INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

CARACTERIZACIÓN DE LA CONVENCIÓN MATEMÁTICA COMO UN MECANISMO DE CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO. EL CASO DE SU FUNCIONAMIENTO EN LOS EXPONENTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA

GUSTAVO MARTÍNEZ SIERRA

DIRECTORA DE TESIS: DRA. ROSA MARÍA FARFÁN MÁRQUEZ

MÉXICO, D. F. JUNIO DEL 2003

Título de Tesis

Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes

Índice

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 5

ANEXOS

Relación de Tablas e Ilustraciones

A mis padres: Pedro y Edith por darme todo.

A Patricia: mi compañera y apoyo.

A mis hermanos: Pedro, Delia, Alberto, Laura y Jesús.

Agradezco a la Dra. Rosa María Farfán por la confianza que siempre supo infundirme durante la elaboración de esta investigación.

Agradezco a todos mis profesores por ser ejemplos a seguir.

Agradezco a todos mis colegas de CICATA, Cinvestav UAEH, UNACH, UAG por todos estos años de amistad y trabajo.

Agradezco a todo el pueblo mexicano, que con sus impuestos,
hacen posible que la educación sea gratuita para millones de personas.

GLOSARIO

Construcción de conocimiento: Proceso mediante el cual las personas y/o comunidades pasan de un estado de conocimiento a otro que es considerado, en algún sentido, superior al anterior.

Convención Matemática: Concepto construido al seno de esta investigación que aísla las características de un mecanismo particular de construcción de conocimiento. || En el contexto específico de los exponentes se puede resumir que: *el significado de los exponentes no naturales es* <u>convenido</u> *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* <u>matemático</u> *(es decir para la integración sistémica de conocimientos)*. Es por ello que de manera sintética designamos al mecanismo de construcción con la expresión: *convención matemática*. || La convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados al momento de la integración sistémica de un conjunto de conocimientos y puede tomar la forma de una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción, entre otras.

Emergencia: Propiedad de un sistema que no puede ser explicada por sus partes constituyentes, sino a través del todo.

Modelo de Multiplicación Reiterada (MMR): Es la definición canónica para el tratamiento de los exponentes contenidos en el conjunto $N^* = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Es decir si $n \in N^*$ se tiene que $a^n = (a)(a)\ldots(a)$ [n-veces]. Se señala que el conjunto N^* no es el conjunto de los números naturales.

Negatividad: Palabra utilizada en esta investigación para designar las interpretaciones contextuales que le son asociados al signo negativo o a los números negativos; como lo son: carencia, izquierda, abajo, inverso de un proceso, entre otras. La negatividad adquiere el rango de noción en el sentido de Piaget (Piaget & Garcia, 1991, p.14).

Reglas de transformación: En el contexto de este escrito esta expresión es utilizada para hacer referencia a las reglas de transformación para los exponentes no naturales *R*1) $a^0 = 1$, *R*2) $a^{-n} = 1/a^n$ & $1/a^n = a^{-n}$, *R*3) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ con (*m*, *n* números naturales, $a>0$):

Sistema: Se entiende por sistema a un todo indiviso y articulado compuesto por partes interdependientes con ellas mismas y con su entorno. El sistema es la integración, más que la suma de sus partes. Cada parte es un miembro del sistema y la naturaleza de la parte depende de su pertenencia al sistema. En otro nivel de análisis, un sistema puede considerarse como cualquier parte del universo elegida para su estudio, precisamente, porque sus componentes tienen alguna peculiaridad que se quiere estudiar, y porque en ese momento, y para ese estudio se desea prestar atención en ese aspecto, y donde el estado de cada componente del sistema, depende o está influido o *restringido* por el estado de las otras componentes. Es por ello que el análisis de un sistema puede ser hecho de manera *funcional*; es decir, diferenciando una parte de otra por el papel que desempeña dentro del sistema.

Sistema inicial de conocimientos: En el contexto de esta investigación se usa tal expresión para designar a los conocimientos de base y a los cuales se quiere integrar un nuevo elemento o un nuevo sistema para formar un todo coherente.

Sistémica, Aproximación: El estudio de los fenómenos didácticos atendiendo a que éstos no pueden ser explicados a partir de las componentes del sistema didáctico, sino a su través de su interdependencia.

Sistema didáctico: Modelo de la unidad mínima para explicar los fenómenos didácticos. Está constituido por:

Tres subsistemas:

- aquél que aprende
- el de quien enseña en un medio determinado
- un cuerpo de conocimientos a aprender (saber enseñado) alrededor de un saber (designado ordinariamente por el programa) se forma un *contrato didáctico*, que toma a ese saber como objeto de un proyecto compartido de enseñanza y aprendizaje, y que une en un mismo sitio a profesores y alumnos.

Y un estrato que Chevallard (1997) denomina la *noosfera* (lugar donde se piensa el funcionamiento didáctico) del sistema didáctico.

Socioepistemología: Aproximación teórica, construida al seno de la Matemática Educativa, que centra la atención en la caracterización de "aquello que permite la construcción del conocimiento matemático". Tal objetivo general de investigación supone de entrada la necesidad de tomar en cuenta todas las relaciones o restricciones a las que están inmersas las personas y las comunidades en proceso de construcción de conocimiento considerado como nuevo. La complejidad de tales relaciones puede ser particularmente amplía; pero las evidencias han mostrado que es productivo establecer que las relaciones básicas son con: 1) los modos de comunicación del conocimiento, 2) el conocimiento mismo, 3) la particular forma de pensar del ser humano y 4) el entorno social y cultural. De manera sintética se hace referencia, respectivamente, a las componentes didáctica, epistemológica, cognitiva y social.

Título

Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes.

Resumen

En este trabajo de investigación es presentada la caracterización de un mecanismo de construcción de conocimiento matemático al que hemos llamado *convención matemática*. Tal caracterización es realizada desde la perspectiva *socioepistemológica*, la cual se ha construido al seno de la Matemática Educativa. Tal aproximación centra la atención en la caracterización de "aquello que permite la construcción del conocimiento matemático". Tal objetivo general de investigación supone de entrada la necesidad de tomar en cuenta todas las relaciones o restricciones a las que están inmersas las personas y las comunidades en proceso de construcción de conocimiento considerado como nuevo. La complejidad de tales relaciones puede ser particularmente amplía; pero las evidencias han mostrado que es productivo establecer que las relaciones básicas son con: 1) los modos de comunicación del conocimiento, 2) el conocimiento mismo, 3) la particular forma de pensar del ser humano y 4) el entorno social y cultural. De manera sintética se hace referencia, respectivamente, a las componentes didáctica, epistemológica, cognitiva y social. Este modelo básico busca caracterizar los escenarios que permiten la construcción del conocimiento en situación escolar; ya que se postula que la determinación de principios, que regulan la construcción del conocimiento, proporciona los elementos necesarios para predecir e intervenir en la evolución de una comunidad en proceso de construir conocimiento matemático.

La particularidad de este trabajo reside en que se centra en una manera específica de construir conocimiento íntimamente relacionado con los procesos de teorización del contenido matemático y que se ha encontrado en la naturaleza y funciones de las reglas de transformación para los exponentes no naturales (m, n números naturales, a>0): $R1$) $a^0 = 1$, $R2$) $a^{-n} = 1/a^n$ & $1/a^n = a^{-n}$, $R3$) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$. De acuerdo con nuestros supuestos teóricos, la caracterización es realizada a través de tres estudios complementarios relativos a

las reglas de transformación para los exponentes no naturales: 1) Aquel centrado en su sociogénesis, 2) Aquel que toma en cuenta su inserción en la transmisión y difusión del conocimiento matemático, 3) El que toma en cuenta a la manera de pensar de las personas. En el escrito es presentado con todo detalle como la caracterización ha surgido de los estudios antes señalados. A grandes rasgos nuestro resultado principal es el siguiente.

Se puede resumir que: *el significado de los exponentes no naturales es* convenido *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* matemático *(es decir para la integración sistémica de conocimientos).* Es por ello que de manera sintética designamos al mecanismo de construcción con la expresión: *convención matemática*. Las formas o realizaciones de este mecanismo pueden ser una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción, entre otras. La elección de la forma depende de la naturaleza de la organización de los conocimientos. La fuente de todo lo anterior es un principio implícito de racionalidad que establece que en matemáticas se busca el mayor grado de unidad (es decir, sin contradicción) al momento de incluir nuevos objetos matemáticos a su cuerpo de conocimientos. La búsqueda de integración, que es una búsqueda de relaciones, puede tener dos salidas: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Entonces la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados; por lo que depende sustancialmente del contexto epistemológico de la construcción de significados: en la construcción primera (la sociogénesis), en la teoría matemática, en la escuela, en los libros de texto o en el conocimiento personal de los alumnos y profesores.

Title

Characterization of the mathematical convention as a mechanism of construction of knowledge. (The case of its operation on the exponents).

Abstract

Within this research work, the characterization of a mechanism of construction of the mathematical knowledge is introduced, which we have called *the mathematical convention*. Such a characterization is performed from the *social-epistemological* perspective, which has been constructed within the core of the Educational Mathematics.

Such approach centers the attention on the characterization of "that which allows the construction of the mathematical knowledge". Such general focus of research supposes that from the beginning there is a need to take in consideration every relation or restriction into which the persons and the communities are immerse during the process of constructing what is considered as their new knowledge. The complexity of such relations may be particularly broad, but the evidences have shown that it is productive to establish that the basic relations include: 1) the ways of communicating the knowledge, 2) the knowledge by itself, 3) the particular way of thinking of the human being, and 4) the social and cultural environment. In a synthetic manner, reference is made respectively to the didactic, the epistemological, the cognitive and the social components.

This basic model seeks for a way of characterizing the stages that would allow the construction of knowledge within their school context, as there is a proposal that the determination of principles, which regulate the construction of the knowledge, provides the necessary elements to predict and intervene in the evolution of a community that is in the process of the construction of mathematical knowledge.

The peculiarity of this work lies in its very specific centering on the construction of knowledge that is intimately linked with the processes of theorization of the mathematical contents and that has been found in the nature and in the functions of the rules of transformation for the non-natural exponents (m, n

natural numbers, a>0): *R*1) $a^0 = 1$, *R*2) $a^{-n} = 1/a^n$ & $1/a^n = a^{-n}$, *R*3) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$. According to our theoretical suppositions, the characterization is performed throughout three complementary studies related to the rules of transformation for the non-natural exponents: 1) That which is centered in its social-genesis, 2) that which takes in consideration its insertion in the transmission and diffusion of the mathematical knowledge, 3) The one that takes in consideration the way of thinking of the persons.

On the written work appears a presentation with great detail on how the characterization has emerged from the above mentioned studies. As an overview, our main result is the following, and can be summarized this way: *the meaning of the non-natural exponents is* agreed-on *in order to facilitate the construction of unified bodies with a logical* mathematical *knowledge (this is, for the systemic integration of knowledge). This is the reason why we designate in a synthetic way the mechanism of construction with the expression: mathematical convention.* The forms or executions of this mechanism can be anything from a definition, to an axiom, or an interpretation, or a restriction or other.

The selection of the form depends on the nature of the organization of the different types of knowledge. The source of all the above is an implicit principle of rationality that establishes that in mathematics, the greater degree of unity is searched (meaning, without a contradiction) at the moment of including mathematical objects that are new to the present body of skills. The searching of integration, which is a seeking of relations, may have two consequences: 1) The *rupture* caused by leaving aside a meaning in place of other one which eventually is built for the task of integration, this means, to change the centering of significance, and 2) The *continuity*, as the significance in the task of integration is kept. Then, the mathematical convention in so many products, may be interpreted as an emerging property for the establishment of a relation of continuity, or of rupture of meanings; which substantially depends of the epistemological context of the construction of meanings: in the first construction (the social-genesis), in the mathematical theory, in the school, in the textbooks, or in the personal knowledge of the students and professors.

INTRODUCCIÓN

En la presente tesis están contenidos todos los detalles de una investigación que contribuye a los esfuerzos de un grupo de investigadores interesados en la caracterización de la construcción del conocimiento matemático.

En particular aquí es presentado un estudio exhaustivo para caracterizar el mecanismo que permite la construcción de significados para los exponentes no naturales. El motivo de centrarnos en este conocimiento matemático se debe a que posee un status específico, que hasta donde sabemos, no ha sido estudiado antes en Matemática Educativa. A tal status le hemos llamado "convención matemática" y difiere de otros conceptos por ser el resultado de una búsqueda de la coherencia matemática; es decir relativo a la organización teórica de las matemáticas. Tal circunstancia explica la diversidad de fenómenos didácticos que hemos encontrado a su alrededor, que a su vez pueden ser explicados a través del status referido (Martínez, 2002). Al respecto señalemos que es posible describir la siguiente secuenciación escolar de los contenidos relativos a los exponentes: Exponente como abreviación de la multiplicación reiterada, exponente cero, exponentes negativos y exponentes fraccionarios[1]. Lo interesante aquí, es señalar que todos los exponentes tienen una misma jerarquía; no se presta más atención a uno o a otro, no se percibe tratamiento especial. Esto aporta un elemento para explicar, por ejemplo, la utilización de los estudiantes (Martínez, 2002) y profesores (Capítulo V de esta tesis) del MMR con exponentes en donde ello no es posible. La circunstancia local (es decir relacionada a los exponentes) de no dar un status a los diferentes tipos de exponentes se replica en lo global

[1] Cabe señalar que esta secuenciación es de carácter transversal; pues no necesariamente los temas son tratados uno después del otro.

(por ejemplo un texto de Álgebra): los exponentes tienen la misma jerarquía que, por ejemplo, el algoritmo de la división.

Una circunstancia adicional refuerzan nuestro interés: las teorías didácticas no pueden explicar tal estatus. Citemos, por ejemplo, los diferente niveles de nociones que Chevallard establece en su Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1997) y los argumentos, presentes en los libros de texto, para establecer la igualdad $2^0=1$. De acuerdo a nuestra aproximación al aula (Capítulo V) tales argumentos no son objeto de estudio por lo que no son nociones matemáticas, tampoco son reconocidos y designados por lo que tampoco son nociones paramatemáticas y además nunca son utilizados en la práctica de ninguna de las tareas algebraicas por lo que no son nociones protomatemáticas. Es por ello que para designar el estatus a la convención matemática le hemos llamado noción metamatemática (Sección 2.9 de esta tesis).

Por otro lado, la hipótesis teórica fundamental de la perspectiva teórica en que se basa esta investigación, que se llamado *perspectiva socioepistemológica*, consiste en considerar que la construcción del conocimiento puede ser explicada y descrita a través de diferentes componentes: a) la epistemológica, b) la de la comunicación, c) la cognitiva y d) la social. En términos metodológicos esta consideración determina un *sistema de componentes* fundamental a estudiar en las investigaciones y teóricamente representa la unidad mínima del análisis socioepistemológico. Se postula que la determinación de principios, que regulan la construcción del conocimiento, proporciona los elementos necesarios para predecir e intervenir en la evolución de una comunidad integrada con el objetivo de estudiar un contenido o enfrentada a situaciones problemáticas de tipo matemático. La división del trabajo académico posibilita el desarrollo de diversos estudios, como el presente, que van conformando los resultados que le dan identidad a la perspectiva socioepistemológica en tanto su contribución a la Matemática Educativa. En particular en este documento se reportan los avances para una caracterización de un mecanismo de construcción de conocimiento, al que hemos denominado *convención matemática*. Como ya se ha explicado se opta por hacer un estudio de caso de su funcionamiento en los exponentes.

En el Capítulo I, *Planteamiento del problema de investigación: Antecedentes, Justificación Y Objetivo*, se mencionan los antecedentes que le dan contexto a la investigación, se presentan los elementos básicos para la justificación del problema de investigación en el marco de la Matemática Educativa y se establecen los objetivos que guían la indagación. Mientras que en el Capítulo II, *Marco Teórico y Metodológico*, se revisan las herramientas conceptuales utilizadas para alcanzar el objetivo de investigación.

En el Capítulo III, *Caracterización del mecanismo en la sociogénesis*, se presentan los hallazgos que se desprenden del análisis epistemológico sobre el desarrollo del concepto de exponente no natural. El análisis muestra el funcionamiento de un mecanismo, más o menos uniforme, en las distintas formulaciones que sobre los exponentes hemos encontrado. En resumen, el significado de los exponentes no naturales es *convenido* para posibilitar la construcción *sistemas* de conocimientos *matemáticos.* De manera sintética hacemos referencia al mecanismo, cuya función es integración sistémica de un conjunto de conocimientos, con la expresión *convención matemática*. Las realizaciones de este mecanismo, que dependen de los objetivos teóricos o de comunicación específicos, pueden ser, tanto, la definición, un axioma, una interpretación o una restricción. A esto se agrega que debido al carácter sistémico de una teoría, es posible que la inclusión de un nuevo objeto provoque la exclusión de otro; por lo que es importante señalar el tipo de consideraciones *metamatemáticas* vertidas en un proceso de construcción; las cuales se presentan bajo la forma de *argumentos* sobre lo que se debe o no se debe conservar en el sistema; además, en la caracterización se hace énfasis para entender a las convenciones matemáticas como un instrumento teórico para cumplir con los requerimientos de preservación de un conocimiento anterior dentro de una nueva organización del conocimiento.

En el Capítulo IV, *Caracterización del mecanismo en la comunicación de conocimientos*, se presenta un estudio acerca de la transposición del mecanismo hacia sistemas de conocimientos organizados para su difusión y transmisión. Algunos de los resultados que se presentan ahí muestran que la naturaleza misma de las convenciones matemáticas, un mecanismo de integración sistémica de conocimientos que eventualmente deja a un lado otros, provoca dislexias escolares ocasionadas por la restricción de organización progresiva de la matemática escolar. En particular se señala aquella que es ocasionada por la pérdida de los significados contextuales de los números (cero, negativos y fraccionarios) y del significado del exponente, cuando es natural, como multiplicación reiterada. En caso de que esa dislexia sea identificada, surgen interpretaciones que tratan de eliminarla; como aquellas que amplían el modelo de multiplicación reiterada para el exponente no natural; así surge la interpretación del exponente negativo como la multiplicación reiterada de cierto *recíproco* que remite a la noción de *negatividad*; el exponente cero, interpretado como ausencia de factor que remite a la noción del cero como *nada* o el exponente fraccionario como la multiplicación reiterada de una raíz. Agregado a lo anterior, hay dos extremos al momento de transponer las realizaciones del mecanismo: a) Se opta por suponer son deducibles o b) se comienza por tomarlas como definición. En la porción intermedia entre estos extremos se puede encontrar aquellos autores que son sensibles a la naturaleza matemática del conocimiento y dan explicaciones al respecto.

En resumen, la caracterización del mecanismo para la construcción del concepto de exponente no natural, que surge de los estudios desarrollados en los Capítulos 3 y 4 consiste en que se requiere la presencia de un activador del mecanismo el cuál puede ser la contradicción o la necesidad (vista como una noción metamatemática para la teorización o como una noción de coherencia para la comunicación) de integración sistémica de los conocimientos matemáticos al momento de incluir un objeto nuevo. Este requisito hace referencia a por lo menos dos etapas en un sistema de conocimientos: el inicial o de referencia y uno final que posee las realizaciones del mecanismo como propiedades emergentes, bajo la forma de axiomas, definiciones, restricciones, entre otras.

En el Capítulo IV, *Elementos para enriquecer la caracterización a través de situaciones experimentales*, la caracterización señalada anteriormente, considerada como inicial, será enriquecida al utilizarla en el diseño de una situación experimental, cuya primer versión se presenta ahí, que busca *activar* el mecanismo con grupos de estudiantes en situación escolar y registrar su eventual funcionamiento. Los diseños serán hechos con el objetivo de poner a prueba algunos modelos sobre la actividad de las personas cuando se enfrentan a una situación problemática, que puede ser resuelta de manera óptima poniendo en funcionamiento el mecanismo de convención matemática. Del análisis de las puesta en escena se agregan algunos matices de caracterización que hace avanzar la investigación en tanto su programa sistémico, al tomar en cuenta las restricciones propias de la escuela y de la cognición específica de algunos grupos de estudiantes.

Por último, en las *Conclusiones Generales* resumimos los principales resultados de esta investigación y en las *Recomendaciones y sugerencias para trabajo futuro* se presentan los elementos principales que podrían tener investigaciones basadas en ésta, para con ello organizar nuestros trabajos futuros para conformar una línea de investigación independiente.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN: ANTECEDENTES, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVO

En este capítulo se ofrecen elementos para mostrar cómo detectamos el problema de investigación que se aborda en la presente indagación. Esto lleva a un conjunto de preguntas de investigación que se presentan al final del capítulo. Asimismo, se proporcionan elementos sobre la pertinencia del estudio al seno de Matemática Educativa.

Además, se hacen varias observaciones de investigaciones que, de alguna manera anteceden a ésta, eso con el fin de clarificar el escenario conceptual que le da sentido y con ello determinar su posición en tal escenario. En este tono se ofrecen algunos comentarios con el propósito de resaltar la pertinencia y originalidad que consideramos, posee la indagación.

1.1. Antecedentes indirectos: la literatura mundial

Nuestro interés primario son aquellas convenciones matemáticas[2] presentes en los exponentes. Es por ello que en términos inmediatamente visibles, nuestros antecedentes deben ser aquellas investigaciones enfocadas a los contenidos de Álgebra (concepto de exponente no natural) o de Cálculo (concepto función exponencial y logaritmo). En cuanto a las primeras, es significativo que en realidad éstas, hasta donde sabemos, no existan; aun cuando haya una profusa literatura que ha sido enfocada al pensamiento algebraico. Esta circunstancia señala de manera indirecta, lo poco significativo que puede parecer a los investigadores los conceptos de exponente no natural, aun cuando en la ecología escolar de los conocimientos estos conceptos siempre son utilizados en Álgebra. En cuanto a las segundas los referentes que se tienen son aquellas investigaciones en el orbe, que estudian algunos aspectos sobre el desarrollo de la noción de función. Al respecto es posible distinguir dos tendencias de las investigaciones al momento de establecer hipótesis: aquellas que utilizan la hipótesis de que hay un mecanismo único para el desarrollo del pensamiento funcional y aquellas que dotan de particularidades a dicho desarrollo, especialmente a las funciones logaritmo y exponencial.

Con respecto a las investigaciones que utilizan la hipótesis de que hay un mecanismo único para el desarrollo del pensamiento funcional destacamos a las de Sierpinska (1992), Harel y Dubinsky (1992) y Sfard (1992). Así, por ejemplo, Sfard establece un proceso cognitivo caracterizado por las etapas de interiorización, condensación y reificación, partiendo del modelo epistemológico de que la función es una dialéctica entre una faceta operativa y una estructural. En este mismo sentido Harel y Dubinsky caracterizan las construcciones mentales, necesarias para construir el concepto de función, en términos de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas.

Respecto a la segunda tendencia, su particularidad radica en que elaboran constructos teóricos, que dan cuenta de características específicas para el

[2] En este capítulo no entraremos en mayores detalles con respecto a la expresión *convención matemática*. Por el momento sólo la utilizaremos para presentar el carácter formal del problema que guía la investigación.

desarrollo del pensamiento funcional. Con respecto a la función exponencial señalamos las investigaciones de Lezama (1999) y Confrey y Smith (1994, 1995) y acerca de la función logaritmo, la de Ferrari (2001).

Confrey & Smith (1994, 1995) centran su atención en describir que es necesario un desarrollo de las estructuras multiplicativas (dejando atrás la preeminencia de las estructuras aditivas) y consideran que ello es posible a través de la elaboración de las nociones de *covariación*[3] y *splitting* (partición de la unidad de referencia). Por su parte Lezama (1999) hace consideraciones análogas a las de covariación cuando atiende, en la situación que diseñó, a las características geométricas de la gráfica de la función exponencial, pues entre sus objetivos se encuentra que los estudiantes se percaten de la particular forma en que las ordenadas se incrementan cuando la abscisa lo hace de manera aritmética. De entre las investigaciones que particularizan el desarrollo de la función logaritmo, es de destacar la de Ferrari (2001). El estudio socioepistemológico profundo que ahí se presenta señala que la vida de una noción matemática es compleja y rica en significados matemáticos y culturales. En particular indica que el desarrollo de los logaritmos puede ser caracterizado por tres etapas: el logaritmo como transformación, como modelizador y como objeto teórico. Es importante subrayar que Ferrari considera como eje central, la relación entre estas etapas y la covariación.

De entre las investigaciones que dotan de especificidad a la construcción de la función exponencial se observa que el estudio epistemológico de los exponentes no naturales es parcialmente tratado. Si bien, tanto Confrey y Smith como Lezama ofrecen estudios de corte epistemológico, en ellos se

[3] En lo sucesivo se entiende por covariación a la relación existente entre dos formas de variación. En el caso de la función exponencial y logaritmo la covariación es expresada de la siguiente manera: la variación aritmética (la variable toma los valores que corresponde a un progresión aritmética) de una de las variables corresponde con una variación geométrica de la otra (la variable toma los valores que corresponde a un progresión geométrica).

percibe, como ya se menciono, que el escenario epistemológico fundamental para el desarrollo de la noción de función exponencial es el de la covariación. En la situación de Lezama (1999) las reglas de transformación[4] son a su vez reglas para la acción de los estudiantes; pues entre el trabajo preliminar que se les pedía desarrollar a los estudiantes y profesores que participaron en las puestas en escena, era precisamente el de manejar las reglas de transformación. Por otra parte Confrey y Smith (1995) se basan en las nociones de *continuidad*, *interpolación* e *isomorfismo* para dar sentido a diversos símbolos formales, por ejemplo, $r^{1/2}$ o $r^{1/3}$. Estos símbolos, realmente, representan la media geométrica y la *tercia geométrica* y que Confrey trabaja implícitamente con la hipótesis de que la noción de exponente no natural surgió para establecer, por interpolación geométrica e isomorfismo, la continuidad, en los números reales, de la progresión geométrica 1, r, r^2, r^3, r^4,... Para entender dicha propuesta, es necesario notar que los esfuerzos de Confrey han sido, principalmente, enfocados para profundizar en lo que puede ser entendido como *variación exponencial* y que el *salto* que Confrey hace hacia el exponente continuo se reduce a un problema de extensión, del tipo que la herencia estructural que dejo Cauchy cuando *deducía* la función exponencial a partir de la hipótesis de continuidad y de que $G(x+y) = G(x)\ G(y)$ para toda x y y.

Todo lo anterior muestra que se ha conformado un consenso entre los investigadores de que el manejo de los exponentes no naturales poseen un único escenario de significación que se sustenta en las nociones de covariación, continuidad e isomorfismo.

En cuanto a investigaciones posteriores Confrey y Dennis (2000) hacen un estudio epistemológico más detallado sobre ‘el surgimiento de los

[4] Es decir las reglas $a^1 = a$, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ y $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

exponentes continuos' en los trabajos de Wallis. De ese material construimos algunas interpretaciones de corte epistemológico, mostradas con detalle posteriormente, que son el germen de un escenario más rico en significados para la construcción de la noción de exponente no natural que aquel que proponen las investigaciones basadas en la covariación, continuidad e isomorfismo.

1.2. Antecedentes directos

Se puede considerar, en términos generales, que los antecedentes inmediatos con que contamos son aquellas investigaciones que han venido ensayando diversas hipótesis sobre el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral & Farfán, 1998). En particular desde hace algún tiempo se ha percibido la especificidad epistemológica de las funciones trascendentes, cuyo tratamiento escolar es fuente de diversas *dislexias* escolares (Trujillo, 1995; Ferrari, 2001). Es por ello que se han hecho estudios epistemológicos sobre las nociones de función exponencial y logaritmo. En términos epistemológicos es notorio observar como el desarrollo de estas dos nociones son indistinguibles y sólo se separan en su inserción como objetos analíticos dentro del paradigma euleriano, centrado en la función analítica, en donde la función logaritmo es considerada como la inversa de la función exponencial, y a su vez ésta es definida a través de las convenciones matemáticas presentes en los exponentes; tal y como de manejan hoy en nuestras aulas y libros texto. En nuestro grupo de investigación hay varios estudios donde se ha profundizado en la construcción social de la función exponencial (Lezama, 1999; Martínez, 2000) y logaritmo (Ferrari, 2001).

En cuanto a los estudios que en donde se ha trabajado con la función exponencial, se destaca el trabajo de Lezama (1999), porque ahí detectamos algunos fenómenos didácticos que giran alrededor de las respuestas que proporcionan estudiantes al momento de establecer valores para la expresión 2^x (x número entero o racional), así como la falta de argumentos para justificar las respuestas consideradas como correctas. A través de algunas de las evidencias registradas por Lezama, dan cuenta que tales hechos no permiten la construcción de conocimiento, y en particular, en la construcción de la noción[5] de función exponencial abordada en tal estudio. Esta circunstancia propició plantearnos preguntas sobre la *naturaleza del conocimiento* que establece, por ejemplo que $2^0=1$ y sobre su *vida escolar*. Los primeros avances en esa dirección están son reportadas por Martínez (2000, 2002). Dos hipótesis son manejadas ahí: que no es un *objeto de enseñanza* y que es una forma de conocimiento cuya naturaleza, que identificamos con el nombre de convenciones matemáticas[6], no puede ser explicada por las teorías que el acercamiento socioepistemológico ha tomado como punto de referencia en épocas recientes: la teoría de Situaciones Didácticas y la teoría de la Transposición Didáctica. Además, la falta de investigaciones que se enfoquen hacia el estudio explícito de convenciones matemáticas, originó nuestro interés por hacer un estudio más detallado en la búsqueda de la explicación sistémica de los fenómenos antes señalados. En este sentido, con aquellas investigaciones (Martínez, 2000, 2002) se aportaron los elementos básicos para entender a profundidad los fenómenos didácticos a que atendieron, al dar cuenta de la complejidad de las relaciones entre el concepto de exponente no natural, el estudiante y el profesor, además de propiciar la discusión sobre el funcionamiento didáctico de las convenciones matemáticas y contribuir al inicio de una línea de

[5] Una noción matemática es tomada en el mismo sentido que Chevallard (1997) le atribuye en su Teoría de la Transposición Didáctica. Esto es, objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas.

[6] En estas investigaciones se utiliza el término convención matemática para especificar aquellos acuerdos que se presentan necesarios para dotar de coherencia interna a una teoría matemática y a su respectivo aparato simbólico y algorítmico. De esta manera se distinguen las convenciones matemáticas de otro tipo de convenciones, como por ejemplo las sintácticas, que se establecen por definición: $2^3=2*2*2$ o $2*3=2+2+2$.

investigación, con la que se busca determinar en qué sentido se pueden considerar a las convenciones matemáticas como pieza en la construcción social del conocimiento.

En concreto, en la investigación de Lezama (1999), que se plantea como objetivo el estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas, se diseña e implementa una Ingeniería Didáctica que busca la construcción de la noción de la función exponencial, en tanto sus características geométricas. De sus exploraciones preliminares, de las puestas en escena y de estudios efectuados en el marco de la presente investigación se detectan varios fenómenos didácticos y de entre ellos se destacan los siguientes:

1°. Las respuestas reiteradas de estudiantes de nivel secundario, medio y superior[7] en donde afirman: a) $2^0 = 0$, b) $2^0 = 2$, c) $2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$ y d) $2^{-3}=-8$ ya que $2^3=8$ y se le coloca el signo

2°. La ausencia de argumentos, entre estudiantes de nivel secundario, medio y superior, distintos a la memoria (como *leyes*), para establecer que: $2^0 =1$, $2^{-3}=1/2^3$, $2^{1/2}=\sqrt{2}$,...

3°. Las respuestas reiteradas de estudiantes de nivel medio: a) $2^{-3} = .002$, b) $2^{-3/2} = 2(-3/2) = -3$

4°. Si x no es entero, 2^x es solamente una notación (Es decir, que no es calculable) ($2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}; 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, etc...$)

[7] En el sistema educativo mexicano las edades promedio que tienen los estudiantes en los diferentes niveles escolares son los siguientes: nivel secundario 12 a 15 años, nivel medio o bachillerato 15 a 18 años y nivel superior 18 a 22 años.

5º. Si los estudiantes tenían el recurso de la representación por medio del radical, ignoraban y no tomaban en cuenta la naturaleza de dicho número, al considerar $\sqrt{2} = 1.4$, pero no interpretaban este número como resultado de una "exponenciación" sino como una notación

6º. Algunos estudiantes de secundaria afirman: a) $2^1=2*2$ ya que el dos se multiplica una vez y b) $2^1=2$ ya que $2*1=2$.

En cuanto al primer fenómeno, recalcamos que los argumentos para establecer tales igualdades son coherentes con la enseñanza de la noción de exponente natural y con una concepción del cero como *nada* y del –3 como un número natural con un signo menos junto a él. De esta manera se encuentra con lo siguiente (parafraseando a los estudiantes):

- $2^0 = 0$ ya que 'por la definición de potenciación 2^0 es el 2 multiplicado cero (nada) veces es nada (cero)'.
- $2^0 = 2$ ya que 'no hay nada como exponente'.
- $2^1=2*2$ ya que el dos se multiplica una vez.
- $2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$ o $2^{-3}=-8$ ya que $2^3=8$ y se le coloca el signo.

De acuerdo con las evidencias con las que se cuentan, es necesario puntualizar que tales fenómenos se presentan con diversos matices en los diferentes niveles escolares. Esto es detallado en los anexos de la investigación de Martínez (2000).

1.3. Objetivo de investigación

De acuerdo a lo mencionado hasta aquí, las investigaciones que preceden a la presente asumen que el escenario fundamental para la construcción del exponente no natural es el de la prolongación continua de las relaciones entre la progresión aritmética y geométrica (o la covariación). Si bien eso es cierto, desde el punto de vista estructural, nuestras indagaciones señalan que la existencia de un patrón para que exista la covariación no es suficiente, en el sentido que su significado es más rico y complejo para la construcción de las convenciones matemáticas presentes en los exponentes. Nuestras evidencias nos muestran que existen diversos escenarios en donde es posible construir las convenciones matemáticas presentes en los exponentes y que todos esos escenarios puedan ser examinados a la luz de un solo mecanismo de construcción de conocimiento: la convención matemática. Se remarca, entonces, que nuestro foco de atención en esta investigación no es propiamente el desarrollo de la noción de función exponencial sino el desarrollo de la noción de exponente no natural y su relación con el mecanismo señalado.

Lo anterior nos lleva a plantear el siguiente objetivo general de investigación: *La caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento.*

El objetivo así planteado señala la intención de entender el mecanismo de construcción independiente de contenidos matemáticos, ante la posibilidad teórica de caracterizarlo como un invariante en la construcción social de conocimiento. Sin embargo el método a seguir para alcanzar dicho objetivo es a través del análisis de un caso particular que hemos estudiado de manera detallada: las convenciones matemáticas presentes en los exponentes.

Es pertinente señalar aquí los avances hechos hasta este momento en la caracterización del mecanismo para la construcción del concepto de exponente no natural, que surge de los estudios desarrollados en los capítulos siguientes. Fundamentalmente se requiere la presencia de un *activador* del mecanismo, el cuál puede ser la contradicción o la necesidad (vista como una noción metamatemática para la teorización o como una noción de coherencia para la comunicación) de integración sistémica en los conocimientos matemáticos al momento de incluir un objeto nuevo. Este requisito hace referencia a ciertas etapas en un sistema de conocimientos: el inicial o de referencia y uno final que posee las realizaciones del mecanismo como propiedades emergentes (convenciones matemáticas), bajo la forma de axiomas, definiciones, restricciones, entre otras.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo se explicitan los referentes teóricos, y a través de ellos se proporcionan los instrumentos conceptuales necesarios para dar racionalidad a la investigación.

2.1. La emergencia de lo sistémico en Matemática Educativa

Dos revisiones recientes, Gascón (1998) y Cantoral y Farfán (2003), sobre la evolución de la problemática de la Matemática Educativa servirán de eje para aclarar la perspectiva de la presente indagación. Si bien estos autores difieren en algunos aspectos en lo específico, el principal interés es señalar las coincidencias de estas revisiones; porque que muestran de manera clara, la emergencia de las consideraciones sistémicas en los estudios de Matemática Educativa. De hecho, en lo que sigue, se muestra que la evolución de las problemáticas puede ser interpretada como una ampliación de las unidades de análisis. Se tomara al sistema didáctico como punto de referencia para precisar la relación de ampliación antes referida; es decir, que las explicaciones toman el sesgo de antes y después de los estudios que consideran al sistema didáctico como unidad de análisis.

La conclusión de lo que sigue en las siguientes secciones, es que podemos considerar, desde el punto de vista de unidades de análisis, que la evolución de la problemática en Matemática Educativa es ocasionada por los intentos de dar cabida a fenómenos antes inexplicados. La realización teórica y metodológica de este intento consiste en incluir más elementos en las unidades de análisis, pero sobre todo, en considerar las relaciones entre los nuevos elementos.

Dejando a un lado las posibles visiones precientíficas del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, se puede considerar la existencia de acercamientos científicos para el estudio de tales procesos que fundamentan sus innovaciones en aquellos hallazgos llevados a cabo a través del estudio de una de las *partes*[8] del sistema didáctico.

2.2. Antes del sistema didáctico como unidad de análisis

En este punto Gascón (1998) se refiere al *punto de vista clásico* el cual se apoya en otras disciplinas que poseen un status más elevado de cientificidad como la Sicología Educativa; mientras que Cantoral y Farfán (2003) se refieren a dos momentos en la evolución de las problemáticas: la *didáctica sin escuela* y la *didáctica sin alumnos*. Gascón señala, entre otros, dos enfoques clásicos: *el aprendizaje del alumno* y el *pensamiento del profesor*. El primero está centrado en el aprendizaje del alumno y su problemática gira alrededor de la noción de *aprendizaje significativo* en el sentido de Ausubel y su objeto primario de investigación es el conocimiento matemático del alumno y su evolución. Esta elección del objeto de estudio implica que se delegue explícitamente a la psicología la fundamentación científica de las técnicas que la didáctica proporciona. El segundo enfoque está centrado en la actividad docente y comparte el interés básico por la instrucción del alumno. Según Gascón este enfoque amplía la problemática didáctica introduciendo preguntas relativas al profesor y a su formación profesional y una de las cuestiones centrales de la nueva problemática puede formularse en los siguientes términos: ¿Qué

[8] El sistema didáctico está conformado por tres subsistemas (Alumno, profesor y saber) y un entorno llamado noosfera. En este sentido una parte del sistema puede ser una de sus componentes considerada como aislada de las demás o una pareja de ellas.

conocimientos (en el sentido amplio de saber y saber hacer) debe tener el profesor para favorecer un aprendizaje efectivo de los alumnos? Para Cantoral y Farfán el momento de la *didáctica sin alumnos* es la que se ocupó de diseñar presentaciones del contenido matemático escolar que se consideraban más accesibles para los alumnos y para los profesores que aquellas otras presentaciones llamadas tradicionales, en donde se asumía que una presentación mejor adaptada a la escuela y a sus agentes podría ser construida sólo con la reflexión del profesional de la matemática. Después (aunque no sea temporalmente sucesivo) se constituyó una *didáctica sin escuela* que, siguiendo a Cantoral y Farfán, se expresó a partir de planteamientos como aquel del profesor Freudenthal, al someter a consideración preguntas como las siguientes: ¿Cómo aprenden las personas? y ¿cómo se puede aprender a observar procesos de aprendizaje? Este tipo de preguntas dio pie a un nuevo paradigma de investigación que modificaba su objeto y su método de estudio. Ello derivó en una *aproximación cognitiva* a la investigación que efectúa observaciones y descripciones sistemáticas de los logros de los estudiantes y de las diversas experiencias de aprendizaje.

Ambas revisiones señalan las limitaciones de estos puntos de vista parciales. Gascón (1998) señala con respecto al punto de vista clásico:

> (i) Paradójicamente, y a pesar de centrarse en la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el enfoque clásico no incluye entre sus objetos de estudio las nociones de «enseñar matemáticas» ni de «aprender matemáticas», entre otras. Sólo las utiliza como *nociones transparentes y no cuestionables,* o bien como nociones construidas en otras disciplinas.
> […]
>
> (ii) Al centrar el análisis en el alumno (o en el profesor en referencia al alumno), el enfoque clásico aborda su objeto de estudio de una forma fuertemente condicionada por los *fenómenos psicológicos* involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje, al tiempo que tiende a poner en segundo plano los

> fenómenos específicamente *didáctico-matemáticos.*
>
> [...]
>
> (iii) Al interpretar el *saber didáctico* como un *saber técnico* (en el sentido de que su justificación hay que buscarla en saberes científicos ajenos a la propia didáctica e independientes entre sí), el enfoque clásico renuncia a la ambición de construir la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.

En cuanto a la didáctica sin alumnos y sin escuela Cantoral y Farfán (2003) señalan:

> Recientemente, a partir de estudios de naturaleza cognitiva, se reporta que los estudiantes tienen mayores dificultades para aproximar las figuras por exceso[9], que cuando lo hacen por defecto. Era necesario entonces, modificar y ampliar la problemática de estudio en la matemática educativa al incluir explícitamente al aprendizaje del alumno como factor central del diseño curricular y para el desarrollo de la instrucción en una clase habitual de matemáticas.
>
> Del mismo modo, estas aproximaciones didácticas sin alumnos, hicieron evidente la necesidad de atender aspectos, hasta entonces transparentes para los matemáticos educativos, como el papel que desempeñan las acciones del profesor en los actos de aprendizaje de sus alumnos, o la forma en que los diálogos intervienen en los procesos de desarrollo del pensamiento. De ahí que paulatinamente se hayan incorporado estudios sobre el pensamiento del profesor para dar cuenta de las formas en que el docente conducía un cierto proceso de negociación del significado con sus alumnos. La problemática aunque había sido modificada, no había sido completamente estudiada.
>
> [...]
>
> Este tipo de estudios [en la didáctica sin escuela] proporcionaron una herramienta útil y eficaz para estudiar el comportamiento cognitivo de los estudiantes ante algún tipo de tareas matemáticas; empero creemos que el desempeño de los alumnos no puede reducirse a la dimensión cognitiva. Pues las relaciones que ellos mantienen con los objetos matemáticos están condicionadas por las representaciones que se forjan más globalmente sobre lo que es la actividad matemática, de sus ideas

[9] Los autores analizan antes de este párrafo el ejemplo de un modelo didáctico de enseñanza del área por exceso y defecto.

> de lo que es el aprendizaje de las matemáticas, de su posición con relación de las matemáticas y más globalmente incluso, de su status como alumno.
>
> De modo que la forma en la que vive una situación de enseñanza y sus producciones matemáticas en ese contexto son condicionadas por las características de la costumbre didáctica. Su comportamiento cognitivo en el seno de la institución escolar puede ser entendida de una manera muy diferente a aquella que brinda su comportamiento cognitivo. La vida en las instituciones matiza los procesos del pensamiento. El término “institución”, podemos tomarlo en un sentido amplio: la familia, la clase, la escuela, el sistema educativo, el ambiente social constituido también por otro tipo de organizaciones humanas. Las interpretaciones en términos de concepciones para hacer observaciones de alumnos no son necesariamente las únicas, ni las más pertinentes. Se les debe concebir como las interpretaciones posibles susceptibles de competir con otras dentro del análisis de fenómenos didácticos.

2.3. El sistema didáctico como unidad de análisis

En este punto, los autores de las revisiones consideradas, señalan una ampliación de la problemática en términos de la necesidad de incluir más componentes a la unidad de análisis. Cantoral y Farfán denominan a esta problemática como *didáctica con escuela, pero sin escenarios* en donde subrayan la importancia de la inclusión explícita de las consideraciones de las relaciones didácticas (en el sentido de las relaciones en la escuela) a que están sometidos los saberes. Por su lado, Gascón indica que la ampliación de la problemática se da cuando se percibe la necesidad de que el contenido matemático y la actividad matemática sean objetos primarios de estudio. A esta perspectiva este autor le denomina *didáctica fundamental*. A continuación transcribimos unas citas al respecto.

Según Cantoral y Farfán (2003):

> Otra forma de abordar los problemas la constituyeron las aproximaciones sistémicas que han intentado analizar los

> fenómenos didácticos tomando en cuenta la complejidad del sistema en donde suelen considerarse distintos polos: el del saber, aquél quién aprende y el de quién enseña en un medio determinado. Tratando de esclarecer sus relaciones mutuas a fin de "explicar" los diversos fenómenos didácticos que se suceden en el hecho educativo.

Gascón (1998) (cursivas y comillas en el original) dice:

> Las anteriores cuestiones sin respuesta [la «desalgebrización del currículo de la secundaria obligatoria», la «irresponsabilidad matemática de los alumnos», la «atomización del proceso de enseñanza de las matemáticas», la «aritmetización del álgebra escolar» y la «algebrización del cálculo diferencial escolar»], así como estos fenómenos inexplicados, junto a muchos otros, sólo pueden ser abordados científicamente si ciertos objetos [...] que funcionaban tradicionalmente como transparentes (paradidácticos), pasan a ser objetos de estudio en sí mismos, esto es, se convierten en *objetos didácticos,* integrantes de pleno derecho de la problemática didáctica.
>
> Ello comporta la necesidad para la didáctica de disponer de un *modelo de la actividad matemática* y de un *modelo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas* en el que dichos objetos puedan estar debidamente representados.
>
> [...] el principio metodológico fundamental de la teoría de las situaciones: definir un *«conocimiento matemático»* mediante una *«situación»,* esto es, por un autómata que modeliza los problemas que únicamente este conocimiento permite resolver de forma óptima.

En términos generales, la postura teórica que se adopta en las investigaciones dentro de esta ampliación de la problemática, asumen la consideración de que la Matemática Educativa tiene como *objeto* de estudio al *sistema didáctico* y a los *fenómenos* (*didácticos*) que en él suceden; es decir, en esta perspectiva se acepta, como *objeto de estudio,* la complejidad de los hechos educativos, al considerarlos como resultado de una continua interacción entre los componentes del sistema didáctico, el cual se conforma con el objetivo de la adquisición, en situación escolar, de los conceptos y métodos de la matemática. Todo ello con base en consideraciones de índole cultural y social sobre la construcción de los conocimientos matemáticos escolares. En otras palabras, asumen una perspectiva *sistémica* que reconoce que el sistema didáctico está constituido por:

Tres subsistemas:

- aquél que aprende
- el de quien enseña en un medio determinado
- un cuerpo de conocimientos a aprender (saber enseñado) alrededor de un saber (designado ordinariamente por el programa) se forma un *contrato didáctico*, que toma a ese saber como objeto de un proyecto compartido de enseñanza y aprendizaje, y que une en un mismo sitio a profesores y alumnos.

Y un estrato que Chevallard (1997) denomina la *noosfera* (lugar donde se piensa el funcionamiento didáctico) del sistema didáctico.

De esta concepción, se desprende que la Matemática Educativa intenta teorizar sobre los fenómenos didácticos y que su intención es la de generar conocimiento de tipo descriptivo, explicativo o predictivo sobre tales fenómenos.

2.4. Después del sistema didáctico como unidad de análisis

Se ha englobado en esta sección algunos de los desarrollos que pueden ser caracterizados como una continuación de los desarrollos teóricos de las primeras visiones sistémicas. Para ello se consideran dos de las tendencias que señalan las revisiones de referencia, en donde las perspectivas que atienden a esta nueva problemática son designadas, por Cantoral y Farfán, y Gascón, respectivamente, como el acercamiento *socioepistemológico* y el *enfoque antropológico en didáctica de las matemáticas*. Ambas perspectivas coinciden en plantear la necesidad de incluir de manera explícita un entorno que incluya al sistema didáctico como componente ineludible en la unidad de análisis en Matemática Educativa. Son dos las propuestas hechas. La primera pone énfasis en los *escenarios socioculturales* y el segundo en las *actividades matemáticas institucionales*. A continuación se transcriben unas citas al respecto.

Según Gascón (1998) (cursivas y comillas en el original):

> En el marco de la didáctica fundamental pronto se puso de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la *matemática escolar* ni la *actividad matemática escolar* sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la *reconstrucción escolar de las matemáticas* que tienen su origen en la propia institución de producción del saber matemático. Ésta es una de las primeras aportaciones de la teoría de la *transposición didáctica*. El desarrollo de esta teoría ha mostrado que las diferentes formas de manipulación social de las matemáticas no pueden ser estudiadas separadamente. En otro lugar hemos aportado argumentos para justificar porqué no pueden separarse completamente el estudio de la génesis y el desarrollo del saber matemático, del estudio de la enseñanza y la utilización de dicho saber.
>
> Resulta, en definitiva, que los fenómenos relativos a la enseñanza de las matemáticas sólo pueden abordarse científicamente si se tienen en cuenta simultáneamente los fenómenos de transposición didáctica que, a su vez, no pueden separarse de los fenómenos relativos a la producción de las *obras matemáticas*. La actividad matemática escolar se integra así inseparablemente en la problemática mucho más amplia de las *actividades matemáticas institucionales*, las cuales pasan a constituir el nuevo y más extenso *objeto primario* de la investigación didáctica.

Por su parte Cantoral y Farfán (2003) señalan:

> La línea de investigación que se desarrolla en el grupo de investigación del Área de Educación Superior del DME[10] considera como necesidad básica, el dotar a la investigación de

[10] Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

> una aproximación sistémica y situada, que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. A esta aproximación múltiple, que en la jerga le nombramos "la cuarta dimensión", le hemos llamado formalmente el acercamiento socioepistemológico. En este sentido, el pensamiento y el lenguaje variacional es entendido como una línea de investigación que, ubicada al seno del acercamiento socioepistemológico, permite tratar con la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos.

2.5. La Socioepistemología

Para esta investigación nos adherimos a la postura que plantea la necesidad de estudiar aquello que restringe el funcionamiento del sistema didáctico. La idea esencial que subyace en esta aproximación es que el ser humano posee diferentes dimensiones que lo conforman como tal. Esta posición es un rechazo a los enfoques reduccionistas, que toman en cuenta sólo alguna de las dimensiones del ser humano, como por ejemplo, las teorías cognoscitivas, la APOE[11], entre ellas, que centra su atención en las construcciones mentales, o las que trabajan con la noción de *definición del concepto - imagen del concepto* para dar cuenta del desarrollo cognitivo.

Además esta investigación considera que los saberes matemáticos se han constituido socialmente en ámbitos no escolares, por lo que su introducción al sistema de enseñanza obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento; de manera que influyen también, por ejemplo, en las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor, y en la apropiación y usos del contenido matemático mismo. Este proceso de incorporación de saberes matemáticos al sistema didáctico plantea una serie de problemas teóricos y prácticos no triviales, que precisan para su estudio de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados (Cantoral & Farfán, 2003). En particular esta investigación hace un estudio de las maneras en que fue transpuesto el concepto de exponente no natural (Capítulo IV).

Siguiendo el hecho de que una teoría es una etapa que retoma o rechaza otras, se puede decir que nuestro acercamiento a la problemática propia de la Matemática Educativa retoma algunos de los constructos teóricos y métodos de investigación de lo que suele llamarse, si esto es posible, la escuela francesa de la Didáctica de las Matemáticas. En particular nos interesa de ésta el enfoque sistémico que propone al considerar, que una teoría en Matemática Educativa debe ser capaz de modelar el funcionamiento complejo de los *sistemas didácticos*, que genéricamente son descritos por los subsistemas que los conforman: aquél que aprende, el de quien enseña en un medio determinado y el saber. Más específicamente hacemos estudios de transposición didáctica y sobre los modos de transmisión del conocimiento vía la enseñanza; para entender a profundidad los mecanismos en que los saberes están inmersos y *viven* en la escuela. Diseñamos Situaciones Didácticas utilizando la metodología que proporciona la Ingeniería Didáctica para contrastar empíricamente nuestras hipótesis epistemológicas y cognitivas; tal y como en esta investigación posteriormente se hará. Todo ello con el objetivo de que la enseñanza produzca efectivamente aprendizaje.

Sin embargo, a través de algunas de las investigaciones de nuestro grupo, se ha hecho notar que el acercamiento mencionado antes por sí mismo no consigue atrapar la complejidad de los factores que posibilitan la construcción del conocimiento. En particular sostenemos que es necesario considerar los factores sociales; entendiendo por ello que se debe tomar en

[11] Teoría que da cuenta del aprendizaje a través de construcciones mentales designadas como Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas.

cuenta aquellas restricciones que pesan sobre los individuos por el solo hecho de vivir en sociedad, y que no son estrictamente modificables por una voluntad individual. Es por ello que utilizamos la noción de *consenso*, para explicar las prácticas generalizadas que sostienen que un conocimiento válido es uno y no otro, y la hipótesis general del que los conceptos matemáticos son primeros usados antes de ser definidos[12]. Todo ello nos ha llevado a plantear la necesidad, en general, de diseñar *escenarios de significación*[13] para que sea factible la construcción de ideas matemáticas complejas en situación escolar (Cantoral & Farfán, 2003).

Un resumen de las consideraciones anteriores es nuestra explicitación del teórico que se ha denominado *perspectiva socioepistemológica*, el cual es nuestro referente fundamental, la atención se centra en la caracterización de "aquello que permite la construcción del conocimiento matemático". Tal objetivo general de investigación supone que de entrada es necesario tomar en cuenta todas las relaciones o restricciones a las que están inmersas las personas y las comunidades en proceso de construcción de conocimiento considerado como nuevo. La complejidad de tales relaciones puede ser particularmente amplía; pero las evidencias han mostrado que es productivo establecer que las relaciones básicas son con: 1) los modos de comunicación del conocimiento, 2) el conocimiento mismo, 3) la particular forma de pensar del ser humano y 4) el entorno social y cultural. De manera sintética se hace referencia, respectivamente, a las componentes didáctica, epistemológica, cognitiva y social. Este modelo básico conforma múltiples líneas de investigación, que buscan caracterizar los escenarios que permiten la construcción del conocimiento en situación escolar; ya que se postula que la determinación de principios, que regulan

[12] En la sociogénesis (Capítulo III) veremos que un principio de coherencia es la que determina la emergencia de los convencionalismos; pero en las formulaciones encontradas tal principio es usado sin ser definido; como sí lo es en las teorías axiomatizadas.

la construcción del conocimiento, proporciona los elementos necesarios para predecir e intervenir en la evolución de una comunidad integrada con el objetivo de estudiar un contenido o enfrentada a situaciones problemáticas de tipo matemático.

2.6. Ubicación de la investigación al interior de la socioepistemología

El establecimiento de una ciencia se caracteriza por la construcción de sus categorías y conceptos para teorizar los fenómenos que interesa. En lo que se refiere a la Matemática Educativa, cada vez resulta más claro que se deben abandonar las categorías que proporcionan las Matemáticas. Un ejemplo significativo al respecto puede observarse en que, actualmente, son menos las investigaciones en donde el foco de atención sean conceptos matemáticos o procesos identificados dentro de las matemáticas. En este mismo rango de ideas en nuestro paradigma de investigación, que de manera retrospectiva se ha dado por llamar socioepistemología, interesa establecer categorías que den cuenta de la *construcción social del conocimiento* para poder con ello, diseñar escenarios suficientemente robustos para la *construcción social del conocimiento en situación escolar.* Sólo por considerar a las investigaciones que dieron los primeros pasos en este camino, mencionamos algunas de las nociones[14], que se han encontrado, y que están presentes en la construcción de conocimiento matemático: la de acumulación en la construcción de concepto de integral definida (Cordero, 1994), la predicción en la construcción de serie de Taylor (Cantoral, 1990) y el estado permanente en la construcción del concepto de convergencia de series infinitas (Farfán, 1997a). En

[13] Si bien el estudio exploratorio que será presentado en al Capítulo V no fue diseñado como propuesta didáctica, ahí fue manejada la hipótesis de que las actividades ahí desarrolladas tomaban su sentido por el escenario de "justificación" en que estaban inmersos.

[14] Aquí utilizamos la distinción que Piaget y García (1991, p. 103) hacen entre *noción* y *concepto* (cursivas en el original): "Este pasaje de *uso* [de una noción] o aplicación implícita, a la utilización consciente, a la *conceptualización*, constituye lo que hemos llamado *tematización*".

consecuencia, nuestros hallazgos teóricos desembocan, en tanto realizaciones prácticas, en el rediseño de la matemática escolar para que con ella se atienda a las nociones construidas por la teoría.

En concordancia con las consideraciones precedentes, la información que hemos recabado hasta el momento (Martínez, 2000, 2002) permite afirmar que se encontramos un mecanismo de construcción de conocimiento: las convenciones matemáticas. Tal mecanismo se ha encontrado en diversas formulaciones del concepto de exponente no natural. En este capítulo no se entra en mayores detalles al respecto, pues por el momento, sólo se utiliza para presentar el carácter formal del problema que guía la investigación. En términos disciplinares, la importancia del descubrimiento descansa en que tal mecanismo no ha sido, hasta donde sabemos, objeto de estudio en investigaciones en Matemática Educativa.

2.7. Situaciones Didácticas e Ingeniería Didáctica

De acuerdo con Brousseau (1986): "el alumno aprende adaptándose a un medio[15] que es productor de contradicción, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje". Este es el postulado básico de la teoría de Situaciones Didácticas. En términos teóricos se habla de la *génesis ficticia* del saber puesto en juego. Esta génesis, se postula, aísla las nociones y propiedades de las actividades que le dan origen, sentido, motivo y utilización al saber. En términos de la actividad del alumno y el profesor "el conocimiento proviene en buena parte de que el alumno lo adquiera de su adaptación a las situaciones didácticas que le son propuestas" (Brousseau, 1986). En este sentido, aparece la noción de *devolución* del

[15] El concepto de medio (milieu) tiene una connotación especial en la teoría de Situaciones Didácticas.

profesor al alumno, esto es, "acto por el cual el profesor logra que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje o de un problema y acepte él mismo las consecuencias de tal transferencia" (Brousseau, 1986).

Si bien, existen muchas interpretaciones de las características que debe tener una situación es posible aislar las siguientes (Gascón, 2001):

(i) El alumno debe poder introducirse en la resolución del problema y ha de poder considerar lo que es una *solución posible*.

(ii) Los conocimientos del alumno tienen que ser, en principio, *insuficientes* para resolver el problema.

(iii) La situación debe permitir al alumno decidir si una solución determinada es *correcta o no*.

(iv) El conocimiento que se desea que el alumno construya tiene que ser la herramienta más adecuada para resolver el problema propuesto, al nivel de los conocimientos del alumno. En la construcción de este conocimiento, a través de acciones, formulaciones y validaciones, radica el objetivo fundamental de toda la actividad.

La Ingeniería Didáctica surge a principios de los años 80, al seno de la didáctica de las matemáticas francesa, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica. El nombre de Ingeniería Didáctica surge de la analogía con la actividad de un ingeniero, pues no sólo se apoya en resultados científicos, sino que demanda la toma de decisiones y el control sobre los distintos componentes del proceso.

Según Douady (1994) (citada por Ferrari, 2001) en términos generales, una Ingeniería Didáctica es un conjunto de secuencias de clase, diseñadas, organizadas y articuladas coherentemente por un *profesor-ingeniero*, para lograr el aprendizaje de cierto conocimiento en un grupo específico de alumnos. Por tanto, se considera que la Ingeniería Didáctica es, por un lado, un *producto* del *análisis preliminar,* donde se tienen en cuenta las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica del conocimiento en juego y del análisis a priori en el cual se decide sobre qué variables didácticas son pertinentes y sobre cuáles se actuará, y por otro lado, un *proceso* en el cual el profesor implementa el producto y hace los ajustes y adaptaciones necesarias según la dinámica y el contexto que se genera en la clase. Como se indica con mayor énfasis al final de este capítulo, la perspectiva con que se trabaja en esta investigación trata de incorporar una componente social que enriquezca a la Ingeniería Didáctica.

2.8. La Teoría de la Transposición Didáctica

Las investigaciones sobre el fenómeno de la transposición didáctica, dan cuenta que los objetos destinados a la enseñanza, de ninguna manera, pueden interpretarse como una simplificación de objetos más complejos, los cuales son proporcionados por una comunidad científica (saber erudito). Yves Chevallard ha sistematizado estas ideas para las matemáticas en su Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1997).

De acuerdo con esta teoría, el saber a enseñar se presenta mediante textos de saber; éstos tienen como una de sus características, la de seguir un orden lógico en la presentación de los saberes. Todo el discurso tiene un principio y un fin (*autocontención* de los textos de saber) y opera por un encadenamiento lógico de razonamientos. Este mecanismo está presente en diversos niveles: desde el más *elemental* en donde se alude a cierto orden que es el adecuado en la presentación de los contenidos hasta el más *sofisticado,* que se encuentra en la presentación axiomática de las matemáticas. Como consecuencia de lo anterior, en el sistema educativo se vive una ficción (funcionalmente necesaria) de la correspondencia entre los tiempos de aprendizaje y los tiempos legales de enseñanza. Hoy se sabe un hecho fundamental: la coherencia lógica no garantiza el aprendizaje (el ejemplo más conocido es el que proporciona la llamada reforma de la matemática moderna).

La teoría establece que el saber a enseñar difiere cualitativamente del saber erudito (esto, claro está, debido a los fenómenos de la transposición didáctica). En este sentido se precisan las características del saber enseñable:

En cuanto al saber:

1°. La división de la práctica teórica en campos de saber delimitados que den lugar a prácticas de aprendizaje especializados; es decir, la *desincretización* del saber .

2°. En cada una de esas prácticas, la separación del saber y de la persona, es decir, la *despersonalización* del saber.

3°. La programación de los aprendizajes y de los controles, según las secuencias razonadas que permitan una adquisición progresiva de los conocimientos expertos, es decir, la *programabilidad* de la adquisición del saber.

En cuanto a la transmisión:

4°. La definición explícita, en comprensión y extensión, del saber a transmitir, es decir, la *publicidad* del saber.

5°. El control regulado de los aprendizajes, según procedimientos de verificación que autoricen la certificación de los conocimientos expertos, es decir, el *control social* de los aprendizajes.

Otro de los aspectos de interés en esta investigación, es el funcionamiento didáctico de los saberes que proporciona la teoría, en la cual se establecen diferentes niveles de explicitación en el discurso didáctico (Chevallard, 1997; Chevallard, et al., 1997):

- *Nociones protomatemáticas*: Nociones cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida como objeto de estudio, ni siquiera como instrumento útil para el estudio de otros objetos. Como ejemplo de este tipo de nociones se tiene la noción de *simplicidad* o *patrón* presente, por ejemplo, en las tareas algebraicas de factorización y simplificación de expresiones algebraicas.

- *Nociones paramatemáticas*: Nociones que se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumentos que sirven para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en sí mismas. Y por lo tanto no son objetos de evaluación directa, sino que son identificadas al momento de presentarse su no-maestría por parte de los estudiantes. Como ejemplo de este tipo de nociones se considera la noción de demostración: a un alumno se le pide demostrar aunque la demostración no haya sido considerada como *objeto de enseñanza*.

- *Nociones matemáticas*: Objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas. Las nociones matemáticas son, por tanto, *objeto de estudio* es sí mismas, además de servir como instrumento para el estudio de otros objetos. Son los contenidos que son el objeto de una evaluación explícita. Este tipo de nociones son designadas comúnmente por el currículo.

Cabe aclarar que estos niveles de explicitación no son, de ninguna manera, absolutos, pues a veces es posible llevar una noción a un nivel superior de explicitación. A este respecto Chevallard (1997) menciona que la noción paramatemática de demostración puede ser objeto de definiciones lógicas y precisas en la lógica matemática.

Por medio de estas nociones se forman distintos estratos del funcionamiento del conocimiento matemático escolar que se pueden dividir en dos grandes grupos: el de las nociones explícitas, que están conformadas por las nociones matemáticas, y el de las nociones implícitas, conformadas por las nociones paramatemáticas y las protomatemáticas. La importancia de estas distinciones en niveles de explicitación, es que proporcionan elementos para el análisis del discurso didáctico.

En relación con la Teoría de Situaciones Didácticas en Chevallard, et al. (1997, pp. 220-223) se afirma: "Uno de los avances más importantes de la teoría de Situaciones Didácticas proviene del hecho que las situaciones a-didácticas pueden estudiarse de forma teórica, en estrecha relación con las diversas formas de los conocimientos matemáticos, y los correspondientes modos de funcionamiento de dichos conocimientos". Los niveles de explicitación son relacionados con la teoría de Situaciones Didácticas como lo muestra en la siguiente tabla:

Forma del conocimiento matemático	Modo de funcionamiento	Tipos de interacción del alumno con el medio	Tipo de situación a-didáctica	Estatuto, en clase, de las nociones correspondientes
Modelo implícito	Un *modelo implícito* que sugiere una decisión o un algoritmo.	Intercambio de informaciones no codificadas (La acción	Acción	Nociones protomatemáticas

		influye directamente sobre el medio).		
Lenguaje o modelo explícito	Un *lenguaje* que permite la producción de un mensaje	Intercambio de informaciones codificadas según un lenguaje.	Formulación	Nociones paramatemáticas
Teoría	Una *teoría* permite construir proposiciones y *juicios*	Intercambio de juicios.	Validación e institucionalización	Nociones matemáticas

Tabla 2.1. Niveles de explicitación relacionados con la teoría de Situaciones Didácticas

La intención de considerar las relaciones existentes, al seguir a Chevallard, entre los diferentes niveles de explicitación en el discurso didáctico y los modos de funcionamiento de los conceptos matemáticos que establece Brousseau en su teoría de Situaciones Didácticas es la de establecer las diferencias y semejanzas cualitativas entre la construcción social y la construcción escolar (o vida escolar) de la noción de exponente no natural.

2.9. La noción de *meta*

Algunos de los hallazgos encontrados en esta investigación en lo referente a la epistemología de la noción de exponente no natural, ha motivado a considerar la noción de meta para explicar la naturaleza de ciertas nociones y argumentaciones.

Utilizaremos el término *consideración metamatemática* para designar, en un sentido amplio, ciertos elementos de información o de conocimientos sobre el funcionamiento, la utilización o el aprendizaje de las matemáticas. En un sentido más preciso seguimos a Robert y Robinet (1996) cuando consideran que existen diferentes formas de este tipo de información:

- De la información constitutiva del conocimiento matemático (métodos, estructuras, organización);

- de la información constitutiva del funcionamiento matemático, por ejemplo, la información sobre el papel del juego de marcos en la resolución de problemas; el de las preguntas, de los ejemplos y contraejemplos; el de la localización de los parámetros en una cuestión matemática, el del control, etcétera, y

- de la información de naturaleza epistemológica sobre las matemáticas, por ejemplo, la naturaleza unificadora del álgebra lineal.

Desde el punto de vista epistemológico y didáctico se dirá que una noción es de tipo metamatemático cuando ella funciona como una organizadora de las nociones protomatemáticas, paramatemáticas y matemáticas. Entonces, entenderemos que las convenciones matemáticas son un mecanismo que se sitúa en el nivel metamatemático de las nociones.

2.10. Una nota sobre el concepto de sistema

Los intentos por caracterizar la complejidad del mecanismo que nos ocupa nos motiva a explicitar un concepto que hasta ahora hemos usado de acuerdo a los usos y costumbres: El concepto de sistema. Sin agregar nada en especial a lo que comúnmente se entiende por sistema se hacen las siguientes anotaciones.

Se entiende por sistema a un todo indiviso y articulado compuesto por partes interdependientes con ellas mismas y con su entorno. El sistema es la integración, más que la suma de sus partes. Cada parte es un miembro del sistema y la naturaleza de la parte depende de su pertenencia al sistema. En otro nivel de análisis, un sistema puede considerarse como cualquier parte del universo elegida para su estudio, precisamente, porque sus componentes tienen alguna peculiaridad que se quiere estudiar, y porque en ese momento, y para ese estudio se desea prestar atención en ese aspecto, y donde el estado de cada componente del sistema, depende o está influido o *restringido* por el estado de las otras componentes. Es por ello que el análisis de un sistema puede ser hecho de manera *funcional*; es decir, diferenciando una parte de otra por el papel que desempeña dentro del sistema. Decimos que una propiedad de un sistema es *emergente* cuando no puede ser explicada por sus partes constituyentes, sino a través del todo.

2.11. Objetivos de investigación que se derivan

Nuestros referentes teóricos llevan a plantearnos los siguientes objetivos particulares de investigación; qué matizan aquel que establecimos en el capítulo anterior.

2.11.1. Objetivo en el plano epistemológico

Como el mecanismo está intrínsecamente relacionado con la teorización en Matemáticas, se plantea como objetivo, en el plano epistemológico, hacer una caracterización en tanto la función que éste tiene en la transformación de un conjunto de conocimientos en un sistema integrado. Para ello se considera:

- Su génesis y evolución en diferentes paradigmas y escenarios de significación
- Su funcionamiento en la construcción de otras nociones y conceptos matemáticos.
- Sus relaciones con otras nociones y objetos matemáticos.
- Sus relaciones con otro tipo de convenciones.

Entre las nociones en donde se buscan relaciones son los de número (*negatividad* y *positividad*), funcionalidad y variación.

2.11.2. Objetivo en el plano de la transmisión y difusión del conocimiento

El mecanismo, y sus realizaciones, están presentes en la matemática escolar. Al ser ésta organización cualitativamente distinta al sistema de conocimientos *erudito* se presenta necesario determinar, en el plano de la comunicación de los conocimientos, los procesos de transposición que sufre. Además como cada organización es una etapa de un proceso, se analiza esta evolución.

Metodológicamente lo anterior se hará al revisar obras diseñadas para la comunicación, tanto de transmisión como de difusión, de diversas épocas y se involucran los siguientes elementos:

- Argumentos discursivos y argumentos lógicos.
- Mecanismos de consenso y validación.
- Negociación de significados.
- Mecanismos de legitimación del conocimiento.

2.11.3. Objetivo en el plano de la cognición

Al tomar como base los resultados obtenidos en los dos planos anteriores se plantea el objetivo en el plano de la cognición, que consiste en caracterizar el mecanismo de convención matemática, en tanto la cognición de los individuos. El desarrollo de este objetivo está íntimamente relacionado con el objetivo en el plano experimental y se toma en cuenta:

- Las concepciones ligadas al contrato didáctico
- Las concepciones ligadas al conocimiento

- La construcción de esquemas mentales.

2.11.4. Objetivo en el plano social

Caracterizar el mecanismo de convención matemática en tanto las restricciones sociales que coaccionan su funcionamiento al seno de los grupos sociales:

- Las nociones de lo que es científico en Matemáticas o nociones metamatemáticas
- Las nociones de lo que es coherente o no en la comunicación de los conocimientos matemáticos.

2.11.5. Objetivo en el plano experimental

A través de la utilización de la caracterización lograda en los planos anteriores, considerada como inicial para el diseño una situación experimental, se busca enriquecerla a través de su contraste con los resultados de una o más puestas en escena en situación escolar.

En términos generales el objetivo del diseño de las situaciones experimentales es provocar la *activación* del mecanismo como estrategia para la avanzar la situación, para después hacer un análisis en donde se confronten los resultados de la puesta con los esperados.

CAPÍTULO 3

CARACTERIZACIÓN DEL MECANISMO EN LA SOCIOGÉNESIS

En este capítulo es presentada la caracterización del mecanismo que es objeto de nuestro estudio y al que hemos nombrado *convención matemática*. La caracterización está hecha en tanto su función en la integración sistémica de conocimientos. En un principio se utilizan ejemplos en el contexto algebraico para ensayar dicha caracterización que ha emergido de manera retrospectiva de las indagaciones. Después se hace un bosquejo del devenir histórico del concepto de exponente atendiendo al papel que desempeñó el mecanismo en tal devenir. A continuación se presentan algunas hipótesis epistemológicas que, en el caso particular de las convenciones matemáticas de los exponentes, han empezado a tomar mayor claridad. Finalmente hacemos un resumen para sintetizar los hallazgos.

3.1. Primera aproximación al mecanismo

En primer lugar se aclara la elección de la expresión *convención matemática* para nombrarlo. La acepción que utilizamos para convención es la que señala aquello que es conveniente para algún fin específico; entonces una convención matemática es una conveniencia para las matemáticas. Pero ¿qué es aquello que es conveniente para las matemáticas? Esta pregunta subraya por lo menos dos asuntos importantes que debe cubrir la caracterización. En primera instancia muestra que ésta debe ser *funcional*; es decir, que debe señalar las funciones de conveniencia, y en segundo lugar que ésta debe dar el contexto específico de la conveniencia.

El análisis epistemológico del desarrollo sobre el concepto de exponente no natural sugiere la presencia de un mecanismo más o menos uniforme de construcción de conocimiento, presente en las distintas formulaciones que se han podido determinado. Se puede resumir que *el significado de los exponentes no naturales es* convenido *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* matemático *(es decir para la integración sistémica de conocimientos).* Es por ello que de manera sintética designamos al mecanismo con la expresión: *convención matemática*. Las formas o realizaciones de este mecanismo pueden ser una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción, entre otras. La elección de la forma depende de los objetivos teóricos específicos. A lo anterior se debe agregar que por el carácter sistémico de una teoría es posible que la inclusión de un nuevo objeto provoque la exclusión de otro. Es este sentido, es importante, para la caracterización, el tipo de consideraciones *metamatemáticas* vertidas en un proceso de construcción; las cuales se presentan bajo la forma de *argumentos* acerca de lo que se debe o no conservar en el sistema. Además, dicha caracterización coloca el énfasis para entender a las convenciones matemáticas como instrumento teórico para satisfacer ciertos requerimientos de preservación de un conocimiento anterior en una nueva organización del conocimiento.

A continuación se presenta un ejemplo del funcionamiento del mecanismo en la sintaxis algebraica. Se ha elegido éste debido a lo sintético y familiar que resulta, para con ello dar un primer acercamiento al sentido general de la caracterización presente en este capítulo.

En primera instancia, el exponente natural mayor o igual a dos representa una multiplicación reiterada, que surge como una *convención simbólica* que atiende a un principio de economía en la escritura. En términos matemáticos, con dicha definición se provoca la existencia del objeto matemático llamado *potencia*, que surge de la interacción de los objetos matemáticos *base* y *exponente*. La interacción que se da entre este objeto matemático nuevo con las operaciones algebraicas genera, de manera deductiva, un sistema de conocimientos sobre su operatividad que comúnmente son designados como *leyes de los exponentes*:

- $A^nA^m=A^{n+m}$,
- $A^n/A^m=A^{n-m}$ con $n > m +1$, $A \neq 0$
- $(A^n)^m=A^{nm}$

A continuación, se plantea la necesidad de la inclusión de un objeto matemático nuevo[16], por ejemplo A^0. Por un principio metamatemático, su inclusión debe ser de tal manera que el nuevo sistema de conocimientos conserve la coherencia y unidad del precedente. En este caso se conviene que $A^0=1$. El aspecto funcional del mecanismo, para la integración sistémica de conocimientos, puede ser constatado con el siguiente razonamiento: si únicamente se utiliza la propiedad $(A^n)^m=A^{nm}$ para convenir un valor para A^0 nada se puede decir; ya que, por ejemplo, $(A^0)^2=A^{0*2}$ entonces $(A^0)^2=A^0$ por lo que $A^0=1$ o $A^0 = 0$. La realización del mecanismo, en este caso, es la igualdad $A^0=1$ lo cual tiene por consecuencia que el modelo de exponente como multiplicación reiterada carezca de sentido para el nuevo objeto matemático. Esta pérdida del sentido primitivo ocasiona la emergencia de la negociación de significados y de lo que debe ser conservado en el sistema.

El punto central que se quiere señalar es que el argumento anterior no es producto de un razonamiento lógico en el sentido estricto del término (producto de inferencias lógicas aceptadas por el razonamiento deductivo). Para clarificar este punto se puede considerar el argumento más común, en la escuela y los libros de texto, para el exponente cero, el cual da la sensación de que $a^0 = 1$ se puede *deducir*:

Como $1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ entonces $a^0 = 1$

Cuando $m > n$ la igualdad $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (reacuérdese que la definición de partida es: a^n es igual a multiplicada n veces) puede tener el argumento *lógico* siguiente: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{aaa(m-veces)}{aaa(n-veces)}$ entonces eliminando factores queda lo que se afirma. Sin embargo el argumento: como $1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ entonces $a^0 = 1$; no es de la misma naturaleza que el anterior; pues se apoya en la sintaxis de una propiedad; pero en este caso no se sabe a priori si es cierto que $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n}$.

3.2. Presencia del mecanismo en el devenir del concepto de exponente

El estudio se ha llevado a cabo del desarrollo del concepto de exponente puede ser esquematizado en las siguientes etapas de conocimiento: 1) La semántica geométrica, 2) Primera sintaxis algebraica. 3) Segunda sintaxis algebraica (La aceptación de que el exponente puede ser cero y negativo), 4) Primera semántica de la cuadratura de las curvas (Índice de las curvas de Wallis) y 5) Segunda semántica de la cuadratura de las curvas (Posición relativa del área).

[16] Por el momento no se consideran las causas que originan la necesidad de incluir objetos nuevos en un sistema de conocimientos.

A continuación se revisan algunas de las hipótesis epistemológicas más importantes acerca del pasaje de las etapas de conocimiento mencionadas, en donde se centra la atención en el papel del mecanismo de convención matemática

Tomando en cuenta el devenir histórico, la emergencia de las convenciones matemáticas para los exponentes no surge de preguntarse por el significado de la expresión 2^{α} para un valor arbitrario de α. Se remarca esta aseveración debido a que en la organización escolar tradicional de los saberes (basado en la estructura de los números reales) el problema de las convenciones es reducido a un problema de extensión. Tradición comenzada por Euler y continuada por Cauchy en su programa de organizar a las matemáticas como una gran estructura hipotético-deductiva. Tal negación lleva a considerar que es posible establecer diferentes escenarios para la construcción de las convenciones matemáticas para los exponentes.

Dentro del marco de las sintaxis algebraicas, los convencionalismos tienen por finalidad incluir nuevos objetos algebraicos a la estructura operativa conformada por los diferentes caracteres *cósicos*[17]. La estructura operativa está basada en las relaciones entre la progresión aritmética y geométrica. En la primera sintaxis algebraica se determinan los convencionalismos para incluir al *número* en la estructura operativa del conjunto $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5,\ldots\}$. De esta manera se construye un símbolo especial φ que tiene la propiedad del neutro multiplicativo, aunque éste no sea identificado con el 1. El número 5, entonces, es repesentado como 5φ. En el marco de esta primer sintaxis algebraica los cocientes del tipo x^5/x^7, es decir, donde el grado del dividendo es menor que el del divisor, no son incluidos como caracteres cósicos ya que, como remarca Marco Aurel *tal partición no se* *podrá partir y quedará como quebrado*. Este hecho señala una diferencia sustancial con la segunda sintaxis algebraica, en donde el progreso en la operatividad con los números negativos hace posible tal inclusión, pues se establecen los convencionalismos para incluir a los cocientes $1/x$, $1/x^2$,…. entre los caracteres cósicos y su operatividad. Al parecer, por el contexto de tal formulación debida a Chuquet, uno de los objetivos de esta inclusión era dar legitimidad a los números negativos. En resumen, se puede decir que en el marco del pensamiento algebraico la noción de exponente no natural surgió por la intención de preservar la operatividad de los caracteres cósicos al momento de incluir objetos matemáticos nuevos, a través de un mecanismo de convención matemática. La fuente de esta convención surge de un principio metamatemático que establece que en matemáticas se busca el mayor grado de unidad al momento de incluir nuevos objetos matemáticos a su cuerpo de conocimientos. En términos de la perspectiva social que se quiere atender; este principio puede ser interpretado como un consenso que establece que un conocimiento es válido si con él se atiende a cierta unidad de un sistema de conocimientos.

La aparición de una representación gráfica, que utiliza la sintaxis algebraica como saber de referencia, ocasiona que los convencionalismos algebraicos sean revisados. Éstos no pueden ser abandonados, ya que ello sería lo mismo que perder un conocimiento útil y aceptado; por lo que es necesario, si es posible, construir interpretaciones que *no lo contradigan*. Si se abandona el conocimiento anterior, debe ser por razones poderosas o casi inevitables (como sucedió, por ejemplo, con los logaritmos de los números negativos). En este sentido, el mecanismo de convención matemática debe ser puesto en funcionamiento con el objetivo de lograr una *coordinación* de las representaciones. Es por ello que parte de rica

[17] En el lenguaje moderno se puede identificar estos caracteres cósicos con la segunda potencia, la

semántica de los números negativos es recuperada; por ejemplo, la noción de *negatividad* es puesta en funcionamiento en el campo de las proporciones como *carencia* y como *estar al otro lado* en la representación gráfica. En este mismo sentido, los índices de las curvas, construidos por Wallis, estaban íntimamente ligados a la razón característica (una proporción entre áreas). Estas interpretaciones tenían como propósito que un *solo* algoritmo funcionará para el cálculo de cuadraturas de todas las curvas algebraicas conocidas, en tanto la ecuación que la representaba.

A continuación son presentados los detalles de todo lo mencionado anteriormente.

3.2.1. Etapa de la semántica geométrica

Debido a que las cantidades (lo que tiene medida) están íntimamente ligadas a la geometría, sólo son tratadas las cantidades que representan una magnitud geométrica: longitud, área y volumen. Es por ello que no existe la noción de exponente mayor a 3 ni la de exponente 1.

3.2.2. Etapa de la primera sintaxis algebraica

En esta etapa se deja a un lado el significado geométrico de las cantidades, para concentrase en la sintaxis de las cantidades x, x^2, x^3, x^4, x^5,... Por ello se elabora un aparato algorítmico para hacer operaciones entre ellas, sintetizado por la relación entre las progresiones aritmética y geométrica[18].

---

tercera potencia… de la incógnita.

[18] Es decir, si se coloca la progresión aritmética que representa el número de multiplicaciones de la base y la progresión geométrica que representa las potencias, se tiene que la adición (resta) en la parte superior (la serie aritmética) corresponde a la multiplicación (división) de la serie de abajo (geométrica):

2,	3,	4,	5,	6,
4,	8,	16,	32,	64,

A la relación expresada en el enunciado anterior la abreviaremos, en lo sucesivo, como *la relación entre la progresión aritmética y geométrica.*

En cuanto a la multiplicación, la regla de Aurel se basa en el comportamiento especial de las sucesiones (la relación entre la progresión aritmética y progresión geométrica):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	χ	ξ	ζ	ξξ	β	ξζ	*b*β	ξξξ	ζζ

Tabla 3.1. Caracteres cósicos por Aurel

y está expresada en los siguientes términos (Meavilla, 1993) (se conserva el español original): "Y cuando tu querras multiplicar vna dignidad, grado, o carácter con otro, mira lo que esta encima de cada uno y junta lo simplemente, y aquello que verna, mira encima de qual carácter estara: tal diras que procede de tal multiplicacion".

En este contexto se puede encontrar herencia de la semántica geométrica; así las cantidades x, x^2, x^3, x^4, x^5 reciben nombres que remiten, de algún modo, al significado geométrico, que respectivamente Vieta llama: (Rojano y Sutherland, 1993) longitud, plano, sólido, plano plano, plano sólido, sólido plano, plano plano sólido, etcétera. O Marco Aurel (Meavilla, 1993) las designa como: *dragma* o número, *rayz* o cosa, *censo cubo*, *censo de censo*, *sursolidum* o *primo relato*, *censo de cubo*, *bissursolidum* o *segundo relato*, *censo de censo de censo*, *cubo de cubo*, etcétera.

En esta etapa no se manejan exponentes negativos, por ejemplo Marco Aurel sólo considera en la división el caso en que el dividendo y el divisor son monomios, distinguiéndose dos posibilidades: 1) el grado del dividendo en menor que el del divisor y 2) el grado del dividendo es mayor que el del divisor. En la primera posibilidad *tal partición no se podrá partir y quedará como quebrado*; en la segunda, la regla de Aurel coincide con la actual ($a^m/a^n=a^{m-n}$ con $m>n$)".

3.2.3. Hipótesis epistemológicas sobre el tránsito de la semántica geométrica hacia la primera sintaxis algebraica

- Se deja a un lado la interpretación geométrica para concebir las potencias mayores a 3.

- Deben construirse nuevos objetos algebraicos: x^2, x^3, x^4, x^5,... para ello la centración debe ser puesta en la *estructura operativa* (multiplicación y división) de los nuevos objetos algebraicos. Utilizando la sintaxis actual se debe hacer énfasis en los resultados $x^m x^n = x^{m+n}$ y $x^m / x^n = x^{m-n}$ con $m > n + 1$ que hacen referencia a la estructura operativa:

  - (Potencia de x)(Potencia de x) = (Potencia de x)
  - (Potencia de x)/(Potencia de x) = (Potencia de x)

- Con la utilización de las relaciones entre la progresión aritmética y la progresión aritmética se ayuda a interpretar como verdaderos objetos algebraicos a x^2, x^3, x^4, x^5, ...

2ª potencia de x	3ª potencia de x	4ª potencia de x	5ª potencia de x	6ª potencia de x	7ª potencia de x	8ª potencia de x	9ª potencia de x
2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla 3.2. Objetivación de las potencias de *x*

  - (3ª potencia de x)(4ª potencia de x)=(7ª potencia de x)
  - (7ª potencia de x)/(4ª potencia de x)=(3ª potencia de x)

- Fuera de este contexto operativo no tienen significado los objetos algebraicos.

3.2.4. Etapa de la segunda sintaxis algebraica: La aceptación del exponente cero y del exponente negativo

Esta aceptación surge primero al admitir la operatividad de cantidades negativas (Gallardo, 1993) para después enmarcarlas en el aparato algorítmico de la relación entre la progresión aritmética y geométrica. De esta manera Chuquet (Struik, 1986), opera de la siguiente manera: (Chuquet utiliza $.7^{1.\tilde{n}}.$ para denotar $7/x$).

> How to multiply a difference of number [une difference de nombre] by itself or by another similar o dissimilar to it.
>
> Example. He who multiplies $.12^0.$ by $.12^0.$ obtains .144., then he who adds .0. to .0. obtains .0.; hence multiplication gives .144..
>
> Then He who multiplies $.12^0.$ by $.10^2.$has first to multiply .12. by .10., which gives .120. and then .0. must be added to .2.. Thus the multiplication will give 120^2 By the same reasoning he who multiplies $.5^1.$by $.8^1.$obtains the multiplication $.40^2..$
>
> He who also wants to multiply $.12^3.$by $.10^5.$must first multiply .12. by .10., obtains .120., then must add the denominates together, which are .3. and .5., giving .8. Hence the multiplication gives $.120^8..$
>
> Also he who wants to multiply $.8^1.$by $.7^{1.\tilde{n}}.$ obtains as multiplication .56., then he who adds the denominations together will take 1.*p* with .1*ñ* and obtains the multiplication $.56^0..$
>
> Similarly, he who would multiply $.8^3.$ by $.7^{1.\tilde{n}}.$will find it convenient first to multiply .8. by .7.. He obtains .56. then he most add the denominations, and will take 3.*p* with .1.*ñ* and obtain .2.. Hence the multiplication gives $.56^2.$ and this way we must understand other problems.

Desde el punto de vista de la sintaxis algebraica, se puede decir que las primeras formulaciones de los exponentes mayores a tres se encuentran en la etapa de desarrollo conocido como *sincopado*; en donde es necesario apoyarse en otros lenguajes: natural, aritmético o geométrico, semánticamente más ricos, para formular las reglas, para interpretar y resolver los problemas. Con la elaboración de un lenguaje algebraico adecuado, los otros lenguajes se abandonan progresivamente (Rojano, 1993). Es por ello que las primeras formulaciones de los exponentes no naturales no tuvieron trascendencia sino hasta que un nuevo lenguaje entro en el escenario: el lenguaje de las representaciones gráficas de las ecuaciones.

Aunque hay referencias aisladas (Cajori, 1928) de que los exponentes fraccionarios (1/2 y 1/3) fueron utilizados, éstas no son lo suficientemente amplias para que puedan ser consideradas aquí.

3.2.5. Hipótesis epistemológicas sobre el tránsito de la primera hacia la segunda sintaxis algebraica

La pregunta ¿qué significan las expresiones 2^1, 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3},...? no fue hecha sino hasta que se establecieron diversas formulaciones para la sintaxis algebraica; ya que *primero* se determinaron los convencionalismos para las expresiones x^1, x^0, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3},... que fueron establecidos a partir de la operatividad de las expresiones x^2, x^3, x^4, x^5,... Sin embargo estos convencionalismos fueron parte marginal de la sintaxis algebraica o del estudio de la *cosa* o los caracteres *cósicos*; debido, fundamentalmente, a que no tenían sentido fuera del contexto algebraico.

- La pregunta que *activa* el mecanismo para las expresiones x^1,x^0, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, es ¿qué se debe hacer para que la estructura operativa *anterior* se *conserve* en casos como los siguientes?:

    - *Emergencia del concepto del exponente uno*:

(4ª potencia de *x*) / (3ª potencia de *x*) = (¿Qué potencia de *x*?)

- *Emergencia del concepto de exponente cero*:

  (2ª potencia de *x*) / (2ª potencia de *x*) = (¿Qué potencia de *x*?)

- Emergencia del concepto de exponente negativo

  (3ª potencia de *x*) / (4ª potencia de *x*) = (¿Qué potencia de *x*?)

- Es necesario verificar que los con convencionalismos establecidos se preserva la estructura multiplicativa, lo cual sólo tiene sentido si se posee cierta operatividad con los números negativos (por ejemplo 5+(-3)). También puede plantarse la hipótesis inversa: los convencionalismos obtenidos y la necesidad de preservar la estructura multiplicativa ocasionan cierta operatividad con los números negativos. La hipótesis anterior alcanza su verdadero sentido al observar que para establecer los convencionalismos no es necesario una verdadera operatividad con los números negativos, ya que éstos pueden ser establecidos con operaciones del tipo 3 - 5 = -2, que tienen un significado más rico (deuda, izquierda, entre otros) y que no involucran necesariamente el manejo de -5 como objeto matemático.

- En este sentido, es posible explicar los motivos de que, por ejemplo, la raíz cuadrada no fue sometida, en esta etapa, al mecanismo para incluirla en las potencias de la incógnita: las raíces poseen una operatividad que satisfactoria.

3.2.6 Etapa de la primera semántica de la cuadratura de las curvas. Índice de las curvas de Wallis

En lo referente a esta etapa, se consideran las interpretaciones hechas por John Wallis en su trabajo del cálculo de cuadraturas. Esta etapa, junto con la siguiente, se caracteriza por el surgimiento de una nueva representación, la cual proporciona una semántica para los objetos algebraicos: la representación cartesiana de las relaciones algebraicas.

Wallis se basa, para hallar áreas, en el método de los indivisibles de Cavalieri, es decir, él considera una superficie como la suma de un número infinito de segmentos de líneas paralelas y a un volumen como la suma de un número infinito de porciones de planos paralelos. Es a través de este método que determina que es posible resolver distintos problemas de cálculo de áreas y superficies a través de razones aritméticas de la forma:

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k}$$

Wallis (Confrey y Dennis, 2000) investigó el comportamiento de estas razones cuando el valor de n se incrementa para k=1,2,3,4 y 5, y utiliza las fórmulas, no demostradas por él, de las sumas $0^k+1^k+2^k+\ldots+n^k$ (k=1,2,3,4 y 5) para establecer el límite siguiente (por decirlo en términos modernos):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0^k + 1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k} = \frac{1}{k+1} \quad (k=1,\ 2,3,4,5)$$

A tales límites Wallis los nombra *razones características* de *índice* 1, 2, 3, 4 y 5, según sea el valor de k. A partir de estas consideraciones hace la afirmación general de que la razón característica de índice k es $1/(k+1)$ para todos los enteros positivos. En particular la razón característica de índice 2, es decir 1/3, proporciona la razón existente entre la porción parabólica y la porción rectangular que la contiene.

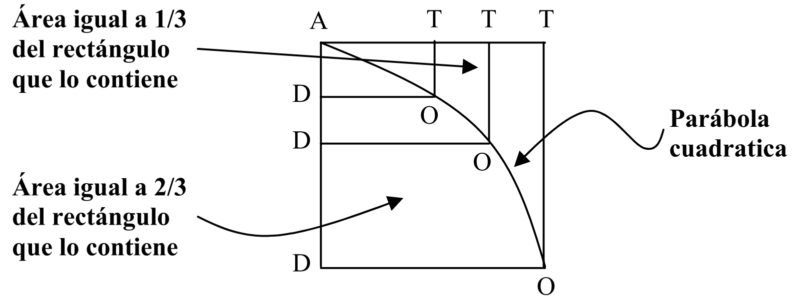


Ilustración 3.1. Relación entre una curva de índice 2 y 1/2

Consideraciones sobre el complemento de las áreas de las gráficas $y=x^k$, (k entero positivo) sugirió a Wallis el concepto de índice fraccionario. Así, debido a que el área bajo la curva $y=\sqrt{x}$ es el complemento del área bajo $y=x^2$ debe tener una razón característica de 2/3=1/(1+1/2) por lo que el índice de $y=\sqrt{x}$ debe ser 1/2. Lo mismo puede verse para $y=\sqrt[3]{x}$, cuya razón característica debe ser 3/4=1/(1+1/3) por lo que su índice será 1/3.

Esta misma interpretación le permite a Wallis darle un significado al exponente cero (Confrey y Dennis, 2000): “Debido a que $y=x^0$ debe tener una razón característica de 1, debe ser una línea horizontal. Debido a que 1 elevado a cualquier potencia es 1, esta línea horizontal debe estar a la altura de 1”.

A continuación Wallis afirma (Confrey y Dennis, 2000) que el índice apropiado de $y=\sqrt[q]{x^p}$ debe ser p/q y que su razón característica es $1/(1+p/q)$; pero al no tener manera de verificar directamente la razón característica de tales índices, por ejemplo de $y=\sqrt[3]{x^2}$, Wallis retoma el principio de *interpolación* el cual afirma que cuando se puede discernir un patrón de cualquier tipo en una sucesión de ejemplos, uno tiene el derecho de aplicar ese patrón para cualesquiera valores intermedios. En el caso que interesa, él hace la siguiente tabla de razones características conocidas (R(i/j) denota la razón característica, desconocida, de índice i/j):

q/p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1=1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
2	1=2/2	2/3	2/4	**R(3/2)**	1/3=2/6	**R(5/2)**	1/4=2/8	**R(7/2)**	1/5=2/10
3	1=3/3	3/4	**R(2/3)**	1/2=3/6	**R(4/3)**	**R(5/3)**	1/3=3/9	**R(7/3)**	**R(8/3)**
4	1=4/4	4/5	2/3=4/6	**R(3/4)**	1/2=4/8	**R(5/4)**	**R(3/2)**	**R(7/4)**	1/3=4/12
5	1=5/5	5/6	**R(2/5)**	**R(3/5)**	**R(4/5)**	1/2=5/10	**R(6/5)**	**R(7/5)**	**R(8/5)**
6	1=6/6	6/7	3/4=6/8	2/3=6/9	**R(2/3)**	**R(5/6)**	1/2=6/12	**R(7/6)**	**R(4/3)**
7	1=7/7	7/8	**R(2/7)**	**R(3/7)**	**R(4/7)**	**R(5/7)**	**R(6/7)**	1/2=7/14	**R(8/7)**
8	1=8/8	8/9	4/5=8/10	**R(3/8)**	2/3=8/12	**R(5/8)**	**R(3/4)**	**R(7/8)**	1/2=8/16
9	1=9/9	9/10	**R(2/9)**	3/4=9/12	**R(4/9)**	**R(5/9)**	**R(2/3)**	**R(7/9)**	**R(8/9)**

Tabla 3.3. Tabla de razones características conocidas por Wallis

Al aplicar el principio de interpolación sobre la fila 5 se puede conjeturar, por ejemplo, que R(3,5)=5/8 y sobre la columna 3 que R(3,5)=5/8. Razonamiento semejante se puede hacer sobre la fila 10 para establecer que R(3,5)=10/16 y sobre la columna 6 que R(3,5)=10/16. Este tipo de razonamientos, que no llevan a una contradicción, le permitieron a Wallis llenar la tabla de la siguiente manera (se han resaltado aquellas razones características que surgen del principio de interpolación) (Struik, 1986):

q/p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1/1	1/2	1/3	¼	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10
2	2/2	2/3	2/4	**2/5**	2/6	**2/7**	2/8	**2/9**	2/10	**2/11**
3	3/3	3/4	**3/5**	3/6	**3/7**	**3/8**	3/9	**3/10**	**3/11**	3/12
4	4/4	4/5	4/6	**4/7**	4/8	**4/9**	**4/10**	**4/11**	4/12	**4/13**
5	5/5	5/6	**5/7**	**5/8**	**5/9**	5/10	**5/11**	**5/12**	**5/13**	**5/14**
6	6/6	6/7	6/8	6/9	**6/10**	**6/11**	6/12	**6/13**	**6/14**	**6/15**
7	7/7	7/8	**7/9**	**7/10**	**7/11**	**7/12**	**7/13**	7/14	**7/15**	**7/16**
8	8/8	8/9	8/10	**8/11**	8/12	**8/13**	**8/14**	**8/15**	8/16	**8/17**
9	9/9	9/10	**9/11**	9/12	**9/13**	**9/14**	**9/15**	**9/16**	**9/17**	9/18

Tabla 3.4. Tabla de razones características interpoladas por Wallis

Wallis también interpreta (Confrey y Dennis, 2000) a los números negativos como índices. Define el índice de $1/x$ como -1, el índice de $1/x^2$ como -2, etc. También extiende esta definición a las fracciones[19]: por

[19] Deseamos aclarar que a través de la literatura consultada no fue posible determinar claramente los motivos que tuvo Wallis para realizar hacer tales definiciones; pero es de suponer que fueron tomadas de las convenciones algebraicas que se han detallado con anterioridad.

ejemplo, $1/\sqrt{x}$ tiene un índice de -1/2. Después establece que la relación entre el índice y la razón característica sigue siendo válida para esos índices negativos. Esto es, si *k* es un índice entonces $1/(k+1)$ es la razón del área sombreada bajo la curva hasta el rectángulo. En el caso de un índice negativo, esta área sombreada no es acotada (hecho que Wallis conocía como lo muestran los siguientes párrafos). Esto no impide que Wallis generalice su afirmación.

Cuando k=-1 la razón característica debe ser

$$\frac{1}{-1+1}=\frac{1}{0}=\infty$$ [20]

Wallis aceptó este cociente como razonable debido a que el área bajo la curva $1/x$ diverge; el cual, al parecer, era un hecho conocido en la época.

Cuando k=-2, la razón característica debe ser 1/(-2+1)=1/-1. Aquí, la concepción de Wallis sobre la razón difiere de la aritmética moderna de números negativos. Él no cree que 1/-1=-1, más bien, se queda con su epistemología de representaciones múltiples. Debido a que el área sombreada bajo la curva $y=1/x^2$ es más grande que el área bajo la curva $1/x$, concluye que la razón 1/-1 es mayor que infinito (*ratio plusquam infinita*). Continúa concluyendo que 1/-2 es incluso más grande. Esto explica el plural en el título de su tratado *Arithmetica Infinitorum*, de la cual, la traducción más adecuada sería La Aritmética de los Infinitos.

Es importante señalar que de acuerdo con (Confrey y Dennis, 2000) "Wallis continuó afirmando que esto era cierto incluso cuando el índice es irracional. Analizó un ejemplo así, cuando el índice es igual a $\sqrt{3}$". Aunque no se tuvo acceso al trabajo original de Wallis creemos que este pasaje es de particular interés para uno de los motivos de la presente investigación,

[20] Lo que hoy se entiende por fracciones, en la época de Wallis se concebía como proporcionalidad por lo que 1 es 0 (nada) como ∞ es a 1.

el diseño de situaciones experimentales, por dos motivos: a) Desde la perspectiva de la construcción de los convencionalismos de los exponentes de acuerdo con la relación entre la progresión aritmética y geométrica el exponente $\sqrt{3}$ no puede ser formulado; ya que este número no puede ser parte de una progresión aritmética entre 1 y 2 (de lo contrario tendría que existir un entero *k* que cumpla $k(\sqrt{3}-1) = 2$ lo cual no es posible) y b) la existencia de una curva de índice $\sqrt{3}$ puede ser interpretada cómo la existencia de una curva de razón característica $1/(1+\sqrt{3})$ que se encuentra garantizada por el contexto de las cuadraturas.

3.2.7. Etapa de la segunda semántica de la cuadratura de las curvas. Posición relativa del área

Aun que sabemos poco de la influencia que tuvieron las interpretaciones de Wallis, al parecer fue poca, ya que trabajos posteriores muestran una interpretación gráfica del cálculo que no involucraba la consideración de *infinitos*. Esta nueva interpretación permite uniformizar la fórmula del cálculo de las cuadraturas a través de la posición relativa en que se localiza el área calculada. A manera de ejemplo consideremos el desarrollo que hizo Newton (1669). En primer lugar establece la fórmula general:

> Para la base AB de alguna curva dejemos que la ordenada BD sea perpendicular y dejemos AB como *x* y BD como *y*. Sean *a, b, c*... cantidades dadas y *m, n* enteros. Entonces
>
> Regla I (cuadratura de curvas simples). Si $ax^{m/n} = y$, entonces $\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ es igual al área de ABD.
>
> Esto es evidente en los ejemplos.
>
> [...]

Ejemplo 2. Si x^2 ($= 1 \times x^{\frac{2}{1}}$) = y , entonces $\frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} (= \frac{8}{3} \sqrt[2]{x^3}) =$ ABD.

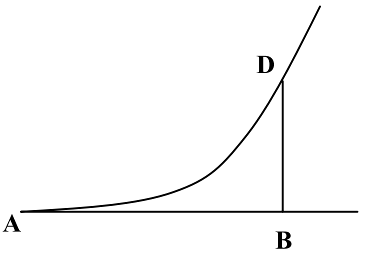


Ilustración 3.2. Curva prototípica de Newton para el cálculo de áreas acotadas

[...]

Ejemplo 4. Si $(1/x^2)$ ($= x^{-2}$) = y, esto es si $a = n = 1$ y $m = -2$, entonces $\left([1/-1] x^{-\frac{1}{2}} = \right) - x^{-1} (= -[1/x]) = \alpha\text{BD}$ infinitamente extendida en la dirección de α: el cálculo toma su signo negativo debido a que es tomado del otro lado de la línea BD.

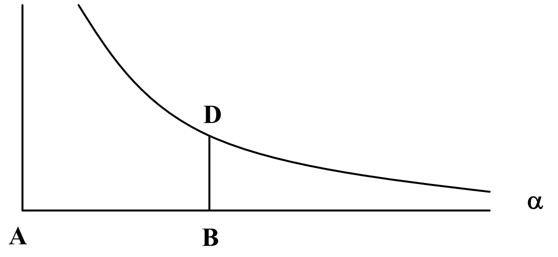


Ilustración 3.3. Curva prototípica de Newton para el cálculo de áreas no acotadas

Posteriormente Newton, en su *De Analysi per equationes infinitas* (Newton, 1669), permite que un área esté *compuesta por áreas parabólicas o hiperbólicas* al efectuar la siguiente interpretación (que en sí misma es una realización del mecanismo de convención matemática):

> Tercer ejemplo (de la Regla 3): Si $x^2+x^{-2}=y$, entonces $(1/3)x^3-x^{-1}$=la superficie descrita. [AB=x y BD=y]
>
> Pero aquí se debe notar que las partes de tal superficie se encuentran en lados opuestos de la línea BD: Precisando, dejando BF=x^2 y FD=x^{-2}, entonces $(1/3)x^3$=la superficie ABF descrita por BF y $-x^{-1}$=DFα descrita por DF. Y esto siempre ocurre cuando los índices $(m+n)/n$ de las razones de la base x en el valor de la

superficie sea afectada por diferentes signos. En estos casos cualquier superficie intermedia BDδβ (y no puede ser otro caso pues la superficie es infinita en otro lado) puede ser encontrada de la siguiente manera. Substraer la superficie relativa a la base Aβ de la superficie relativa a la base AB y se tiene la superficie βBDδ que queda sobre la diferencia de esas bases. [...] De la misma manera si Aβ=1 y AB=x, entonces βBDδ=$2/3+(1/3)x^3-x^{-1}$.

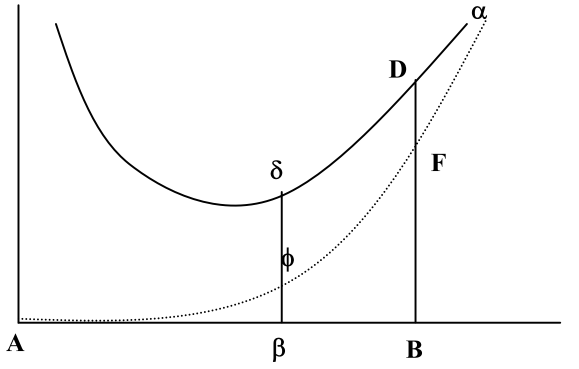


Ilustración 3.4. Curva de Newton para áreas acotadas y no acotadas

3.2.8. Hipótesis epistemológicas sobre el tránsito de la segunda sintaxis algebraica hacia las semánticas de la cuadratura de las curvas

- La aparición de una representación gráfica donde se utiliza a la sintaxis algebraica como saber de referencia, ocasiona que los convencionalismos algebraicos sean readaptados. Por un lado, éstos no pueden ser abandonados, ya que ello sería lo mismo que perder un conocimiento aceptado; por lo que es necesario, si es posible, efectuar interpretaciones que *no lo contradigan* (bajo la forma de convenciones matemáticas). Si es abandonado el conocimiento anterior, deberá ser por razones poderosas o casi inevitables (por ejemplo, los logaritmos de los números negativos). En este sentido las convenciones matemáticas deben ser hechas con el objetivo de lograr una *coordinación* de las representaciones.

- Una parte de extensa semántica de los números negativos es recuperada, la noción de *negatividad* es puesta en funcionamiento en el campo de las proporciones como *carencia* y como *estar a la izquierda* en la representación gráfica. En este mismo sentido, los índices de las curvas están íntimamente ligadas a la razón característica, que es una proporción entre áreas. A través de estas interpretaciones (como una realización del mecanismo de convención matemática) que tienen como propósito buscar que un *solo* algoritmo que funcione para el cálculo de cuadraturas de todas las curvas algebraicas conocidas, en tanto la ecuación que la representaba.
- Hay dos diferencias sustanciales entre las dos versiones de esta nueva interpretación: en la de Wallis, las razones en donde el *denominador* es negativo se puede observar que no admite la operación división, mientras que en la de Newton si se hace. Este hecho, entre otros, ocasiona que se presenten dos versiones de convencionalismos:

  - Paráfrasis del razonamiento de Wallis: La curva de índice p, $y = x^p$ (p entero positivo) tiene una razón característica de $1/(1 + p)$. Se sabe que la razón característica de la curva $y = \sqrt[q]{x}$ (p entero positivo) es $1 - 1/(1 + q) = 1/(1 + 1/q)$ entonces para preservar esta estructura la curva *debe* tener índice $1/p$. Aunque no se sabe cuál es la razón característica de la curva $y = \sqrt[q]{x^p}$ es de esperarse que sea $1/(1 + p/q)$. Se sabe, además, que la cuadratura de la curva $y = 1/x$ es infinita, esto puede interpretarse ya que por Álgebra se sabe que su índice es -1 por lo que su razón característica es $1/(1-1) = 1/0 =$ infinito. De manera análoga se puede interpretar que la curva $y = 1/x^2$ es $1/(1-2)=1/-1 =$ un infinito más grande que el anterior.

- Paráfrasis del razonamientos de Newton: Se sabe que la curva $x^{m/n} = y$, tiene área $\frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ (m, n enteros positivos). Además, por el Álgebra, se sabe que la expresión $y = 1/x^2$ puede ser reescrita como $y = x^{-2/1}$ por lo que *se puede* escribir que su área es igual a $\frac{1}{-2+1} x^{\frac{1}{-2+1}} = -1x^{-1} = \frac{-1}{x}$. El signo negativo *puede* ser interpretado como el área infinitamente extendida del lado opuesto que en los casos anteriores, ya que $1/x$ es efectivamente el valor de esa área.

- La existencia de curvas con una razón característica dada es *evidente* en el contexto algebraico. En este sentido surge una pregunta: De entre todas las curvas con razón característica 2/3 = 1/(1+1/2) ¿cuál elegir como la *principal* y designarla como curva de índice 1/2? Aquí resulta importante determinar el universo gráfico y algebraico en donde está inmersa la pregunta. En el caso del escenario donde se desenvuelve Wallis se puede decir, de acuerdo con Bos (1975) y con Youschkevitech (1976), que su universo gráfico está compuesto por curvas algebraicas y geométricas[21,22]. Sin lugar a dudas las curvas privilegiadas son las algebraicas (debido a que con ellas es posible aplicar los métodos algebraicos) y estás son, para Wallis, de la forma $y = \sqrt[n]{(p(x))^m}$ donde $p(x)$ es un polinomio. Entonces el camino es determinar cuál de las curvas

[21] "*La relación entre variables [ordenada, abscisa, radio, subtangente, entre otras] eran expresadas, cuando era posible por medio de ecuaciones. Esto no era siempre posible, ya que justo antes del final del siglo XVII no existían formulas para las relaciones trascendentes y éstas eran expresadas por medio de prosas explicativas que básicamente expresaban el método geométrico para la construcción de la curva*" (Bos, 1975).

[22] "*Un poco más adelante, Descartes establece una clase especial: la de las curvas algebraicas (a las que denomina curvas geométricas). Todos los puntos de estas curvas, según observó Descartes, guardan cierta relación con todos los puntos de una línea recta, y es posible representar esta relación mediante alguna ecuación, que es la misma para cada punto de una determinada curva. Al decir ecuación, Descartes, que no tenía medios para escribir simbólicamente ecuaciones de ninguna otra especie, en realidad se refería a una ecuación algebraica. Denominando curvas mecánicas a las de naturaleza no geométrica, Descartes pasa inmediatamente a introducir su clasificación; todavía no perfecta, de las curvas geométricas en géneros* (genres)*, siendo las del primer género aquellas descritas por ecuaciones de segundo grado; del segundo género*

algebraicas tiene razón característica 2/3, para afirmar que *es la* curva de índice 1/2, en este caso la curva $y = \sqrt{x}$. Esta determinación, además, no contradice el contexto algebraico.

- El hecho que Wallis propusiera la existencia[23] de una curva de índice $\sqrt{3}$ llama la atención hacia el carácter de *herramienta* de la noción de razón característica de una curva para construir funciones. En el ejemplo considerado se puede razonar de la siguiente manera: ya que la razón característica de una curva es una proporción, puede tener un valor arbitrario, por ejemplo $1/(1+\sqrt{3})$, y asumirse la existencia de una curva de índice $\sqrt{3}$ y si a esto se agrega un *principio de interpolación en las gráficas* se puede suponer que se comportara como las otras curvas de índices entero o racional; por ejemplo, siempre crecientes, sin puntos de inflexión, entre otras, y además, su gráfica se encontrará *entre* las gráficas de las curvas de razón característica $1/(1+1)$ y $1/(1+2)$; es decir, entre las gráficas de la funciones $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$.

las descritas por ecuaciones de tercero y cuarto grados, del tercer género, por ecuaciones de quinto y sexto grados, etc." (Youschkevitech, 1976).

[23] Como se recordará, ésta es en sí misma una hipótesis sobre la producción de Wallis; pero lo interesante son sus consecuencias para el diseño de situaciones.

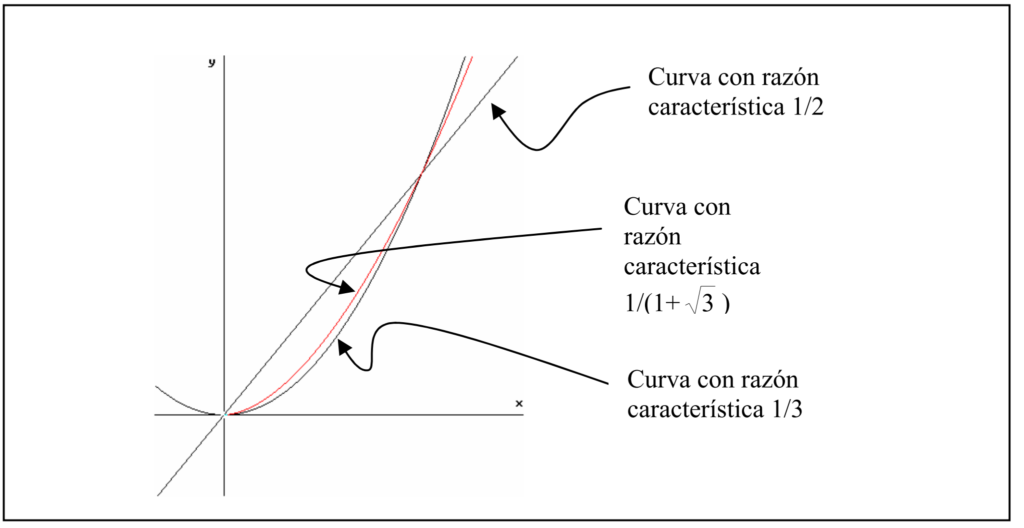


Ilustración 3.5. De las ideas de Wallis: interpolación gráfica

3.2.9. El exponente como variable. La función exponencial

En todo lo anterior se ha identificado el funcionamiento de mecanismo en diversas formulaciones para establecer convenciones matemáticas presentes en los exponentes. Varios fueron los factores que permitieron concebir al exponente como variable. En primer lugar se tuvieron que abandonar los postulados de *dimensionalidad* (Bos, 1975), que establecían que las igualdades, y por tanto las ecuaciones, sólo se podían establecer si cada miembro tenían la misma dimensión[24]. Es de suponer, como menciona Bos, que fue precisamente la emergencia de las funciones trascendentes las que motivaron el abandono de la dimensionalidad. En segundo lugar, fue necesario que la noción de variable y función, en el sentido de paradigma leibniziano, fuera sustituido por la noción de número al seno del paradigma euleriano[25]. A su vez la noción de número debió ser reformulada para dar cabida a las razones como números fraccionarios. Esta red de cambios conceptuales abrió el camino para que expresiones del tipo a^x, x^y o $ln\ (x)$ fueran estudiadas para cualesquiera

[24] Por ejemplo la ecuación $y = x^2$ no tiene sentido, pero sí $ay = x^2$.

números x, y y a. Al respecto diversas investigaciones señalan, (Bos, 1975), (Katz, 1987) y (Cantoral y Farfán, 2002b) que fueron Leibniz, Euler y sus discípulos los primeros en estudiarlas. Tomando en cuenta que existían formulaciones algebraicas para establecer los convencionalismos para los exponentes, éstos fueron adaptados en la organización teórica de Euler basada en objetos analíticos (Euler, 1835; 1984).

3.3. Hipótesis generales sobre la construcción del concepto de exponente

En términos generales se pueden aislar las siguientes hipótesis epistemológicas:

- La emergencia del mecanismo de convención matemática para los exponentes no es exclusiva de preguntarse por el significado de la expresión 2^{α} para un valor arbitrario de α. Remarcamos esta aseveración debido a que en la organización escolar tradicional de los saberes (basado en la estructura de los números reales) el problema de las convenciones es reducido a tal problema de extensión. Tradición comenzada por Euler y continuada por Cauchy en su programa de organizar a las matemáticas como una gran estructura hipotético-deductiva[26].

[25] Para más detalles respecto a la obra de Euler ver el capítulo siguiente.

[26] Parafraseando el objetivo de Cauchy, éste podría ser: '¿Cómo deducir las funciones?'. Su respuesta es textualmente (Cauchy, 1994): "*Cuando en lugar de funciones enteras, se considera funciones cualesquiera, de las cuales se deja de la forma de manera enteramente arbitraria, no será ya posible determinarlas a través de un cierto número de valores particulares, por grande que éste sea. Pero será posible hacerlo en algunos casos en los que se suponen conocidas ciertas propiedades generales de estas funciones. Por ejemplo, una función continua de x, representada por* $\phi(x)$*, puede ser completamente determinada cuando se le pide verificar, para todos los posibles valores de las variables x , y, una de las siguientes ecuaciones:*

(1) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$

(2) $\phi(x + y) = \phi(x)\,\phi(y)$

o bien, para todos los números reales y positivos de las mismas variables una de las siguientes ecuaciones:

(3) $\phi(x\,y) = \phi(x) + \phi(y)$

(4) $\phi(x\,y) = \phi(x)\,\phi(y)$ "

- Los *activadores* del mecanismo son las diferentes consideraciones metamatemáticas que se expresan por los principios de: 1) uniformidad en los métodos para efectuar las operaciones entre monomios, 2) continuidad de las fórmulas para determinar la cuadratura de curvas, 3) inducción para la uniformidad de las operaciones con monomios[27].
- Debido a que la función del mecanismo de convención matemática es la integración sistémica de conocimientos, otro posible activador del mecanismo es la existencia de una *contradicción* en el sistema de conocimientos; ya que a través de tal contradicción se le quita el carácter sistémico al conjunto de conocimientos. En este sentido, la función que se espera del mecanismo depende de las consideraciones metamatemáticas que establecen lo que debe conservarse o desecharse para evitar la contradicción. Además depende de la *sensibilidad a la contradicción*; pues es de suponer que una contradicción para unos, no lo es para otros. Cuando la situación es la integración de diferentes sistemas de conocimientos es de suponer que una parte de un sistema deba ser parcial o totalmente abandonado y que una formulación posterior pueda retomarla nuevamente.
- La conservación de estructuras al momento de reformular una teoría es el supuesto metamatemático más notable, ya que se basa en el proceso de socialización del ser humano y el proceso científico mismo. Es por ello, que la no conservación será difícil de aceptar y sólo se reconoce su emergencia a través de diversas evidencias.
- El concepto de obstáculo epistemológico está íntimamente ligado al mecanismo de convención matemática; ya que en términos de la ruptura o continuidad de la construcción del conocimiento, representa los dos extremos de la elección: la continuidad puede llevarse a cabo a través del mecanismo de convención matemática y la persistencia en la

[27] Este caso se trata en el capítulo siguiente, cuando se analiza los Elementos de Álgebra de Euler.

búsqueda de continuidad puede ser interpretada como un obstáculo epistemológico.

3.4. Sensibilidad al mecanismo como herramienta para la integración sistémica de conocimientos

En todo lo anterior, se han dado evidencias de la existencia del funcionamiento del mecanismo de convención matemática como herramienta para la integración sistémica de conocimientos. En este sentido es significativo hacer una somera revisión de los avances de Leibniz para *unificar* el cálculo diferencial e integral. La idea central está basada en la observación de algunas analogías con respecto a los operadores d y $\int$ y las reglas operativas de los exponentes al escribir a la integral como la diferencia *menos uno*.

En una carta dirigida a L´Hospital en 1695 (Leibniz, 1971) se expresa de la siguiente manera en relación al libro de L´Hospital (traducción libre del francés original): "La base del Método de Diferencias de su escrito, produce, Monsieur, virtualmente el Método de las Sumas, ya que en efecto yo no distingo los dos cálculos. De esta manera su escrito será una introducción a ambos cálculos en donde uno se considera el recíproco del otro". La idea en que se basó Leibniz fue precisamente en la operatividad del álgebra de las potencias de las variables. Así, por ejemplo, él notó la similitud del desarrollo del binomio a la *n*-ésima potencia con el cálculo de de *n*-ésima diferencial del producto de dos variables (Leibniz, 1971): (conocida en nuestros días como el desarrollo de Leibniz)

$p^0\overline{x+y}$	$p^0x.p^0y$	1
$p^1\overline{x+y}$	$1.p^0xp^1y+1.p^1xp^0y$	$1y+1x$
$p^2\overline{x+y}$	$1.p^0xp^2y+2.p^1xp^1y+1.p^2xp^0y$	$1y^2+2xy+1x^2$

$p^3\overline{x+y}$	$1.p^0xp^3y+3.p^1xp^2y+3.p^2xp^1y+1.p^3xp^0y$	$1y^3+3xy^2+3x^2y+1x^3$

d^0xy	$d^0x.d^0y$	xy
d^1xy	$1.d^0xd^1y+1.d^1xd^0y$	$1xdy+1ydx$
d^2xy	$1.d^0xd^2y+2.d^1xd^1y+1.d^2xd^0y$	$1xddy+2dxdy+ddxy$
d^3xy	$1.d^0xd^3y+3.d^1xd^2y+3.d^2xd^1y+1.d^3xd^0y$	$1xd^3y+3dxddy+3ddxdy+1d^3xy$

Tabla 3.5. Analogía *n*-ésima diferencial vs. *n*-ésima potencia de Leibniz

A partir de esta analogía uso el binomio de Newton para establecer la siguiente serie que ya había sido construida, por otras técnicas, por él y Bernoullí (*series universalissima*) (Leibniz, 1971):

> Ya de otra forma esta carta quedaría incompleta, ahora haré algunos señalamientos sobre la analogía entre las potencias y las diferencias, por ejemplo, $p^{-1}\overline{x+y}=\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x}-\frac{y}{xx}+\frac{yy}{x^3}-\frac{y^3}{x^4}$ etc. = $p^{-1}x.p^0y-p^{-2}x.p^1y+p^{-3}x.p^2y-p^{-4}x.p^3y$ etc. De este modo $\int\overline{xy}=d^{-1}\overline{xy}=d^{-1}x.d^0y-d^{-2}x.d^1y+d^{-3}x.d^2y-d^{-4}x.d^3y$ etc.
> Ahora en lugar de la letra *x* ponemos *dx* y en vez se $d^{-\cdot\cdot}$ … $d^{-\cdot\cdot}$ ponemos $\int^{\cdot\cdot}$ tenemos que:
> $\int\overline{ydx}=yx-dy\int x+d^2y\int\int x-d^2y\overset{3}{\int}x$ etc.

3.5. La imposibilidad de una convención matemática directa: el caso del logaritmo de números negativos

La caracterización funcional mecanismo lleva, de manera teórica, a plantearse la existencia de *disfunciones* en un sistema de conocimientos al momento de la inserción de nuevos objetos en él; entonces con esto se puede ocasionar la pérdida de su unidad y su coherencia que, en algunos casos, se recupera con nuevos conceptos, axiomas, entre otros.

Significativamente se encuentra que este tipo de disfunción ocurrió como consecuencia de la conceptualización como *función de variable real* a las curvas, que hasta ese momento eran identificadas como logarítmicas sin asociárseles ninguna fórmula analítica. Este proceso incluye la creación de un simbolismo especial para denotarla: log *x*; ocasionándose la aparición de expresiones formales como log (-1) o $\sqrt{-1}$ o $(-2)^x$. Sin entrar en los detalles, que pueden ser consultados en (Cantoral y Farfán 2002b), señalamos la existencia de variadas contradicciones que fueron producto del intento por preservar las propiedades de los logaritmos, como $\log(\sqrt{xy}) = \frac{\log x + \log y}{2}$ o log (*x*)>0. Cabe señalar que este tipo de contradicciones, de cuya percepción Cantoral y Farfán (2002b) señalan un origen social, intentaremos reproducirlas en los diseños de situación experimental con la finalidad de enriquecer la componente social de la presente caracterización.

3.6. Primera caracterización del mecanismo

La acepción aquí utilizada para convención es la que señala aquello que es conveniente para algún fin específico; entonces una convención matemática es una conveniencia para las matemáticas. Al respecto las formulaciones descritas anteriormente muestran la presencia de un mecanismo uniforme de construcción de conocimiento. Se puede resumir que: *el significado de los exponentes no naturales es* <u>convenido</u> *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* <u>matemático</u> *(es decir para la integración sistémica de conocimientos).* Es por ello que de manera sintética designamos al mecanismo con la expresión: *convención matemática.* Las formas o realizaciones de este mecanismo pueden ser una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción, entre otras. La elección de la forma depende de la naturaleza teórica de la organización de conocimientos. La fuente de todo lo anterior es un principio implícito de racionalidad que establece que en matemáticas se busca el mayor grado de unidad al momento de incluir nuevos objetos matemáticos a su cuerpo de conocimientos. En términos de la perspectiva social que se quiere atender; este principio puede ser interpretado como un consenso que establece que un conocimiento es válido si con él se atiende a cierta unidad de un sistema de conocimientos.

CAPÍTULO 4

CARACTERIZACIÓN DEL MECANISMO EN LA COMUNICACIÓN DE CONOCIMIENTOS

En este capítulo se hace una caracterización del mecanismo de convención matemática para el caso de los exponentes, en tanto su inserción en un sistema de conocimientos, organizado para la comunicación. Metodológicamente, se opta por el análisis matemático de los contenidos presentes en los obras diseñadas para la difusión o transmisión del conocimiento, a la luz de la caracterización del mecanismo, en tanto su función en la integración sistémica de conocimientos. Como interesa, además, la evolución de la *vida* del mecanismo en tales organizaciones de conocimientos se lleva a cabo un estudio de la evolución de su didáctica. Lo anterior se hace tomando en consideración las funciones con que cumple y las dislexias que ocasiona al ser transpuesto a un sistema de conocimientos para la comunicación. Al final del capítulo se presenta, a manera de resumen, una caracterización del mecanismo en la comunicación de conocimientos y nuevos elementos para caracterizar dicho mecanismo.

4.1 Características emergentes del mecanismo en la transposición de los sistemas de conocimientos

En el plano epistemológico se han delimitado las características del mecanismo que es el foco de atención de la presente investigación. Ahora interesan las características emergentes que éste adquiere en el seno de la organización de conocimientos para la comunicación y en particular en la matemática escolar.

Dado que el mecanismo posee como función la integración sistémica de conocimientos; es inevitable que el mecanismo sea modificado en el seno de organizaciones de conocimientos pensadas para la comunicación. En particular el mecanismo puede adquirir funciones emergentes y por ello realizarse en formas diferentes. En general, se observa el trabajo con los exponentes no naturales, éstos sufren un proceso de transposición hacia la *algebrización*; es decir, que el contexto privilegiado para su tratamiento es el algebraico. Este proceso de transposición resulta particularmente apto para las restricciones a las que está sometido un texto de saber ya que el Álgebra es económica en cuanto a representaciones, parte de nociones comúnmente utilizadas en distintas épocas como lo son las progresiones aritméticas y geométricas que a su vez surgen de nociones básicas como multiplicar y sumar. Después este proceso de *algebrización* deviene en la centración en las *leyes de los exponentes*[28] que representan la versión sintética de la relación entre la progresión aritmética y geométrica; pero que ya no hace referencia a esta relación. Tomando en cuenta lo anterior, se dice que la organización de los saberes en estas obras es debida a las restricciones causadas por la transposición didáctica; ya que se enfocan a la tarea de presentar los saberes de una manera ordenada, autocontenida y despersonalizada que no tuviera en cuenta los avances y retrocesos presentes en su desarrollo, por lo que se decide presentar (dado que es posible hacerlo) la noción de exponente no natural en términos de un conocimiento considerado más elemental como es el Álgebra.

[28] Es decir: 1) $A^nA^m=A^{n+m}$, 2) $A^n/A^m=A^{n-m}$ y 3) $(A^n)^m=A^{nm}$.

Debido a lo anterior, a través de los análisis posteriores, de algunas obras didácticas que resultan significativas (más no exhaustivas), se tiene el propósito de registrar la evolución de la transposición del mecanismo junto a sus realizaciones y a los principios metamatemáticos que entran en funcionamiento. Agregado a lo anterior, se hacen algunas observaciones, cuando sea pertinente, con respecto a las dificultades lógicas a que algunos autores se ven sometidos para dar sentido a los exponentes no naturales.

Remarcamos el tipo de obras consultadas; pues si bien, en todas se comparte la característica de haber sido diseñadas para la comunicación de conocimientos matemáticos, entre sí son cualitativamente distintas, pues unas son de *difusión* y otras de *transmisión* de conocimientos. La distinción que aquí se hace es la siguiente: una obra es de *difusión* si fue escrita para que las personas *conozcan* el contenido y su organización y es de *transmisión* si lo fue para que las personas lo *sepan*[29]. En este sentido todas las obras modernas pueden ser interpretadas como obras de transmisión. Ocurre lo mismo en cuanto a las obras de antaño, a excepción del libro de L´Hospital y el de *Introduction a l'analyse* de Euler.

4.2. Obras de antaño

4.2.1. Sobre las obras en general

En términos generales es posible distinguir dos momentos en la transposición hacia la *algebrización* de los exponentes no naturales. En primera instancia el mecanismo funciona con nociones comúnmente utilizadas en distintas épocas como lo son las progresiones aritméticas y

[29] En este punto se distingue conocimiento de saber, en tanto que como afirma Cantoral (citado por Farfán, 1997) "*conocimiento es la información sin uso; el saber es la acción deliberada para hacer con el conocimiento un objeto útil ante la situación problemática. De lo que se desprende que el aprendizaje es una manifestación de la evolución del conocimiento en saber. El aprendizaje consiste pues, en dar la respuesta correcta ante la situación concreta*".

geométricas, que a su vez surgen de nociones básicas como multiplicar y sumar, y en un segundo momento este proceso deviene en la centración en las *leyes de los exponentes,* que representan la versión sintética de la relación entre la progresión aritmética y geométrica; pero que ya no hace referencia a esta relación. En la siguiente tabla se presentan los diferentes matices encontrados en la presentación y justificación para la introducción de los exponentes no naturales en las obras de antaño consultadas:

Libro	**Argumento para introducir exponentes no naturales**	**Argumento para introducir el exponente cero**
Analyse des infiniment petits… (L'Hopital, 1998)	Y si se continúa la progresión geométrica por debajo de la unidad, y la aritmética por debajo del cero, los términos de ésta serán los exponentes de aquélla y se corresponderán. De este modo, -1 es el exponente de $1/x$; -2 es el exponente de $1/x^2$; etcétera.	Si se propone una progresión geométrica en la que el primer término sea la unidad, y el segundo una cantidad cualquiera x, y si en orden se dispone bajo cada término a su exponente, es claro que estos exponentes formarán una progresión aritmética.
Elementos de Álgebra (Euler, 1984)	Se puede continuar la serie de potencias en un orden retrógrado de dos maneras diferentes; primero dividiendo siempre por a y segundo disminuyendo el exponente una unidad. Es evidente que, si se sigue de una u otra manera los términos son perfectamente iguales.	…Esto muestra que el término que precede al primer término debe ser necesariamente a/a, o uno, y si se procede de acuerdo con los exponentes, se puede concluir inmediatamente que el término que precede al primero debe ser a^0; y entonces se deduce la notable propiedad de que a^0 es siempre igual a 1, ya sea el valor de grande o pequeño, e incluso cuando es nada; hay que decir que a^0 es igual a 1.
Elements d'Algèbre (Bourdon, 1848)	A menudo se llega a situaciones en donde los exponentes de ciertas letras es menor en el dividendo que en el divisor.	A menudo se llega a situaciones en donde los exponentes de ciertas letras son las mismas tanto en el dividendo como en el divisor.

Tratado de Álgebra elemental *(Contreras, 1880)*	Vamos a demostrar que $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ Como el valor representado por a^{-p} no se altera cuando se multiplica y se divide por una misma cantidad, tendremos que: $a^{-p} = \frac{a^{-p} \times a^p}{a^p} = \frac{a^0}{a^p}$ luego $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ que es lo que se quería demostrar.	Toda cantidad elevada a cero es igual a la unidad. Si dividimos, por ejemplo, a^m por a^m, como toda cantidad dividida por sí misma da por cociente la unidad, tendremos $\frac{a^m}{a^m} = 1$. Por otra parte, se ha visto que para dividir literales deben restarse sus exponentes, por lo cual $\frac{a^m}{a^m} = a^0$; luego $a^0 = 1$.

Tabla 4.1. Presentación y justificación para la introducción de los exponentes no naturales en las obras de antaño

4.2.2. *Analyse des infiniment petis pour l'intelligence des lignes curbes* de L'Hospital

Uno de los principales objetivos que tuvo la obra *Analyse des infiniment petits* (L'Hopital, 1998), que apareció por primera vez en 1696, era difundir el cálculo diferencial en el sentido de Leibniz. Este ejercicio de transposición colocó a L´Hospital ante la necesidad de presentar una organización de los conocimientos que se seguían desarrollando y que hacía muy poco se habían publicado por primera vez en los trabajos de Leibniz en 1684 y 1686 en el *Acta Eruditorum.*

Se consideran a continuación los factores que posibilitaron la aceptación del exponente no natural dentro del paradigma leibniziano, y para ello se toma el artículo de Leibniz de 1684 (Struik, 1986). Desde el título del artículo "*A new method for maxima and minima, and also for tangents, which in not impeded by fractions or irrational quantities, and a singular kind of calculus for these*" se puede notar que la aplicación de los algoritmos para raíces y expresiones racionales constituyen, para el mismo Leibniz, una de las grandes ventajas de su cálculo sobre los otros métodos existentes (aplicables sólo a ecuaciones polinomiales de curvas algebraicas) para resolver problemas de tangentes y de máximos y mínimos. En este sentido L´Hospital (1998) dice en el prólogo, destinado a mostrar las bondades del nuevo cálculo, de su *Analyse des infiniment petis pour l'intelligence des lignes curbes*:

> Poco tiempo después de la publicación del método del Sr. Descartes para las tangentes, el Sr. de Fermat encontró también uno, que finalmente el mismo Sr. Descartes confesó que es más sencillo que el suyo para múltiples usos. Sin embargo, es cierto que no era todavía tan sencillo como el del Sr. Barrow, al considerar más de cerca la naturaleza de las poligonales, el cual propone a la mente un pequeño triángulo formado de un segmento de curva, comprendido entre dos ordenadas infinitamente cercanas, de la diferencia de estas dos ordenadas, y la de las abscisas correspondientes; y este triángulo es semejante a aquel que se forma con la tangente, la ordenada y la subtangente: de tal modo que mediante una sencilla analogía este último método evita todo el cálculo que exige el del Sr. Descartes, y que su método requería.
>
> El Sr. Barrow no se quedó ahí: inventó también una especie de cálculo propio de este método; sin embargo, para auxiliarse de ello hizo falta, igual que en el del Sr. Descartes, quitar las fracciones y eliminar los signos radicales.
>
> El vacío de este cálculo lo cubrió el célebre Sr. Leibniz[30]; este sabio geómetra comenzó donde el Sr. Barrow y los otros habían terminado. Su cálculo lo ha llevado a regiones hasta ahora desconocidas; y ha hecho descubrimientos que son la admiración de los más hábiles matemáticos de Europa. Los Sres. Bernoullí fueron los primeros que se dieron cuenta de la belleza de este cálculo y lo llevaron a un punto que les permitió vencer las dificultades que jamás se habían intentado antes.
>
> La extensión de este cálculo es inmensa: es apropiado tanto para curvas mecánicas como para las geométricas; los signos radicales le son indiferentes, e igualmente con frecuencia son cómodos; se aplica a tantas indeterminadas como se quiera; la comparación de los infinitamente pequeños de todos los géneros le es igualmente fácil. Y de aquí surgen una infinidad de descubrimientos sorprendentes en relación a las tangentes, tanto curvas como rectas, con los problemas de máximos y mínimos, con los puntos de inflexión y de retorno de las curvas, las evolutas, las cáusticas

[30] L´Hospital hace referencia a la publicación de Leibniz de 1684 en el *Acta Eruditorum*.

de reflexión o por refracción, etc. según se verá en esta obra.

A través del pasaje anterior se muestra que desde el punto de vista de L´Hospital una de las principales virtudes del cálculo de Leibniz fue que su método abarcaba, de manera sencilla, el estudio de curvas cuya ecuación contenía divisiones y signos radicales; algo que anteriormente era, en la práctica, imposible. Se puede decir que L'Hospital estaba *obligado* a presentar la noción de exponente no natural; ya que mucho del conocimiento construido en el paradigma leibniziano, relativo al cálculo de diferencias y sus aplicaciones, estaba centrado en expresiones de la forma $f(x)^{m/n}$ [donde $f(x)$ es un polinomio]. Es por ello que en la organización que L´Hospital propone, los exponentes no naturales son manejados, desde un principio y con todo detalle, a través de la relación existente entre la progresión aritmética y geométrica; es decir, que son considerados como la base de su Cálculo junto a la fórmula general del cálculo de diferencias de potencias de la variable.

A continuación se transcribe la manera que es introducida la noción de exponente no natural en *Analyse des infiniment petits.*

Proposición IV

Problema

§7. Tomar la diferencia de una potencia cualquiera, perfecta o imperfecta, de una cantidad variable.

Con el fin de dar una regla general que sirva para las potencias perfectas y para las imperfectas, es necesario explicar la analogía que existe entre sus exponentes.

Si se propone una progresión geométrica en la que el primer término sea la unidad, y el segundo una cantidad cualquiera x, y si en orden se dispone bajo cada término a su exponente, es claro que estos exponentes formarán una progresión aritmética.

Progresión geométrica:

$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad x^4, \quad x^5, \quad x^6, \quad x^7,$ Etcétera

Progresión aritmética:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, Etcétera

Y si se continúa la progresión geométrica por debajo de la unidad, y la aritmética por debajo del cero, los términos de ésta serán los exponentes de aquella y se corresponderán. De este modo, -1 es el exponente de $\frac{1}{x}$; -2 es el exponente de $\frac{1}{x^2}$; etcétera.

Progresión geométrica:

$x, \quad 1, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{x^3}, \quad \frac{1}{x^4},$ etcétera

Progresión aritmética:

1, 0, -1, -2, -3, -4, etcétera

Pero si se introduce cualquier término nuevo en la progresión geométrica, será necesario, para tener su exponente, introducir uno adecuado en la progresión aritmética.

Así , $\sqrt{x}$ tendrá como exponente $\frac{1}{2}$;

$\sqrt[3]{x}, \qquad \frac{1}{3}$

$\sqrt[5]{x^4}, \qquad \frac{4}{5}$

$\frac{1}{\sqrt{x^3}}, \qquad -\frac{3}{2}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}, \qquad -\frac{5}{3}$

$\frac{1}{\sqrt[7]{x}}, \qquad -\frac{1}{7}$

Etc., de suerte que las expresiones

$\sqrt{x}$ y $x^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{x}$ y $x^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[5]{x^4}$ y $x^{\frac{4}{5}}$

$\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ y $x^{-\frac{3}{2}}$

Etc., significan lo mismo.

Progresión geométrica:

$$1,\quad \sqrt{x},\quad x,\quad 1,\quad \sqrt[3]{x},\quad \sqrt[3]{x^2},\quad x,\quad 1,\quad \sqrt[5]{x},\quad \sqrt[5]{x^2},\quad \sqrt[5]{x^3},\quad \sqrt[5]{x^4},\quad x.$$

Progresión aritmética:

$$0,\quad \frac{1}{2},\quad 1,\quad 0,\quad \frac{1}{3},\quad \frac{2}{3},\quad 1,\quad 0,\quad \frac{1}{5},\quad \frac{2}{5},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{4}{5},\quad 1,$$

[...]

Luego de la naturaleza de estas dos progresiones se sigue:

1°. Que la suma de los exponentes de dos términos cualesquiera de la progresión geométrica será el exponente del término que resulta del producto de ellos. De este modo, x^{4+3} o x^7 es el producto de x^3 por x^4, y $x^{1/2+1/3}$ o $x^{5/6}$ es el producto de $x^{1/2}$ por $x^{1/3}$, y $x^{-1/3+1/5}$ o $x^{-2/5}$ es el producto de $x^{-1/3}$ por $x^{1/5}$, etc. Análogamente, $x^{1/3+1/3}$ o $x^{2/3}$ es el producto de $x^{1/3}$ por sí mismo, es decir, su cuadrado, y x^{+2+2+2} o x^6 es el producto de x^2 por x^2 por x^2, es decir su cubo, y $x^{-1/3-1/3-1/3-1/3}$ o $x^{-4/3}$ es la cuarta potencia de $x^{-1/3}$, y así sucesivamente con las demás potencias. De donde resulta evidente que el doble, el triple, etc., del exponente de un término cualquiera de la progresión geométrica es el exponente del cuadrado, del cubo, etc., de este término; y por lo tanto que la mitad, la tercera parte, etc., del exponente de un término cualquiera de la progresión geométrica será el exponente de la raíz cuadrada, cúbica, etc., de este término.

[...]

Bien entendido lo anterior, se puede llegar a dos casos diferentes:

Primer caso, cuando la potencia es perfecta, es decir, cuando su exponente es un número entero.

La diferencia de x^2 es $2xdx$, la de x^3 es $3x^2dx$, la de x^4 es $4x^3dx$. Pues al ser el cuadrado de x el producto de x por x, su diferencia será $xdx + xdx$ [§5], es decir, $2xdx$. Análogamente, al ser el cubo de

x el producto de x por x por x, su diferencia será

$xdx + xdx + xdx$ [§5], es decir $3x^2dx$;

y como así sucede con las demás potencias hasta el infinito, se sigue que si se supone que m denota un número entero cualquiera, la diferencia de x^m será $mx^{m-1}dx$.

Si el exponente es negativo, se encontrara que la diferencia de x^{-m} o de $\frac{1}{x^m}$ será

$$\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx$$

Segundo caso, cuando la potencia es imperfecta, es decir, cuando su exponente es un término quebrado. Se propone tomar la diferencia de $\sqrt[n]{x^m}$ o $x^{m/n}$ ($\frac{m}{n}$ expresa un número quebrado cualesquiera); se supondrá $x^{m/n} = z$, y al elevar cada miembro a la potencia n se tendrá $x^m = z^n$ y, al tomar las diferencias según se acaba de explicar en el primer caso, se encontrará

$$mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz \text{ y } dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}dz},$$

o, al sustituir a $nz^{n-1}dz$ por su valor $nx^{m-\frac{m}{n}}$,

$$dz = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} = \frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}}.$$

Si el exponente es negativo, se encontrará que la diferencia de

$x^{-m/n}$ o $\frac{1}{x^{m/n}}$

será

$$\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$$

Lo cual da la siguiente regla general.

Regla IV

Para las potencias perfectas o imperfectas

La diferencia de una potencia cualquiera, perfecta o imperfecta, de una cantidad variable es igual al producto del exponente de esta potencia por esta misma cantidad elevada a una potencia menor en una unidad, y multiplicada por su

diferencia.

De este modo, si se supone que m representa cualquier número entero o quebrado, positivo o negativo, y x una cantidad variable cualquiera, la diferencia de x^m será $mx^{m-1}dx$.

De lo anterior hacemos algunas observaciones:

- El mecanismo es implícitamente manejado con la frase: *Luego de la naturaleza de estas dos progresiones se sigue...* (que se refiere a la relación entre la progresión aritmética y geométrica).
- El contexto de la obra, el estudio de las líneas curvas, en donde las ordenadas y abscisas sólo tienen sentido como cantidades variables geométricas (positivas), hace que las expresiones del tipo $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ no contengan la ambigüedad de poder ser negativas o positivas. Cuando surgen cantidades geométricas negativas, como por ejemplo cuando se calculan subtangentes, éstas son interpretadas como segmentos dirigidos en el sentido contrario de las ordenadas y abscisas (ambas positivas por definición).

Del resto de los contenidos de la obra se recalca lo siguiente:

- El exponente no es manejado como variable sino como parámetro; cuyo uso tiene la función de englobar los resultados obtenidos para familias de curvas[31]. Es por ello que los números negativos y fraccionarios utilizados en la relación entre las progresiones son cantidades constantes o parámetros[32].

---

[31] Por ejemplo, encontramos lo siguiente en la sección III, lo cuál es paradigmático sobre el uso de los exponentes en toda la obra (L´Hospital, 1998): "Si en general se quiere que $x^m(a-x)^n$ sea un máximo o mínimo (m y n pueden denotar números cualesquiera) […] Si $m = 2$ y $n = -1$, se tendrá …"

[32] Cabe señalar que en la Sección I (Donde se dan las reglas de este cálculo) L´Hospital (1998) hace la siguiente Definición I: "*Se llaman cantidades variables aquéllas que aumentan o disminuyen continuamente; por el contrario, cantidades constantes [son] las que permanecen siendo las mismas mientras*

- Así, el mecanismo de convención matemática para los exponentes no naturales tiene la función, dentro de la obra, de establecer una operatividad entre las *potencias cualquiera, perfectas o imperfectas* de una variable, aceptando las operatividad de las cantidades constantes negativas y fraccionarias.

4.2.3. *Elements of Algebra* e *Introduction a l'analyse infinitésimale* de Euler

En los *Elementos de Álgebra* de Euler (1984), publicados por primera vez en 1840, el proceso de algebrización del mecanismo toma una dirección significativamente distinta. En primer lugar, el Álgebra se considera como fundamental en todos los estudios matemáticos de la época; por lo que cualquier texto en donde se abarque este sistema de conocimientos debe introducir conceptos que son lógicamente necesarios para estudios posteriores, y en segundo lugar, el texto (y la época) se centra en la noción de número (que incluye a los números imaginarios) y al uso de las literales como números *generalizados* adimensionales. Euler (1984) dice, al respecto, en los artículos del 4 al 7 lo siguiente (las cursivas son del original):

> 4. Entonces la determinación, o la medida de todos los tipos de magnitud, se reduce a lo siguiente: se fija a placer una cantidad conocida de la misma especie que se busca determinar y se considera a esta como la *medida* (*measure*) o *unidad* (*unit*); entonces se determina la proporción de la magnitud propuesta con esta medida. Esta proporción siempre puede ser representada por números, y los números no son otra cosa que la proporción de una magnitud arbitrariamente asumida como unidad.
>
> 5. De esto se presenta que todas las magnitudes de todos lo tipos pueden ser expresados como números. El fundamento de todas las Ciencias Matemáticas puede ser, entonces, un tratado completo de la ciencia de los números y en un cuidadoso examen

---

las otras cambian. De esta manera, en una parábola las ordenadas y las abscisas son las cantidades variables, mientras que el parámetro es una cantidad constante".

de los posibles y diferentes métodos de cálculo. Esta parte fundamental de las matemáticas es llamada Análisis o Álgebra.

6. En Álgebra, entonces, se consideran sólo números, que representan cantidades, sin tomar en cuenta los diferentes tipos de cantidades. Eso es el objeto de otras ramas de las matemáticas.

7. La Aritmética trata de los números en particular y es la ciencia de los números propiamente dicha; pero esta ciencia sólo comprende ciertos métodos de cálculo como ocurre en la práctica común; por el contrario el Álgebra comprende en general todos los casos que pueden existir en la doctrina del cálculo de números.

En capítulos posteriores se puede notar que el papel fundamental que juega la noción de número (a su vez considerada como variable en otras obras de Euler y de su época) y su operatividad provoca la aparición de características emergentes como lo son:

- La raíz con índice par tiene dos raíces reales: una positiva y una negativa
- Se plantea la existencia [*existentes en la imaginación* (Euler, 1984)] de la raíz cuadrada de números negativos.
- El exponente es visto como variable.

Aunque Euler menciona en el artículo 123 que cualquier número positivo posee dos raíces cuadradas (una positiva y una negativa), en el resto de su texto no es tratado más el tema[33]; ya que en el caso que interesa, éste se centra fundamentalmente en el *cálculo de potencias* en el marco algebraico. Dentro de este rubro se puede notar que hay una modificación en la interpretación entre la relación existente entre la progresión aritmética y geométrica; aun cuando ambas progresiones se utilizan para extender un patrón de comportamiento en el caso de los exponentes enteros, se puede decir que en realidad Euler prueba que tal relación

[33] Pero si lo hace en otras de sus obras como se ve más adelante.

existe. Lo anterior muestra que la obra de Euler representa un cambio profundo de enfoque que se dio durante el siglo XVIII, en donde comienzan a imperar las consideraciones de índole algebraico en detrimento de las geométricas entre cuyas consecuencias se pueden señalar la aparición de dos funciones que hasta entonces eran la misma: la función logaritmo y la función exponencial (en donde la función logaritmo es considerada como inversa de la exponencial) y a la separación de éstas de su origen como relación entre progresiones, una aritmética y la otra geométrica.

El texto *The elements of Algebra* (Euler, 1984) está dividido en dos grandes partes: Parte I. Que contiene el Análisis de las Cantidades Determinadas y Parte II. Que contiene el Análisis de las Cantidades Indeterminadas. El tema de exponentes se desarrolla en la primera sección de la Parte I (*De los diferentes métodos de calcular cantidades simples* que trata del estudio de lo que hoy se entiende como álgebra de monomios) y es ampliado en la segunda sección (*De los diferentes métodos de calcular cantidades compuestas* que trata del estudio de lo que hoy se estudia como álgebra de polinomios) a través de series infinitas con el binomio de Newton.

En primer lugar Euler hace lo siguiente para problematizar a los exponentes uno y cero:

> 174. En una palabra, las diferentes potencias de a serán representadas por $a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, \&c.$ Por lo tanto se puede ver que de esta manera es bastante apropiado escribir a^1 en vez de a para mostrar el orden de las series más claramente. En realidad, a^1 no es más que a, ya que la unidad muestra que la letra a es escrita una sola vez. Tal serie de potencias es llamada también progresión geométrica, porque cada término es mayor por una vez al término que lo precede.
>
> 175. Como en las series de potencias cada término es encontrado multiplicando el término precedente por a, lo cual incrementa el exponente por 1, entonces cuando algún término es dado también

> se puede encontrar el término precedente si dividimos por a porque disminuye el exponente en 1. Esto muestra que el término que precede al primer término a^1 debe ser necesariamente $\frac{a}{a}$, o uno, y si se procede de acuerdo con los exponentes, se puede concluir inmediatamente que el término que precede al primero debe ser a^0; y entonces se deduce la notable propiedad de que a^0 es siempre igual a 1, ya sea el valor de a grande o pequeño, e incluso cuando a es nada; hay que decir que a^0 es igual a 1.

Es de recalcar que en el pasaje anterior Euler establece que $0^0=1$ lo cual no presentaba contradicciones con el sistema de conocimientos de Euler y sus contemporáneos. A continuación Euler sigue utilizando las progresiones para establecer significados de los exponentes negativos:

> 176. Se puede continuar la serie de potencias en un orden retrógrado de dos maneras diferentes; primero dividiendo siempre por a y segundo disminuyendo el exponente una unidad. Es evidente que, si se sigue una u otra manera los términos son perfectamente iguales. Esta serie decreciente es representada de dos formas en la siguiente Tabla, que debe ser leída de derecha a izquierda:

	$\frac{1}{aaaaaa}$	$\frac{1}{aaaaa}$	$\frac{1}{aaaa}$	$\frac{1}{aaa}$	$\frac{1}{aa}$	$\frac{1}{a}$	1	a
Primera	$\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$		
Segunda	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

Tabla 4.2. Progresiones geométricas y exponentes negativos (Euler)

para después explicar sus propiedades de multiplicación y división a través de la identificación de patrones operativos:

> 181. Pero en la multiplicación de potencias diversas circunstancias requieren atención.
>
> Primero; cuando es requerido multiplicar cualquier potencia de a por a, se obtiene la siguiente potencia de a; es decir, la potencia cuyo exponente es mayor por una unidad. Entonces;

> a^2 multiplicado por a produce a^3, y a^3 multiplicado por a produce a^4. De la misma manera cuando se requiere multiplicar por a la potencia de cualquier número representado por a, teniendo un exponente negativo se tiene sólo que agregar 1 al exponente. Entonces, a^{-1} multiplicado por a produce a^0, o 1; que se puede hacer más evidente considerando que a^{-1} es igual a $\frac{1}{a}$, y que el producto de $\frac{1}{a}$ por a es $\frac{a}{a}$, es consecuentemente igual a 1; de manera semejante a^{-2} multiplicado por a produce a^{-1}, o $\frac{1}{a}$; y a^{-10} multiplicado por a produce a^{-9}, etc. [Ver Art. 175, 176].
>
> 182. Continuando; si es requerido multiplicar cualquier potencia de a por a^2, o la segunda potencia, digo que el exponente deviene más grande en 2. Entonces, el producto de a^2 por a^2 es a^4, el de a^2 por a^3 es a^5; el de a^2 por a^4 es a^6; y más generalmente a^n multiplicado por a^2 es a^{n+2}. Con respecto a los exponentes negativos, se tiene que a^1, o a, es el producto de a^{-1} por a^2; ya que a^{-1} es $\frac{1}{a}$, es lo mismo que si se dividiera aa por a; consecuentemente el producto requerido es $\frac{aa}{a}$, o a; también a^{-2} multiplicado por a^2 produce a^0, o 1, y a^{-3} multiplicado por a^2 produce a^{-1}.
>
> 183. No es menos evidente, que al multiplicar una potencia de a por a^3, se debe incrementar su exponente en tres unidades; consecuentemente el producto de a^n por a^3 es a^{n+3} [...]

Lo significativamente distinto en el mecanismo que utiliza Euler se encuentra en el tratamiento de los exponentes fraccionarios, en donde abandona definitivamente el uso de las progresiones. Él hace lo siguiente:

Capítulo XIX

Del método de representación de Números Irracionales *por*

Exponentes Fraccionarios

195. Se ha mostrado en el capítulo precedente que para obtener el cuadrado de alguna potencia se debe doblar el exponente de la potencia; en general el cuadrado, o la segunda potencia de a^n es a^{2n}; y recíprocamente también se sigue que la raíz cuadrada de a^{2n} es a^n, lo cual es tomar la mitad del exponente o dividirlo por 2.

196. Entonces la raíz cuadrada de a^2 es a^1, o a, la de a^4 es a^2, la de a^6 es a^3 etc. En general la raíz cuadrada de a^3 debe ser necesariamente $a^{\frac{3}{2}}$, y la de a^5 debe ser necesariamente $a^{\frac{5}{2}}$, consecuentemente se debe tener de la misma manera que $a^{\frac{1}{2}}$ es la raíz cuadrada de a^1. Por esta causa se puede ver que $a^{\frac{1}{2}}$ es igual a $\sqrt{a}$; este nuevo método de representar la raíz cuadrada demanda particular atención.

197. También se ha mostrado que para encontrar el cubo de una potencia, como a^n, se debe multiplicar su exponente por 3, y consecuentemente su cubo es a^{3n}.

Por lo tanto, recíprocamente, cuando es requerido encontrar la raíz tercera o cúbica, de la potencia a^{3n}, se tiene que dividir el exponente por 3 y se puede entonces concluir con certeza que la raíz requerida es a^n: consecuentemente, a^1, o a, es la raíz cúbica de a^3, a^2 es la raíz cúbica de a^6, a^3 la de a^9 ,etc.

198. No hay nada que impida aplicar el mismo razonamiento para aquellos casos, en que el exponente no es divisible por 3, o de concluir que la raíz cúbica de a^2 es $a^{\frac{2}{3}}$ y que la raíz cúbica de a^4 es $a^{\frac{4}{3}}$, o $a^{4\frac{1}{3}}$ (*); consecuentemente, la raíz tercera o cúbica de a, o a^1, debe ser $a^{\frac{1}{3}}$: por esta causa $a^{\frac{1}{3}}$ es lo mismo que $\sqrt[3]{a}$.

Finalmente en el artículo 205 constata que estas interpretaciones son adecuadas para su operatividad:

205. Esta propiedad es de gran utilidad en la multiplicación y división; para mostrar ello tomemos, por ejemplo, la multiplicación de $\sqrt[2]{a}$ por $\sqrt[3]{a}$. Se escribe $\sqrt[6]{a^3}$ en vez de $\sqrt[2]{a}$ y $\sqrt[6]{a^2}$ en vez de $\sqrt[3]{a}$; de esta manera se obtiene el mismo signo radical para ambos y la multiplicación una vez efectuada es $\sqrt[6]{a^5}$. El mismo resultado es deducido de $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$, que es el producto de $a^{\frac{1}{2}}$ y $a^{\frac{1}{3}}$, ya que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ y consecuentemente el producto requerido es $a^{\frac{5}{6}}$ o $\sqrt[6]{a^5}$
[...]

En otra de las obras de Euler (1835), *Introducción al Análisis Infinitesimal:* Capítulo VI: "De las cantidades exponenciales y logarítmicas", el manejo de exponentes racionales, que conlleva la existencia de varios valores de la función exponencial, se nota un mecanismo de convención matemática que toma la forma de una restricción que emana de la petición de que a^z sea una *función uniforme de z*:

97. Al proponer la cantidad exponencial a^z, o lo que es lo mismo una potencia de una constante a que tiene por exponente una variable z [34], se sustituye sucesivamente todos los enteros positivos posibles y se obtienen para a^z los valores determinados a^1; a^2; a^3;a^4;a^5;a^6; &c; y si ahora se sustituye a z por los números negativos -1,-2,-3, &c, la cantidad a^z devendrá sucesivamente en $1/a^1$; $1/a^2$; $1/a^3$;$1/a^4$; &c; y si se hace $z = 0$ entonces $a^0 = 1$. Si ahora se sustituye a z por fracciones, como 1/2; 1/3; 2/3; 1/4; 3/4; &c, se tienen como resultado las cantidades $\sqrt{a};\sqrt[3]{a};\sqrt[3]{a^2};\sqrt[4]{a};\sqrt[4]{a^3}$; &c; las cuales consideradas ellas mismas, pueden poseer dos o más valores, ya que la extracción de raíces así lo hace. Sin embargo se admitirá ordinariamente el caso que

(*) Aquí notamos un error de la edición en inglés; ya que $a^{\frac{4}{3}} = a^{1\frac{1}{3}}$.

[34] Euler (1835, Articulo 3) "Una cantidad variable es una cantidad indeterminada, o universal, que comprende en sí misma a absolutamente todos los valores determinados. En consecuencia, prosigue, una cantidad variable comprende en si misma absolutamente a todos los números, tanto positivos como negativos, tanto enteros como fraccionarios, tanto racionales como irracionales y trascendentales. Ni siquiera el cero o los números imaginarios quedan excluidos del significado de cantidad variable".

> presentan las primeras; es decir aquellas que son reales y positivas, ya que la cantidad a^z será tomada como una función uniforme de z. De esta manera $a^{5/2}$ tendrá una valor entre a^2 & a^3 que será una cantidad del mismo género y aunque $a^{5/2}$ tiene dos valores $-aa\sqrt{a}\ \&\ +aa\sqrt{a}$, no se tendrá en cuenta el primero. De igual manera sucede cuando el exponente z toma valores irracionales; pero como es difícil en este caso concebir el número de valores que contiene la cantidad propuesta, bastará considerar un solo valor real. Así $a^{\sqrt{7}}$ será un valor comprendido entre los limites a^2 & a^3.

Después de este pasaje inicia el estudio del comportamiento de la cantidad $y = a^z$ clasificándola como sigue:

Si $a = 1$ entonces $y = 1$

$$\text{Si } \ a > 0 \ \text{ y } \begin{cases} z > 0, \text{entonces } \ y > 0 \\ z < 0, \text{entonces } \ y > 0 \\ z = 0, \text{entonces } \ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Si } \ a < 0 \ \text{ y } \begin{cases} z > 0, \text{entonces } \ y > 0 \ \text{ ó } \ y < 0 \ \text{ ó } \ y\,\varepsilon \not\subset \\ z < 0, \text{entonces } \ y > 0 \ \text{ ó } \ y < 0 \ \text{ ó } \ y\,\varepsilon \not\subset \\ z = 0, \text{entonces } \ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Si } \ a = 0 \ \text{ y } \begin{cases} z > 0, \text{entonces } \ y = 0 \\ z < 0, \text{entonces } \ y = \infty \\ z = 0, \text{entonces } \ y = 1 \end{cases}$$

Es importante resaltar, de lo anterior, el caso $a = 0$ ya que cuando dice que $a^z =$ □ si $z < 0$, lo muestra con el ejemplo: si se toma $z = -3$ se tiene:

$$0^{-3} = \frac{1}{0^{-3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

lo que indica que en cierta forma Euler estaba dispuesto a operar con *números* infinitos dentro de un álgebra que conservaría cualidades de lo finito y adquiriría cualidades de lo infinito.

4.2.4. Tratados de Álgebra para el ingreso a *l'École Polytechnique* durante la primera mitad del siglo XIX

En los textos (Mayer & Choquet, 1836; Lefébure de Fourcy, 1845; Bourdon, 1848; Bertrand, 1851) se puede observar que las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas dejan de ser utilizadas totalmente; ya que en éstos, el mecanismo de convención matemática se basa en la operatividad de los monomios. En términos generales en todos se comparte la misma sensibilidad hacia el carácter convencional del tratamiento de los exponentes no naturales para la conservación de reglas operativas, y no todos consideran la existencia de varios valores para las raíces pares de números negativos ni la posibilidad, a excepción de Bertrand (1851), de que la base sea cero en el tratamiento los exponentes negativos.

A manera de ejemplo estudiemos con algún detalle la obra *Elements d'Algébre* de Bourdon (1848), el cual fue utilizado para el ingreso de la l'Ecole Polytechnique. En el primer artículo de su introducción, se determina, los objetos y cuestiones del Álgebra (cursivas en el original):

> 1. El Álgebra es la parte de las matemáticas en donde se emplean los signos con el propósito de compendiar y generalizar los razonamientos que conllevan a la resolución de cuestiones relativas a los números.
>
> Se pueden distinguir dos tipos de cuestiones principales:
>
> El *teorema*, que tiene por fin el demostrar la existencia de ciertas propiedades que satisfacen los números conocidos y dados; y el *problema*, donde el objetivo es determinar ciertos números tomando en cuenta el conocimientos de otros números que están relacionados con los primeros de acuerdo al enunciado.
>
> 2. Los elementos principales con los cuales se hace uso en Álgebra para cumplir ese doble fin son:
> 1°. Las letras del alfabeto, que sirven para designar los números sobre los que se razona [...].
> 2°. El signo +, que es el engarce para marcar la adición de dos o más números [...].
> 3°. El signo -, que se usa para marcar la sustracción de dos

> números [...].
> 4°. El signo de multiplicación x (o un punto) colocado entre dos números [...].
> 5°. El signo de la división que consiste en dos puntos : colocado entre el dividendo y el divisor o bien se utiliza una barra -- [...].
> 6°. El *coeficiente*, signo que se emplea para indicar la adición de dos o más números iguales [...].
> 7°. El *exponente* [...].
> 8°. El signo = [...].

Después, en el artículo 24, efectúa una serie de interpretaciones sobre el significado y utilidad del exponente cero, dichas interpretaciones son por sí mismas muy diferentes a las que hasta ahora se han considerado y son el producto de un ejercicio para dotar de sentido a un símbolo convencional, que por tanto, tiene una función en el Álgebra (cursivas en el original):

> 24. A menudo se llega a situaciones en donde los exponentes de ciertas letras son las mismas tanto en el dividendo como en el divisor.
>
> Sea, por ejemplo, la división de $24a^3b^2$ por $8a^2b^2$; como la letra b está afectada por el mismo exponente, el cociente no la contiene, y $\frac{24a^3b^2}{8a^2b^2} = 3a$. Sin embargo resaltamos que este resultado $3a$ puede tomar una forma propicia para conservar la huella (*trace*) de la letra b que ha desaparecido por los efectos de la reducción.
>
> En efecto, si uno aplica *por convención* (per convention), a la expresión $\frac{b^2}{b^2}$ la regla de los exponentes (n° 22), se transforma $\frac{b^2}{b^2} = b^0$. Este nuevo símbolo b^0 indica (n° 2) que la letra entra 0 veces como factor en el cociente, o, lo que es lo mismo, que no está en éste. Sin embargo éste indica al mismo tiempo que la letra entra en el dividendo y el divisor y que desapareció por los efectos de la operación. Este símbolo tiene la ventaja de conservar la huella (trace) de un número que puede ser parte de la cuestión que se intenta resolver, sin cambiar en nada el resultado; ya que

como b^0 proviene de $\frac{b^2}{b^2}$, y que además es igual a 1, se sigue que $3ab^0$ equivale a $3a$x1 o $3a$. De igual manera

$$\frac{15a^2b^3c^2}{3a^2bc^2} = 5a^0b^2c^0 = 5b^2.$$

Como es importante tener nociones exactas sobre el origen y la significación de los símbolos empleados en Álgebra, se propone hacer ver que *en general, toda cantidad* a*, afectada por el exponente cero, es equivalente a* 1*; es decir:*

$$a^0 = 1.$$

En efecto, esta expresión proviene, como ya se ha dicho, de una división en donde a está afectada por el mismo exponente en el dividendo y en el divisor. Así se tiene que $a^0 = \frac{a^m}{a^m}$ (m designa, para mayor generalidad, el número entero que es el exponente de a). Pero como el cociente de toda cantidad por si misma es 1, se tiene que $\frac{a^m}{a^m} = 1$, y por tanto $a^0 = 1$.

El símbolo a^0 es, repetimos, empleado, por convención, para conservar en el cálculo la huella (trace) de una letra que se encuentra en el enunciado de una cuestión, pero que ha desaparecido por el efecto de una división y que es frecuentemente necesaria para conservar esta huella (trace) (NOTE III).

4.2.5. *Tratado de Álgebra Elemental* de Manuel María Contreras

El texto "*Tratado de Álgebra Elemental*" de Manuel María Contreras (Contreras, 1880) es un texto que sigue la tradición de Gabino Barreda y Vallejo en la escritura de libros para uso de la Escuela Nacional Preparatoria de México durante el siglo XIX. En el texto introductorio de su obra dice:

> El álgebra averigua en virtud de las relaciones explícitas o conocidas, que en el enunciado se indican entre los datos y en la incógnita otras relaciones implícitas o no expresadas en él, y como consecuencia da a conocer las operaciones aritméticas que habrá de ejecutar para determinar su valor. La aritmética ejecuta estas operaciones y determina el valor numérico y concreto que se busca. La primera expresa el valor de la incógnita, manifestando

> su igualdad con una combinación precisa y determinada de los datos, expresada en una fórmula, y la segunda resolviendo esta fórmula encuentra este valor, expresándolo en el sistema ordinario de la numeración.
>
> [...]
>
> 239 - DEFINICIONES- Se llama álgebra a la parte de las matemáticas que se ocupa del estudio de las relaciones entre las cantidades. Su objeto es llegar a expresar el modo de formación de una cantidad desconocida por medio de ciertas relaciones que existen entre las cantidades positivas.

Lo anterior es un ejemplo de las consideraciones que permean toda la obra, que se puede resumirse en dos puntos:

- El objeto del Álgebra es establecer relaciones entre cantidades para con ello resolver ecuaciones que resultan de problemas.
- Debido a lo anterior es necesario contar con reglas de operación para expresiones algebraicas.

Con respecto a los puntos anteriores se observa que la obra de Contreras difiere de otras, como por ejemplo los *Elementos de Álgebra* de Euler (1984), debido a que presenta al Álgebra como una parcela de las matemáticas más delimitada y con fines particulares. En este marco el autor utiliza como eje de su obra los diferentes tipos de ecuaciones (y sus métodos de solución) con que *trabaja el Álgebra* que a su vez surgen de las diferentes operaciones aritméticas. En el Artículo 341, presenta, lo que se puede interpretar como su síntesis al respecto:

> 341.- FUNCIONES ALGEBRAICAS SIMPLES.- Con la relación correspondiente a las ecuaciones exponenciales, se ha completado el corto cuadro de las funciones analíticas simples de que hace uso el álgebra.
>
> Si se llama x a la variable independiente & y a la variable correlativa que depende de ella, se tendrán expresadas en las ocho fórmulas siguientes, todas las funciones simples de una sola

variable de que sirve el álgebra, teniendo cada función su *inversa*; que resulta de la *directa* cuando se relaciona x á y en lugar de referir y & x:

$$1° \begin{cases} y = a + x \text{.......................................función } \textit{suma} \\ y = a - x \text{...................................función } \textit{diferencia} \end{cases}$$

$$2° \begin{cases} y = ax \text{...................................función de } \textit{producto} \\ y = \dfrac{a}{x} \text{.....................................función de } \textit{cociente} \end{cases}$$

$$3° \begin{cases} y = x^a \text{...................................función de } \textit{potencia} \\ y = \sqrt[a]{x} \text{...................................función de } \textit{raíz} \end{cases}$$

$$4° \begin{cases} y = a^x \text{.....................................} \quad \text{función exponencial} \\ y = \log x (\text{siendo } a \text{ la base}) \text{..........} \quad \text{función logaritmo} \end{cases}$$

La dificultad que presentan algunas cuestiones para resolverse por álgebra, consiste principalmente en que no se dispone sino de un corto número de funciones simples elementales para poder formar ecuaciones que expresen las relaciones que ligan las cantidades desconocidas con las conocidas. Las ocho funciones anteriores, expresan las operaciones simples fundamentales, por medio de las cuales se engendra una cantidad desconocida de un modo peculiar y diferente en cada una de ellas.

Dentro del marco anterior, el tratamiento de los exponentes no naturales está hecho con el objetivo de enriquecer la operatividad con los números, de las transformaciones algebraicas y consecuentemente como apoyo de la resolución de los diferentes tipos de ecuaciones. De esta manera se tienen los siguientes ejemplos:

- En el artículo 300 (Contreras, 1880) presenta el siguiente Teorema: "toda cantidad puede pasar del numerador al denominador de un quebrado con exponente de signo cambiado".
- En el artículo 325 presenta los principios: 1) El logaritmo de la raíz de una cantidad, es igual al logaritmo de la cantidad dividido por el índice del radical y 2) Las propiedades de los logaritmos conducen a

determinar el valor de una cantidad que entra como exponente en una expresión, por lo cual se llaman *ecuaciones exponenciales*.

La primera vez que son tratados los exponentes no naturales es en el primer capítulo (*Introducción y primeras operaciones con las expresiones enteras*) en la sección de Teoremas de la división:

> 256.-TEOREMAS DE LA DIVISION.- Nos serviremos de la división para demostrar algunos teoremas.
>
> I. Toda cantidad elevada a cero es igual a la unidad. Si dividimos, por ejemplo, a^m por a^m, como toda cantidad dividida por sí misma da por cociente la unidad, tendremos $\frac{a^m}{a^m}=1$. Por otra parte, se ha visto que para dividir literales deben restarse sus exponentes, por lo cual $\frac{a^m}{a^m}=a^0$; luego $a^0=1$. Se ve, pues, que a^0 es el símbolo de la unidad, por ser tanto a^0 como 1 resultados que preceden de dividir a^m entre a^m.
>
> II. Toda cantidad cuyo exponente es negativo, es igual a un quebrado cuyo denominador es la unidad, y su denominador es la misma cantidad tomada con exponente positivo.
>
> Vamos a demostrar que
> $$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$$
> Como el valor representado por a^{-p} no se altera cuando se multiplica y se divide por una misma cantidad, tendremos que:
> $$a^{-p}=\frac{a^{-p}\times a^p}{a^p}=\frac{a^0}{a^p}$$
> luego
> $$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$$
> que es lo que se quería demostrar.

Del pasaje anterior se nota que, a diferencia de los textos de Álgebra analizados en la sección anterior, Contreras utiliza la noción de *demostración* para establecer los convencionalismos de los exponentes cero y negativo; lo cual muestra la poca sensibilidad a las convenciones matemáticas. Esta situación es significativa debido a que se puede interpretar como una consecuencia de las dificultades intrínsecas que se presentan al momento de insertar el mecanismo de convención matemática, cuyo papel es la integración sistémica dentro de una organización de los conocimientos que debe ser progresiva. En el caso del exponente cero, la dificultad es resuelta con la propiedad *se ha visto que para dividir literales deben restarse sus exponentes* para utilizarla como hipótesis del argumento deductivo para así concluir que $a^0=1$; en vez de que ésta sea la propiedad que debe ser conservada. Observación semejante se puede hacer al momento en que es utilizada la igualdad $a^{-p} \times a^p = a^0$.

Posteriormente, en el artículo 299 (Expresiones con exponentes negativos), reformula el argumento anterior utilizando una ecuación:

> En general, si quisiéramos averiguar cuál es el valor de a^{-p} tendríamos:
>
> $$a^{-p} = x$$
>
> multiplicando por a^p $\quad a^{-p} \times a^p = xa^p$
>
> de donde (256) $\quad 1 = xa^p$
>
> despejando a x $\quad \frac{1}{a^p} = x$
>
> luego $\quad a^{-p} = \frac{1}{a^p}$
>
> De ésto resulta, que toda cantidad cuyo exponente es negativo, es el símbolo de un quebrado cuyo numerador es la unidad y el denominador la cantidad tomada con exponente positivo. En este caso a^{-3}, como el exponente negativo, indica las veces que la cantidad entra no como factor, sino como divisor.

Se nota que al retomar el resultado $a^{-p} \times a^p = 1$ del artículo 256 Contreras está utilizando lo que quiere probar, acción que es común en los procesos de demostración. Inmediatamente después del pasaje anterior, Contreras cierra este círculo argumentativo *demostrando* que la división de a^m por a^n es a^{m-n} cualquier que pueda ser el valor de estas cantidades:

Hay en álgebra la ventaja de que una vez obtenida una fórmula, ésta da el valor que se busca cualesquiera que puedan ser lo datos cuyas relaciones expresa. Así la división de a^m por a^n es a^{m-n} cualquier que pueda ser el valor de estas cantidades, aunque algunos resultados sea necesario interpretarlos para comprender su sentido.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{.................}(1)$$

1°. Si $m > n$. Esto es si $m = n + d$, tendremos:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{n+d}}{a^n} = a^d$$

2°. Si $m = n$, tendremos sustituyendo en la ecuación (1)

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1$$

la expresión a^0 por sí misma carece de sentido, pero observando que ha resultado de dividir una cantidad por sí misma, se comprende que es el símbolo de la unidad.

3° Si se tiene que $m < n$ esto es si $n = m + d$; sustituyendo este valor en la ecuación (1), tendremos:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = a^{m-m-p} = a^{-p}$$

por otra parte $$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m a^p} = \frac{1}{a^p}$$

luego

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

aquí se ha dividido una cantidad por otra mayor, y en consecuencia el resultado ha sido un quebrado.

Una vez explicada la significación de las expresiones con exponentes negativos en virtud de las operaciones de que resulten, podremos ejecutar con ellas los cálculos como si fueran cantidades exponenciales comunes, transformando el último resultado cuando sea necesario.

A continuación se transcribe la manera que Contreras introduce el exponente fraccionario:

301.-EXPONENTES CON EXPONENTES FRACCIONARIOS

POSITIVOS.
Hemos visto que para extraer la raíz de una cantidad, se divide el exponente de la cantidad por el índice de la raíz (295). Así:

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{6/2} = a^3;$$

pero si aplicamos la misma regla a los casos en que el exponente sea menor que el índice de la raíz o en lo que no sea divisible exactamente por él, obtendremos una cantidad afectada de un exponente fraccionario.

Sea $\sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}$ y aunque un exponente fraccionario no puede indicar el número de veces que una cantidad entra como factor; teniendo a la vista las operaciones donde ha provenido, se comprende que una cantidad afectada por un exponente fraccionario es el símbolo de la raíz de una cantidad elevada a una potencia indicada por el numerador del exponente, siendo el índice de dicha raíz el denominador del mismo exponente.

En general $\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$ ya sea $n > m$, $n = m$ o $n < m$.

A continuación el autor ofrece otra *demostración* del principio anterior, en donde nuevamente se puede observar que utiliza lo que quiere demostrar al utilizar una ecuación y elevar los dos miembros a una misma potencia:

Demostremos el principio de otra manera:

Sea	$a^{n/m} = x$
Elevando a *m* los dos miembros	$a^n = x^m$
Extrayendo la raíz *m*	$\sqrt[m]{a^n} = x$
Luego	$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$

En el artículo 303 (*Cálculos con las cantidades afectadas de exponentes fraccionarios y negativos*) Contreras cierra sus argumentos demostrando que con los exponentes fraccionarios y negativos se pueden utilizar las reglas de multiplicación y división utilizadas para los exponentes positivos. Nuevamente se observa que hay un círculo argumentativo al demostrar el caso de la división con potencias negativas (no así para la multiplicación) y que cuando trata el caso de los exponentes fraccionarios es realmente necesaria la prueba.

I.- Nos ocuparemos de demostrar que las operaciones de las cantidades afectadas de exponentes negativos, están sujetas a las mismas reglas que las de los exponentes positivos.

1°. Para multiplicar $a^m x a^{-n}$ debemos reemplazar por a^{-n} su valor y tendremos

$$a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^{m-n}$$

Si aplicamos la regla de los exponentes para la multiplicación debemos sumarlos, esto es, debemos ponerlos unos a continuación de los otros con sus signos. Así:

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$

resultado idéntico al obtenido ejecutando la operación con la expresión $\frac{1}{a^n}$.

Igualmente $a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}$

Aplicando las reglas $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n} = \frac{1}{a^{m+n}}$

2°- Sea por dividir [...]

II. Demostremos que los cálculos con las expresiones que tienen exponentes fraccionarios puede efectuarse por la reglas relativas a las de las cantidades con exponentes enteros.

1°. Se pueden multiplicar los dos términos de un exponente fraccionario por un mismo número sin alterar el valor de la expresión.
[...]
En consecuencia, se comprende que pueden reducirse a un común denominador los exponentes de las expresiones que se han de multiplicar o dividir, en cuya forma las consideraremos, para mayor sencillez, a fin de dar la demostración de que nos ocupamos.

2°- Multiplicación $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$

Sumando los exponentes $a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{n}} = a^{\frac{m+p}{n}} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$

4.3. Obras modernas

4.3.1. Sobre las obras en general

La presencia en los libros de texto de Álgebra de las realizaciones del mecanismo de convención matemática, bajo la forma de *reglas de transformación* presentes en los exponentes tienen las funciones siguientes:

- Su presencia queda justificada dentro de un sistema de conocimientos que descansa en la estructura de los números reales
- Presentan una manera económica para la transformación de expresiones algebraicas
- Para su utilización en la evaluación de la función exponencial (aunque en realidad las expresiones no sean calculables).

En cuanto al tipo de justificación (que se esperaba fuera de tipo metamatemático) que utilizan los libros para la introducción de los exponentes no naturales, se encuentra, en general, la ausencia de dicha información, pues en la mayoría de los textos se asume, de entrada, que los exponentes no naturales tienen sentido por sí mismos, o algo sobre lo que es natural suponer su existencia y que sólo resta encontrar su significado. En otras palabras, los libros de texto asumen, más o menos implícitamente, que el significado de los exponentes no naturales es un problema de extensión numérica del exponente en una expresión de la forma a^x. Es de suponer que esta concepción emana de la concepción moderna de la construcción de los números en un determinado orden, por ejemplo:

naturales→ cero→enteros negativos→racionales→irracionales.

La siguiente tabla presenta los diferentes matices que se han encontrado en la justificación para la introducción de los exponentes no naturales.

Libro	**Justificación para la introducción de exponentes no naturales**
Wentworth y Smith(1985). *Elementos de álgebra.*	Ninguna: “El exponente entero positivo indica la multiplicación de varios factores iguales al número o letra que afecta. Hay también exponentes fraccionarios; mas es claro que deben tener significado diferente del de los enteros”.
Rees, et al. (1982). *Álgebra contemporánea.*	“Los campos donde las Matemáticas encuentran aplicación requieren extender el concepto de exponente para incluir valores negativos y racionales. Las extensiones se harán de manera que las leyes desarrolladas en el capítulo 1 continúen siendo válidas. También la aplicación de los conceptos y leyes aquí introducidas para situaciones que presentan un grado de dificultad mayor que las consideradas en el capítulo 1”.
Stein (1988). *Cálculo y geometría analítica.*	Dentro del pensamiento funcional: “Para cada número b fijado existe una función exponencial $f(x)=b^x$. Tanto en la teoría como en las aplicaciones figura entre las más importantes de las funciones. No es coincidencia que toda calculadora lleve un tecla y^x o que, antes de inventarse las calculadoras; las tablas matemáticas listaran los valores de funciones exponenciales con muchas cifras decimales. Este apéndice pasa revista a la definición de b^x para $b>0$ y examina la situación cuando b es sustituido por un número negativo”
Baldor (1983). *Álgebra.*	“El exponente fraccionario proviene de extraer una raíz a una potencia cuando el exponente de la cantidad subradical no es divisible por el índice de la raíz” “El exponente negativo proviene de dividir dos potencias de la misma base cuando el exponente del dividendo es menor que el exponente del divisor”
Kalnin (1978). *Álgebra y funciones elementales.*	Ninguna.

Tabla 4.3. Justificación para la introducción de los exponentes no naturales en textos modernos

A excepción de Stein (1988) y de Rees (1982) en los textos mencionados no considera la existencia de varios valores para las raíces pares de números negativos. Como se ha mencionado Stein hace referencia a la gráfica de la función exponencial para optar por la raíz positiva mientras que Rees toma ésta por definición.

El análisis del contenido revela que la introducción de exponentes no naturales[35] se basa en el argumento de que su definición ha de ser de tal manera, que las leyes de los exponentes naturales[36] se conserven. Tal y como lo muestra la siguiente tabla no hay uniformidad sobre las leyes de los exponentes que deben seguirse cumpliendo (los textos y el exponente cero se han tomado a título de ejemplo por ser representativos en lo que respecta a los argumentos):

Libro	**Argumento para introducir exponentes no naturales**	**Argumento para introducir el exponente cero**	**Momento de la introducción del exponente cero**
Wentworth y Smith (1985). *Elementos de álgebra.*	*"Los exponentes fraccionarios (negativos) deben interpretarse de manera tal que a ellos se apliquen todas las leyes que se aplican a los exponentes enteros positivos"* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	*"Para que el símbolo a^0 obedezca las leyes generales de las otras potencias, debe tenerse:* $a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$ *; o, lo que es lo mismo,* $a^0 \cdot a^m = 1 \cdot a^m$ *; y por tanto,* $a^0 = 1$*. Así pues, Toda cantidad elevada a la cero es igual a 1".*	Después de la introducción de los exponentes fraccionarios y negativos.
Rees et al. (1982). *Álgebra contemporánea.*	Para el caso de los exponentes negativos que se cumpla la *ley de los exponentes para la división* $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad m > n$ Para el caso de los exponentes de la forma $\frac{1}{n}$ que se cumpla la *ley de la potencia de una*	*"ley de los exponentes para la división:* $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad m > n$ *Se demostrará más adelante que esta ley se cumple si* $m < n$ *pero aquí se considerará el caso particular cuando* $m = n$*. En este caso, se obtiene* $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ *La definición es válida únicamente para el caso en que n sea un*	Inmediatamente después del tratamiento de los exponentes naturales y de la demostración de la *ley de los exponentes para la división.*

[35] Señalamos que de manera general los libros justifican la utilización de los exponentes naturales como una abreviación en la escritura de las expresiones algebraicas.
[36] Es decir, que: $A^nA^m=A^{n+m}$, $A^n/A^m=A^{n-m}$ con $n>m$ y $(A^n)^m=A^{nm}$.

	potencia.	*entero positivo por lo que a^0 no tiene sentido; sin embargo, $\frac{a^n}{a^n}=1$ de donde es lógico definir a a^0 como el número 1".*	
Stein (1988). *Cálculo y geometría analítica.*	"*Por sencillez escogeremos el caso particular de $b=2$. Todas las ideas quedarán plasmadas en él [...] El exigir que $2^{x+y}=2^x 2^y$ para todo par x e y de números reales nos dirá como ha de definirse 2^x".*	"*Si la ley básica de los exponentes ha de ser válida para cualquier exponente, entonces en particular ha de ser $2^{0+1}=2^0 2^1$ por tanto $2^1=2^0 2^1$. Pero $2^1=2$, luego 2^0 ha de satisfacer la ecuación $2=2^0 2$. No hay elección: 2^0 ha de ser 1".*	Todo el tema es desarrollado en un apéndice al final de un libro. Una particularidad de este texto es que utiliza un argumento gráfico para establecer que $2^{\frac{1}{2}}=+\sqrt{2}$, "*pues encaja muy bien en el gráfico*"
Baldor (1983). *Álgebra.*	Como consecuencia de las 'leyes de la división' (exponente cero y negativo). Como consecuencia de un patrón de extracción de raíz.[37]	*El exponente cero proviene de dividir potencias iguales de la misma base.*	Al principio de su teoría de los exponentes
Kalnin (1978). *Álgebra y funciones elementales* .	Ninguna. La introduce por definición.	Ninguna. La introduce por definición.	Inmediatamente después de revisar la noción de exponente natural.

Tabla 4.4. Argumentos específicos para el exponente cero en textos modernos

De manera general, en estos textos se presenta un método deductivo en la presentación de sus contenidos, y en particular, apelan, implícitamente, a un principio de consistencia (de tipo metamatemático); pues su justificación para introducir potencias no naturales presupone la aceptación de que ciertas leyes de los exponentes se conserven[38]. Sólo un

[37] Textualmente: "El exponente fraccionario proviene de extraer una raíz a una potencia cuando el exponente de la cantidad subradical no es divisible por el índice de la raíz".

[38] El cual le confiere el mismo status a todos lo números. De cierta manera esto refleja el principio de interpolación de Wallis, que parafraseado sería: 'Si con las potencias naturales se respeta la

texto da un argumento que trata de justificar ese principio (Wentworth & Smith, 1985):

> Sería ilógico y además incómodo dar al exponente fraccionario significado tal que estas leyes no se aplicasen [leyes para los exponentes enteros].

Una paráfrasis de todos los argumentos puede ser: 'los exponentes fraccionarios, negativos y cero deben interpretarse de manera tal que a ellos se sigan aplicando las *leyes* de los exponentes enteros positivos'. La interpretación de cuáles son las leyes que deben seguirse aplicando no es uniforme, pues los textos utilizan una o varias de las siguientes *leyes* en sus argumentaciones: 1) $A^nA^m = A^{n+m}$,2) $A^n/A^m = A^{n-m}$ & 3) $(A^n)^m = A^{nm}$.

Con respecto a las anteriores leyes, llama la atención la tercera propiedad o ley (la potencia de una potencia); ya que al parecer, es una *ley* moderna para establecer los convencionalismos de los exponentes fraccionarios. Al no encontrar dicha ley en las obras didácticas de antaño es creíble plantear la hipótesis de que es una invención didáctica moderna, para evitar el uso del patrón de extracción de raíces como lo hacen las obras de antaño en relación con los exponentes fraccionarios. Lo anterior toma mayor sentido si se considera que este argumento inductivo no es posible reducirlo a la búsqueda de una solución de una ecuación (uno de los objetos de estudio principales del Álgebra escolar) en tanto sí lo es cuando se utilizan las dos primeras leyes para los exponentes cero y negativos respectivamente.

En la siguiente tabla se resumen los tipos de argumentos encontrados en los textos modernos:

llamada ley de los exponentes, entonces sí existen exponentes no naturales estas potencias también deben seguir la misma ley'.

		Argumentos		
		$A^nA^m=A^{n+m}$	$A^n / A^m = A^{n-m}$	$(A^n)^m=A^{nm}$
EXPONENTE	**Cero**	$A^0A^2 = A^2 \Rightarrow A^0 = 1$	$1=A^4 / A^4 = A^{4-4} = A^0 \Rightarrow A^0 = 1$	**No hay argumentos**
	Negativo	$A^{1/2} A^{1/2} = A^{1/2+1/2} = A^1=A \Rightarrow (A^{1/2})^2 = A \Rightarrow \sqrt{A}=A^{1/2}$	$1/A^2 =A^4/A^6=A^{4-6} = A^{-2} \Rightarrow 1/A^2 = A^{-2}$	**No hay argumentos**
	Fraccionario	$A^{-2} A^2=A^{-2+2} = A^0 =1 \Rightarrow A^{-2} = 1/A^2$	**No hay argumentos**	$(A^{1/2})^2 = A^1 = A \Rightarrow A^{1/2}=\sqrt{A}$

Tabla 4.5. Tipos de argumentos encontrados en los textos modernos

Queremos hacer énfasis que no en todos los textos se asume que el significado de los exponentes no naturales es debido a la conservación de las leyes de los exponentes. Algunos textos, como el de Baldor (1983), el de Anfossi y Meyer (1985) y el de Bruño (1968) presentan algunas variaciones en sus argumentaciones con respecto a los exponentes fraccionarios. Un ejemplo de esta variación consiste en la determinación y extensión de un patrón en la extracción de la raíz cuadrada de un monomio que es potencia entera perfecta, parafraseando a estos textos: 'en los ejercicios precedentes se ha notado que en la extracción de la raíz cuadrada el procedimiento a seguir es el de dividir el exponente entre dos, entonces si el exponente no es divisible por dos esta división del exponente puede dejarse expresada: $\sqrt{a^3} = a^{3/2}$'.

En general, cuando los libros de texto asumen al significado de los exponentes como objeto de estudio, no consideran al exponente 1 en sus argumentaciones. Algunos, como el Baldor (1983) sólo dicen que la primera potencia de una cantidad es ella misma sin entrar en más consideraciones. Aun cuando la potencia uno es ya una convención matemática los autores de textos no están conscientes de ésto al momento de presentar sus argumentaciones.

4.3.2. Algunos casos especiales de interés para la investigación

A continuación se presentan algunos casos especiales en la presentación de los exponentes no naturales en libros de texto, dichos casos son de interés para la presente investigación. Éstos presentan diferentes opciones para el problema de transposición del mecanismo de convención matemática que en forma de pregunta puede ser formulado así: ¿Cómo insertar un mecanismo, cuya función es de integración de conocimientos, a una organización progresiva de los conocimientos? Se puede decir que hay dos extremos opuestos en las respuestas de los autores de texto a esta pregunta: Se opta (o se entiende así) por suponer que los convencionalismos son deducibles o se comienza por tomarlos como definición. En un punto intermedio entre estos extremos se encuentran aquellos autores que son sensibles a la naturaleza matemática del conocimiento y dan explicaciones detalladas al respecto, como los citados en la sección anterior. Otra opción se presenta cuando se trata de extender lo más posible el modelo de multiplicación reiterada; lo cual da cierta coherencia al discurso matemático.

4.3.2.1. ¿Las reglas de transformación son demostrables?

En algunos libros de texto, como el de Baldor (1983), se asumen que sus argumentos para establecer el valor de la potencia cero y negativa son de tipo lógico; ya que no se mencionan que esto se debe al objetivo, como en otros textos, de que las leyes de los exponentes se conserven. A continuación se presenta un ejemplo que apoya la afirmación (Baldor, 1983):

367. Exponente cero. Origen

El exponente cero proviene de dividir potencias iguales de la misma base. Así,

$a^2/a^2=a^{2-2}=a^0 \qquad x^5/x^5=x^{5-5}=x^0$

INTERPRETACIÓN DEL EXPONENTE CERO
Toda cantidad elevada a la cero equivale a 1.
Decimos que $a^0=1$

En efecto: Según las leyes de la división, $a^n/a^n=a^{n-n}=a^0$, y por otra parte, como toda cantidad dividida por si misma equivale a 1, se tiene que $a^n/a^n=1$.

Ahora bien, dos cosas (a^0 y 1) iguales a una tercera (a^n/a^n) son iguales entre sí, luego: $a^0=1$.

Además, como ya se ha dicho, estas argumentaciones, con respecto a los exponentes fraccionarios, están basados en la determinación y extensión de un patrón en la extracción de la raíz cuadrada para un monomio que es cuadrado perfecto, sin hacer la consideración que este patrón por sí mismo es insuficiente para establecer su operatividad con las mismas reglas presentes en los exponentes naturales (lo mismo sucede con el exponente cero).

El otro extremo de la situación anterior se encuentra en el *Álgebra y trigonometría* de Rey y Puig (1934), de donde se toma el siguiente pasaje (las cursivas son del original) junto con la nota al pie que el autor hace:

DEFINICIÓN DE EXPONENTE NULO.- Convendremos en que la potencia de exponente nulo de cualquier número distinto de cero es igual a la unidad; es decir, *por definición.*

$a^0 = 1 \qquad (*)$

131. Leyes de cálculo con exponente.

Para que los anteriores convenios queden plenamente justificados, es preciso que veamos si las leyes de cálculo con potencias de exponentes entero y positivos, que estudiamos en Aritmética, sirven también para las nuevas acepciones de la palabra *exponente*. Estas leyes se refieren

1°) A los productos y cocientes de potencias de igual exponente; 2°) a los productos y cocientes de potencias de igual base, y 3°) a la potencia de una potencia.

[en lo que sigue prueba que las definiciones que da para los exponentes no naturales respetan las leyes a que hace referencia]

(*) En algunas obras se pretende *demostrar* estas igualdades *convencionales* en estos (o análogos) términos: <<Dividiendo dos potencias de igual grado de un número, por ejemplo: 8^3:8^3 = 1 resulta 8^0 = 1; *luego*: Todo numero elevado a cero, *se considera* igual a la unidad>>.

Aparte del contrasentido que encierra este <<luego>> y el <<se considera>>, obsérvese que no es lícito aplicar la regla de resta de exponentes y poner $8^3:8^3=8^{3-3}$, pues el segundo término carece de antemano de significación.

Análogos razonamientos se han aplicado para las otras igualdades.

4.3.2.2. Eliminación de inconsistencias a través del mecanismo

Dos problemas de consistencia, que resultan de utilizar las reglas de transformación utilizadas por los libros que hasta aquí se han citado, motivaron buscar otros textos que trataran este problema. La conjetura de trabajo es que tales inconsistencias deben ser resueltas a través de una convención matemática para el uso de los exponentes fraccionarios y radicales. Los problemas de inconsistencia son los siguientes:

- $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=\left[(-8)^2\right]^{\frac{1}{6}}=[64]^{\frac{1}{6}}=2\Rightarrow -2=2$
- $4=4\Rightarrow(-2)^2=(2)^2\Rightarrow\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{(2)^2}\Rightarrow -2=2$

En la búsqueda se encontraron textos en donde se resuelve el problema de dos maneras: 1) Eliminación de la inconsistencia por ajustes en la definición y 2) Eliminación de la inconsistencia desde la definición misma.

En cuanto a los primeros se cita, a manera de ejemplo, al de *Matemáticas previas al Cálculo* (Leithold, 1989). La solución aportada se da a través de las restricciones siguientes (los subrayados son nuestros):

> 1.5.7. Definición
> Si $a \in R$, $n \in N$ y <u>m & n son primos entre sí</u> [el autor no hace explícita la función de esta restricción], entonces, si $\sqrt[n]{a}$ es un número real,
> $$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$
> o lo que es lo mismo,
> $$a^{m/n} = \left(a^{1/n}\right)^m$$
> [...]
> Puede demostrarse que la ley conmutativa se cumple para exponentes racionales...
> [...]
> 1.5.8. Teorema
> Si $a \in R$, $n \in N$ y <u>m & n son primos entre sí</u>, entonces, si $\sqrt[n]{a}$ es un número real,
> $$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$
> o lo que es lo mismo,
> $$a^{m/n} = \left(a^m\right)^{1/n}$$
> [...]
>
> Las leyes de los exponentes enteros positivos se cumplen para exponentes racionales positivos con una excepción:
> $$(a^p)^q = a^{pq} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
> cuando a < 0, p es un entero par positivo y q es el recíproco de un entero par positivo. Por ejemplo, considérese la expresión $\left[(-9)^2\right]^{1/4}$. Calculando primero $(-9)^2$, se tiene
> $$\left[(-9)^2\right]^{1/4} = 81^{1/4} = 3$$
> Sin embargo si primero se aplica (2), se obtiene, $(-9)^{2(1/4)}$, lo cual es $(-9)^{1/2}$. Pero $(-9)^{1/2}$ no es un número real. Por lo tanto,
> $$\left[(-9)^2\right]^{1/4} \neq (-9)^{2(1/4)}$$
>
> Si $\left[(-9)^2\right]^{1/2}$, entonces si primero de evalúa $(-9)^2$, se obtiene
> $$\left[(-9)^2\right]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$$

Aplicando primero (2), se obtiene, $(-9)^{2(1/2)}$, que es $(-9)^{1} = -9$. Por lo tanto,

$$\left[(-9)^{2}\right]^{1/2} \neq (-9)^{2(1/2)}$$

A fin de evitar esta ambigüedad, se tiene la siguiente definición.

1.5.9. Definición
Si $a \in R$ y m & n son enteros positivos,

$$\underline{\left(a^{m}\right)^{1/n} = |a|^{m/n}}$$

En cuanto a los segundos, aquellos que eliminan la inconsistencia desde la definición, citamos el texto *Álgebra y funciones elementales*[39](Kalnin, 1978), aunque en éste no se hagan explícitas las funciones que cumplen las restricciones de la base (los subrayados son nuestros y las cursivas son del original):

> §35. Potencia de exponente cero y entero negativo.
> DEFINICIÓN 1. Todo número real a, <u>distinto de cero</u>, a la potencia cero (exponente nulo) es igual a la unidad.
> [...]
> DEFINICIÓN 2. Por potencia de un número real a, [<u>distinto de cero</u>], con exponente entero positivo se sobreentiende la fracción cuyo denominador es igual a 1, y el denominador es una potencia de a misma base, pero con exponente opuesto.
> [...]
> §44. Potencia de exponente fraccionario.
> DEFINICIÓN 2. Por potencia de *exponente fraccionario positivo*, es decir, la expresión $a^{\frac{m}{n}}$ (m y n son entero positivos) denota una raíz cuyo índice es igual a n, y la expresión subradical (radicando), igual a^{m}
>
> $$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}} \quad \underline{(\, a > 0)}$$

[39] La particularidad de este texto es que si bien introduce la noción de exponente cero y negativo como definición, después hace una lista exhaustiva con dos maneras de operar, para mostrar que las operaciones con estos exponentes se pueden efectuar según las mismas reglas que con los exponentes naturales. Para este texto las operaciones son: Producto de potencias, división de potencias y elevación de potencia de una potencia.

4.3.2.3. Coherencia a través de la extensión del modelo de multiplicación reiterada

Como ya hemos dicho, las convenciones matemáticas, en el contexto algebraico, son establecidas para que la estructura operativa se conserve y debido a ello la interpretación de los exponentes como multiplicación reiterada se pierde. Es por esto que en el plano didáctico, el mecanismo se caracteriza por ser fuente de rupturas en el discurso matemático escolar y fuente de fenómenos que impiden la construcción de conocimiento (Martínez, 2000). Una manera de evitar esta ruptura es extender el modelo de multiplicación reiterada apoyada en cierta noción de *negatividad*. Como representante de esta tendencia se toma el texto *Curso propedéutico. Física y Matemáticas* (Conalep-Sep, 1988) en donde además se puede notar el carácter nemotécnico de la noción de *negatividad* para las potencias de 10:

> Los ejemplos anteriores representan potencias con exponentes positivos: 10^2, 10^3, 10^4, etc. Pero ¿qué significa una potencia con exponente negativo? 10^{-2}, 10^{-3} 10^{-4}, etc.
>
> El inverso de un número es el cociente de dividir 1 entre ese número.
> El inverso de 84 es 1/84
> El inverso de 100 es 1/100
> 10^2 es una potencia de 10 y el inverso se esta potencia es $1/10^2$
>
> Esto se puede representar así:
> Con una base y un exponente: 10^{-2}
> Como un producto: $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$
> Por su valor efectuado: $\frac{1}{100}=0.01$
> El signo - (menos) colocado delante del exponente de una potencia representa el inverso de esa potencia.
>
> $$10^{-2}=\frac{1}{10^2}$$
>
> **Ejemplos:**
>
> $$10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{1000}=.001$$

$$10^{-4}=\frac{1}{10^4}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10000}=.0001$$

Procedimiento para Desarrollar el Valor Efectuado de una Potencia de 10

Valor efectuado de 10^5	=	Se escribe la cifra 1	→	Se coloca la cantidad de ceros que indica el exponente, exponente 5, 5 ceros	→	A la derecha de la cifra 1 si el exponente es positivo
Valor efectuado de 10^{-5}	=	Se escribe la cifra 1	→	Se coloca la cantidad de ceros que indica el exponente, exponente -5, 5 ceros	→	A la izquierda de la cifra 1 si el exponente es negativo y se coloca un punto decimal después del primer cero: 0.00001

Por ejemplo:

10^6 = 1000000
6 ceros
10^{-6} = 0.000001
6 ceros

Procedimiento para Expresar en Potencias de 10 Valores Efectuados

Expresión de potencia de 1000000	=	Se escribe la cifra 10	→	Se afecta el 10 con un exponente igual a la cantidad de ceros del valor efectuado, 6 ceros exponente 6.	→	10^6
Valor efectuado de 0.0001	=	Se escribe la cifra 10	→	Se afecta el 10 con un exponente igual a la cantidad de ceros del valor efectuado, 4 ceros, exponente 4	→	Si los ceros están colocados a izquierda de la cifra 1, la potencia se precede del signo menos (-) 10^{-4}

Por ejemplo:
10000000 = 10^7
0.0000001 = 10^{-7}

Existen algunos casos especiales como:

$10^1 = 10$	Un cero a la derecha de 1
$10^0 = 1$	Ningún cero a la derecha o a la izquierda de 1
$10^{-1} = 0.1$	Un cero a la izquierda de 1

4.4. Aproximación a las circunstancias en el aula

En general, en la actual organización escolar de los saberes, el único contexto donde es manejado el proceso de construcción de las convenciones matemáticas presentes en los exponentes es el de la sintaxis algebraica asociado a la sintaxis de los números. Estos modos de transmisión vía la enseñanza pueden ser descritos de manera general como sigue: Desde la educación básica, la potenciación a^n, es interpretada como una multiplicación reiterada, esto es, *a* será multiplicada por sí misma *n* veces. En los libros de texto se pueden encontrar explicaciones parecidas a la siguiente: $4^3 = 4 \times 4 \times 4 =$ 64, donde 3 es el *exponente*, el 4 la *base* y 64 la *potencia*. A su vez, a la radicación se le define como la operación inversa a la de la potenciación de la siguiente manera: $\sqrt[3]{8} = 2$. El 3 es el *índice*, el 8 el *subradical*, el símbolo $\sqrt{\ }$ es el *radical* y 2 la *raíz*. Los conceptos de potenciación y radicación son comúnmente manejados de manera independiente y tarde o temprano son relacionadas a través del manejo de las siguientes *reglas de transformación*[40]: 1) $a^1 = a$, 2) $a^0 = 1$, 3) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ & 4) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

En este sentido, tradicionalmente entre profesores y estudiantes de diferentes niveles escolares, el manejo de expresiones que involucran exponentes cero, negativo y fraccionario es reducido al manejo de la reglas de transformación mencionadas y éstas no son problematizadas en tanto sus orígenes y sus funciones. Es decir, que el origen y la función de esas reglas de transformación *no son objetos de enseñanza*. Aclaramos que es posible que las convenciones matemáticas de los exponentes sean tratadas; pero el punto es que las ocasiones reales de uso consisten en aplicar las reglas de transformación. En este sentido el mecanismo de convención matemática será utilizado como un *objeto transaccional* entre lo antiguo y lo nuevo (Chevallard, 1997). En la presentación que eventualmente se hace en las aulas, las convenciones matemáticas (aunque no se les llame así) son establecidas con un argumento como el siguiente: 'los exponentes fraccionarios, negativos y cero deben interpretarse de manera tal que a ellos se sigan aplicando las *leyes* de los exponentes enteros positivos'. También se da el caso de que las *leyes* sean identificadas con las que hemos llamado *reglas de transformación.*

En resumen, es posible notar la siguiente secuenciación de los contenidos relativos a los exponentes: Exponente como abreviación de la multiplicación reiterada, exponente cero, exponentes negativos y exponentes fraccionarios. Cabe señalar que esta secuenciación es de carácter transversal; pues no necesariamente los temas son tratados uno después del otro. Lo anterior muestra que dentro de la matemática escolar el problema de la introducción del concepto de exponente se concibe como un problema de extensión de dominio de valores que puede tomar x en la expresión a^x; sin bien el caso cuando x es un número irracional no es tratado. Un aspecto marca la teleología instruccional de la secuenciación: aplicar eficientemente las *reglas de transformación* siguientes: $R1)$ $a^0 = 1$, $R2)$ $a^{-n} = 1/a^n$ & $1/a^n = a^{-n}$, $R3)$ $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$. Dichas transformaciones son utilizadas en la escuela para realizar operaciones con monomios, aplicar reglas de derivación e integración y para la definición de la función exponencial y logaritmo. Este fin instruccional determina que el origen y la función de las reglas $R1$, $R2$ y $R3$[41] *no son objetos de enseñanza.* Lo que explica, en parte, porque ningún estudiante

[40] En lo sucesivo se usara esta frase exclusivamente para referirse a las reglas mencionadas. La palabra regla es usada con el mismo sentido a como se utiliza en la frase "reglas de acción".

[41] Eventualmente es posible encontrar argumentos para la igualdad $R1$ a través del *Argumento de División de Potencias* que mencionaremos más adelante.

puede proporcionar argumentos de carácter teórico para establecer las igualdades contenidas en las reglas. Otra de las características sobresalientes de los elementos de la secuenciación es que todos ellos tienen una misma jerarquía; no se presta más atención a uno u a otro. Esto aporta un elemento para explicar, por ejemplo, la utilización de los estudiantes del MMR con exponentes en donde ello no es posible (Martínez, 2002). Para los estudiantes principiantes en el tema no hay distinción entre los exponentes y los familiarizados recurren a las reglas de transformación.

4.4.1. Los efectos de esta tradición de enseñanza

A menudo las reglas de transformación se refuerzan mediante múltiples ejercicios; sin embargo, éstas son fuente de dificultades para los estudiantes al usarlas adecuadamente, y para los profesores, el enseñarlas. Generalmente, este conflicto en la relación didáctica se resuelve vía la memorización de las reglas de transformación en donde el papel del profesor se restringe a proporcionar los medios para tal tarea; es decir, se puede llevar con éxito la estructura Clase/Ejercicio del contrato didáctico.

La creación de los objetos algebraicos: x^2, x^3, x^4, x^5,... se deja en manos del estudiante por que se supone natural a partir de su definición. La centracion en las *leyes de los exponentes* ocasiona que los objetos puestos en juego sean los exponentes. Esta afirmación queda ilustrada por la paráfrasis de la verbalización de ellas: 'al multiplicar potencias de la misma base el resultado es una potencia de dicha base en donde el exponente es la suma de los exponentes de las potencias multiplicadas'.

El requerimiento de construcción deductiva o cierto nivel de coherencia en el discurso matemático escolar puede ocasionar que el proceso de construcción de las convenciones matemáticas para los exponentes no naturales sean postergadas lo más posible o eventualmente excluidas. La exclusión más clara es la relativa al exponente uno; ya que se le da la interpretación de *aparece una vez* en vez de multiplicación reiterada. En este mismo sentido es la consideración de que las convenciones son deducibles a partir de las leyes de los exponentes. En estas interpretaciones las leyes de los exponentes no son un requerimiento que *debe* cumplirse para establecer los convencionalismos sino algo que *ya se* cumple. Como ejemplo de ello mostramos el ejemplo el argumento de un profesor de bachillerato (Martínez, 2000, Anexo B):

La forma de argumentación podría ser la siguiente:

1. $2^3/2^3 = 2*2*2/2*2*2 = 2^3/2^3 = 2^{3-3} = 2^0 = 1$

2. $2^3/2^5 = 2*2*2/2*2*2*2*2 = 2^{3-5} = 2^{-2} = \cancel{2}*\cancel{2}*\cancel{2}/\cancel{2}*\cancel{2}*\cancel{2}*2*2 = 1/4$

   $2^{-2} = 1/2^2 = 1/4$

La postergación es evidenciada en el argumento siguiente que se refiera al exponente cero (Phillips, 1985): 'Supongamos que a^0 significa multiplicar cero veces, entonces el producto de a^0 por a^n será multiplicar a n-veces y el único número que deja invariable a un número por multiplicación es el 1 por lo que $a^0=1$'.

En cualquier caso, el estudio del *proceso* para establecer las convenciones no es *objeto de estudio*.

4.4.2. El universo de operaciones numéricas

El universo de operaciones está determinado por las prácticas en el salón de clase y en los libros: solución de ecuaciones de primero y segundo grado, operaciones con polinomios, evaluación y graficación de algunos polinomios, etcétera. Estas operaciones son esencialmente la suma, resta, multiplicación y división. La construcción de la función exponencial (en el sentido de evaluación) supone una nueva operación entre números: la *operación de potenciación* (operación binaria entre la base y el exponente); pero las restricciones del saber ocasionan que la *operación de potenciación* no sea admitida como nueva en los textos de saber; ya que: 1) Cuando el exponente es natural su significado recae en una multiplicación reiterada; es decir, como un conjunto de operaciones y no como operación entre dos números (la base y el exponente), 2) Cuando el exponente es entero negativo su significado descanza en una división entre dos números, es decir en una operación entre dos números que no son ni la base ni el exponente y 3) Cuando el exponente es fraccionario su significado recae en una la combinación entre la operación de radicación y la operación de potenciación; pero ni la radicación (un proceso inverso de potenciación) ni la potenciación se consideran como operación.

Como ejemplo de lo anterior citamos a Lezama (1999) que reporta la concepción que tienen los estudiantes acerca del símbolo (no como un número) de expresiones del tipo $\sqrt{2^3}$. Ésto es el reflejo de la ausencia de prácticas numéricas en la escuela que posibiliten la formación de la concepción como número de expresiones de ese tipo. En estos términos decimos que la radicación no es concebida como operación sobre un número.

4.4.3. Ocasiones de uso de los exponentes no naturales

En lo sucesivo se llaman *ocasiones de uso*, a las ocasiones en donde la atención no esté centrada en la justificación de las igualdades que involucran exponentes no naturales, sino en ocasiones en donde es requerido proporcionar las igualdades correctas que los involucran.

En todos los libros de texto consultados, los ejercicios presentes después de los argumentos para justificar las igualdades que involucran exponentes no naturales consistían en utilizar las igualdades *demostradas* junto con las *leyes de los exponentes* para hacer transformaciones algebraicas: multiplicación, división y potencia de expresiones del tipo $x^n y^m$ (n, m enteros). Dentro de estos ejercicios no son considerados los argumentos, los textos en donde sí lo hacen tratan comúnmente con la expresión 0^0. Los argumentos dejan de ser, casi inmediatamente, el objeto de estudio de los textos y este lugar es tomado por la operatividad de las expresiones antes señaladas. En este sentido los argumentos tienen el papel de justificar el uso de los exponentes no naturales en los ejercicios y no son considerados como verdaderos objetos de enseñanza.

En general, la noción de función es presentada en los libros de texto en el sentido de Dirichlet-Bourbaki, pero en la práctica escolar predomina el uso de las funciones algebraicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Usualmente primero son definidas y después se hace el trazo de sus gráficas, mostrando una visión global de ellas (en ocasiones no se hace referencia a la gráfica). De esta manera los exponentes no naturales son utilizados en la noción función exponencial (y logaritmo como su inversa); sin embargo, ésta es evaluada sólo en los números enteros y no es realmente evaluada en los números fraccionarios; ya que, por ejemplo, las igualdades del tipo $a^{2/3}$ son manejadas como el símbolo $\sqrt[3]{a^2}$ sin considerar su valores numéricos.

En los libros de Cálculo, los exponentes no naturales son utilizados para algoritmizar el cálculo de derivadas y primitivas de funciones de la forma $f=(x)^{n/m}$ [$f(x)$ igual a un polinomio]; en estos ejercicios el exponente cero no está presente.

4.5. Caracterización del mecanismo en la comunicación del conocimiento

La naturaleza de las convenciones matemáticas (un mecanismo de integración sistémica de conocimientos con que eventualmente se dejan a un lado otros) puede causar dislexias escolares provocadas por la restricción de organización progresiva de la matemática escolar. En particular se subraya la que es ocasionada por la pérdida de los significados contextuales de los números cero, negativos y fraccionarios. En el supuesto que esa dislexia sea identificada, surgen interpretaciones que tratan de eliminarla; como por ejemplo los intentos de ampliar el modelo de multiplicación reiterada para los exponentes no naturales. Citando ejemplos documentados en este capítulo se tiene: 1) la interpretación del exponente negativo como la multiplicación reiterada de cierto *recíproco* que remite a la noción de *negatividad*, 2) el exponente cero interpretado como ausencia de factor que remite a la noción del cero como *nada* y 3) el exponente fraccionario como la multiplicación reiterada de una raíz. En un sentido nemotécnico el recordar los convencionalismos puede estar asociado a la noción de *transformación* en el signo del exponente (asociada a la noción de *negatividad*[42]); sintetizado en las frases del tipo *al subir o bajar el exponente este cambia de signo*; lo cual es claramente consistente con los significados contextuales de los números negativos por lo que dan coherencia a un discurso escolar acerca del tema.

[42] En este sentido en otros estudios (Martínez, 2002) hemos explicado las respuestas, por parte de estudiantes, del tipo $2^{-3} = 0.002$ de la siguiente manera: esta interpretación del exponente negativo posee un elemento de coherencia relacionado con la semántica de los números negativos; ya que verbalmente los estudiantes relacionan el exponente -3 con el proceso de *mover a la izquierda* el punto decimal. Esta interpretación es interesante en el marco de la ruptura del discurso matemático escolar en relación con el exponente cero y negativo.

Agregado a lo anterior, la naturaleza señalada de las convenciones matemáticas provoca que la transposición del mecanismo sea problemática; ya que se presenta la cuestión básica ¿cómo insertar un mecanismo, cuya función es de integración de conocimientos, a una organización progresiva de los conocimientos? Como se ha visto hay dos extremos opuestos en las respuestas de los autores de texto a esta pregunta: Se opta por suponer que los convencionalismos son deducibles o se comienza por tomarlas como definición. En la porción intermedia de estos extremos se encuentran los autores que son sensibles a la naturaleza matemática del conocimiento y dan explicaciones al respecto.

4.6. Nuevos elementos para la caracterización del mecanismo

En este capítulo y el precedente se ha hecho un corte referente a las obras: aquellas que fueron hechas por quienes *construyeron conocimiento* y aquellas que *sistematizaron el conocimiento para la comunicación.* Sin embargo este corte es un tanto arbitrario; ya que como otros investigadores señalan (Castañeda, 2000) entre ellos (las cursivas son del original): "Estas reflexiones en torno al fenómeno transposición de la obra erudita hacia un esquema de difusión, produjo un avistamiento teórico que le hemos llamado *sentido inverso de Transposición Didáctica*, esto significa, el proceso por el cual un saber propio de un ámbito no erudito, deviene a través del tiempo y de la mediación de un *grupo legitimador* en un saber de interés para el ámbito erudito. Este grupo legitimador funciona en forma análoga a la *noosfera*, pero con criterios distintos, su función se reconoce cuando hace que un saber propio de la cultura, sea de interés de manera que lo retome la academia erudita para discernir sobre él, validarlo, sistematizándolo o bien fundamentándolo".

Una consecuencia que aquí se rescata de lo anterior es la de tomar el análisis efectuado en este capítulo como parte integral de la construcción social del conocimiento. Hecha la consideración anterior, se pueden establecer nuevos elementos en la caracterización del mecanismo de convención matemática:

- Las convenciones matemáticas para los exponentes pueden ser formuladas a través de observar patrones algebraicos y después observar que son consistentes con una operatividad anterior.

- La sensibilidad al carácter sistémico de las convenciones matemáticas es un proceso complejo, que no puede ser basado en la concepción de que la Matemática Escolar es un sistema ordenado de proposiciones derivadas deductivamente de principios.

- En general, el contexto donde son tratados los exponentes no naturales en el Álgebra; por lo que en realidad no se hace trabajo numérico al respecto. Es por ello que los problemas de consistencia del tipo $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=\left[(-8)^2\right]^{\frac{1}{6}}=[64]^{\frac{1}{6}}=2 \quad \Rightarrow -2=2$ no son tratados en la escuela. Se ha visto en algunos libros de texto se hacen *correcciones* a las definiciones iniciales y en otros se trata la inconsistencia a partir de la definición. Esta circunstancia hace considerar que el escenario numérico sea adecuado como *activador* del mecanismo de convención matemática que se ha mencionado en la caracterización: la *contradicción*, que a su vez puede ser parte fundamental de la *devolución* de una situación.

4.7. Más sobre ruptura y continuidad de significados

Todo lo mencionado en la sección precedente adquiere más sentido debido a que la búsqueda de integración, que es una búsqueda de relaciones, puede tener dos salidas: 1) La *ruptura* (que en la escuela es causa de dislexias escolares) ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Entonces la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados; por lo que depende sustancialmente del contexto epistemológico de la construcción de significados: en la construcción primera o en la teoría matemática (en la sociogénesis que se estudió en el capítulo anterior), en la escuela o en los libros de texto (en la comunicación que se estudió en este capítulo) o en el conocimiento personal de los alumnos (que se estudiara en el capítulo siguiente) y profesores.

De acuerdo a la caracterización del mecanismo en el plano epistemológico, estamos interesados en los procesos que se ponen en funcionamiento con el objetivo de buscar una cierta integración sistémica de un conjunto de conocimientos. Como es usual es quien está en proceso de construcción de conocimiento el que percibe más claramente las rupturas existentes en una organización de los saberes. En este caso algunos razonamientos de estudiantes, relativos al tratamiento de los exponentes no naturales, nos muestran una primera ruptura. Tales razonamientos tienen la particularidad de que, a pesar de ser coherentes, llevan a repuestas que no están de acuerdo con lo aceptado dentro del corpus algebraico de conocimientos. En diversos niveles escolares, pero particularmente en el nivel secundario (alumnos de 12-15 años) y en medio superior (alumnos de 15-18 años), podemos encontrar argumentos como los siguientes[43]:

Argumento *A*. $2^0 = 0$ ya que 'el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada'.

[43] Para un explicación detallada de estas y otras respuestas puede ser consultado (Martínez, 2002).

Argumento *B*. $2^0 = 2$ ya 'el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2'.

Argumento *C*. $2^1 = (2)(2) = 4$ ya que 'multiplicamos una vez'.

Argumento *D*. $2^{-3} = (-2)(-2)(-2)$.

Argumento *E*. $2^{-4} = -16$ ya que '$2^4 = 16$ y se le pone un signo'.

La coherencia de los argumentos anteriores descansa sobre varios aspectos solidarios: a) El significado del cero como representante de la "nada" o de "ninguno", b) la utilización del MMR para el tratamiento de los exponentes y 3) la segmentación del número negativo como "número positivo" con "el signo menos". Estas consideraciones y lo que señala el consenso descrito en la sección anterior, nos lleva ante la necesidad de dos rupturas para construir el significado del exponente no natural: con el MMR y con los significados contextuales de los números cero y negativos. Sin embargo, de acuerdo con nuestro foco de interés, debemos tomar en cuenta que esas opciones de ruptura poseen contrapartes que buscan la continuidad. Esta circunstancia queda ejemplificada con los siguientes argumentos que son la búsqueda de dar continuidad al MMR en relación al significado de cero como representante de la "nada" o de la "ausencia":

- *Álgebra de Phillips* (1985) "Supongamos que a^0 significa multiplicar cero veces a la base a, entonces el producto de a^0 por a^n será multiplicar a $(n+0)$-veces [es decir n veces] y el único número que deja invariable a un número por multiplicación es el uno por lo que $a^0=1$".

- *Un profesor de bachillerato* "Si $2^3=2*2*2*1$; $2^2=2*2*1$; $2^1=2*1$; $2^0=1$; el exponente cero indica cuantas veces se multiplica el 2 por la unidad".

En este punto es significativo señalar el tratamiento que generalmente se hace del exponente uno; ya que se le da la interpretación de *aparece una* *vez* en vez de multiplicación reiterada –que no tendría sentido pues la multiplicación es una operación binaria–. Esta ruptura es señalada por aquellos estudiantes de secundara que escriben " $2^1 = 2^*$ " o dicen 'dos a la uno es 2 por...'). Es de señalar que en textos de corte más formal se puede encontrar una definición del MMR de manera inductiva, pues establecen que para $n \in \boldsymbol{N^*}$ se tiene que $a^n = (a)(a)\ldots(a)$ [n-1 multiplicaciones] por lo que en este contexto el exponente uno no tiene cabida más que como convención matemática (expresada como definición o axioma). Aquí es donde se justifica nuestra elección del conjunto $\boldsymbol{N^*}$.

En el mismo sentido que el anterior existen tratamientos que son la respuesta por conciliar el MMR y el significado contextual de los números negativos a través de cierta noción de *negatividad* como "proceso inverso" y "estar a la izquierda" al momento de reforzar la explicación. Como representantes de esta opción tenemos:

- *Curso propedéutico. Física y Matemáticas* (Conalep-Sep, 1988)(Ya mostrado con detalle antes).

- *Un profesor de bachillerato* "Según entiendo 2 elevado a la potencia 2, se interpreta como 2*2, 2 elevado a la potencia 3, se interpreta como 2*2*2, etc., según el documento debemos diseñar una situación en la cual la multiplicación reiterada no puede ser mantenida fuera de los casos 2, 3, 4, ... aunque me permito afirmar lo siguiente:

  El número 2 elevado a la potencia –2, se interpreta como ½*½, el numero 2 elevado a la potencia –3, se interpreta como ½*½*½, etc., en consecuencia afirmo que la multiplicación reiterada si puede ser mantenida fuera de los casos 2,3,4, ...

> Según mi experiencia docente 2 elevado a la potencia *n*, es multiplicar 2 *n* – veces, aquí debemos entender que estamos multiplicando reiteradamente la base (2).
>
> Para el caso 2 elevado a la potencia –*n*, se debe entender que la base ya no es el 2, sino que la base es ½, en consecuencia se debe ser cuidadoso con las bases cuando se esta usando la multiplicación reiterada, todo lo anterior puede ser generalizado para cualesquier base *x*, con *x* distinto de cero y por tanto creo que si puede ser mantenida la multiplicación reiterada fuera de los casos 2, 3,4,…”.

Lo anterior muestra la potencialidad descriptiva y explicativa del mecanismo convención matemática; pues permite dar unidad y coherencia a los diferentes tratamientos que con fines de comunicación y transmisión se pudieron encontrar en relación a los exponentes. Sostenemos que esto no hubiera sido posible sin la herramienta conceptual que proporciona la convención matemática; ya que algunos de tales tratamientos hubieran quedado fuera al atender solamente a los significados que el consenso escolar les asigna a los exponentes no naturales. Por ejemplo, en tal contexto la posición didáctica del profesor, que extiende el Modelo de Multiplicación Reiterada a los números negativos, podría ser explicada como un recurso mnemotécnico que no contiene ningún verdadero significado y no, como muestra el análisis, ser explicada como una alternativa para evitar rupturas con el significado contextual de los números negativos.

CAPÍTULO 5

ELEMENTOS PARA ENRIQUECER LA CARACTERIZACIÓN A TRAVÉS DE SITUACIONES EXPERIMENTALES

En este capítulo la caracterización del mecanismo realizada en los dos capítulos anteriores, es considerada como *inicial* cuando se le utiliza para diseñar una situación experimental que busca *activar* el mecanismo con grupos de estudiantes en situación escolar y registrar su eventual funcionamiento. Del análisis de la puesta en escena resultarán algunos matices en caracterización que hace avanzar la investigación en tanto su programa sistémico, al tomar en cuenta las restricciones propias de la escuela y de la cognición específica de algunos grupos de estudiantes. Para ello en primera instancia se hace una somera revisión sobre las generalidades que debe poseer una situación según se presenta en la teoría de Situaciones Didácticas, para posteriormente retomar la *caracterización inicial* para dotar de especificidad a la situación experimental diseñada con el fin de enriquecer la caracterización.

5.1. Características generales para el diseño de situaciones

De acuerdo con la teoría de Situaciones Didácticas las situaciones deben, entre otras, cumplir con las siguientes condiciones (Robinet, 1984 citado en Alanís, 1996):

- Ellas deben, y esto de una manera endógena, conducir a los estudiantes a acciones, formulaciones y validaciones. Si nos referimos a los trabajos de

R. Douady, uno se puede contentar, algunas veces, con el hecho que la situación, por su esencia misma, orille a los estudiantes a actuar, la formulación puede ser originada por las exigencias del profesor. Esto hace que el diseño de situaciones se haga con mucha facilidad, pero se deja mucha iniciativa al profesor. De todas maneras el rol del profesor es primordial en la fase de institucionalización del nuevo saber adquirido, con lo cual siguen subsistiendo algunas dificultades en el control de nuestro trabajo.

- Ellas deben anclarse en varios contextos, de manera que los conocimientos de los estudiantes en uno de esos contextos sea el motor de la construcción de nuevas nociones en los otros contextos.

- Ellas deben apoyarse en los conocimientos anteriores de los estudiantes para que puedan poner en acción estrategias de base, es decir para que puedan iniciar la solución del problema con la ayuda de los conceptos ya por ellos construidos como herramientas explícitas.

- Las nuevas nociones deben aparecer como necesarias a la resolución de los problemas, puesto que si no, según el principio de economía, lo que habrá es la adaptación de los viejos conocimientos en lugar de la construcción de una nueva noción (cuando esto es justamente nuestra meta).

- Las situaciones problema deben por su estructura misma, inducir a los estudiantes a la acción, esto para minimizar los efectos del contrato didáctico.

- Ellas deben de minimizar, en cierto modo, la transposición didáctica, en la medida de esto, con mucha frecuencia, responde a una necesidad del funcionamiento educativo, independiente de la apropiación del saber por los alumnos. Los conceptos deben ser introducidos por su funcionamiento, es decir como herramientas necesarias para la solución de problemas. Históricamente los problemas a través de los cuales los conceptos fueron inventados, llenan estas condiciones, pero por una parte ellos no son siempre adaptables a la enseñanza, y por otra parte el funcionamiento del concepto lo hace aparecer a veces igualmente necesarios en la solución de otros tipos de problemas. Esta última condición nos conduce a hacer un estudio epistemológico de la noción en cuestión. En efecto, hacer este estudio nos informará primero sobre el estado de la ciencia en el momento de la aparición del concepto, después sobre los problemas por los cuales el nuevo concepto fue creado, y por último el lugar de este concepto en el saber matemático actual (en particular, sabremos si se ha dado una adaptación o si por el contrario se ha dado una reorganización del saber).

Para simplificar, se toma de la descripción anterior, las siguientes características de una situación:

(i) El alumno debe poder introducirse en la resolución del problema y ha de poder considerar lo que es una *solución posible*.

(ii) Los conocimientos del alumno tienen que ser, en principio, *insuficientes* para resolver el problema.

(iii) La situación debe permitir al alumno decidir si una solución determinada es *correcta o no*.

(iv) El conocimiento que se desea que el alumno construya tiene que ser la herramienta más adecuada para resolver el problema propuesto, de acuerdo con el nivel de los conocimientos del alumno. En la construcción de este conocimiento, a través de acciones, formulaciones y validaciones, radica el objetivo fundamental de toda la actividad.

5.2. La incidencia de la caracterización inicial en el objetivo del diseño

Como se ha dicho, el objetivo de esta investigación es la caracterización de un mecanismo de construcción de conocimiento: la *convención matemática*. Para ello se han tomando elementos que surgen análisis de su funcionamiento en la construcción del concepto de exponente no natural y de su transposición a sistemas de conocimientos organizados para su comunicación. En conjunto, estos análisis proporcionan una *caracterización inicial*. Tales elementos se utilizaran para el diseño de un instrumento para la investigación empírica con estudiantes y profesores, mediante del diseño una situación que atienda, en la medida de lo posible, a los requerimientos teóricos y metodológicos de la teoría de las Situaciones Didácticas (en el Anexo 4 presentamos otros diseños preliminares para tal efecto).

La caracterización inicial del mecanismo para la construcción del concepto de exponente no natural que surge de los estudios desarrollados en los Capítulos 3 y 4 puede resumirse de la manera siguiente: Se requiere la presencia de un *activador* del mecanismo, el cuál puede ser la contradicción o la necesidad[44] de integración sistémica en los conocimientos matemáticos al momento de incluir un objeto nuevo. Este requisito hace referencia a ciertas etapas en un sistema de conocimientos: uno inicial o de referencia y otro final que posee las realizaciones del mecanismo como propiedades emergentes, bajo la forma de axiomas, definiciones, restricciones, entre otras.

[44] Vista como una noción metamatemática para la teorización o como una noción de coherencia para la comunicación.

La caracterización señalada anteriormente será enriquecida al utilizarla para el diseño de una situación experimental que buscan *activar* el mecanismo con grupos de estudiantes en situación escolar y registrar su eventual funcionamiento. Los diseños serán hechos con el objetivo poner a prueba algunos modelos de la actividad de las personas cuando se enfrentan a una situación problemática que puede ser resuelta de manera óptima poniendo en funcionamiento el mecanismo de convención matemática. Del análisis de la puesta en escena resultaran matices de la caracterización para poder avanzar con nuestro programa sistémico, al tomar en cuenta las restricciones propias de la escuela y de la cognición específica de algunos grupos de estudiantes.

Gracias a la caracterización inicial se desprende que el funcionamiento del mecanismo puede ser modelado al poner en funcionamiento los siguientes elementos:

- Un sistema de conocimientos de referencia.
- La necesidad teórica o de comunicación de incluir un nuevo objeto a este sistema.
- Esta necesidad surge de consideraciones metamatemáticas que toman la forma de principios que funcionan como *activadores* del mecanismo. Otro de los posibles *activadores* del mecanismo es la contradicción. Es fundamental señalar aquí que hay que manejar la hipótesis de que es necesario un escenario más amplío para que las actividades tomen sentido que llamamos *escenario de significación*. Ensayaremos está hipótesis en el estudio exploratorio en donde las actividades fueron realizadas en un *escenario de justificación*.
- El mecanismo se realiza en diferentes formas, que dependen de las características de la organización del sistema de conocimientos que se quiera o puede lograr: axiomas, definiciones, restricciones, etc.

En cuanto a la transmisión de conocimientos vía la enseñanza se deben considerar los siguientes elementos:

- La presencia de conocimientos segmentados, debido a la organización lineal del conocimiento.
- Por las características de la organización progresiva escolar de los conocimientos el mecanismo puede ser considerado como una demostración o como una dislexia.

En nuestros trabajos anteriores (Martínez, 2000, 2002) hemos hecho un estudio exhaustivo de las concepciones de los estudiantes cuando se enfrentan con expresiones que involucran exponentes no naturales. De las explicaciones que ahí dimos, se considera que algunas de esas concepciones deben ser modificadas:

- Debido a que es necesario desarrollar la concepción de igualdad como producto de una convención matemática se presenta necesario modificar:
    - La interpretación de la igualdad como un proceso que implica hacer operaciones para llegar a un resultado (generalmente de izquierda a derecha de la igualdad).
    - La igualdad como resultado de un proceso de deducción.
- Agregado a lo anterior es necesario, debido a la función del mecanismo en la integración de conocimientos, desarrollar la concepción que los conocimientos (en este caso igualdades) están determinados por su interacción con otros y no de manera aislada.
- En cuanto a las concepciones que poseen con respecto a los números, se debe propiciar la identificación de por los menos dos sistemas de

conocimientos complementarios: 1) la sintaxis y 2) la semántica de los números.

Tomando en cuenta todo lo anterior, la especificidad de los diseños experimentales está dada por los siguientes elementos:

- Los estudiantes entienden el enunciado, esto es, éste les recuerda un campo que les resulta familiar y que pueden reconocer; por lo que poseen reglas de acción.
- Se asume de entrada que el exponente uno es el más estable en cuanto a la utilización de las reglas de transformación. Sin embargo, debido a que es una convención matemática esta regla debe ser problematizada.
- La dificultad metodológica para cumplir el requisito de que los estudiantes no puedan resolver completamente el problema sólo con sus conocimientos, consiste en que el uso de las reglas de transformación (probablemente manejadas por muchos de los estudiantes) pueden desviar la atención de los estudiantes al momento de efectuar las actividades, ya que al utilizarlas, los estudiantes pueden tener la sensación de haber encontrado un *atajo* que los lleva a resolver esos problemas. Hay varias alternativas para sortear esta dificultad, una de las cuales se retoma según sea el caso específico:
    - La situación de manera implícita (como una cláusula del contrato didáctico) da legitimidad, inicialmente, a las potencias mayores a uno. En este sentido las actividades provocan el rompimiento de está cláusula al provocar la necesidad del funcionamiento del mecanismo.
    - La situación se lleva a cabo con estudiantes que desconocen las reglas de transformación (por ejemplo con estudiantes de primer año de educación media básica).

  - La situación está diseñada sin usar de manera explícita los exponentes, como puede ser el uso de progresiones aritméticas y geométricas en el contexto numérico.

- La naturaleza de las convenciones matemáticas, en tanto su función dentro de un sistema de conocimientos, hace necesario que los participantes en la situación deben manejar con relativa soltura un sistema de conocimientos inicial. Es por ello que son necesarias algunas actividades preliminares que tengan como finalidad que los estudiantes interaccionen con tal sistema de conocimientos.
- Ya que el mecanismo debe aparecer como necesario a la resolución de los problemas, en la situación se debe incluir un elemento *desestabilizador* al momento de introducir un nuevo elemento a un sistema de conocimientos ¿Qué debe conservarse en el sistema?, ¿para qué debe conservarse? pueden ser las preguntas, planteadas en el contexto de la situación, que cumplan ese papel. En este sentido, las nociones metamatemáticas juegan un papel importante en el diseño; ya que con éstas se regulan las posibles respuestas. En un primer acercamiento se puede explicitar[45] qué estructura debe ser conservada; para con ello trabajar en el contexto de razonamiento bajo hipótesis. Sin embargo el proceso primario para la desestabilización será la *contradicción*; asumiendo, como hipótesis de trabajo, que la sensibilidad a la contradicción es una construcción social.

5.3. Estudio exploratorio con alumnos de licenciatura

En el marco de lo señalado anteriormente se llevó a cabo un estudio de carácter exploratorio con estudiantes de licenciatura y se eligió trabajar en el contexto algebraico debido a que es el de mayor familiaridad para ellos. El objetivo general de la actividad es observar el comportamiento de los estudiantes ante preguntas de justificación de las reglas de transformación para los exponentes no naturales cuya respuesta requiere, según nuestra hipótesis, poner en funcionamiento el mecanismo de convención matemática. Este foco de interés permite trabajar con estudiantes que utilizan eficientemente las reglas de transformación; pero que carecen de justificaciones para ellas. Es por ello que una parte considerable del estudio se enfocó a la *devolución* (en términos de la Teoría de Situaciones) de las preguntas tratadas y observar el tratamiento que hacen de ella los estudiantes. Los resultados muestran varios aspectos que permiten matizar nuestra *caracterización inicial*.

5.3.1. El contexto del estudio

El estudio se llevo a cabo con alumnos de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero que cursan el IV semestre de la licenciatura con especialidad en Enseñanza de las Matemáticas. Las edades de los estudiantes están dentro del rango de 20-25 años y la mayoría vive en poblados aledaños a la cuidad de Chilpancingo. El investigador que escribe estas líneas funge como titular de la asignatura "Didáctica de la Matemática" de duración semestral (Febrero-Julio del 2003) que imparte a los mismos estudiantes que participaron en el estudio. El estudio en si mismo es parte del curso que está diseñado para trabajar dos líneas directoras solidarias: Lecturas sobre Matemática Educativa y Actividades matemáticas[46]. Los antecedentes directos del estudio es la lectura del libro "El fracaso de la Matemática Moderna" de Morris Klein (Editorial Siglo XXI) en sus primeros cuatro capítulos —que versan sobre la critica al llamado ahí plan tradicional, los fundamentos y

[45] Se entiende que existen diferentes niveles de explicitación y que es parte del problema de investigación determinar el nivel que debe ser elegido para un sistema didáctico particular.

[46] Cabe señalar que debido a la detección de dificultades en la lectura, de manera emergente se decidió incluir algunas actividades encaminadas a reflexionar sobre generalidades en la lectura y la escritura.

características de la reforma de la Matemática Moderna y algunas criticas del autor a tal reforma— y actividades matemáticas que tienen por objetivo reflexionar sobre el fundamento de los algoritmos aritméticos para la suma, resta, multiplicación, división, extracción de raíz cuadrada de un número por el algoritmo tradicional y la regla de tres directa e inversa. Las conclusiones de tales actividades fueron hechas por el profesor después de la revisión de las justificaciones que presentaban los estudiantes bajo la forma de tareas extraclase sujetas a evaluación. Los señalamientos anteriores sirven para hacer notar que el estudio posee las siguientes características:

- El contexto del estudio es un ambiente de "justificación" de algoritmos que se sabían realizar pero se ignoraba los motivos de su funcionamientos (el profesor uso extensivamente la palabra "justificación" para referirse a esta circunstancia).
- Forma parte del curso y por lo tanto los estudiantes estaban al pendiente de las repercusiones que éste tendría en sus evaluaciones.

5.3.2. Estructura y funcionamiento del estudio

El estudio se estructuró a través de dos componentes solidarias: un par de cuestionarios que los estudiantes contestaron individualmente durante 1.5 horas y una *Sesión de trabajo* vídeograbada, de dos horas aproximadamente, con cada uno[47] de los equipos de tres o cuatro integrantes que se conformaron a través de la petición del profesor de entregar las respuestas en equipo de ambos cuestionarios como tarea.

Los dos cuestionarios son los siguientes y en lo que sigue haremos referencia a ellos como *Cuestionario 1* y *Cuestionario 2*, respectivamente:

[47]Aquí sólo reportamos la sesión de trabajo con dos de los equipos (Ver Anexos 2 y 3).

Cuestionario 1

Cuestionario sobre lo que dices #1

Didáctica de la Matemática

Nombre: ----------------------------------

Instrucciones ***(utiliza tinta para contestar)***

El objetivo de este cuestionario es saber más sobre ti en relación a ciertas igualdades. Tus respuestas me ayudaran a preparar algunas de las clases siguientes de nuestro curso, por tal motivo **te invito a explicar con el mayor detalle posible tus respuestas y justificaciones al llenar la siguiente tabla.** Atte. Prof. Gustavo Martínez Sierra.

Expresiones	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1.5} =$		
$2^{0} =$		
$2^{1} =$		
$2^{-3}=$		
$2^{-4} =$		
$2^{-1.5} =$		

Cuestionario 2

Cuestionario sobre lo que otros estudiantes dicen #1

Didáctica de la Matemática

Nombre: ----------------------------------

Instrucciones ***(utiliza tinta para contestar)***

El objetivo de este cuestionario, complementario al anterior, es saber qué opinas sobre las justificaciones que algunos estudiantes de secundaria y bachillerato dan con respecto a ciertas igualdades. Tus respuestas me ayudaran a preparar algunas de las clases siguientes de nuestro curso, por tal motivo **te invito a explicar con el mayor detalle**

posible tus respuestas y comentarios al llenar la siguiente tabla y si tienes dudas me preguntes. Atte. Prof. Gustavo Martínez Sierra

Respuesta	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"		
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"		
$2^1 = 2*2=4$	"ya que multiplicamos una vez el 2"		
$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"		
$2^{-4} = -16$	"ya que $2^4 = 16$ y se le pone un signo"		
$2^0 = 2$	"como no hay nada de exponente se queda igual"		

El objetivo de realizar los cuestionarios anteriores consiste en establecer un marco de referencia, tanto para los estudiantes como para el investigador, para la *Sesión de trabajo* cuyo objetivo de investigación es observar el eventual funcionamiento del mecanismo de convención matemática.

El Cuestionario 1 fue diseñado con el fin de explorar las maneras en que los estudiantes hacen referencia a las reglas de transformación y obtener elementos para profundizar en los procesos relacionados con el fenómeno de evolución hacia "respuestas correctas por parte de los estudiantes" (Martínez, 2000). Se partió de la hipótesis de que todos los estudiantes las manejaban adecuadamente; pero carecerían de justificaciones. Lo anterior se confirmo en términos generales durante la aplicación individual del cuestionario; pero hubo variaciones durante su revisión en la Sesión de Trabajo; ya que algunos de los estudiantes revisaron libros de texto en relación a las reglas de transformación.

El Cuestionario 2 fue diseñado con el objetivo de presentar a los estudiantes justificaciones que dan respuestas que contrastan con las consideradas correctas. Nuestra hipótesis es que estas alternativas de justificación funcionarían como activadoras del mecanismo de convención matemática; pues la presencia de una justificación coherente que da una regla de transformación considerada incorrecta llevaría a replicar de la misma manera: dar una justificación coherente para la regla de transformación considerada como correcta.

En términos generales el objetivo de la Sesión de Trabajo consiste en introducir a los estudiantes en un contexto de "justificación" específica a las reglas de transformación de los exponentes dentro del contexto general de "justificación" del curso en el que están inmersos; para así observar el eventual funcionamiento del mecanismo de convención matemática a través de las justificaciones presentadas por los estudiantes. La Sesión de Trabajo fue diseñada a través de tres momentos temporalmente sucesivos: 1) Revisión del Cuestionario 1, 2) Revisión del Cuestionario 2, 3) Una pregunta sobre por qué no usar las igualdades que los estudiantes de secundaria y bachillerato proponen ($2^0=2$, $2^0=0$ y/o $2^{-3}=-8$).

5.3.3. Nota sobre los cuestionarios contestados individualmente

Cuatro de los estudiantes (de un total de 22) al contestar el Cuestionario 1 de manera individual dieron una justificación distinta a presentarla como "ley", "propiedad" o "teorema" de los exponentes y no se basaron en el intento de extender el modelo de multiplicación reiterada. Dos de ellos fue utilizando el argumento que utiliza como supuesto la transformación $a^m/a^n = a^{m-n}$ y sólo se justificaron al exponente cero. Dos más utilizaron el patrón de progresión geométrica de las potencias sucesivas de dos, hecho que les permitió, además, justificar las reglas de transformación para los exponentes enteros negativos. Algunos otros dieron justificaciones basadas en el modelo de multiplicación reiterada.

Lo anterior vario de manera significativa durante la Sesión de Trabajo ya que ahí fueron tratadas justificaciones presentes en los libros de texto que presentamos en el capítulo anterior.

5.3.4. Justificaciones de las reglas de transformación

El estudio muestra gran diversidad en las alternativas posibles para proporcionar justificaciones explícitas para las reglas de transformación para los exponentes no naturales. Está diversidad puede ser explicada considerando, a su vez, la diversidad de los "sistemas de conocimientos iniciales" que sirven de base para la justificación. Todo ello muestra la riqueza de utilizar como herramienta explicativa nuestra caracterización de la convención matemática.

5.3.4.1. A través del MMR y la noción de negatividad

Se encontró, en los cuestionarios 1 y 2 cuando fueron resueltos individualmente, algunas maneras de justificar la regla de transformación $a^{-n}=1/a^{n}$ que parecen, a primer vista, sólo una manera de recordar las reglas de transformación. Sin embargo; una segunda mirada permite concluir que estas justificaciones son el resultado de una búsqueda de coherencia entre la regla de transformación (cuya validez no es cuestionada), la noción de "negatividad" en tanto que el signo menos que remite a procesos inversos y el modelo de multiplicación reiterada. Cabe señalar que algo semejante se encontró en algunos libros de texto, los cuales se refirió en el capítulo anterior. En los tres ejemplos que presentamos a continuación se notará como la búsqueda de coherencia referida es resuelta.

Tomado del Cuestionario 1 (Ver Anexo 1), cuando fue resuelto de manera individual (Alumno AO).

Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{-3}=$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8}$	Cuando el exponente es negativo, primero lo convertimos a positivo pero el coeficiente se vuelve a su reciproco, y se resuelve la operación.
$2^{-4}=$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{1}{16}$	2^{-4} primero el exponente lo convertimos a positivo y el 2 se convierte a $\frac{1}{2}$ y se resuelve la operación que es igual a $\frac{1}{16}$.
$2^{-1.5}=$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}=\sqrt{\frac{1}{8}}$	-1.5 que es el exponente lo convertimos a positivo y el 2 se vuelve a $\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}$ y esto da un resultado de $\sqrt{\frac{1}{8}}$.

Tomado del Cuestionario 1 (Ver Anexo 1), cuando fue resuelto de manera individual (Alumna LP).

Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{-3}=$	$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$	$2^{-3}=\frac{1}{2^3}$ se puede representar de esta forma ya que como el exponente es negativo y para obtener el resultado tendríamos lo mismo es como multiplicar $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ ya que el exponentes nos dice cuantas veces debemos multiplicar la base = 1/2.
$2^{-4}=$	$\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$	2^{-4} se puede representar de esta forma $\frac{1}{2^4}$ ya que el exponente es negativo y se hace lo mismo para obtener el resultado multiplicamos las veces que nos diga el exponente la base o sea $\frac{1}{2^4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$.

Tomado de la Sesión de trabajo Equipo 1 (Ver Anexo 2), (Alumno NV (N)).

N Escribe en el pizarrón $2^{-3}=1/2^3=1/8$ N: Aquí nos dice que una propiedad no recuerdo cuál sea… creo que esa ya me la se desde secundaría, nos dice que una expresión… una base elevada a una potencia negativa puede expresarse como un cociente, pero la potencia pasa como el denominador, pero con la potencia pasa con el signo positivo esa ya sería esta (señala $1/2^3$), esa propiedad no recuerdo cuál sea, pero si…

Tomado del Cuestionario 1 (Ver Anexo 1), cuando fue resuelto de manera individual (Alumna FN).

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^{-3}=$ (-2)(-2)(-2)	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	Es falsa porque $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$ $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=0.125$	No se multiplica el signo menos y no se multiplica tres veces. O sí se multiplica pero recíprocamente.

$2^{-4} = -16$	"ya que 2^4 = 16 y se le pone un signo"	Es falsa porque $2^{-4}=\frac{1}{2^4}$ $\frac{1}{2^4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}=0.062$	No, es 2^{-4} = 16 si fuera 2^4 sí es igual a 16 pero el exponente es -4 y es su reciproco.

5.3.4.2. A través de las leyes de los exponentes convencionales

En el capítulo anterior detallamos como los argumentos en los libros de texto descansan en las leyes de los exponentes: 1) $A^nA^m=A^{n+m}$, 2) $A^n/A^m=A^{n-m}$ y 3) $(A^n)^m=A^{nm}$. Es significativo encontrar, en las justificaciones que dan los estudiantes, sólo argumentos basados en 2). Este fenómeno puede ser explicado tomando en cuenta que el cociente A^n/A^m puede ser desarrollada por dos caminos: el de la resta de los exponentes y por simplificación; por lo que es apta para deducir una igualdad. Por ser tales argumentos muy parecido a los de los libros de texto veamos uno basado en 2) pero que no se encuentra en los libros:

Tomado de la Sesión de trabajo con Equipo 2 (Ver Anexo 3). J,H,L y M son las alumnas, P es el profesor.

M: Entonces eso no quiere decir que es… o sea, pon dos al cubo entre dos al cuadrado (L escribe: $\frac{2^3}{2^2}=$) ahora si restas esas potencias, esos exponentes. Sería dos al cubo menos dos (L escribe: $=2^{3-2}$) eso es igual a dos a la uno (L escribe: $=2^1$) y dos a la uno es igual a dos, ahora ¿cuánto sería dos al cubo?, dos al cubo sería ocho entre dos al cuadrado que sería cuatro, ocho entre cuatro es igual a dos (L escribe = $\frac{8}{4}=2$).

[En el pizarrón a quedado la escrito lo siguiente: $\frac{2^3}{2^2}=2^{3-2}=2^1=\frac{8}{4}=2$

M: Entonces, eso quiere decir que una base elevada al exponente uno va a ser la misma base. ¿O no, no sería así? (se dirige a P).
P: Eso…

5.3.4.3. A través de "leyes de exponentes alternativas"

En contraste a lo señalado en la sección anterior tenemos aquellos argumentos que se basan en "leyes de exponentes alternativas". Se usa esta expresión para describir el manejo personal que de éstas hacen los estudiantes; ya que para ellos tienen el papel de leyes y por que no se corresponden con las "leyes de los exponentes" de los libros de texto. Lo anterior puede ser explicado en términos de nuestra aproximación a la circunstancia del aula, en donde describimos la falta de jerarquía de los diferentes tipos exponentes; pero aquí la no-jerarquía se encuentra en aquello que es entendido como ley. A continuación presentamos tres ejemplos que ilustran lo anterior.

Tomado de la Sesión de trabajo con Equipo 2 (Ver Anexo 3). J,H,L y M son las alumnas, P es el profesor

J: ¿Explicar sobre qué?
P: Sobre dos a la menos tres.
J: Sobre dos a la menos tres (escribe: 2^{-3})... ¿Explicar por qué es igual a eso?
P: Aja.
J: Pues aquí no encontramos ninguna justificación, así muy...
H: Muy clara.
L: Muy buena ¿no?
P: ¿Y lo que ahorita dijo M?
J: ¡Ah! ¿Por eso? Pues eso, en ese caso vendría de esto

[J escribe primero $\frac{2^6}{2^3}=2^{-3}$, después de una observación de P rescribe $\frac{2^3}{2^6}=2^{3-6}=2^{-3}$]

P: ¿Y eso por qué es uno entre dos a la tres?
M: mmm
P: Es lo que hacia falta ¿no?
M: Sí.

[M verbaliza la regla de transformación $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$]
P: ¿Ahí en particular cómo queda?
M: ¿No me entendiste? (Se dirige a J)
J: No mucho.

Tomado de la Sesión de trabajo con Equipo 2 (Ver Anexo 3). J,H,L y M son las alumnas, P es el profesor.

[En el pizarrón siempre ha estado escrita la expresión $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$]

J: O sea, se pide justificar que esto (señala la parte izquierda de la igualdad $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$) sea igual a esto (señala la parte derecha de la igualdad $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$) ¿no? ¿no se puede justificar que, o sea partiendo de aquí (señala la parte derecha de la igualdad $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$) que esto (señala la parte derecha de la igualdad $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$) sea igual a esto (señala la parte derecha de la igualdad $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$).
P: A ver.
J: Por ejemplo, si queremos sacar raíz a, raíz cuadrada a cuatro, por ejemplo, esto lo podemos ver como dos al cuadrado ¿no? Entonces eso sería igual, para sacarle raíz a esto se divide el, el, el exponente de la base entre el ¿el índice?
H: El índice.
J: Entonces sería,
M: Dos entre dos.
J: La base entre exponente entre… (murmura para si misma) y la raíz cuadrada de cuatro es dos. ¿Sí?

[J escribe ha escrito en el pizarrón $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2^{2/2} = 2^1 = 2$]

P: Aja.
J: Y esto sería, esto sería igual a esto (no fue posible determinar a que se refería, pero lo que sigue aclara el proceso de J). Y en ese caso, en ese caso sería ocho, se puede ver como… (J escribe $\sqrt{8} = \sqrt{2}$)
H: Dos a la cuatro.
M: Dos al cuadrado ¿verdad?
J: Sería lo mismo (y continua escribiendo $\sqrt{8} = \sqrt[2]{2^3} = 2^{3/2}$). Es que aquí (señala el $2^{2/2}$ de la expresión $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2^{2/2} = 2^1 = 2$) sí se pudo dividir porque, este, el dos, el exponente de la base si es divisible entre el índice

de la raíz, pero en ese caso (señala el $\sqrt[2]{2^3}$ de la expresión $\sqrt{8}=\sqrt[2]{2^3}=2^{3/2}$) no es divisible entonces nada más queda indicado.
P: ¿Por qué al sacar raíz cuadrada divide entre dos?
J: ¿Por qué se divide entre dos?
P: El exponente.
J: Pues es una regla. Ja.

Tomado de la Sesión de Trabajo con el Equipo 1 (Ver Anexo 2), (Alumnos FM (F), IO (I) y profesor (P)).

F: Consideramos a ene como un número natural positivo entonces esto no puede ser negativo (señala el exponente de la parte izquierda de la expresión $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$) y lo convertimos a esto (señala la parte derecha de la expresión $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$)... sobre ene. Entonces podemos hacer esto. Supongamos, tenemos *a* entre *b* menos esto (escribe $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$), entonces para volverlo positivo sería *b* sobre *a* a la tres (escribe $\left(\frac{b}{a}\right)^{3}$ para completar la expresión $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{3}$). Entonces aplicamos esto (señala la expresión $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{3}$) aquí mismo a tres (señala la expresión $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$), esto (señala la expresión $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{3}$) esto que sería ¿se podría poner así? (escribe un uno en el denominador de la expresión $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$ para que quede como $\frac{2^{-3}}{1}=\frac{1}{2^3}$) es lo mismo.
P: Aja.
F: Entonces al ponerlo así (borra la parte derecha de la expresión $\frac{2^{-3}}{1}=\frac{1}{2^3}$ para que quede $\frac{2^{-3}}{1}=$), para convertirlo a positivo si consideramos al exponente como un número natural positivo (señala el exponente de la parte izquierda de la expresión $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$) entonces podríamos hacer el cambio dos (escribe $\frac{1}{2^3}$ para que la expresión quede como $\frac{2^{-3}}{1}=\frac{1}{2^3}$).

Aplicando esto (señala la expresión $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{3}$). Sería una propiedad de la exponenciación.

5.3.5. Manejo de las reglas de transformación falsas

Fueros dos caminos distintos los que tomaron los Equipos 1 y 2 en el manejo de las reglas de transformación falsas durante la Sesión de Trabajo. El equipo 2 procedió a justificar las reglas de transformación como ya se ha detallado antes, mientras el Equipo 1 sólo pudo justificar el exponente cero (a través de la división de potencias iguales) y al momento de cuestionársele ¿Por qué no usar la igualdad $2^0=2$ que los estudiantes de secundaria y bachillerato usan? no recurrió a tal justificación sino procedió a trabajar por hipótesis de la siguiente manera:

Tomado de la Sesión de Trabajo con el Equipo 1 (Ver Anexo 2), (Alumnos FM (F), IO (I), NV(N) y profesor (P)).

I: Aquí ya quedaría… supongamos que si aceptamos y luego ponemos cero (modifica la expresión anterior para que quede como: $2^3{\cdot}2^2{\cdot}2^0=$) cuando tenemos una multiplicación los exponentes se suman ¿no?
N: Sí, de iguales bases.
N: De iguales bases. Ahí quedaría a, quedaría esto así: tres más dos
F: A la cinco.
N: Más cero.
I: Más cero. Y quedaría dos a la cinco (escribe $2^{3+2+0}=2^5$ y la expresión queda como $2^3{\cdot}2^2{\cdot}2^0=2^{3+2+0}=2^5$) y es falso.
F: Y entonces eso no sería
P: ¿Es falso?
N: Es falso.
F: Ya desarrollándolo ya no sería igual.
N: Desarrollándolo.
P: A ver desarróllenlo.
F: Desarrollalo. Tres por sería dieciséis, no digo ocho, por cuatro por uno.
I: (escribe debajo de $2^3{\cdot}2^2{\cdot}2^0$ la expresión $8{\cdot}4{\cdot}$) No, el dos.
N: Dos a la cero. Bueno tomando en cuenta que…
I: Esto (señala la expresión $2^0=2$) por dos (escribe el 2 para tener la expresión $8{\cdot}4{\cdot}2$)

F: No, pero ahí los vas a tomar correctamente.
I: Si (borra el dos que había puesto en la expresión 8·4·2).
F: Aquí ya lo estás tomando incorrectamente, aquí en esto (señala 2^{3+2+0}), lo estás tomando como esto ¿no? (señala la expresión $2^0=2$).
I: Si pues lo estoy tomando como eso (señala la expresión $2^0=2$).
P: ¡Ah! Es que primero puso uno y luego un cero, yo creo que eso… primero un cero y luego un dos.
I: Aquí debe ser verdadero, no perdón es falso
F: Falso
I: Eso es falso, es falso el resultado.
F: Ya desarrollando eso, aquí sería treinta y dos sería igual a (escribe debajo de 8·4· la expresión 32=)

[Una confusión de F para calcular el valor de dos a la cinco]

I: Esto va a ser igual a treinta y dos (rescribe la expresión 8·4·1 y la iguala a 32). Esto es tomado de esta manera. Pongo un cuadro (escribe un recuadro alrededor de la expresión anterior: 8·4·1 = 32) y le voy a bajar aquí, esto es igual a esto, dos a la tres por dos a la dos por dos a la cero igual a treinta y dos (escribe la expresión $2^3·2^2·2^0=32$) Donde que va a ser ocho por cuatro (escribe debajo de la expresión anterior 8·4·)
F: Por dos
I: Esto lo sustituimos
F: Dos acá, tomándolo como eso (señala la expresión $2^0=2$).
I: ¡Ah!
F: Sí.
I: ¡Ah! Sí, por dos (escribe el 2 para tener la expresión 8·4·2).
F: Entonces va ha ser falso.
I: Ocho por cuatro treinta y dos, por dos sesenta y cuatro (escribe =32 para tener la expresión 8·4·2 = 64).
F: Pero esto (señala el 32 de la expresión calculada sumando los exponentes) es diferente de sesenta y cuatro (escribe ≠ 64). Que es por lo tanto incorrecto.
I: Ja ja
F: O sea si lo tomamos como esto (señala la expresión $2^0=2$).
I: O sea…
F: Ya implica errores, haciendo en una ecuación ya substituyendo esto (señala la expresión $2^0=2$) ya es un error, pero si lo sustituimos como igual a uno (escribe la expresión $2^0=1$) ya te da la igualdad, que sería esto treinta y dos.
N: Conociendo que dos a la cero es igual a uno.
F: Igual a treinta y dos, si lo tomamos así. Entonces el error va a ser este (señala el 2^0 de la expresión $2^3·2^2·2^0$) si lo tomamos como este (señala la expresión $2^0=2$).

5.4. Nuevos matices para la caracterización

El funcionamiento del mecanismo en el diseño experimental muestra la importancia de lo que hemos llamado sistema inicial de conocimientos relacionados con los exponentes.

Como se ha visto en este capitulo el sistema de conocimientos basado en "leyes de los exponentes" permiten demostrar legítimamente las reglas de transformación para los exponentes de la manera que encontramos en el texto de Kalnin (1978) o Baldor (1983). Se explica ésto en los estudiantes pues las leyes de los exponentes son incuestionadas (ni tendrían por que ser cuestionadas en este contexto). Además hay que recordar las leyes de los exponentes "alternativas" que sirvieron para los mismos objetivos. Además la ausencia de justificaciones para las reglas de transformación para los exponentes fraccionarios marca su potencialidad para diseñar estudios exploratorios, con estudiantes algebrizados o profesores, sobre el mecanismo de convención matemática tomando como eje rector ese tipo de exponentes (en ese camino se ha diseñado un estudio exploratorio que incluimos en el Anexo 4 basado en las ideas de Wallis).

Por otro lado es significativo retomar las justificaciones que algunos estudiantes dieron cuando contestaron el Cuestionario 1 (ahí no habían consultado libros), pues son justificaciones solidarias con un sistema de conocimientos constituido por en el Modelo de Multiplicación Reiterada y la noción de "negatividad" como recíproco. Para otros estudiantes la observación de patrones es la adecuada para justificar las reglas de transformación.

En los casos aquí estudiados en la Sesión de Trabajo es significativo recordar como fueron tratadas por los dos equipos las "reglas de transformación falsas". El primero se centro en la multiplicación de potencias y no uso su "demostración" del exponente cero (que fue su única demostración) y el segundo se baso en sus demostraciones. La discusión más interesante, en términos de nuestra hipótesis sobre el manejo de la contradicción, se suscito precisamente por ello en el primer equipo; pues carecían de algo que funcionara para asegurar que 2^{-3} no era ocho.

Todo lo anterior muestra la problemática de hacer un estudio exploratorio con estudiantes poco algebrizados, pues ellos manejarían otros sistemas de conocimientos como base.

CONCLUSIONES GENERALES

La investigación logró caracterizar un mecanismo que construye los significados para los exponentes no naturales. Las evidencias nos muestran las características del status de estos conocimientos matemático. A tal status le hemos llamado “convención matemática” y difiere de otros conceptos por ser el resultado de una búsqueda de la coherencia matemática; es decir relativo a la organización teórica de las matemáticas. Tal circunstancia explica la diversidad de fenómenos didácticos que hemos encontrado a su alrededor, que a su vez pueden ser explicados a través del status referido (Martínez, 2002; Capitulo IV Sección 4.7 de esta tesis). Al respecto es importante señalar que la contribución esencial de esta investigación a la Matemática Educativa consiste en poner en evidencia es status metamatemático de los significados asociados a los exponentes no negativos. Citemos, por ejemplo, los diferente niveles de nociones que Chevallard establece en su Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1997) y los argumentos, presentes en los libros de texto, para establecer la igualdad $2^0=1$. De acuerdo a nuestra aproximación al aula (Capítulo V) tales argumentos no son objeto de estudio por lo que no son nociones matemáticas, tampoco son reconocidos y designados por lo que tampoco son nociones paramatemáticas y además nunca son utilizados en la práctica de ninguna de las tareas algebraicas por lo que no son nociones protomatemáticas.

En el plano sociogenético el interés fundamental fue la de mostrar que cada una de las formulaciones encontradas a lo largo del devenir histórico pueden ser descritas y explicadas a través de un mecanismo constructivo común: la *convención matemática*. Para ello se presentaron los detalles del análisis que permite proporcionar una caracterización del mecanismo desde la sociogénesis; que da cuenta de la complejidad de las interacciones existentes entre diversos sistemas de nociones y conceptos matemáticos que en cierto momento son considerados independientes. El esfuerzo por unificar estos sistemas, con base a principios metamatemáticos o para evitar contradicciones entre ellos, es lo que determina el funcionamiento del mecanismo y consecuentemente posibilita la construcción de conocimiento. En términos funcionales la realización del mecanismo son propiedades emergentes (es decir, que no estaban presentes en los sistemas iniciales), bajo la forma de axiomas, definiciones, restricciones, entre otras. Citemos como ejemplos, que resaltan los elementos fundamentales utilizados para la caracterización del mecanismo desde este plano, a las formulaciones hechas por Wallis y Newton en el marco del cálculo de cuadraturas de las curvas algebraicas. En ellas se puede notar la integración sistémica de dos formas de la noción de *negatividad* con dos conceptos diferentes de operatividad algebraica y aritmética con el objetivo de utilizar una única fórmula para el cálculo de cuadraturas. En el caso de Wallis la integración de la noción de negatividad "no tener" y el concepto de proporción da como resultado una aritmética de infinitos y en cuanto a Newton (cuya noción de negatividad es "estar del otro lado") da como resultado una interpretación geométrica del signo negativo que surge con la operación formal de los números negativos.

La caracterización anterior fue enriquecida con un estudio sobre la manera en que es comunicado el conocimiento; el cual mostró, con más nitidez, que la búsqueda de integración, que es una búsqueda de relaciones, puede tener dos salidas: 1) La *ruptura* (que en la escuela es causa de dislexias escolares) ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Por ejemplo, en tal contexto la posición didáctica del profesor, que extiende el Modelo de Multiplicación Reiterada a los números negativos, podría ser explicada como un recurso mnemotécnico que no contiene ningún verdadero significado y no, como muestra el análisis, ser explicada como una alternativa para evitar rupturas con el significado contextual de los números negativos.

Además, el estudio con estudiantes de licenciatura mostró la complejidad de las bases del razonamiento para buscar “justificaciones” de las reglas de transformación; complejidad que puede ser descrita a su vez por las características particulares de lo que hemos llamado sistema inicial de conocimientos y del tipo de operaciones que se pueden hacer con sus partes.

En resumen, la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como las propiedades emergentes (que podemos llamar convenciones matemáticas) para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados; por lo que depende sustancialmente del contexto epistemológico de la construcción de significados: en la construcción primera (en la sociogénesis que se estudió en el Capítulo III) o en la constitución de una teoría deductiva, en la escuela o en los libros de texto (en la comunicación que se estudió en el Capítulo IV) o en el conocimiento personal de los alumnos (que se estudió en el Capítulo V) y profesores.

De la caracterización misma se desprende la utilidad potencial de la noción de convención matemática para explicar, describir y eventualmente predecir la construcción de conocimiento matemático relacionado con nociones y conceptos unificadores del contenido.

RECOMENDACIONES Y SUGERENCIAS PARA TRABAJO FUTURO

La investigación realizada en este trabajo es sólo la primera que atiende al mecanismo particular que permite construir conocimiento matemático relacionado con la unificación del contenido matemático. Los resultados son valiosos pero es necesario profundizar en varios planos.

En primer lugar investigaciones futuras podrían profundizar en la complejidad de la construcción de los significados en los exponentes no naturales con personas poco algebrizadas (al contrario de los estudiantes con que se hizo el estudio exploratorio) y que tengan recursos lógico-matemáticos (demostración, trabajo bajo hipótesis, reducción al absurdo, entre otros) más escasos. En tales circunstancias, por ejemplo, el sistema de conocimientos que hemos llamado inicial será de una naturaleza distinta y por tanto el mecanismo tendría un funcionamiento distinto. En el Anexo 4 son presentados algunos diseños experimentales que podrían servir de punto de partida para estas investigaciones.

En segundo lugar es necesario entender el funcionamiento del mecanismo en relación a otros contenidos matemáticos que compartan el particular status de ser convenciones matemáticas. Es por ello que investigaciones futuras podrían atender a conocimientos cuya naturaleza y significado sean análogos a la de los exponentes no naturales. La determinación de que conocimientos tienen tal status abre una línea de investigación emergente que puede utilizar la caracterización del mecanismo aquí presentada como punto de partida para su desarrollo. Al respecto hay que señalar que una fuente de tales conocimientos puede ser encontrados en los axiomas de algunas de las teorías matemáticas organizadas deductivamente; en donde la búsqueda podría ser enfocada a la pregunta

¿Cómo construyen las personas los axiomas? Al respecto se podría enfocar la atención en la constitución de: la regla de los signos, el factorial de cero, las raíces múltiples y su relación con el teorema fundamental del Álgebra, la operatividad de los números complejos, la unificación de la recta real (unificación de números positivos y negativos), entre otras. Agregado a lo anterior sostenemos que una fuente alternativa, también rica para esta perspectiva de la construcción del conocimiento, podría ser encontrada si atendemos a preguntas del tipo ¿Cuál es la naturaleza de las prácticas al seno de las cuales las personas dan coherencia y unidad a los conocimientos (coherencia potencialmente alternativa a la de corte estrictamente lógico-matemático)? ¿Se da tal proceso sólo en la teorización o vive al seno de otras prácticas (matematización de la naturaleza por ejemplo)?

Lo anterior levaría a reformular la pregunta básica, ¿qué es lo que permite construir conocimiento?, pues adquiere un marco de referencia específico y la respuesta apunta hacia la caracterización de *escenarios* centrados en *prácticas sociales*, que puede ser fomentada en la escuela, de integración sistémica de conocimientos matemáticos; en donde la convención matemática sería un consecuencia particular de tal práctica. Entonces, la conformación de tal escenario representa la posibilidad teórica de ser la que posibilite la construcción de otros conocimientos que adquieren su sentido en y para una organización sistémica de conjuntos de conocimientos.

BIBLIOGRAFÍA

Alanís, J. A. (1996). *La predicción: Un hilo conductor para el resideño del discurso escolar del cálculo.* Tesis de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Albert, A. y Farfán, R. (1997). *Resolución gráfica de desigualdades*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Andrés, C., Castellanos, S., Mingüer, L.M., & Rubio, E. (1998). *Estudio didáctico de la función 2^x.* Tesina de Especialidad, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.

Anfossi, A. & Meyer, F. (1985). *Curso de álgebra*. México: Editorial Progreso.

Baldor, A. (1983). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.

Bertalanffy, L. Von. (1991). Teoría general de los sistemas.(Primera edición en inglés de 1968). México: Fondo de Cultura Económica.

Bertrand, J. (1851). *Traité élémentaire d'algèbre* (Tome 1). Paris : Hachette.

Brosseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. En E. Sánchez y G. Zubieta (Comps.) *Lecturas en didáctica de las matemáticas* (pp. 1-67). DME Cinvestav-IPN, México. Original en *Recherches en Didactique des Mathématiques.* (1986) 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra y I. Sainz (Comps.), *Didáctica de las matemáticas: Aportes y reflexiones* (Cap. IV pp. 65-94). Argentina: Paidós Educador.

Bos, H.J.M. (1975). Differentials, Higher-Order Differentials and the derivative in the Leibnizian Calculus. *Arch. Hist. Exact. Sci.* 14, 1-90.

Boyer, C. B. (1968). *A history of mathematics*. EEUU: John Wiley & Sons, Inc.

Bourdon, M. (1848). *Élements d'Algèbre*. Bruselas: G. Stapleaux.

Bruño, G. M. (1968). *Elementos de Álgebra*. México: Editorial Enseñanza.

Cantoral, R. (1990).*Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*. Tesis de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"*. 42, 353-369.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2002b). La sensibilité à la contradiction: Une étude sur la notion de logarithmes à nombres négatifs et l'origine de la variable complexe. Aceptado para su publicación en *Recherches en Didactique des Mathématiques.*

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2003) .*Matemática Educativa: Una visión de su evolución. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6*(1), 27-40.

Cajori, F. (1928). *A history of mathematics notations*. EEUU: The Open Court Publishing Company.

Castañeda, A. (2000). *Estudio didáctico del punto de inflexión; una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Castañeda, A. (2002). Estudio didáctico del punto de inflexión; una aproximación socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(1), 27-44.

Cauchy, A-L. (1994). *Curso de análisis.* México: Colección Mathema-UNAM. Traducción de Carlos Alvarez de diversos originales de Cauchy publicados entre 1821 y 1823.

Chevallard, Y., (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Editorial Aique.

Chevallard, Y., Bosch & M., Gascón J. (1997). *Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Serie Cuadernos de Educación No. 22. España: Editorial ICE-HORSORI.

Conalep-Sep. (1988). *Curso propedéutico. Física y Matemáticas* (Vol. II). México: Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica.

Confrey, J. & Dennis, D. (2000). La Creación de Exponentes Continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(1), 5-31.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education 26*(1) 66-86.

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics 26*, 135-164.

Confrey, J. (1991). The concept of exponential functions: A student's perspective. En L.P. Steffe (Ed.) *Foundations of mathematical experience* (pp. 124-154). EEUU: Springer Verlag.

Contreras, M. M. (1880). *Tratado de Álgebra Elemental.* México: Imprenta de J. F. Jens.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados. Un estudio del discurso matemático escolar.* Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Dubinsky, E. (1992) The nature of the process of conception of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.) *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). EEUU: MAA, Notes 25.

Euler, L. (1845). *Introduction a l'analyse infinitésimale.*París, Francia: L'Ecole Polytechnique (Trabajo original publicado en 1738).

Euler, L. (1984). *Elements of Algebra.* (Vollständige Anleitung zur Algebra Trad. de (1770) por John Hewlett). EEUU: Springer-Verlag.

Farfán, R. (1991). El curso de precálculo un enfoque gráfico. *Publicaciones Latinoamericanas en Matemática Educativa 5*(1), 206-211.

Farfán, R. (1997a). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. (1997b). Perspectivas y métodos de investigación en Matemática Educativa. *Serie de Antologías No. 2. Área de Nivel Superior* (pp. 55-119). México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Farfán, R.M. (2000). Lenguaje Algebraico y pensamiento funcional. Un estudio de las funciones pretextando la resolución de desigualdades (Cap. 7, pp. 89-145). En R. Cantoral, F. Cordero, R. Farfán, et al. (2000) *Desarrollo de Pensamiento Matemático*. ITESM- Universidad Virtual. México: Editorial Trillas.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques 18*(1), 7- 34.

Gascón, J. (2001).Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 4(2), 129-160.

Gallardo, A. (1993). La operatividad temprana del número negativo y el surgimiento de las soluciones negativas en la historia. En T. Rojano & L. Puig

(Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.*(pp. 97-116). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres rélatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques 2*(3), 303-346.

Harel, G. & Dubinsky, E. (1992). *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy*. EEUU: MAA, Notes 25.

Johsua, S. (1996). Qu'est-ce qu'un <<Résultat>> en didactique des mathématiques? *Recrerches en Didactique des Mathématiques 16*(2),197-220.

Katz, V. J. (1987). The calculus of the trigonometric functions. *Historia Mathematica 14*, 311-324.

Kalnin R. A. (1978). *Álgebra y funciones elementales*. Traducción del ruso por Akop Grdian. Ex-URSS: Editorial Mir.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. EEUU, New York: Oxford University Press.

Leibniz, I. (1669). Leibniz 'Excerpta' from Newton´s 'De Analysi per equationes infinitas (october 1676). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.) *The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. II (1667-1700)* (pp. 248-259). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Leibniz, I. (1971). De L´Hospital an Leibniz. En C.I. Gerhart (Comp.) Leibniz Mathematishce Shriften (Vol. II, pp. 269-280). Alemania, Hildesheim: Georg Olms Verlag.

Leithold, L. (1989). *Matemáticas previas al Cálculo (Análisis funcional y geometría analítica)*. México: Harla.

Lefébure de Fourcy, L. E.(1845). *Leçons d'algèbre*. Paris : Bachelier.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproduciblidad: El caso de la función exponencial,* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México.

Lezama, J. y Farfán, R.M. (1998). Introducción al estudio de la reproduciblidad. *Serie de Antologías No. 3. Área de Nivel Superior* (pp. 129-152). México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

L'Hospital, Marqués de (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. México: Colección Mathema-UNAM. Traducción de Rodrigo Cambray del original *Analyse des infiniment petis pour l'intelligence des lignes curbes* (1696).

Mayer, M. & Choquet, C. (1836). *Traité élémentaire d'algèbre*. Paris : Bachelier.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(1) 45-78.

Mahoney, M. S. (1973). *The mathematical carrer of Pierre Fermat 1601-1665.*

Meavilla, V. (1993). Una aproximación al “Libro primero de arithmetica algebratica” de Marco Aurel. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.* (pp. 65-95). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Newton, I. (1665a). Annotations from Wallis (autumm 1665). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.) *The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. I (1664-1666)* (pp. 89-134). Gran Bretaña: Cambridge Univesity Press.

Newton, I. (1665b). The calculus becomes an algorithm. D.T. Whiteside (1967) (Ed.) *The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. I (1664-1666)* (pp. 298-368). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Newton, I. (1669). De Analysi per equationes infinitas (june 1669). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.), *The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. II (1667-1700)* (pp. 206-247). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Newton, I. (1953). Philosophie naturalis principia Mathematica. En *Great Books of the Western World (No. 34): Newton and Huygen*s. EEUU: The university of Chicago and Encyclopaedia Britannica, Inc.

Pacheco, E., López, A. & Razo, J. L.(1998). *Puesta en escena de la secuencia didáctica 2^x*. Tesina de Especialidad, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Paradís, J. (1993). La triparty en la Science des Nombres de Nicolas Cehuquet. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.* (pp. 31-63). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Piaget, J. & Garcia, R. (1991). *Psicogénesis e historia de la ciencia*: México: Siglo XXI.

Philips, (1985). *Álgebra*. México: UTEHA.

Pulido, R. (1997). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar*. Tesis de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Quiroz, M. (1989). *Instalación de un lenguaje gráfico en estudiantes que inician estudios universitarios. Un enfoque alternativo para la reconstrucción del discurso matemático escolar del precálculo*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Rey, J. & Puig, P. (1934). *Álgebra y trigonometría*. España: Gráfica Literaria.

Robert, A. & Robinet, J. (1996). Prise en compte du meta en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 16(2), 145-176.

Rojano, T. & Sutherland, R. (1993). La sintaxis algebraica en el proyecto Vietico. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.* (pp. 117-130). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Rees, P. K., Sparks, F. W. & Sparks Rees C.(1982). *Álgebra contemporánea*. México: McGraw-Hill.

Rey, J. & Puig, P. (1934). *Álgebra y trigonometría*. Madrid: Gráfica Literaria.

Scott, J. F. (1969). *A history of mathematics*. Gran Bretaña: Taylor & Francis LTD.

Scott, J. F. (1981). *The mathematical work of John Wallis*. EEUU: Chelsea Publishing Company.

Sfard, A. (1992) Operational origins oh mathamatical objects an the quandary of reification. The case of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy* (pp. 59-84). EEUU: MAA, Notes 25.

Sierpinska, A. (1992) On the understanding the notion of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.) *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-58). EEUU: MAA, Notes 25.

Smith , D. E. (1959). *A source book in mathematics*. EEUU: Dover Publications, Inc.

Soto, P.E. (1988). *Una experiencia de redescubrimiento en el aula: acerca de los logaritmos de números negativos y los orígenes de la variable compleja.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav – IPN, México.

Stein, S. K.(1988). *Cálculo y geometría analítica.* México: McGraw-Hill.

Struik, D. J. (1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. EEUU: Princeton University Press.

Trujillo, R. (1995). *Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des Champs conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques 10*(2-3), 133-170.

Wentworth, J & Smith, D. E.(1985). *Elementos de álgebra*. México: Editorial Porrúa.

Youschkevitech, A. P.(1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Arch. Hist. Exact. Sci.* 16, 37-85.

ANEXO 1

Estudio exploratorio con estudiantes de licenciatura: Respuestas a los Cuestionarios 1 y 2

AC		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1\,.\,5} =$		
$2^0 =$	1	Por conveniencia matemática $Q^0=1$
$2^1 =$	2	$2^1=2=2\cdot 1$; porque todo número de la forma $(n\cdot 1)=n$; porque 1 es neutro multiplicativo.
$2^{-3}=$	$\frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{8} = 0.125$	Por que el 2 es multiplicado por el mismo 3 veces.
$2^{-4} =$	$\frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{8} = 0.0625$	Por que el 2 es multiplicado por el mismo 4 veces.
$2^{-1\,.\,5} =$		

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	Falso; ya te todo número elevado a cero es la unidad por conveniencia matemática.	El dio ese resultado porque cero es el neutro multiplicativo y pensó que $2\cdot 0=0$
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	Falso	Como $2^0=1$ entonces el alumno pensó que $2^0 = 2$ porque el 2 no se multiplica por nada.
$2^1 = 2*2=4$	"ya que multiplicamos una vez el 2"	Falso; ya que $2^1=2=2\cdot 1$; se $a, b \in \boldsymbol{N}$ con $b=1 \Rightarrow ab=1$; 1 es neutro multiplicativo	El pensó que la base se multi
$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el	Falso.	

	signo menos”	$\frac{1}{2^{-3}}=\frac{1}{8}$ ya que el 2 es multiplicado por el mismo 3 veces.	
$2^{-4}=-16$	“ya que $2^4=16$ y se le pone un signo”	Falso. $\frac{1}{2^{-4}}=\frac{1}{16}$ ya que el 2 es multiplicado por el mismo 4 veces.	
$2^0=2$	“como no hay nada de exponente se queda igual”	Falso. Por la misma razón que la primera $p^0=1$.	

AJ		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1.5}=$		Casi por lo regular, nunca había trabajado con exponentes decimales, y bueno el 2 es multiplicado 1.5 veces
$2^0=$	1	2 elevado a la cero potencia es igual a la unidad, esto por un acuerdo internacional de matemáticas. En otras palabras indica que la base se repite 0 veces, o se multiplica 0 veces; por lo tanto lo vuelvo a repetir esto fue una convención: $P^o = 1$
$2^1=$	2	2 elevado a la uno, en otras palabras quiere decir que el 2 es multiplicado una vez
$2^{-3}=$	$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$	$2^{-3}=\frac{1}{2^3}$, esto por la propiedad $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, y bueno esta propiedad tiene su origen en la sucesión de potencias por ejemplo, la que está al revés de la esta lado
$2^{-4}=$	$\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$	Como ya se explico la propiedad, basta decir $\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$, esto por defin. De potencia y la propiedad antes citada $\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}=\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}=2^{-4}$
$2^{-1.5}=$	$\frac{1}{2^{1.5}}=$	Aquí pues es sinceramente igual; nada mas que la base 2 se repite1.5 veces. He aquí mi pregunta ¿por qué nos enseñaron con números enteros? Porque como se ve, por definición de potencia: P^q, quiere decir que P es la base,

		y es le numero al que se quiere elevar dicha potencia, y q es el exponente, éste va escrito a la derecha en la parte superior; e indica cuantas veces se repita o se multiplica por si mismo la base
Comentarios: •		

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	La respuesta es falsa, ya que fue por un convenio de que todo numero elevado al exponente "0" sería la unidad.	Siento YO, que el estudiante que contestó primero tiene razón, y la tiene porque el se fue por la definición de potencia y es por eso que contestó así. Yo habría hecho lo mismo pero después me habría dado cuenta de que $2^o = 1$, esto por una convención; y como todas las convenciones deben de respetarse. Otro problema que enfrenta el alumno es el de exponente negativo, lo cual también se toma de la convención. Por lo tanto espero que con la explicación que doy al reverso de la hoja sea suficiente para dejar en claro que todo numero elevado a la 0 es igual a la unidad. En la secundaria es muy difícil comprender estas cosas, yo lo hice hasta la educación superior. En la secundaria como en bachilleres se usa la mecanización de potencias, pero no nos dicen del porque de las cosas. Característica del plan tradicional
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	Falso	lo que el estudiante expone en la parte trasera de la hoja se encuentra al final de la tabla
$2^1 = 2*2 = 4$	"ya que multiplicamos una vez el 2"	Falso	
$2^{-3} = (-2)(-2)(-2)$	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	Falso	
$2^{-4} = -16$	"ya que $2^4 = 16$ y se le pone un signo"	Falso	
$2^0 = 2$	"como no hay nada de exponente se	Falso	

	queda igual”		

Como se puede observar lleva un orden; por ejemplo $2^1 = 2$, $2^2= 4$, $2^3=8$, y así sucesivamente. Primero $2^1=2$, luego $2^2=4$ y $2^3=8$, de estas tres potencias se puede decir que lleva un algoritmo, es decir, la primera potencia des 2, ahora $2^2=4$, entonces su $2^1=2$, de esta expresión se puede llagar a que la potencia de $2^2= 2^1 * 2^2= 4$, de esta manera se sigue para $2^4 = 2^2 * 2^2$ 0 $4 * 4 = 16$

$2^1,2^2,2^3,2^4,2^n$; se dice que la potencia de $2^1 = 2$, si este resultado lo multiplico por 2 y meda 4, que será la potencia de e2^2, si 4 lo multiplico por 2, me da 8 y es la potencia de 2^3, 8 lo multiplico por 2 (base) me da 16 que será la potencia de 2^4 y así sucesivamente

ahora bien, si 2º = 1, la potencia de 2º es 1, si esta la multiplico por 2, me da 2, este 2 es la potencia de 2^1 y así sucesivamente

en otro caso si 2º= 0 la potencia de 2º es 0, si esta la multiplico por 2, me da 0, y este resultado no es la potencia de 2^1

por lo tanto de aquí que $2^0 = 1$, es una convención que se toma para que así se siga cumpliendo el desarrollo de la potencia

por ejemplo

$2^{-1} * 2^1= \left(\frac{1}{2}\right)(2) = \frac{2}{2} = 1$ de aquí que 2º = 1, otra razón más.

Sucesión de una potencia

$$2^{-3} = \frac{1}{8}$$
$$2^{-2} = \frac{1}{4}$$
$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$
$$2^0 = 1$$
$$2^1 = 2$$
$$2^2 = 4$$
$$2^3 = 8$$
$$2^4 = 16$$
$$2^5 = 32$$

JPC		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1.5} =$	$2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$	Porque 1.5=3/2 entonces 2 $^{1.5}$ es igual 2 $^{3/2}$ pero a su vez $2^{3/2} = \sqrt{2^3}$ y si elevamos $2^3=8$ entonces $2^{1.5} = \sqrt{8}$
$2^0 =$	1	Porque todo numero con exponente cero el resultado siempre es 1
$2^1 =$	2	Porque todo numero elevado al exponente uno, siempre tiene como resultado la misma base

$2^{-3}=$	$2^{1/3} = \frac{1}{8}$	Porque si elevamos por separado $2^{1/3} = 2^{-3}$ (por una propiedad) sería $2^{1} = 1{,}2^{3} = 8$ y es por eso que el resultado es $\frac{1}{8}$
$2^{-4} =$	$2^{1/4} = \frac{1}{16}$	Porque si el elevamos 2^{-4} es igual $\frac{1}{16}$ pero también si se resuelve por otro lado $2^{-4} = 2^{4}$ (por una propiedad) 2^1=1, 2^4= 16 entonces = $\frac{1}{16}$
$2^{-1\,.\,5} =$	$2^{\frac{1}{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$	Porque $2^{-1.5} = 2^{\frac{1}{3/2}}$ pero a su vez $2^{\frac{1}{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2^3}}$ y si elevamos 2^3=8 entonces $2^{-1.5} = \frac{1}{\sqrt{8}}$

Comentarios:

-

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	Falsa. La respuesta correcta 1 porque todo numero con exponente 0 siempre es 1	Ya que el alumno piensa si multiplica a la base por el exponente es igual a cero y es por eso que el alumno a la respuesta 2^o= 0
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	Falsa. La respuesta correcta es 1 porque 2^o=1	Ya que los alumnos piensan que no hay nada con quien multiplicar la base entonces =2
2^1 =2*2= 4	"ya que multiplicamos una vez el 2"	Falsa. Ya que sabemos que todo numero con exponente 1 siempre el resultado es la misma base	Ya que piensan si multiplican una sola vez la respuesta sería 4
2^{-3}=(-2)(-2)(-2)	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	Falsa. Porque 2^{-3} no es –8 la respuesta correcta es $\frac{1}{8}$ por razones anteriores	Ya que piensan si multiplican la base o 2 por 3 veces(2) el resultado es positivo pero con el exponente es negativo = -8
2^{-4} = -16	"ya que 2^4 = 16 y se le pone un signo"	Falsa. Porque 2^{-4} no es –16 la respuesta correcta es $\frac{1}{16}$ por razones anteriores	Ya que piensan como 2^4=16 entonces 2^{-4}= -16 piensan que con un signo se arregla todo.
$2^0 = 2$	"como no hay nada de exponente se queda igual"	Falsa. La respuesta correcta es 1 porque 2^o=1	Piensan como no hay nadie con que se multiplique 2 entonces queda igual

ET		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1\,.\,5} =$	$2^{3/2} = 1.3$	Que un número elevado a un número fraccionario como

		este caso un potencia decimal por un tal teorema.
$2^0 =$	$2^0 = 1$	Que todo número elevado a la cero siempre es uno por un tal teorema, de la exponencia a la cero.
$2^1 =$	$2^1 = 2$	Que todo número elevado a uno es el mismo número por un tal teorema, por la identidad.
$2^{-3}=$	$2^{-3}=0.125$	Que todo número elevado a la exponente negativo, es diminuido la potencia de tal número, por el teorema del exponente negativo.
$2^{-4} =$	$2^{-4} =0.0625$	Un número elevado a una exponente más chico la potencia cada vez, más decrece.
$2^{-1\,.\,5} =$	$2^{-3/2} = \sqrt[-3/2]{2} = 0.005$	El número elevado a un número fraccionario negativo la potencia se hace más menor por el teorema de la convergencia.

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	“ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada”	La respuesta es falsa, porque un número elevado a un exponente a la cero siempre es uno.	Claro que un número elevado a la cero; a simple vista se puede decir que no está multiplicado por nada, es cero; pero gracias existe un teorema, en base a esto.
$2^0 = 2$	“ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2”	La respuesta es falsa, porque un número elevado a la cero es siempre da 1.	Que un número elevado a la exponente a la uno es el mismo número, de tal manera no se puede decir que 2 multiplique a 2.
$2^1 = 2*2= 4$	“ya que multiplicamos una vez el 2”	La respuesta es falsa, porque un número elevado a la uno es el mismo número.	Que un número elevado a la exponente a la uno es el mismo número, de tal manera que no se puede decir que 2 multiplique a 2.
$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$	“ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos”	La respuesta es falsa, porque no se puede multiplicar un número a la exponente que indica y luego anteponer el signo.	No se puede multiplicar un número con exponente negativo y luego anteponer el signo.
$2^{-4} = -16$	“ya que $2^4 = 16$ y se le pone un signo”	La respuesta es falsa, porque un número elevado a la exponente negativo no se puede anteponer el signo.	Un número elevado a un exponente negativo no se le puede anteponer el signo.
$2^0 = 2$	“como no hay nada de exponente se queda igual”	La respuesta es falsa por lo anterior dicho.	Un número elevado a la cero no puede ser el mismo número porque no se esta elevando a nada gracias por un teorema que existe queda la potencia es 1.

AO		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1\,.\,5} =$	$2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$	Porque $\sqrt{8} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 2} = \sqrt{2^3} = 2^{3/2} = 2^{1.5}$. Además 1.5 es

		equivalente a 3/2.
$2^0 =$	1	Porque todo número elevado a la cero potencia siempre es la unidad.
$2^1 =$	2	Porque 2^1 significa que se está multiplicando el propio 2, o sea $2 = 2^1$.
$2^{-3}=$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	Cuando el exponente es negativo, primero lo convertimos a positivo pero el coeficiente se vuelve a su reciproco, y se resuelve la operación.
$2^{-4} =$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$	2^{-4} primero el exponente lo convertimos a positivo y el 2 se convierte a $\frac{1}{2}$ y se resuelve la operación que es igual a $\frac{1}{16}$.
$2^{-1\,.\,5} =$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{1}{8}}$	-1.5 que es el exponente lo convertimos a positivo y el 2 se vuelve a $\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}$ y esto da un resultado de $\sqrt{\frac{1}{8}}$.

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	La respuesta y la justificación del estudiante es falsa. La respuesta correcta es 1 porque toda cantidad elevada a la cero es la unidad.	Pues el estudiante dice que 20=0 porque multiplica 2×0=0 y se les hace fácil de resolver.
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	[ídem]	Pues el estudiante se le facilita contestar, pues dice que el cero no tiene valor para multiplicar, es por eso, que dice la respuesta es 2.
$2^1 =2*2= 4$	"ya que multiplicamos una vez el 2"	La respuesta y la justificación del estudiante es falsa y la respuesta correcta es 2, porque todo número elevado con exponente 1 siempre es el propio número.	EL estudiante, es que otra vez vuelve a multiplicar el 2 y por eso dice 2×2=4.
$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	La respuesta y la justificación del estudiante es falsa y la respuesta correcta es $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, por que el exponente se convierte a positivo y el coeficiente se invierte.	El estudiante como vez el exponente 3 pero con signo negativo, se le hace fácil multiplicar 4 veces el 2 y agregar el signo menos.
$2^{-4} = -16$	"ya que $2^4 = 16$ y se le pone un signo"	La respuesta del estudiante es falsa, y la respuesta correcta es $\frac{1}{16}$, porque el coeficiente	El estudiante se le facilita contestar, porque eleva 2^4, multiplica 4 veces el 2 y se le agrega el signo menos.

		se invierte y se vuelve positivo.	
$2^0 = 2$	"como no hay nada de exponente se queda igual"	La respuesta del estudiante es falsa y la respuesta correcta es 1 porque $2^0=1$.	El estudiante dice que como el cero no tiene valor entonces queda el propio 2.

NV

Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1\,.\,5} =$	$2^{1.5} = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$	
$2^0 =$	2º=1	Existe un teorema el cual nos dice que una base elevada a la cero potencia es igual a la unidad 1
$2^1 =$	$2^1=2$	Toda expresión elevada a la primera potencia es igual a la base
$2^{-3}=$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	Por definición
$2^{-4} =$	$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$	Por definición
$2^{-1\,.\,5} =$	$2^{-1.5} = 2^{-3/2} = \sqrt{2^{-3}} = \sqrt{-8}$	Esta raíz existe como un numero complejo

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	Falsa; porque 2º=1 quizás al estudiante no se le enseña a elevar a potencia cero, solo a potencias positivas x>0	Quizás para el estudiante el está en lo correcto porque no hay potencia por cual multiplicar 2x0=0 quizás por esto piense que es correcto
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	Falso, 2º=1; al estudiante no se enseña todas las justificaciones de una potencia nula	
2^1 =2*2= 4	"ya que multiplicamos una vez el 2"	Falsa $2^1 = 2$ un potencia 1 da como resultado la base	Como en el bachillerato o secundaria solo se enseña que la base es multiplicada tantas veces como la potencia lo indique
2^{-3}=(-2)(-2)(-2)	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	Falso, porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ si descomponemos la potencia como un cociente dado cociente lo expresamos como un cociente el cociente es igual a la otra igualdad original	Como justificación del estudiante el dice que es como 2^3 pero con signo (-) el cual dice que la justificación es igual o análoga
2^{-4} = -16	"ya que 2^4 = 16 y se le pone un signo"	Falso; porque $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ análogamente igual que la anterior	Dado caso el estudiante justifica que por tener una potencia negativa al resultado se le pone el signo de la potencia

$2^0 = 2$	"como no hay nada de exponente se queda igual"	Falso $2^o=1$ existe un teorema el cual dice que $\{\forall x \in Z \exists b \in N : x^b = 1 si b = 0\}$	

FM

Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1.5} =$	$2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$	Casi no me acuerdo
$2^0 =$	1	Por esto Donde m=n $\frac{x^m}{x^n} = 1 \Rightarrow x^{n-m} = 1 \Rightarrow x^0 = 1$ por lo tanto toda cantidad elevada a la cero es igual a cero
$2^1 =$	2	Porque toda cantidad elevada a la unidad es igual a la misma cantidad
$2^{-3}=$	$= \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	Todo numero elevado con un numero negativo disminuye y queda de la forma $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$2^{-4} =$	$= \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$	Este caso es el mismo que anterior ya que esta elevado a una potencia negativa
$2^{-1.5} =$	$2^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$	No me acuerdo (gracias)

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	Pues es falsa la respuesta correcta es 1, por esto $2^0 = 1 \Rightarrow \frac{x^n}{x^m} = 1 \Rightarrow x^{n-m}$ $= 1 \Rightarrow x^0 = 1$ donde n=m	Bueno pienso que se van mas por que cero ya toda cantidad multiplicada por cero da cero por eso se confunden
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	Falsa "bueno por la demostración anterior"	Sabemos todos que el cero es nulo o sea que no representa nada, entonces al ver esta ec. Se hace fácil quitar el cero e igualarla ec. 2=2
$2^1 = 2*2= 4$	"ya que multiplicamos una vez el 2"	Falsa la respuesta correcta es $2^1=2$ bueno para esto existe un teorema como la respuesta uno	Bueno aquí en esta respuesta no me queda muy claro ya que si se por que se tomo es $2^1= 2*2=4$ pero ?
$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	Falsa porque también existe un teorema donde dice que una cantidad elevada con	Bueno, aquí es mas viable porque se van con la potencia negativa de –3 y como la positiva es 3 que sería $(2)^3=$

		exponente negativo queda de la forma $\frac{1}{2^3}$	(2)(2)(2) entonces es por eso de esa respuesta
$2^{-4} = -16$	"ya que 2^4 = 16 y se le pone un signo"	Bueno esto es falso pero es el mismo caso que el anterior	Bueno aquí también como 2^4= (2)(2) (2)(2) entonces le cambian el signo al ultimo. Pero ni así se me justifica esta respuesta
$2^0 = 2$	"como no hay nada de exponente se queda igual"	Falsa, existe un teorema donde se justifica esto(no me acuerdo cual es)	Como el cero no representa nada entonces pues se les hizo fácil que 2^0=2

HO		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1\,.\,5} =$	No $2^{1.5}$=2^5=2*2*2*2*2 =(2*2)*(2*2)*2 =(4*4)*2= 16 *2 = 32 corrijo $2^{1.5} = 2^{1\frac{1}{2}} = 2 = 2^{1/2} =$ $\sqrt{2} \therefore \sqrt{2} = 1.417....$	La justificación convertimos .5 en su forma p/q y efectuamos la operación de los exponentes y como sabemos que todo numero elevado en forma p/q es la cantidad de la raiz del numero o literal
$2^0 =$	2^o=1	Porque desde el bachillerato, me enseñaron y aprendí que todo numero elevado a exponente cero(0) siempre tendremos como resultado la propia unidad
$2^1 =$	2^1=2	Sabemos que el exponente es la cantidad de veces que multiplicaremos, por tanto si <u>2</u> es levado a 1 entonces dos no se multiplica y sólo nos queda la propia literal
2^{-3}=	2^{-3}=0.002	Cuando todo numero o literal esta elevado con exponente negativo esto nos indica que este numero es la cantidad que debemos recorrer hacia la izquierda por tanto si 2-3 entonces recorremos tomando en cuenta el punto decimal y se sustituyen la cantidad por los ceros (0) que sean necesario y se toma en cuenta la literal como un numero mas, como $2^{-3} = 0.\overset{1}{0}\overset{2}{0}\overset{3}{2}$ y la misma justificación para $2 - 4 = 0.\overset{1}{0}\overset{2}{0}\overset{3}{0}\overset{4}{2}$
2^{-4} =	2^{-4}= 0.0002	La misma justificación que la anterior
$2^{-1\,.\,5} =$	$\cancel{2^{-1.5} = 0.2^{1/2} = \sqrt{.2}}$ $2^{1/2} = \frac{2^1}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	El argumento es que se efectúa la operación en su forma p/q con los exponentes para así obtener $2^{-1.5}$ a $2^{1/2}$

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	Falso	Como sabemos todo exponente elevado a cero nos da la propia unidad por tanto 2º=1 El alumno tiene presente que todo número multiplicado por (cero) es cero y pensó que 2 se multiplica por cero y por eso da como resultado cero
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	Falso	Como todos sabemos todo exponente elevado a cero nos da la propia unidad. Por tanto 2º =1 Todo lo contrario: este alumno piensa que 2 no tiene que multiplicarse como cero no vale es por eso que da el resultado 2
$2^1 = 2*2 = 4$	"ya que multiplicamos una vez el 2"	Falso	Si sabemos que el exponente es la cantidad que debemos multiplicar entonces si $2^1=2$ Pensó que el exponente solo se multiplica una sola vez no incluyendo la literal
$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	Falso	Si 2^{-3} entonces tenemos que $2^{-3} = 2^{1/3} = 2^1/2^3 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ se confunden con la regla normal de los exponentes y piensa que es el mismo procedimiento pero ahora con números negativos si un exponente es negativo lo convertimos en fracción y se efectúa elevando la literal o numero o sea obtener de 2^{-3} a $2^{1/3}$ y elevamos a 2(literal) de la forma ya antes expresadas y lo cual el mismo procedimiento pa el 4 y 3
$2^{-4} = -16$	"ya que $2^4 = 16$ y se le pone un signo"	Falso	Si 2^{-4} resolviendo tenemos que $2^{-4} = 2^{1/4} = 2^1/2^4 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ se confunden con la regla normal de los exponentes y piensa que es el mismo procedimiento pero ahora con números negativos si un exponente es negativo lo convertimos en fracción y se efectúa

			elevando la literal o numero o sea obtener de 2^{-3} a $2^{1/3}$ y elevamos a 2(literal) de la forma ya antes expresadas y lo cual el mismo procedimiento pa el 4 y 3
$2^0 = 2$	"como no hay nada de exponente se queda igual"	Falso	El mismo; que el alumno ajercico 2 pensó que no hay que multiplicar como; el exponente es cero. Esta justificación es que todo numero eleva a exponente cero nos da la propia unidad

TJC		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1\,.\,5} =$	$= \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$	Todo numero que se eleva a un exponente con punto decimal se multiplica la base pero con una raiz por el exponente y el resultado se eleva a la base
$2^0 =$	2º=1	Todo numero elevado a un exponente cero es igual a 1 2º=1, 3º= 1, 4º=1,....etc
$2^1 =$	$2^1=2$	Todo numero elevado a un exponente 1 es igual al numero que es la base: $2^1 = 2$, $3^1 = 3$, ...etc
$2^{-3}=$	$2^{-3}=-8$	Todo numero elevado a un exponente negativo y el numero que se esta elevando es impar, el resultado será siempre negativo $2^{-3}=-8$, $2^{-5}= -32$, ...etc
$2^{-4} =$	$2^{-4}=16$	Todo numero o base que se eleva a un exponente negativo par es igual a un numero positivo $2^{-4}=16$, $2^{-6}=64$, ...etc
$2^{-1\,.\,5} =$	$\frac{1}{2^{1.5}} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$	Cualquier base que esta elevado a un exponente con punto decimal negativo, pasa al denominador con signo positivo teniendo el denominador raíz exacta de 8

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	Falsa 2º=1	Tal vez el estudiante piense que como el exponente es cero el resultado es cero, pero hay una ley que nos dice que todo numero elevado a un exponente cero es igual a 1
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	Falso 2º=1	Como dice que dos no se multiplica ninguna vez entonces el resultado es 1 y aquí el lo toma como si fuera $2^1=2$
$2^1 =2*2= 4$	"ya que multiplicamos una vez el 2"	Falso $2^1=2$	La justificación está bien del estudiante pero la respuesta está mal $2^1=2x2=4$ y es $2^1=2$ por lo que se contradice
2^{-3}=(-	"ya que	Falso	Si multiplica, pero no porque le quiera

2)(-2)(-2)	multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	2^{-3} = -8 también podría quedar como $2^{-3} = \frac{1}{8}$	colocar el signo nada más si no se debe aplicar la ley de los signos sabiendo que (-)(-) da (+) y (+)(-) da (-)
2^{-4} = -16	"ya que 2^4 = 16 y se le pone un signo"	Falso 2^{-4}=16	No porque no toma en cuenta que un exponente par con signo negativo el resultado siempre positivo
2^0 = 2	"como no hay nada de exponente se queda igual"	Falso 2^o=1	Como el exponente no se multiplica ninguna vez y aparte es cero queda igual a 1 Y no comprende bien

LAD		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1\,.\,5} =$	$= \sqrt{8}$	$2^{1.5} = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{\frac{2x2x2x2}{2}} = \sqrt{8}$
$2^0 =$	1	Puesto que $2^0 = \frac{2}{2} = 1$
$2^1 =$	2	Puesto que si lo vemos así por ejemplo $2^1 = \frac{2x2}{2} = 2,$ $2^2 = \frac{2x2x2}{2} = 4,$ $2^3 = \frac{2x2x2x2}{2} = 8$
2^{-3}=	$\frac{1}{8}$	Lo podemos observar de la siguiente manera $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{\frac{2x2x2x2}{2}} = \frac{1}{8}$ ~~y si pasamos el denominador al numerador pasa con su signo negativo 2^{-3}=-8~~
2^{-4} =	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2^4} = \frac{1}{\frac{2x2x2x2x2}{2}} = \frac{1}{16} = \frac{1}{\frac{32}{2}} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$
$2^{-1\,.\,5} =$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$2^{-1.5} = \frac{1}{2^{1.5}} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{2^3}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2x2x2x2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$

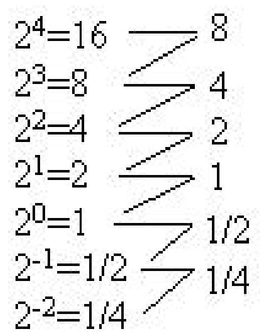
Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
2^0 = 0	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	Es falsa La correcta es 2^o=1 puesto que $2^0 = \frac{2}{2} = 1$	Esta confundido, aplica mal la regla

$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	2^o=1 puesto que $2^0 = \frac{2}{2} = 1$ es falsa	Consiste en la memorización por ejemplo 2^2 dice se multiplica así 2^2= 2x2=4 y para 2^o= dice no se multiplica ni una vez y queda igual
$2^1 = 2*2 = 4$	"ya que multiplicamos una vez el 2"	Es falsa porque $2^1 = \frac{2x2}{2} = 2$	Mas que nada consiste en el uso del algoritmo. Lo emplean mal. No pensaron en otra forma de hallar la solución
$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	Falsa ya que $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{\frac{2x2x2x2}{2}} = \frac{1}{\frac{16}{2}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	Razonaron de acuerdo a como les enseñaron. Es fácil observar que no comprendieron el algoritmo mas bien lo mecanizaron
$2^{-4} = -16$	"ya que 2^4 = 16 y se le pone un signo"	Falsa porque $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{\frac{2x2x2x2x2}{2}} = \frac{1}{\frac{32}{2}} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$	Análogamente al caso anterior
$2^0 = 2$	"como no hay nada de exponente se queda igual"	Falsa porque $2^0 = \frac{2}{2} = 1$	No comprenden, les falta ayuda, dedicación, usan el algoritmo como si este funcionara para todos los casos

HC		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1\,.\,5} =$	=2.828427125	Porque: la base es 2 y si la elevamos a 1.5 es el resultado antes mencionado;
$2^0 =$	2^0=1	Porque hay un teorema en el cual dice que todo número elevado a la cero es 1.
$2^1 =$	$2^1 = 2$	Porque también hay un teorema en el cual dice que todo número elevado a 1 (unidad) pues es el mismo número (base).
2^{-3}=	2^{-3}= 0.125 o 2^3=8	Porque: cuando elevamos un exponente negativo en nuestra calculadora nos dará un número decimal positivo, pero también cuando elevemos un exponente positivo siempre nos dará un número entero positivo como por ejemplo 2^3=8.
$2^{-4} =$	2^{-4}= 0.0625	Esta expresión es análoga a la anterior con la diferencia de que aumento en 1… pues también si eleváramos este resultado 0.0625 al exponente, nos da 2^{-4}…
$2^{-1\,.\,5} =$	$2^{-1\,.\,5}$ =0.35355339	Este problema es similar a la primera, por lo que varía es, en el signo, ya que este es negativo y ocupando la calculadora y la base 2 y es exponente es negativo pues entonces resulta un número decimal.

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	Falso; porque cualquier número elevado a cero es el 1.	Pues a mi criterio tengo en cuenta que cualquier número elevado a la cero es 1, ya que hay un teorema en el cual dice lo antes mencionado.
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	Falso	Porque $2^0=1$ por lo que es falsa la expresión; ya que 2 que en este caso es la base la elevamos a la cero entonces nos da 1.
$2^1 =2*2=4$	"ya que multiplicamos una vez el 2"	Falso	Porque toda base elevada a la unidad que es 1 es la propia base ya que no hay exponente mayor por lo que queda en este caso el 2.
$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	Falso	Porque la respuesta correcta en este caso es $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$; y también si multiplicamos tres veces y colocamos el signo negativo es el propio negativo este argumento es falso.
$2^{-4} = -16$	"ya que $2^4 = 16$ y se le pone un signo"	Falso	2^{-4} = -16 porque la respuesta es $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$ y también $2^4=16$ por que $2\times2\times2\times2=16$.
$2^0 = 2$	"como no hay nada de exponente se queda igual"	Falso	Porque a mi criterio; si eleváramos $2^0=2 \Rightarrow$ como no hay exponente en este caso entonces pues sería el propio 2; pero también $2^0=1$ por que si multiplicamos el 1 por 2 pues es también el propio 2.

FC		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1.5}=$	$\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$	$2^{1.5}$, se puede ver, como $2^{3/2}=\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$
$2^0=$	1	Cuando se eleva una cantidad a cierto exponente, significa el numero de veces que se va a multiplicar por si mismo dicha cantidad. Así, 2º, significa que 2 se va a multiplicar a sui mismo, cero veces, pero existe una convención que dice: $\forall x^0=1$
$2^1=$	2	En este caso, el exponente 1, indica que la base, o sea, el numero 2, se va multiplicar a su mismo una vez, por tal motivo: $2^1=2$
$2^{-3}=$	$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$	Ahora, cuando se trata de exponentes negativos, no significa que se vaya a multiplicar menos x veces, sino que, x^{-4} puede expresarse como: $\frac{1}{x^y}$, por tanto $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}=2^{-3}$

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$2^{-4} =$</td><td>$\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$</td><td>De igual modo, $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$ ya que:
$2^{-2} = 1/4$
$2^{-1} = 1/2$
$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
que es creciente, para todos los números que se va aumentando el exponente.
Existe una sucesión naturales, a medida.
Si tenemos


esta sucesión se va aumentando en la mitad, por tal motivo, se tiene que $2^{-4} = \frac{1}{16}$</td></tr>
<tr><td>$2^{-1.5} =$</td><td>$\frac{1}{2^{1.5}} = \frac{1}{2^{3/2}}$
$= \frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$</td><td>Por razones análogas al primer caso, $2^{-1.5} = \frac{1}{2^{1.5}}$ pero 1.5=3/2, por lo tanto $\frac{1}{2^{1.5}} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$</td></tr>
</table>

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	La respuesta es falsa, ya que 2^o=1	Es correcto, lo que el opina, ya que ciertamente el exponente indica, cuantas veces se debe multiplicar un numero a si mismo y 2^o indica que 2 no se va a multiplicar alguna vez, pero hay una convención para todas las cantidades elevadas al exponente cero siempre va resultar la unidad
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no	Falso, porque	Bueno, se podría pensar que el

	se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2”	$2^o=1$	alumno, piensa que $2^o=2$, porque al no multiplicarse ninguna vez, debe permanecer el 2, o sea, de antemano el 2, sería constante
$2^1=2*2=4$	“ya que multiplicamos una vez el 2”	Falso, ya que $2^1=2$	Creo que se considera a la base 2, de una manera en la que el 2 inicia siempre con las multiplicaciones por si ,mismo
$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$	“ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos”	Falso, porque $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$	Supongo que los estudiantes al tener que elevar un numero a un exponente negativo, se imaginan que es lo mismo, que cuando elevan un exponte positivo, solo que ahora se agrega el signo negativo
$2^{-4}=-16$	“ya que $2^4=16$ y se le pone un signo”	Falso, porque $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$	De igual modo al anterior caso, se piensa que al elevarse a un exponente negativo, negativo debe ser el resultado
$2^0=2$	“como no hay nada de exponente se queda igual”	Falso, ya que $2^o=1$	Creo que lo que se piensa, es que el 2, es el primer elemento antes de elevarlo a un determinado numero, y que como el cero, pues significa que 2 ya no se vuelve a multiplicar, entonces $2^o=2$

MJP		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1.5}=$	~~$2^5=32$~~	~~Porque la base que es 2 esta elevada a una potencia, la cual es un producto~~ En esta expresión no se que respuesta se pueda dar, porque cuando se tiene una base elevada a un exponente (entero), lo que se hace es multiplicar la base por sí misma, el número de veces que indique el exponente pero cuando el exponente no es entero, no se me ocurre que hacer. Y por lo mismo no puedo obtener una respuesta para la sexta expresión
$2^0=$	1	Por regla se dice que cualquier numero elevado al exponente cero es igual a uno
$2^1=$	2	La base (2) esta siendo elevada a la unidad, por tanto se multiplica la base por 1
$2^{-3}=$	$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$	Porque el 2 esta elevado a un numero negativo, entonces para hacer mas fácil la obtención del resultado, se escribe 2^{-3} como un cociente de dividir 1 entre 2^3
$2^{-4}=$	$\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$	La justificación aquí es por razones análogas al anterior

$2^{-1.5} =$	$\cancel{\frac{1}{2^{1.5}} = \frac{1}{32}}$	~~La justificación~~	
Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	“ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada”	Falsa. 2^o=1, porque cualquier numero elevado al cero es igual a la unidad	Hasta cierto punto de vista se puede pensar que es cierto lo que el dice ya que si sabe que para obtener el resultado de una base elevado a un exponente se tiene que multiplicar.....
$2^0 = 2$	“ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2”	Falso. 2^o=1, por razones análogas a lo anterior	Creo que no tiene claro ni el concepto de la multiplicación con el cero
$2^1 =2*2= 4$	“ya que multiplicamos una vez el 2”	Falsa. 2^1=2, porque el 2 se multiplica una sola vez y esto se expresa como 2x1	El estudiante sabe que la base (2) se tiene que multiplicar una sola vez, ero lo que el esta haciendo es multiplicarla 2 veces
$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$	“ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos”	Falsa $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	Piensa que al elevar una base a un numero negativo se hace lo mismo que para un positivo, pero tomando en cuenta el signo del exponente
$2^{-4} = -16$	“ya que 2^4 = 16 y se le pone un signo”	Falso $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$	Creo que tienen muy poco conocimiento sobre las propiedades o reglas de la aritmética
$2^0 = 2$	“como no hay nada de exponente se queda igual”	Falsa 2^o=1	El estudiante piensa que como el cero es nulo entonces la base no está elevando a ningún exponente y por tanto queda igual

ES		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1.5} =$	$\cancel{2^1 + 2^{1/2} = 2 + \sqrt{2}}$ $2^1 \bullet 2^{1/2} = 2 \bullet \sqrt{2}$ 2	Se puede descomponer en 2 factores, después se eleva 2^1=2 se le multiplica por la raíz de 2
$2^0 =$	1	Porque todo numero elevado a cero da la unidad
$2^1 =$	2	Porque 2 esta elevado a 1 es igual a la base, misma
$2^{-3}=$	$\frac{1}{8}$	2^{-3} se puede ver de esta forma $\frac{1}{2^3}$, el numerador pasa igual y el denominador se eleva al exponente que esta indicado
$2^{-4} =$	$\frac{1}{16}$	2^{-4} se puede ver de esta forma $\frac{1}{2^4}$, el numerador pasa igual y el denominador se eleva al exponente que esta indicado

$2^{-1\,.\,5} =$	$\frac{1}{2^1 \cdot 2^{1/2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2 \cdot}$	$2^{-1.5}$ se puede ver de esta manera $\frac{1}{2^{1.5}}$

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	La respuesta es falsa porque 2^o=1 por convención todo numero elevado a cero es la unidad	Como el exponente indica las veces que se debe multiplicar, y el estudiante vio que 2 esta elevado a cero y el cero no indica nada
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	Falsa porque 2^o=1 por convención	El estudiante pensó como el numero 2 está elevado a cero y el cero no indica nada entonces queda la misma base
2^1 =2*2= 4	"ya que multiplicamos una vez el 2"	Falsa 2^1=2 porque todo numero elevada a 1 es la misma base	El estudiante habrá pensado como se pide elevar a 1 la base 2 entonces 2^1=2*2 =4 es la base resultado indica que es una vez
2^{-3}=(-2)(-2)(-2)	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	Falsa $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	El estudiante pensó como el exponente indica cuantas veces se va elevar la base
2^{-4} = -16	"ya que 2^4 = 16 y se le pone un signo"	Falsa $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$	Pensó, como el 2 esta elevado al exponente elevo la base 2^4=16 y después le puso el resultado el signo negativo porque el exponente esta elevado con signo negativo
$2^0 = 2$	"como no hay nada de exponente se queda igual"	Falsa porque 2^o=1 por convención	Como el cero indica nada entonces queda la misma base

LI		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1\,.\,5} =$	$2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$	Porque cualquier numero elevado a una fracción puede representarse como una raíz y dicha raíz depende del denominador, y por ultimo extraemos la raíz, en este caso de 8
$2^0 =$	1	Porque todo numero elevado a un exponente cero da la unidad
$2^1 =$	2	Porque todo numero elevado a un exponente uno resulta el mismo numero de la base
2^{-3}=	$= \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	Porque teniendo un numero con cualquier base y lo elevamos a un numero negativo esta va disminuyendo de valor ya que si esta elevado a un numero positivo este valor aumenta

$2^{-4} =$	$= \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$	Por razones análogas al anterior, por ejemplo $2^2=4$, $2^1=2$, $2^o=1$, $2^{-1}=1/2$, $2^{-2}=1/4$, $2^{-3}=1/8$
$2^{-1.5} =$	$\frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$	Porque $2^{-3/2}$ puede representarse como $\frac{1}{2^{3/2}}$ ya que si se deja como $\sqrt{-8}$ esta raíz no existe en los reales

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	Falso: Bueno, la mayoría sabemos que un numero elevado a un exp. Cero da la unidad (por convención)	Bueno tal vez porque no sepa lo antes dicho, o se confunden ya que al multiplicar por cero la respuesta es cero
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	Falso Pues como ya sabemos que $2^o=1$ por tanto $2^o=2$ es falso	Por razones análogas a la anterior
$2^1 = 2*2= 4$	"ya que multiplicamos una vez el 2"	Falso Porque $2^1=2$ porque la base es multiplicado por la unidad en este caso	Bueno como se multiplica una sola vez piensan o se confunde y multiplican una vez el 2 pero por la base
$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	Falso Porque si es verdad que se multiplica sucesivamente pero solo en el caso de exponentes positivos 2^n = n veces 2	Pues porque lo toman como si fuera un numero positivo o tal vez no se dan cuenta que de acuerdo como disminuye el exponente también el resultado disminuye de valor
$2^{-4} = -16$	"ya que $2^4 = 16$ y se le pone un signo"	Falso porque $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$	Por razones análogas a lo anterior
$2^0 = 2$	"como no hay nada de exponente se queda igual"	Falso copo sabemos que $2^o=1$	Piensan que $2^o=2$ porque como el cero no tiene valor no lo toman en cuenta

LP		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1.5} =$	$2^6 = 64$	Se puede decir que se trata de una descomposición o sea $2^{1.5}$ va a ser igual 2^6 porque sus exponentes se multiplican y además que porque es igual a 64 es como su tenemos 2^6=2x2x2x2x2x2 que el exponente nos va a decir cuantas veces se va a multiplicar la base
$2^0 =$	$2^o=1$	Su justificación sería que cualquier base elevada a exp 0 siempre será igual a 1 ya que aquí el exponente no nos esta diciendo que la base se multiplica dichas veces
$2^1 =$	$2^1=2$	Al igual que el primero como tenemos $2^1=2$ es igual a 2 ya que le exponente no esta diciendo cuantas veces se va a multiplicar la base y se representa de esa forma ya que la exponenciación es positiva

$2^{-3}=$	$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$	$2^{-3}=1/2^3$ se puede representar de esta forma ya que como el exponente es negativo y para obtener el resultado tendríamos lo mismo es como multiplicar $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ ya que el exponente nos dice cuantas veces debemos multiplicar la base = 1/2
$2^{-4}=$	$\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$	2^{-4} se puede representa de la forma $1/2^4$ ya que al exponente es negativo y se hace lo mismo para obtener el resultado multiplicamos las veces que nos diga el exponente la base o sea a $\frac{1}{2^4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$
$2^{-1\,.\,5}=$	$\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$	Se trata de una descomposición en los exponentes ya que tenemos 2^{-}

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	Es falsa $2^o=1$	Se esta confundiendo ya que creo que piensa que si 2^0=2x0 que el exponente es que se lo debe multiplicar a 2 para obtener un resultado
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	Es falsa $2^o=1$	Aquí es el casi el mismo caso que 6 o creo que el anterior la respuesta pensaron lo mismo que el exponente cero no representa nada y que a 2 no se multiplica por nada y por eso queda 2
$2^1 = 2*2= 4$	"ya que multiplicamos una vez el 2"	Es falsa $2^1=2$	Aquí se observa que no esta muy claro sobre que es lo que nos va a indicar el exponente y se queda confundido o sea que piensa que 2^1 = 2x2
$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	Falso $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$	Se puede decir que el estudiante no tiene muy bien clara la expresiones fraccionarias y además piensa que $2^3=8$ entonces $2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$ pero esto no es ya que $2^{-3}=1/2^3$ ya que una base con exponente negativo se puede representarla de la forma fraccionaria pero con exponente (+)
$2^{-4} = -16$	"ya que 2^4 = 16 y se le pone un signo"	$2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$	Es lo mismo que el anterior, ya que no esta muy claro sobre como una base de exponente (-) se puede representar en forma fraccionaria pero con signo (+) y se realizan operaciones
$2^0 = 2$	"como no hay nada de exponente se queda igual"	Falsa $2^o=1$	Aquí es que como no tenemos nada, al exponente no se multiplica a 2 por nada o sea que $2^o=2$ ya que se podría

			decir que el cero no representa nada por eso queda igual

FN

Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1.5} =$	$\sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2.828$ el exponente 3/2 nos indica un radica donde 2 es el índice y el 3 es el exponente 2^3, por tanto que indicada así $\sqrt{8}$ donde $\sqrt{8}$ es igual a 2.8284	$2^{1.5}$ es igual a 2^6 quiere decir que se va a multiplicar 6 veces el numeral 2. por tanto 2x2x2x2x2x2=64 o que es igual $2^6=64$
$2^0 =$	1	2^o es igual a 1 porque el cero es una nulidad y la nulidad es 1. por tanto $2^o=1$
$2^1 =$	2	2^1 es igual al mismo 2 porque 1 es la unidad
$2^{-3}=$	$\frac{1}{8} = 0.125$	2^{-3} es igual a decir $1/2^3$ que es igual a 1/8 o 8^{-1} o sea que 8^{-1} o 2^{-3} es el reciproco de 2^{-3} o 8^{-1}
$2^{-4} =$	$\frac{1}{16} = 0.0625$	2^{-4} como ya lo habíamos dicho antes que 2^{-4} es igual a ½ porque es su reciproco
$2^{-1.5} =$	$\frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$ es igual a lo anterior por el reciproco

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante
$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	Es falso porque $2^o=1$	No porque sea 0 (cero) el exponente , quiera decir que no se multiplica por nada el cero tiene un valor y un nombre
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	Es falso porque $2^o=1$	Digo lo mismo que lo anterior que no por ser cero sea la misma base
$2^1 =2*2= 4$	"ya que multiplicamos una vez el 2"	Es falso porque $2^1=2$	Pero si multiplica una vez no es igual a 4
$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	Es falso porque $2^{-3}=1/2^3$ $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0.125$	No se coloca el signo menos y no se multiplica tres veces 0 si se multiplica pero recíprocamente
$2^{-4} = -16$	"ya que $2^4 =$ 16 y se le pone un signo"	Es falso porque $2^{-4}=1/2^4$ $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0.062$	No. es $2^{-4}=16$ si fuera 2^4 si es igual a 16 pero el exponente es –4 y es su reciproco
$2^0 = 2$	"como no hay nada de exponente se queda igual"	Es falso porque $2^o=1$	No, lo que dice el alumno es verdad que 2^o sea la misma base

GS		
Exp.	Tu respuesta	Tu justificación
$2^{1.5}=$	~~$(2^1)^5=2^5=32$~~ $2^{1.5}=2^{3/2}=\sqrt{2^3}\sqrt{8}$ $=2\sqrt{2}$	~~Por la propiedad de los exponentes que dice $(a^m)^n = a^{m.n}$~~ Porque para comenzar, 1.5=3/2 equivalentemente en fracción, $2^{3/2}$ se considera como $(2^{1/2})^3$ por las propiedades de los exponente que dicen $(a^m)^n= a^{mn}$ con m y n en Z. Pero como $2^{1/2}=\sqrt{2}$ por la proiedad d elos radicales $a^{1/2}=\sqrt{a}\Rightarrow$ se considera $\left(\sqrt{2}\right)^3$. Pero como por otra propiedad de los radicales $\left(\sqrt{2}\right)^3=\sqrt{2^3}$ esta propiedad dice $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\left(a^{1/n}\right)^m=a^{m/n}$ con m y n en Z
$2^0=$	2º=1	Porque por las propiedades de los exponentes se tiene que $\frac{a^m}{a^n}=1$ esto si m=n entonces aplicamos la otra propiedad de los exponentes $\Rightarrow a^{m-n}=1$ pero como m=n $\Rightarrow m-n=0 \therefore a^0=1$
$2^1=$	$2^1=2$	Porque 2^1 dice que se va a multiplicar 1 vez 2 y por tanto se considera como factor el 1
$2^{-3}=$	$2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$	Por la propiedad de los exponentes dice $\frac{a^m}{a^n}$ con n>m, $\Rightarrow \frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$ pero si se considera la otra propiedad $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ con n>m entonces el exponente de a es un numero negativo, pero como $\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$ y $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ con m y n numero negativo, $\therefore \frac{1}{a^{m-n}}=a^{m-n}$ donde m y n es un numero negativo
$2^{-4}=$	$2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$	Por analogía la anterior
$2^{-1.5}=$	$2^{-1.5}=2^{-3/2}$ $\Rightarrow 2^{-1.5}=2^{-3/2}$ $=\frac{1}{2^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{2^3}}$ $=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$	El exponente –1.5 = -3/2 2 tiene como exponente –3/2, pero $(2^{-3/2})=(2^{-1/2})^3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{1}{\sqrt{2^3}}$ por las propiedades de os radicales que habla de $\left(a^{1/m}\right)^n=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=a^{n/m}$ con m y n en Z

Resp.	Justificación del estudiante	¿La respuesta es Verdadera o Falsa? Dado el caso explica cuál es la respuesta correcta.	Agrega tu comentario sobre la justificación del estudiante

$2^0 = 0$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada"	Falsa. La respuesta correcta es 1, o sea 2^o=1, esto porque, por ejemplo se tiene que $\frac{2^2}{2^2}=1$ *pero* $2^{2-2}=1 \Rightarrow 2^0=1$ Por la propiedad de los exponentes que $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ pero como *m*=*n* entonces *m-n=0*	Es posible que el estudiante piense que 2^o quiere decir que 2 se multiplica con cero, es decir, 2^o = 2x0=0, lo cual nos lleva a pensar que no ha comprendido lo que son las propiedades de los exponentes.
$2^0 = 2$	"ya que el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2"	Falsa. La respuesta es 1 o sea 2^o=1 por razones análogas a lo anterior	Es posible que el estudiante piense que 2^o quiere decir que 2 no se multiplica por nada y por tanto considera que queda como resultado el 2, lo cual nos indica que no tiene claro lo que es las propiedades de los exponentes
2^1 =2*2= 4	"ya que multiplicamos una vez el 2"	Falsa. La respuesta es 2^1=2 porque el exponente indica que el 2 se multiplica una sola vez, esto conlleva a que no hay otro factor 2, por lo tanto se considera como factor a 1	Pienso que los alumnos piensan que 2x2 significa que 2 se multiplica una sola vez por 2, es decir, 2^1 = 2x2 pero 2x2=2^2 por lo tanto el pensamiento que tienen es erróneo lo cual los conlleva a cometer errores
2^{-3}=(-2)(-2)(-2)	"ya que multiplicamos tres veces y le colocamos el signo menos"	Falsa. La respuesta es $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ por propiedades de los exponentes aplicados adecuadamente	Porque piensa el estudiante que 2^{-3} se multiplica (-2) tres veces esto porque 2^3=2x2x2. pero aplicando propiedades de exponentes 2^{-3} no es posible obtenerlo (-2)(-2)(-2)
2^{-4} = -16	"ya que 2^4 = 16 y se le pone un signo"	Falsa. La respuesta es $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$ por una analogía a lo anterior	Pienso que por explicaciones análogas a lo anterior
$2^0 = 2$	"como no hay nada de exponente se queda igual"	Falsa. La respuesta es 2^o=1 porque por las propiedades de los exponentes $\frac{a^m}{a^n}=1$ si m=n $\Rightarrow a^{m-n}=1$ pero como m-n=0 $\therefore a^0=1$ es porque se plica otra propiedad de los exponentes	Porque creo que el estudiante piensa que 2^o=2 dudo que al 2 no se le hace ninguna operación dado que el exponente es cero
El estudiante tiene la siguiente anotación en la parte trasera de su hoja, pero no indica a			

donde corresponde
$2^0=1$ porque si consideramos la propiedad de los exponentes que dice que

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si m>n ,............(1)

pero si $\frac{a^m}{a^n} = 1$ esto si solo si m=n, luego entonces aplicando (1) se tiene que

$a^{m-n} = 1 \Rightarrow m - n = 0$ porque m=n $\therefore a^0 = 1 \therefore 2^0 = 1$

ANEXO 2

Estudio exploratorio con estudiantes de licenciatura: Transcripciones de la Sesión de trabajo Equipo 1

F (FM), I(IO) & N(NV) son los alumnos (todos hombres) y P es el profesor.

(Hora: Minuto: Segundo)

(0:00:00) Inicio de la imagen del vídeo

En lo que sigue se presentan algunos episodios en donde se hace explicita la manera en que son utilizadas las reglas de transformación. En términos generales se puede notar los mecanismos que permiten a los estudiantes recordar las reglas.

Parte I. Cuestionario 1

La regla de transformación $2^{1.5} = \sqrt{(2^3)}$

00:03:05 – 00:09:05

N escribe en el pizarrón

$$2^{1.5} = 2^{3/2} = \sqrt{(2^3)} = \sqrt{8}$$

F: Explícalo
N: Lo explico ¿verdad… cada paso?
P: Sí, ¿Lo hicieron en equipo o cada quien?
F: En equipo, yo le voy ayudando a él (se refiere a N)
P: Entonces lo que hayan platicado en la tarea, cuando trabajaron en equipo
N: El primer paso de éste… hay una propiedad que nos dice que una expresión finita puede expresarse de una forma … de la forma p sobre q (escribe p/q), cualquier numero real, cualquier número finito que sea en expansión decimal o un entero puede expresarse de la forma p sobre q de ésta (señala $2^{1.5}$) pasamos a ésta (señala $2^{3/2}$)… entonces un cociente indicado puede expresarse en una forma de radical, teniendo en cuenta que tenemos el numerador y el denominador (escribe en el pizarrón para señalar p y q respectivamente). Para expresarlo en una expresión de radical.

F: El de abajo
N: El denominador toma el índice del radical… el denominador toma el índice del radical, entonces sería como la raíz cuadrada, pero como es una raíz cuadrada se puede omitir, entonces ya nada más queda el puro radical y el numerador es el exponente al que va elevado la base.

[Pausa P atiende el teléfono]

P: ¿En que nos quedamos?
N: Entonces para pasar ésta… de un cociente podemos para pasar a un radical… tomando en cuenta que si la raíz es cuadrada se omite el índice del radical, ya de esto nada más se eleva a la base a la potencia que está expresada, ya nos queda ocho… raíz de ocho. Si queremos de aquí todavía seguir explicando esta raíz se puede.
P: Habría que calcularla.
N: Habría que calcularla.
P: ¿Cuánto es raíz de ocho?

Búsqueda de justificación del exponente 1.5

00:09:30 – 00:12:00

P: Entonces ¿Por que razón el 1.5 se puede expresar… bueno, por que dos a la tres medios se puede expresar como raíz cuadrada de dos al cubo?
N: Ya no seguí investigando pero…es eso…
F: Lo que dijiste ahorita.
N: Ya es un conocimiento que ya está muy…
P: De aquí (señala $2^{3/2}$) acá (señala $\sqrt{(2^3)}$) ¿verdad?
F: Lo que dijiste ahorita.
P: ¿Ustedes qué opinan (se dirige a los miembros del equipo)? ¿por qué dos a la tres medios se puede expresar como raíz cuadrada de dos al cubo?

[Presentación del equipo ante la cámara]

P: Entonces ¿por que se puede hacer eso? (señala el pizarrón que tiene escrito $2^{1.5} = 2^{3/2} = \sqrt{(2^3)} = \sqrt{8}$).
F: ¿Se podría decir que por simplificación?, por que si…
P: ¿Por simplificación?
F: Díganlo como ustedes lo usan
N: Porque, bueno, son expresiones que pueden… que son iguales, que implican lo mismo, o sea nosotros podemos transformar estas dos igual, una implica a la otra entonces, eso nos ayuda para que no tengamos un exponente, o sea
F: Fraccionario.
N: Fraccionario, por que si nosotros dividimos esto nos da..

P: Decimal
N: Decimal, entonces esto se puede evitar usando esto así (señala $\sqrt{(2^3)}$).
F: Simplificando
P: O transformando como él decía.
N: Para no tener una expresión de la forma p sobre q y eso nos ayuda más a seguirla transformando y de todas manera el valor no se altera.
P: Muy bien, entonces son cosas que uno sabe hacer ¿Y saben por qué se puede hacer este cambio?...(silencio) Muy bien ¿Cuál es la que sigue?

Justificación de la regla de transformación 20 = 1

00:12:20 – 00:16:30

P: ¿Cuál es la siguiente?
F: La siguientes es... (Escribe en el pizarrón 2^0 =1) bueno aquí dice que dos sobre cero es uno. Hay una propiedad que dice que toda cantidad elevada a la cero va a ser es igual a uno, que sería esta que voy a demostrar enseguida, que tenemos aquí (señala la hoja que trae en la mano) y con esta propiedad aclaramos casi todo. Entonces tenemos a la ene sobre a la ene es igual a uno (escribe en el pizarrón $\frac{a^n}{a^n}=1$) pero como podemos pasar esto (señala el denominador) acá (señala el numerador), entonces nos quedaría, si pasamos esto acá va a pasar negativo, nos quedaría ene entre ene es igual a uno (escribe en el pizarrón $a^{n-n}=1$) entonces ya (escribe $a^0=1$). Esta propiedad nos dice, aquí nos demuestra... esta se demuestra que toda cantidad, o sea generalizando, elevada a la cero va a ser igual uno y... es todo lo que tenemos.
P: Muy bien, entonces, ¿Esto lo trabajaron todos ustedes?
F: Sí.
P: ¿Qué libro es el que estas viendo N? Nada más para saber.
I: Álgebra Elemental.
P: ¿De quien? (toma el libro) Gordon Fuller ¿Entonces checaron este libro?
F, N y I: Sí.
P: Muy bien. Ya que checaron este libro, están esas reglas. Entonces, por eso a a la cero es uno.
F: Esto es en general y si, cuando se particulariza... es más fácil, es lo mismo (desarrolla el ejemplo a = 2, n = 1).

[F refiere a la manera que hizo en su respuesta en clase de C1. En donde hizo lo mismo que anteriormente usando m = n en la división de potencias]

Reglas de transformación 2^1=2

00:19:10 - 00:21:10

I: A mi me toco de que dos a la uno igual a… pues toda base elevada a la unidad va ha ser la misma base… este, una explicación lógica
P: Por ejemplo, una explicación lógica, yo… en los cuestionarios de los chavos (se refiere al Cuestionario C2) son como justificaciones ¿no?, ¿Por qué es que dos a la uno es dos? ¿Por qué dos a la uno punto cincos es…? ¿no? Entonces ustedes dieron una justificación del exponente cero, pero no dieron del exponente fraccionario. O sea nada más hago la distinción, ¿Ahí tampoco saben ustedes? ¿Tampoco?
I: Se me hace un poco difícil este… no lo encontramos pues.
F: Aunque se podría hacer algo…
I: eme igual a ene
F: eme mayor que ene
P: Si quieren después…
F: No se si…
N, I: Pasamos al otro

Reglas de transformación $2^{-3}=1/2^3$

00:21:10 – 00:22:40

N Escribe en el pizarrón $2^{-3}=1/2^3=1/8$

N: Aquí nos dice que una propiedad no recuerdo cuál sea… creo que esa ya me la se desde secundaría, nos dice que una expresión… una base elevada a una potencia negativa puede expresarse como un cociente, pero la potencia pasa como el denominador, pero con la potencia pasa con el signo positivo esa ya sería esta (señala $1/2^3$), esa propiedad no recuerdo cuál sea, pero si…

Primer intento de justificación de la regla de trasformación $2^{-3}=1/2^3$
0:22:45 – 0:29:25

La trascripción que sigue muestra la búsqueda de una justificación para la regla de transformación para el exponente negativo. En un principio parece que la idea es clara para conformar el argumento de división de potencias, pues se basa en la idea de restar los exponentes al colocar como exponente del 2 a los números 2 y 3 en el numerador y en el denominador respectivamente. Pero el hilo del argumento se pierde cuando F escribe que $2^{2-3}=1/\sqrt{8}$. Es interesante observar que esta última igualdad no es producto del azar; sino que por el contrario posee los elementos constituyentes del esquema que permite construir las reglas de transformación para los exponentes no naturales. En este caso el signo negativo sugiere la idea de un cociente, el 2 una raíz cuadrada y el 3 el cubo de 2.

La interacción de F y I no produce el argumento de la división de potencias, aún cuando I apoya la idea de F. Hacen referencia la “Ley de división de potencias” enteras que discrimina tres casos. Al parecer esta discriminación es tomada del libro de Álgebra que consultaron.

P: Sale, todos sabemos todo eso… todos sabemos que si tiene exponente negativo lo que tú dijiste ¿no? Y la pregunta es ¿Por qué?
F: Hay una propiedad también que dice eso, este…
P: ¿Tú pensaste eso N? ¿Por que se puede hacer el cambio?
N: Para esto (señala la expresión $2^{-3}=1/2^3$).
P: Así como hicimos con la multiplicación ¿no? Todos sabemos multiplicar números, pero no sabíamos exactamente por qué. Entonces hicimos ejemplos ahí clase, o con la división por que se divide, se resta. Entonces un poco igual aquí, sabemos hacer eso, pero ¿por qué? ¿Pensaron ustedes? (Se dirige a I y F).
F: Todos los exponentes tienen su propiedad, como ahí es negativo lo podemos hacer un poco similar como *a* sobre cero (se refiere a *a* a la cero), pero como es negativo… podemos poner que… aquí donde puse eme igual a ene entonces podemos poner ene menor que eme (escribe en el pizarrón $n < m$), entonces al hacer esto menor esto va dar signo negativo acá
G: A ver por ejemplo…
F: Supongamos, particularizamos ¿no?, tenemos dos a la dos (escribe 2^2), entonces como esto va a ser eme (señala el 2 que está como exponente) ene va ser menor a eme, entonces tenemos (escribe $/2^3$ para completar la expresión $2^2/2^3$) igual a la cantidad que tenemos ahí ¿no? Entonces si tenemos eso al pasar esto acá (señala el tres y lo mueve con un ademán hacia arriba) va a ser dos menos tres va a ser (escribe 2^{2-3}) va a ser igual a raíz de ocho sobre uno (escribe $= 1/\sqrt{8}$ para completar la expresión $2^2/2^3 = 2^{2-3} = 1/\sqrt{8}$). Entonces ya tenemos dos a la tres (escribe 2^{-3} debajo de la expresión anterior) particularizando por que eme mayor a ene, siempre va a ser mayor, haciendo esta restricción aquí, esto va a ser ocho

Segundo intento de justificación de la regla de trasformación $2^{-3}=1/2^3$

0:33:00 – 0:38-35

La trascripción que sigue muestra una nueva búsqueda de una justificación para la regla de transformación para el exponente negativo. En un principio, nuevamente, parece que la idea es clara para conformar el argumento de división de potencias, pues se basa en las reglas de transformación $a^m/a^n = a^{m-n}$ y $a^m/a^n = 1/a^{n-m}$. Al no lograr establecer el argumento por esta vía, uno de los estudiantes (F) recurre a utilizar una regla de transformación que le servirá como base de la argumentación: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{3}$. Se nota aquí como la regla de transformación anterior es bastante significativa en torno de la relación entre la "negatividad" y los "procesos inversos". En términos de la convención matemática como un mecanismo que busca dar coherencia a los conocimientos, notamos aquí que lo que hemos llamado sistema inicial de conocimientos está compuesta por la regla de transformación $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{3}$.

P: Todos los sabemos usar, pero la pregunta es ¿Por qué?
I: O sea ¿Quiere una justificación lógica?
P: O un por qué.
I: O un por qué.
P: ¿Por qué no poner dos a la uno igual a otra cosa?
I: Si consideramos eme menor ene.
F: Sí pues, hazlo.
I: ¿Y si no está bien?
F: No por eso, tú vas a usar como los axiomas, para demostrar un teorema usamos los axiomas.
I: Si consideramos *a* la ene sobre *a* a la eme va a ser *a* ala eme menos ene donde ene va a ser menor que eme (escribe en el pizarrón: $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ $n < m$) posteriormente decimos que *a* la ene sobre *a* a la eme
F: Pero ya al último, nada más
I: Esperame para que hagamos un repaso, va a ser igual a la unidad, donde vamos a considerar ene va a ser igual a eme (escribe en el pizarrón $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ $n = m$). Ahora voy a tratar de explicar la pregunta que usted dice (se dirige a P), ¿Qué por que uno…?
F: No.
I: Bueno una forma general ¿no? ¿Porqué *a* a la menos ene va a ser igual a uno sobre *a* la ene? (escribe en el pizarrón: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$) ¿Eso es lo que usted quiere saber verdad?
P: Digamos.
I: En forma particular teníamos dos a la menos tres es igual a uno sobre dos a la tres (escribe en el pizarrón: $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$). Forma particular (señala la expresión $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$) y forma general (señala la expresión $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$). Ahora si cons…(pausa), si consideramos.

F: A ene como un número natural positivo.
I: No, si consideramos… no, no tampoco.
F: Si consideras a ene como un número natural positivo entonces te queda de esa forma, de uno sobre *a* a la ene. Entonces…
I: Si consideramos a eme, para que nos de un negat., menor que eme son los puede positivo, nos quedaría uno sobre *a* (Escribe en el pizarrón: $\frac{a^n}{a^m}=\frac{1}{a^{m-n}}$)… (pausa) No.
P: ¿No?
I: Me di una idea pero no se donde saque tanta idea, pero de momento se me olvida ya estando ahí.
F: Consideramos a ene como un número natural positivo entonces esto no puede ser negativo (señala el exponente de la parte izquierda de la expresión $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$) y lo convertimos a esto (señala la parte derecha de la expresión $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$)… sobre ene. Entonces podemos hacer esto. Supongamos, tenemos *a* entre *b* menos esto (escribe $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$), entonces para volverlo positivo sería *b* sobre *a* a la tres (escribe $\left(\frac{b}{a}\right)^{3}$ para completar la expresión $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{3}$). Entonces aplicamos esto (señala la expresión $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{3}$) aquí mismo a tres (señala la expresión $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$), esto (señala la expresión $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{3}$) esto que sería ¿se podría poner así? (escribe un uno en el denominador de la expresión $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$ para que quede como $\frac{2^{-3}}{1}=\frac{1}{2^3}$) es lo mismo.
P: Aja.
F: Entonces al ponerlo así (borra la parte derecha de la expresión $\frac{2^{-3}}{1}=\frac{1}{2^3}$ para que quede $\frac{2^{-3}}{1}=$), para convertirlo a positivo si consideramos al exponente como un número natural positivo (señala el exponente de la parte izquierda de la expresión $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$) entonces podríamos hacer el cambio dos (escribe $\frac{1}{2^3}$ para que la expresión quede como $\frac{2^{-3}}{1}=\frac{1}{2^3}$).

Aplicando esto (señala la expresión $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{3}$). Sería una propiedad de la exponenciación.
I, N: Aja. Andale.
P: Ok, entonces en un cociente cuando tiene un exponente negativo lo vuelves positivo y es al revés.
F: Es al revés, cambia.
P: Cambia. Y acá es dos co…miento ¿por?
F: Uno sobre, o sea aplicando esto (señala la expresión $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{3}$), podemos hacer esto (agrega paréntesis a la parte izquierda de la expresión $\frac{2^{-3}}{1}=\frac{1}{2^{3}}$ para que quede como $\left(\frac{2}{1}\right)^{-3}=\frac{1}{2^{3}}$) aplicamos aquí cambiamos esto aquí y ya cambia esto a positivo, porque esto es lo mismo por que si lo elevo
F, I: A la tres, como a la tres.
F: Va ser uno, uno por uno por uno, entonces si hago esto, ya me da la igualdad de, dos por dos por dos ocho (escribe $=\frac{1}{8}$ para completar la expresión $\frac{2^{-3}}{1}=\frac{1}{2^{3}}=\frac{1}{8}$). Entonces llegamos a esto.
I: Y ya pues, esa explicación. Dice que esta dando… (Usa los mismos argumentos y trabaja con F para el caso $2^{-3/2}$)

Parte II. Cuestionario 2

00:38:35-1:02:10

P: Lo que yo quisiera es que viéramos qué opinan sobre las respuestas de los estudiantes (se refiere al Cuestionario 2) ¿Se acuerdan?
F: Bueno, si
P: ¿Si sacaron copia de eso? ¿También contestaron?
F: Lo de… no.
P: Es que eran dos cuestionarios.
N: Uno de los de las chavos y otro…
P: Uno este y otro de lo que contestan los chavos de secundaria y bachillerato.
F: Yo pienso que lo de secundaria se me hace muy viable lo de las respuestas, al menos a mi porque… si llega un profesor y te da unas propiedades para que retomes algo y tú no sabes mucho del tema, este…. o sea en la realidad supongamos que le digo ¿Si viste una persona que haga acá? Y el ni sabe… no saber ni que. Es como dos a la cero, uno tiene noción de que toda cantidad multiplicada por cero pues te da cero,

entonces hay unas respuestas que dicen que dos a la cero es igual a cero. A mi se hace un poco lógico por porque
N: Esa respuesta me parece la dieron porque los chavos, bueno principalmente en secundaria…
P: ¿Si quieren borrar (lo que esta en el pizarrón) para que puedan?
I: Algo similar como la enseñaza-aprendizaje, vamos a decir que la enseñaza-aprendizaje es igual a una de estas, nosotros somos los alumnos, normalmente en matemáticas en particular, normalmente en matemáticas se empieza con lo más fácil ¿no?, el profesor nos enseña, nos explica los problemas más fáciles, ya lo más difícil viene en el examen. Por eso lo igualamos, bueno yo desde mi punto de vista lo igualo a la enseñanza en general, en la secundaria nos enseñan lo más fácil, o sea, dos a la uno es igual a dos, no más te lo dicen así en forma general por eso lo más difícil ¿por qué? te lo van a venir explicar más adelante.
N: Por ejemplo ¿Alguna vez les explicaron por qué estas cosas?
F, N, I : No.
I: Un ejemplo yo nada más me acuerdo…
N: Exacto, esto nada más nos lo dan porque era útil, pero no nos daban para justificarlo, no nos daban una justificación, se sabía que es verdad pero no se sabia cómo justificarlo.
F: O sea ¿Por qué?
N: Por ejemplo, mire profe. En esta que nos dicen que… dos a la cero, había unas respuestas que decía que era igual a cero. Esta idea la toman o la contestaron así porque se enseña principalmente que la base elevada a una potencia (el contexto nos señala que N se refiere al exponente) es multiplicada tantas veces según sea la potencia (el contexto nos señala que N se refiere al exponente)
P: Aja
N: Y yo creo que por eso tomaban esta respuesta, de que dos a la cero es igual a cero.
P: Aja.
N: Y eso creo que… y en la secundaria creo, si en la secundaria enseñan principalmente en potencias positivas (el contexto nos señala que N se refiere a exponentes), y este potencias positivas

[Durante tres minutos P atiende una pregunta de una persona ajena a la sesión de trabajo]

N ha escrito en el pizarrón la siguiente expresión $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

P: Sale, entonces, sabemos que tiene que ver con la multiplicación como cuantas veces se multiplica la base, en el exponente.
N: Aja. Entonces, esto, para la respuesta que dieron quizás sea una forma correcta para ellos de decir sí dos a la cero es cero (escribe en el pizarrón la expresión: $2^0 = 0$).

F: La toman como correcta pues, no es correcta.
N: Aparentemente para ellos es verdad, porque dicen: no pues les dice que la base está (señala el 2 de la parte izquierda de la expresión: $2^0 = 0$) es multiplicar tantas veces como la potencia, pero hay otra que nos dice que dos por cero es igual a cero (escribe en el pizarrón la expresión: $2 \times 0 = 0$). Entonces ellos tomando en cuenta esto también y como antes dicho ya se les dijo que una base a la potencia (el contexto nos señala que N se refiere al exponente) es multiplicar tantas veces, entonces toman en cuanta esto (señala la expresión: $2 \times 0 = 0$), y dicen pues dos a la cero es igual [a cero]
I: Y algo análogo también para los negativos.
P: Por ejemplo dos a la cuarta ¿qué quiere decir?

[N explica de nuevo el MMR para los exponentes]

P: Aja, entonces ¿dos a la cero?
F: Dos a la cero
P: ¿En ese contexto que significa?
N: Dos a la, dos por cero... dos por o sea como no hay, según ellos, va ha ser análogo, dos por cero.
F: Como se dice que un número multiplicado por cero va pues sería igual a cero, y hay algunos dijeron que es igual a dos, o sea justificarían más esto que es igual a dos.
P: ¿Por qué decían...? ¿Qué decían los estudiantes?
F: Yo me imagino que pusieron que dos a la cero es igual a dos, porque basándose en esto (señala la expresión $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$) digo: no, si dos no se puede multiplicar por nada entonces va a ser al mismo número... al dos (escribe en el pizarrón la expresión: $2^0 = 2$).
I: Esa una,
F: No tenemos por que multiplicar
I: La otra puede ser que también, como ya dijo N, de que es la base, digo el exponente, es la que nos va a indicar cuantas veces se va a multiplicar la base, pero como normalmente ya de primaria sabemos que el cero no es nada, no vale, pues no se... este no se va a multiplicar pues bajan a dos (rescribe en el pizarrón la expresión: $2^0 = 2$). Pero también, el otro conocimiento es... [I hace referencia al la justificación de 2*0 =0 que antes explico F].

[P hace una recapitulación de las diversas justificaciones sobre el exponente cero contenidos en el Cuestionario 2. Después se considera el exponente menos tres y el equipo hace consideraciones consistentes con lo anterior. No es tratada la respuesta de 2^1=2*2]

Parte III. Manejo de transformaciones falsas

La regla de transformación $2^0=2$

1:02:10 -

[P entrega una hoja a cada quien que contiene las preguntas:
¿Por qué no usar la igualdad $2^0=2$ que los estudiantes de secundaria y bachillerato usan?
¿Por qué no usar la igualdad $2^{-3}=-8$ que los estudiantes de secundaria y bachillerato usan?]

P: Resulta que los estudiantes dan respuestas como las que habíamos mencionado ¿no? Entonces lo que les digo ahí es una pregunta. ¿No se si quieran leerla?
F: ¿Por qué no usar dos a la cero igual a dos que los estudiantes de secundaría usan?
N: ¿Por qué los usan? Pues parecido.
F: Yo propongo que cada quien de una respuesta y haber que...
P: O a ver, tómense un segundo. Coméntenlo.
F: A ver, aquí.
P: Si quieren coméntenlo entre ustedes. Y así los grabamos como comentan. Comenten fuerte, así yo pregunto

[G sale del cubículo. Dos minutos de bromas ante la cámara].

N: ¿Por qué no usar la igualdad que los estudiantes de usan? ¿Por qué?... o sea ¿la pregunta... que respuesta queremos? ¿Lo de que ellos utilizan?
I: No. ¿Por qué no usar la igualdad dos a la cero igual a dos que los estudiantes usan? Lo que debemos explicar, por qué no aceptarla pues, algo, que hay que aceptarla pues.
F: Porque no, pues.
I: Porque no, está mal.
F: Está mal eso. Lo que pasa uno quiere saber más o menos lo que es dos, una cantidad elevada a la cero de uno, tú quieres saber, no encuentras la forma de usarla, de usarla por que si, tú la usas en una te va salir mal. Supongamos en una ecuación ¿no?
F: Tenemos la repuesta aquí pero necesito
F: A chirrion.

[Un minuto de plática de otras cosas]

N: Sale, ¿Por qué no usar la igualdad $2^{-3}=-8$?
F: Aquí está la de exponenciación, la de los fraccionarios pues. I (nombre de I) está aquí
N: Pero no está porque.

[3 minutos bromas frente a la cámara, entran y salen del cubiculo. P entra al cubiculo]

P: Muy bien, entonces por qué no usarlas.

[9 minutos de charla sobre otras cosas]

N: ¿La respuesta que quiere que justifique, es qué?
P: ¿Por qué no usar esa regla?
P: Están de acuerdo que
I: ¿Por qué no aceptarla?
P: Ustedes dicen por qué no, porque es falsa. Eso es lo que decían.
F: Por que si la usamos
N: Por que si esta se ocupara (señala la expresión $2^0=2$).
F: En una ecuación.
N: Implicaría una cantidad de errores
P: ¿Por ejemplo?
N: Infinita
P: ¿Por ejemplo?... ya que es infinita da un ejemplo
N: Esta te llevaría ¡uh! a errores que
F: Por ejemplo.
N: Si a una ecuación, cambiaría toda la ecuación.
F: Por ejemplo esto (escribe en el pizarrón las dos igualdades: $2^0=2$ y $2^1=2$), no puede ser igual esto (señala: 2^0) con esto (señala: 2^1).
P: ¿Por qué no?
F: Simplemente por los exponentes.
P: A ver.
F: Porque los exponentes son diferentes. No hay manera de que..., entonces de ahí tomamos el error y aparte que uno ya lo sabe se te hace más difícil
I: Más difícil contestarlo, contestarla
F: La pregunta, pero la podemos tomar en este sentido (señala las dos igualdades: $2^0=2$ y $2^1=2$) ¿Cómo podría ser igual dos a la cero con dos a la uno? Cuando sabemos que uno es mayor que cero (escribe en pizarrón: $1 > 0$).
I: Y ¿cómo le diré? Si aceptamos eso, ya no se cumplirían otras leyes.
P: A ver ¿Por ejemplo?
I: A ver si estoy en lo correcto ¡eh! Sabemos que en la multiplicación dos por dos por (escribe en el pizarrón 2^3*2).
P: ¿Por qué no escriben derecho?
N: Déjeme escribo (borra lo anterior y escribe $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2=$) dos... aquí sabemos que es uno ¿verdad? ¿no? (señala la parte superior a la derecha del ultimo 2 de la expresión: $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2=$)
F: Ya lo sabemos.

I: Aquí ya quedaría… supongamos que si aceptamos y luego ponemos cero (modifica la expresión anterior para que quede como: $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^0 =$) cuando tenemos una multiplicación los exponentes se suman ¿no?
N: Sí, de iguales bases.
N: De iguales bases. Ahí quedaría a, quedaría esto así: tres más dos
F: A la cinco.
N: Más cero.
I: Más cero. Y quedaría dos a la cinco (escribe $2^{3+2+0}=2^5$ y la expresión queda como $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^0 = 2^{3+2+0} = 2^5$) y es falso.
F: Y entonces eso no sería
P: ¿Es falso?
N: Es falso.
F: Ya desarrollándolo ya no sería igual.
N: Desarrollándolo.
P: A ver desarróllenlo.
F: Desarrollalo. Tres por sería dieciséis, no digo ocho, por cuatro por uno.
I: (escribe debajo de $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^0$ la expresión $8 \cdot 4 \cdot$) No, el dos.
N: Dos a la cero. Bueno tomando en cuenta que
I: Esto (señala la expresión $2^0=2$) por dos (escribe el 2 para tener la expresión $8 \cdot 4 \cdot 2$)
F: No, pero ahí los vas a tomar correctamente.
I: Si (borra el dos que había puesto en la expresión $8 \cdot 4 \cdot 2$).
F: Aquí ya lo estás tomando incorrectamente, aquí en esto (señala 2^{3+2+0}), lo estás tomando como esto ¿no? (señala la expresión $2^0=2$).
I: Si pues lo estoy tomando como eso (señala la expresión $2^0=2$).
P: ¡Ah! Es que primero puso uno y luego un cero, yo creo que eso… primero un cero y luego un dos.
I: Aquí debe ser verdadero, no perdón es falso
F: Falso
I: Eso es falso, es falso el resultado.
F: Ya desarrollando eso, aquí sería treinta y dos sería igual a (escribe debajo de $8 \cdot 4 \cdot$ la expresión $32=$)

[Una confusión de F para calcular el valor de dos a la cinco]

I: Esto va a ser igual a treinta y dos (rescribe la expresión $8 \cdot 4 \cdot 1$ y la iguala a 32). Esto es tomado de esta manera. Pongo un cuadro (escribe un recuadro alrededor de la expresión anterior: $8 \cdot 4 \cdot 1 = 32$) y le voy a bajar aquí, esto es igual a esto, dos a la tres por dos a la dos por dos a la cero igual a treinta y dos (escribe la expresión $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^0 = 32$) Donde que va a ser ocho por cuatro (escribe debajo de la expresión anterior $8 \cdot 4 \cdot$)
F: Por dos
I: Esto lo sustituimos
F: Dos acá, tomándolo como eso (señala la expresión $2^0=2$).
I: ¡Ah!
F: Sí.

I: ¡Ah! Sí, por dos (escribe el 2 para tener la expresión $8{\cdot}4{\cdot}2$).
F: Entonces va ha ser falso.
I: Ocho por cuatro treinta y dos, por dos sesenta y cuatro (escribe =32 para tener la expresión $8{\cdot}4{\cdot}2 = 64$).
F: Pero esto (señala el 32 de la expresión calculada sumando los exponentes) es diferente de sesenta y cuatro (escribe $\neq 64$). Que es por lo tanto incorrecto.
I: Ja ja
F: O sea si lo tomamos como esto (señala la expresión $2^0=2$).
I: O sea
F: Ya implica errores, haciendo en una ecuación ya substituyendo esto (señala la expresión $2^0=2$) ya es un error, pero si lo sustituimos como igual a uno (escribe la expresión $2^0=1$) ya te da la igualdad, que sería esto treinta y dos.
N: Conociendo que dos a la cero es igual a uno.
F: Igual a treinta y dos, si lo tomamos así. Entonces el error va a ser este (señala el 2^0 de la expresión $2^3{\cdot}2^2{\cdot}2^0$) si lo tomamos como este (señala la expresión $2^0=2$).
P: Que es este de acá abajo ¿Verdad?
F: Si lo tomamos como dos a la cero igual a dos.
P: Que esto de acá, ¿verdad? ahí lo están tomando mal (señala en el pizarron el paso en donde usando que $2^0=2$). Entonces ese sería el problema ¿no?

La regla de transformación $2^{-3}=-8$

P: ¿Por qué no usar dos a la menos tres igual a la menos ocho?
I: Pienso
F: Dos a la menos tres igual a la menos ocho (escribe en el pizarrón $2^{-3}=-8$).
N: ¿Por qué no usarla? Porque pues, es igual que la anterior.
I: Pienso. Quiero dar una respuesta, no se si sea valido. Hay cosas que se justifican y se argumentan. O sea, no… tenemos como conocimiento desde la secundaria que existe un teorema o una justificación.
F: Una propiedad.
I: Una propiedad para los positivos y otro para los negativos
F: Son diferentes.
I: Y son diferentes. Y en este caso si hubiera una argumentación en general para todos los números reales si sería aceptable.

Notemos como fue hasta este punto de la sesión de trabajo en que se hizo explícito la distinción de tipo de exponente.

P: Es decir entonces ¿por qué no usar esta?

F: Por que nos implica lo mismo, nos implica errores.
P: A ver uno.
F: A ver hazlo (se dirige a I).
N: Por ejemplo este ocho, si lo usamos así (señala la expresión: $2^{-3}=-8$) y ya conociendo que dos a la menos tres es igual a uno sobre ocho (escribe la expresión: $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$). Esta cantidad es diferente que esta (señala la expresión: $2^{-3}=-8$).
P: Claro, menos ocho es distinto a un octavo, claro. Pero la pregunta es por qué no usar lo que usan los estudiantes, dos la menos tres igual a menos ocho.
N: Porque igualmente también nos llevaría a un error, que sería un error que, un error muy grande que cambiaría.
P: Por ejemplo.
F: No, lo puedes poner así como aquí (se refiere a lo que escribieron para la pregunta anterior) como
P: No puedes usar ambas igualdades porque desde el principio ya está mal, ya está contradictorio.
F: Puedes hacerle así aquí como le hizo acá el compañero (se refiere a I) a la menos tres por dos a la menos dos igual a dos a la menos cinco (escribe el en pizarrón: $2^{-3}\cdot 2^{-2}=2^{-5}$)
N: Aja.
F: Entonces, entonces si
N: Se
F: Se substituye aquí, este supongamos
N: Por que a (no se entiende lo que dice) uno a la dos a la tres por uno sobre dos a la dos (escribe debajo de la expresión $2^{-3}\cdot 2^{-2}=2^{-5}$ el producto de cocientes $\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^2}$)
F: A de ser diferente que este.
N: Van a ser unos resultados diferentes que, que si se tomara en cuenta que es
F: Que esto
N: Sería menos treinta y dos, aquí lo tomaría como menos treinta y dos (señala la parte derecha de la expresión $2^{-3}\cdot 2^{-2}=2^{-5}$) este resultado de aquí (encierra en una circunferencia expresión $2^{-3}\cdot 2^{-2}=2^{-5}$) ellos lo tomaría como menos treinta y dos, sería multiplicando a este tantas veces, pero negativo.
F: Si lo ponemos correcto, si lo ponemos correcto ya sería esto (sobre escribe en la expresión $\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^2}$).
N: Si multiplicamos por
F: Sería esto, no, sería por
N: Multiplicamos por.
F: Un treintaidosavo sería

N: Por un cuarto (escribe la igualdad derecha de la expresión $\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$)
F: Un treintaidosavo que no es lo mismo que, que no es lo mismo que menos treinta y dos, entonces ahí ya, ahí proviene el error, ahí hay errores ya en esto.
I: Ahí lo que están argumentando que eso es lo mismo, que no es lo mismo.
F: No es lo mismo.
I: Pero lo que nos están preguntando es por qué no aceptarlo.
F: Porque llegaríamos a estos errores.
N: Llegaríamos a igualdades que son diferentes.
F: O sea diferentes no,
N: Esta es muy diferente de esta.
I: Sí pues, son diferentes; pero ahora por qué no usarlas, por qué no aceptarlas.
F: Porque hay propiedades que nos dicen
N: Porque provoca errores, porque nos provoca errores. O sea tú al usar este, tú lo usas en una, por ejemplo, en una probabilidad.
I: Eso es para ti, que ya tienes conocimiento anteriormente y lo tienes muy conocido se puede decir que es incorrecto.
N: Sí pues, pero lo que se va ha justificar, lo que se va ha justificar es por qué no usarlo
F: Lo que nos está diciendo es por qué no usarlo, por qué no usarlo
N: Por qué no usarlo. Nos va ha llevar a errores
F: No nos está diciendo este otro tipo de pregunta, te está diciendo por qué no usarlo, por eso (señala el pizarrón). Porque si tuvieras eso así
N: Si tú la usas en una probabilidad esto (señala en -32), esto te va a llevar a un error grande a esto (señala 1/32).
F: Si tú substituyes, si tú haces eso y los substituyes aquí (señala la parte izquierda de la expresión $2^{-3}\cdot 2^{-2}=2^{-5}$) y aquí (señala la parte derecha de la expresión $2^{-3}\cdot 2^{-2}=2^{-5}$) esto es un error cuando tú sabes que ya demostraste esto (señala la igualdad $\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$).
I: Eso es por el conocimiento que tú tienes,
F: Eso es lo que te están preguntando ahí.
I: Ahora si tuvieras un alumno más terco que yo, y no lo pudieras convencer ¿Qué harías?
N: Pues ni modo, pues
Todos: Ja ja ja
N: Ya se les está dando el conocimiento para, que es correcto (señala la expresión: $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$), si el quiere aferrarse a este conocimiento que es totalmente falso (señala la expresión: $2^{-3}=-8$) (N realiza gestos y movimientos que dan a entender que nada se puede hacer).

F: Va ha ser un error, como. Ahora tú (se dirige a I) que tienes, a ver di más o menos cómo este, cómo le harías tú pues, para
I: Estoy tratando de encontrar una respuesta, pero no, no
P: Sí, como que la idea es que provoca errores ¿no?
N: Sí.
P: Yo lo que veo en su razonamiento es que están utilizando que dos a la menos tres es igual a uno entre dos a la ocho. O sea, están utilizando una hipótesis distinta. Lo que se pregunta es por qué no utilizar ese tipo de desigualdades, yo creo que es más o menos lo que tú decías (se dirige a I), ¿no? Y lo están usando algo correcto, pues ¿Cómo? ¿no? Sabía, digamos, para que el argumento fuera, la idea está bien nada más que la conclusión tiene un defecto, es la que menciona I. A ver explícala otra vez (se dirige a I).
I: Eso no es lo que dije, que, es que mira, lo que pasa de que. La pregunta que está haciendo entiéndela bien F. Siento que siempre me contradicen, mira lo que pasa
F: ¿Por qué no usas la esa (se refiere a la expresión 2^{-3}=-8)?
I: ¿Por qué no usarla? Exactamente,
F: Porque es incorrecto.
I: Para esto, para alumnos de secundaria y bachillerato esto (señala la parte izquierda de la expresión $2^{-3}\cdot 2^{-2}=2^{-5}$) es totalmente correcto.
F: Pero no es correcto.
I: No es correcto, nosotros, por ejemplo, tú y yo ya lo sabemos, que es totalmente incorrecto,

[Durante cinco minutos I intenta explicar a N y F que no se debería utilizar las reglas de transformación $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$ y $2^{-2}=\frac{1}{2^2}$ en los razonamientos anteriores. N y F afirman un par de veces que porque está mal o es incorrecto. P les pide a N y F que hagan un esfuerzo para entender que es lo que está diciendo I. P apoya a I diciendo que no se deberían usar las reglas de transformación “correctas”]

I: Ya encontré una explicación. Quiero que esto (se dirige a F señalando la expresión 2^{-3}=-8), por qué no utilizarla y no te bases en esto que estoy tapando (se coloca de tal manera que oculta lo que N y F escribieron anteriormente). Explica esto, no te bases en esto y vas a encontrar la respuesta correcta. Y esa es la respuesta que el profe quiere.
P: A ver si quieres borrale, ya que no quieres que se basen en eso.
I: No, no, no. Nada más hazte a la idea de que esto no existe (señala lo que N y F escribieron)
N, F: Ahora borrale
I: Haz de cuenta que está argumentación no existe, ni esta, ni la de (borra las expresiones $2^{-3}\cdot 2^{-2} = 2^{-5}$ y $\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$).

F: Sí, sí
N: Borra eso también.
I: Explica esto, ¿Por qué no utilizarla?
F: …
P: Lo que estamos pidiendo aquí es un ejercicio de ponerse en los zapatos de otro, que dice eso.
F: Ya, ya, ya

[F y I hacen una reflexión sobre los motivo para tener dificultades para entender lo que se pide. Mencionan que el problema es que ellos ya saben [las reglas de transformación]]

F: Entonces volviendo al tema, me parece
P y I: Ja ja
P: Ya se dan por complacidos
F y I: Sí.

[…]

P: Por ejemplo, en el primer ejemplo pusieron ¿Por qué no aceptar dos a la cero igual a dos?
F: Porque está un más explicado ahí, un poco más
I: Lo que pasa es que el cero.
F: Son diferentes.
I: Son diferentes, aparenta ser
F: Es diferente esa ecuación con esta, es más viable explicar esta (se refiere al exponente cero) que esta (se refiere al exponente negativo).
P: A ver repasemos la de dos a la cero igual a dos.

[Durante 4 minutos F y I recapitulan lo discutido a raíz de la pregunta ¿Por qué no aceptar $2^0=2$? En el pizarrón escriben lo siguiente:

$$2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^0 = 2^{3+2+0} = 2^5$$

$$8 \cdot 4 \cdot 2 = 32$$

$$64 \neq 32$$

]

P: Entonces, ¿aquí ya queda claro esto?
F y N: Sí.
P: ¿Sí? A ver, ahora el negativo.
F: Este, ja ja, ¿I? (se refiere a su compañero)
N: Negativo.
F: I (se refiere a su compañero, dándole a entender que el conteste)
P: Entonces en conclusión, no aceptamos dos a la cero igual dos ¿Por…?
F: Porque hay errores en la desigualdad, en la igualdad pues.

N: Exacto.
P: ¿Por qué no aceptar que dos a la menos tres es igual a menos ocho?
F: Porque nos lleva a errores que nos puede costar la vida.
P: ¿Cuáles errores?
I: Que sea tarea para llevar.
P: Diez minutos. Ahorita.

[Por un minuto F y N trabajan frente al pizarrón. N escribe $2^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-1} = 2^{-3}$ y F $2^{0} + 2^{-3} = 2^{-3}$

$1 - 8 = \frac{1}{8}$

$-7 = \frac{1}{8}$

]

F: ¿Lo podríamos hacer como esto (señala lo que él y I escribieron antes en el pizarrón), nomás que tomando esto (señala el sumando 2^{-3} de la expresión que escribió en el pizarrón)) como igual a menos ocho (escribe -8 en otra zona del pizarrón), esto (vuelve a señalar el factor sumando 2^{-3}) y esto (señala la parte derecha de la expresión $2^{0} + 2^{-3} = 2^{-3}$) ya lo podemos tomar correctamente, esto (señala nuevamente la parte derecha de la expresión $2^{0} + 2^{-3} = 2^{-3}$).
P: No podríamos usar dos a la menos tres igual a uno entre ocho. Estamos suponiendo que dos a la menos tres es menos ocho.
F: Ahí está, bueno, sería menos ocho (borra y escribe para tener la expresión $2^{0} + 2^{-3} = -8$) entonces aquí, nos va causar error, menos ocho, tomamos esto, entonces si ya sustituimos aquí, tomamos esto y como esto es elevado a esto (fue imposible determinar que expresiones señalaba ya que N obstruía la cámara) la misma base.
P: A ver, dos a la cero… ¿es más dos a la tres? No se si (le pide a N que se mueva un poco)
I: A ver F.
F: ¿Cómo, cómo?
P: (se dirige a I y N para que atiendan a lo que está escribiendo F).
F: ¿Aquí? (señala la expresión $2^{0} + 2^{-3} = -8$). Dos a la cero
N: Más dos a la menos tres
F: Más dos a la menos tres, si lo sumamos, sumamos los exponentes, entonces la misma base va ha ser igual a esto, dos a la menos tres.
P: Entonces no es suma.
F: Esto (borra el signo menos y lo cambia por un punto para que la expresión quede como $2^{0} \cdot 2^{-3} = 2^{-3}$)
P: Sí ¿no?
F, N: Sí.
P: Entonces ya cambia.

I: Ya cambia totalmente.
F: Aja, entonces queda esto ¿no? (modifica una de las expresiones que tenía con suma para tener lo siguiente

$$2^0 \cdot 2^{-3} = 2^{-3}$$
$$1(-8) = -8$$
$$-8 = -8$$
)

P: Entonces está bien.
F: Entonces está bien.
P,F: ja ja
I: A ver, a ver, esperate (evita que F borre lo que se tenía escrito)
F: Sí, porque que aquí va ser uno.
I: Uno menos ocho.
N: No, aquí va ha cambiar, porque se va ha tomar en cuenta esto también (señala la igualdad $2^0=2$ que se encuentra en otra zona del pizarrón) que dos a la cero también es igual a dos ¿no? Suponiendo que
F: No, pero entonces ya ese error no lo meteríamos, porque va ha seguir siendo el mismo error ¿no crees? O sea si cambiamos este estamos utilizando aquel (se refiere a usar $2^0=2$).
N: Se usa también es este ¿no?
I: Se está basando no hay que aceptar ¿verdad? (señala la igualdad $2^0=2$).
F: Eso ya (se refiere a usar $2^0=2$), esto, esto (se refiere a $2^{-3}=-8$).
P: ¿Pero por qué…?
I: ¿Y por qué en particular te fuiste en particular con dos a la cero?
N: Pero (dirigiéndose a P) tomando en cuenta que se toma esto (señala la igualdad $2^0=2$) como correcto también ¿no?
I: Sí, pues, te estoy diciendo como correcto, te estoy diciendo
F: (borra el pizarrón).
N: Esperate.
I: Mira F, se ahí, de ahí, de ahí podemos dar respuesta al profe, así está bien como lo estoy diciendo.
F: Esperate, si está bien, pero le vamos a poner como dos a la menos dos.
I: Vas a caer en lo de hace rato.
F: No.
I: A ver.
F: ¡Ah! Sí. Ja ja.
I: Te digo. Así como lo explicó N, N ya platicó, te va a dar la idea.
N: A ver (pasa frente al pizarrón).

Hay que notar en la fuerte convicción de que encontrarán una desigualdad. Debido, sobre todo, a lo seguros que están de la veracidad de las reglas de transformación que saben utilizar.

[N escribe

$$2^0 \cdot 2^{-3} = 2^{-3} = -8$$
$$2 \cdot 2^{-3} = -16$$
]

I: Profe, ¿Es necesario que la respuesta que usted nos pide sea justificando vía con, o sea especificando pues, demostrando un ejemplo paticular?
P: Como puedan.
N: ¿Así I?

(N ha escrito en el pizarrón

$2^0 \cdot 2^{-3} = 2^{-3} = -8$

$2 \cdot 2^{-3} = -16$)

P: Bueno… ¿Ya acabaste? (se dirige a N)
N: Sí. Tomando en cuenta esto como verdadero (señala la igualdad $2^0=2$) [explica lo que escribió] vemos que estos dos cambian (se refiere al -8 y al -16).
P: A ver.
I: Una explicación profe…

[I desarrolla un argumento sobre los motivos que los estudiantes de secundaria tienen para contestar "mal"; el cual se basa entre las diferencias de conocimientos entre ellos (F, I y N) y los estudiantes de secundaria: los primeros ya saben propiedades y los segundos no. A continuación F y I refieren que los estudiantes de secundaria utilizan en "general" el modelo de multiplicación reiterada]

I: ¿No sé si me haya entendido (se dirige a P)? Pienso que esa sería mi explicación.
P: Ok, es la explicación de por qué los estudiantes, se me hace una muy buena explicación de por qué los estudiantes dicen eso.
I: Dicen eso, yo creo porque, porque bueno, aquí lo estoy haciendo… explicación para este caso nunca la vamos, pienso que nunca la vamos a encontrar porque
F: Un argumento de por qué debemos utilizar eso.
I: Aja. O sea, esa pregunta que usted nos hace es como un axioma, vamos a suponer ¿no?, pienso, porque es algo que, algo incompleto para nosotros de que no vamos a aceptar, ¡nunca! Porque ya tenemos unas leyes que nosotros nos enseñaron de que todo número elevado a negativo se va presentar como…, por ejemplo dos a la menos tres [verbaliza la regla de transformación]. Ya, es todo lo que tengo que decir al respecto.

Lo interesante de esta declaración es que el haber encontrado la "desigualdad" (el por qué no) no implica para ellos que ese mismo tipo de razonamientos pueden llevar a la "igualdad" (el por qué sí).

P: Ok, tu explicación es como en general.
I: En general, por eso le estoy preguntando que si se podría.
P: Otro tipo de respuesta es particular

I: Particular, por eso le pregunte cómo podría dar mi respuesta. ¡Como puedas! Me dijo.
P: Por eso y está bien. Pero, ok, entonces tu respuesta se me hace aceptable, se me hace adecuada porque explica por qué los estudiantes confunden ¿no? Y en específico dentro del contenido matemático ¿Por qué no aceptar que dos a la menos tres es igual a la menos ocho?
I: Eso.
P: Eso es como más específico.
I: Andele, eso como, pienso que sería como una demostración que por qué no aceptarla.
P: Esa sería.
I: Y una demostración por qué, porque los resultados van a salir diferentes y lo que lo que está explicando y eso sí es aceptable a lo que te estaba explicando, bueno, con N. De que va ha ser totalmente diferente al igualarlo, en una va ha salir menos treinta y dos y en la otra va ha ser un treintaidosavo.
P: Habría errores ¿verdad?
I: Aja, habría errores.
P: Y ya mostraron algunos… Por ejemplo ahorita vi que la explicación que pusieron fue utilizando dos errores, digo, nosotros sabemos que dos cosas están mal, utilizaron que dos a la cero es dos y dos a la menos tres igual a la menos ocho. Y el resulta es mal, no se pueden usar las dos; pero específicamente ¿Por qué no se puede utilizar dos a la menos tres?

P se da cuenta de que la desigualdad es provocada por usar dos reglas de transformación “erróneas”, por lo que, en términos lógicos, el argumento no garantiza que no se pueda usar las regla $2^{-3}=-8$ en solidaridad con la ley de multiplicación de potencias.

[P pide que trabajen con dos hipótesis: $2^0=1$ y $2^{-3}=-8$. P abunda tratando de explicar porque no se puede asegurar que el problema este en usar $2^{-3}=-8$. Vuelve pedir “que usen una correcta y otra incorrecta”: $2^0=1$ y $2^{-3}=-8$.

N usa la misma expresión que antes y escribe:

$$2^0 \cdot 2^{-3} = 2^{-3} = -8$$
$$1 \cdot (-8) = -8 = -8$$
$$-8 = -8$$

]

P: ¡Ah mira! Ahí esta, entonces ahí dice que está bien,
F: Aja.
P: O sea que dos a la manos tres sí se podría usar, ¡Fíjate! No llega.
N: No, es que…
F: No.

P: Aparte de dos a la cero…
F: Aquí…
P:¿Cuánto es dos a la cero por dos a la menos tres?
N: ¡Ah! ya ya ya agarre la onda, ya ya ya sé.
P: A mejor lo que no escribiste (Se dirige a N y escribe en pizarrón $2^0 \cdot 2^{-3} = 2^{0-3} = 2^{-3}$) y luego separaste ¿no? y luego aquí una, cada una por su lado (se refiere a los cálculos que llevaron a N a -8 = -8) y no llega a desigualdad.
F: Entonces, aquí.
I: ¿Quiere saber en dónde está el error?
P: Ahí no hay error menos ocho es igual a menos ocho.
F: Ahí sí se da la desigualdad. Pero si le hacemos así como yo digo, si tomamos, si tomamos… dos a la menos tres igual a menos ocho.
I: Aquí ya sabemos que esto es incorrecto ¿no? (señala el factor 2^{-3} de la expresión que antes escribió N).
F: ¿Por qué?
I: (hace gestos de incredulidad).
P: ¿Cómo fue que llegaste a menos ocho igual a menos ocho N?
I: A ver N, eso… yo se que esto es incorrecto? (vuelve a señalar el factor 2^{-3} de la expresión que antes escribió N).
P: ¿Cómo fue que escribiste el menos ocho allá?
I: Te voy ha decir N. Porque aquí le pusiste la negación.
N: No, o sea…
I: Sí, aquí le borraste la negación la negación.
N: ¿Por qué que? (Se dirige a P)
P: A ver, yo metí mi cuchara, pero no supe de verdad por qué. (Se refiere a lo que N escribió).
I: Sí, porque esto es incorrecto, no no
F: Es que el lo está haciendo como dice el profe, que dos a la menos tres, bueno como dice la pregunta, es menos ocho, entonces el nada más esta sustituyendo (señala la expresión 2^{-3}=-8) esto aquí (señala 2^{-3} en ambos lados de lo que escribió N) está sustituyendo. A ver dame chance. Sustituye eso ahí, pero también lo podemos sustituir, pero también podemos… [F calcula de dos maneras la expresión $2^0 \cdot 2^{-3}$ una usando que 2^{-3}=-8 y otra que 2^{-3}=1/8, a lo que P responde que no se puede, pues desde el principio esta usando "desigualdad"].

Aquí es interesante notar el problema que resulta para F el trabajar bajo la hipótesis de 2^{-3}=-8 excluyendo lo que ya sabe con toda certeza: 2^{-3}=1/8.

P: La pregunta es porque esta nada más (señala 2^{-3}=-8)… ¿Por qué estamos tan seguros que va ha causar errores?
F: Porque no es correcta la respuesta.
I: Porque con los conocimientos ya tenemos una…
N: Por nuestros conocimientos anteriores.

I: Por nuestros conocimientos ya tenemos unas reglas que nos rigen, que sabemos que cuando no se utilizan van a salir errores.
P: Sale, entonces lo que yo estoy pidiendo es que muestren el error.
I: Lo que está pidiendo es (no se entiende lo que dice).
P: Aja, o sea, digo, la idea es general ¿no? Si uso cosas malas, como que nos a llevar, aunque eso no siempre es cierto

[Aquí P dedica a tratar de buscar un ejemplo, que no encontrará, que muestre que usar cosas equivocadas no implica llegar a cosas equivocadas. Él buscaba el ejemplo 64/16=4 ya que se "elimina" el número seis del numerador y el denominador. Finalmente parece que los convence cuando N dice...]

N: Como la que hice, ¿no?
P: A ver, por ejemplo
I: La chiripa que te aventaste.
N: Esto era igual a dos a la menos tres (N escribe $2^{-3} \cdot 2^{0} = 2^{-3} = -8$) Entonces esto sería aquí dos...ocho ¿tomando que esto es igual a uno, según nos dijo? (Se dirige a P señalando el factor 2^0 de la expresión anterior).
P: Aja.

[N escribe debajo de $2^{-3} \cdot 2^{0} = 2^{-3} = -8$ lo siguiente

$-8 \cdot 1 = -8$

$-8 = -8$

]

Notemos que otra vez N no hace explícita la suma de los exponentes.

P: O sea, eso no lleva a error.
N: No lleva a error.
P: Y dos a la menos tres no es igual a la menos ocho, pero utilizando eso no se llega a un error. Error no implica error.
N: Error implica error. Error no implica...
P: Error no error... ja. En este contexto ¿no? O sea, puedes hacer las cosas mal, pero después llegar a algo correcto.
F: Vas a llegar a tu mismo error.
N: Tomando una verdad y una falsa te puede llevar a una ecuación...
F: No, pero vamos a hacer esto. Tomamos una verdadera y una falsa ¿sí o no? (Señala las expresiones 2^{-3}=-8 y 2^{-3}=1/8 que están escritas en otra zona del pizarrón).
P: Ahí pues desde el principio estas diciendo que todo es falso, estás tomando dos cosas para lo mismo:
F: Diferentes.
I: Entonces...
P: Es lo que está haciendo es lo que tú preguntabas, otra vez explica N.

I: Ya, ya le entendí. Esto lo tomo como falso, no como
F: Verdadero.
I: Como verdadero sabiendo que es falso (señala el factor 2^{-3} de la expresión $2^{-3}\cdot 2^{0}=2^{-3}=-8$). Esto lo tomo como falso verdadero (Señala respectivamente el menos ocho y el uno, de los factores de la parte izquierda de la expresión $-8\cdot 1=-8$).
N: O como esto como verdadero y esto como falso (Señala respectivamente el dos a la menos y dos a la cero uno, de los factores de la parte izquierda de la expresión $2^{-3}\cdot 2^{0}=2^{-3}=-8$).

[N dice algunas cosas que muestran diferentes opciones verdadero-falos]

P: ¿Cómo fue que escribiste esto acá (señala el menos ocho de la expresión: $2^{-3}\cdot 2^{0}=2^{-3}=-8$) .
N: Por esto (señala la expresión $2^{-3}=-8$ que está escrita en otra zona del pizarrón).
F: Es la suma de los…
P: ¿Sumaste, sumo los exponentes?
N: Sí. Sume los exponentes.
P: Sale, por un lado se llega a menos ocho y por el otro también a menos ocho.

[Todos, especialmente I, perciben que fueron dos los caminos seguidos para llegar a ocho]

P: O sea que esa no es la razón de por qué no usar dos a la menos tres. Eso no lleva a problemas.

[P insiste en no usar dos errores]

P: Vamos otra vez en el principio, ¿Por qué no usar dos a la menos tres como menos ocho? Esa no es una razón, porque ahí no paso nada.
F: Sí, no pasó nada.
(F y N trabajan escribiendo en el pizarrón)
N: ¿Se puede tomar como…?... Si esto es así (escribe $2^{-3}\cdot 2^{6}$)
[F ha escrito en el pizarrón lo siguiente:

$$2^{5}\cdot 2^{-3}=2^{2}$$

$$32(-8)=4$$

$$-256=4$$

F: Ahí está. ¿Sí o no? Ahí es el error, por eso. ¿Sí o no N?
N: ¡Ah! Tomas uno negativo y uno positivo.
F: Entonces, aquí si ya multiplicas todo esto…

[Unos segundos P cambia la posición de la cámara y se percata que la cinta se está acabando]

F: Aquí está. Aquí sí se va a ver, me imagino ¿no? porque si utilizamos uno positivo y uno negativo que sería dos a la menos tres y sustituimos aquí, y se sabe que la base multiplicada por la mima base se suman los exponentes, entonces aquí sería, sumando estos sería dos a la menos dos que sería, digo dos a la dos, que sería igual a cuatro y si tú sustituyes, dos a la menos tres igual a menos ocho te da otra cantidad que sería esto, que no es igual a esto, es diferente. Entonces ahí comenten los errores, porque si sustituimos un octavo ya te va ha dar cuatro, te tiene que dar cuatro.

[P concluye que por eso es no usar dos a menos tres igual a menos ocho]

ANEXO 3

Estudio exploratorio con estudiantes de licenciatura: Transcripciones de la Sesión de trabajo Equipo 2

L, J, M & H son las alumnas (todas mujeres) y P es el profesor.

(Hora: Minuto: Segundo)

(0:00:00) Inicio de la imagen del vídeo

Parte I. Cuestionario 1

La regla de transformación $2^{1.5} = \sqrt{(2^3)}$

00:01:20 – 00:04:30

J escribe en el pizarrón

$$2^{1.5} = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

J: Y ya.
P: Muy bien, ¿no quieren decir nada?... ¿Algún comentario?
J: ¿Una justificación de cómo le hicimos?
P: Sí, nada más
J: Pues, como está la base, que en este caso es dos, elevado a un exponente decimal, uno punto cinco, entonces lo que hicimos… fue elevar esa misma base, pero ahora cambiamos el exponente decimal a fraccionario que equivale a tres medios, uno punto cinco equivale a tres medios, después aplicamos la definición de una base elevada a un exponente fraccionario que es igual a la raíz cuadrada de dos a la tres, aplicando esta definición. Y ya después simplicamos nada más.

Uso y justificación de la regla de transformación $2^0 = 1$

0:04:47 - 00:06:03

En lo que sigue se observa como el razonamiento adquiere el status de

demostración de la regla de transformación $2^0=1$, al usar como supuesto la regla de transformación $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

H escribe en el pizarrón

$$2^0 = 1$$

H: Bueno, dos a la cero es igual a uno. Por una definición que tenemos que nos dice que todo número elevado al exponente cero es siempre uno.
P: ¿Algún otro comentario tiene ustedes? ¿no?
M: Eso resulta por las potencias ¿no? Dos a la cero resulta de que si dos potencias iguales se dividen por lo tanto sería la base al exponente menos el exponente del denominador. Entonces queda dos a la cero.
P: ¿Quieres pasar a escribir?

M pasa frente al pizarrón y escribe

$$\frac{2^2}{2^2}=2^{2-2}=2^0=1$$

$$\frac{4}{4}=1$$

M: (Habla mientras escribió lo anterior) Si tenemos dos potencias que sería dos al cuadrado entre dos al cuadrado esto puede ser, los exponentes se restan, sería dos al cuadrado menos dos y esto es igual a dos a la cero, entonces dos a la cero es igual a uno; pero porque dos al cuadrado es igual a cuatro y entre dos al cuadrado también es igual a cuatro, entonces cuatro entre cuatro es igual a uno, entonces se dice que una base elevada al exponente cero va a ser igual a la unidad, por lo de las potencias.
P: ¿Eso no lo contestaron en el cuestionario?
M, J, H, L: No.
P: O sea… lo que dijeron era que…
M: Dos a la cero es igual a uno.
P: Lo del principio, lo de que todo número elevado a la cero...
M, J: Va a dar a la unidad.
P: Bien, entonces eso presenta, es una justificación distinta ¿no? Digamos que es un argumento ¿no? Para decir que dos a la cero es igual a uno.
M: Una interpretación.
P: Aja, una interpretación.

Uso y justificación de la regla de transformación $2^1= 2$

00:06:03 – 00:11:50

En lo que sigue se observa como el razonamiento adquiere el status de demostración de la regla de transformación $2^1=2$, al usar como supuesto la regla de transformación $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

P: A ver, el otro que proponíamos era dos a la uno.

[L pasa la pasa la pizarrón y escribe $2^1= 2$]

L: Bueno, dos a la uno es igual a la propia base, esto es por definición de que una base elevada al exponente uno es igual a la propia base.
P: ¿Y por qué todo número elevado al exponente uno es dos [sic.]?
L: Esa es una justificación, ¿no sé si sea correcta?
P: Sí, estoy de acuerdo que lo que me dijiste es…
L: Es la definición de una base elevada al exponente uno es igual a la misma base.
P: Bueno, estamos de acuerdo que dos a la uno es dos. ¿Lo que dijo ella (se refiere a M) es una justificación?
M: No sé.
P: A ver, ¿No sé si me explico con la palabra justificar?...

[Un minuto bromeando con la cámara]

P: A ver, ¿No sé si me explico con lo de justificar? Con la palabra justificar.

[Un momento de silencio]
P: A ver, por ejemplo, al principio decían que dos a la cero es uno y después M puso esto (señala el pizarrón), que es distinto a decir que todo número a la cero es uno ¿no? Es distinto porque, porque como dijeron cosas para decir que dos a la cero es uno.
M: Sí.
P: ¿Y qué pasa con dos a la uno? ¿Por qué dos a la uno es dos?
M: Se puede también interpretar de esa forma ¿no?
J: Aja.
M: Como justificamos dos a la cero, sería una potencia más grande en el numerador… y en el denominador más…
J: El exponente más…
M, J: Mayor en el numerador y menor en el denominador
M: Se puede como dar un ejemplo. Mira pon (se dirige a L que está frente al pizarrón) dos al cuadrado entre dos. ¡Ah! Pero ahí estaríamos utilizando también dos a la uno.
H: Dos a la uno.

M: Entonces eso no quiere decir que es… o sea, pon dos al cubo entre dos al cuadrado (L escribe: $\frac{2^3}{2^2}=$) ahora si restas esas potencias, esos exponentes. Sería dos al cubo menos dos (L escribe: $=2^{3-2}$) eso es igual a dos a la uno (L escribe: $=2^1$) y dos a la uno es igual a dos, ahora ¿cuánto sería dos al cubo?, dos al cubo sería ocho entre dos al cuadrado que sería cuatro, ocho entre cuatro es igual a dos (L escribe = $\frac{8}{4}=2$).

[En el pizarrón a quedado la escrito lo siguiente: $\frac{2^3}{2^2}=2^{3-2}=2^1=\frac{8}{4}=2$

M: Entonces, eso quiere decir que una base elevada al exponente uno va a ser la misma base. ¿O no, no sería así? (se dirige a P).
P: Eso…
M: Con interpretación, pues, por interpretación.
O: Ok, entonces ahí este…
M: Tampoco pusimos esto (se refieren a lo que entregaron de tarea: los Cuestionario 1 y 2)
P: Tampoco lo pusieron, lo que pasa es que…
J: Es que lo pensamos después
M: Aja.
H: Reflexionamos después.
P: Y en la tarea ¿por qué no?… digo, pregunto, no se cuándo fue después.
M: Cuando estábamos platicando bien que íbamos a pasar.
P: Muy bien. Entonces esto es una explicación, o una ¿cómo le llamas? ¿Una interpretación?
J: Interpretación.
P: Interpretación de que, Ok.
L: De que dos a la uno es igual a dos.
P: Muy bien, sale.

Uso y justificación de la regla de transformación $2^{-3}=1/2^3$

00:11:50-00:21:00

[M pasa y escribe $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$]

M: Estas bases elevadas a exponentes negativos resulta también respecto de estas interpretaciones (señala lo que L escribió antes en el pizarrón), porque si ponemos un numerador, una potencia más grande, más chica perdón, supongamos así (escribe: $\frac{2^2}{2^3}$) esta potencia es más grande que esta (señala el numerador y el denominador respectivamente, sic.)

entonces esto sería igual a dos por, vamos estar aquí (señala lo que L escribió antes en el pizarrón), sería a dos menos tres y aquí nos va a resultar que es esto va a ser igual a dos a la menos uno (escribe: = $2^{2-3} = 2^{-1}$). Resulta de la división de dos bases elevadas a los exponentes, pero la base del numerador elevada al exponente es menor que la del denominador. De eso resulta esto (señala el 2^{-1} de la expresión anterior), resulta eso... dos a un exponente negativo, ahora cómo, pero si tenemos... ahora no sé explicar cómo decir que esto (señala el cociente $\frac{2^2}{2^3}$) va a ser a la unidad entre dos a la uno (escribe: $\frac{1}{2^1}$). O sea como está esto elevado a un negativo podemos tomar la unidad entre dos a la uno, o sea como está esto elevado a un negativo podemos tomar la unidad como deno... como numerador y bajar la base al denominador pero ya con el exponente positivo.
P: ¿En el caso de dos a la menos tres?

[M verbaliza la regla de transformación $2^{-3}= 1/2^3$ como arriba]

P: Ok, entonces eso es una explicación que dos a la menos tres... pero no me queda claro por qué. A ver, por ejemplo, ¿Quién falta?
J: ¿Explicar sobre que?
P: Sobre dos a la menos tres.
J: Sobre dos a la menos tres (escribe: 2^{-3})... ¿Explicar por qué es igual a eso?
P: Aja.
J: Pues aquí no encontramos ninguna justificación, así muy...
H: Muy clara.
L: Muy buena ¿no?
P: ¿Y lo que ahorita dijo M?
J: ¡Ah! ¿Por eso? Pues eso, en ese caso vendría de esto

[J escribe primero $\frac{2^6}{2^3} = 2^{-3}$, después de una observación de P rescribe $\frac{2^3}{2^6} = 2^{3-6} = 2^{-3}$]

P: ¿Y eso por qué es uno entre dos a la tres?
M: mmm
P: Es lo que hacia falta ¿no?
M: Sí.

[M verbaliza la regla de transformación $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$]

P: ¿Ahí en particular cómo queda?

M: ¿No me entendiste?
J: No mucho.
M: Es como cuando simplificamos, si tenemos…
J: Sí pues, pero en este caso ¿Cómo?
M: Por eso dos a la menos tres, pero se puede decir que ese es el denominador, por eso, o sea arriba te queda la unidad
H: Te queda la unidad.
M: Te queda esa base elevada a ese exponente; pero porque también se puede interpretar de una forma, si tienes en el numerador una base con un exponente menor que el exponente de la base del denominador. Entonces, es como…
L: Es como.
M:¿Cuántas veces cabe el dos al cubo en?
J: ¿Es cómo si lo desarrollarás así?
[J escribe

$$\frac{2^3}{2^6}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{2^3}$$

para concluir que $2^{-3}= 1/2^3$]

[P hace el señalamiento de que lo que hicieron es distinto a decir sólo la regla de transformación para los exponentes negativos]

Primer búsqueda de justificación de la regla de transformación $2^{1.5} = \sqrt{(2^3)}$

00:21:10-

P: Muy bien, yo quisiera insistir sobre el primer punto, o sea el dos a la tres medios.

[P lee lo que J escribió, en su solución individual del Cuestionario 1, para justificar la regla de transformación. Su justificación es la explicitación escrita del uso de la regla de transformación]

P: Qué es lo que decíamos al principio, “por definición de exponente fraccionario” o sea aquí utiliza la palabra “definición” ¿no? De exponente fraccionario.

[P repite lo que J escribió en su solución individual del Cuestionario 1, lo que es la vebalización de la regla de transformación]

P: ¿Son capaces de dar algo parecido a eso (señala lo que está escrito en el pizarrón y que permitió concluir que $2^{-3}= 1/2^3$) pero con el exponente dos a la tres medios?

M, J: ¿Cómo?
P: ¿Si se entiende la pregunta?
Todas: No.
P: ¿Qué no se entiende exactamente?... a parte de todo.

[Durante un minuto P reacomoda al equipo]

P: Bueno, a ver. Entonces ahí queda. ¿Qué pasa con dos a la tres medios? ¿Si se entiende la pregunta que hice? (un momento de silencio, todas ven hacia el pizarrón) O sea, por ejemplo dos a, al principio decían que dos a la cero es uno y lo que decían era como una manera de convertir.
J: Aja.
P: Todo número elevado a la cero es uno (todas asienten con un gesto). Todo número al exponente negativo se baja y se cambia de signo. Todo número elevado a la uno es el mismo número ¿no? La misma base dicen, bien. Ahora están haciendo lo mismo con dos a la tres medios ¿no? Están diciendo que todo número que tiene, está elevado a un cociente el de arriba que eleva la potencia, la base y le sacan raíz el índice del denominador ¿no?
J: Sí.
P: O sea, es lo que todos usamos. ¿Sí?
Todas: Sí.
P: Más o menos es lo que dicen. ¿Podrían decir algo al respecto…?
M: ¿Una justificación?
P: Una justificación.
M: Cómo es que se llega a eso.
P: (Afirma con la cabeza). Por ejemplo este M, tú eres la que trajiste a colación el de dos a la cero, ¡Ah colación! Al tema ¿no?
M: Sí.
P: Dos a la cero.
M: Sí.
P: ¿Por qué, por qué se te ocurrió eso? Y no en el examen… en el cuestionario que hicimos, en la tarea.
M: (Riendo) Por que estuve revisando los libros.
L: (Riendo) Estuvimos… libros.
P: Estuvieron revisando tarea, muy bien, estudiaron (todas ríen). Está bien me parece perfecto, de eso se trata ¿no?... ¿Y el negativo, también lo vieron en los libros?
M: ¿Cuál?
J: El…
P: El dos a la menos tres.
M: No ¿o sí? (se dirige a J).

(Todas niegan)
M: No, vimos el de cero.
P: ¿Ese se les ocurrió ahorita? (se refiere al exponente negativo).
M: Pues viendo así eso (señala el pizarrón que contiene lo discutido con el exponente negativo).
P: A ver, si yo les pido que hagan el esfuerzo con dos a la tres medios.
M: A ver… ¿podemos pensar un rato?
P: Claro, de hecho, de hecho tomense todo el tiempo que quieran, o sea lo piensan, pueden usar el pizarrón. ¿Podemos borrar eso (lo que está en el pizarrón)? ¿Sí se acuerdan de lo que está ahí?
M: Sí.
J: ¿Explicar de dónde pro… o dar una justificación de dónde
M, L: Cómo se llega a eso
L: Dos a la tres medios…
M: Que es igual a la raíz cuadrada de dos elevado al cubo. ¿Cómo se lega a eso?
J: ¿Cómo se llega que dos elevado a la tres medios es igual….?
M: Así es.
P: Exacto.
M: Es que, si tomamos eso, ¿No es porque? de por sí tenemos entendido que cuando está una raíz, si la queremos representar como una base elevada a un exponente, es como…

[M pregunta si se esta grabando, P dice que si y agrega algunas bromas]
[M escribe en el pizarrón $\sqrt{2} = 2^{1/2}$]

En interesante observar que escribe la regla de transformación “al revés”. Ya que intentos posteriores se basaran en esta idea.

M: O sea nosotros tenemos, traemos entendido que la raíz de un número para representarla como una base elevada a un exponente, ponemos el número y el denominador sería el número al cual esta elevado el, esto ¿no? (señala el dos dentro de la raíz), no sabría cómo se llama… entonces
P: Se llama subradical.
M: ¿Esto? (señala el dos dentro de la raíz).
P: Aja.
M: Bueno, se pone en el numerador se pone a que esta elevado el subradical y en el denominador que raíz está representando, o sea esto es una raíz cuadrada, ya cuando es una raíz cúbica pues aquí tiene aquí tres y así, así se va. Entonces se dice que esto (señala el dos dentro de la raíz) va ser igual al subradical elevado a lo que está, este, al exponente que está el subradical entre lo que es lo… de la raíz.
P: El índice de la raíz.

M: Aja. El índice de la raíz. (Señala las partes subradical e índice de la raíz). Entonces nosotros tenemos entendido esto, llegamos a la conclusión de esto (señala la igualdad $\sqrt{2}=2^{1/2}$) entonces, que si dos a la tres medios ¿a qué será igual? (Escribe $2^{3/2}=$) Entonces si tenemos que dos a la uno es el subradical y este es el índice de la raíz (señala los números que están en el exponente de la parte derecha de la expresión $\sqrt{2}=2^{1/2}$), entonces decimos que dos al cubo es la raíz cuadrada de dos al cubo, por lo que…
P: ¿Ustedes que opinan? (Se dirige a las demás miembros del equipo)
M: ¿Cómo representarlo?

[Silencio de 20 segundos]

M: No.
P: ¿Eso es una justificación?
J: Es la definición ¿no?
P: Es una definición, se puede pensar, pero ¿De dónde salen las definiciones?
H: De hacerlas…
P: ¿Por qué no, por ejemplo…? Bueno… ahorita si quieren volvemos a retomar esto.

[P dice que ya no se trabajaran las demás preguntas del cuestionario 1]

Parte II. Cuestionario 2

(0:31:30-0:48:00)

[Durante 18 minutos se discute los argumentos de los estudiantes. Dejando a un lado algunos matices todas los comprendieron]

Parte III. Manejo de transformaciones falsas

La regla de transformación 2^0=2

(0:48:00)-(1:21:12)

[P entrega una hoja a cada quien que contiene las preguntas:
¿Por qué no usar la igualdad 2^0=2 que los estudiantes de secundaria y bachillerato usan?
¿Por qué no usar la igualdad 2^0=0 que los estudiantes de secundaria y bachillerato usan?]

[P sale del cubículo para dejarlas trabajar en equipo durante diez minutos que dedicaran a leer la pregunta varias veces tratando de comprenderla]

M: ¿Por qué no usar la igualdad $2^0=2$ que los estudiantes de secundaria y bachillerato usan? Dos a la cero igual a dos.
H: ¿Por qué no usarla?... porque nos confundiríamos
M: ¿Y donde quedaría dos a la uno?
H: Aja y nos confundiríamos también, porque ya tenemos en cuenta que…ya me perdí otra vez.
M: O sea, utilizamos dos a la cero igual a dos.
H: Aja.
M: Entonces cuando nosotros queramos elevar una base
J: A la exponente uno
M: ¿Cómo va a quedar entonces?... dos por dos ¿sería cuatro?
J: Eso también es una justificación…
M: A ver, dos que piensen en la primera y dos prensamos en la segunda (se refiere a las preguntas del cuestionario) ¿Quién me ayuda a pensar en la primera?
H: J y yo en la dos.
M: ¿En la dos ustedes?
H: Aja.
J: ¿Por qué no usar la igualdad $2^0=2$…?
M: ¿Por qué no usar la igualdad $2^0=2$…
H: que los estudiantes de secundaria y bachillerato usan?
J: ¿Por qué no usar la simbología?
H: Dos a la cero igual a cero
J: ¿Entienden la pregunta para empezar?
L: Pues…
M: ¿Por qué no usar la igualdad $2^0=2$…?
H: ¿Por qué no siempre tomar en cuenta que dos a la cero igual a cero?
M: O sea ¿por qué no podemos utilizar esto? Dos a la cero es igual a dos ¿Por qué necesariamente tenemos que usar lo que ya tenemos entendido, que dos a la cero es igual a uno?
H: A la unidad.
L: Porque si usáramos esta igualdad entonces cuando quisiéramos elevar con, no digo, cuando se consideran una base elevada a un exponente uno ¿Qué quedaría? ¿Qué representaría?
H: La propia base.
M: Sí ¿no?
J: Pero aquí nos está dando…
M: Es que no se cumplirían en ocasiones, supongamos, podemos basarnos en las justificaciones que dimos.
J: Aja.
M: Qué si dos a la cero es igual a las potencias, a …sión de la potencias, ahora si nosotros decimos que dos a la cero es igual a… a dos no se cumpliría en ¿Las qué?

H: No se cumpliría para dos a la uno es igual a dos, se cumpliría hasta ahí ¿no?, pero dos a dos ya no se cumpliría, porque dos a la dos, sería cuatro ¿no?

54

M, H: ¿Por qué no usar la igualdad $2^0=2$…?
L: ¿Por qué no usar la igualdad $2^0=2$…?
M: ¿Por qué no usar la igualdad $2^0=2$…? Por
H: ¿Por qué no usar la igualdad $2^0=0$…?
M: ¿Por qué? ¿Por qué? ¿Por qué?
H: Porque no se cumpliría en ciertos casos, tomando que dos a la cero es igual a cero, dos a la uno sería uno, dos a la dos sería ¿dos? Sí sería ¿no?

Usa linealidad.

M: Sería diez a la cero sería igual a diez,
L: Diez.
J: Sí.

[Después de 15 minutos de discusión, que por fallas técnicas no fue grabado, concluirán de la manera siguiente]

P: J ¿Quieres comentar lo que escribieron?
J: ¿Leo la pregunta?
P: Aja.
J: Que ¿por qué no usar la igualdad dos a la cero es igual a dos que los estudiantes de secundaria y bachillerato usan? Pusimos que no este, que no sería bueno esa regla que porque ya hay reglas establecidas y además si nos ponemos a pensar en el origen, bueno, nosotros sabemos que dos a la cero es igual a uno, si nos ponemos a pensar en el origen, en el origen de que dos a la cero es igual a uno, entonces si usamos esa igualdad de que dos a la cero es igual a dos no se cumpliría el origen de que dos a la cero es igual a uno. Más que nada eso dijimos (comentario en vos baja entre M y J). Bueno para nosotros… justificación ¿Quién sabe?
P: Bueno, ¿No se si quieran escribir lo que pusieron aquí?. Bueno, ya me lo platicaste pero después pusieron ejemplos ¿no?
M: Sí.
P: ¿M quieres comentarnos?
M: Es por este, pusimos que dos a la cero es igual a uno, por lo de las, por lo de división de iguales potencias, el ejemplo que pusimos fue que dos a la dos entre dos a la dos…

[M escribe:

$\frac{2^2}{2^2} = 2^{2-2} = 2^0 = 1$

de donde $\frac{2^2}{2^2} = \frac{4}{4} = 1$]

M:…pusimos este ejemplo por lo mismo, entonces esto se cumple pero si nosotros ponemos que dos a la cero es igual, digamos que es igual a cero (Borra el uno de la expresión $\frac{2^2}{2^2} = 2^{2-2} = 2^0 = 1$ para escribir un cero y queda como $\frac{2^2}{2^2} = 2^{2-2} = 2^0 = 0$) a cero y si nosotros, ponemos, que dos al cuadrado es igual a esto, esto igual a cuatro entre esto es igual a uno, entonces dos a la cero no… no se cumpliría pues que dos a la cero es igual a cero… cosas que pusimos así.
P: Muy bien, ¿Algún comentario que ustedes quieran agregar? Entonces esa sería una razón de por qué no ¿verdad?
M: Aja.
P: Lo que se busca.

La regla de transformación $2^{1.5}=3$

(1:21:10-

[Inmediato a lo trascrito anteriormente]

P: Lo que yo quisiera retomar es lo que estábamos diciendo hace rato, bueno, no lo puse en el cuestionario pero ¿No se si quieras L… pasar nada más a escribir? ¿Usas el rojo?
M: …tiempo
P: ¿Qué?
M: ¿Qué dos a la cero era igual a dos?
J: Sí, ja ja
M: Es la de abajo.
P: Bueno, es la misma idea creo, ¿Verdad?
M: Sí.
P: O sea, no puede ser ni cero ni dos.
M: Sí.
P: Aja, no cumpliría ese origen. Muy bien. Entonces nosotros teníamos el… hay otro tipo de respuestas, por ejemplo, a ver, hagamos un ejercicio de pensar como los estudiantes que decíamos hace un momento y ¿Cuánto es dos a la tres medios? ¿Qué se les ocurriría que sería dos a la tres medios?
J: ¿Qué se nos ocurriría?
M: ¿Algo que no sea parecido a lo que hicimos ¿verdad?

L: Como piensan los estudiantes.
H: Cómo lo interpretarías tú, como ejemplo.
P: Lo que poníamos al principio es dos a la uno punto cinco ¿Verdad?
M: (dirigiéndose a sus compañeras) Pues multiplicaría la base por el entero. Multiplicamos la base por…

[P le da un marcador a L que pasa frente al pizarrón]

M: …multiplique la base por el exponente, qué sería dos a la uno punto cinco… ¿no?
J: Sí.
L: Dos por uno punto cinco (L escribe en el pizarrón 2x1.5).
M: O bien, tomar primero los enteros, te queda la base por el uno y luego
L: Por el un medio.
M: Por el punto cinco.
P: Entonces tres podrían poner. Dos a la uno punto cinco, podrían poner tres.
L: Tres (escribe el tres para tener ahora: 2x1.5=3).
P: ¿no? Es una posibilidad.
L, J, M: Aja.

[M repite los motivos de elegir 2x1.5. P escribe en el pizarrón $2^{1.5}$=3]

P: ¿Por qué no usar dos a la uno punto cinco como tres?
L: ¿Por qué no usar que…?
M: Dos a la uno punto cinco igual tres.

[30 segundos de silencio]

P: De acuerdo a lo otro que decían era raíz cuadrada de ocho, que es como dos punto ocho y algo.
M: (hablando para si misma) ¿Por qué dos a la uno punto cinco…? Es que sería lo mismo pues.
L: Sería lo mismo.
M: Hay reglas…
L: Que nos hablan de, para elevar una base a un exponente decimal.
P: Que es lo que está allá arriba ¿no?
M: Aja.
P: Lo que decíamos hace rato.
M: Así es.
P: Pero no hemos dado justificaciones de por qué eso, de allá, por qué dos a la uno punto cinco es raíz cuadrada de ocho. ¿O sí? ¿ya dimos justificaciones?
J, M: No.

[20 segundos de silencio]

M: Podríamos desarrollar, este, todo eso ¿no?
P: ¿Cómo todo eso?
M: O sea… podríamos, si tenemos que es dos a la tres medios este seria igual a dos a la uno, sería por ¿verdad?, por dos a la un medio (escribe en el pizarrón: $2^{3/2} = 2^1 \cdot 2^{1/2}$), sabemos que en producto los exponentes se suman, entonces dos a la uno por dos a la un medio eso es igual a un entero más un medio sería tres medios, entonces dos a la uno por regla ya sabemos que es dos ahora sería por (Escribe: $= 2^1 \cdot$, debajo de la expresión anterior), ¡ah! pero aquí nada más estaría justificando por qué es dos por raíz de dos ¿Verdad? Porque ya sabemos que dos a la un medio sería esto a la raíz de dos (escribe $\sqrt{2}$ para completar la expresión anterior a: $= 2^1 \cdot \sqrt{2}$).
P: Entonces habría que justificar por qué dos a la un medio…
M: Es igual a raíz de dos,
J: Sí.
P: Ya no es lo mismito.
M: Sí.
P: O sea es dos a la un medio. Entonces podemos convertir esta pregunta a ¿Por qué dos a la un medio es igual a raíz de dos?
J: ¿No se puede justificar? Por ejemplo ahí dos a la tres medios es igual a raíz de dos al cubo… raíz cuadrada de dos al cubo, ¿No se puede justificar de que la última igualdad sería igual a la otra? (siempre se dirigió a P)
P: A ver, no entendí muy bien.

Una justificación de la regla de transformación $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$

(1:28:40-1:32:00)

[En el pizarrón siempre ha estado escrita la expresión $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$]

J: O sea, se pide justificar que esto (señala la parte izquierda de la igualdad $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$) sea igual a esto (señala la parte derecha de la igualdad $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$) ¿no? ¿no se puede justificar que, o sea partiendo de aquí (señala la parte derecha de la igualdad $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$) que esto (señala la parte derecha de la igualdad $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$) sea igual a esto (señala la parte derecha de la igualdad $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$).
P: A ver.

J: Por ejemplo, si queremos sacar raíz a, raíz cuadrada a cuatro, por ejemplo, esto lo podemos ver como dos al cuadrado ¿no? Entonces eso sería igual, para sacarle raíz a esto se divide el, el, el exponente de la base entre el ¿el índice?
H: El índice.
J: Entonces sería,
M: Dos entre dos.
J: La base entre exponente entre… (murmura para si misma) y la raíz cuadrada de cuatro es dos. ¿Sí?

[J escribe ha escrito en el pizarrón $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2^{2/2}=2^1=2$]

P: Aja.
J: Y esto sería, esto sería igual a esto (no fue posible determinar a que se refería, pero lo que sigue aclara el proceso de J). Y en ese caso, en ese caso sería ocho, se puede ver como… (J escribe $\sqrt{8}=\sqrt{2}$)
H: Dos a la cuatro.
M: Dos al cuadrado ¿verdad?
J: Sería lo mismo (y continua escribiendo $\sqrt{8}=\sqrt[2]{2^3}=2^{3/2}$). Es que aquí (señala el $2^{2/2}$ de la expresión $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2^{2/2}=2^1=2$) sí se pudo dividir porque, este, el dos, el exponente de la base si es divisible entre el índice de la raíz, pero en ese caso (señala el $\sqrt[2]{2^3}$ de la expresión $\sqrt{8}=\sqrt[2]{2^3}=2^{3/2}$) no es divisible entonces nada más queda indicado.
P: ¿Por qué al sacar raíz cuadrada divide entre dos?
J: ¿Por qué se divide entre dos?
P: El exponente.
J: Pues es una regla. Ja.
H: ¿Por qué se divide entre dos?

(Silencio prolongado)

[Después de un silencio prolongado P concluye utilizando la definición de raíz cuadrada]

Anexo 4

Algunos diseños experimentales para investigaciones futuras

A continuación se presentan algunos diseños de situaciones experimentales hechas a partir de los elementos que aparecen en el capítulo 5. Se agregan comentarios que dotan de sentido a cada parte de dichas situaciones.

A4.1. Sintaxis Algebraica: De los exponentes naturales mayores que uno hacia los exponentes enteros

Elementos a considerar para el diseño de la situación

1. La situación se lleva a cabo con estudiantes que desconocen las reglas de transformación (por ejemplo con estudiantes de primer año de educación media básica).

2. Problematizar el exponente uno; ya que es una convención matemática.

3. La emergencia del mecanismo se da ante la existencia de contradicciones o por el funcionamiento de consideraciones metamatemáticas. Es por ello que las a través de las concepciones reportadas por Martínez (2002) puedan servir como fuentes de la contradicción.

4. La centración en las *leyes de los exponentes* ocasiona que los objetos matemáticos puestos en juego sean los exponentes; por lo que haremos énfasis en la estructura operativa utilizando las progresiones aritméticas y geométricas:

- (Potencia de x) (Potencia de x) = (Potencia de x)
- (Potencia de x) / (Potencia de x) = (Potencia de x)

5. En relación al punto anterior, se utilizan las hipótesis epistemológicas de la primera y la segunda sintaxis algebraicas que dice: en el marco del pensamiento algebraico la noción de exponente no natural surgió con la intención de preservar la operatividad de los caracteres cósicos al momento de incluir objetos nuevos[40] a través del mecanismo de convención matemática.

6. No es necesario un manejo operativo de los números negativos. De hecho es de esperar que el establecimiento de las convenciones contribuya a tal manejo.

La situación

Actividad 1. La multiplicación de potencias de *a*.

Recuerda que la expresión a^3 sirve para expresar de manera abreviada la multiplicación *aaa*; a^4 para abreviar *aaaa*, etcétera. Es decir el *exponente* (el número pequeño colocado del lado derecho) indica cuántas veces se multiplica la *base* (en este caso a).

Objetivo: Confirmar que los estudiantes cuenten con las reglas de acción para efectuar la multiplicación de potencias de a y establecer una cláusula del contrato didáctico para que el exponente sea interpretado como multiplicación reiterada.

Utilizando la definición descrita al principio de la actividad, llena la siguiente tabla de multiplicación de las potencias de a.

[40] Respectivamente los números y los recíprocos de las potencias de a.

	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7
a^2	$a^2a^2 =$ $aaaa =$ a^4		$a^2a^4 =$ $aaaaaa =$ a^6			
a^3						
a^4						
a^5						
a^6						
a^7						
a^8						

Comentario: Colocar en el escenario la estructura operativa de multiplicación de las potencias de a. Los ejemplos ya resueltos son presentados con el propósito de explicar el orden en que debe ser tomada la multiplicación. Aquí, como en las primeras tres actividades, se ha omitido la potencia uno debido a que por sí misma es una convención matemática.

A partir de la tabla que llenaste, observa que la multiplicación es *cerrada* para las potencias de a; es decir, la multiplicación de dos potencias de a es otra potencia de a. ¿Qué regularidad notas en la tabla que te permita, sin recurrir a la definición, calcular el producto de dos potencias de a? Explica esta regularidad utilizando la tabla siguiente (en la primer fila hemos colocado las potencias de a en la segunda sus correspondientes exponentes).

a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
2	3	4	5	6	7	8	9

Comentario: De acuerdo a la hipótesis epistemológica sobre la objetivización de las potencias, se centra la atención en la relaciones entre la progresión aritmética y geométrica para establecer la estructura operativa bajo la multiplicación. Los estudiantes deberán formular y validar sus conjeturas.

Actividad 2. La división de potencias de a.

Recuerda que la división está relacionada con la multiplicación a través de lo siguiente:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \text{ si y solo si } AD = BC$$

En donde "si y solo si" expresa que las dos implicaciones siguientes son ciertas:

$$\text{Si } \frac{A}{B}=\frac{C}{D} \text{ entonces } AD = BC$$

$$\text{Si } AD = BC \text{ entonces } \frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

Por ejemplo como 6*3 = 9*2 entonces $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ del mismo modo 10 *1 = 5*2 entonces $\frac{10}{2}=\frac{5}{1}=5$

Comentario: La actividad sirve para confirmar que los estudiantes tengan las reglas de acción para efectuar divisiones de potencias de *a*.

Utilizando los resultados que obtuviste en la Actividad 1 llena la siguiente tabla de división de las potencias de a.

	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7
a^2			$\frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}$ ya que $a^2 \times a^2 = 1 \times a^4$			
a^3						
a^4	$\frac{a^4}{a^2} = a^2$ ya que $a^4 = a^2 \times a^2$					
a^5						
a^6						
a^7						
a^8						

Comentario: Colocar en el escenario la estructura operativa de división de las potencias. Los ejemplos ya resueltos son presentados con el propósito de expresar implícitamente (como cláusula del contrato didáctico) que las potencias legítimas son las de exponente mayor o igual a 2 y para explicar el orden en que debe ser tomada la división.

A partir de la tabla que llenaste ¿La división es o no *cerrada* para las potencias de a? **Nota**: Que fuera cerrada significaría que la división de dos potencias de a es otra potencia de a y si no lo fuera significaría que al menos una división de dos potencias de a no es potencia de a.

Comentario: Implícitamente se ha sugerido que las potencias de a son las de exponente mayor o igual a 2; en este sentido es de esperar que los recíprocos de potencias de a no sean consideradas como potencias de a.

¿Qué regularidad notas en la tabla que te permita, sin recurrir a las propiedades de la división, calcular la división de dos potencias de a? Explica esta regularidad utilizando la tabla siguiente (en la primer fila hemos colocado las potencias de a en la segunda sus correspondientes exponentes)

a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
2	3	4	5	6	7	8	9

Comentario: De acuerdo con la hipótesis epistemológica sobre la objetivización de las potencias, se centra la atención en la relación entre la progresión aritmética y geométrica para establecer la estructura operativa bajo la división. Las preguntas sobre la cerradura motivan a considerar los casos: 1) las potencias son iguales, 2) el exponente del numerador es mayor que el del denominador, 3) el exponente del numerador es menor que el del denominador. En este momento es necesario una fase de institucionalización que haga énfasis en las estructuras operativas de multiplicación y división.

¿La división a^2/a^4 es potencia de a? ¿Qué harías para que la tabla de división de potencias de a sea *cerrada*; es decir, que la división de dos potencias de a también sea potencia de a?

Comentario: La petición explícita que surge de una necesidad teórica.

Actividad 3A. La multiplicación de monomios

En esta actividad trataremos con la multiplicación de monomios que constan de dos factores: un número y una potencia de a. Como ejemplos de este tipo de monomios podemos mencionar a: $5a^2$, $7a^3$ y $(0.5)a^4$. Con el fin de abreviar llamemos a este tipo de monomios "múltiplos de una potencia de a" (o simplemente monomio) y *grado* del monomio al exponente que afecta a a.

Para multiplicar este tipo de monomios podemos utilizar la siguiente regla: "el producto de dos 'múltiplos de una potencia de a' es también un 'múltiplo de una potencia de a' cuyos factores son: el producto de los factores numéricos y el producto de las potencias de a". Veamos algunos ejemplos que ilustran lo anterior:

- $(5a^2)\times(4a^3) = (5\times4)\times(a^2\times a^3) = 20\times a^5 = 20a^5$
- $(7a^3)(0.5a^4) = (7\times0.5)\times(a^3\times a^4) = 3.5\times a^7 = 3.5a^7$

¿Cuál es el grado del monomio que es producto de un monomio de grado 3 y otro de grado 2? ¿Qué puedes decir acerca del grado de un monomio que es el producto de dos monomios?

Comentario: Establecer las reglas de acción operativas de los *múltiplos de una potencia de a*; que servirán, junto a las de las actividades anteriores, para conformar la estructura operativa que se considera como el sistema de conocimientos de referencia. En particular, la última pregunta es hecha con el propósito de que surjan preguntas con respecto al grado de los monomios lineales.

Actividad 3B. Más sobre potencias

Utilizando la definición descrita al principio de la Actividad 1 ¿a qué es igual a^0 y a^1? **Nota**: Observa que te pedimos que uses la definición cuando los exponentes sirven para denotar la multiplicación de un número por si mismo.

Comentario: Motivar el uso de la definición para que se produzcan las respuestas reportadas en Martínez (2000) y utilizarlas como fuente de contradicción. Éstas pueden ser $a^0 = 0$, $a^0 = a$, $a^1 = aa$ y/o $a^1 = a$.

Con estos nuevos resultados y con los que obtuviste en la Actividad 1 llena la siguiente tabla de multiplicación de las potencias de a.

	$a^0 =$	$a^1 =$	a^2	a^3	a^4	a^5
$a^0 =$						
$a^1 =$						
a^2						
a^3						
a^4						
a^5						
a^6						

Comentario: Colocar en el escenario, dentro de la estructura operativa de multiplicación trabajada con anterioridad, los valores que los estudiantes hayan establecido para las potencias 1 y cero. Hemos colocado ambas en la tabla para asegurar que exista contradicción en el llenado de la tabla, ya que establecer que $a^1 = a$ es de cierta manera consistente con el modelo de multiplicación reiterada.

¿Qué regularidad notas en la tabla que te permita, sin recurrir a la definición, calcular el producto de dos potencias de a? ¿Coincide con la regularidad con la que encontraste en la Actividad 1? ¿A qué debe ser igual la potencia cero y 1 para que exista regularidad?

Explica esta regularidad utilizando la tabla siguiente (en la primer fila hemos colocado las potencias de a en la segunda sus correspondientes exponentes).

		a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7
0	1	2	3	4	5	6	7

A4.2. Semántica de la cuadratura de las curvas

Elementos a considerar para el diseño de la situación

En términos generales se siguen las ideas de Wallis. La finalidad de esta situación es construir un escenario en donde los estudiantes establezcan la existencia de curvas con determinada razón característica, y que eventualmente las designen con funciones conocidas por ellos, o por el contrario, mediante un mecanismo de convención matemática, que formulen la existencia de una nueva función que conserve la estructura de las razones características.

1. Algunos estudiantes pueden recordar las reglas de transformación para los exponentes negativos, fraccionarios y cero. La actividad *ocultara* el uso de los exponentes no naturales haciendo uso extensivo de la representación con radicales y la gráfica de las funciones relacionadas.

2. Como la situación trata acerca del cálculo de áreas, es importante considerar la posibilidad que los estudiantes al trabajar con ella sepan calcular áreas a través de la integral definida. En este caso la actividad no puede funcionar; ya que, entre otras causas, el uso de esa herramienta presupone el uso de las reglas de transformación que son precisamente las que se desea construyan los estudiantes.

3. Problematizar el exponente 1; ya que es una convención matemática.

4. De acuerdo con el análisis epistemológico de las formulaciones de Wallis, el estudio de las áreas determinadas por las gráficas pueden

servir como *herramienta* para descubrir nuevas funciones y eventualmente designarlas con las existentes en un determinado universo gráfico de funciones, por ejemplo el de las curvas potenciales. En este sentido surge necesario, para hacer factible el desarrollo de una situación con las ideas de Wallis, que los estudiantes posean un universo gráfico compuesto por las funciones *potenciales racionales*[41]. Agregado a lo anterior el concepto de razón característica sirve a la creación de un escenario adecuado para la presencia de argumentos gráficos.

La situación

Actividad preliminar

Construcción de las gráficas de las familias de funciones siguientes (a es un parámetro):

$$f(x)=ax, f_n(x)=ax^n, f_m(x)=a\sqrt[m]{x}, f_r(x)=a\frac{1}{x^r},$$

$$f_s(x)=a\frac{1}{\sqrt[s]{x}}, f_{n,m}(x)=a\sqrt[m]{x^n} \text{ y } f_{r,s}(x)=a\frac{1}{\sqrt[s]{x^r}}$$

Comentario: Establecer el universo gráfico que nos interesa, en el lenguaje de Fermat, éste está compuesto por las *parábolas* y las *hipérbola*s (que nosotros identificamos como las funciones *potenciales*). Las familias han sido descritas así para puntualizar dos asuntos: 1) La construcción de las gráficas serán hechas a través de la perspectiva de *operaciones gráficas* (Farfán, 2000) con el propósito que los estudiantes tengan una *concepción objeto* de las gráficas de las funciones y de esta manera adquiera sentido el problema de las cuadraturas que se hará posteriormente, en donde implícitamente se establece un operador funcional (de la curva a su razón característica) y 2) establecer implícitamente que las potencias legitimas son las mayores a uno.

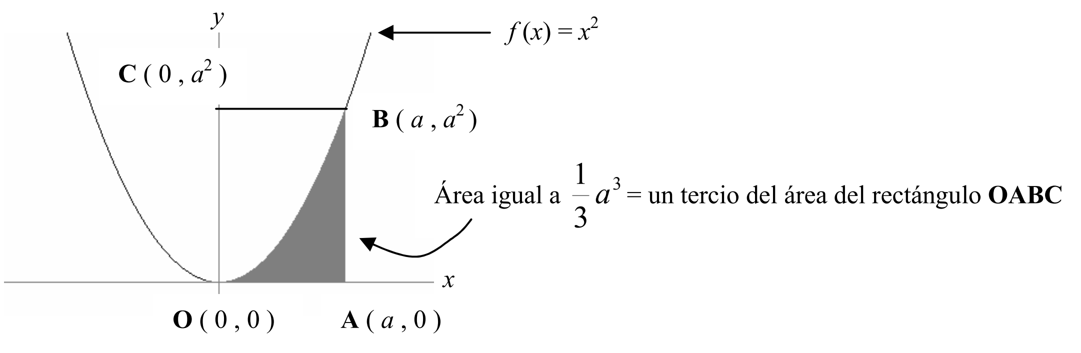
Actividad 1. Áreas determinadas por gráficas de funciones

[41] Es decir funciones de la forma $f(x) = x^r$ donde r es un número racional.

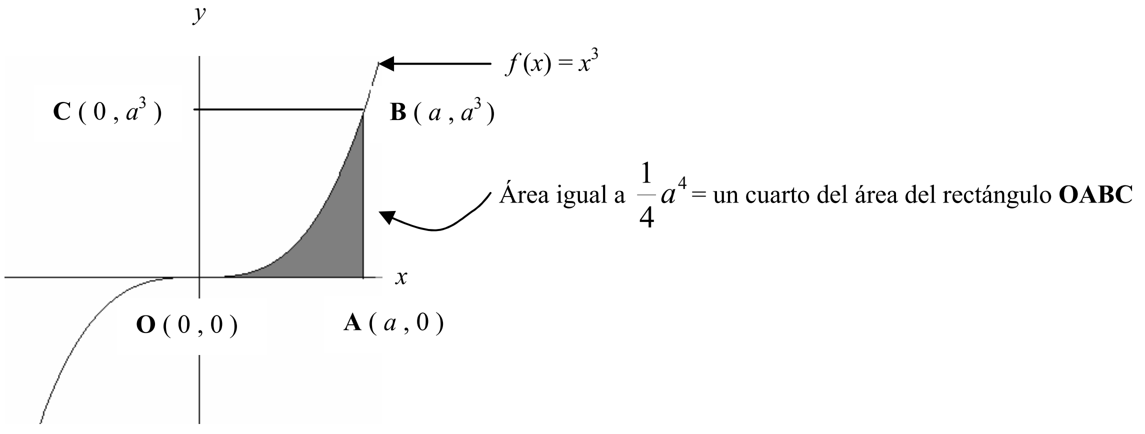
Introducción

A través de distintas técnicas es posible encontrar las áreas determinadas por las gráficas de las funciones, los ejes cartesianos y rectas verticales. Para esta actividad no se utilizan dichas técnicas sino que trataremos con algunos de sus resultados.

Para el caso de la función $f(x) = x^2$ el área (que aparece sombreada en la figura siguiente) debajo de su gráfica y que está sobre el intervalo $[0 , a]$ es igual a $a^3/3$. Una manera de interpretar este resultado es escribir el cociente $a^3/3$ como $(1/3)a^3$ (es decir un tercio de a^3) y observar que a^3 es el área del rectángulo **OABC** (cuya base mide a y su altura a^2). De lo anterior podemos decir que el área sombreada es un tercio del área del rectángulo **OABC**.



De manera análoga al caso anterior para la función $f(x) = x^3$ se cumple que el área (que aparece sombreada en la figura siguiente) debajo de su gráfica y que está sobre el intervalo $[0 , a]$ es igual a $a^4/4$ que representa la cuarta parte del área del rectángulo **OABC**.



En general se tiene que la función $f(x) = x^n$ (n = 2, 3, 4 ...) es tal que el área debajo de su gráfica y que está sobre el intervalo [0 , a] es igual a $a^{n+1}/(n+1)$ que representa la (n+1)-ésima parte del área del rectángulo **OABC**. Por comodidad llamemos a la proporción existente entre el área debajo de su gráfica y que está sobre el intervalo [0 , a] y el área del rectángulo **OABC** *razón característica*; de esta manera la función $f(x) = x^n$ (n = 2, 3, 4 ...) tiene razón característica de $1/(1+n)$. Hacemos notar que la expresión *razón característica* tiene por objetivo remarcar que la razón mencionada no depende del valor de a, por lo que de cierta manera el número $1/(1+n)$ *caracteriza* a la función.

Lo anterior puede ser resumido en la Tabla 1 de razones características.

	Función	Razón característica	
	$f(x) = x^2$	1/3	
	$f(x) = x^3$	1/4	
	$f(x) = x^4$	1/5	
	$f(x) = x^5$	1/6	
	...	...	
	$f(x) = x^n$	$1/(n+1)$	

Tabla 1 de razones características

Comentario: Sin detenernos en las técnicas para el cálculo de áreas se establecen los resultados básicos que funcionarán como conocimientos de referencia para las actividades posteriores. El leguaje utilizado para referirnos a las áreas sombreadas como partes de un rectángulo tiene por propósito provocar la concepción de que la parte del rectángulo puede ser arbitraria.

PROBLEMAS

En lo sucesivo al referirnos al rectángulo **OABC** se entenderá que **O**(0,0), **A**(a,0), **B**(a,f(a)) y **C**(0,f(a)).

1-1 Verifica que los múltiplos de la función $f\ (x) = x^n$ (n = 2, 3, 4 ...) también tienen razón característica de 1/(1+n). Construye una tabla de razones características (que llamaremos *Tabla 2 de razones características*) de tal manera que estas funciones estén incluidas.

Comentario: Obtener familiaridad con el concepto de razón característica.

1-2 ¿Habrá otras funciones otras funciones que posean una razón característica? Justifica tus respuestas.

Comentario: Provocar la reflexión de la posibilidad de la existencia de otras funciones que posean razones características. Debido a que el escenario está basado en argumentos gráficos es factible que surjan hipótesis sobre funciones que satisfacen tal propiedad y que eventualmente sean identificadas con alguna de las funciones potenciales trabajadas en la actividad preliminar. Otra posibilidad es que trabajen con el patrón algebraico de las razones características al asignarle valores a n distintos a 2, 3, 4.... En este caso es factible que asocien una curva a los casos considerados y eventualmente que sean identificadas con alguna de las funciones potenciales trabajadas en la actividad preliminar. En ambos casos el mecanismo de convención matemática será puesto en funcionamiento al contestar a la actividad **1-5**.

1-3 ¿La función $f(x) = \sqrt{x}$ posee una razón característica? ¿Qué sucede con sus múltiplos?

1-4 ¿La función $g(x) = 1 + x$ posee una razón característica? ¿Qué sucede con sus múltiplos?

Comentario: En caso de que la actividad **1-2** no desencadene las argumentaciones esperadas, la **1-3** y **1-4** tendrá como función el que los estudiantes sigan su proceso de familiarización con el concepto de razón característica y sugerir la existencia de otras funciones que poseen razón característica.

1-5 En caso de que encuentres otras funciones que tengan razones características, construye una tabla de razones características (que llamaremos *Tabla 3 de razones características*) de tal manera que estas funciones estén incluidas. ¿Es posible determinar la razón característica de funciones que incluiste en la Tabla 3 a través de su expresión algebraica?

Comentario: El mecanismo de convención matemática será puesto en funcionamiento al tratar de organizar, con un único patrón, las tablas de razones características. Hacemos notar que usamos la frase *que este incluida en la tabla* de manera un tanto ambigua para no sugerir explícitamente que todas cumplan con un mismo patrón de cálculo de cuadraturas.

Actividad 2. Más sobre áreas determinadas por gráficas de funciones

Ahora centrémonos que en general se tiene que la función $f(x) = x^n$ (n = 2, 3, 4...) es tal que el área debajo de su gráfica y que está sobre el intervalo $[0 , a]$ es igual a $a^{n+1}/(n+1)$ que representa la (n+1)-ésima parte del área del rectángulo **OABC**.

PROBLEMAS

2-1 ¿Existen funciones tales que su razón característica sea igual a i) dos tercios, ii) dos séptimos, iii) tres cuartos del área del rectángulo **OABC**? En caso de que tu respuesta sea afirmativa ¿puedes asociar expresiones a esas funciones y verificar que efectivamente cumplen con la propiedad pedida y además agregarla a la *Tabla 3 de razones características*?

2-2 ¿Existen funciones para las cuáles el área debajo de su gráfica y que está sobre el intervalo [0, *a*] sea igual a i) la mitad y ii) el total del rectángulo **OABC**? En caso de que tu respuesta sea afirmativa ¿puedes asociar expresiones a esas funciones y verificar que efectivamente cumplen con la propiedad pedida y además agregarla a la *Tabla 3 de razones características*?

Comentario: En el mismo sentido que la actividad **1-5** la **2-1** y **2-2** tienen por función que el mecanismo de convención matemática sea puesto en funcionamiento al tratar de organizar, con un único patrón, las tablas de razones características. En estas dos actividades se tratan los casos de razón característica 1/2 y 1 que corresponden a las funciones constantes y funciones lineales con ordenada al origen igual a 0.