me quedó que la *f* es mayor que la *g*.

Juan: Claro, no por adentro... en cuanto a la abertura de la cosa como que la *f* está más chata.

Santiago: Sí, mi idea es igual a esa... Pero en realidad yo conocía que la derivada es igual a 4 y es igual a 8 (*se refiere a la derivada segunda*), pero si me hubieran dicho igual a 12 y es igual a 4 yo hubiera puesto lo mismo.

Juan: Sí yo también.

Lucía: Ah, claro.

Juan: Hubiera hecho el mismo dibujo. Es la relación.

Santiago: Si vos pensás en la derivada primera igual a dos más o menos sabés cómo es la forma, la tangente...

Juan: Claro

Santiago:...pero que te digan la derivada segunda igual a cuatro... no sé...

Juan: De última vos podés conocer que es más apretada a mayor derivada segunda.

Lucía: Ah! Tenemos que verlo...

Éste diálogo apoya nuestras anteriores observaciones, los estudiantes han establecido una relación entre la variación de la función derivada segunda y el gráfico de las funciones iniciales. Esta relación enriquece la imagen del concepto y las relaciones entre éste y otros conceptos. También podemos destacar que van ampliando el conjunto al cual aplican esta relación: cuando son "iguales", cuando una está "dentro" de la otra, y cuando es más "apretada".

► Actividad IV g

Santiago: Y la g...

Juan: Son iguales pero corridas. Iguales de abiertas pero corriditas, ¿no?

Santiago: A mí me quedó bastante parecido a la anterior...

Juan: A mí me quedó igual pero con la única diferencia de que antes *g* era más apretada y ahora son iguales.

Santiago: Ahí está, sí.

En éste diálogo encontramos más evidencias de distintos aspectos que ya antes analizamos sobre la relación que han establecido entre el valor numérico de la función derivada segunda y la familia de parábolas que se corresponden en una translación

Subgrupo B del equipo 1

Actividad II d

Alejandro: A mi me costó esto

Jimena: A mi me costó pila pensar esto

Maximiliano: A mi también. El tema es esto, yo lo pensé así: si $f''(1) = 4$ quiere decir que la derivada segunda...o sea, que ese punto no está tan cerca de un punto de inflexión como podría estar otro. Yo lo pensé así.

Jimena: Claro, yo lo pensé así también.

Maximiliano: Entonces me fijé mucho en como lo dibujaba. Lo que hacía era poner un punto de inflexión...

Alejandro: ...cerca o lejos

Maximiliano: Claro, ahí dependiendo de cuan grande es el número

Alejandro: Claro, claro.

Maximiliano: ... cuanto más cerca de 0 esté, más cerca del punto de inflexión tiene que estar el punto

Jimena: Si, yo lo pensé así como él.

Aquí evidenciamos otro tipo de razonamiento que también implica un pensamiento y lenguaje variacional; el estudiante está reconociendo la función a partir de una relación entre una variable dependiente y una independiente. Además está estableciendo una relación entre otras dos variables: el valor numérico de la función derivada segunda y una "distancia" entre un P.I. y el punto en juego. El pensamiento y lenguaje variacional que los estudiantes ponen en juego facilita que ellos puedan formular la conjetura, dado que implica reconocer en la función f su aspecto dual (objeto-proceso) que desarrollamos en el Capítulo III, como objeto al reconocer la forma global de su gráfico, y como proceso al establecer una correspondencia entre la *preimagen a del valor numérico de la función derivada y el punto (a, f(a)) para luego establecer una relación entre el valor numérico de la función derivada segunda y la distancia entre dicho punto y el P.I.*

Equipo 1

Actividad II e

Alejandro: Nosotros insistimos en que no puede ser porque –3 estaba cerca del punto de inflexión.

Maximiliano: Yo dudo de eso, porque es un poco lo que decía Santiago, si el gráfico este es el de un polinomio de cuarto grado, al derivarlo dos veces sería de segundo grado y tendría dos puntos de inflexión, dos raíces, como *f*(5) está, a mi gusto, muy cerca del punto de inflexión me parece que tendría que ser... estoy de acuerdo que es negativa pero no que es –3, sinó más cercano a cero. Por estar muy cerca del punto de inflexión... pero es todo muy a ojo, ¿no?

Entrevistadora: ¿Qué les parece esto que dice el compañero?

Juan: A mi me parece que no, porque muchas veces tenés un punto de inflexión con tangente vertical, tenés una pendiente grandísima y estás al lado del punto de inflexión igual.

Jimena: No entendí... pero no es la pendiente...

Alejandro: ¿O sea que cerca del punto de inflexión no tiene por qué ser chiquita?

Juan: Podés estar cerca de un punto de inflexión con una pendiente gigantesca.

Lucía: Pero no es eso, esta es la derivada segunda evaluada en 5.

Entrevistadora: ¿Podrías explicarles de nuevo a tus compañeros tu razonamiento? *(Refiriéndose a Maximiliano)*

Maximiliano: Yo lo que me consideres es que ta... para mí es un polinomio de cuarto grado, tiene 4 raíces, al derivar dos veces es uno de segundo grado y según mi suposición tendría dos raíces, se corta dos veces, que los puntos de inflexión uno estaría muy cerca del 5 digamos, un punto muy cerca del 5, para mí la concavidad, estoy de acuerdo que es negativa, pero me parece que... también es un cálculo muy agudo... pero me parece que debe ser un número más cercano a cero. Eso fue lo que yo interpreté, lo que se me ocurrió hacer.

Juan: La derivada segunda te da el crecimiento de las pendientes, entonces... no sé... me da la sensación de que no tendría por qué medir poco.

Maximiliano: Sí... mi representación es muy a ojo, no sé.

Podemos observar que dos estudiantes consideran distintos aspectos de la variación de la función derivada segunda en el entorno de un real. Maximiliano está considerando que si $f\,''(a)=0$ *y* $|x-a|$ *es "suficientemente pequeño", entonces* $|f''(x) - f''(a)|$ *también es "pequeño", o sea* $f\,''(x)$ *estaría "próximo" a cero. En cambio Juan está haciendo jugar distintas posibilidades de variaciones de la función derivada segunda. Él considera que aunque* $f\,''(a)=0$ *y* $|x-a|$ *sea "suficientemente pequeño",* $|f''(x) - f''(a)|$ *no tiene por qué ser "pequeño", o sea* $f\,''(x)$ *no tiene por qué estar "próximo" a cero. Además Juan está estableciendo una relación entre la función derivada segunda y la función derivada primera: una representa la variación de la otra.*

Maximiliano está estableciendo una relación que se cumple en forma ideal en una función polinómica de primer grado de coeficiente principal uno: $|x-a| = |f(x) - f(a)|$, *en cambio Juan reconoce distintas posibilidades para la variación de la función en un entorno de* $(a,f(a))$. *El pensamiento variacional que está desarrollando Juan le permite cuestionar la conjetura de Maximiliano y tal vez, en etapas sucesivas, validar su conjetura.*

► Actividad IV b

Juan: Sí, los tres por separado y cuando nos juntamos habíamos pensado lo mismo. La teoría de "La Chatura", la teoría de la chatura... *(se arregla en el banco como aprontándose a presentar la teoría*). Porque nosotros pensamos.... además los tres pensamos el mismo ejemplo: una parábola. Mientras mayor es el coeficiente mayor es la derivada...

Entrevistadora: ¿Qué derivada?

Juan: La segunda. Cuanto más es la derivada segunda más apretada te queda *(pone los dedos pulgar e índice haciendo una U y los va cerrando)* la función, los tres pensamos lo mismo. Después como que siempre a mayor derivada segunda hacíamos como dibujos más apretados *(pone los dedos pulgar e índice haciendo una U y los va cerrando)* que las otras.

...

Juan: Cuanto más “horizontal” (hace signos de comillas con las manos) quiere decir que tiene menor derivada segunda.

Entrevistadora: ¿Y eso quiere decir más chato o menos chato?

Juan: Eso quiere decir más chato. Y más apretada es la otra. *Hace una U muy cerrada con los dedos.*

Alejandro: Más vertical.

Juan: Sí, más vertical.

Alejandro: Cuando tiene mayor derivada segunda.

Entrevistadora: ¿Y ustedes qué opinan de esto? *Refiriéndose al otro grupo de 3.*

Maximiliano: Yo acá no me había dado cuenta, pero en el 5, no me acuerdo por qué, también se me ocurrió eso...de que fuera... *(pone los dedos pulgar e índice haciendo una U y los va cerrando)*

...

Maximiliano: Siempre a mi me daba mayor, a ustedes menor, o al revés, pero la idea era la misma.

Entrevistadora: ¿Qué fue lo que pensaron ustedes?

Alejandro: Pensamos lo mismo, en la parábola, pero a menor abertura era menor la derivada segunda.

...

Jimena: Pará... para nosotros que tenga menor abertura es que es más chata *(hace una U cerrada con los dedos).*

Entrevistadora: Haceme la forma de una con mayor abertura.

Jimena: Es más “chato” (*Hace con los dedos pulgar e índice una forma similar a* )

...

Juan: La parábola con mayor abertura es la x^2, todas las demás van a quedar adentro de esa. *Coloca las dos manos formando una* U *y las va cerrando.*

Lucía: Ahí va.

Entrevistadora: ¿Esa es la parábola de mayor abertura decís vos?

Juan: No, no...

Risas.

Juan: ...de coeficiente mayor a uno. Si te tomás una del tipo $x^2/1000$ queda una cosa así (*coloca ambas manos formando una U muy abierta*)

Santiago: Chatura tendiendo a cero.

Los estudiantes establecen una relación entre el coeficiente principal de un polinomio de segundo grado y la función derivada segunda de él con la "abertura", "chatura", "apretado", de la parábola correspondiente: "Cuanto más es la derivada segunda más apretada te queda". Además podemos observar que comunican el pensamiento variacional que están desarrollando con gestos que indican la variación de la gráfica.

El desarrollar su pensamiento y lenguaje variacional les está brindando herramientas para resolver la problemática planteada, dado que la propiedad buscada surge en determinar los aspectos que permanecen constantes y los que varían en la familia de parábolas que se corresponden con un polinomio de segundo grado.

- Actividad IV c

Juan: *f* tiene menor chatura que .

Lucía: *f*.

Alejandro: En ese punto son iguales las dos funciones, después en un intervalo se hacen distintas, eso es seguro.

Entrevistadora: ¿Y ese distinto cómo lo diferencias?

Alejandro: Tomando un intervalo...

Jimena: g es más apretada, no, g es más chata.

Juan: Más contra el piso, chata es más contra el piso.

Entrevistadora: ¿Qué es el piso?

Juan: La tangente en el punto.

Jimena: ¿El eje de las "*x*"?

Juan: No.

...

Entrevistadora: ¿Qué es el piso?

Juan: La tangente en el punto.

Entrevistadora: La compañera había planteado que era el eje de las "*x*", ¿comparten eso?

Silencio.

Jimena: Estoy dudando, yo dudo, a ver, explíquenme. Hola, hola, a ver...

Juan: Porque vos no estás comparando con ox, sino con la tangente. El piso sería la tangente, no tiene por qué ser el eje de las “*x*”.

Alejandro: Es muy intuitivo, no es que esté muy fundamentado.

Jimena: No, el mío también es muy intuitivo. O sea... no sé. Vos por ejemplo imaginate la $x^2 + 1$, la parábola está para arriba, no la medís en *ox*.

Alejandro: Si, pero también la podés medir en *ox*.

Juan: En este caso es lo mismo, aunque no es el eje *ox*, es una paralela en el punto.

Jimena: Yo no dije que fuera el eje *ox*, ha, sí, si dije... pero igual me da la sensación que lo más chato que veo es esto *(con la mano hace una especie de recta horizontal).* O sea no puedo hacer chato esto (*con la mano hace una especie de recta vertical).* Me parece que es “recto”, pero no “chato”, porque siempre lo comparo con...

Alejandro: El hecho es que la función te va a quedar entre la otra y la tangente

Juan: Claro.

Alejandro: Es la que queda entre medio.

...

Jimena: En el ejemplo, cuando decían que uno tenía mayor valor numérico de la derivada segunda, la hice más... no sé...

Juan: Más pegada a la tangente, no, menos pegada a la tangente. Por eso, la medís con respecto a la tangente.

...

Juan: O sea, si el valor numérico de la derivada segunda es mayor quiere decir que la función está como que se quiere alejar más de la recta tangente.

...

Juan: ... pero nosotros decimos el piso relativo a cada función en un punto.

Jimena: Claro, donde se apoya la curva.

Juan: Ahí va, el piso es donde se apoya la curva.

Jimena: Ahora sí.

► Actividad IV f

Juan: *f* más chata...

Lucía: Tienen diferente tangente.

Jimena: Sí.

Alejandro: Bien, distinta tangente.

Entrevistadora: ¿Ahí que pasa?

Juan: Es más chata con respecto a su tangente

Entrevistadora: ¿Están de acuerdo?

Lucía: Si.

Estas dos instancias dan muestras del pensamiento y lenguaje variacional que están desarrollando los entrevistados. Además de los aspectos variacionales que ya antes habían determinado los estudiantes, y que nosotros habíamos analizado, se suma ahora a la discusión cuál es la recta fija con la cual comparan los aspectos variables de la familia de parábolas. En principio se muestran dos opiniones que, aunque en algunos casos puedan coincidir, son distintas: comparar los aspectos variables de la familia de parábolas con una recta fija tangente a las parábolas de la familia o compararlas con el eje Ox.

Esta discusión muestra un desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes ya que para poder determinar los aspectos que varían y los que permanecen constantes deben determinar con qué elemento están siendo comparados. Como esperábamos, la conjetura de los estudiantes se basa en establecer una relación entre la variación del valor numérico de la función derivada segunda y la "proximidad" entre el gráfico de la función inicial y la recta tangente en el punto de estudio.

► Actividad V

Jimena: Más lejos de la tangente, más derivada segunda...

Maximiliano: Ahora se me ocurrió acá, ahora me pareció más claro en el caso b, el tema de la chatura. La derivada segunda, viene a ser la derivada primera de la derivada primera, a mí se me ocurrió ver como que los empinamientos, a ver si me explico: los empinamientos de las rectas tangentes en los puntos son mucho... las que tienen la forma más chata son más empinadas que las otras.

Juan: Claro.

Maximiliano: Por lo tanto, decrece con mayor rapidez. En ese aspecto es que la derivada segunda es mayor la de g que la de f. La chatura es el crecimiento de la pendiente

Maximiliano hace explícito su pensamiento variacional en relación a las rectas tangentes al gráfico. Relaciona la función derivada segunda con la variación de la función derivada primera. Dado que la función derivada primera indica los coeficientes angulares de las rectas tangentes a la función inicial es que la variación de la función derivada primera es vista por el estudiante en la variación de las rectas tangentes al gráfico.

Cabe destacar que el pensamiento y lenguaje variacional desarrollado por los estudiantes les está brindando elementos para significar gráficamente a la función derivada segunda no solo en términos de concavidad positiva o negativa. Observemos que establecer una relación entre el signo de $f''(a)$ *y el signo de la concavidad de f en* $x=a$ *no necesita de un pensamiento y lenguaje variacional, dado que puede concebirse la gráfica de f como un objeto estático del cual solo se tendrá en cuenta su concavidad en un entorno de a. En cambio el significado que asignan los estudiantes a* $f''(a)$ *está basado en reconocer algunos de los aspectos variables y otros constantes del dicho gráfico; por ejemplo la variación de los coeficientes angulares de las rectas tangentes al gráfico de la función f en un entorno de a. A partir de lo anterior es que consideramos que el desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional de los estudiantes permite enriquecer el significado gráfico asociado al valor numérico de la función derivada segunda.*

Equipo 2

Actividad IV b

Ignacio: La misma imagen y la misma tangente y las dos gráficas que...*(hace movimientos con los hombros como diciendo "no sé...")*

Sebastián: Algo hice, para diferenciar la derivada segunda, que una era mayor que la otra y más abierta la concavidad *(hace con los dedos índice y pulgar la forma de una parábola y los abre y cierra intentando mostrar "cambio de concavidad").*

...

Sebastián: Sí, yo puse que cuanto mayor sea la derivada segunda *(hace con los dedos índice y pulgar la forma de una parábola y los abre y cierra intentando* *mostrar distintas "aberturas")*, más abierta va a ser la gráfica, pero, ¿por qué?, no se.... porque me pareció nomás.

► Actividad V f

Sebastián: Lo mismo, *f* es más abierta

Entrevistadora: ¿Qué relación están planteando entre el gráfico y la derivada segunda?

Ignacio: *(con las dos manos forma una U y cierra y abre las manos*) Que la concavidad es más abierta o más cerrada.

Entrevistadora: ¿En relación a qué?

Ignacio: A un entorno.

Entrevistadora: Que *f* tenga mayor derivada segunda que *g* en un real quiere decir que...

Ignacio: Que la gráfica de *f*....

Leticia: Es más abierta.

Ignacio: Ahí va, que es más abierta que la de *g*.

En estos diálogos se puede observar que los estudiantes al significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda recurren a herramientas gestuales que evidencian el reconocimiento de aspectos variacionales de la familia de parábolas que están considerando.

Los estudiantes visualizan ciertas variaciones en los gráficos de las funciones las que comunican con recursos gestuales, lo que indica que están poniendo en juego un pensamiento y lenguaje variacional el cual les permite considerar al gráfico de cada función como parte de una familia, determinando las similitudes para pertenecer a ella, y como un gráfico distinto a los demás, al tener en cuenta variaciones respecto a los demás gráficos de la familia. Además su pensamiento y lenguaje variacional les está permitiendo establecer una conjetura que establece una relación entre la "abertura" del gráfico de la función y el valor numérico de la función derivada segunda parece dado que se apoya en el reconocimiento de variaciones de las gráficas.

► Actividad V f

Entrevistadora: Que *f* tenga mayor derivada segunda que g en un real quiere decir que...

Ignacio: Que la gráfica de *f*....

Leticia: Es más abierta.

Ignacio: Ahí va, que es más abierta que la de *g*.

Sebastián: Tiene menor crecimiento la derivada primera, en un entorno del punto tiene menor crecimiento la derivada primera.

► Actividad V parte h

Ignacio: Pero si ves el gráfico de *f* va más, muchísimo más abierto que el de *g*...

Sebastián: Sí, pero en el "*e*" si tomás un entorno de "*a*" crece menos en *f* que en *g* y en el "*h*" crece más en *f*.

Lucía: Entonces *f* sería mayor que *g (se refiere al valor numérico de las derivadas segundas).*

Sebastián: No, si acá crece menos, si tomás un entorno crece menos en *f* que en *g*, y acá crece más.

Ignacio: ¿Vos lo que decís es que a pesar que esté más abierta crece más?

Entrevistadora: ¿Qué es que crece más rápido? Mostrame en el gráfico.

Ignacio: No crece más rápido.

Sebastián: Si tomo un entorno del punto "*a*" acá, si tomo las imágenes de acá *(marca el semientorno derecho de a)* las imágenes van a crecer mucho más rápido *(se refiere a las imágenes del semientorno derecho de a respecto a la función f)* en ésta que en ésta *(se refiere al gráfico de g).* Como que... no sé... si tomo un punto...

Patricia: En relación crece más.

Sebastián: Claro. Si tomás dos puntos acá, uno acá y otro acá *(dos reales del semientorno derecho de a)* va a haber una diferencia mucho mayor entre las imágenes de ésta *(se refiere al gráfico de f),* que en ésta *(se refiere al gráfico de g).* Eso.

Ahora las evidencias de un pensamiento variacional se reflejan al establecer una relación entre el valor numérico de la función derivada segunda y la variación de la función inicial. El estudiante está considerando a la función como un proceso en el cual *está investigando las relaciones establecidas entre dos elementos del dominio y sus imágenes.*

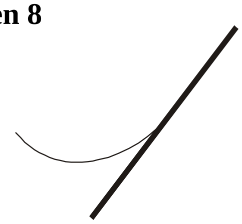
El pensamiento variacional del estudiante le está permitiendo reconocer a los elementos del dominio no solo como elementos fijos e independientes, los cuales se relacionarán con elementos del codominio, sino como elementos relacionados entre sí los cuales determinan una nueva variación establecida por una relación entre la variación de los elementos del dominio y la variación de sus imágenes.

Equipo 3

Actividad V

Bonifacio: ¿por qué la derivada segunda en el P.I. te da cero? Algo hace que sea cero, esto por ejemplo, si vos tenés un P.I. tenés que por un lado está acá:

Imagen 8



y por otro lado está por acá:

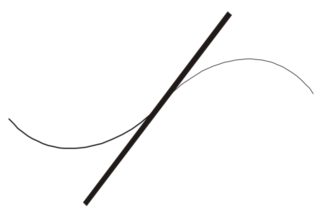


Imagen 9

Acá las diferencias son positivas y acá son negativas y en el punto da cero.

Fernando: Porque la derivada segunda es la tasa de cambio de la primera, y ahí la derivada primera tendría un extremo relativo.

Bonifacio: La derivada primera no.

Fernando: Si la derivada segunda es la tasa de cambio de la derivada segunda.

Bonifacio: ¿Lo qué?

Fernando: Que más rápido varía la derivada primera .

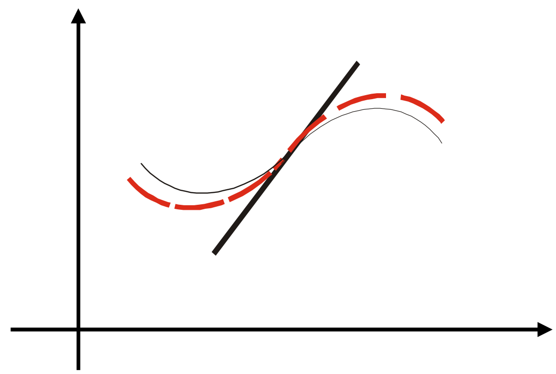
Bonifacio: Acá no hay extremo relativo.

Fernando: Si, de la derivada primera, de la derivada primera de la función *f*.

Bonifacio: Claro, teniendo a *f* como *f* ´.

Fernando: Si la derivada segunda es cero no podemos decir nada del gráfico. Este gráfico está más pegado a la tangente que el otro y en los dos casos la derivada segunda es cero.

Imagen 10



Si la derivada segunda es cero no podemos decir nada...

Fernando utiliza argumentos que derivan de su pensamiento y lenguaje variacional para explicar a Bonifacio por qué para la abscisa del P.I. la imagen de la función derivada segunda es cero. Reconoce a la función derivada segunda como la resultante de la variación de la función derivada primera y la relación entre los extremos de esta última y el valor numérico de la primera.

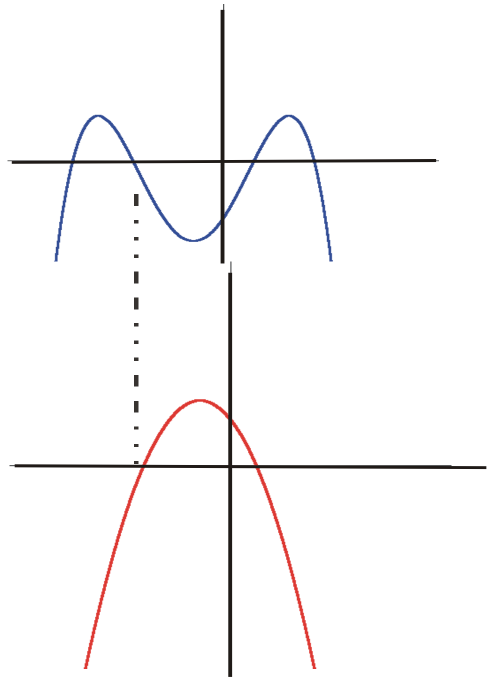
También se observa el trabajo con una familia de funciones cuyos gráficos son tangentes a una recta en un P. I. común de ellas. El reconocer los aspectos variables y constantes de esta familia ha brindado al estudiante herramientas para justificar la no posibilidad de indicar propiedades relacionadas con la "proximidad" entre los gráficos de las funciones y la recta en las condiciones antes mencionadas.

► Actividad III e

Ana: La d es falsa, la difícil es la e, los dos son negativos. Yo hice el siguiente razonamiento.

Dibuja en el pizarrón:

Imagen 11



Cuanto más cerca del P. I. está más próximo a cero está el valor de la derivada segunda.

La derivada segunda es negativa porque acá la función tiene concavidad negativa, acá en el P. I. vale cero, y acá es positiva. Entonces, a mi manera de ver, la función derivada segunda estaba creciendo, valía cero en algún punto ... no sé..., seguía creciendo, empezaba a decrecer, valía cero, seguía decreciendo...

Para mi manera de ver cuanto más cerca del P. I. en valor absoluto ... la derivada segunda en –5 es menor que la derivada segunda en –3,8 ... sí, porque está más cerca del P.I.

Esta estudiante realiza una conjetura basándose en una relación que establece entre la variación de la variable independiente y la variación del valor numérico de la función derivada segunda. En este tipo de pensamiento también encontramos bases variacionales las que le permiten no solo reconocer el signo del valor numérico de la función derivada segunda, lo que no necesariamente implica un pensamiento variacional, sino conjeturar sobre la variación de dicho valor.

El pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes evidenciado en sus diálogos les ha brindado herramientas para, entre otros aspectos, reconocer variaciones *referidas a elementos que a su vez varían, estudiar los elementos constantes y variables de ciertas familias de gráficos, establecer relaciones entre la variación de una función y las funciones derivadas sucesivas, hacer presente la concepción de los elementos del dominio como elementos fijos e independientes entre ellos, a los cuales se les aplica un proceso, y de elementos que se pueden relacionar por ciertas variaciones, y además, comunicar oralmente y gestualmente sus conjeturas y argumentos.*

CONCLUSIONES

En este capítulo intentamos damos respuesta a las preguntas de investigación que nos formulamos al inicio de nuestra investigación, así como ciertas recomendaciones didácticas las cuales consideramos de aplicabilidad real tanto en las aulas uruguayas como en otros Sistemas Educativos.

Como expusimos con anterioridad, la presente investigación tomó como hipótesis de trabajo una que ha sido desarrollada por el grupo de investigación sobre Pensamiento y Lenguaje Variacional, hipótesis que asume que la noción de derivada se estabiliza en el pensamiento de los estudiantes solo hasta que la noción de derivada sucesiva aparezca y se estabilice en un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas.

Hemos presentado y analizado algunas evidencias de que el tratamiento curricular que se tiene al tema “Estudio analítico y representación gráfica de funciones” (EARG) en Uruguay, puede generar en los estudiantes un tratamiento instrumental de los conceptos y no permitir el desarrollo de su carácter relacional en el sentido de Skemp, (1976). El estudiante puede realizar exitosamente el EARG de una función realizando solo un tratamiento basado en técnicas algorítmicas, en la utilización de tablas, con las aplicación de reglas sin razones, y además realizando un proceso intelectual que implique solo el consultar la imagen asociada a los conceptos involucrados y no las definiciones de ellos. También hemos mostrado que este tipo de tratamiento no hace necesario el que el estudiante ponga en juego aspectos de su pensamiento y lenguaje variacional, por lo que no posibilita el desarrollo de este tipo de pensamiento fundamental en el entendimiento relacional del tema.

Dado que por un lado consideramos imprescindible el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes para trabajar con amplitud los temas del cálculo o análisis, además de que es la hipótesis de nuestro equipo a fin de que el estudiante logre formarse la noción de derivada sucesiva, establecer un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, se deben incorporar elementos variacionales y significar los distintos elementos relacionados a la variación en estudio. Por ello, es que consideramos necesario que el estudiante enriquezca el concepto de valor numérico de la función derivada segunda con aspectos gráficos y variacionales.

A partir de lo anterior es que esta investigación puso en primer plano el estudio del significado gráfico que asignan los estudiantes de Uruguay al valor numérico de la función derivada segunda, cómo éste puede ir evolucionando y qué herramientas entran en juego en este proceso de desarrollo. Nos interesa también investigar qué estrategias variacionales desarrollan los estudiantes al trabajar con los conceptos en juego y cómo significan estas variaciones.

Como ya hemos dado muestras en los capítulos anteriores, en los cursos de Cálculo de secundaria en Uruguay se trabaja en los tópicos matemáticos: función, valor numérico, función derivada primera; signo de la función derivada primera para relacionarla con el crecimiento-decrecimiento de la función, valor numérico de la función derivada primera para significarla como el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico en el punto en cuestión, función derivada segunda, signo de la función derivada segunda para relacionarla con la concavidad positiva o negativa de la función. En nuestra investigación hemos detectado que al no realizar un trabajo escolar con el valor numérico de la función derivada segunda, solo se tiene en cuenta el signo de él para vincularlo con la concavidad (positiva o negativa) de la gráfica de la función.

En primer lugar debemos destacar que el análisis de los resultados confirmó nuestra idea inicial de que los estudiantes no se habían enfrentado con problemas que impliquen el significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda, de donde las actividades planteadas relativas a ese aspecto han representado en verdad un problema para ellos y no se trató de ejercicios tipo que conlleven respuestas mecánicas de repetición. Es en este sentido que se ha confirmado nuestra suposición sobre que, en una primer instancia, los alumnos no significarían gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda, y en etapas posteriores, por la forma que fue realizada la secuencia, realizarían intentos por significarlo generando distintas conjeturas.

En las actividades propuestas, los estudiantes significaron gráficamente al real $f(a)$ y no solo al signo de este, y en la mayoría de los casos también al real $f\,'(a)$ y no solo al signo de él. En cambio, a partir de las evidencias presentadas, confirmamos nuestra consideración inicial, que los estudiantes, al enfrentarse en una primera instancia a actividades que implican significar gráficamente el valor numérico de la función derivada segunda, no significarían dicho real sino solo el signo de él, esto ocurre con todos los estudiantes que participan en la actividad. El significado gráfico que asignan los estudiantes a la expresión $f''(a)=b$ es que si $b>0$ la función f presenta concavidad positiva en $x=a$, y si $b<0$ la concavidad de f es negativa en $x=a$. Como podemos observar no se asigna un significado al valor numérico en sí de $f''(a)$ sino solo a su signo.

La relación que han establecido los estudiantes, en una primer instancia, al enfrentarse a situaciones que implican significar gráficamente el valor numérico de la función derivada segunda es una relación entre el signo de dicho real y el gráfico de la función inicial, esta relación la podemos definir en términos de concavidad. Como hemos analizado anteriormente, estas primeras respuestas de los estudiantes están influenciadas por el tratamiento curricular que se ha realizado del tema, tanto en los textos más utilizados por los estudiantes y analizados en este estudio, como en sus cursos, solo se significa gráficamente al signo de $f''(a)$ asociándolo a la concavidad de la función en $x=a$.

La regla que han establecido en una primer instancia relaciona al signo del valor numérico de la función derivada segunda (f'') con el signo de la concavidad de la función inicial f en $x=a$, les permite resolver algunos de los problemas planteados, en especial los que involucran valores numéricos de distinto signo de funciones derivadas segundas. Los estudiantes reflexionan y hacen explícito que en estos casos solo están teniendo en cuenta el signo del real $f''(a)$ y no al real en sí.

Para resolver las situaciones de este tipo los estudiantes no muestran indicios de haber consultado las definiciones involucradas; función, función derivada, valor numérico, etc; en cambio sí la imagen asociada a los conceptos "$f''(a)>0$" y "$f''(a)<0$". Con base en nuestro estudio hemos confirmado que en esta primera instancia los hábitos de pensamiento de la vida cotidiana prevalecieron sobre los hábitos de pensamiento impuestos por los contextos técnicos, aspectos ampliamente investigados por Vinner (1991) y desarrollados en el Capítulo III. La mayoría de los procesos intelectuales analizados en esta primer instancia se pueden ubicar dentro del caso "Respuesta intuitiva" de los esquematizados por Vinner (1991); los estudiantes consultan solo la imagen del concepto al intentar dar solución a la situación planteada, como esta imagen es suficiente para generar una respuesta no se sienten en la necesidad de consultar la definición del concepto. Es decir, hemos encontrado que en una primera instancia la imagen de los estudiantes asociada a los conceptos "concavidad positiva" y "concavidad negativa" ha sido suficiente para ellos al momento de resolver los problemas planteados.

En esta primera instancia también encontramos en forma reiterada la aplicación de reglas sin razones por parte de algunos de los estudiantes. Estas reglas, en algunos casos ciertas y en otros erróneas[10], parecen brindar a algunos estudiantes, cierta seguridad en ellas, así como elementos para justificar sus respuestas, y a otros, frente a la confrontación con las respuestas de sus compañeros, una visión crítica del concepto, revisando las reglas y transformándolas en reglas con razones.

A medida que los estudiantes avanzaban en las actividades reconocen que la regla que habían utilizado anteriormente no es suficiente al intentar esbozar el gráfico de dos funciones f y g en un entorno del real "a" en el caso que $f''(a)$ y $g''(a)$ serán ambos de igual signo, de lo cual solo podían deducir, en un principio, que tendrían concavidad del mismo signo en $x=a$, pero no una relación entre sus gráficos. Los estudiantes también se enfrentan a una limitación, la cual reconocen, cuando a partir del gráfico de una función pueden deducir que en dos reales distintos la concavidad de la función tiene el mismo signo, de donde los valores numéricos correspondientes de la función derivada segunda también tendrán el mismo signo, pero, en esta instancia, indican que no poseen elementos para comparar entre sí dichos valores numéricos.

Por lo tanto, los estudiantes se ven enfrentados a que asociar al real $f''(a)$ los conceptos "concavidad positiva" o "concavidad negativa" no es suficiente ni para determinar algunos aspectos gráficos de funciones en las cuales los valores numéricos de sus funciones derivadas segundas son distintos, pero de igual signo, aunque haya una relación entre este concepto y el signo de dichas funciones derivadas segundas; ni para comparar los valores numéricos de las funciones derivadas segundas en un real en el

[10] No coherentes con las aceptadas por la comunidad matemática.

cual los gráficos de las funciones iniciales tienen concavidades del mismo signo. De la toma de conciencia de estas limitaciones comienzan a surgir conjeturas que intentan dar respuesta a estas nuevas situaciones.

Se presentan entonces dos conjeturas principales, y otra relacionada directamente a una de ellas, que establecen una relación entre el valor numérico de la función derivada segunda y el gráfico de la función inicial la cual abarca aspectos más amplios que el solo considerar al signo de su concavidad. La primer conjetura relaciona al valor numérico de la función derivada segunda (f'') en $x=a$ con un aspecto del gráfico que llaman, entre otros nombres, "abertura" del gráfico. En dos de los equipos surge, dentro de esta primer conjetura, otra más específica que relaciona al valor numérico de la función derivada segunda (f'') en $x=a$ con la distancia entre el gráfico de la función inicial (f) y la recta tangente a dicho gráfico en un entorno reducido del real a. Observemos que estas dos conjeturas solo se diferencian en las expresiones explícitas de los estudiantes, porque el significado gráfico de ambas es el mismo, de donde no las consideramos como dos distintas, sino que su diferencia está dada solo por un lenguaje más técnico. Es importante recalcar que esta conjetura se hace presente en todos los equipos y es la conjetura que previamente consideramos que iba a presentarse. La segunda conjetura la plantean dos estudiantes de distintos equipos, establecen una relación entre el valor numérico de la función derivada segunda en $x=a$ y la cercanía del punto en cuestión y el P. I. Cabe destacar que aunque dos estudiantes trabajan con esta conjetura en algunas de las actividades planteadas, en algún momento de la secuencia generan también la conjetura anterior.

Estas dos conjeturas iniciales podemos enunciarlas como:

- A mayor valor numérico absoluto de la función derivada segunda en $x=a$, el gráfico de la función inicial será "menos abierto" en un entorno de "*a*".

  Más específicamente:

    - A mayor valor numérico absoluto de la función derivada segunda en $x=a$, el gráfico de la función inicial estará más "alejado" de su recta tangente en $x=a$ en un entorno reducido de "*a*". Si f y g son dos funciones reales y $\left|f''(a)\right| > \left|g''(a)\right|$ entonces el gráfico de *f* estará más "alejado" de su recta tangente en x=a que el de *g* a la suya en un entorno reducido de "*a*".

A partir de las transcripciones de los diálogos de los distintos equipos se observa con cierta claridad que el concepto "menos abierto" o "más cerrado" es el mismo que "más alejado de la recta tangente".

- A mayor valor numérico absoluto de la función derivada segunda (f'') en x=a el punto (x,$f(x)$) estará más alejado del P.I más próximo.

Luego de las confrontaciones entre los integrantes de los equipos, en uno de ellos se limita la primer conjetura a los casos en que el valor numérico de la función derivada primera fuera el mismo, dado que se observó que la relación que habían planteado en una primer instancia solo era verdadera en el caso que el valor numérico de las funciones derivadas primeras en el real dado fueran iguales. En este grupo se genera una nueva conjetura que invalida a la anterior la que podemos enunciar de la siguiente manera:

- A mayor valor numérico absoluto de la función derivada segunda en x=a el gráfico de la función inicial estará más alejado de su recta tangente en x=a en un entorno reducido de a siempre que los coeficientes angulares de ambas rectas sean iguales. Si *f* y *g* son dos funciones reales, $\left|f''(a)\right| > \left|g''(a)\right|$ y $f'(a)$= $g'(a)$, entonces el gráfico de *f* estará más "alejado" su recta tangente en x=a que el de *g* a la suya en un entorno reducido de "*a*".

El nuevo concepto que se deriva de las dos primeras y última conjetura es expresado por los estudiantes como "chatura", "abertura", "más o menos cerrada", "más o menos abierta", "más o menos pegada a la tangente", "más o menos alejada de la tangente", "más o menos separada", "más o menos apretado", a pesar de haberle dado distintos nombre todos parecen estar generando el mismo concepto. Hemos mostrado evidencias de que los estudiantes han generado, en forma independiente y en equipo, una nueva imagen asociada al concepto valor numérico de la función derivada segunda, la cual contiene aspectos de significación gráfica.

Observemos que los tres equipos han planteado la primer conjetura, la que indica que el valor numérico de la función derivada segunda en x=a ($f\,''(a)$) determina por sí solo la “abertura” del gráfico, o más específicamente la “proximidad” del gráfico de la función f a su recta tangente en (a,f(a)) en un entorno reducido de “a”, de donde si $|f''(a)| > |g''(a)|$ entonces el gráfico de f estará más “alejado” de su recta tangente en x=a que el de g a la suya. Esta conjetura, que es falsa desde el punto de vista matemático, era la esperada por nosotros al momento de realizar la secuencia, pero los tres equipos la trabajan en forma diferente. El primero la considera válida al encontrar casos concretos donde se cumple, el segundo la valida basándose en que “le parece” y el tercer equipo, luego de validarla en primer instancia, continúa buscando bases para su aceptación o refutación. Es este último equipo que descubre que dicha conjetura solo es válida si además los valores numéricos de las funciones derivadas primeras correspondientes son iguales.

Debemos destacar también que los estudiantes que plantean la segunda conjetura en términos de P. I., y que pueden utilizarla para resolver algunos ítems de la secuencia, generan luego la primera conjetura al no ser aplicable a los nuevos ítems la conjetura anterior. Estos estudiantes dan muestras de cambiar de estrategia cuando es necesario y de poder observar distintos aspectos de una misma situación.

La imagen que han generado, similar en todos los estudiantes, parece ser en general suficiente para “comprender” el concepto, dado que solo un equipo muestra la necesidad de dar una definición de él. En este equipo uno de los estudiantes expresa que va comprendiendo el nuevo concepto, “chatura”, cuando va enriqueciendo la imagen asociada al concepto, dado que, a pesar de que antes se había enunciado una seudo definición del concepto, el estudiante indica que lo está entendiendo cuando enriquece la imagen asociada a él y no anteriormente al conocer su definición. Podríamos suponer que para que este estudiante sienta que ha “entendido” este concepto fue necesario generar una rica y diversa imagen de él más que solo conocer su definición. Pero no solo este estudiante ha dado muestras de “necesitar” la imagen del concepto, hemos presentado evidencias de que distintos estudiantes no consideran "saber qué significa" un concepto aunque conozcan su definición, o algunos aspectos de ella, sino que consideran que necesitan más elementos para "saber qué significa" el concepto, los cuales nosotros creemos que serán parte de la imagen del concepto; y hemos mostrado situaciones donde los estudiantes dan signos de necesitar más la imagen del concepto que su definición al momento de enfrentarse a las situaciones planteadas.

En una primer instancia los estudiantes no han dado indicios de consultar muchas de las definiciones involucradas, y han hecho explícita la no utilización de otras, ya hemos analizado que los estudiantes en algunos casos no han significado gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda basándose en definiciones de los conceptos involucrados, sino que han generado una imagen asociada a conceptos como la relación $f''(a)>g''(a)>0$, la cual les ha permitido resolver las situaciones planteadas. Es por esto que consideramos que la imagen asociada a conceptos ampliamente trabajados por ellos anteriormente ha sido suficiente para resolver algunas de las situaciones que les hemos planteado, pero luego, frente a otras actividades que implicaban la asignación de significado gráfico al valor numérico de la función derivada segunda, reconocieron que su imagen del concepto "concavidad" no era suficiente para resolver la problemática, lo cual llevó a que los estudiantes modificaran su imagen asociada a este concepto generando un nuevo concepto del cual, en uno de los equipos, ha intentado dar una definición.

Como hemos señalado anteriormente, la mayoría de los procesos intelectuales analizados se pueden ubicar dentro del caso "respuesta intuitiva" de los esquematizados por Vinner (1991); los estudiantes consultan solo la imagen del concepto al intentar dar solución a la situación planteada, como esta imagen es suficiente para generar una respuesta no se ven en la necesidad de consultar la definición del concepto. En cambio no hemos encontrado evidencias sobre los tipos de procesos intelectuales que esperan la mayoría de los docentes que ocurran: "deducción puramente formal", y "deducción siguiendo el pensamiento intuitivo"; sí hemos dado evidencias de una situación que se encuentra dentro del caso "Interacción entre definición e imagen" en la cual un estudiante expresa que considera necesario recurrir a la definición del concepto frente a la evidencia de que no han encontrado una solución a la situación planteada, todos ellos dentro de la clasificación de Vinner (1991), y de otra situación que se encuadra dentro del caso 5 que nosotros hemos incluido a la clasificación de Vinner (1991).

Creemos que la visualización de las situaciones planteadas ha permitido, a la mayoría de los estudiantes que participaron en las actividades, resignificar el concepto en juego, así como posibilitó que ellos pudieran generar distintas argumentaciones. Cuando indicamos que los estudiantes visualizan cierto concepto es porque consideramos que las evidencias presentadas dan muestras de que los estudiantes han representado, transformado, generado, comunicado, documentado y reflejado información visual en su pensamiento y lenguaje; aspectos estos requeridos en la definición de visualización dada por Cantoral y Montiel (2003), así como también de que han formado imágenes mentales, las cuales han llevado al papel, que les han permitido descubrir y entender los conceptos matemáticos en juego, aspectos básicos en la definición de visualización de Zimmermann y Cunningham (1991) , definiciones estas en las cuales nos hemos basado.

Debemos mencionar diferencias en aspectos de visualizaciones de las situaciones planteadas en los distintos equipos: los estudiantes de los equipos 1 y 3 (estudiantes del I.P.A.), y algunos estudiantes del equipo 2 (estudiantes de secundaria) han dado muestras de visualizar conceptos ya trabajados anteriormente, de visualizar el nuevo concepto que ellos generaron, y/o los nuevos aspectos de conceptos que ya "conocían", en cambio de las entrevistas no podemos deducir que todos los integrantes del equipo 2 hayan logrado visualizar el concepto en juego. En el equipo 3 la visualización de los distintos conceptos involucrados fue clave al momento de definir la conjetura final, ella permitió establecer las primeras conjeturas, cuestionarlas buscando y presentando contraejemplos, etc. Los integrantes de los equipos 1 y 3 han logrado visualizar la situación planteada, han podido convertir información del registro gráfico a otros y viceversa, lo que les brindó herramientas para significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda. En cambio, a partir de las evidencias recogidas, no podemos asegurar que todos los integrantes del equipo 2 hayan visualizado la nueva situación.

Hemos presentado muestras de que los estudiantes realizan distintos tipos de entendimientos de los tópicos en juego. Encontramos que algunos de los estudiantes brindan muestras de realizar, en algunas de las actividades, un entendimiento instrumental en el sentido de Skemp (1976) y aplican reglas sin razones para resolver situaciones a las cuales ya se habían enfrentado en sus cursos. Al ser cuestionados sobre el por qué de esas reglas, por parte de los demás estudiantes del equipo o por la entrevistadora, en el momento que las hacen explícitas, ocurren dos situaciones distintas: unos indican que dichas reglas son ciertas porque sus docentes así se las han enseñado y otros dan muestras de poder convertir ese razonamiento instrumental en uno relacional al generar, o recordar, razones relacionales de dichas reglas.

Nuevamente encontramos algunas diferencias entre el equipo formado por estudiantes de secundaria y los formados por estudiantes de nivel terciario, en este caso en cuanto al tipo de reglas generadas y el tipo de aprendizaje realizado sobre los nuevos conceptos en juego. En el primer caso los estudiantes expresan distintas reglas sin razones en el sentido de Skemp (1976) y, como ya hemos presentado al analizar su equipo, las cuales validan solo porque "les parecen", de donde dan muestras de realizar un entendimiento instrumental del tema. En cambio en los otros equipos se presentan evidencias de aprendizajes relacionales del tema , y las reglas que aplican son en su mayoría reglas con razones. En los equipos 1 y 3 se han expresado razones relacionales que avalan sus conjeturas, razones éstas que surgen luego de argumentaciones, contraejemplos, discusiones y validaciones por parte de los integrantes del equipo, de donde consideramos que las reglas que de estas interacciones han deducido es una regla con razones, y que su práctica de resolución del problema ha generado un entendimiento relacional de este. Las relaciones establecidas por el equipo 1 no le permiten descubrir que la primera conjetura realizada solo es válida para cierto conjunto de funciones, en cambio, la red de relaciones generada por el tercer equipo permite refutar la primer conjetura realizando luego la tercera que sí es válida en general. En cambio en el equipo 2 no se presentan razones relacionales que avalen la conjetura planteada por algunos de sus integrantes, ellos han manifestado que a pesar que haber encontrado un método, o regla, para resolver las situaciones planteadas dudan de la validez de algunos de sus puntos, por lo cual creemos que se ha realizado un entendimiento instrumental del tópico y que han generado una regla sin razones para resolver la situación problemática a la cual se vieron enfrentados.

También como esperábamos la relación que han establecido los estudiantes entre la variación de la función derivada segunda y la variación del gráfico de la función inicial permitió, por un lado, el desarrollo de su pensamiento y lenguaje variacional, al establecer relaciones entre aspectos que varían, y por otro el enriquecimiento del concepto “derivada segunda”. Consideramos que se ha visto enriquecido este concepto dado que la derivada segunda deja de ser algo estático, a lo cual solo se le calcula el signo para estudiar la concavidad de la función, y pasa a ser vista como un elemento que puede variar y donde esa variación está generando nuevos conceptos que permiten enriquecer su significado.

Los estudiantes basan algunas de sus conjeturas en el análisis de distintas situaciones variacionales las cuales las podemos dividir en dos grupos; por un lado el análisis de distintas familias de parábolas observando la relación entre ellas y los valores numéricos de las funciones derivadas segundas que las determinan; y por otro el análisis de la relación entre el valor numérico de la función derivada segunda en cierto real ($f''(a)$) y la distancia entre el punto ($a,f(a)$) y el P.I.

En cuanto al primer grupo se presentan dos análisis complementarios, muchas veces casi simultáneamente. Por un lado uno que establece una relación de los gráficos al valor numérico de la función derivada segunda, y otro en el sentido opuesto. En su análisis los estudiantes reconocen por un lado a una parábola como parte de una familia, con ciertas similitudes y diferencias, y no como un gráfico aislado, lo cual evidencia un pensamiento variacional dado que permite establecer relaciones entre las variaciones de las expresiones analíticas de las funciones, de sus gráficos y el valor numérico de la función derivada segunda, y por otro lado trabajan con parábolas de una misma familia determinando los elementos fijos y los variables, lo cual también brinda indicios de la puesta en juego y del desarrollo de su pensamiento y lenguaje variacional.

Una de las familias de parábolas que analizan es la que surge a partir de la expresión de la forma $f(x)=ax^2$, el cual permitió a los estudiantes observar similitudes y diferencias en el comportamiento de sus gráficos al variar el coeficiente principal y a partir de allí generar conjeturas sobre el significado gráfico del valor numérico de la función derivada segunda dado que, como ya hemos analizado, dicho coeficiente está directamente relacionado con dicho valor numérico. A partir del análisis de la variación de estas parábolas también surge una relación "por dentro", o más "apretada", que será base de sus conjeturas. Si los estudiantes hubieran asumido cada parábola como un gráfico independiente, con características propias, y no como un gráfico perteneciente a una familia en la cual las variaciones determinan las similitudes y diferencias de los elementos de dicha familia, tal vez no hubieran podido generar herramientas para significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda. Los métodos que utilizan para comunicar el pensamiento variacional que están desarrollando no son solo verbales, sino que también lo hacen con gestos que indican la variación de la gráfica.

Otra familia de parábolas que ha sido analizada es la formada por parábolas que se corresponden en una traslación. En este análisis los estudiantes presentan muestras de la puesta en juego de su pensamiento y lenguaje variacional al generar relaciones entre las parábolas y el valor numérico de la función derivada segunda que las genera; por ejemplo al deducir las similitudes entre las parábolas que se corresponden en una traslación, similitudes básicas para significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda en el caso que $f''(a)=g''(a)$, siendo f y g expresiones analíticas que generan a dos parábolas de la familia. Además el pensamiento variacional les permite reconocer a dos parábolas como parte de una misma familia de donde compartirán ciertos aspectos "constantes"; y además del análisis comparativo de los elementos de una misma familia surgen los elementos invariantes y los variables de ella lo cual posibilita el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes.

Los estudiantes han planteando en el análisis de la familia anterior una relación, que llaman "igual", entre los gráficos que está determinada en un entorno de un punto. Logran determinar la igualdad entre las variaciones de las funciones f y g, y determinar la igualdad entre las variaciones de sus funciones derivadas primeras. Reconocer estas constantes les está permitiendo significar gráficamente aspectos gráficos de las funciones derivadas haciendo una ruptura entre la asociación derivada-fórmula pasando a considerar una asociación derivada-variación. Esta nueva concepción de la derivada rompe con la concepción curricular que comúnmente se realiza, como ya habíamos analizado, permitiendo resignificarla enriqueciéndola, "en las prácticas humanas, en las disciplinas de referencia, la derivada no se entiende exclusivamente como el límite del cociente incremental, sino como una forma de estudiar la evolución de un proceso de cambio, de crecimiento o de decrecimiento". (Cantoral, 2000). Por lo tanto el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional ha permitiendo en estas actividades enriquecer los significados de conceptos que ya conocían y significar nuevos.

Los estudiantes han establecido relaciones entre la variación de la función derivada segunda y el gráfico de las funciones iniciales las cuales por un lado han enriquecido la imagen del concepto y las relaciones entre este y otros conceptos y a su vez han ido evolucionando ampliando el conjunto de funciones, o de familia de parábolas[11], al cual aplicaban estas relaciones. Esta ampliación del conjunto de aplicación consta de dos instancias, primero generalizan la primer relación a una familia de parábolas tangente a una recta distinta del eje de las abscisas, y luego, aparentemente basándose en la conjunción de ambas reglas y aplicando una especie de propiedad "transitiva" pueden analizar los gráficos en entornos de distintos puntos y/o tangentes a rectas de distintos coeficientes angulares de donde deducen la relación entre los valores numéricos de sus respectivas funciones derivadas segundas.

Además de los aspectos variacionales que hemos mencionamos y que los estudiantes han analizado, también muestran una puesta en juego y un desarrollo de su lenguaje variacional al observar y discutir entre qué elementos se están realizando las "comparaciones", dado que para poder determinar los aspectos que varían y los que permanecen constantes deben determinar con qué elemento están siendo comparados. El equipo 2 establece relaciones, "compara", dos elementos de la familia entre sí, en los otros equipos aunque en un comienzo algunos estudiantes también lo hagan, inmediatamente pasan a discutir las relaciones, entre ellas la de "proximidad", entre los elementos de la familia con una recta. En el equipo 1 se presenta la discusión sobre cuál es la recta fija con la cual comparan los aspectos variables de la familia de parábolas. En principio se muestran dos opiniones que, aunque en algunos casos puedan coincidir, son distintas: comparar los aspectos variables de la familia de parábolas con la recta tangente a cada parábola de la familia en el punto en cuestión o compararlas con el eje de las abscisas, luego parece aceptarse por mayoría la primera. El equipo 3, aunque en un principio realiza un análisis similar al del equipo anterior, analiza además la verdad o no de las relaciones antes establecidas a partir del estudio de las relaciones entre una

[11] Dependiendo del sentido de la aplicación de la relación.

parábola y una recta variable a ella. El tratamiento variacional dado al estudio de este aspecto permite que estos estudiantes limiten la relación establecida, entre cada parábola y su recta tangente en juego, al caso que estas rectas sean paralelas, relación esta que permitirá comparar valores numéricos de las respectivas funciones derivadas segundas.

Como hemos indicado anteriormente debemos destacar que el pensamiento y lenguaje variacional desarrollado por los estudiantes les brinda elementos para significar de manera gráfica a la función derivada segunda no solo en términos de concavidad positiva o negativa. Al establecer una relación entre el signo de $f''(a)$ y el signo de la concavidad de f en $x=a$ no se necesita poner en juego un pensamiento y lenguaje variacional, dado que puede concebirse la gráfica de f como un objeto estático del cual solo se tendrá en cuenta su concavidad en un entorno de a. En cambio el significado que han asignado los estudiantes a $f''(a)$ al enfrentarse a la secuencia está basado en reconocer algunos de los aspectos variables y otros constantes de dicho gráfico; por ejemplo la variación de los coeficientes angulares de las rectas tangentes al gráfico de la función f en un entorno de a. A partir de lo anterior es que consideramos que el desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional de los estudiantes permitió enriquecer el significado gráfico asociado al valor numérico de la función derivada segunda.

Hemos constatado que los estudiantes al significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda recurren a herramientas gestuales que evidencian el reconocimiento de aspectos variacionales de la familia de parábolas que están considerando, así como que, por un lado, la puesta en juego de su pensamiento y lenguaje variacional les ha brindando herramientas para resolver la problemática planteada, y por otro la misma problemática les ha ayudado a desarrollar este tipo de lenguaje y pensamiento.

El análisis de la otra situación variacional se presenta inicialmente con dos estudiantes de distintos equipos, en uno de ellos es puesto en discusión y en el otro no parece se presentan signos de ser analizado, aceptado o descartado. En este caso encontramos signos de un pensamiento y lenguaje variacional cuando los estudiantes reconocen la función a partir de una relación entre una variable dependiente y una independiente. Además establecen una relación entre otras dos variables: el valor numérico de la función derivada segunda y una “distancia” entre un P.I. y el punto en juego. El pensamiento y lenguaje variacional que los estudiantes ponen en juego facilita que ellos puedan formular la conjetura, dado que implica reconocer en la función *f* su aspecto dual (objeto-proceso) que desarrollamos en el Capítulo III, como objeto al reconocer la forma global de su gráfico, y como proceso al establecer una correspondencia entre la preimagen a del valor numérico de la función derivada y el punto (a, $f(a)$) para luego establecer una relación entre el valor numérico de la función derivada segunda y la distancia entre dicho punto y el P.I.

En el equipo 1 la relación planteada por uno de los integrantes es puesta en duda por otro integrante, los dos estudiantes consideran distintos aspectos de la variación de la función derivada segunda en el entorno de un real. El estudiante que generó la conjetura estableció que si $f\,''(a)=0$ y $|x-a|$ es “suficientemente pequeño”, entonces $|f''(x)-f''(a)|$ también es “pequeño”, o sea $f\,''(x)$ estaría “próximo” a cero. Podemos deducir que la imagen del concepto que evoca es una función donde $f\,'''(a)=1$, de donde en un entorno del real a hay una equivalencia entre ambas diferencias. En cambio su compañero hace jugar distintas posibilidades de variaciones de la función derivada segunda, considera que aunque $f\,''(a)=0$ y $|x-a|$ sea “suficientemente pequeño”, $|f''(x)-f''(a)|$ no tiene por qué ser “pequeño”, o sea $f\,''(x)$ no tiene por qué estar “próximo” a cero. En esta discusión está presente la variación de la función derivada segunda, y en forma implícita se está discutiendo cómo influye el valor numérico de la función derivada tercera en la variación de la función derivada segunda. El primer estudiante parece aceptar solo funciones donde $f\,'''(a)=1$, en cambio el segundo estudiante parece abrir el abanico de posibilidades porque reconoce que siempre es posible determinar una función *f* tal que, aunque $|x-a|$ esté “próximo” a cero, $|f''(x)-f''(a)|$ sea mayor que cualquier real dado, esto es porque dependerá del valor de $f\,'''(a)$.

Observemos que la relación planteada inicialmente se cumple en forma ideal en una función polinómica de primer grado de coeficiente principal uno: $|x-a|=|f(x)-f(a)|$, en cambio un estudiante reconoce distintas posibilidades para la variación de la función en un entorno de (a,$f(a)$), no solo la proporcional. El pensamiento variacional que está desarrollando este estudiante le permite cuestionar la conjetura de su compañero y tal vez, en etapas sucesivas, validar la suya. Además el pensamiento variacional desarrollado por estos estudiantes les está permitiendo reconocer a los elementos del dominio no solo como elementos fijos e independientes, los cuales se relacionarán con elementos del codominio, sino como elementos relacionados entre sí los cuales determinan una nueva variación establecida por una relación entre la variación de los elementos del dominio y la variación de sus imágenes de donde consideramos no solo que están poniendo en juego su lenguaje y pensamiento variacional sino que además lo están desarrollando.

También encontramos otros signos de puesta en juego y desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes. En una situación se hace explícito por un estudiante su pensamiento variacional en relación a las rectas tangentes al gráfico al relacionar la función derivada segunda con la variación de la función derivada primera. Dado que la función derivada primera indica los coeficientes angulares de las rectas tangentes a la función inicial es que la variación de la función derivada primera es vista por el estudiante en la variación de las rectas tangentes al gráfico.

En otras instancias las evidencias de un pensamiento variacional se reflejan al establecer conjeturas basadas en relaciones entre el valor numérico de una función y la variación de otra. En algunos casos la relación es establecida entre el valor numérico de la función derivada segunda y la variación de la función inicial, en otros entre la variación de la variable independiente y la variación del valor numérico de la función derivada segunda, y por último se reconoce a la función derivada segunda como la resultante de la variación de la función derivada primera y la relación entre los extremos de esta última y el valor numérico de la primera. En estos casos la función es considerada como un proceso en el cual se investigan las relaciones establecidas entre dos elementos del dominio y las imágenes de las funciones derivadas sucesivas. En este tipo de pensamiento también encontramos bases variacionales las que permiten no solo reconocer el signo del valor numérico de la función derivada segunda, lo que no necesariamente implicaría un pensamiento variacional, sino también en algunos casos conjeturar sobre la variación de dicho valor y en otros justificar por qué para la abscisa del P.I. la imagen de la función derivada segunda es cero.

El pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes evidenciado en nuestros análisis de sus diálogos, les ha brindado herramientas para, entre otros aspectos, reconocer variaciones referidas a elementos que a su vez varían, estudiar los elementos constantes y variables de ciertas familias de gráficos, establecer relaciones entre la variación de una función y las funciones derivadas sucesivas, hacer presente la concepción de los elementos del dominio como elementos fijos e independientes entre ellos, a los cuales se les aplica un proceso, y de elementos que se pueden relacionar por ciertas variaciones, y además, comunicar oralmente y gestualmente sus conjeturas y argumentos.

También encontramos signos de un pensamiento y lenguaje variacional en el análisis de otra familia de funciones realizado por un estudiante, aunque en este caso no para realizar conjeturas sobre el valor numérico de la función derivada segunda correspondiente sino para determinar casos donde las reglas que antes podían haber establecido no son aplicables. En este caso estudia la variación de los gráficos de una familia de funciones tangentes a una recta fija en un P. I. común de ellas y la relación con el aspecto constante del valor numérico de la función derivada segunda en el real considerado. El reconocer los aspectos variables y constantes de esta familia y la relación de ellos con la función y sus funciones derivadas primeras y segundas correspondientes ha brindado al estudiante herramientas para justificar la no posibilidad de indicar propiedades relacionadas con la "proximidad" entre los gráficos de las funciones y la recta en las condiciones antes mencionadas.

Recomendaciones didácticas

Como hemos analizado, los rasgos más importantes del tema "derivadas" son trabajados, tanto en los textos que investigamos como en los cursos dados en Uruguay, en forma muy similar. La interpretación gráfica del valor numérico de la función derivada primera juega un papel principal en su conceptualización, pero cuando se trabaja con la función derivada segunda no se realiza una interpretación gráfica del valor numérico de ella.

Hemos reportado que se tiene en cuenta el signo del valor numérico de la función derivada primera para vincularlo con el crecimiento o decrecimiento de la función, y el valor numérico en sí para vincularlo con el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico en el punto en cuestión, en ambos casos encontramos muestras de que se realiza una significación gráfica de dichos conceptos. En cambio, al trabajar con la función derivada segunda, solo se tiene en cuenta el signo de sus valores numéricos, los cuales se relacionan con la concavidad positiva o negativa de la función en el punto en cuestión, aspecto que sí es significado gráficamente. Pero el valor numérico en sí de la función derivada segunda no parece ser tenido en cuenta, y menos aún que se realice una interpretación geométrica de él, en el caso de que este sea distinto de cero. Si el valor numérico de la función derivada segunda es cero, y se cumplen ciertas condiciones adicionales, se relaciona a dicho real con un P.I., en donde sí encontramos algunas interpretaciones gráficas relacionadas, evidentemente, al punto anterior. De donde, en nuestro estudio, no encontramos muestras, ni en el análisis de los programas uruguayos, ni en el de los textos, ni en las visitas a clase, de que se signifique gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda.

En cuanto a las derivadas sucesivas de una función son pocos los casos que encontramos donde se haga referencia a órdenes superiores de a dos. En los casos que si se definen encontramos que es por recurrencia, de donde podemos destacar que al darse la definición de derivadas de orden mayor que uno por recurrencia no se establecen relaciones entre la derivada de orden p ($p>1$) y la función inicial, u otra de las derivadas de orden distinto a p-1 o p+1.

En nuestra investigación se han presentado las asociaciones con el valor numérico de la función derivada segunda esperados, hemos visto que los estudiantes lo relacionan inmediatamente con aspectos como “concavidad positiva” y “concavidad negativa”. Pero debemos destacar que, en un principio, los estudiantes no son concientes de que esta relación la están estableciendo solo con el signo de dicho valor numérico y no con el valor numérico en sí, luego al tomar conciencia de ello, en una primer instancia consideran que no pueden significarlo. Como hemos mostrado en el análisis de los resultados, avanzada la secuencia, y luego que los estudiantes se enfrentan a distintos aspectos de la problemática, es que surgen algunas conjeturas, y en todos los equipos la esperada.

Si a los puntos anteriores sumamos las evidencias que hemos presentado, de que tanto los cursos, como los textos que utilizan los estudiantes, transmiten una única matemática cerrada y completa, es que creemos que se limita, entre otros aspectos, la posibilidad de que el estudiante reconstruya los conceptos en juego y que en consecuencia los aprenda significativamente. Es interesante destacar que esta situación no es única en Uruguay, aunque nosotros hemos limitado nuestro estudio a estudiantes de dicho país. "... algunos profesores enseñan matemáticas igual como está en el libro de texto; es decir limitándose a reproducir el contenido en el pizarrón... Esto provoca que la enseñanza se convierta en una exposición de contenidos sin atractivo para los alumnos, donde los ejemplos y ejercicios propuestos no son significativos ni cercanos a su realidad..." (Cantoral, et al., 2000).

Es la creencia de nuestro grupo de investigación, y la nuestra propia, que "el aprendizaje se basa en la actividad creadora y en el descubrimiento de las nociones por parte del alumno, que sea él quien descubra y proponga formas de resolver los problemas" (Cantoral, et al., 2000). Por lo tanto creemos que esta investigación brinda herramientas para generar nuevas actividades que tengan por objetivo que el estudiante signifique gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda en un ambiente de descubrimiento, argumentaciones, confrontaciones. Esto permitirá, en forma específica, que el estudiante enriquezca el concepto derivada segunda al romper las dos asociaciones fundamentales que hemos detectado: "derivada segunda-fórmula" y "derivada segunda–estudio de signo de concavidad", al resignificar el concepto permitiendo una visión gráfica de él, y además llevará a enriquecer el propio concepto "derivada" al realizarse una mirada del concepto desde una óptica no tradicional permitiendo generar una significación gráfica del valor numérico de la función derivada segunda, de la cual hemos dado muestras que no está presente en los cursos ni en los textos analizados. Además creemos que esta nueva visión favorecerá la significación de la función derivada tercera y de las derivadas consecutivas. En forma general permitirá que el estudiante desarrolle su pensamiento y lenguaje variacional, que desarrolle su capacidad de visualizar en matemáticas, y brinda la oportunidad de discutir con compañeros, conjeturar, argumentar, refutar, lo cual ayudará a que las ideas evolucionen hacia ideas más robustas matemáticamente.

De las respuestas de los estudiantes, ya analizadas, podemos deducir que con una secuencia adecuada conjeturarán en forma natural que si *f* y *g* son dos funciones reales y $|f''(a)| > |g''(a)|$ entonces el gráfico de *f* estará más "alejado" de su recta tangente en $x=a$ que el de *g* a la suya en un entorno reducido de "*a*", de donde creemos conveniente enfrentarlos a casos donde no se cumpla dicha conjetura para que puedan completarla agregando la condición $f'(a)=g'(a)$. Creemos que la secuencia debe estar diseñada de forma que no limite otras significaciones del concepto las cuales, evidentemente, lo enriquecerán.

A modo de síntesis:

- Se confirmaron nuestras creencias iniciales de que los estudiantes no significarían gráficamente, en una primer instancia, al valor numérico de la función derivada segunda, y que luego, por la forma que fue diseñada la secuencia, establecerían implícitamente una relación con la curvatura de la función al plantearla en términos de "cercanía" de la gráfica de la función a la recta tangente en juego.

- De la investigación surgieron ricos elementos a partir de los cuales pudimos responder nuestras preguntas de investigación. En este sentido, no solo confirmamos nuestra creencia sino que pudimos construir explicaciones teóricas del desempeño de los estudiantes con base en el las cuestiones del pensamiento y lenguaje variacional.

- A partir del análisis de las respuestas de los estudiantes surgen elementos que permitirán generar actividades tendientes a significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda teniendo en primer plano las construcciones que han surgido de los propios estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2000). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué nos enseñan las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?.* En Cantoral, R. *El futuro del cálculo infinitesimal.* Pp 92-115.

Balparda, O. y Lois, L. (1993). *Matemáticas Sexto-Para el trabajo en clase*. Ediciones de la Plaza, Montevideo Uruguay.

Barwise, J. y Etchemendy, J. (1991). *Visual Information and Valid Reasoning.* En Zimmermann, W. & Cunningham, S. (eds) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Mathematical Association of America. Pp 9-24.

Belcredi, L. et al. (2001). *Introducción al análisis matemático*. Ediciones de la Plaza. Montevideo. Uruguay.

Brousseau, G. (1983). *Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques.* Recherches en Didactique des Mathématiques , 4(2), pp 165 –198.

Buendía, G. y Cordero, F. (2002). *Las prácticas sociales como generadoras de conocimiento. La predicción y lo periódico*. En Serie: Antologías No. 2. Programa Editorial de la Red Nacional de Cimates pp. 137-150.

Cantoral, R. (2002). *Pensamiento y lenguaje variacional*. Curso de maestría de CICATA. México.

Cantoral, R. (1988). *Historia del cálculo y su enseñanza: Del trazado de tangentes al concepto de derivada.* Publicaciones Centroamericanas 2. Pp 381-386. México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). *Matemática Educativa: Una visión de su evolución.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 6. Nº 1. México: Thomson.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). *Mathematics Education: a vision of its evolution.* Educational Studies in Mathematics 53: 255–270, 2003. © 2003 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.,2 En Matemática Educativa: Una visión de su evolución.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis.* En Cantoral, R. *El futuro del cálculo infinitesimal.* Grupo Editorial Iberoamericana, S. A. de C.V. México. Pp. 69-91.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. Epsilon, Revista española de educación matemática 42: 353 – 369.

Cantoral, R. et al (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Editorial Trillas. México.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). *Una presentación visual del polinomio de Lagrange*. Números, Vol. 55. España.

Chevallard, Y. (2000). *La Transposición Didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. (3ª Ed.) Buenos Aires: Aique Grupo Editor S.A.

Chevallard, Y. et al (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Cuadernos de Educación, 22. Barcelona: Horsori Editorial.

Cordero, F. (2001). *La distinción entre construcciones del Cálculo. Una espistemología a través de la actividad humana*. RELIME Volumen 4 Nº 2.

Cordero, F. (1998). *El entendimiento de algunas categorías del cálculo y análisis: el aso del comportamiento tendencial de las funciones*. RELIME Nº 1.

Cordero, F. y Solís M. (1997). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo* (2° Edición). Serie Cuadernos de didáctica. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

De Guzmán, M. (1996). *El papel de la visualización*. El Rincón de la Pizarra. Capitulo 0. Pirámide, Madrid.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Dolores, C. (1989). *Algunos obstáculos epistemológicos relativos a la noción de derivada*. Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, celebrada en San José de Costa Rica en julio de 1989.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1991). *On the reluctance to visualize in mathematics*. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.). *Visualization in teaching and learning in mathematics*. MAA Notes No. 19, pp 25-38.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1990). *On Difficulties with Diagrams: Theoretical Issues*. Proceedings of PME 14 Conference, Vol. 1, Pp 27-34. México.

Dreyfus T. (1991). *Advanced mathematical Thinking Processes*. En D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordretch: Kluwer.

Duffour, (1998). Funciones, funciones. Matemática de sexto todas las orientaciones. Ediciones Matemática 2000. Uruguay.

Farfán, R. et al., (2001). *Acercamiento gráfico a la resoluciones de desigualdades*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Freire, P. (1994). *Educación y participación comunitaria.* En Castells, M & et. Al *Nuevas perspectivas críticas en educación*. Ediciones Paidos. Madrid.

Freire, P. (1970). *Pedagogía del oprimido* .Siglo XXI de España editores. Madrid.

García, Ma. D. (1998). Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo. Tesis de maestría. Cinvestav. Máxico.

Gascón, J. (2001). *Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes*. En RELIME Vol. 4, Núm. 2, 2001.

Giovannini, E. (1998). *Funciones Reales. Matemáticas para sexto año.* Uruguay.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de maestría. Cinvestav. México

Moreno, L. (1995). *La educación matemática en México*. En *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Pp. 25-31. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Piskunov, N. (1986). Calculo diferencial e integral, Tomo I, Editorial Mir , Moscú.

Rey Pastor, et al. (1969). *Análisis Matemátic*o. Volumen I. Editorial Kapelusz. Buenos Aires. Argentina. Pp. 433-469, 515.

Sipvak, M. (1992). *Calculus*. Editorial Reverté S. A. Barcelona, España. Pp. 274, 197-283, 302-313.

Skemp, R. (1976). *Relational Understanding and Instrumental Understanding.* Mathematics teaching 26(3), 9-15.

Solano, A. y Presmeg, N. (1995). *Visualization as a relation of images*.

Vinner, Sh (1991). *The role of definitions in teaching and learning*. En Tall, D. (ed) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer. Dordretch/Boston/London. Pp. 65-81.

Valero, M. (2000). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas*. Tesis de maestría. Cinvestav. México.

Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dauterman, J., (1996). *Coordinating visual and analytic strategies: a study of student's understanding of the Group D4.* Journal of Research in Mathematics Education. Vol. 27, No. 4, pp 435 – 457

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Introducción de los editores *¿Qué es visualización matemática?* Mathematical Association of America.

Programas uruguayos oficiales vigentes de sexto año de secundaria

Opción Ingeniería

- Número real.

Fundamentación axiomática. Nociones de las funciones exponencial y logaritmo.
Nociones sobre la topología usual de los reales: Conjuntos abiertos, cerrados, entornos, puntos de acumulación.

- Sucesiones.

Límite de sucesiones. Sucesiones monótonas y sus límites. Pares de sucesiones monótonas convergentes. Número e.
Operaciones con sucesiones y cálculo de sus límites.
Equivalencias. Orden de infinitésimos e infinitos. Ejemplos.

- Funciones.

Gráfico. Ejemplos. Función compuesta. Función inversa.
Límite de una función. Operaciones con funciones y cálculo de sus límites.
Límite de la función compuesta.

- Funciones continuas.

Definición de continuidad en un punto. Ejemplos de funciones continuas y discontinuas.
Operaciones con funciones continuas. Continuidad de la función compuesta.

- Funciones derivables.

Definición de derivada en un punto. Interpretación geométrica.
Definición de tangente . Ejemplos de funciones continuas derivables y no derivables.
Función derivada. Operaciones con funciones derivables; reglas de derivación.
Derivabilidad de la función compuesta.

- Funciones continuas en intervalos.

Teoremas de Bolzano, Darboux y Weierstrass. Aplicaciones.

- Funciones derivables en intervalos.

Función creciente en un punto. Extremos relativos. Vinculación con la derivada en un punto.
Teoremas de Rolle y de Lagrange. Aplicaciones. Crecimiento en un intervalo. Criterios de extremos. Teoremas de Cauchy y de L'Hôpital. Aplicaciones al cálculo de límites.

- Funciones inversas.

Existencia, monotonía, continuidad y derivabilidad de las funciones inversas.
Aplicaciones.
Funciones trigonométricas inversas.

- Estudio de funciones.

Crecimiento y extremos. Concavidad e inflexiones. Asíntotas. Representación gráfica.
Métodos de separación y aproximación de raíces.

- Series numéricas.

Ejemplos. Convergencia. Series de términos positivos. Criterios de comparación. Criterios de D'Alembert y de Cauchy. Clasificación de la serie armónica generalizada. Series alternadas. Convergencia absoluta. Serie de Euler. Aplicaciones.

- Aproximaciones de funciones por polinomios.

Fórmula de Taylor con resto de Lagrange.
Aproximación local de una función por un polinomio. Aplicación al cálculo de límites.
Series de potencias. Intervalo de correspondencia. Ejemplos.
Series de Taylor . Aproximación de una función por un polinomio en un intervalo. Condiciones suficientes. Ejemplos.

Opción Arquitectura

- Geometría analítica.

Objeto y método de la Geometría Analítica. Eje orientado. Segmento orientado. Abscisa. Principio fundamental de la Geometría Analítica. Teorema de Chasles. Sistemas coordenados.
Recta. Ecuaciones(general, explícita y segmentaria). Condiciones de paralelismo y perpendicularidad. Ángulos. Distancias. Áreas.
Circunferencia y parábola. Ecuaciones. Problemas relativos.
Elipse e hipérbola. Ecuaciones reducidas. Hipérbola equilátera. Ecuación de la hipérbola equilátera referida a las asíntotas. Problemas relativos a estas cónicas. La elipse como proyección de una circunferencia.

- Funciones.

Representación gráfica. Límites. Límites notables. Ordenes. Límites tipo.

- Funciones continuas.

Discontinuidades. Operaciones con funciones continuas. Función de función. Función inversa. Definición y continuidad de las funciones trascendentes.

- Funciones derivables.

Derivada puntual. Interpretación geométrica. Cálculo de derivadas. Función derivada primera y segunda. Diferenciales.

- Estudio de funciones.

Crecimiento. Decrecimiento. Máximos y mínimos en un punto y en un intervalo. Asíntotas.

- Teoremas de Rolle y de Lagrange.

Consecuencias del teorema de Lagrange: condiciones suficientes de extremos relativos, condiciones suficientes de crecimiento (decrecimiento) en un intervalo, concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las funciones. Estudio completo de funciones.

- Geometría descriptiva.

Objeto y método de la Geometría Descriptiva. Proyecciones del punto y de la recta. Paralelismo entre rectas.

Representación del plano. Rectas notables en un plano. Paralelismo entre planos y entre recta y plano.
Intersección de planos y de rectas y planos. Aplicaciones.
Proyecciones de un ángulo recto. Perpendicularidad entre planos y entre planos y rectas. Aplicaciones.
Métodos de abatimiento. Cambio de plano vertical y giro de eje vertical. Problema directo e inverso. Aplicación a verdaderas magnitudes.
Poliedros. Representación de prismas y pirámides, cubos, tetraedros y octaedros regulares. Secciones planas. Intersección con una recta. Intersección de dos poliedros.
Casos especiales de prismas y pirámides.
Cono y cilindro de revolución. Intersección con una recta. Planos tangentes.
Secciones planas de conos y cilindros de revolución. Verdadera magnitud de la sección.
Proyecciones de una circunferencia.
Intersecciones de conos y cilindros de revolución.

Opción Medicina-Agronomía

- Número real.

Axiomas de cuerpo ordenado. Propiedades. Valor absoluto. Definición y propiedades.
Axioma de completitud. Aplicaciones. Número e.
Las funciones exponencial y logaritmo. Nociones y propiedades.

- Elementos de Geometría Analítica Plana.

Sistema cartesiano ortogonal en el plano. Distancia entre dos puntos. Ecuación de la recta. Paralelismo y perpendicularidad. Ecuaciones de la circunferencia y de la parábola.

- Funciones.

Gráfico. Ejemplos. Función compuesta. Función inversa.
Límite de una función. Operaciones con funciones y cálculo de sus límites.
Equivalencias. Órdenes de infinitésimos e infinitos. Ejemplos. Límites tipo.

- Funciones continuas.

Definición de continuidad en un punto. Ejemplos de funciones continuas y discontinuas.
Operaciones con funciones continuas. Continuidad de la función compuesta.

- Funciones derivables.

Definición de derivada en un punto. Interpretación geométrica.
Definición de tangente . Ejemplos de funciones continuas derivables y no derivables.
Función derivada.
Operaciones con funciones derivables. Reglas de derivación.
Derivabilidad de la función compuesta.

- Funciones continuas en intervalos.

Teoremas de Bolzano, Darboux y Weierstrass. Aplicaciones.

- Funciones derivables en intervalos.

Función creciente en un punto. Extremos relativos. Vinculación con la derivada en un punto.

Teoremas de Rolle y de Lagrange. Aplicaciones. Crecimiento en un intervalo. Criterios de extremos.

- Estudio de funciones.

Crecimiento y extremos. Concavidad e inflexiones. Asíntotas. Representación gráfica.

- Integrales.

Definición de Integral Definida. Aplicación a funciones monótonas y continuas.
Enunciado de las propiedades de aditividad y linealidad. Teorema del valor medio.
Regla de Barrow. Aplicaciones.

Opción Economía

- Número real.

Axiomas de cuerpo ordenado. Propiedades. Valor absoluto. Definición y propiedades.
Axioma de completitud. Aplicaciones. Teorema de Arquímedes. Existencia de la raíz enésima. Representación decimal.
Las funciones exponencial y logaritmo. Nociones y propiedades.

- Sucesiones.

Límite de sucesiones. Sucesiones monótonas y sus límites. Pares de sucesiones monótonas convergentes. Número e.
Operaciones con sucesiones y cálculo de sus límites.
Equivalencias . Ordenes de infinitésimos e infinitos. Ejemplos.

- Funciones.

Gráfico. Ejemplos. Función compuesta. Función inversa.
Límite de una función. Operaciones con funciones y cálculo de sus límites.

- Funciones continuas.

Definición de continuidad en un punto. Ejemplos de funciones continuas y discontinuas.
Operaciones con funciones continuas. Continuidad de la función compuesta.

- Funciones derivables.

Definición de derivada en un punto. Interpretación geométrica.
Definición de tangente . Ejemplos de funciones continuas derivables y no derivables.
Función derivada.
Operaciones con funciones derivables; reglas de derivación.
Derivabilidad de la función compuesta.

- Funciones continuas en intervalos.

Teoremas de Bolzano, Darboux y Weierstrass. Aplicaciones.

- Funciones derivables en intervalos.

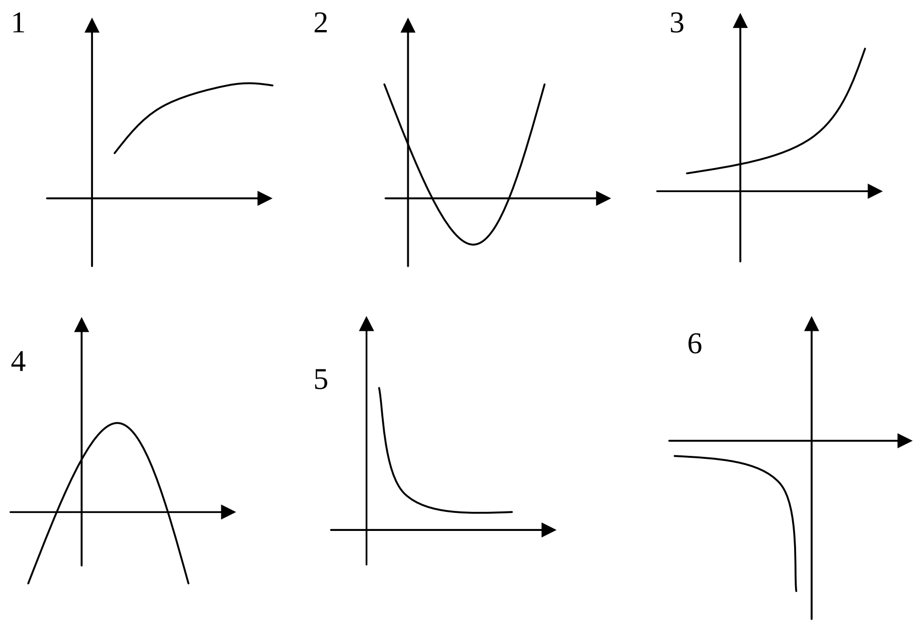
Función creciente en un punto. Extremos relativos. Vinculación con la derivada en un punto.
Teoremas de Rolle y de Lagrange. Aplicaciones. Crecimiento en un intervalo. Criterios de extremos.

- Estudio de funciones.

Crecimiento y extremos. Concavidad e inflexiones. Asíntotas. Representación gráfica. Métodos de separación y aproximación de raíces.

Actividad 1

Trabajaremos con los siguientes gráficos de funciones.



1) Analiza similitudes y diferencias entre los gráficos, teniendo en cuenta su forma.

2) Realiza diversas clasificaciones de los gráficos según sus similitudes.

Actividad 2

1) Las gráficas 1, 4, 6, ¿aparecen juntas en alguna de las clasificaciones que realizaste?

2) ¿Qué nombre le darías a las gráficas de ese tipo y por qué? Simbolizaremos este nombre con "A".

3) Las gráficas 2, 3, 5, ¿aparecen juntas en alguna de las clasificaciones que realizaste?

4) ¿ Qué nombre le darías a las gráficas de ese tipo y por qué? Simbolizaremos este nombre con "B".

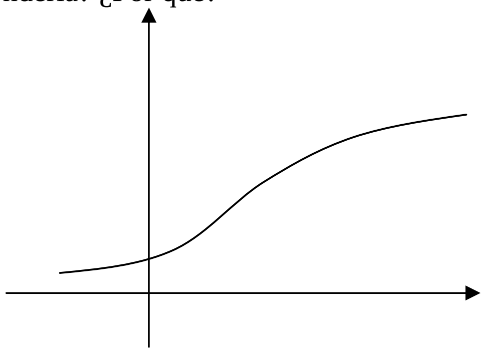
5) En todas las gráficas toma dos puntos cualesquiera, explica la relación entre la cuerda que determinan y el gráfico en ese intervalo.

6) A partir de la actividad anterior clasifica los gráficos. Compara esta clasificación con la que hiciste en A y B.

7) ¿Cómo explicarías a un compañero cuando una gráfica es del tipo "A"? ¿Y del tipo "B"?

Actividad 3

1) ¿Cómo clasificarías este gráfico según el criterio anterior? ¿Qué nombre le correspondería? ¿Por qué?

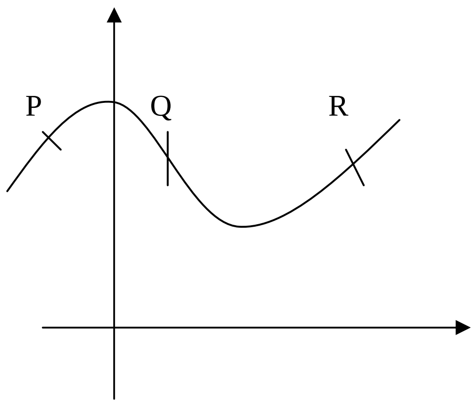


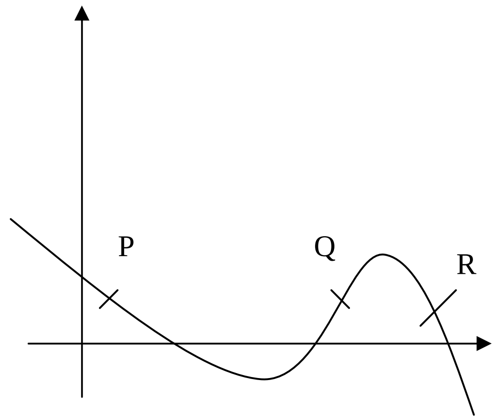
2) ¿Puede una gráfica ser “A” y “B” en un mismo intervalo? En caso afirmativo realiza un esbozo de la gráfica.

3) Una gráfica, ¿puede ser en algunos intervalos “A” y en otros “B”? En caso afirmativo realiza un esbozo de la gráfica.

Actividad 4

1) En los siguientes gráficos marca con rojo la parte del gráfico que es “A” y con azul la que es “B”.





2) ¿Qué puedes decir de los puntos P, Q y R en relación a tu anterior clasificación?

3) Alguno de los puntos anteriores, ¿te parece que cumple alguna condición especial? ¿Por qué? ¿Qué nombre le darías?

PRESENTACIÓN DE LA ACTIVIDAD ESCRITA INDIVIDUAL

Equipo 1

Lucia (L), Juan (Ju), Maximiliano (M), Alejandro (A), Jimena (Ji), Santiago (S)

ACTIVIDAD I

Pregunta 1

Todos marcan la zona del grafico que se encuentra contenida en los cuadrantes I y II.

Tres alumnos excluyen los casos en que $f(x)=0$ y tres no.

Pregunta 2

Todos marcan la zona del grafico dónde la función es creciente.

Tres alumnos excluyen los casos en que $f\,´(x)=0$ y tres no.

Pregunta 3

Todos, menos Juan, marcan la zona del grafico dónde la función presenta concavidad positiva, aunque ubican en distintos lugares los puntos de inflexión (PI). Juan marca la zona del gráfico donde la concavidad es negativa.

Pregunta 4

Santiago: No conozco la interpretación gráfica de la derivada tercera de una función.

Jimena: No se.

Alejandro: Nada.

Lucía: Gráficamente no se qué representa $f\,´´´(x)>0$.

Maximiliano: No se me ocurre cómo relacionar lo anterior acerca de la interpretación geométrica de $f\,´$, $f\,´´$ con $f\,´´´$.

Juan: No puedo hacerlo porque (hasta donde se) la derivada tercera no tiene interpretación geométrica sobre el gráfico.

ACTIVIDAD II

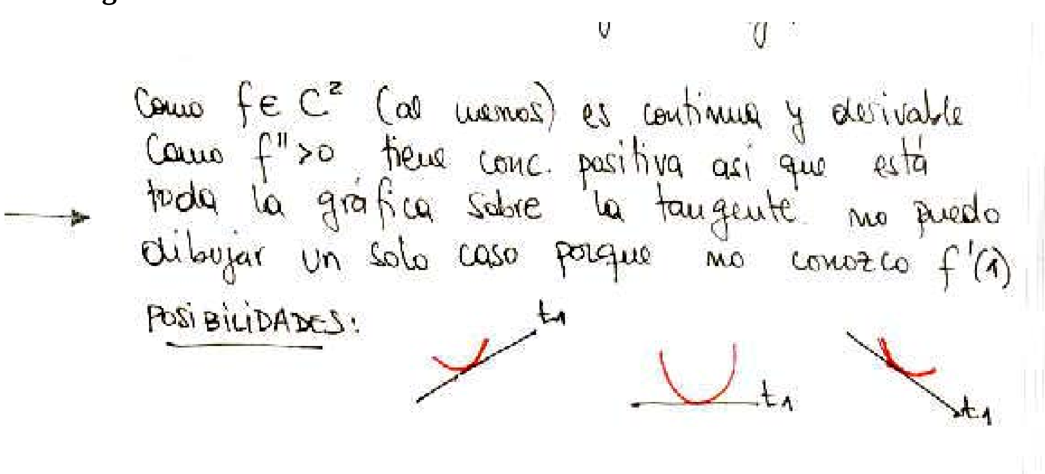
a) Todos lo realizan correctamente.

b) Todos, menos Alejandro, plantean, y dibujan, un gráfico cuya recta tangente en x=2 tiene coeficiente angular 3. Jimena presenta un caso particular $f(x)=3x$ y Juan dibuja distintas posibilidades. Alejandro indica: “El gráfico de la función f presenta tangente positiva en el punto de abscisa 2”

c) Todos, menos Alejandro, plantean, y dibujan, un gráfico cuya recta tangente en x=4 tiene coeficiente angular -2. Santiago y Jimena plantean un caso particular, $f(x)= -2x+3$, $f(x)= -2x+8$. Juan dibuja distintos casos. Alejandro: “La representación gráfica de la función f presenta tangente negativa (de coeficiente angular –2) en el punto de abscisa 4”

d) Santiago y Jimena dan casos particulares que lo cumplen, $f(x)=-2/3\ x^3$, $f(x)=2x^2$. Los otros cuatro estudiantes plantean que la función presenta concavidad positiva en x=1 y realizan bosquejos acorde. Maximiliano además, indica que el gráfico en ese punto debe ser tangente a una recta de coeficiente angular negativo. Juan plantea varios gráficos:

Imagen 12



e) Santiago y Jimena plantean casos particulares, $f(x)=-x^2$, $f(x)=-x^2+2$. Los demás indican que la función presenta concavidad negativa en $(3,f(3))$. Juan Dibuja varios casos y Maximiliano indica que además el gráfico es tangente, en ese punto, a una recta de pendiente positiva.

ACTIVIDAD III

a) Alejando Jimena y Lucia indican que es falsa porque en ese punto la concavidad de la función es negativa. Maximiliano, Juan y Santiago indican que puede ser, que en ese punto la concavidad es positiva, que $f''(x)>0$ pero no pueden asegurar qué valor es.

b) Juan indica que "puede ser porque $f''(1)< 0$, pero no sé si $f''(1)=-2.5$". Los demás indican que es falsa porque $f''(1)$ debe ser positivo porque en ese punto la concavidad de la función es positiva.

c) Lucia indica que es verdadera. Alejandro y Santiago que puede ser porque en ese punto la concavidad es negativa. Juan que "no, porque parece ser que $f''(5)=0$ o $f''(5)>0$". Jimena que "no puede ser pues $f(5)=0$ (aparentemente) Maximiliano responde que no porque $f(5)$ está demasiado cerca del P.I. de f, dice que "podría ser negativo (por su concavidad) pero más próximo a cero".

d) Maximiliano responde que "puede ser, depende de cuán cerca se encuentre del P.I. el punto $(8, f(8))$ con respecto al punto $(1, f(1))$, y así $f''(8)$ va a estar más cerca de cero que $f''(1)$". Juan responde que es verdadera porque $f''(1)<0<f''(8)$. Los demás responden falsa porque $f''(8)<0$ y $f''(1)>0$.

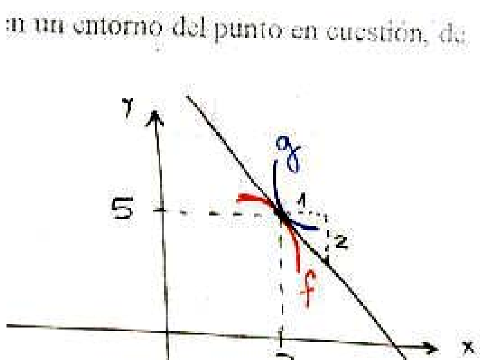
e) Maximiliano responde que no, porque el punto $(-3.8,f(-3.8))$ está más cerca del P.I. que el punto $(-5,f(-5))$. Lucia: "no puedo afirmar nada". Santiago responde confundiendo el dato con $x=3.8$. Los demás indican que puede ser porque ambos tienen el mismo signo.

f) Lucía: no puedo afirmar nada. Juan: puede ser, los dos son negativos. Alejandro: sí, porque $f''(2)=0$ y $f''(3)>0$. Juan plantea que ambas son positivas y seguro que $f''(3)>f''(2)$. Santiago: no, porque la función derivada segunda parece tener raíces 0 y 4 y sería un polinomio de segundo grado. En $x=2$ sería positiva y correspondería al máximo, entonces $f''(2)\geq f''(x)\ \forall x \in R$. Maximiliano: No por la misma condición anterior.

ACTIVIDAD IV

a) Todos ubican el punto (3,5), trazan una recta por él de coeficiente angular –2 y un gráfico tangente a ella con concavidad positiva y otro con concavidad negativa en dicho punto:

Imagen 13



Maximiliano dibuja al gráfico de *f* con un PI próximo a (3,5).

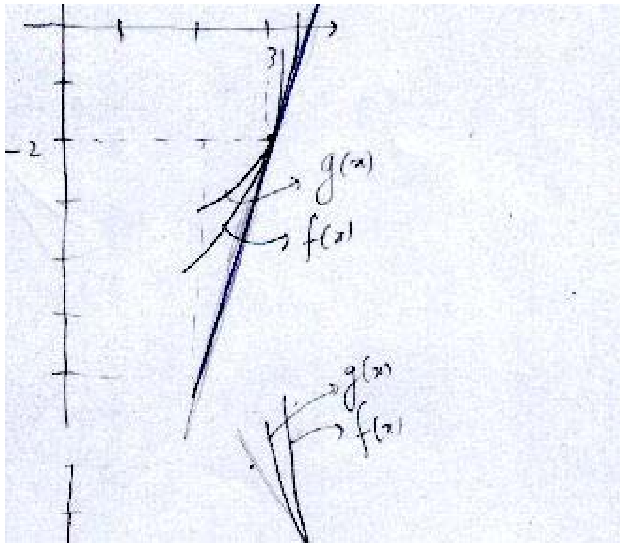
b) Todos hacen cumplir las primeras dos condiciones.

Santiago, Juan y Jimena ubican al gráfico de la función *g* “más alejado”[1] de la recta tangente que el de *f* en un entorno del punto en cuestión. Maximiliano dibuja el gráfico de la función *f* con un PI “próximo a (3,-2). Los demás ubican al gráfico de *f* más alejado de dicha tangente que el de *g*:

Santiago:

[1] Consideraremos que el gráfico de una función *f* está más próximo (o menos alejado) a su tangente *t* en $(a,f(a))$ que el de la función *g* a su recta tangente *r* en $(a,g(a))$ sí y solo si existe un entorno reducido de centro *a* tal que para todo real *x* del entorno reducido la distancia de $(x,f(x))$ a *t* es menor que la distancia de $(x,g(x))$ a *r*.
En forma similar podemos definir “igual proximidad”.

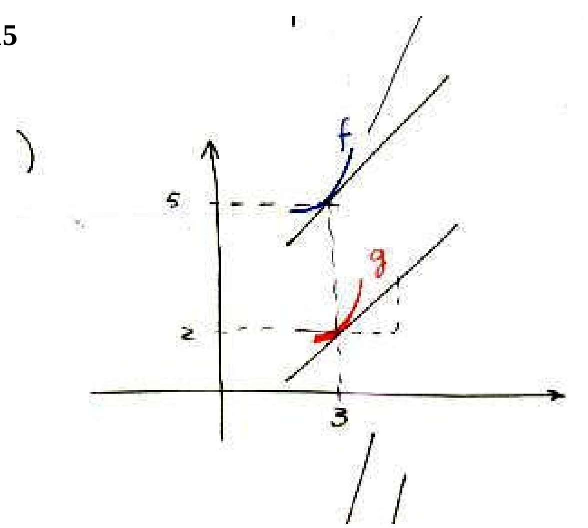
Imagen 14



c) Santiago, Juan y Jimena hacen cumplir las dos primeras condiciones y ahora ubican al gráfico de la función *f* más alejado de la recta tangente que el de *g* en un entorno del punto en cuestión. Alejandro grafica *f*=*g*. Lucia trabaja en el punto (3,-2) y no en el (3,5) y ahora ubica al gráfico de la función *f* más alejado de la recta tangente que el de *g* en un entorno del punto en cuestión. Maximiliano dibuja el gráfico de *g* con un P.I. en (3,5) y en un entorno derecho de dicho punto el gráfico de *g* está más alejado de la recta tangente que el de *f*.

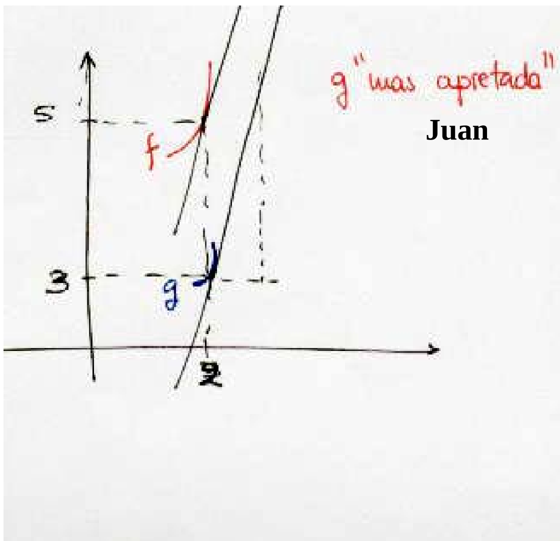
d) Todos dibujan gráficos tangentes a rectas que cumplen las dos primeras condiciones dadas y que parecen corresponderse en una translación:

Imagen 15

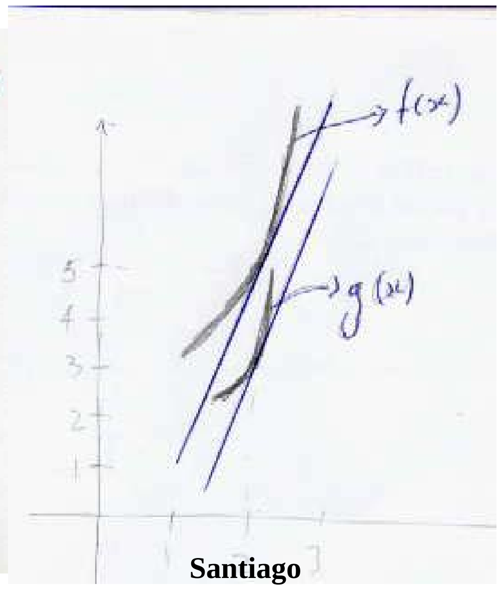


e) Todos hacen cumplir las dos primeras condiciones. Santiago, Lucía y Juan dibujan al gráfico de *g* es “más apretado” que el de *f*. Maximiliano dibuja al gráfico de *f* con un P.I. más próximo a (2,5) que el P.I. de *g* a (2,3). En los demás casos no se logra deducir si consideran o no la tercer condición, y de ser así, cómo influye está en el gráfico.

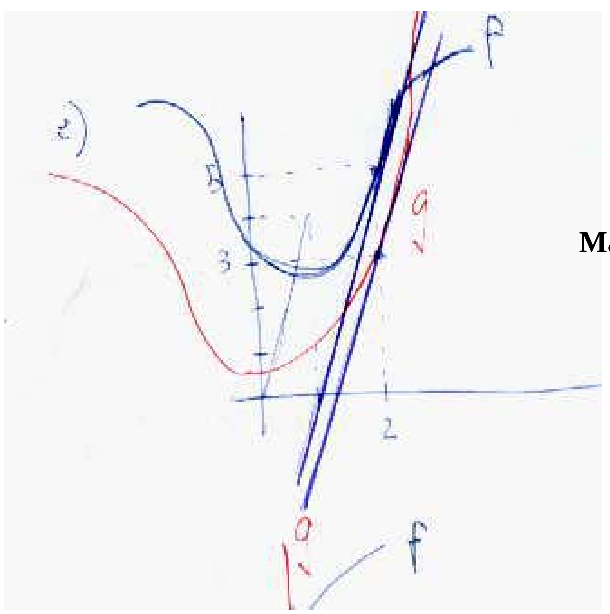
Imagen 16



Juan



Santiago



Maximiliano

f) Santiago y Juan dibujan el gráfico de la función *g* más "cerrado" que el de *f* respecto a la recta tangente correspondiente. Maximiliano dibuja el gráfico de *f* con un PI en (1,4). En las demás respuestas no se distinguen argumentos sobre la tercer condición.

f) Santiago y Juan dibujan el gráfico de la función *g* igual de "cerrado" que el de *f* respecto a las rectas tangentes correspondientes. Maximiliano parece dibujar los gráficos de las funciones *f* y *g* con un P.I. a igual distancia de los puntos de tangencia correspondientes.

ACTIVIDAD V

Tabla 1

	$f(a) = g(a)$	$f(a) < g(a)$	$f(a) > g(a)$	No responde
a	Todos			
b	Todos			
c			Todos	
d			Todos	
e			Todos	
f			Todos	
g			Todos	
h			Todos	

	$f\,'(a) = g\,'(a)$	$f\,'(a) < g\,'(a)$	$f\,'(a) > g\,'(a)$	No responde
a	Todos			
b	Todos			
c	L, S, Ju, M,A		Ji	
d	L, S, Ju, M,A	Ji		
e	L, S, Ju, M,A	Ji		
f			Todos	
g			Todos	
h			Todos	

	$f\,''(a)=g\,''(a)$	$f\,''(a)<g\,''(a)$	$f\,''(a)>g\,''(a)$	No responde
A			Todos	
B	L	A, Ji	M, Ju, S.	
C			Todos	
D	L, M, Ju, S	A($\leq$), Ji.		
E		L, M, Ju, S, Ji	A	

F	L, M, Ju		Ji, A(≥)*	S
G		L, M, Ju	Ji, S	A
H		L, M, S, Ju	A, Ji	

* Alejandro en este ítem responde $f''(a) \geq g''(a)$

Equipo 2

Estudiantes de sexto año liceal opción medicina: Gastón, Luciana (Lu), Ignacio, Patricia, Leticia (Le) y Sebastián.

ACTIVIDAD I

Pregunta 1

Gastón marca la parte del grafico que se encuentra contenida en el cuadrante I.

Los demás marcan la parte del grafico que se encuentra contenida en los cuadrantes I y II

Ninguno excluye los casos que $f(x)=0$.

Pregunta 2

Ignacio, Luciana y Sebastián marcan la parte del grafico dónde la función es creciente sin excluir los casos que $f'(x)=0$.

Gastón marca la parte del grafico que se encuentra contenida en el cuadrante I y tiene concavidad negativa.

Patricia y Leticia marcan distintas zonas del gráfico donde $f(x)$ mantiene el signo y es constante.

Pregunta 3

Luciana, Ignacio Sebastián y Leticia marcan la parte del grafico dónde la función presenta concavidad positiva, aunque ubican en distintos lugares los P.I. Gastón marca la parte del gráfico que se encuentra contenida en el cuadrante I y tiene concavidad negativa.

Patricia marca la parte del gráfico dónde la función presenta concavidad positiva y $f(x)<0$.

Pregunta 4

Luciana: No aprendimos en clase *f ´´*(*x*), no se cómo es.

Patricia: Derivada 3er no.

Leticia: Nunca lo aprendí.

Ignacio: No tengo idea.

Sebastián: Nunca estudié *f ´´´*(x).

ACTIVIDAD II

a) Todos lo realizan correctamente menos Gastón que no responde.

b) Solo Ignacio y Sebastián dibujan un gráfico cuya tangente en *x*=2 tiene coeficiente angular 3.

Luciana grafica una función creciente cuyo gráfico pasa por el punto (2,3).

Los demás no responden.

c) La misma situación que en la parte b.

d) Luciana: No se aplicar derivada segunda en el gráfico, solo sé que es el cambio de concavidad.

Ignacio y Luciana dibujan un gráfico con concavidad positiva en *x*=1.

Los demás no responden.

e) Ignacio y Luciana dibujan el gráfico de una función con concavidad negativa en *x*=3.

Los demás no responden.

ACTIVIDAD III

a) Sebastián, Leticia y Luciana indican que es falsa sin justificar, Ignacio argumenta que en ese punto la concavidad de la función es negativa. Gastón responde que puede ser. Patricia responde falsa pero confunde *f ´´*(-3,8) con *f*(-3,8).

b) Sebastián y Leticia indican que es falsa sin justificar, Ignacio y Luciana argumentan que en ese punto la concavidad de la función es positiva. Gastón responde que seguramente es verdadera. Patricia responde verdadera pero nuevamente confunde $f''(1)$ con $f(1)$.

c) Ignacio y Sebastián indican que puede ser verdadera. Gastón que no puede ser. Luciana y Leticia indican que es falsa sin justificar. Patricia nuevamente confunde con la imagen de la función y responde que es falsa porque es cero.

d) Ignacio y Luciana indican que es falsa justificando que en x=1 la concavidad de la función es positiva y en 8 negativa. Gastón responde que no puede ser pero no justifica.

Sebastián responde que puede ser, Leticia y Patricia que es verdadera pero no justifican.

e) Ignacio y Luciana responden que no se puede contestar, Ignacio justifica "porque en ambos casos la concavidad es negativa". Gastón responde que puede ser, Sebastián y Patricia que es falsa, todos sin justificar.

f) Patricia y Gastón no responden, Luciana que podría ser verdadera, Sebastián que es falsa y Leticia que es verdadera. Ignacio responde que no la puede contestar por razones similares a la parte anterior solo que con concavidad positiva.

ACTIVIDAD IV

a) Patricia y Gastón no responden.

Ignacio y Sebastián ubican el punto (3,5), trazan una recta por él de coeficiente angular –2 y un gráfico tangente a ella con concavidad positiva y otro con concavidad negativa en dicho punto.

Leticia y Luciana ubican el punto (3,5), trazan un gráfico con concavidad positiva y otro con concavidad negativa en dicho punto, pero no trabajan con la recta tangente.

b) Patricia, Gastón y Luciana no responden.

Ignacio y Sebastián ubican el punto (3,-2), trazan una recta por él de coeficiente angular 4 y los gráficos de las funciones *f* y *g* son tangentes a ella con concavidad positiva en dicho punto. Ambos dibujan el gráfico de *f* “dentro” del de *g*. (Imagen 17)

Leticia trabaja en forma similar (con el gráfico de *f* “dentro”) pero no traza la recta tangente.

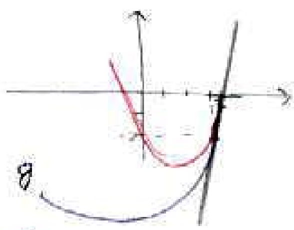


Imagen 17

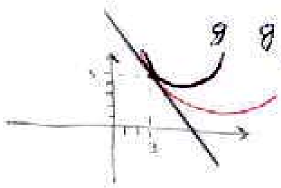


Imagen 18

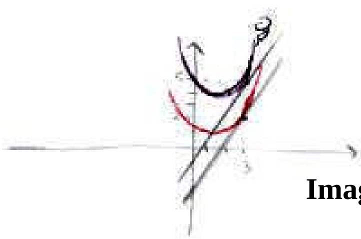


Imagen 19

c) Patricia y Gastón no responden.

Luciana y Leticia trazan dos gráficos que se intersectan en (3,5), los de Leticia crecientes y los de Luciana decrecientes en dicho punto.

Ignacio y Sebastián ubican el punto (3,5), trazan una recta por él de coeficiente angular -2 y los gráficos de las funciones *f* y *g* son tangentes a ella con concavidad positiva en dicho punto. En este caso ambos dibujan el gráfico de *g* “dentro” del de *f*. (Imagen 18)

d) Patricia y Gastón no responden.

Los demás trazan los gráficos de las funciones *f* y *g* correspondientes en una translación.

Además Sebastián e Ignacio los trazan tangentes a una recta de coeficiente angular 4 en (3,2) y (3,5) respectivamente. (Imagen 19).

e) Gastón, Patricia y Leticia no responden.

Luciana traza los gráficos con concavidad positiva en el punto indicado.

Ignacio y Sebastián hacen cumplir las dos primeras condiciones y dibujan el gráfico de la función *g* más próximo a la recta tangente en un entorno del punto en cuestión. (Imagen 20)

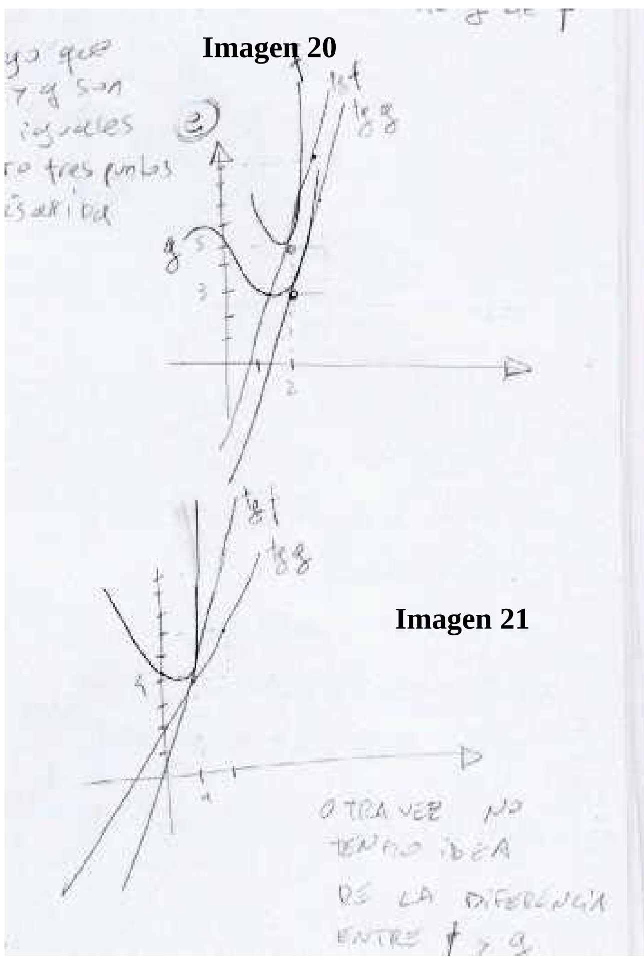


Imagen 20

Imagen 21

f) Patricia, Leticia y Gastón no responden.

Luciana traza los gráficos con concavidad positiva en el punto indicado y en un entorno de él $g(x)>f(x)$.

Sebastián traza una única recta tangente y $f(x)>g(x)$ en un entorno del punto de tangencia.

Ignacio hace cumplir a los gráficos las dos primeras condiciones, no se logra diferenciar aspectos de la tercer condición.

g) Patricia, Leticia y Gastón no responden.

Ignacio y Sebastián trazan dos rectas por (1,4) de coeficientes angulares 5 y 2 pero dibujan un solo gráfico tangente a ellas en ese punto. (Imagen 20).

Luciana dibuja dos gráficos tangentes en (1,4) y $f(x)>g(x)$.

ACTIVIDAD V

Tabla 2

	$f(a) = g(a)$	$f(a) < g(a)$	$f(a) > g(a)$	No responde
A	Todos			
B	I, S, G, Lu, Le	G		
C	P, G.		Lu, Le, I, S.	
D			Todos	
E			Todos	
F		G	Le, Lu,, I, P, S	
G			Todos	
H			Todos	

	$f´(a) = g´(a)$	$f´(a) < g´(a)$	$f´(a) > g´(a)$	No responde
A	I, S	G	Lu, Le	P
B	I, S, G, P.	Lu, Le		
C		Lu	Le, G, P	I, S.
D	S, I, G, L	Le($\leq$)		P
E	I, S	Lu, G	Le($\geq$)	P
F			Todos	
G	Le, P	S	Lu, G, I	
H			Todos	

	$f´´(a)=g´´(a)$	f $´´(a)<g´´(a)$	$f´´(a)>g´´(a)$	No responde
A			Todos	
B		S, Le	Lu, P, G.	I(*)
C			Todos	
D	Le, P, Lu, S, I.	G.		
E	P, G, Le	Lu	I(**), S	
F	Le, G	P	Lu, I(***), S	

G	Le	S, G, Lu		I, P
H	Le	Lu, G, P, S	I	

(*) “No tengo idea si el hecho de que la gráfica sea más o menos cóncava tiene algo que ver con el valor numérico de la derivada segunda y ya me estoy enojando”.
(**) “Se me ocurre que $f''(a)$ es mayor que $g''(a)$ porque el gráfico es más abierto”
(***) “Puse esto por lo mismo que justifiqué en la anterior, es algo que se me ocurrió a mí, pero no sé si está bien”

Equipo 3

El equipo se conforma con tres estudiantes del IPA: Anabel, Fernando y Bonifacio.

ACTIVIDAD I

Pregunta 1
Todos marcan la parte del grafico que se encuentra contenida en los cuadrantes I y II excluyendo los casos que $f(x)=0$.

Pregunta 2
Todos marcan la parte del grafico dónde la función es creciente, excluyen los casos que $f'(x)=0$.

Pregunta 3
Todos marcan la parte del grafico dónde la función presenta concavidad positiva, excluyen los casos en que $f''(x)=0$, hay diferencias en la ubicación del P.I.

Pregunta 4
Bonifacio :”Ni idea”.
Ana hace intentos pero no responde.
Fernando marca $(x, f(x))$ para $x<a$ y $x>b$ siendo a la abscisa del primer mínimo y b la del primer máximo.

ACTIVIDAD II

a) Todos lo realizan el gráfico de una función que pasa por el punto (-3,4). Ana dibuja 6 casos distintos, Fernando un gráfico formado solo por el punto (-3,5) y Bonifacio dibuja en un entorno de dicho punto.

b) Ana deduce que si existe $f\,'(2)$ f es continua en un entorno de 2 y creciente en otro entorno de 2, grafica en consecuencia varios casos ($f(2)=0$, $f(2)>0$ y $f(2)<0$). Fernando escribe: "$f(x)$: $R \to R$ / $f(x)= 3x+b$", dibuja un caso.
Bonifacio "la igualdad anterior significa que para $x=2$ la pendiente de la curva es positiva, es decir inclinada hacia la derecha", dibuja un gráfico tangente en $x=2$ a una recta de coeficiente angular positivo.

c) Responden en forma similar a la parte b.

d) Todos dibujan el gráfico de una función con concavidad positiva en $x=1$. Ana considera un extremos en $x=1$, Fernando una función decreciente y Bonifacio traza una recta tangente en (1, $f(1)$) y comenta "la tangente a la curva en $x=1$ la deja por encima"

e) Todos responden en forma similar a la anterior pero la función presenta concavidad negativa en $x=3$.

ACTIVIDAD III

Ana deduce el signo de $f\,''$ a partir del gráfico y Fernando traza recta tangentes al gráfico en los puntos que entran en juego en la actividad.

a) Todos responden que es falsa, Fernando indica que $f\,''(-3,8)<0$, Ana que la concavidad es negativa.

b) Todos responden que es falsa por razones similares a la anterior.

c) Fernando y Ana indican que puede ser verdadera, Fernando justifica que $f''(-5)<0$. Bonifacio indica que “No está claro dónde está el punto de inflexión”.

d) Todos indican que es falsa, Ana y Bonifacio justifican que $f''(1)>0$ y $f''(8)<0$.

e) Bonifacio: “No conozco los valores de las derivadas segundas”. Ana: “Verdadera, f' crece en ese intervalo”, Fernando: “Verdadera, pues $f'(x)$ es creciente en $(-\infty, -3)$.

f) Bonifacio responde en forma similar a la anterior.
Ana: ¿Verdadera? f'' crece aparentemente, pero no lo puedo contestar porque no sé dónde está la raíz de f''.
Fernando: Falsa pues $f''(2)<0$ y $f''(3)>0$.

ACTIVIDAD IV

a) Todos trazan por (3,5) una recta de coeficiente angular –2 y los gráficos de las funciones *f* y *g* tangentes a ella, *g* con concavidad positiva y *f* con concavidad negativa en dicho punto. Ana: “existen f' y g' y son continuas en un entorno de 3, *f* y *g* decreciente, *f* concavidad<0 y *g* concavidad>0”

b) Todos ubican el punto (3,-2), trazan una recta por él de coeficiente angular 4 y los gráficos de las funciones *f* y *g* son tangentes a ella con concavidad positiva en dicho punto. Ana indica “*g* mayor concavidad” y dibuja su gráfico menos “próximo” a la recta tangente en un entorno de 3, Bonifacio realiza un esbozo similar. Fernando dibuja al gráfico de la función *g* más “próximo” a dicha recta tangente (Imagen 22).
Todos hacen cumplir a los gráficos las dos primeras condiciones.

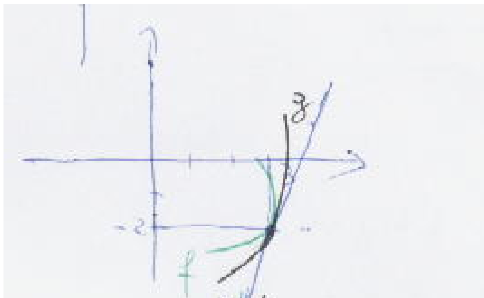


Imagen 22

Imagen 23

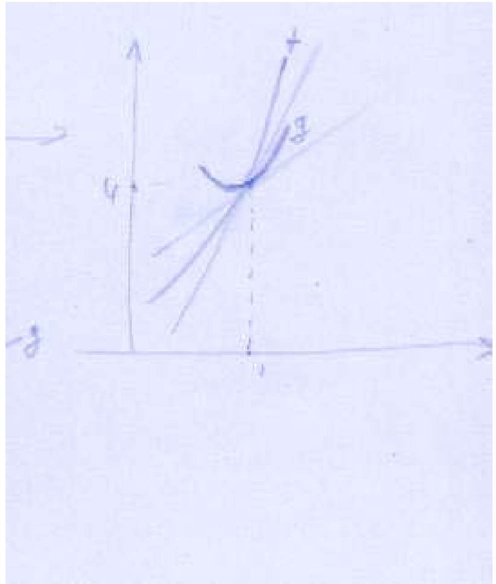
c) Todos ubican el punto (3,5), trazan una recta por él de coeficiente angular -2 y los gráficos de las funciones *f* y *g* tangentes a ella con concavidad positiva en dicho punto. En este caso Ana y Bonifacio dibujan el gráfico de *g* “dentro” del de *f* y Fernando dibuja el gráfico de *f* “dentro” del de g (Imagen 23).

d) Todos trazan los gráficos de las funciones *f* y *g* correspondientes en una translación y tangentes a una recta de coeficiente angular 4 en (3,2) y (3,5) respectivamente.

e) Todos hacen cumplir a los gráficos las dos primeras condiciones. Fernando dibuja el gráfico de la función *f* más “próximo” que el de *g* a la recta tangente en un entorno de 2, Bonifacio dibuja el gráfico de la función g más “próximo” a la recta tangente en un entorno del punto en cuestión y Ana indica que “*g* tiene mayor concavidad” pero no logra verse la diferencia en su dibujo.

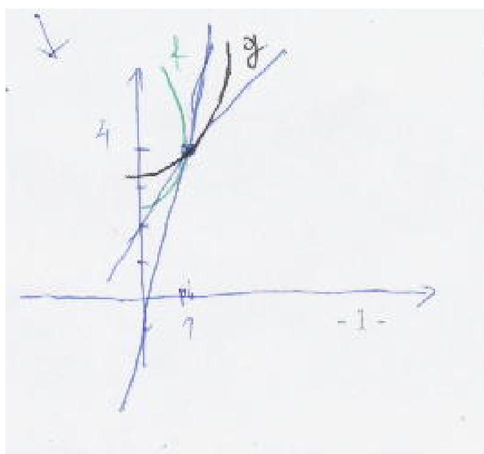
f) Todos hacen cumplir a los gráficos las dos primeras condiciones y los tres dibujan el gráfico de *f* más “próximo” que el de *g* a la recta tangente en un entorno de 1.

Imagen 24



g) Fernando y Bonifacio hacen cumplir las dos primeras condiciones, parece que los gráficos de ambas funciones están igual de "próximos" a su recta tangente correspondiente. Ana indica que "*f* crece más que *g*, igual valor funcional en *x*=1, concavidad igual". Solo esboza los gráficos de *f* y *g*.

Imagen 25



ACTIVIDAD V

Tabla 3

	$f(a) = g(a)$	$f(a) < g(a)$	$f(a) > g(a)$	No responde
a	Todos			
b	Todos			
c			Todos	
d			Todos	
e			Todos	
f			Todos	
g			Todos	
h			Todos	

	$f'(a) = g'(a)$	$f'(a) < g'(a)$	$f'(a) > g'(a)$	No responde
a	Todos			
b	Todos			
c	Todos			
d	Todos			
e	Todos			
f			Todos	
g		A	B, F	
h			Todos	

	$f''(a)=g''(a)$	$f''(a)<g''(a)$	$f''(a)>g''(a)$	No responde
a			B, A	F(*)
b		Todos		
c			Todos	
d	B	F	A(≥)(**)	
e		Todos		
f		Todos		
g		Todos		
h		Todos		

(*) “Los gráficos parecen estar “igualmente separados” de la tangente, no se puede apreciar si hay alguna diferencia en la concavidad”.

(**) “Podría ser igual o ligeramente mayor”