



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL.
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA
APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA**



**ESTUDIO SOBRE LA META COGNICIÓN Y COMPETENCIA DE
PROFESORES Y ESTUDIANTES EN RELACIÓN AL TEMA DE
LAS ECUACIONES LINEALES.**

Tesis Que Para Obtener El Grado De Maestro
En Ciencias En Matemática Educativa

PRESENTA:

Silvia Guadalupe Maffey García.

DIRECTORA DE TESIS:

Dra. Rosa María Farfán Márquez.

CO-DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Javier Lezama Andalón.

México, D. F. a Enero de 2006



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

CARTA DE CESION DE DERECHOS

En la ciudad de México, D.F. el día 26 del mes enero del año 2006, el (la) que suscribe Silvia Guadalupe Maffey García alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A030229 adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dra. Rosa María Farfán Márquez y cede los derechos del trabajo intitulado “Estudio sobre la metacognición y competencia de profesores y estudiantes en relación al tema de las ecuaciones lineales” al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección smaffeyg@podernet.com.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.


Silvia Maffey García

ÍNDICE

Relación de cuadros.	1
Glosarios.	5
Resumen.	6
Abstract.	8
INTRODUCCIÓN.	10
CAPÍTULO 1. ASPECTOS PRELIMINARES.	13
Panorama General.	13
Objetivos.	14
Justificación.	15
Antecedentes.	16
Metodología empleada.	17
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO.	19
Ingeniería didáctica.	19
Teoría de situaciones didácticas.	24
Meta cognición.	28

CAPÍTULO 3. INVESTIGACIÓN.	32
Ubicación histórica de las ecuaciones de primer grado.	32
Contenido de los programas de estudio para educación secundaria de la (SEP), en lo referente a las ecuaciones de primer grado.	34
La concepción que los estudiantes tienen del signo =.	37
Cuestionarios, aplicados a alumnos y profesores.	38
Descripción breve de los libros de texto mencionados por los profesores.	56
Contenido del programa de estudio para la materia de Algebra en los CECyT's del IPN.	62
Contenido del programa de estudio de la materia de Matemáticas IV de preparatoria del SI de la UNAM.	63
Análisis detallado de algunos libros de texto.	65
Resultados y conclusiones de la investigación.	81
CAPÍTULO 4. DISEÑO PARA EL AULA PARA UNA PRIMERA APROXIMACIÓN A LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.	89
Resultados de la puesta en práctica del diseño para el aula.	115
CONCLUSIONES GENERALES.	126
RECOMENDACIONES Y SUGERENCIAS PARA TRABAJO FUTURO	128
BIBLIOGRAFÍA	130

RELACIÓN DE CUADROS.

NÚMERO	TEMÁTICA	PÁGINA
1	Propósitos de los cuestionarios aplicados a alumnos y profesores del nivel medio superior.	39
2	Secuencias, manifestadas por alumnos, del orden en que fueron abordados los aspectos estudiados respecto a ecuaciones de primer grado en sus cursos, considerando el sistema educativo al que pertenecen.	40
3	Secuencias, manifestadas por alumnos, del orden en que fueron abordados los aspectos estudiados respecto a ecuaciones de primer grado en sus cursos, ignorando el sistema educativo al que pertenecen.	41
4	Secuencias, manifestadas por profesores, del orden en que abordan los aspectos estudiados respecto a ecuaciones de primer grado en sus cursos, considerando el sistema educativo al que pertenecen.	42
5	Secuencias, manifestadas por profesores, del orden en que abordan los aspectos estudiados respecto a ecuaciones de primer grado en sus cursos, ignorando el sistema educativo al que pertenecen.	43
6	Percepción de los estudiantes respecto al nivel que han alcanzado en el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado.	44
7	Percepción de los profesores respecto al nivel que alcanzan sus alumnos en el aprendizaje de las ecuaciones de primer	45

grado, en porcentaje.

- | | | |
|-----------|--|-----------|
| 8 | Percepción de los profesores respecto al nivel que alcanzan sus alumnos en el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado, en porcentaje. | 46 |
| 9 | Percepción de los estudiantes respecto al nivel que tiene su habilidad en el planteamiento de ecuaciones de primer grado para resolver problemas. | 47 |
| 10 | Percepción de los profesores respecto al nivel lograron sus alumnos en la habilidad para plantear ecuaciones de primer grado para resolver problemas, en porcentajes. | 48 |
| 11 | Percepción de los profesores respecto al nivel lograron sus alumnos en la habilidad para plantear ecuaciones de primer grado para resolver problemas. | 48 |
| 12 | Percepción de los estudiantes respecto a las causas de su aprendizaje sobre las ecuaciones de primer grado. | 49 |
| 13 | Percepción de los profesores respecto al origen de las dificultades de aprendizaje de sus alumnos respecto a las ecuaciones de primer grado. | 50 |
| 14 | Percepción de los estudiantes respecto a las causas de la habilidad lograda para plantear ecuaciones de primer grado que resuelven problemas concretos. | 51 |
| 15 | Percepción de los profesores respecto al origen de las dificultades de sus alumnos para lograr habilidad en el planteamiento de ecuaciones de primer grado para resolver | 51 |

problemas.

16	Capacidad de los estudiantes para resolver las ecuaciones de primer grado que se les propusieron.	52
17	Capacidad de los estudiantes para resolver el problema que se les propuso.	54
18	Libros que los profesores emplean como texto en sus clases.	55
19	Libros que los profesores emplean como apoyo en sus clases.	55
20	Análisis breve de los libros que los profesores emplean como texto o como apoyo en sus clases.	56
21	Valoración de los estudiantes con que se aplicó la prueba del diseño metodológico, sobre su habilidad matemática.	117
22	Valoración de los estudiantes con que se aplicó la prueba del diseño metodológico, sobre los conocimientos matemáticos adquiridos en la escuela secundaria.	117
23	Capacidad de los estudiantes con que se aplicó la prueba del diseño metodológico, para resolver las ecuaciones de primer grado que se les propusieron.	118
24	Capacidad de los estudiantes con que se aplicó la prueba del diseño metodológico, para resolver el problema que se les propuso.	118
25	Respuestas de los estudiantes con que se aplicó la prueba del diseño metodológico, a la cuestión de reconocer diferentes	119

significados del signo =.

26	Modalidades de trabajo de las diferentes secciones del diseño para el aula.	120
27	Resultados de la aplicación de la sección B del diseño para el aula.	122
28	Resultados de la aplicación de la sección C del diseño para el aula.	123
29	Resultados de la aplicación de la sección D del diseño para el aula.	124
30	Comparación de resultados de la resolución de las ecuaciones y el problema planteados a los estudiantes con que se aplicó la prueba del diseño para el aula, antes y después de éste.	125

GLOSARIOS

A) DE CONCEPTOS

Ingeniería didáctica. Metodología, caracterizada por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, y por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada.

Meta cognición. Proceso mental que consiste en ese saber que desarrollamos sobre nuestros propios procesos y productos del conocimiento. Se conceptualiza de dos formas: como el conocimiento acerca de la cognición y como la regulación de la cognición.

Teoría de situaciones didácticas. Teoría que propone el estudio de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos matemáticos; y se considera que el control de esas condiciones permitirá reproducir y optimizar los procesos de adquisición escolar del conocimiento.

Transposición didáctica. Trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza.

B) DE SIGLAS O ABREVIATURAS

CECyT	Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos
ENP	Escuela Nacional Preparatoria
IPN	Instituto Politécnico Nacional
NMS	Nivel medio superior
UNAM	Universidad Nacional Autónoma de México
SEP	Secretaría de Educación Pública
SI	Sistema Incorporado

ESTUDIO SOBRE LA META COGNICIÓN Y COMPETENCIA DE PROFESORES Y ESTUDIANTES EN RELACIÓN AL TEMA DE LAS ECUACIONES LINEALES.

RESUMEN

Este trabajo es una investigación sobre la situación actual de la enseñanza de las ecuaciones de primer grado en el nivel medio superior que tiene como fundamento metodológico a la ingeniería didáctica, y consiste en:

- Una valoración del estado en que se encuentra la enseñanza de las ecuaciones de primer grado en el nivel medio superior, tomando en consideración qué tanta importancia se le da a la resolución de problemas por medio de éstas
- Un contraste entre la situación encontrada con lo que pretenden lograr las instituciones educativas de nivel medio superior, en particular los CECyT's del IPN y las Preparatorias del Sistema incorporado (SI) de la UNAM en cuanto a la enseñanza del tema bajo estudio
- Una propuesta de aproximación del estudiante a las ecuaciones de primer grado a partir de la resolución de problemas que provengan de contextos cotidianos.

Para esto, la investigación se avoca en primera instancia, a la forma en que los profesores realizan tal enseñanza, la percepción que ellos tienen de las causas que la dificultan, el grado de aprendizaje logrado por los alumnos, para continuar con la percepción que los mismos estudiantes tienen de su propio nivel de competencia al respecto así como de las causas de éste, incidiendo con esto en aspectos meta cognitivos del aprendizaje.

En segunda instancia, se toma en consideración el enfoque que tienen las instituciones de educación de nivel medio superior para la enseñanza de este tema y que ponen de manifiesto en sus programas de estudio. A la vez, se analizan los planteamientos que al respecto tiene el nivel escolar precedente, es decir, la educación secundaria.

Estos estudios muestran que no se logran los objetivos planteados por los programas de estudio de los subsistemas tomados en consideración, pues los aprendizajes logrados pueden ser calificados como muy pobres.

Las percepciones tanto de profesores como de alumnos al respecto, difieren de los resultados obtenidos, pues mientras ellos consideran los aprendizajes logrados son entre buenos y regulares, la investigación muestra que podrían ser calificados como de regulares a insuficientes.

También se analizan algunos de los libros de texto de álgebra que emplean los profesores para la enseñanza del tema que nos ocupa, donde se muestra una tendencia generalizada a tratar el tema iniciando con definiciones y dejando por último la aplicación a la resolución de problemas concretos.

A partir de la situación encontrada, se propone un diseño para el aula basado en un proceso mas estructurado de generación del conocimiento.

El mencionado diseño fue puesto en práctica con un grupo de 8 estudiantes de nivel medio superior, de lo que se obtuvieron resultados que permiten presumir que la propuesta elaborada, contrastante a la que los profesores manifiestan seguir actualmente, puede resultar útil tras un proceso de perfeccionamiento que deberá ser objeto de trabajos posteriores.

INVESTIGATION ABOUT THE GOAL OF COGNITION AND COMPETENCE OF PROFESSORS AND STUDENTS RELATED OF SUBJECT OF THE LINEAL EQUATIONS.

SUMMARY

This work is an investigation about the current situation of teaching the lineal equations in high school that has methodology fundamentals in didactic engineering.

- To diagnose the condition in which is founded the teaching of lineal equations in high school, and taking in consideration the importance of resolving problems using these equations.
- To contrast the situation founded against the pretender achieve of the educative institutions in high school level, in particular the CECyt's of IPN and de SI of UNAM about teaching this subject.
- To propose a methodology of approximation of the student in lineal equations resolving problems in the every day context.

For this, investigations is in first instants, to the form in that the professor do teaching, the perception in that they have for the causes that make difficult, the grade of learning reach for the students, for be going with the perception that the some students had about their own level of competence and the cause of that. Fall with the aspects of achieve cognition of learning.

In second instance, we take in consideration the point of view, that have the learning institutions of high school teaching this subject and that show of manifest that their study programs. In the same way we analyze the plans that have the last level of education have, that means, middle school.

These investigations show us that we didn't reach the planning achieve for the study programs of the subsystems taking in consideration, because the level of learning could be considerate poor.

The perceptions of both the professors and students differ from the gotten results, being superior the first against second.

We also analyze some Algebra books that follow the professors for teaching the subject in discussion. That show a general tendency to handle the subject start with the definition let for last the application to resolve real and concrete situations.

Assuming that, we propose a design to the classroom based in the process of natural generation of acknowledge.

The mentioned design was tested in high school group of 8 students, we obtained a results that permit assume that the proposal works, different to the others professor tell follow currently, could be result useful follow a processor of perfection that will be a subject of future works.

INTRODUCCIÓN

El problema central de este trabajo es, conocer y sistematizar la manera en que se presenta a los estudiantes de nivel medio superior (NMS) el tema de ecuaciones de primer grado; así como analizar si ésta logra producir en ellos un aprendizaje significativo de las mismas, entendiendo como tal, que sean capaces de:

- a) modelar un problema concreto mediante el planteamiento de una ecuación de primer grado.
- b) identificar la necesidad de modelar mediante una ecuación de primer grado una situación que lo amerite, en cualquier contexto y,
- c) resolver la ecuación de primer grado que resulte del modelado de un problema concreto, sin importar la complejidad de la misma, o bien, si ésta se le presenta de forma aislada.

La realización de esta tarea se efectúa, tomando en consideración las pretensiones de los programas de estudio del nivel medio superior, tanto de los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT's) del Instituto Politécnico Nacional (IPN) como del Sistema Incorporado (SI) a la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), la percepción que los estudiantes tienen de su propio aprendizaje, la apreciación que los profesores tienen del aprendizaje de los alumnos, los libros de texto que se emplean como apoyo a su labor, además de referir esta información en relación a las pretensiones del programa de estudio del nivel inmediato anterior, es decir, el de la escuela secundaria.

Se decidió tomar en cuenta para este trabajo el nivel medio superior tanto del IPN como del SI de la ENP de la UNAM, por tener estas dos instituciones relevancia a nivel nacional y una tradición educativa de más de 50 años de existencia.

Ahora bien, partiendo del hecho de que “la matemática educativa estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar y de que la disciplina se propone describir y explicar los fenómenos relativos a las relaciones entre enseñanza y aprendizaje” (Cantoral, 1995), la problemática planteada, queda perfectamente enmarcada dentro de esta disciplina.

La investigación en matemática educativa se propone mejorar los métodos y los contenidos de la enseñanza y proponer las condiciones para un funcionamiento estable de los sistemas didácticos asegurando entre los alumnos la construcción de un saber viviente, susceptible de evolución, y funcional, que permita resolver problemas y plantear verdaderas preguntas (Cantoral, 1995), de manera que este trabajo pretende que, tras presentar un panorama de la situación que guarda la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado en el nivel medio superior, se cuente con los elementos necesarios para reformular los esquemas didácticos empleados en este tema y con ello se logre que los aprendizajes tengan las características anteriormente señaladas.

Por ello, se plantea una propuesta que se ha denominado “diseño para el aula para una primera aproximación a las ecuaciones de primer grado”, como una alternativa, entre muchas posibles, para la enseñanza del tema en cuestión, que propicie de mejor manera la adquisición de los conocimientos relativos al mismo de manera tal, que se logre en los estudiantes, una apropiación significativa de los mismos, manifestada en el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas que permita la transposición de conocimientos a ámbitos no escolares.

El presente trabajo tiene como sustento teórico la metodología de la ingeniería didáctica y los conceptos de la meta cognición; la investigación se realizó tanto de manera bibliográfica como con trabajo de campo, y concluye con el mencionado diseño para el aula y los resultados de su puesta en operación en una sesión de tres horas con un grupo muestra de 8 estudiantes que no habían visto aún el tema de ecuaciones de primer grado en el nivel medio superior, pero se encuentran inscritos en éste.

El trabajo de campo se efectuó encuestando tanto a estudiantes como a profesores del NMS de los dos subsistemas mencionados.

La investigación bibliográfica consistió en la revisión de los textos que constituyen el marco teórico de esta investigación, los que conforman sus antecedentes, así como de los programas de estudio de tanto la SEP para secundaria, y como de la ENP y de los CECyT's, además de los libros de texto que se emplean en la enseñanza y estudio de las ecuaciones lineales.

CAPÍTULO 1.

ASPECTOS PRELIMINARES

Panorama general.

El estudio de las ecuaciones de primer grado, es parte del contenido temático en las asignaturas de matemáticas del nivel medio superior (NMS), tanto en escuelas del IPN (CEC y T's), como en las de la UNAM y de su sistema incorporado (preparatorias y CCH's), como en los bachilleratos del sistema S. E. P. y en los de preparatoria abierta de la misma dependencia.

Los estudiantes que acceden a estos sistemas educativos llevan entre sus conocimientos previos los aprendizajes logrados al respecto, a través de las asignaturas de matemáticas de las escuelas secundarias.

Confiando en que los lineamientos de los programas de estudio para la escuela secundaria se cumplen, los estudiantes llegan al nivel medio superior con conocimientos claros aunque elementales de lo que es una ecuación de primer grado, la utilidad que tienen y las propiedades básicas en que se basan sus procedimientos de solución.

De esta manera, con la base conceptual con que cuentan y los estudios realizados en el nivel medio superior, es de esperarse que los estudiantes logran un dominio considerable del tema, sin embargo, la experiencia muestra que esto no es así.

El aprendizaje de las ecuaciones de primer grado es de gran importancia, dado que, son base fundamental en estudios posteriores de matemática y en el aprendizaje de diversos contenidos en las materias de física y química, así como también son herramienta útil para la resolución de diferentes problemas que pueden encontrar en su vida cotidiana y profesional.

Aunado a esto, el valor del aprendizaje de este tema, se incrementa cuando se considera que los procesos mentales asociados a ello, generan competencias tales como la capacidad de razonar de manera ordenada y sistemática y de manejar un lenguaje simbólico para encontrar soluciones, entre otras.

Según se ha observado a lo largo de 15 años de trabajo en el nivel medio superior, el alumno promedio pocas veces logra dominar el empleo de las ecuaciones de primer grado para la resolución de problemas concretos y de extender las técnicas de resolución a otros contextos, tales como el manejo de fórmulas en física o química, o bien, la resolución de ecuaciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales; mucho menos aún, visualizar la necesidad de emplear una ecuación para resolver un problema fuera de un contexto escolar, lo que es síntoma de que el trabajo realizado al respecto en los cursos de álgebra no ha sido suficiente para lograr un aprendizaje real del tema.

Con base en lo expuesto, este trabajo se desarrolla para alcanzar los siguientes objetivos:

Objetivos

1. Contar con una valoración del estado en que se encuentra la enseñanza de las ecuaciones de primer grado en el nivel medio superior, tomando en consideración que tanta importancia se da a la resolución de problemas por medio de éstas.

Esta valoración es efectuada con base a encontrar las respuestas a preguntas tales como:

- a) ¿Cómo se enseña el tema de las ecuaciones de primer grado en el NMS?
- b) ¿Los estudiantes del NMS aprenden a usar y resolver ecuaciones de primer grado con tal forma de enseñanza?
- c) ¿Cómo perciben tanto profesores como estudiantes los procesos de enseñanza empleados y los logros de aprendizaje logrados?

2. Contrastar la situación encontrada con lo que pretenden lograr las instituciones educativas de nivel medio superior, en particular los CECyT's del IPN y las Preparatorias del SI de la UNAM en cuanto a la enseñanza del tema bajo estudio.
3. Proponer una metodología de aproximación del estudiante a las ecuaciones de primer grado a partir de un diseño para el aula para una primer aproximación a las ecuaciones de primer grado, que parte de la resolución de problemas provenientes de contextos cotidianos.

Justificación.

La enseñanza de las ecuaciones de primer grado, se inicia en muchos libros de texto con una presentación de las igualdades, sus características y propiedades, para luego extenderlas al ámbito de las ecuaciones. Al tratar a éstas específicamente, por lo general, se les maneja fuera de un contexto que les dé origen, estableciendo en varios casos una metodología para su resolución. No se aborda el manejo gráfico de ellas o se deja como un aspecto opcional. El tratamiento de las ecuaciones como “herramientas” para resolver problemas se maneja aparte y con poca relevancia, incluso manejando problemas de poco interés para los estudiantes y de escaso valor en la realidad.

Ante este manejo de los textos, un gran número de profesores siguen la misma tónica en sus clases con lo que los estudiantes se convierten en meros receptores de tales definiciones y algoritmos de resolución de ecuaciones, ocasionando que, por lo mismo, no logren relacionarlas posteriormente con los problemas que se les presentan, emplearlas como medios de solución y más aún, carecen de una forma de valorar si las soluciones encontradas, en caso de haberlas hallado, tienen o no sentido.

Por tanto, este manejo del tema que nos ocupa, dificulta la apropiación del conocimiento para que éste pueda ser transferido a contextos fuera del salón de clase y de la temática netamente escolar.

Ante esta situación, el presente trabajo estudia la situación que prevalece en escuelas de nivel medio superior respecto a esta problemática, con la finalidad de sistematizar las afirmaciones anteriores mediante una investigación metódica del fenómeno planteado.

Antecedentes.

Entre los antecedentes documentales de investigaciones que sirven de precedente al presente trabajo contamos con:

- **Ramiro, S., et. al.** (2005). *El proceso de estudiar matemáticas en el nivel medio superior*. México. Aula XXI, Santillana y CONACyT- Guerrero.

En este texto se presenta un estudio del estado de la enseñanza de las matemáticas en el nivel medio superior en el estado de Guerrero, México, enfocado a los profesores. Contiene estudios de: (a) los contenidos temáticos del NMS en diferentes subsistemas educativos y (b) el perfil académico real y deseable en los profesores de matemáticas; además del análisis del diseño de una situación didáctica como nota de clase.

- **Maldonado, E.** (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de maestría no publicada. México. Cinvestav – IPN.

Este trabajo consiste, como el título lo señala, de un estudio didáctico de la función trigonométrica, realizado en tres escuelas del NMS de México y en los libros de texto que conforme a las investigaciones realizadas, resultaron ser los más empleados para la enseñanza del tema.

- **Andrade, L., et. al.** (2003). La enseñanza de las matemáticas, ¿en camino de transformación?. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. Vol. 6, num. 2, julio, 2003, pp. 80 -106.

Este artículo describe un trabajo de investigación realizado respecto a la forma en que trabajan los profesores de matemáticas de la escuela secundaria en Bogotá, Colombia, consistente en un estudio que describe aspectos de la práctica docente, en general, en las instituciones educativas del nivel indicado.

Metodología empleada.

La metodología para el análisis de la problemática que aborda el presente trabajo puede ser resumida en los siguientes puntos:

1. Ubicar históricamente del tema ecuaciones de primer grado.
2. Revisar los programas de estudio para educación secundaria de la Secretaría de Educación Pública (SEP), en la parte referente a las ecuaciones de primer grado, para saber con qué conocimientos deberían llegar los estudiantes al nivel medio superior
3. Determinar la concepción que los estudiantes del nivel medio superior tienen del signo $=$, elemento básico en las ecuaciones lineales, a través de la aplicación de un cuestionario – encuesta a alumnos del diversos grados del nivel que se investiga.
4. Precisar la situación que prevalece en cuanto al aprendizaje de las ecuaciones lineales en el nivel medio superior y la percepción de los estudiantes en cuanto a las causas del grado de aprendizaje logrado del tema, por medio de la aplicación de encuestas – cuestionarios a alumnos que ya han aprobado la materia en que toca el tema que nos ocupa.
5. Establecer la metodología que los profesores emplean en la enseñanza de las ecuaciones de primer grado en el nivel medio superior, así como de su percepción sobre el grado de aprendizaje logrado en sus alumnos y las causas de éste, recurriendo a la aplicación de encuestas – cuestionarios.

6. Analizar algunos de los libros que los profesores indicaron que emplean como libros de texto básicos y de apoyo para la enseñanza de las ecuaciones de primer grado.

7. Conocer los programas de estudio de los CECyT's del IPN y de las preparatorias del SI de la UNAM, para detectar las pretensiones de aprendizaje que estos sistemas educativos de nivel medio superior, respecto al aprendizaje y la enseñanza de las ecuaciones de primer grado.

CAPÍTULO 2.

MARCO TEÓRICO.

La investigación realizada se enmarca en la ejecución de la primera fase de la metodología de la ingeniería didáctica: el análisis preliminar, a lo que se añade la consideración de aspectos meta cognitivos, con la finalidad de conocer la percepción, tanto de estudiantes como de profesores de las causas de sus logros en cuanto al aprendizaje de las ecuaciones de primer grado; por ello, nuestro marco teórico se centra en estas ideas.

A continuación se presentan de manera resumida los aspectos teóricos citados.

Ingeniería Didáctica.

Artigue (1995), plantea que la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, entendidas éstas como la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza y en segundo lugar por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada.

Los objetivos de una investigación en ingeniería didáctica pueden ser diversos: las investigaciones que abordan el estudio de los procesos de aprendizaje de un concepto determinado y en particular la elaboración de génesis de artificiales para un concepto determinado, las nociones que guardan un estatus de herramienta en la enseñanza, o incluso trabajos que abordan el estudio y la aplicación de estrategias didácticas globales, como por ejemplo “el problema abierto” (Arsac, et.al., 1988; citado en Artigue, 1995) o “el debate científico” (Legrand, 1986; Alibert, 1989; citados en Artigue, 1995).

El proceso experimental de la metodología de la ingeniería didáctica delimita cuatro fases:

1. Análisis preliminar.
2. Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería.
3. Experimentación.
4. Análisis a posteriori y evaluación.

La ingeniería didáctica es singular por las características de su funcionamiento metodológico y su validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre los análisis a priori y a posteriori.

Los análisis preliminares.

En una investigación de ingeniería didáctica, la fase de concepción se basa en un cuadro teórico didáctico general, en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, y en un determinado número de análisis preliminares siendo los mas frecuentes:

- Análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- Análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- Análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.

En los trabajos de investigación en ingeniería didáctica ya publicados, abunda Artigue (1995), no necesariamente intervienen de manera explícita todas las componentes del análisis que se han mencionado, en realidad en este campo lo importante es identificar las componentes de análisis que contienen dimensiones privilegiadas, dados los objetivos que se persiguen, y tratar de buscarles su significación didáctica a posteriori.

Por otra parte, el análisis de las restricciones en la investigación se efectúa considerando tres dimensiones:

- La dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego.
- La dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.
- La dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

Esta clasificación se deriva naturalmente de la perspectiva sistémica adoptada explícitamente. Es una clasificación paralela a la propuesta por G. Brousseau para el estudio de los obstáculos (Brousseau, 1984; citado en Artigue, 1995).

La concepción y el análisis a priori.

En esta segunda fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado. Se pueden distinguir dos tipos de variables de comando:

- * Las variables macro – didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería.
- * Las variables micro – didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase.

Tanto unas como otras pueden ser en si, variables generales o dependientes del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza. Sin embargo, en el nivel micro – didáctico esta segunda distinción es clásica ya que se diferencian las variables asociadas con el problema de las variables asociadas con la organización y la gestión del medio. Y entre éstas, las variables didácticas son aquellas cuyo efecto didáctico se ha corroborado.

La metodología de la ingeniería didáctica reside en el modo de validación que, como se ha dicho ya, es en esencia interno. Desde la misma fase de concepción se empieza el proceso de validación, por medio del análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, directamente ligada a la concepción local de esta última.

Este análisis a priori se debe concebir como un análisis de control de significado, lo que quiere decir, que si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción con un medio determinado, la teoría de situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones.

La palabra teoría es empleada por Artigue (1995) en un sentido amplio, puesto que incluye las construcciones teóricas elaboradas por Guy Brousseau durante más de 20 años.

El objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

El análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva, centrándose en las características de una situación a – didáctica:

- ▲ Se describen las selecciones del nivel local y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
- ▲ Se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante, cuando es puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
- ▲ Se prevén los campos de comportamiento posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en

particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

Experimentación, análisis a posteriori y validación.

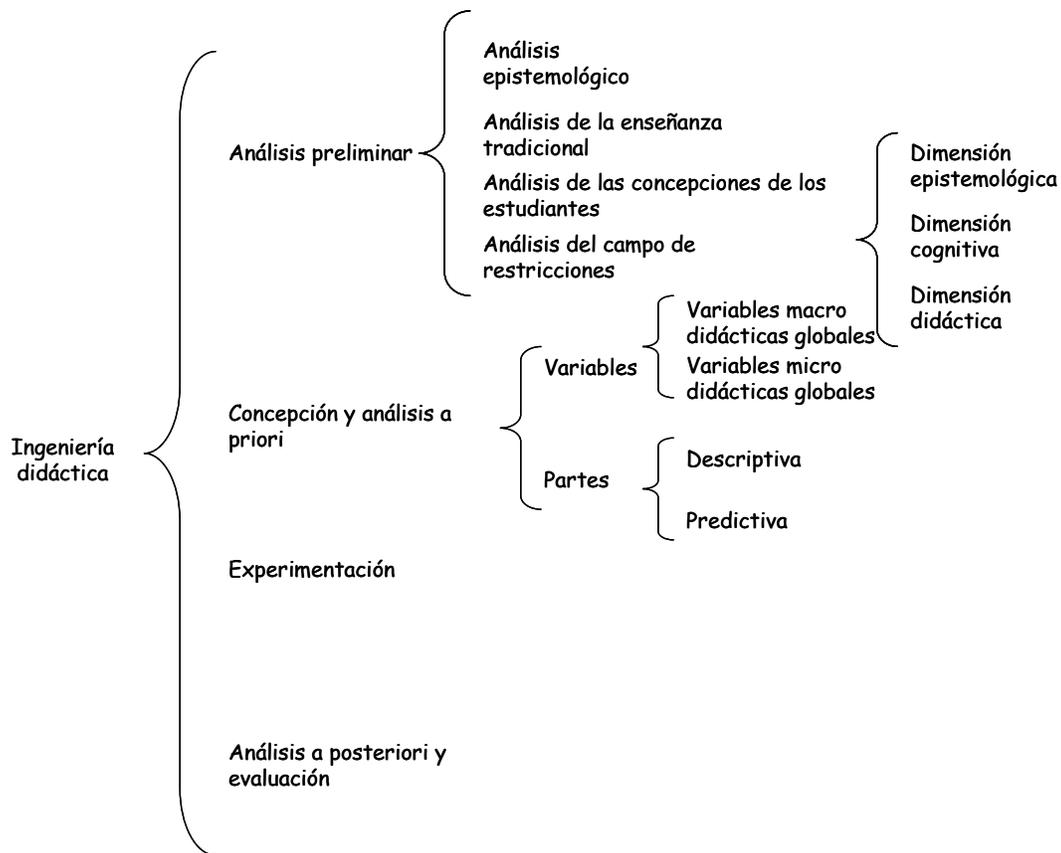
A la fase de experimentación sigue una de análisis a posteriori que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella.

Los datos obtenidos de la experimentación pueden ser complementados con otros obtenidos por medio de metodologías externas, tales como: cuestionarios o entrevistas realizadas en forma individual o en pequeños grupos realizadas en diferentes momentos de la enseñanza.

Al confrontar los análisis a priori y a posteriori se fundamenta la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

Las hipótesis mismas que se formulan explícitamente en los trabajos de ingeniería son a menudo hipótesis relativamente globales que ponen en juego procesos de aprendizaje a largo plazo. Por esto, la amplitud de la ingeniería no permite necesariamente involucrarse en verdad en un proceso de validación.

Las fases de la metodología de la ingeniería didáctica se organizan en el siguiente cuadro sinóptico:



Esta metodología se basa en dos teorías fundamentalmente, la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau y la Teoría de la Transposición Didáctica de Yves Chevallard. En particular, aquí nos ocupamos de la primera de ellas, por lo que se resume ésta en seguida:

Teoría de situaciones didácticas.

Según se presenta en Cantoral, (2000, cap.4), la teoría de situaciones didácticas propone el estudio de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos matemáticos; y se considera que el control de esas condiciones permitirá reproducir y optimizar los procesos de adquisición escolar del conocimiento.

La investigación de los fenómenos relativos a la enseñanza de las matemáticas tiene como objetivo la determinación de las condiciones en las que se produce la apropiación del saber por los alumnos, y para esto necesita ejercer un cierto grado de

control sobre ellas, lo que implica que el investigador debe participar en la producción (o diseño) de las situaciones didácticas que analiza.

En la definición de una situación didáctica; es esencial su carácter intencional, es decir, el haber sido construido con el propósito explícito de que alguien aprenda algo.

El objetivo central de la didáctica de las matemáticas es precisar como funcionan las situaciones didácticas, es decir, poner en claro cuáles de las características de cada situación resultan determinantes para la evolución del comportamiento de los alumnos y, subsecuentemente, de sus conocimientos. Esto no significa que sólo interese analizar las situaciones didácticas exitosas. Incluso si una situación didáctica fracasa en su propósito de enseñar, su análisis puede constituir un aporte a la didáctica, si permite identificar los aspectos de la situación que resultaron determinantes de su fracaso.

Para una situación didáctica determinada se identifica el estado inicial y el conjunto de los diversos estados posibles, entre los que se encuentra el estado final que corresponde a la solución del problema involucrado en la situación. Se hacen explícitas las reglas que permiten pasar de un estado a otro. La situación se describe, entonces, en términos de las decisiones que los alumnos pueden tomar en cada momento y de las diferentes estrategias que pueden adoptar al llegar al estado final.

Se distinguen, entre las situaciones que se producen para su estudio experimental, cuatro tipos cuya secuencia en los procesos didácticos que organizan es la siguiente:

1. **Situaciones de acción.** En las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.
2. **Situaciones de formulación.** Su objetivo es la comunicación de informaciones entre alumnos. Para ello, deben modificar el lenguaje que utilizan

habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

3. **Situaciones de validación.** En éstas se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que necesariamente debe ser así.
4. **Situaciones de institucionalización.** Están destinadas a establecer convenciones sociales, en ellas se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación.

El empleo de las situaciones didácticas no plantea, de ninguna manera, promover a priori un cierto tipo de pedagogía, por razones ideológicas, sin el respaldo de los resultados experimentales correspondientes. Sin embargo, las situaciones didácticas diseñadas y sometidas a experimentación obedecen a ciertas características, en función de los presupuestos epistemológicos subyacentes a su producción.

La persona que aprende necesita construir por sí mismo sus conocimientos mediante un proceso adaptativo similar al que realizaron los productores originales de los conocimientos que se quiere enseñar. Se trata entonces de producir una génesis artificial de los conocimientos, de que los alumnos aprendan haciendo funcionar el saber, o más bien, de que el saber aparezca para el alumno como un medio de seleccionar, anticipar, ejecutar y controlar las estrategias que aplica a la resolución del problema planteado por la situación didáctica.

El camino señalado anteriormente consiste en un proceso de aprendizaje en el que el conocimiento no es ni directa ni indirectamente enseñado por el maestro, sino que debe aparecer progresivamente en el estudiante a partir de múltiples condiciones estructurales: debe, por así decirlo, ser el resultado de confrontaciones con cierto tipo

de obstáculos encontrados durante su actividad. En este sentido, son las múltiples interacciones en el seno de la situación las que deben provocar las modificaciones en el alumno y favorecer la aparición de los conceptos deseados.

El conocimiento que se quiere que los alumnos aprendan debe aparecer en la exacta medida en que llega a ser un instrumento necesario para adaptarse a una situación problemática donde las estrategias utilizadas espontáneamente se revelan ineficaces.

De manera que para el desarrollo del pensamiento matemático entre los estudiantes es necesario diseñar situaciones didácticas en las que:

- Los alumnos se responsabilicen de la organización de su actividad para tratar de resolver el problema propuesto, es decir, que formulen sus propios proyectos personales.
- La actividad de los alumnos esté orientada hacia la obtención de un resultado preciso, previamente hecho explícito por el profesor y que pueda ser identificado por los propios alumnos. Estos deben anticipar y luego verificar los resultados de su actividad.
- La resolución del problema planteado implica la toma de múltiples decisiones por parte de los alumnos, y la posibilidad de conocer directamente las consecuencias de sus decisiones a fin de modificarlas para adecuarlas al logro del objetivo perseguido. Es decir, se permite que los alumnos intenten resolver el problema varias veces.
- Los alumnos pueden recurrir a diferentes estrategias para resolver el problema planteado, estrategias que corresponden a diversos puntos de vista sobre el problema. Es indispensable que, en el momento de plantear el problema, los alumnos dispongan al menos de una estrategia (estrategia de base) para que puedan comprender la consigna y comenzar su actividad de búsqueda de la solución.

Se trata de enfrentar a los alumnos a una situación que evolucione de tal manera que el conocimiento que se quiere que aprendan sea el único medio eficaz para controlar dicha situación. La situación proporciona la significación del conocimiento para el alumno, en la medida en que lo convierte en un instrumento de control de los resultados de su actividad. El alumno construye así un conocimiento contextualizado, a diferencia de la secuenciación escolar habitual donde la búsqueda de aplicaciones de los conocimientos sucede a su presentación descontextualizada.

Por último, he aquí un breve resumen que aporta información respecto al concepto de metacognición:

Meta cognición.

En el texto de Díaz – Barriga (2002) se afirma que la meta cognición consiste en el saber que desarrollamos sobre nuestros propios procesos y productos del conocimiento.

La meta cognición se conceptualiza de dos formas, la primera como el conocimiento acerca de la cognición y la segunda como la regulación de la cognición.

El conocimiento que tiene una persona sobre su propio conocimiento es relativamente estable, por lo que se sabe sobre alguna área de la cognición, ésta no suele variar de una situación a otra; es constatable o verbalizable porque cualquiera “puede reflexionar sobre sus propios procesos cognitivos y discutirlos con otros” (Brown, 1987; citado por Díaz-Barriga, 2002) y por último, es considerado falible porque “el niño o el adulto pueden conocer ciertos hechos acerca de su cognición que no son ciertos” (Brown, 1987, citado por Díaz-Barriga, 2002). Se afirma que la meta cognición es el conocimiento sobre nuestros procesos y productos de conocimiento.

Por otra parte, (Flavell, 1987; citado por Díaz-Barriga, 2002) señala que la meta cognición puede dividirse básicamente en dos ámbitos de conocimiento:

- El conocimiento meta cognitivo, que se refiere a “aquella parte del conocimiento del mundo que se posee y que tiene relación con asuntos cognitivos” (Flavell, 1987).
- Las experiencias meta cognitivas, que son aquellas experiencias de tipo consciente sobre asuntos cognitivos o afectivos.

El conocimiento meta cognitivo está estructurado a partir de tres tipos de variables o categorías que se relacionan entre sí:

- a) **Variable de persona:** se refiere a los conocimientos o creencias que una persona tiene sobre sus propios conocimientos, sobre sus capacidades y limitaciones como aprendiz de diversos temas o dominios, y respecto a los conocimientos que dicha persona sabe que poseen otras personas; por medio de este conocimiento que el aprendiz sabe que poseen las otras personas, pueden establecerse distintas relaciones comparativas.
- b) **Variable tarea:** son los conocimientos que un aprendiz posee sobre las características intrínsecas de las tareas y de éstas en relación con él mismo. Flavell distingue dos subcategorías: a) el conocimiento que tiene un vínculo con la naturaleza de la información involucrada en la tarea y b) el conocimiento sobre las demandas implicadas en la tarea.
- c) **Variable de estrategia:** son los conocimientos que un aprendiz tiene sobre las distintas estrategias y técnicas que posee para diferentes empresas cognitivas, así como de su forma de aplicación y eficacia.

Según Flavell, la mayoría del conocimiento meta cognitivo está constituido por la interacción entre dos o tres de estas categorías. De hecho, la interacción entre ellas es lo que permite la realización de actividades meta cognitivas.

Por otra parte, las experiencias meta cognitivas pueden ocurrir antes, durante y después de la realización del acto o proceso cognitivo, pueden ser momentáneas o prolongadas, simples o complejas.

Flavell (1979) señala algunas de las implicaciones de las experiencias meta cognitivas en la realización de tareas cognitivas:

- Pueden contribuir a establecer nuevas metas o a revisar o abandonar las anteriores.
- Pueden afectar el conocimiento metacognitivo, ya sea por aumentarlo, depurarlo o suprimirlo.
- Participan de forma activa en el involucramiento de las estrategias específicas y de las habilidades metacognitivas.

Desde estas perspectivas, el trabajo aquí presentado se caracteriza por:

- A. Estar centrado en la primera fase de la ingeniería didáctica: el análisis preliminar, considerando en éste los análisis:
 1. De la enseñanza tradicional y sus efectos.
 2. De las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución
 3. Del campo de las restricciones donde se sitúa la realización didáctica, en sus dimensiones cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza y didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

- B. Considerar aspectos meta cognitivos en los estudiantes al provocar en ellos la reflexión sobre sus aprendizajes y las causas que los han provocado o dificultado.

- C. Tomar en cuenta meta cognición de los profesores al buscar su reflexión acerca de su proceso de enseñanza y de las causas que dificultan el aprendizaje de sus alumnos.

CAPÍTULO 3. INVESTIGACIÓN.

Ubicación histórica de las ecuaciones de primer grado.

La matemática tiene un origen muy antiguo y en particular el tema de las ecuaciones empezó a trabajarse desde el antiguo Egipto.

La mayor parte de nuestro conocimiento de la matemática egipcia se deriva de dos papiros matemáticos: el “Papiro Rhind” (1650 A.C.) que contiene 85 problemas y el llamado “Papiro de Moscú” (1850 A.C.) posiblemente dos siglos mas antiguos, que contiene 25 problemas, muchos de los cuales eran muy simples y no iban más allá de una ecuación lineal con una incógnita, como por ejemplo:

“Una cantidad, su $\frac{2}{3}$, su $\frac{1}{2}$ y su $\frac{1}{7}$, sumados entre sí, dan 33, ¿cuál es esa cantidad?”

La solución a este problema era obtenida por un método que hoy se conoce como “método de la falsa posición” o “regula falsi”, que consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probar con él y si se verifica la igualdad se tiene la solución, de lo contrario, mediante algunos cálculos adicionales se obtiene ésta.

Las ecuaciones mas utilizadas por los egipcios eran de la forma: $x + ax = b$ y $x + ax + bx = 0$, donde a , b y c eran números conocidos y x la incógnita que ellos denominaban “aha” o “montón”. Todas ellas surgían de su problemática cotidiana, como de problemas de agrimensura, de repartición de alimentos, etc.

Se ha descubierto que en Babilonia, en la época de su primera dinastía, alrededor de 1950 A.C., la aritmética estaba desarrollada dentro de un álgebra bien establecida.

Los babilonios poseían una técnica para manejar ecuaciones cuadráticas, resolvieron tanto ecuaciones lineales como cuadráticas con dos variables, y aun problemas que involucraban ecuaciones cúbicas y bicuadráticas; formularon tales problemas solamente con valores numéricos específicos para los coeficientes, pero sus métodos no dejan duda de que ellos conocían la regla general.

Tal fue el avance en estos temas que en los textos babilónicos de alrededor de 600 A.C. a 300 A.C. aparecen problemas de ecuaciones que aún ahora requieren considerable habilidad numérica para su resolución.

Otra nación antigua que desarrolló su matemática, para resolver las cuestiones que su diario quehacer imponía, al grado de trabajar con ecuaciones, fue el pueblo chino.

El estudio de la matemática de la antigua china, a partir del documento “Nueve capítulos sobre el Arte Matemático” (*chiu ch'ang Sua-shu*) muestra un conjunto de problemas con reglas generales para su solución; que son de carácter aritmético - computacional y conducen a ecuaciones algebraicas con coeficientes numéricos.

En este escrito aparece una serie de problemas que se trabajan mediante sistemas de ecuaciones lineales, cuya solución se lleva a cabo mediante lo que ahora llamaríamos transformaciones matriciales.

A pesar de todo esto, los primeros en tratar a las ecuaciones de primer grado, con formalidad, fueron los árabes en un libro llamado “Tratado de la cosa”, donde “*la cosa*”

era la incógnita. Incluso esto explica la razón por la que generalmente se representa a ésta usando la letra x : la primera traducción al latín del “tratado de la cosa” se realizó en España y la palabra árabe “cosa” tiene un sonido muy parecido a la x española medieval.

Alrededor del 300 A.C.se encuentra un álgebra desarrollada por los griegos, llamada “álgebra geométrica”, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

La introducción de la notación simbólica, marca el inicio de una nueva etapa en la cual Descartes (1596-1650) contribuye de forma importante a su desarrollo. Es este hecho el que convierte al álgebra en la ciencia de los cálculos simbólicos y las ecuaciones. Posteriormente Euler la define como la teoría de los “cálculos con cantidades de distintas clases” (cálculos con números racionales enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones).

Para llegar al actual proceso de resolución de la ecuación básica de primer grado: $ax + b = c$ han pasado más de 3000 años.

Contenido de los programas de estudio para educación secundaria de la (SEP), en lo referente a las ecuaciones de primer grado.

Los propósitos de estos programas son diversos, los que se refieren de forma particular al tema de ecuaciones de primer grado, textualmente dicen:

Para segundo grado de secundaria:

“Plantear problemas sencillos que conduzcan a ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales y resolverlos utilizando procedimientos algebraicos (sólo por sustitución en el caso de sistemas de ecuaciones lineales)”.

Para tercer grado de secundaria:

“Practicar los procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones 2x2 y ecuaciones cuadráticas, así como aplicar los productos notables para factorizar polinomios de segundo grado”.

Los programas no están estructurados en unidades, sino en secciones que agrupan temas afines, señalando que *“el maestro podrá modificar el orden de los contenidos y organizar su enseñanza en la forma que considere mas adecuada”.*

En la sección correspondiente a los temas de álgebra se indica:

Para segundo grado:

“A lo largo de toda la enseñanza del álgebra se buscará que los alumnos la utilicen en el planteo y solución de problemas, no sólo como aplicación de los conocimientos previamente adquiridos, sino también – cada vez que sea posible y se juzgue conveniente- para preparar la comprensión y el acceso a nuevos procedimientos”.

Para tercer grado:

“Desde sus inicios, y a lo largo de toda la enseñanza del álgebra, se procurará que los alumnos la utilicen en el planteo y solución de problemas, no sólo como aplicación de los conocimientos previamente adquiridos, sino también –cada vez que sea posible y se juzgue conveniente- para dar sentido y facilitar la comprensión de nuevos procedimientos”.

En el tema de nuestro interés actual, dice:

Para segundo grado:

“Ecuaciones lineales o de primer grado.

- *Métodos de solución de ecuaciones de las formas $a+x=b$, $ax=b$, $ax+b=c$ y de otras ecuaciones que pueden llevarse a esta forma; en particular ecuaciones de las formas $ax+b=cx+d$, $ac+bx+c=dx+ex+f$ y casos sencillos de ecuaciones con paréntesis”.*

Para tercer grado:

“Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales.

- *Profundización en el estudio de las ecuaciones lineales.*
 - *Ecuaciones con paréntesis.*
 - *Ecuaciones con coeficientes fraccionarios.*
 - *Ecuaciones que se reducen a la forma $ax+b=c$ previas transformaciones algebraicas”.*

En las recomendaciones didácticas que la S.E.P. da a los profesores de secundaria y que no son particulares de un determinado grado escolar se señala que:

“Las ecuaciones lineales y los métodos que sirven para resolverlas representan el primer contacto de los alumnos con algunas de las nociones y procedimientos fundamentales del álgebra, como son la noción misma de ecuación, de incógnita y los procedimientos para despejar la incógnita. Por ello es muy importante que desde el principio haya actividades y problemas para que comprendan estas nociones y se den cuenta de la forma como las condiciones de un problema se traducen en una ecuación”.

Como podemos percibir, el plan de la S.E.P. para la secundaria en la materia de matemáticas y en particular para el tema de ecuaciones de primer grado, enfatiza la importancia de que los alumnos adquieran la habilidad de aplicar el conocimiento algebraico en la resolución de problemas.

La concepción que los estudiantes tienen del signo =.

Con la finalidad de detectar la concepción que los estudiantes tienen respecto al signo =, elemento básico de las ecuaciones en general, y de primer grado en particular, se presentó a 13 estudiantes de diferentes escuelas, tanto del SI de la ENP de la UNAM, como del NMS del IPN, un cuestionario de tres preguntas; éstas y los resultados obtenidos se presentan a continuación:

La Primera pregunta fue:

¿QUÉ SIGNIFICADOS LE ENCUENTRAS AL SIGNO = EN MATEMÁTICAS?

El 100% de los alumnos encuestados respondió que el signo sirve para expresar u “obtener” resultados y de entre éstos solo el 15.3% le confirió un significado adicional al signo, siendo éste el de servir para expresar igualdad e identidad entre dos cosas.

La segunda pregunta fue:

¿TE PARECE QUE EL SIGNO = REPRESENTA LO MISMO EN LAS EXPRESIONES SIGUIENTES?

- 1) $b = 3$
- 2) $5 + 2 = 7$
- 3) $4x + 2x = 3x + 3x$
- 4) $3x + 4 = 20$

Ocho estudiantes, es decir, el 61.5%, respondieron afirmativamente, en consecuencia el 38.5% dijeron no.

La tercera pregunta que se planteó fue:

EN CASO DE QUE TU RESPUESTA A LA PREGUNTA ANTERIOR HAYA SIDO NEGATIVA, POR FAVOR, DESCRIBE LO QUE SIGNIFICA EL SIGNO = EN CADA UNA DE LAS EXPRESIONES PRESENTADAS

Por la naturaleza de la pregunta, ésta solo fue respondida por el 38.5% de los alumnos encuestados, es decir, por los cinco que dijeron **no** a la segunda cuestión.

De ellos, el 100% manifestó que en la expresión (1), el signo = indica igualdad y en la (2), resultado.

Para la expresión (3) no hubo dos respuestas similares, se habló de indicación de operaciones a realizar, de combinación de cantidades, de equivalencia, de “mostrar” la segunda parte de la “ecuación” y de dar dos valores que no son el resultado.

Finalmente, para la expresión (4), el 80% dijo que representaba “resultado” y el 20% restante, es decir, un estudiante, textualmente expresó: “aquí no sale la cantidad como suma”.

Cuestionarios, aplicados a alumnos y profesores.

Para esta actividad se trabajó con 34 alumnos, de diferentes grados del nivel medio superior, que ya han aprobado el curso de álgebra: 19 distribuidos en tres preparatorias particulares del SI de la UNAM de diferentes niveles socioeconómicos y 15, en un CECyT del IPN el Miguel Bernard; así como con 14 profesores: 8 del mismo CECyT y 6 de diversas preparatorias.

Los cuestionarios fueron diseñados con los siguientes propósitos en cada una de sus preguntas:

Pregunta	Cuestionario para estudiantes Busca detectar:	Cuestionario para profesores Pretende conocer
1	Parte de la metodología con que les fue enseñado el tema.	En parte, la metodología que emplean para trabajar con el tema.
2 y 3	Su percepción acerca de su aprendizaje del tema.	Su percepción acerca del grado de aprendizaje logrado en sus alumnos respecto al tema.
4 y 5	Su percepción sobre las causas	Su percepción sobre los motivos

	que propiciaron su aprendizaje.	que dificultaron el aprendizaje en sus alumnos.
6	Su habilidad y conocimiento para resolver ecuaciones de primer grado, sencillas, pero no inmediatas.	Los libros que emplean como texto y como apoyo con sus estudiantes al trabajar el tema de ecuaciones de primer grado.
7	Su habilidad para resolver problemas concretos mediante el uso de ecuaciones de primer grado.	

Cuadro 1.

Es importante destacar que:

- todos los estudiantes encuestados habían aprobado ya la materia en que se trabaja el tema bajo estudio, siendo ésta la única característica que presentan en común, pues el muestreo fue totalmente aleatorio y
- de los 14 profesores, 12 de ellos cuentan con más de 2 años de experiencia docente.

Las preguntas contenidas en los cuestionarios y resultados obtenidos de su revisión y análisis fueron los siguientes:

La pregunta número 1, a los estudiantes fue:

EN TU CURSO DE MATEMÁTICAS IV/ÁLGEBRA VISTE EL TEMA DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO, POR FAVOR ENUMERA LOS SIGUIENTES ASPECTOS SEGÚN EL ORDEN EN QUE LOS TRABAJARON EN CLASE:

- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
- _____ DEFINICIÓN DE ECUACIÓN
- _____ ESTABLECER LAS PROPIEDADES DE LA IGUALDAD Y SU UTILIDAD PARA RESOLVER ECUACIONES
- _____ RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO
- _____ VISUALIZAR LA ECUACIÓN A PARTIR DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN
- _____

LINEAL CORRESPONDIENTE

Las secuencias manifestadas por los alumnos, fueron las siguientes:

	Resol. de Probl.	Definición de ec.	Prop. de igual.	Resolv. Ecs.	Gráfica
Alumnos de CECyT del IPN	4	1	2	3	5
	5	1	2	3	4
	5	1	2	3	4
	3	2	4	1	5
	5	1	2	4	3
	5	1	3	4	2
	1	2	5	4	3
	4	1	2	3	5
	5	1	2	4	3
	5	1	2	3	4
	4	1	2	3	5
	5	1	3	2	4
	5	1	2	4	3
	4	1	2	3	5
	4	1	2	3	5
Alumnos de ENP	4	1	2	3	5
	2	1	3	4	5
	3	1	4	2	5
	3	1	4	2	5
	4	1	2	3	5
	3	1	4	2	5
	3	1	5	2	4
	3	1	5	2	4
	4	1	3	2	5
	1	3	2	4	5
	3	1	4	2	5
	1	3	2	4	5
	5	2	1	4	3
	1	2	4	3	5
	5	1	2	3	4
	0	1	2	3	0
	5	1	2	4	3
	2	1	5	3	4
===	No	Lo	Recuerda	===	

Cuadro 2.

Rescribiendo la tabla anterior, ignorando la procedencia de los estudiantes, podemos contar el número de ocurrencias de cada una de las secuencias de actividades, indicadas por ellos:

Resol. de Probl.	Definición de ec.	Prop. de igual.	Resol.. Ecs.	Gráfica	Ocurrencias	% del total de secuencias
0	1	2	3	0	1	2.9%
1	2	4	3	5	1	2.9%
1	2	5	4	3	1	2.9%
1	3	2	4	5	2	5.8%
1	3	2	4	5		
2	1	3	4	5	1	2.9%
2	1	5	3	4	1	2.9%
3	1	4	2	5	4	11.7%
3	1	4	2	5		
3	1	4	2	5		
3	1	4	2	5		
3	1	5	2	4	2	5.8%
3	1	5	2	4		
3	2	4	1	5	1	2.9%
4	1	2	3	5	7	20.5%
4	1	2	3	5		
4	1	2	3	5		
4	1	2	3	5		
4	1	2	3	5		
4	1	2	3	5		
4	1	2	3	5		
4	1	3	2	5	1	2.9%
5	1	2	3	4	4	11.7%
5	1	2	3	4		
5	1	2	3	4		
5	1	2	3	4		
5	1	2	4	3	4	11.7%
5	1	2	4	3		
5	1	2	4	3		
5	1	2	4	3		
5	1	3	2	4	1	2.9%
5	1	3	4	2	1	2.9%
5	2	1	4	3	1	2.9%
===	No	Lo	Recuer-	da	1	2.9%

Cuadro 3.

Como podemos notar, la actividad con que en la mayoría de los casos, se da inicio al tema de ecuaciones de primer grado, es el dar la definición de una ecuación, teniendo

esta actividad el 86.6% de números “1” entre los alumnos de CECyT, el 73.6% entre los alumnos de preparatoria y el 79.4% del total.

Las actividades que en la mayoría de los casos se dejan al final del trabajo del tema son la resolución de problemas y el visualizar de manera gráfica a la ecuación; entre alumnos de CECyT, hubo 53% de números “5” para resolución de problemas y 40% para visualización de la ecuación. Por lo que se refiere a los estudiantes de preparatoria, la resolución de problemas tuvo 15.7% de números “5” y 57.8% para la visualización de la ecuación. Por lo que se refiere al total de los estudiantes, la resolución de problemas se dejó al final en el 32% de los casos y la visualización de la ecuación en el 50%.

Finalmente notamos que la secuencia con frecuencia mas alta es: definición de la ecuación \Rightarrow propiedades de la igualdad \Rightarrow resolver ecuaciones \Rightarrow resolución de problemas \Rightarrow representación gráfica, con un 20.5% de las respuestas.

Cuando se hizo la pregunta análoga a los profesores, las respuestas fueron:

	Resol. de probl.	Definición de ec.	Prop. Igualdad	Resol. de ecs.	Gráfica
Profesores del CECyT Miguel Bernard del IPN	5	2	3	4	1
	5	1	2	3	4
	5	1	2	3	4
	5	1	4	2	3
	5	1	4	2	3
	4	1	2	3	5
	5	1	2	4	3
	5	2	1	4	3
Profesores de diferentes ENP's	5	1	2	3	4
	5	2	1	4	3
	1	3	2	4	5
	5	2	1	3	4
	5	1	4	2	3
	5	1	2	4	3

Cuadro 4.

Tenemos que el 75% de los profesores de CECyT, el 50% de los de preparatoria y el 64.2% del total abordan la definición de ecuación como primera actividad.

Por lo que se refiere a la actividad que dejan para el final, tenemos que la que prevalece en este lugar es la resolución de problemas, pues en tal posición la coloca el 87.5% de los profesores de CECyT, el 83.3% de los de preparatoria y el 85.7% de todos.

Analizando ahora la ocurrencia de estas secuencias, descartando la distinción en cuanto al sistema educativo al que pertenecen los profesores, tenemos que:

Resol. de probl.	Definición de ec.	Prop. Igualdad	Resol. de ecs.	Gráfica	Ocurrencias	% del total de secuencias
1	3	2	4	5	1	7.1%
4	1	2	3	5	1	7.1%
5	1	2	3	4	3	21.4%
5	1	2	3	4		
5	1	2	3	4		
5	1	2	4	3	2	14.2%
5	1	2	4	3		
5	1	4	2	3	3	21.4%
5	1	4	2	3		
5	1	4	2	3		
5	2	1	3	4		7.1%
5	2	1	4	3	2	14.2%
5	2	1	4	3		
5	2	3	4	1		7.1%

Cuadro 5.

Aquí tenemos que la frecuencia mayor, de 3 ocurrencias que corresponde al 21.4% se presenta en dos secuencias; una que es: definición de ecuación \Rightarrow propiedades de la igualdad \Rightarrow resolución de ecuaciones \Rightarrow representación gráfica \Rightarrow resolución de problemas y la otra es: definición de ecuación \Rightarrow resolución de ecuaciones \Rightarrow representación gráfica \Rightarrow propiedades de la igualdad \Rightarrow resolución de problemas. En cualquiera de estas dos, notamos que la resolución de problemas se deja al final.

Cabe destacar que las secuencias con mayor frecuencia mencionadas por profesores no corresponden a la que mas alumnos citan la que siguieron con ellos cuando trataron el tema que nos ocupa.

La segunda pregunta del cuestionario de los estudiantes fue:

CONSIDERAS HABER APRENDIDO A RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO:

MUY BIEN
 BIEN
 REGULAR
 NO APRENDISTE

El número de alumnos que eligió cada opción se presenta en la siguiente tabla:

	Muy bien	Bien	Regular	No aprendiste
Alumnos de CECyT	2	8	5	0
Alumnos de ENP	3	9	2	5
Totales	5	17	7	5
Porcentajes de cifras totales	14.7	50.0	20.6	14.7

Cuadro 6.

Podemos apreciar que la respuesta que prevalece entre los estudiantes de ambos sistemas es “bien”, con el 53.3% de los estudiantes de CECyT, el 56.25% de los de preparatoria y el 50% del ambos.

Aquí se destaca que ninguno de los 15 estudiantes encuestados en el CECyT Miguel Bernard eligió la opción “no aprendiste”, mientras que 5, es decir el 26.3% de los de preparatoria sí la marcó.

En contraste a los profesores se les preguntó su apreciación al respecto, su pregunta fue:

POR FAVOR ASIGNA PORCENTAJES SEGÚN CONSIDERES EL GRADO DE APRENDIZAJE LOGRADO EN TUS ALUMNOS EN CUANTO A RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO:

MUY BIEN
 BIEN
 REGULAR
 NO APRENDIERON

Sus respuestas fueron:

	Muy bien	Bien	Regular	No aprendieron
Profesores de CECyT	5	10	40	45
	10	60	20	10
	20	40	30	10
	70	10	10	10
	5	80	10	5
	40	30	20	10
	30	20	30	20
	10	40	30	20
Profesores de ENP	20	50	20	10
	10	70	10	10
	10	5	35	50
	15	25	30	30
	10	30	30	30
	20	40	30	10

Cuadro 7.

Si ahora consideramos solo la opción a la que cada uno de los profesores asigna el porcentaje más alto y la marcamos en la tabla con★, tomando la opción intermedia cuando éste corresponde a más de una y lo señalamos con★★, tenemos:

	Muy bien	Bien	Regular	No aprendieron
Profesores de CECyT				★
		★		
		★		
	★			
		★		
	★			
		★★		
Ocurrencias	2	5	0	1
Porcentajes	25%	62.5%	0%	12.5%
Profesores de ENP		★		
		★		
				★
			★★	
			★★	
		★		
Ocurrencias	0	3	2	1
Porcentajes	0%	50%	33.3%	16.6%
Ocurrencias en general	2	8	2	2
Porcentajes en general	14.2%	57.1%	14.2%	14.2%

Cuadro 8.

Con lo que podemos decir que la apreciación general de los profesores es que sus alumnos aprenden “bien” a resolver ecuaciones de primer grado, lo cual es análogo a la percepción de los alumnos.

La tercera pregunta inquiriere respecto a la habilidad lograda en el planteamiento de la ecuación necesaria para la resolución de problemas, la de los estudiantes fue:

TU HABILIDAD PARA PLANTEAR LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO QUE RESUELVE UN PROBLEMA CONCRETO ES:

MUY BUENA BUENA REGULAR NULA

El número de veces que se eligió cada respuesta, se presenta en la siguiente tabla:

	Muy buena	Buena	Regular	Nula
Alumnos de CECyT	1	5	8	1
Alumnos de ENP	2	4	8	5
Totales	3	9	16	6
Porcentajes de cifras totales	8.8	26.5	47.0	17.6

Cuadro 9.

En este caso, la respuesta que prevalece es “regular” con el 53.3% de las respuestas de los alumnos de CECyT, el 42.1% de los de preparatoria y el 47% de todos.

La pregunta correspondiente a los profesores fue:

POR FAVOR ASIGNA PORCENTAJES RESPECTO A LA HABILIDAD LOGRADA EN TUS ALUMNOS PARA PLANTEAR LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO QUE RESUELVE UN PROBLEMA CONCRETO ES:

MUY BUENA BUENA REGULAR NULA

Los porcentajes que asignaron a cada opción, se muestran en la siguiente tabla:

	Muy buena	Buena	Regular	Nula
Profesores de CECyT	5	5	30	60
	5	50	25	20
	10	30	40	20
	20	60	10	10
	10	10	50	30
	10	40	30	20
	20	40	20	20
	5	25	40	30
Profesores de ENP	10	20	50	20
	10	20	60	10
	5	10	25	60
	10	15	45	30

	15	15	50	20
	25	50	25	0

Cuadro 10.

Rescribiendo la tabla anterior con un manejo análogo al realizado para la pregunta anterior, tenemos que:

	Muy buena	Buena	Regular	Nula
Profesores de CECyT				★
		★		
			★	
		★		
			★	
		★		
		★		
Ocurrencias	0	4	3	1
Porcentajes	0%	50%	37.5%	12.5%
Profesores de ENP			★	
			★	
				★
			★	
		★		
Ocurrencias	0	1	4	1
Porcentajes	0%	16.6%	66.6%	16.6%
Ocurrencias en general	0	5	7	2
Porcentajes en general	0%	35.7%	50%	14.28%

Cuadro 11.

Es claro que la mayoría de los profesores perciben que la habilidad lograda en la mayoría de sus alumnos en cuanto a plantear la ecuación de primer grado que resuelve un problema es solo “regular”, lo que coincide con la apreciación de los estudiantes.

En cuarto lugar, se indagó con los alumnos, respecto a las causas del aprendizaje logrado en cuanto las ecuaciones de primer grado, la pregunta planteada a ellos fue:

A TU PARECER, TU APRENDIZAJE SOBRE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO SE DEBIÓ A (PUEDES MARCAR MAS DE UNA RESPUESTA):

	TU ESFUERZO
	EL TEMA ES FÁCIL

	TU INTELIGENCIA
	LA FORMA EN QUE SE TRABAJÓ EL TEMA

	TU PROFESOR
	LA AYUDA DE ALGUIEN MAS

El número de veces que se eligió cada una de las posibles respuestas se presenta a continuación:

	Esfuerzo	Inteligencia	Profesor	Facilidad-tema	Forma de trab.	Ayuda -alguien
Alumnos de CECyT	8	2	9	1	3	3
Alumnos de ENP	10	6	4	8	3	11
Totales	18	8	13	9	6	14

Cuadro 12.

Podemos notar que las causas a las que mas atribuyen los estudiantes el aprendizaje logrado respecto a la resolución de ecuaciones primer grado son: **el profesor y su propio esfuerzo**, en el caso de los alumnos de **CECyT**; **la ayuda de alguien mas y su propio esfuerzo** en los alumnos de preparatoria, situación que se mantiene cuando se toman los totales. A la vez, se detecta que las causas menos elegidas por los alumnos de CECyT son su inteligencia y la facilidad del tema, mientras que entre los de preparatoria, las opciones menos elegidas son la forma de trabajo y el profesor. Cuando se considera el total de las encuestas, se tiene que las opciones menos veces seleccionadas son la forma de trabajo y la inteligencia de los alumnos.

La pregunta que se planteó a los profesores fue:

A TU PARECER, LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE SOBRE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO QUE SE PRESENTAN EN TUS ALUMNOS SE DEBEN A (PUEDES MARCAR MAS DE UNA RESPUESTA):

	SU POCO ESFUERZO		SU INTELIGENCIA		FACTORES EXTERNOS
	DIFICULTAD PROPIA DEL TEMA		LA FORMA EN QUE SE TRABAJÓ EL TEMA		EL SISTEMA ESCOLAR

El número de veces que eligieron cada opción se presenta en la siguiente tabla:

	Poco esf.	Inteligencia	Factores ext.	Dificultad-T.	F. de trab.	Sist. escolar
Profesores de CECyT	8	1	2	2	0	3
Profesores de ENP	6	0	2	2	3	1
Totales	14	1	4	4	3	4

Cuadro 13.

Es claro que para todos los profesores la principal causa de las dificultades de aprendizaje de sus alumnos, respecto al tema en cuestión, es que éstos se **esfuerzan poco** y a la que menos atribuyen tales problemas es a la propia inteligencia de los estudiantes.

La quinta pregunta planteada a los estudiantes fue:

A TU PARECER, TU HABILIDAD PARA PLANTEAR LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO QUE RESUELVEN PROBLEMAS CONCRETOS SE DEBE A:

	TU ESFUERZO		TU INTELIGENCIA		TU PROFESOR
	EL TEMA ES FÁCIL		LA FORMA EN QUE SE TRABAJÓ EN CLASE		LA AYUDA DE ALGUIEN MAS

El número de veces que cada posibilidad fue seleccionada se aprecia a continuación:

	Esfuerzo	Inteligencia	Profesor	Facil – tema	F. de trabajo	Ayuda - alguien
Alumnos de CECyT	6	1	5	1	9	3
Alumnos de ENP	8	6	5	4	5	10
Totales	14	7	10	5	14	13

Cuadro 14.

Como podemos notar, las opciones que mas veces se eligieron entre los estudiantes de **CECyT** son la forma de **trabajo en clase** y el **esfuerzo** de los mismos alumnos, entre los estudiantes de **preparatoria**: **la ayuda de alguien mas** y su **esfuerzo** y, considerando a la **totalidad**: **el esfuerzo de los alumnos** y **la forma de trabajo en clase**.

Contrastando con esto, a los profesores se les preguntó:

A TU PARECER, LAS DIFICULTADES PARA DESARROLLAR HABILIDAD EN TUS ALUMNOS PARA PLANTEAR LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO QUE RESUELVEN PROBLEMAS CONCRETOS SE DEBE A:

<input type="checkbox"/>	SU POCO ESFUERZO	<input type="checkbox"/>	SU INTELIGENCIA	<input type="checkbox"/>	FACTORES EXTERNOS
<input type="checkbox"/>	DIFICULTAD PROPIA DEL TEMA	<input type="checkbox"/>	LA FORMA EN QUE SE TRABAJÓ EN CLASE	<input type="checkbox"/>	EL SISTEMA ESCOLAR

La cantidad de veces que cada opción fue elegida se muestra en la tabla siguiente:

	Poco esf.	Inteligencia	Factores ext.	Dificultad-T.	F. de trabajo	Sist. escolar
Profesores de CECyT	5	3	1	4	1	3
Profesores de ENP	5	1	2	4	4	2
Totales	10	4	3	8	5	5

Cuadro 15.

Podemos ver que para los profesores de **CECyT** los factores que mas dificultan el que los alumnos desarrollen habilidad para plantear las ecuaciones de primer grado necesarias para resolver problemas son **la dificultad** propia del tema y el **poco esfuerzo** de los alumnos, los profesores de **preparatoria** coinciden y consideran casi en la misma cantidad un tercer factor que es **la forma en que se trabaja** el tema, finalmente, si consideramos la totalidad, los factores mas citados son de nueva cuenta, el **poco esfuerzo** de los estudiantes y **la dificultad** propia del tema.

Como sexto punto, se pidió a los estudiantes que resolvieran tres ecuaciones de primer grado, no inmediatas; en concreto, la cuestión planteada fue:

POR FAVOR RESUELVE LAS SIGUIENTES ECUACIONES DE PRIMER GRADO:

a) $3(x + 2) = 5(x - 6)$ b) $\frac{x - 2}{3} = \frac{x}{7}$ c) $x(x + 2) = x(x + 4) - 12$

La forma en que los estudiantes de los dos sistemas considerados, lograron resolver las ecuaciones, se presenta en la siguiente tabla:

Ecuación	Bien resuelta				Mal resuelta				No resuelta			
	ENP	CECYT	Total		ENP	CECYT	Total		ENP	CECYT	Total	
a	12	12	24	70.5%	3	3	6	17.6%	4	0	4	11.7%
b	6	9	15	44.1%	2	5	7	20.5%	11	1	12	35.2%
c	13	10	23	67.6%	1	4	5	14.7%	5	1	6	17.6%
Totales	31	31	62	60.7%	6	12	18	17.6%	20	2	22	21.5%

Cuadro 16.

En estos resultados, destacan varias cuestiones:

La ecuación (b) que es la única de las tres que contiene denominadores fue la que mas problemas causó a los estudiantes, atendiendo a cifras totales, se tiene que el 44% la resolvió bien, 20.58% la resolvió mal y el 35% no la resolvió.

La ecuación (a), que contenía paréntesis, pareció ser la que menos dificultades causó, con un 70.5% de personas que la resolvieron bien, 17.6% la resolvieron mal y 11.7% que no la resolvieron.

Del total posible de respuestas correctas entre los estudiantes de CECyT, éstos lograron el 68.8%, y del total de respuestas correctas posibles entre estudiantes de preparatoria, lograron el 54.38% y del total posible considerando a todos los estudiantes encuestados, hubo un 60.78% de respuestas correctas.

Del total de posibles respuestas, el 4.4% de las respuestas de los estudiantes de CECyT fueron hacer nada, mientras que entre los de preparatoria esto ocurrió con el 35%, considerando el total, el no responder obtuvo un porcentaje de 21.56%.

Dada la dificultad de las ecuaciones propuestas, que es análoga a la que se maneja en el nivel medio básico (secundaria), los resultados que se esperaban eran un 80% de aciertos, un 20% de errores y 0% de ecuaciones no resueltas. Como podemos ver de todo lo antes expuesto, la realidad dista mucho de esto.

La última cuestión planteada a los estudiantes fue la resolución de un problema:

RESUELVE EL SIGUIENTE PROBLEMA, DE LA MANERA QUE TE PAREZCA MÁS CONVENIENTE:

Un niño se midió a sí mismo y descubrió que su estatura ya es de 140 cm. Cuando se lo dijo a su mamá, se les ocurrió a ambos, medirlo por partes y descubrieron que la altura de su cabeza es cuatro veces el largo de su cuello, el largo de su tronco es 8 veces el de su cuello y el de sus piernas es 14 veces. Calcula la longitud en centímetros de cada parte del cuerpo de este niño.

Los resultados obtenidos en este punto se consignan a continuación:

	Prepa	CECyT	Total
Resolvieron con ecuación	10	8	18
Planteamiento de ecuación adecuada	5	3	8
Resolución de ecuación propuesta	10	4	14
Resultados completos correctos	4	3	7
Resultados completos incorrectos	6	4	10
Resultados incompletos incorrectos	0	1	1
Resolvieron sin ecuación	0	4	4
Resultados incorrectos	0	3	3
Resultados correctos	0	1	1
No resolvieron:	9	3	12

Cuadro 17.

A partir de estas cifras, se destaca que:

El 52.6% de los estudiantes de preparatoria emplearon una ecuación para resolver el problema, 0% lo abordaron de manera diferente y el 47% no lo resolvieron. Además, el 21% encontraron los resultados correctos, completos, pese a que fue el 26.3% quienes plantearon correctamente la ecuación apropiada para hacerlo.

El 53.3% de los estudiantes de CECyT emplearon una ecuación para resolver el problema, 26.6% lo atacaron sin emplear una ecuación y el 20% no lo resolvieron. Además, el 20% llegaron a la solución correcta empleando una ecuación, siendo el mismo porcentaje de quienes plantearon correctamente la ecuación y el 6.66% lo logró sin usar ecuación.

Considerando a la totalidad de los estudiantes encuestados se tiene que: 52.9% emplearon una ecuación, 11.7% no usaron ecuación para resolver el problema y el 35.2% no resolvieron el problema. Además, el 20.5% encontraron completos los

resultados correctos, 23.5% plantearon la ecuación adecuada, 41.1% resolvieron bien la ecuación que plantearon aunque no en todos los casos fue la apropiada.

En síntesis, solo 8 de 34 estudiantes, es decir, el **23.5% resolvieron correctamente** el problema cuyo grado de dificultad es muy elemental, propio para el segundo grado de enseñanza secundaria.

Por lo que se refiere a los profesores, se les cuestionó sobre los libros que emplean como texto y como apoyo y el número de menciones a cada libro y la modalidad en que lo emplean se presenta en la tabla siguiente:

Libros que emplean como texto:	Prepa	CECyT	Total
Carpinteyro	1	0	1
Baldor	2	2	4
De Oteyza	1	3	4
Cuéllar	2	0	2
Cruz	0	5	5
Ninguno	0	1	1

Cuadro 18.

Libros que emplean como apoyo para el maestro:	Prepa	CECyT	Total
Baldor	2	4	6
Moreno	1	0	1
Carpinteyro	1	0	1
Gustafson	1	0	1
Barnett	1	0	1
Cruz	0	2	2
Allen Angel	0	1	1
Ninguno	0	2	2

Cuadro 19.

Podemos apreciar que el libro de álgebra, más empleado entre todos los profesores, ya sea como texto o como apoyo es el de Baldor, A., siendo mencionado en 10 ocasiones. El segundo lugar en menciones lo ocupa el libro de Cruz y el tercero el De Oteyza.

Descripción breve de los libros de texto mencionados por los profesores

Se hizo una primera revisión general de los libros de texto mencionados por los profesores al responder al cuestionario que se les aplicó y a algunos otros que se encuentran en el mercado actualmente, siendo el resultado de ésta el que se muestra en el siguiente cuadro:

Texto	Capítulo	Antes de:	Después de:	Forma de tratar el tema.
Baldor	8, 9	Descomposición factorial	Teorema del residuo	Inicia explicando lo que es una igualdad, una ecuación, una identidad, un miembro y un término, tras lo cual clasifica las ecuaciones en numéricas y literales. Luego presenta grado de una ecuación, lo que son raíces de ésta y en que consiste resolver una ecuación. Continúa dando las propiedades de la igualdad. Presenta ejemplos y ejercicios de resolución de ecuaciones, que van aumentando su grado de dificultad. Luego trabaja la resolución de problemas, presentando algunos ejemplos y luego una serie de problemas para resolver.
	15 - 17	Fórmulas	Operaciones con fracciones algebraicas	
Cruz	==	Plano cartesiano	Fracciones complejas	El libro está estructurado en lecciones, no en capítulos, inicia el tema con definiciones, sigue con las propiedades de las desigualdades, para continuar con la resolución de ecuaciones

				incrementando gradualmente su grado de dificultad, incluyendo de 2 a 3 ejemplos y de 6 a 12 ejercicios en cada caso. Posteriormente toca el punto de problemas, que inicia con la modelación de situaciones mediante una ecuación y de ahí se sigue a la resolución de problemas.
Cuéllar	7	Sistemas de ecuaciones	Operaciones con polinomios	Inicia el tema con definiciones y las propiedades de éstas, a continuación aborda la resolución de ecuaciones mediante el uso de las propiedades, con ejemplos y ejercicios, aborda la resolución de problemas presentando a las ecuaciones como modelos matemáticos y luego clasifica los problemas en tipos de ellos.
De Oteyza	3	Polinomios	Introducción al álgebra (expresiones algebraicas)	Trabaja con ecuaciones de una sola variable, presenta el tema haciendo uso de un problema sencillo y da una propiedad de las igualdades que se emplea en la resolución de éste. Sigue el mismo manejo para presentar las demás propiedades. En los ejercicios para el alumno, plantea una serie de ecuaciones a ser resueltas y luego un conjunto de problemas. En este texto, resulta relevante el hecho de que en los capítulos

				subsecuentes, dedicados a polinomios, factorización y expresiones racionales sigue presentando ecuaciones a resolver.
Carpinteyro	7	Sistemas de ecuaciones y desigualdades.	Productos notables y factorización y Operaciones con fracciones y radicales.	El capítulo inicia con una reseña histórica, seguida de algunos “problemas eje” con lo que introduce la necesidad de contar con ecuaciones para su resolución. Posteriormente aborda a las igualdades de donde parte para tratar propiamente a las ecuaciones, su presentación incluye tanto ecuaciones solas como problemas de aplicación. Un manejo similar se da en los ejercicios que se dejan al alumno.
Barnett	1	Gráficas y funciones.	Operaciones básicas algebraicas y conjuntos.	Inicia el tratamiento de las ecuaciones lineales con la definición de igualdad, para dar paso a ver métodos para resolver ecuaciones de primer grado por medio de ejemplos de éstas. Posteriormente aborda la resolución de problemas por medio de ecuaciones de primer grado, proporcionando una metodología para su planteamiento.
Moreno	--	--	--	Este libro no es de álgebra, sino de lógica matemática. Por lo mismo

				no aborda el tema de ecuaciones de primer grado.
Angel	2	Gráficas y funciones	Conceptos básicos	Inicia el trabajo relativo a las ecuaciones de primer grado con propiedades de la igualdad, para continuar presentando conceptos tales como: término, coeficiente, etc., para seguir con la definición de ecuación, dar propiedades de la suma y multiplicación de la igualdad que emplea en una metodología de resolución de ecuaciones. Prosigue con un manejo similar de ecuaciones con fracciones. Maneja la idea de ecuaciones literales como fórmulas y da una serie amplia de problemas manejados como aplicaciones.
Alvarado	7	Sistemas de ecuaciones y desigualdades	Operaciones con fracciones algebraicas y radicales	El capítulo inicia presentando a las igualdades, sus propiedades y despejes en éstas, para de ahí dar paso a las ecuaciones como un caso especial de igualdad. A partir de esto, clasifica a las ecuaciones por su grado y por su dificultad, da a conocer lo que llama operaciones con ecuaciones de primer grado y ataca la resolución de éstas. Posteriormente aborda la

				resolución de problemas por medio de ecuaciones de primer grado, proporcionando una metodología para su planteamiento.
Gustafson	1	Gráficas, ecs. de rectas y funciones	Conjuntos, aritmética, exponentes	Trabaja la resolución de ecuaciones dando una metodología para ello, después de presentar las igualdades. Posteriormente trata el uso de las ecuaciones para la resolución de problemas como una sección aparte, pero en los ejercicios de la precedente plantea algunos.
Rees	4	Funciones y gráficas	Fracciones	Define lo que es una ecuación, muestra la forma de resolverlas mediante ejemplos y luego presenta problemas que se resuelven con ellas, dando una metodología para hacerlo.
García	8	Función lineal y su gráfica	Operaciones con polinomios	Inicia dando definiciones y pasa a la resolución de ecuaciones, incluyendo pocos ejemplos y una cantidad media de ejercicios. Por lo que se refiere a problemas, no presenta explicaciones, solo un ejemplo y luego una cantidad media de problemas para ser resueltos por el alumno.
Fuenlabrada	13	Sistemas lineales	Fracciones algebraicas	Inicia con la definición de igualdad, sigue con las propiedades de la igualdad, el despeje en fórmulas y

				<p>luego la resolución de ecuaciones planteando pasos a seguir, presenta algunos ejemplos y bastantes ejercicios. A continuación trata la gráfica de una ecuación de primer grado de manera breve, sin incluir ejercicios y no trata la resolución de problemas en este tema.</p>
--	--	--	--	---

Cuadro 20.

Referencias de los textos consultados para la elaboración del cuadro anterior, en orden alfabético:

- Alvarado, R. (2001). *Álgebra para preuniversitarios*. México. Esfinge.
- Angel, A. (1997). *Álgebra intermedia*. México. Prentice Hall.
- Baldor, A. (2002). *Álgebra*. México. Publicaciones cultural.
- Barnett, R. (1988). *Álgebra y trigonometría*. México. Mc Graw – Hill.
- Carpinteyro, E. y Sánchez, R. (2003). *Álgebra*. México. Cultural.
- Cruz, T. (1999). *Álgebra con aritmética. Un enfoque moderno*. México. Edimaf
- Cuéllar, J. (2004). *Álgebra*. México. Mc Graw – Hill.
- De Oteyza, E. et.al. (1996). *Álgebra*. México. Prentice Hall.
- Fuenlabrada, S. (2000). *Aritmética y álgebra*. México. Mc Graw – Hill.
- García, M. y López, G. (2003). *Aritmética y álgebra*. México. Esfinge.
- Gustafson, R.D. (1996). *Álgebra intermedia*. México. Thomson.
- Moreno, A. (1971). *Lógica matemática: antecedentes y fundamentos*. Argentina. Eudeba.
- Rees, P. y Sparks, F. (1960). *Álgebra*. México. Reverté.

Contenido del programa de estudio para la materia de Álgebra en los CECyT's del IPN

El objetivo general de la asignatura de Álgebra, en el programa vigente, elaborado y revisado en el año 2001 para los CEC y T del IPN es:

“Al término del curso el alumno manejará modelos algebraicos lineales y cuadráticos a través del uso de los lenguajes simbólico y gráfico, lo que le permitirá resolver situaciones y problemas surgidos en su entorno, así como tener el fundamento para el desarrollo posterior de conceptos y métodos matemáticos”.

El tema de ecuaciones de primer grado es abordado en la unidad 3, titulada ECUACIONES Y FUNCIONES LINEALES; su objetivo particular es:

“Al término de la unidad el alumno resolverá problemas de contextos matemáticos y extramatemáticos –de lo cotidiano y de otras áreas del conocimiento-, que conduzcan a una ecuación lineal empleando diferentes métodos para su solución”.

La unidad contiene tres temas, a saber:

- *“Problemas que den lugar a ecuaciones de primer grado con una incógnita. Solución algebraica.*
- *Noción de función lineal y su gráfica. Solución gráfica de ecuaciones lineales de una incógnita.*
- *Problemas que den lugar a variación directamente proporcional. Representación gráfica”.*

En cuanto a la instrumentación didáctica con que debe trabajarse, encontramos:

“Se recomienda al docente proponer a sus alumnos problemas cuyo modelo matemático sea una ecuación lineal con una incógnita, la cual se obtendrá de la traducción del enunciado al lenguaje algebraico. La resolución de la ecuación se hará por el método algebraico y/o el gráfico introduciendo las propiedades de la igualdad cuando sea pertinente. Para la

resolución algebraica se utilizarán las operaciones básicas de los polinomios y las propiedades de la igualdad.

Para la resolución se obtendrá una tabla a partir de la función y un intervalo de valores previamente establecido, con ella se trazará la gráfica. Se identificará este comportamiento como una función lineal.

Deberá comprobarse si la solución de la ecuación también es solución del problema atendiendo a las condiciones contenidas en el enunciado, su solución gráfica se identificará con la intersección de la recta con el eje X”.

El número de horas en que se indica se debe trabajar esta unidad es de 15, en aula, que si bien no es abundante, si resulta razonable.

Es importante el hecho de que en este programa de estudios se da una importancia fundamental a la resolución de problemas, lo que da un contexto al conocimiento que se pretende que los estudiantes adquieran, haciéndolo significativo.

Contenido del programa de estudio de la materia de Matemáticas IV de preparatoria del SI de la UNAM.

El objetivo general de la asignatura de Matemáticas IV, del plan de estudios 1996, del SI de la ENP de la UNAM, que se encuentra vigente actualmente es:

“Reafirmar y enriquecer los conocimientos del Álgebra previamente adquiridos, para aplicarlos correctamente en el desarrollo de nuevos conceptos, así como, en la solución de problemas de otras disciplinas afines, para que el alumno comprenda que las Matemáticas son un lenguaje y una herramienta que lo vincula con su entorno social.

Los cambios propuestos contribuirán al desarrollo del perfil del alumno a través de los siguientes aspectos que deberán considerarse en la estrategia de evaluación de este programa:

- 1. La capacidad del alumno para aplicar lo que ha aprendido durante el curso en el planteamiento y resolución de problemas de ésta y otras disciplinas.*

2. *El reconocimiento de los aspectos matemáticos que se relacionan entre sí, logrando aprendizajes significativos.*
3. *La importancia de las Matemáticas, su relación con otras ciencias, con los avances científicos y tecnológicos y con la sociedad.*
4. *La habilidad del alumno para la búsqueda, organización y aplicación de la información que obtiene en el análisis de problemas de la realidad.*
5. *La capacidad del alumno de aplicar las técnicas de estudio de las Matemáticas en otras disciplinas.*
6. *La capacidad del alumno de aplicar los conocimientos matemáticos en actividades cotidianas para mejorar su calidad de vida y la de los demás a través de desarrollar una actitud seria y responsable.*
7. *La aplicación de las Matemáticas en el análisis de problemas ambientales que ayuden al educando a la mejor comprensión de éstos, que lo conducirá a actuar de una manera sana y productiva.*
8. *La capacidad de trabajar en equipo en actividades dentro del aula, en la resolución de problemas que impliquen el intercambio y la discusión de ideas.*
9. *Desarrollar el interés del alumno por la asignatura e inclusive por una carrera del área Físico-matemáticas e ingenierías, que se refleje en un incremento de la matrícula en el área 1 del sexto año del bachillerato.*
10. *Incrementar la participación de los alumnos en concursos de Matemáticas, que fomenten su superación académica”.*

El tema de nuestro interés se estudia en la unidad VII, que se titula. ECUACIONES Y DESIGUALDADES y para la cual se sugiere el empleo de 15 Hrs. de trabajo en aula.

El objetivo de ésta es:

“Que el alumno sea capaz de plantear problemas de su entorno cuya solución se obtenga a partir de la resolución de una ecuación o de una desigualdad de primero y segundo grado. Que interprete el resultado obtenido”.

El contenido temático relativo a las ecuaciones de primer grado y las indicaciones para su manejo son:

“Ecuación, identidad y propiedades de la igualdad.

Se abordará el concepto de ecuación distinguiéndose entre identidad o ecuación idéntica y la igualdad condicional o ecuación. Se establecerán sus propiedades.

Ecuaciones de primer grado en una variable.

Se resolverán ecuaciones de la forma

$ax + b = 0$ o que sean reducibles a ella, con

$a, b \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$. Se enfatizará en el grado de la ecuación y para resolverla se indicará paso a paso la propiedad aplicada (esto será suficiente en dos o tres ejemplos)”.

Considerando que en la unidad se estudian además los temas: “ecuación de segundo grado”, “resolución de una ecuación de segundo grado”, “desigualdad de primer grado en una variable y sus propiedades”, “desigualdad de segundo grado” y “resolución de una desigualdad de segundo grado” parece un tiempo muy escaso, las quince horas sugeridas por el mismo programa.

También resulta relevante el hecho de que no se incluye la resolución de problemas como parte del estudio de las ecuaciones de primer grado en esta modalidad educativa.

Análisis detallado de algunos libros de texto.

Aquí se presenta una descripción detallada y análisis de cinco de los libros de texto reseñados brevemente con anterioridad: los tres más usados por los profesores encuestados, los de los autores: Baldor, A., Cruz, T. y De Oteyza, E. y dos más el de Carpinteyro, E. por ser, junto con el de De Oteyza, los únicos libros que trabajan el tema de ecuaciones de primer grado con una secuencia diferente a la seguida por todos los demás y el de Ángel por haber encontrado en él algunos elementos didácticos interesantes.

Título: **Álgebra.**

Autor: **Aurelio Baldor.**

Editorial: **Publicaciones Cultural.**

Edición: **Primera, Décima sexta reimpresión, 1998.**

País: **México.**

El libro está impreso a color, con pasta dura, consta de 39 capítulos, mas una sección preliminar y cuatro apéndices. Los primeros 7 capítulos están destinados a tratar: suma, resta, signos de agrupación, multiplicación, división, productos y cocientes notables y teorema del residuo, después de éstos dos están destinados a ecuaciones de primer grado el VIII y el IX, tras los cuales aborda descomposición factorial, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, fracciones algebraicas con reducción de fracciones y operaciones con fracciones algebraicas, tras los cuales vuelve a ocuparse de las ecuaciones de primer grado en los capítulos: XV, XVI y XVII. Al final del libro se dan las soluciones a todos los ejercicios que el mismo contiene.

Capítulo VIII. Ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita. Pags. 122 a 130. Inicia definiendo brevemente igualdad reforzándolo con dos ejemplos, para dar paso al concepto de ecuación como una igualdad en la que hay incógnitas y sólo se verifica para determinados valores de éstas, aportando dos ejemplos. Continúa definiendo identidad, miembros, términos, grado, raíces o soluciones y resolver una ecuación. Distingue a las ecuaciones en numéricas, literales, enteras y fraccionarias. Presenta el “axioma fundamental de las ecuaciones” del que deriva 5 reglas. Define la transposición de términos, explica sobre el cambio de signos de todos los términos de una ecuación. En todo lo anterior aporta un ejemplo en cada caso. A partir de esto aborda la resolución de ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita, que parte de una regla general de 4 puntos con 2 ejemplos y 14 ejercicios para resolver; sigue con resolución de ecuaciones de primer grado con signos de agrupación con 2 ejemplos y 11 ejercicios y resolución de ecuaciones de primer grado con

productos indicados, con 3 ejemplos y 20 ejercicios. Concluye el capítulo con una “miscelánea” de 10 ejercicios.

Capítulo IX. Problemas sobre ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita. Pags. 131 a 142. Presenta tres problemas ejemplo y 18 para resolver, seguidos de otros 3 ejemplos y 14 problemas para resolver, un nuevo ejemplo y 15 problemas para el lector, 2 ejemplos y 14 problemas, 2 nuevos problemas ejemplo con 13 para resolver y finalmente 2 ejemplos y 10 problemas, terminando el capítulo con una “miscelánea” de 32 problemas. Cabe señalar que los problemas – ejercicio de cada bloque son de resolución análoga a los problemas – ejemplo que los anteceden.

Capítulo XV. Ecuaciones numéricas fraccionarias de primer grado con una incógnita. Pags. 236 a 242. Inicia definiendo una ecuación fraccionaria, tras lo cual presenta una regla para suprimir denominadores que refuerza con dos ejemplos. A continuación viene una sección llamada “Resolución de ecuaciones fraccionarias con denominadores monomios” en la que hay tres ejemplos y 33 ejercicios de ecuaciones por resolver. Finaliza con la sección “Resolución de ecuaciones de primer grado con denominadores compuestos” con cuatro ejemplos y 39 ecuaciones para resolver.

Capítulo XVI. Ecuaciones literales de primer grado con una incógnita. Págs. 243 a 245. Parte de una explicación de lo que son las ecuaciones literales, para seguir con dos secciones una dedicada a las ecuaciones literales enteras y la otra a las ecuaciones literales fraccionarias. En cada una presenta dos ejemplos y en la primera hay 20 ecuaciones para resolver y en la segunda 24.

Capítulo XVII. Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado. Pags. 246 a 269. El capítulo tiene una estructura básica de ejemplos y problemas análogos a éstos para resolver por el lector, de la siguiente forma: 1 ejemplo y 15 problemas, un ejemplo y 12 problemas, 1 ejemplo y 6 problemas, 1 ejemplo y 8 problemas, 1 ejemplo y 10 problemas, 2 ejemplos y 11 problemas, 1 ejemplo y

10 problemas, 1 ejemplo y 9 problemas, 1 ejemplo y 7 problemas, 1 ejemplo y 8 problemas, 1 ejemplo y 7 problemas, 1 ejemplo y 6 problemas, 3 ejemplos y 11 problemas, una miscelánea de 50 problemas, luego viene una explicación de lo que el autor llama el “problema de los móviles” con la cual obtiene algunas fórmulas y resuelve dos ejemplos seguidos de 9 problemas para resolver.

En todo el texto, los ejemplos se explican detalladamente, paso a paso.

Como podrá apreciarse en esta descripción, este texto sigue la secuencia básica de: definiciones → ejemplos → método → ejemplos → ejercicios, dejando al final, la resolución de diversos problemas de aplicación.

Cada bloque de ejercicios que se plantea a continuación de una serie de ejemplos, se resuelven de manera análoga a éstos, con lo que este manejo favorece la mecanización de procesos y no el razonamiento.

Título: Álgebra con Aritmética. Un enfoque moderno.

Autor: Toribio Cruz Sánchez.

Editorial: EDIMAF. Ediciones matemáticas fáciles.

Edición: Primera, agosto 1999.

País: México.

La edición de este libro es rústica y está impreso en blanco, negro y gris. Está estructurado en temas, divididos en dos secciones: Temas de aritmética y Álgebra, el tema que nos ocupa se encuentra en la segunda.

En la sección de Álgebra, el autor aborda: lenguaje algebraico, valor numérico, leyes de los exponentes y potencias, leyes de los radicales, racionalización, operaciones con monomios y polinomios, productos notables, factorización y fracciones algebraicas antes de llegar a ecuaciones.

Los temas relacionados con las ecuaciones de primer grado son:

Ecuaciones lineales o de primer grado. Pags. 229 y 230. Da las definiciones de: ecuación, ecuación de primer grado, ecuación entera, ecuación fraccionaria, ecuación irracional y ecuación literal. En cada una de éstas presenta ejemplos. Tras la primera definición clasifica a las ecuaciones por el número de incógnitas y por el mayor grado de sus términos. Posteriormente propone tres ejercicios de aplicación de la teoría presentada, en los que incluye los conceptos de primer y segundo miembros de una ecuación y grado de una ecuación.

Despeje y sustitución algebraica. Pags. 231 y 232. Explica lo que es cada uno de los miembros de una ecuación y afirma que un “término o cantidad se puede pasar de un miembro a otro con su operación inversa”(sic). Manifiesta lo que se entiende por “despejar”. Presenta un ejemplo de despeje de una incógnita en una ecuación de primer grado con dos variables y otro de despeje de una literal en una fórmula geométrica. Define el concepto de “solución o raíz” (sic) y presenta un ejemplo de resolución por medio de despeje, de una ecuación de segundo grado incompleta y comprueba las soluciones por medio de sustitución. Plantea un ejercicio, que llama “de afirmación”, consistente en 18 fórmulas de física, geometría y cálculo de intereses en que se pide despejar alguna literal específica de cada fórmula.

Reglas fundamentales de las ecuaciones. Pags. 233 a 236. Enuncia cuatro reglas presentando dos ejemplos de aplicación en cada una. En la resolución de estos recurre a la “cancelación” de factores con divisores iguales y de raíces cuadradas con potencias 2. Explica las ideas de: términos iguales, cambio de signo y ecuaciones equivalentes. A continuación presenta un ejercicio de “falso y verdadero” en que hay enunciados sobre productos notables, propiedades de los exponentes y algunas ideas sobre equivalencia de ecuaciones. Sigue con un ejercicio consistente en dos preguntas abiertas sobre ecuación entera y ecuación fraccionaria y once preguntas de opción múltiple que debe resolverse conociendo las ideas de: número de incógnitas de una ecuación, grado de una

ecuación, ecuación fraccionaria, ecuación irracional y ecuaciones equivalentes. Concluye el tema con un ejercicio de dos secciones, en la primera solicita la resolución de 20 ecuaciones de primer grado y la comprobación de que dos ecuaciones son equivalentes con 7 parejas y una tríada de ecuaciones.

Solución de ecuaciones de la forma $ax+b=cx+d$. Pags. 237 y 238. Inicia dando un método de dos pasos para resolver ecuaciones del tipo mencionado en el título, en uno de ellos emplea el vocablo “transposición” para referirse al cambio de términos de un miembro al otro de la ecuación. Proporciona dos ejemplos de solución de ecuaciones de la forma indicada, explicando cada paso que se realiza. Presenta un ejercicio “de afirmación” en que solicita la resolución de 12 ecuaciones, en las que hay coeficientes enteros y fraccionarios, entre éstos últimos hay fracciones decimales y fracciones comunes.

Solución de ecuaciones con paréntesis. Pags. 239 y 240. El autor da una breve explicación de lo que debe hacerse para resolver una ecuación con paréntesis, presenta dos ejemplos explicados con detalle y uno más sin explicación pero con comprobación. Incluye un ejercicio “de afirmación” con 12 ecuaciones con paréntesis para que el lector las resuelva.

Solución de ecuaciones fraccionarias. Pags. 241 a 242. Se explica la forma de resolver ecuaciones fraccionarias presentando dos ejemplos con indicaciones detalladas y un ejercicio “de afirmación” con 12 ecuaciones para resolver.

Transformación de ecuaciones fraccionarias. Pags. 243 y 244. Se afirma que una ecuación fraccionaria se puede reducir a una ecuación lineal entera, aportando 2 ejemplos del proceso para realizar esto. El ejercicio “de afirmación” consta de 6 ecuaciones en las que se solicita su resolución y comprobación.

Eliminación de fracciones de una ecuación. Pags. 245 y 246. Se explica un procedimiento para “eliminar” fracciones de una ecuación, presentando tres

ejemplos con sus procedimientos de solución desglosados a detalle y proponiendo 10 ecuaciones para ser resueltas en el “ejercicio de afirmación”.

Modelos matemáticos. Pags. 247 y 248. Contiene un ejemplo que consiste de un enunciado que traduce al lenguaje algebraico como una ecuación, explicándolo someramente, posteriormente 22 enunciados en los que el estudiante debe realizar, mas un ejercicio de opción múltiple con 5 reactivos de una naturaleza parecida al ejercicio anterior.

Solución de problemas aplicando ecuaciones de primer grado. Pags. 249 a 255. Afirma que para encontrar la solución a un problema debe traducirse éste al lenguaje algebraico con lo que se obtendrá una ecuación que deberá resolverse y finalmente comprobar mediante sustitución en la misma. Presenta cuatro ejemplos con los que ilustra su metodología, desglosando la forma en que realiza el planteamiento de la ecuación. Bajo el título de “aplicaciones” propone 22 problemas para resolver. Concluye con un ejercicio que consta de 255 ecuaciones para resolver.

En general, los numerosos ejercicios para resolver, se presentan a continuación de ejemplos muy similares, provocando así procesos de mecanización y de memorización de procedimientos, no favoreciendo el razonamiento ni el análisis.

Título: **Álgebra.**

Autor: **Elena de Oteyza de Oteyza, Carlos Hernández Garciadiego y Emma Lam Osnaya.**

Editorial: **Prentice Hall Hispanoamericana.**

Edición: **Primera, 1996.**

País: **México.**

El libro tiene una presentación rústica, con impresión en blanco y negro. Consta de 10 capítulos y un apéndice de respuestas a los ejercicios impares. Las ecuaciones de

primer grado se presentan en el capítulo 3, que es antecedido por el capítulo 1 dedicado a Numeración: números naturales, enteros y reales y en capítulo 2 titulado “introducción al álgebra”, que contiene: expresiones algebraicas, lenguaje algebraico, paréntesis y factores negativos, exponentes, evaluación de expresiones algebraicas y términos semejantes.

El capítulo 3, “resolución de ecuaciones” contiene 7 secciones:

Ecuaciones de una sola variable. Pags. 62 a 67. Inicia definiendo ecuación y explicando lo que son sus miembros. Expone en que consiste resolver una ecuación y que es a lo que se le llama “despejar” una variable. Su primer ejemplo es un problema de un contexto cotidiano que se resuelve mediante el uso de una ecuación de primer grado; plantea una ecuación para ello y explica como se resuelve la ecuación y lo termina efectuando una comprobación del resultado mediante una sustitución en la ecuación empleada. A continuación presenta la propiedad de la suma con 3 ejemplos de su uso en la resolución de ecuaciones, la consecuencia de la propiedad de la suma con 2 ejemplos de ello y una serie de ejercicios consistente en 53 ecuaciones y 16 problemas para resolver. Las ecuaciones contienen tanto términos enteros como decimales y fraccionarios, el coeficiente de la variable siempre es 1 y se maneja el valor absoluto en varias de ellas.

Ecuaciones y multiplicación. Pags. 68 a 74. Parte de un problema, en el proceso de solución explica el proceso para despejar una variable cuando tiene un coeficiente diferente a 1, posteriormente enuncia la propiedad de la multiplicación para la que aporta dos ejemplos resueltos a detalle, prosigue con la “consecuencia de la propiedad de la multiplicación” que emplea para realizar un despeje cuando existe una división de la que forma parte la variable, incluyendo 5 ejemplos. Finalmente proporciona 45 ecuaciones para ser resueltas por el estudiante y 22 problemas.

Ecuaciones de una sola variable pero en ambos lados. Pags. 75 a 80. Al igual que la sección anterior, ésta principia con un problema que resuelve el autor mediante el uso de una ecuación de primer grado en la que la variable aparece en ambos miembros; al resolverlo e ir explicando los pasos que da para ello, muestra lo que conviene hacer en tales casos. Luego presenta cuatro ejemplos de otras tantas ecuaciones que resuelve y comprueba con detalle, pero sin explicación, un quinto ejemplo consiste en un problema de aplicación. Para terminar contiene 40 ejercicios y 13 problemas.

Resolución de problemas. Pags. 81 a 85. Presenta una metodología de 5 pasos para resolver problemas, a la que se denomina “esquema de razonamiento”. En los dos primeros ejemplos que tiene presenta la forma de operar los 5 pasos del esquema. A continuación da tres ejemplos en los que suceden situaciones que el autor considera extrañas: el primero se maneja con una ecuación que no tiene solución, el segundo tiene un resultado negativo que debe interpretarse correctamente conforme a las condiciones del problema, mientras que el tercero consiste solamente de una “ecuación” que resulta ser una identidad. Finalmente presenta 20 ecuaciones para resolver, 6 ejercicios consistentes en fórmulas en las que se solicita que se despeje una literal específica y una serie de 8 problemas de aplicación.

Problemas con números enteros. Pags. 86 a 89. Se emplea un problema geométrico para abordar el tema y a continuación se presentan dos ejemplos resueltos a detalle. En la parte final se cuenta con 35 problemas de aplicación, para resolver.

Razones y proporciones. Pags. 90 a 93. Explica que es una razón y lo ejemplifica mediante dos problemas en que se solicita establecer la razón que representa la situación dada. A continuación expone el concepto de proporción y la propiedad de ésta que refuerza con otros dos ejemplos resueltos a detalle. Finalmente aporta 20 problemas para que resuelva el estudiante.

Porcentaje. Pags. 94 a 99. Mediante un problema de aplicación se aborda la cuestión del porcentaje, tras ello explica el significado de éste y la forma de calcularlo reforzando estos puntos mediante 8 ejemplos resueltos a detalle. Para que los estudiantes ejerciten se presentan 10 ejercicios en que se pide que se expresen fracciones como porcentajes, 24 ejercicios en que se solicita que se calculen porcentajes de las cantidades indicadas y 17 problemas.

Ejercicios de repaso. Pags. 100 a 102. Esta sección consta de 16 ecuaciones de primer grado, 6 ejercicios de cálculo de porcentajes y 13 problemas de aplicación.

En el capítulo 4, destinado a los polinomios, en donde se trabaja con las operaciones entre éstos vuelve a tocar las ecuaciones de primer grado en los ejercicios que propone para reforzar el aprendizaje de los contenidos que aborda.

Este texto, si bien inicia el tratamiento de las ecuaciones lineales con la definición de ecuación, en sus primeros ejemplos de resolución de éstas, plantea problemas con lo que ubica a las ecuaciones en un contexto no dejándolas sueltas como entes matemáticos aislados, situación que prevalece en las primeras tres secciones.

El hecho de que dedique varias secciones a problemas resulta relevante, así como el hecho de que no abandone el tema de las ecuaciones, retomándolo en un capítulo posterior.

Título: **Álgebra.**

Autor: **Eduardo Carpinteyro Vigil y Rubén B. Sánchez Hernández.**

Editorial: **Publicaciones Cultural.**

Edición: **Primera, 2003.**

País: **México.**

La edición es rústica, con impresión a dos colores: negro en su mayoría y azul para destacar ciertos textos. Consta de 8 unidades de entre las cuales, solo en la 7 se toca el tema de ecuaciones de primer grado, los que le anteceden se ocupan de: conjuntos, sistemas de numeración, números reales, monomios y polinomios, productos notables y factorización y operaciones con fracciones y radicales.

Cada capítulo del libro inicia con una descripción de la unidad, los propósitos de la misma y el contenido de estudio, donde se expone de manera muy breve lo que se indica en cada apartado. Tras esto, el contenido viene organizado en secciones, su cantidad varía de unidad a unidad. La primera sección de cada unidad está dedicada a una reseña histórica y antes de dar paso a la sección dos se presenta algún problema eje que sirve para introducir el tema que se tratará, brindando un contexto de aplicación de éste.

La unidad 7, titulada “Ecuaciones y desigualdades” contiene siete secciones: breve reseña histórica, igualdades, ecuaciones de primer grado, desigualdades de primer grado, ecuaciones de segundo grado, desigualdades de segundo grado y comprueba tu aprendizaje. De todas ellas, solo se refieren al tema de que se ocupa este trabajo las siguientes:

Breve reseña histórica. Pags. 369 a 370. Este texto inicia definiendo el concepto de ecuación para proseguir con una narración de su desarrollo histórico que se origina en los babilonios, los egipcios y los árabes que practicaban un álgebra. Ilustra acerca de la evolución del signo de igualdad que los egipcios ya usaban mediante un jeroglífico. Se llega hasta el papel de los hindúes al hacer mención de un escrito del siglo VII de éstos en que se encuentra una ecuación de segundo grado.

Problema eje. Pags. 371 y 372. En realidad se trata de tres problemas, el primero es tomado de la matemática India de entre los años 400 y 1400, el segundo de un texto que data de 1562 escrito por un bachiller español y el tercero procede del año 500 de un gramático romano que escribió 46

problemas, entre ellos el que aquí se incluye referente a datos de la vida de sabio y matemático griego Diofante.

Igualdades. Pags. 373 a 377. Presenta algunas expresiones algebraicas y varias preguntas en relación a ellas, que deberá responder el estudiante; con estas como guía de razonamiento, se enuncia que el tipo de expresiones presentadas son igualdades, para continuar dando una definición formal de este concepto. Se abunda un poco más al respecto y se clasifica a las igualdades en identidades y ecuaciones, definiéndolas. Se explica que son los miembros de una igualdad y que son los términos de una ecuación. Se da un ejemplo y se enuncia el concepto de conjunto solución para una ecuación. A continuación se presentan las propiedades de las igualdades con un manejo similar al anterior, es decir, se proporcionan dos casos particulares y después de cada uno, una serie de preguntas que debe responder el estudiante. Se resume lo encontrado en los casos presentados y analizados por los lectores al responder las cuestiones planteadas, enunciando las propiedades aditiva, sustractiva, multiplicativa y divisora, ubicándolas en un organizador gráfico. Se presentan tres ejemplos de manejo de igualdades mediante el empleo de tales propiedades y en un ejercicio se pide que se discierna si las 6 igualdades que se presentan son o no identidades.

Ecuaciones de primer grado. Pags. 378 a 416. Se vuelven a enunciar los conceptos de ecuación y de conjunto solución y se proponen cuatro ejemplos de ecuaciones, muy sencillos. Se define el concepto de ecuaciones equivalentes que se refuerza con dos ejemplos consistentes de dos parejas de ecuaciones equivalentes. A continuación aparecen tres ejemplos de ecuaciones de primer grado con su proceso de solución detallado, indicando en cada paso la propiedad empleada. Un cuarto y quinto ejemplos consisten, cada uno, de un problema en el que mediante una serie de preguntas se induce el planteamiento de la ecuación que lo representa que el autor presenta y luego resuelve, aunque dejando algunos espacios en su desarrollo, que el estudiante debe completar con los pasos que deben darse, guiado por la propiedad que se menciona se

aplicaría en cada uno de ellos. Posteriormente se presenta un ejercicio con tres secciones, en la primera hay cinco ecuaciones que deben resolverse, en la segunda, tres ecuaciones con sus procesos de solución desarrollados al lado de los cuales se debe anotar la propiedad empleada y finalmente cinco problemas de aplicación. El texto continúa guiando al estudiante a analizar el efecto que tienen las propiedades empleadas en la resolución de las ecuaciones planteadas, con lo que se llega a un cuadro en que se resume la forma de realizar la transposición de términos e inversión de operaciones en el proceso de resolver ecuaciones, que refuerza posteriormente con 7 ejemplos, en los que en algunas partes se solicita que el lector complete algunas afirmaciones. El apartado siguiente se dedica a las ecuaciones literales, se explica en que consisten éstas y se presentan 4 ejemplos. El ejercicio con que se da continuidad, consta de 22 ecuaciones a resolver y 6 ecuaciones de tipo literal en que debe despejarse la “variable” que se indica en cada caso. A partir de este punto la sección se ocupa de la resolución de problemas agrupándolos según la temática que abordan: problemas sobre edades, sobre inversiones, sobre razones de cambio, sobre mezclas y sobre trabajo. En todos los casos el manejo consiste de ejemplos explicados a detalle, para brindar al final de esta parte un ejercicio de 15 problemas por resolver. Finalmente hay dos secciones: ecuaciones que contienen valores absolutos y ecuaciones que contienen logaritmos, manejadas de manera análoga a lo anterior y finalizando con un ejercicio de dos secciones, en la primera se solicita que se resuelvan 5 ecuaciones que contienen valores absolutos y en la segunda, 10 ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Comprueba tu aprendizaje. Pags. 455 a 458. Consta de cinco cuestiones, la primera es un problema que se resuelve mediante una ecuación de primer grado, la segunda pide la resolución de cinco ecuaciones, de las cuales, una es de primer grado, la tercera pide la resolución de uno de los problemas planteados en la sección “problema eje”, la cuarta solicita la resolución de cuatro desigualdades y la quinta es un problema que se debe resolver mediante una ecuación de segundo grado.

El hecho de que este libro inicie el tema con su ubicación histórica lo hace destacar de entre los demás, que no se ocupan de este aspecto.

Otro punto a destacar es el tratamiento a partir de los “problemas eje”, lo que permite que el estudiante se percate desde el primer momento de la utilidad del conocimiento que empezará a estudiar. Es importante también el hecho de que al menos uno de estos problemas sea retomado en la sección “comprueba tu aprendizaje”, lo que provoca que el estudiante se percate que tras el estudio de la unidad ya deberá ser capaz de resolver algo que al inicio quizá no pudo por no contar en ese momento con los elementos cognitivos necesarios, pero que logró adquirirlos tras el desarrollo de las actividades de la unidad.

Título: **Álgebra Intermedia.**

Autor: **Allen R. Ángel.**

Editorial: **Prentice Hall Hispanoamericana.**

Edición: **Cuarta, 1997.**

País: **México.**

El libro es una traducción de la obra en inglés Intermediate Algebra for College Students, la edición es con empastado rústico e impreso en formato de cuatro colores para los textos, con imágenes a color y fotografías. Contiene 12 capítulos y dos apéndices, mas una sección de respuestas a los ejercicios con número impar de todo el libro.

El autor elaboró este texto para estudiantes que llevaron previamente un curso de álgebra elemental.

El tema de ecuaciones de primer grado se encuentra en el capítulo 2, titulado Ecuaciones y desigualdades. El capítulo previo, dedicado a Conceptos básicos contiene: hábitos de estudio para triunfar en matemáticas y uso de la calculadora,

conjuntos y otros conceptos básicos, propiedades de los números reales y operaciones y, orden de las operaciones.

El capítulo que nos interesa contiene un apartado inicial que denomina “vista preliminar y perspectivas” más seis secciones, a saber: (2.1) Resolución de ecuaciones lineales, (2.2) Fórmulas, (2.3) Aplicaciones al álgebra, (2.4) Problemas de aplicación adicionales, (2.5) Resolución de desigualdades lineales, y (2.6) Resolución de ecuaciones y desigualdades con valores absolutos. Posterior a éstas, aparecen: resumen, ejercicios de repaso, examen de práctica y examen de repaso acumulativo.

Las secciones dedicadas a las ecuaciones de primer grado y el manejo que de éstas se hace son las siguientes:

Vista preliminar y perspectivas. Pag. 48. Se describe brevemente el contenido del capítulo por secciones.

Resolución de ecuaciones lineales. Pags. 48 a 60. Inicia presentando las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la igualdad, con tres ejemplos de cada una de ellas. Sigue presentando los conceptos: término, coeficiente, término constante, grado de un término, términos semejantes y simplificación de una expresión, para este último da cuatro ejemplos de lo que llama “combinación de términos semejantes” y posteriormente dos ejemplos de simplificación de expresiones. De aquí se pasa a un apartado titulado “resolución de ecuaciones”, en el que presenta los conceptos de ecuación, soluciones o raíces de la ecuación, conjunto solución, ecuaciones equivalentes y distingue a las ecuaciones lineales de primer grado. Presenta las propiedades de la suma y de la multiplicación de la igualdad, a continuación brinda una metodología de 6 pasos para resolver ecuaciones lineales, basada en las propiedades de la igualdad. Presenta tres ejemplos de resolución de ecuaciones con instrucciones en cada paso del proceso. El siguiente apartado es referente a las ecuaciones con fracciones, en donde explica como eliminar éstas empleando el mínimo común múltiplo de los denominadores, resuelve tres

ejemplos, entre los cuales hay un recuadro dedicado a la comprobación de una solución mediante sustitución y el empleo de una calculadora. Finalmente presenta los conceptos de identidad y de ecuación inconsistente. Concluye la sección con un conjunto de ejercicios: 12 en que se solicita identificar la propiedad empleada en los enunciados que presenta, 12 de determinación del grado de un término, 19 de simplificación de expresiones, 50 ecuaciones lineales para resolver y 8 preguntas abiertas sobre todos los conceptos presentados.

Fórmulas. Pags. 60 a 69. Inicia explicando que es una ecuación literal y presenta la idea de fórmula como un sinónimo de ésta, da a conocer algunas letras griegas empleadas comúnmente en fórmulas. Da a conocer la idea de evaluar una fórmula y presenta el orden de las operaciones, incluye un ejemplo de lo anterior. Posteriormente brinda una metodología de 5 pasos para despejar una variable en una fórmula o ecuación que refuerza con 6 ejemplos en los que se dan instrucciones en la mayoría de los pasos realizados. De aquí continúa mostrando mediante 3 ejemplos el uso de la propiedad distributiva en la resolución de ecuaciones que incluyen paréntesis. Finaliza la sección con una serie de 18 ejercicios de evaluación de fórmulas, 57 fórmulas en que se solicita se despeje alguna variable determinada y 5 problemas de aplicación de algunas de las fórmulas anteriores.

Aplicaciones del álgebra. Pags. 70 a 82. Inicia esta sección con una breve introducción a la traducción de enunciados al lenguaje algebraico que se refuerza con tres ejemplos. Posteriormente se dedica a la resolución de problemas de aplicación para la que presenta una metodología de ocho pasos y 6 ejemplos. Para terminar hay una serie de 55 problemas para resolver mediante una ecuación de primer grado.

Problemas de aplicación adicionales. Pags. 83 a 96. Presenta 2 problemas resueltos de movimiento con una velocidad, 4 de movimiento con dos

velocidades y 3 de mezclas. El conjunto de ejercicios con que concluye la sección contiene 68 problemas de aplicación de los tres tipos tratados.

El capítulo tiene otras secciones: “resolución de desigualdades lineales” y “resolución de ecuaciones y desigualdades con valores absolutos”.

Todos los capítulos del libro finalizan con un resumen, que en este caso contiene un glosario de términos y conceptos importantes; un conjunto de 100 ejercicios de repaso del capítulo de los cuáles 52 se refieren a ecuaciones de primer grado; un examen de práctica y un examen de repaso acumulativo que incluye los conocimientos presentados desde el inicio del libro.

En la sección de soluciones del final del libro aparecen las de todas las cuestiones de los exámenes de práctica y de repaso.

El libro sigue la secuencia habitual de definiciones → ejemplos → método → ejemplos → ejercicios y al final la resolución de problemas de aplicación.

Resulta interesante que algunos de sus problemas se ubiquen en el contexto de la física, asignatura que todos los estudiantes del nivel medio superior deben acreditar y en la que regularmente tienen problemas por no poder transferir a ésta los conocimientos adquiridos en la clase de matemáticas. Este manejo puede propiciar que esta situación disminuya.

El “examen de práctica” es un factor que puede propiciar en los estudiantes la reflexión de sus aprendizajes y el “examen de repaso acumulativo” además de contar con este elementos permite que no se dejen de lado los conocimientos previos y con ello que éstos se refuercen y valoren.

Resultados y conclusiones de la investigación.

Tras la realización de la investigación presentada a hasta este momento, se ha encontrado que:

1. Al revisar la ubicación histórica de las ecuaciones de primer grado se pone de manifiesto que las ecuaciones surgen, como la mayoría de los logros científicos de la humanidad, como la respuesta a una problemática existente, así nace en los antiguos pueblos egipcio (alrededor del 1850 A.C.), el babilonio (desde el año 1950 A.C.) y chino.

Tras este nacimiento de las ecuaciones como una consecuencia natural se desarrollan toda la teoría y estudios desarrollados hasta la fecha.

Este hecho no es considerado en los procesos de enseñanza, es decir, en la mayoría de los casos estudiados, se parte de la ecuación para, al final, buscarle una aplicación. Esto hace surgir una pregunta que pudiera servir de base para investigaciones posteriores, ¿qué pasaría en cuanto al aprendizaje, si en la enseñanza se siguiera el proceso natural con que surgió el conocimiento, es decir, que a partir de problemas concretos se vea la necesidad de la ecuación de primer grado como un elemento necesario para su solución?

2. La lectura de los programas de estudio para educación secundaria de la Secretaría de Educación Pública (SEP), en la parte referente a las ecuaciones de primer grado, muestra que el tema de menciona por primera vez en el plan de estudios del segundo grado en que se indica, en la exposición de propósitos, que se deben plantear problemas que conduzcan a ecuaciones lineales, mismas que deben ser resueltas; mientras que el de tercero solo solicita que se practiquen los procedimientos algebraicos adecuados para resolver ecuaciones de primer grado.

Más adelante se puntualiza, en ambos programas que se debe buscar que los alumnos resuelvan problemas para “facilitar la comprensión y el acceso a nuevos procedimientos”.

Finalmente, en las recomendaciones didácticas para trabajar se especifica que es muy importante que haya problemas para que los alumnos comprendan la noción de ecuación y los conceptos relacionados para que se percaten del hecho de que las condiciones de un problema se modelan mediante una ecuación.

A partir de esto, es de esperarse que los egresados de secundaria cuenten con una comprensión clara del concepto de ecuación, con cierta habilidad para resolver ecuaciones de primer grado y más aún, con capacidad de modelar y resolver problemas mediante su uso.

Sin embargo, se encuentra que en los casos estudiados, no se cumplieron los objetivos de aprendizaje de la escuela secundaria en lo referente a las ecuaciones de primer grado, pues de ser así, esto se manifestaría en un mejor desempeño de los estudiantes dentro del nivel medio superior.

3. En virtud de que el signo $=$ y su correcta interpretación es un elemento fundamental en el planteamiento de una ecuación, al investigar la concepción que los estudiantes tienen de éste, mediante una encuesta, se encontró con ella que todos los estudiantes a quienes se aplicó tienen la concepción de que el signo $=$ indica la obtención de un resultado, por lo que al presentárseles diversas expresiones en que éste tendría otros significados, el 61.5% no reconocieron este hecho.

Mas aún, los alumnos restantes, el 38.5%, no fue capaz de discernir satisfactoriamente los significados que toma el signo $=$ en las expresiones algebraicas y aritméticas planteadas.

Esta situación podría explicar la dificultad que algunos estudiantes tienen para plantear ecuaciones de primer grado que sirvan para la resolución de problemas concretos, el signo $=$ es, como se dijo antes, elemento fundamental de una ecuación, representa la equivalencia de dos enunciados matemáticos.

4. La aplicación y análisis de los cuestionarios, diseñados para conocer el nivel de aprendizaje de los alumnos y su percepción de las causas de éste, contrastados con los que se presentaron a los profesores sobre la metodología que emplean y su percepción del aprendizaje de sus alumnos y sus causas nos muestra que:
- a. Generalmente el estudio escolar de las ecuaciones de primer grado inicia con definiciones y conceptos, ya sea de ecuación o bien, de igualdad y con las propiedades de éstas, para concluir con la resolución de problemas y/o la representación gráfica de ecuaciones.
 - b. La mitad de los alumnos encuestados y un porcentaje ligeramente mayor de profesores, considera que los estudiantes aprenden “bien” a resolver ecuaciones de primer grado.
 - c. En la valoración respecto a la habilidad lograda por los estudiantes para plantear la ecuación de primer grado que sirve para la resolución de un problema concreto, encontramos que tanto profesores como estudiantes la ubican como “regular”.
 - d. En cuanto a la percepción de los estudiantes respecto a la causa principal que propició el aprendizaje logrado por ellos respecto a las ecuaciones de primer grado, ésta coincide con el motivo al que los profesores atribuyen las dificultades que se presentan en ello y es el “esfuerzo”.
 - e. Algo similar ocurre respecto a la adquisición de habilidad para plantear las ecuaciones de primer grado que se requieren para resolver problemas concretos.
 - f. Al pedir a los estudiantes que resolvieran tres ecuaciones de primer grado, similares a las que se manejan desde el nivel de secundaria, se

encontró que el 70.5% pudo hacerlo correctamente con una ecuación con paréntesis sin denominadores, solo el 44.1% lo logró con una ecuación que contenía denominadores en ambos miembros y el 67.6% con una ecuación que contiene paréntesis y tras efectuar el productos que éstos implican se obtiene una incógnita al cuadrado en ambos miembros. Con todo esto, se puede afirmar que la efectividad de los estudiantes de nivel medio superior que ya habían aprobado la asignatura en que se estudian las ecuaciones de primer grado es del 60.78%.

- g. Por lo que respecta a la habilidad para resolver un problema concreto, que se propuso en el cuestionario elaborado para los estudiantes, se detectó que sólo el 23.5% de los alumnos encuestados fue capaz de resolverlo correctamente.
- h. Se logró averiguar también que la mayor parte de los profesores emplean prioritariamente, para su trabajo los libros de texto de los autores: Baldor, Cruz y De Oteyza, en ese orden, aunque se mencionaron 9 textos en total de los cuales, 8 de ellos son de álgebra y 1 de lógica matemática, mismo que se emplea como libro de apoyo.

La percepción tanto de los estudiantes como de los profesores respecto al grado de aprendizaje logrado que, por lo general es “buena” para el caso de la resolución de ecuaciones lineales y, “regular” para la resolución de problemas; no corresponde con los porcentajes de efectividad logrados en la resolución de las correspondientes cuestiones propuestas.

Era de esperarse que tras haber estudiado ecuaciones de primer grado tanto en secundaria como en su primer curso de nivel medio superior y haber aprobado estos, la efectividad en la resolución de los ejercicios y problema propuestos fuese del 100% y se encontró que esto no es así, el logro fue de solo el 60.78% en la resolución de ecuaciones y del 23.5% en resolución de problemas.

5. Se revisaron 12 libros de texto de álgebra (ver sección de metodología y materiales), los 8 mencionados por los profesores encuestados y 4 más de entre los que han promovido las editoriales en los últimos 5 años.

Esta revisión mostró en 10 de ellos, que el manejo del tema de ecuaciones de primer grado no contiene muchas variantes, inicia dando definiciones y deja la resolución de problemas para el final. No contemplan el ambiente gráfico en su tratamiento de las ecuaciones.

En los dos restantes, en particular, el de De Oteyza y el de Carpinteyro, se encuentran diferencias importantes: en el primero de éstos se emplean problemas para presentar su método de resolución de ecuaciones, así como las propiedades de las igualdades; en cada una de sus secciones propone problemas para resolver y no abandona el tema, pues en capítulos subsecuentes vuelve a manejar la resolución de ecuaciones.

El libro de Carpinteyro, introduce el aspecto histórico del tema, mostrando así su trascendencia; usa lo que llama “problemas eje” que permite ubicar a las ecuaciones en un contexto concreto y mostrar que las ecuaciones de primer grado tienen sentido como recurso para la resolución de problemas que pueden presentarse dentro de la cotidianidad de diferentes ámbitos.

6. Por otra parte, al revisar el programa de estudio para la materia de Álgebra en los CECyT's del IPN se encontró que este programa señala en su objetivo general que el trabajo que se realice se hará para que los estudiantes puedan resolver situaciones y problemas surgidos en su entorno.

Este objetivo coincide perfectamente con el objetivo particular referente a las ecuaciones de primer grado, que pretende que el alumno logre resolver problemas tanto en contextos matemáticos como extra matemáticos por medio de este tipo de herramientas matemáticas.

Este planteamiento es reforzado por las indicaciones que se dan al profesor en la instrumentación didáctica que recomienda que se propongan problemas cuyo modelo matemático sea una ecuación lineal. Un punto relevante es que también señala que la resolución de tal ecuación deberá hacerse por un método algebraico y/o gráfico lo cual favorece la formación de pensamiento matemático en los estudiantes al tomar en cuenta la visualización en el proceso didáctico.

Contrastando estos propósitos del programa con los resultados obtenidos en el estudio realizado y consignados en el punto número 4, podemos afirmar que no se han logrado.

7. De manera similar se realizó una revisión del programa de estudio de la materia de Matemáticas IV de ENP del SI de la UNAM, misma que mostró que en el enunciado del objetivo general de la asignatura afirma que se pretende reafirmar y enriquecer los conocimientos de álgebra previamente adquiridos, lo que por supuesto se refiere entre otras cosas a las ecuaciones de primer grado, estudiadas desde la escuela secundaria; más aún, señala que esto tiene la finalidad de que sirva para la solución de problemas de otras disciplinas.

Incluso señala que en las estrategias de evaluación deberá considerarse si el alumno logró la capacidad de aplicar los aprendizajes logrados en el planteamiento y resolución de problemas.

En el caso concreto de la unidad en que se aborda la enseñanza de las ecuaciones de primer grado se plantea como objetivo particular que el alumno sea capaz de plantear problemas de su entorno cuya solución se obtenga a partir de la resolución de una ecuación y que interprete el resultado obtenido.

Estos objetivos no concuerdan con el contenido temático que en la presentación de contenidos temáticos referentes a las ecuaciones de primer grado no

menciona la resolución de problemas, sino solo el aspecto conceptual y algorítmico.

También resulta incongruente con los objetivos el tiempo asignado para la unidad que es solo de 15 horas, en las que deben estudiarse además de las ecuaciones de primer grado, las de segundo grado y las desigualdades de primer y segundo grados.

Notamos que el objetivo prioritario no se logra a la luz de los resultados obtenidos en la encuesta realizada.

CAPÍTULO 4.

DISEÑO PARA EL AULA PARA UNA PRIMERA APROXIMACIÓN A LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

El diseño que aquí se presenta, consta de una serie de problemas que tienen el propósito de introducir al alumno en el tema de las ecuaciones de primer grado, partiendo de la modelación de situaciones, con lo que se pretende proveer al conocimiento de un contexto y con ello de un significado tangible.

Cada uno de ellos plantea una situación concreta que sirve como base para, a partir de ella mostrar la necesidad de contar con una herramienta matemática para su resolución, la ecuación de primer grado, y el conocimiento de una metodología para resolverla. La dificultad que presentan es progresiva y su temática, diversa.

Este diseño puede ser usado individualmente, entregándole a cada alumno un ejemplar y solicitándole que lean y contesten las preguntas que en él aparecen, por sí mismos; en equipo con un manejo similar, o bien, de forma grupal; en tal caso, las preguntas y comentarios que contienen podrían ser formuladas oralmente por el profesor, provocando con ellas, discusiones y lluvias de ideas entre los estudiantes, que resultarían muy enriquecedoras.

Las preguntas planteadas se dividen en dos bloques, que corresponderían a las fases de “acción” y “formulación” de una situación didáctica; la fase de validación depende de la modalidad empleada, es decir:

- Si se trabaja en forma individual, proporcionándole a cada estudiante un ejemplar del problema y las preguntas, la validación se daría al presentar cada estudiante, sus respuestas al grupo, ver si hay concordancia entre ellas o no y analizar a que se deba esto.

- Si se trabaja en equipo, la validación tendría dos momentos, el primero, intrínseco en los otros dos, cuando los integrantes de cada equipo discutan entre ellos, para encontrar las respuestas a las cuestiones que se les plantean y el segundo, al compartir las conclusiones de equipo con los demás equipos que forman el grupo.
- Si se trabaja en forma verbal, en grupo, la validación se presenta con la lluvia de ideas que surja al responder a cada cuestión, manejada de forma tal que los estudiantes se cuestionen entre sí los por qué de sus respuestas.

En esta presentación, las respuestas esperadas (deseadas) se muestran escritas con letra tipo script pero, obviamente, éstas no les serán dadas a los estudiantes, ellos deberán ser quienes lleguen a afirmaciones similares a ellas, en caso de cumplirse los propósitos de esta propuesta metodológica.

SECCIÓN A.

Introducción al empleo de las ecuaciones de primer grado en la resolución de problemas.

En esta sección se recurre al uso de problemas sencillos para introducir a los estudiantes en el uso y resolución de ecuaciones de primer grado simples, que se

denominan mas adelante como “tipos básicos” y son de las formas: $ax = b$, $\frac{x}{a} = b$,

$x + a = b$ y $x - a = b$.

Problema no. 1.

Este problema tiene la intención de brindar un primer acercamiento del estudiante al tema que nos ocupa.

La solución del mismo, de hecho, podría encontrarse sin necesidad de usar una ecuación, situación que se emplea para provocar que una vez planteada ésta, el alumno pueda inferir la forma de resolver una ecuación simple del tipo $ax = b$.

“La ida al cine”.

Un grupo de 6 amigos consigue una tarjeta de descuento para las entradas a cierto cine, por lo que se reúnen y van juntos a ver una película que les interesa mucho. Uno de ellos es quien hace la compra de los boletos en la taquilla, donde paga un total de \$192.00. Ahora él debe calcular el costo de la entrada de cada uno de los amigos para cobrárselas.

Fase: Acción

Analizando el problema, ¿puedes decir cuanto le cuesta el boleto de cine a cada uno de los amigos? \$32.00.

Describe cómo encontraste esta solución dividiendo el pago total de \$192.00 entre 6 que es el número total de boletos comprados.

Bien, ahora tratemos de plantearlo con formalidad matemática.

¿Cuál es la cantidad que no se conoce y que se desea averiguar? El costo de cada boleto de cine.

Elige una letra para representar esta cantidad desconocida. b.

Uno de los datos con que se cuenta es la cantidad total pagada por todos los boletos, ¿cuál es? \$192.00.

¿Cómo calculó esta cantidad el taquillero del cine, para poderla cobrar?

Multiplicando el costo de cada boleto por el número de boletos.

Por favor, expresa lo anterior empleando la letra que escogiste mas arriba y el dato del número de boletos comprados, que conocemos. 6b.

Por lo tanto existe una igualdad entre la cantidad total pagada por todos los boletos y la expresión con que respondiste a la cuestión anterior, escríbela por favor.

6b=192.

Bien, lo que acabas de escribir es una **ecuación de primer grado con una incógnita**, su solución ya la conoces, la encontraste al responder a la primera cuestión aquí planteada.

Ahora, por favor, expresa el proceso de solución que describiste al responder a la segunda pregunta como con una igualdad en la que de un lado tengas a la literal que representa a la cantidad desconocida. b=192/6.

El valor de la literal con que estamos trabajando es la solución al problema, escríbelo como una igualdad. b=32.

Escribe ahora, una tras otra, en forma de lista, colocando un signo de = debajo del otro, las respuestas a las tres últimas cuestiones planteadas aquí.

$$\underline{6b=192}$$

$$\underline{b=192/6}$$

$$\underline{b=32}$$

Fase: Formulación.

Esto último que has escrito es el planteamiento de la ecuación que da solución al problema que tenemos, así como el proceso para llegar a su solución. Si pensamos que todas las ecuaciones similares a ésta se resuelven de una manera análoga, ¿cómo describirías el proceso necesario para hacerlo?

Quando se tiene una ecuación en la que la incógnita está multiplicada por un valor y esto es igual a otro número, se divide este número entre el valor que multiplica, esto da la solución.

Fíjate bien y completa este enunciado: La operación que relacionaba a la incógnita con uno de los valores conocidos, en la ecuación es una multiplicación y para resolver la ecuación, se empleó la operación división.

¿Qué relación guardan entre sí, estas dos operaciones? Son inversas entre sí.

Problema no. 2.

Este problema puede ser resuelto sin el empleo de una ecuación, sin embargo, esto puede no ser tan obvio para el estudiante como en el caso anterior, por involucrar conceptos cuyo significado y relación entre sí no pertenecen al ámbito coloquial, por lo que no le resultará tan “engorroso” que se le pida plantear una ecuación.

La ecuación que se usa, es del tipo $\frac{x}{a} = b$. Se pretende que, usando la intuición y el razonamiento, el alumno pueda sugerir una forma de resolver una ecuación del tipo actual.

La segunda cantidad con que se cuenta, aunque no directamente es el tiempo empleado en el recorrido, pues se conoce a qué hora dio inicio y a qué hora concluyó éste, es decir, lo que marcaba el reloj al pasar por cada una de las casetas de cobro, veamos:

Cuando el auto pasó por la primera caseta, el reloj indicó: 3:00.

Cuando el auto llegó a la segunda caseta, el reloj marcó: 5:00.

Entonces, ¿cuánto tiempo tardó el auto en ir de una caseta a la otra? 2 horas.

Conforme a lo que dijo el papá respecto a que la velocidad es igual a la distancia recorrida dividida entre el tiempo empleado, escribe la expresión matemática que lo represente, usando los datos numéricos con que se cuenta y la letra que elegiste para el valor desconocido. $90 = x/2$. Si al escribir esto te quedó la letra que representa el valor desconocido del lado izquierdo, déjala así, de lo contrario, invierte el orden de las expresiones que se encuentran a un lado y otro del signo =.

$$\underline{x/2 = 90}$$

La expresión anterior es una ecuación de primer grado con una incógnita. Observando la relación numérica que refleja ésta, ¿puedes decir cuál debe ser el valor de la incógnita para que la igualdad sea cierta?, ¿cuál es? 180.

¿Qué operación numérica tuviste que hacer para encontrar este valor? Multiplicar 90 por 2.

Escribe lo anterior como una igualdad respecto a la incógnita. $x=(90)(2)$.

Ahora, escribe la ecuación, seguida de la expresión anterior y a continuación el valor de la incógnita, que ya encontraste, una expresión debajo de la otra.

$$\underline{x/2 = 90}$$

$$\underline{x=(90)(2)}$$

$$\underline{x=180}$$

Fase: Formulación.

Lo que acabas de escribir es la ecuación que resuelve el problema y su proceso de solución, por favor descríbelo con palabras.

Cuando tenemos una ecuación en la que la incógnita está dividida por un valor y esto es igual a un número, la solución se encuentra multiplicando los dos números conocidos.

Vamos a precisar algo, para ello, completa el siguiente enunciado: La operación que relaciona a la incógnita con uno de los datos es la división y la operación que es necesario efectuar para encontrar el valor de la incógnita es una multiplicación la relación que guardan entre sí estas operaciones es que son inversas.

Problema no. 3.

Este problema, ubicado en un contexto doméstico, y que puede ser resuelto con una operación aritmética, sirve para presentar una ecuación del tipo $x+a=b$; con él se pretende, con base en su simplicidad, que los estudiantes infieran la forma de resolver ecuaciones análogas a ésta.

“El nuevo precio del refresco”

Una señora le pide a su empleada doméstica que vaya a la tienda de abarrotes de la esquina y compre un refresco de 2 litros, para ello le da un billete de \$20.00.

La muchacha llega a la tienda y pide lo que le encargaron, pero el tendero le informa

que ya cambiaron la presentación de esos refrescos y ahora solo hay envases de tres litros, que es el que le da. Le recibe el dinero y le da de cambio \$2.40.

Al regresar a la casa, le platica a la señora lo ocurrido, pero no puede decirle cuanto le costó el refresco, solo le entrega el cambio.

Fase: Acción

Quizá la muchacha de nuestro problema no sepa como realizar la operación necesaria para responder cual fue el precio del refresco, basándose en la información con que si cuenta: la cantidad que pagó y lo que recibió de cambio, pero nosotros sí.

Con esos datos, di tú, cuánto debió costar el refresco. \$17.60.

Bien, ahora modelemos esto, mediante una ecuación de primer grado.

Al igual que en los problemas anteriores, empecemos por identificar nuestra incógnita, es decir, la cantidad que no conocemos y deseamos conocer y le asignamos una letra para representarla.

¿Cuál es la incógnita? el precio del refresco de tres litros.

¿Qué letra eliges para representarla? x.

Ahora, ¿cuánto fue lo que la señora le dio a la muchacha? \$20.00.

¿Cuál es nuestra otra cantidad conocida y de cuánto es? El cambio que es \$2.40

•

¿Qué relación hay entre esta última y la incógnita, respecto al dinero entregado por la señora?

el precio del refresco mas el cambio deben dar \$20.00.

Representa esta relación de manera formal, empleando la letra con que representas a la incógnita y los valores de la información conocida.

$$\underline{x+2.40 = 20.00}.$$

Bien, esa relación es la ecuación de primer grado que modela el problema que tenemos.

Ahora, escribe la incógnita como una igualdad respecto a la operación que se debe realizar con las dos cantidades desconocidas, para descubrir su valor.

$$\underline{x=20.00-2.40}.$$

¿Cuál es el resultado de esta operación?

$$\underline{x=17.60}.$$

Al igual que en los problemas anteriores, escribe una a continuación de la otra, tus respuestas a las tres cuestiones anteriores.

$$\begin{array}{l} \underline{x+2.40 = 20.00} \\ \underline{x=20.00-2.40} \\ \underline{x=17.60} \end{array}$$

Fase: Formulación.

Lo que acabas de escribir es la ecuación del problema, su proceso de solución y su solución.

Por favor, escribe ahora como debe resolverse una ecuación del tipo de la que aquí empleamos.

Cuando se tiene una ecuación en que la incógnita está sumada a un valor y esta suma es igual a otra cantidad, para resolverla basta con restar a tal cantidad el valor

que acompañaba a la incógnita .

Al escribir la ecuación, ¿qué operación relacionaba a la incógnita con la cantidad que la acompañaba? Una suma .

Al resolver la ecuación, ¿qué operación se realizó? Una resta .

¿Qué relación guardan entre sí estas dos operaciones? Son inversas .

Problema no. 4

Este problema, que se ubica en un contexto cotidiano, pretende conducir al estudiante a manejar una ecuación del tipo $x - a = b$. Su dificultad es análoga a la del problema anterior.

“El precio del televisor”

En un anuncio publicitario de una tienda departamental aparece un aparato de televisión con un precio de \$1874.00 y una leyenda que dice “usted ahorra \$275.00”.

Un joven que lee este anuncio se interesa por dicho aparato, pero le interesa conocer el precio base sobre el cual se ha hecho el descuento que origina el “ahorro” promocionado.

Fase: Acción.

Resolvamos la situación que se le presenta al joven de este problema, empleando una ecuación de primer grado.

Para ello, identifica a la cantidad que es nuestra incógnita y elige una letra que la

Fase : Formulación.

Notarás que ambas ecuaciones son del mismo tipo.

Por favor, escribe ahora como debe resolverse una ecuación del tipo de la que aquí empleamos.

Cuando se tiene una ecuación en que a la incógnita se le reste un valor y esto suma es igual a otra cantidad, para resolverla basta con sumar a tal cantidad el valor que acompañaba a la incógnita.

Al escribir la ecuación, ¿qué operación relacionaba a la incógnita con la cantidad que la acompañaba? Una sustracción.

Al resolver la ecuación, ¿qué operación se realizó? Una suma.

¿Qué relación guardan entre sí estas dos operaciones? Son inversas.

Sección B.

Recapitulación y extensión de conocimientos.

En esta sección se prescinde del empleo de nuevos problemas, en cambio se retoman las ecuaciones que se emplearon en la resolución de los anteriores, para que el

estudiante identifique éstas como de los tipos: $ax = b$, $\frac{x}{a} = b$, $x + a = b$ y $x - a = b$ y

generalice la metodología empleada a su resolución, como la simple aplicación de operaciones inversas en el miembro opuesto de la ecuación, empleando esto con un grupo de nuevas ecuaciones que se presentan; lo cual servirá de base para resolver otras ecuaciones mas complejas.

La respuesta o solución que dé cada estudiante a las diferentes cuestiones y actividades que se le plantean, deberá ser comparada y discutida con las de los compañeros, con el fin de validar las mismas.

Así mismo, se dan a conocer a los estudiantes los términos: primer y segundo miembro, para que ellos establezcan sus conceptos.

Acabas de resolver cuatro problemas, empleando para ello, otras tantas ecuaciones, por favor, escríbelas aquí.

$$\underline{6b=192, \quad x/2 = 90, \quad x+2.40 = 20.00, \quad t-275=1874}$$

Hagamos algunos cambios en estas ecuaciones. Para empezar, sustituye todas las letras con que designaste a las incógnitas con letras x , luego como en todas ellas tienes dos números, sustituye en cada una, el número que acompaña a la x por una a y el otro número por una b .

$$\underline{ax=b, \quad x/c =d, \quad x+e =f, \quad x-g=h}$$

Estos son los cuatro tipos básicos de ecuación de primer grado con una incógnita.

Tomando estas expresiones como encabezados de las columnas de la tabla que a continuación se presenta, introduce en ella, las siguientes ecuaciones, en la columna que corresponda según su tipo:

$$12x = -40$$

$$x + \frac{3}{4} = 20$$

$$\frac{x}{12.5} = -59$$

$$2.7x = 43.8$$

$$\frac{3}{5}x = -\frac{1}{4}$$

$$x - 7 = \frac{1}{10}$$

$$0.725x = 184$$

$$x - 2.7 = 88$$

$$\frac{x}{2/5} = 9$$

$$x + 8.3 = 104$$

$$x - \frac{1}{5} = -85$$

$$\frac{x}{1/6} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{x}{12} = 0.12$$

$$x + 15 = 47$$

$$x - 189.7 = 248$$

$$x + 99712 = -590$$

ax=b	x/c=d	x+e=f	x-g=h
12x=-40	x/12.5 =-59	x+3/4=20	x-7=1/10
2.7x=43.8	x/2/5 =9	x+8.3=104	x-2.7=88
3/5 x=-1/4	x/1/6 =2/9	x+15=47	x-1/5=-85
0.725x=184	x/12=0.12	x+99712=-590	x-189.7=248

Cuando resolviste los problemas, propusiste una metodología de solución para cada uno de los tipos de ecuaciones que manejaste. Pon ahora en práctica, dichas estrategias para resolver todas las ecuaciones que aparecen en el cuadro que acabas de llenar, para ver si tus propuestas siguen siendo válidas para estas ecuaciones.

12x=-40 x=40/-12 x=-3.33	x/12.5=-59 x=(-59)(12.5) x=-737.5	x+3/4=20 x=20-3/4 x=77/4	x-7=1/10 x=1/10 +7 x=71/10
2.7x=43.8 x=43.8/2.7 x=16.22	x/2/5=9 x=(9)(2/5) x=18/5	x+8.3=104 x=104-8.3 x=95.7	x-2.7=88 x=88+2.7 x=90.7
3/5x=-1/4 x=-1/4/3/5 x=-5/12	x/1/6=2/9 x=(2/9)(1/6) x=2/54=1/27	x+15=47 x=47-15 x=32	x-1/5=-85 x=-85+1/5 x=-424/5
0.725x=184 x=184/0.725	x/12=0.12 x=(0.12)(12)	x+99712=-590 x=-590-	x-189.7=248 x=248+189.7

$x=253.79$	$x=1.44$	99712 $x=-100270$	$x=437.7$
------------	----------	----------------------	-----------

Tras comparar tus resultados con los de tus compañeros, ¿crees que funciona tu metodología propuesta para cada uno de los tipos de ecuación?

 sí .

Ahora observa cuidadosamente todos tus procedimientos de solución, tanto de las 16 ecuaciones del cuadro, como de las cuatro de los problemas, ¿podrías proponer una metodología general para resolver ecuaciones que correspondan a alguno de los cuatro tipos básicos? Hazlo.

Para resolver una ecuación de cualquiera de los tipos básicos, se necesita hacer con los dos números que se tienen, la operación inversa a la que uno de ellos tenía con la incógnita_____.

Si ahora consideramos que la expresión que se encuentra a la izquierda del signo de = se conoce como **primer miembro** y a la que se encuentra del lado derecho del signo = se le llama **segundo miembro**, además de que al hecho de dejar sola a la incógnita en uno de ellos se le dice **despejar**, rescribe tu propuesta de metodología para la resolución de las ecuaciones anteriores usando esta información.

Si se tiene una ecuación de primer grado, de cualquiera de los tipos básicos, se debe despejar a la incógnita, para ello se debe pasar al otro miembro de donde se encuentra el valor numérico que la acompaña, aplicando la operación inversa a la que se tiene_____.

Sección C.

Resolución de problemas, usando ecuaciones de primer grado, de dificultad media.

En esta parte se presentan problemas un tanto más complejos que los anteriores. El propósito de esto es conducir al estudiante a plantear ecuaciones de primer grado para la resolución de nuevos problemas y que extienda la metodología que se propuso en la sección B a ecuaciones con un grado de dificultad mayor a las de las secciones A y B.

Problema no. 5.

Este problema presenta una situación tal que lleva al planteamiento de una ecuación del tipo $ax + bx = c$, tiene como propósito conducir al alumno a identificarla y establecer una metodología para su resolución, reduciéndola a uno de los tipos básicos trabajados en las secciones precedentes.

“Los libros de inglés”

En una escuela de nivel medio, los profesores de la academia de inglés, determinan que para que todos los alumnos cuenten con sus libros de texto a tiempo para que nadie se atrase en la clase, se comprarán todos juntos a la editorial que los produce.

Los profesores también determinaron, con la finalidad de contar con fondos adquirir ciertos materiales didácticos para la academia, que el precio al alumno por cada libro, sería de 20% mayor al precio de compra,

El coordinador de la academia de inglés hace la operación necesaria para determinar el precio a los estudiantes que es de \$127.00.

Al concluir con la venta, él debe rendir un informe y no recuerda ya cuál era el costo de los libros, por lo que debe calcularlo.

Fase: Acción.

Resolvamos el problema del coordinador de inglés.

Por principio, ¿cuál es la incógnita? el costo de los libros.

Designemos éste usando la letra x .

¿Cómo calculó el profesor el precio de venta de cada libro? Agregándole el 20% al costo.

¿Recuerdas como se calcula el porcentaje de una cantidad? Multiplicando esa cantidad por el porcentaje al que se le recorrió el punto dos lugares a la izquierda.

Exprésalo usando la letra que tenemos para designar el costo de cada libro. $.20x$.

Escribe ahora usando la expresión anterior, la forma en que se calculó el precio de venta de cada libro. $x+.20x$.

La expresión anterior debe ser igual a uno de nuestros datos, con lo que formaríamos una ecuación de primer grado, por favor, escríbela.

$$\underline{x+.20x=127}$$

Notarás que la ecuación que acabas de escribir es diferente de aquellas con las que hemos estado trabajando, ¿en qué consiste esa diferencia? En esta hay dos términos en los que aparece x .

¿Podrás hacer alguna operación algebraica para hacer que esta ecuación tome la forma de alguna de las de los tipos básicos?, ¿cuál? Sumar los dos términos en los que aparece x .

Hazlo ahora y escribe la ecuación con el resultado de esta operación.

$$\underline{1.20x=127}$$

Bien, ahora resuélvela, según la metodología que te planteaste anteriormente.

$$\underline{1.20x=127}$$

$$\underline{x=127/1.20}$$

$$\underline{x=105.83}$$

Fase: Formulación.

Por favor, describe la ecuación y todos los pasos que realizaste para su resolución.

$$\underline{x+.20x=127}$$

$$\underline{1.20x=127}$$

$$\underline{x=127/1.20}$$

$$\underline{x=105.83}$$

Ahora trata de establecer una metodología para la resolución de una ecuación como esta, estableciendo una relación con el tipo básico a que la redujiste.

Cuando se tiene una ecuación de primer grado con una incógnita, en la que en aparecen en el mismo miembro dos términos sumados que contienen la incógnita, se suman éstos y luego se resuelve la ecuación como una del tipo $ax=b$.

Problema no. 6.

Este problema presenta una situación tal que lleva al planteamiento de una ecuación del tipo $ax - bx = c$, muy similar al anterior, por lo que tiene como propósito conducir al alumno a identificarla y establecer una metodología para su resolución, análoga a la del problema 5, reduciéndola a uno de los tipos básicos trabajados en las secciones precedentes.

“Las hermanas compradoras”.

Una chica llamada Nancy acude a una tienda departamental y se encuentra que solo por ese día, toda la ropa y accesorios femeninos se encuentran con un 67% de descuento, de manera que se compra blusas, playeras, una bolsa, unos lentes y un par de zapatos.

Al llegar a casa y mostrarle a sus familiares sus compras, su hermana Jessica queda encantada con la bolsa por lo que quiere comprarse una similar, pero por la hora que es, ya no puede ir a la tienda ese día, por lo que deberá pagarla al precio regular.

Jessica le pregunta a su hermana cuál es el precio normal de la bolsa para saber cuanto dinero debe llevar para adquirirla, pero ella tiró las etiquetas y no lo sabe, el único dato que puede proporcionarle a partir del ticket es que ella pagó \$42.50 por la bolsa.

Fase: Acción.

¿Ayudamos a Jessica?

Estamos buscando una cantidad, ¿cuál? el precio de la bolsa.

Bien, como en el caso anterior, designaremos a nuestra incógnita con la letra x , que mas te agrade.

Letra elegida: x = cantidad buscada que es precio de la bolsa.

Ahora, recordando lo que significa obtener el porcentaje de algo y que lo acabas de practicar en el problema 5, escribe una expresión matemática para el monto del descuento en el precio de la bolsa. .67x

Considerando la forma en que se calculó la cantidad que Nancy pagó por la bolsa, una vez hecho el descuento, escribe la ecuación que lo describe.

$$\begin{array}{r} \text{-----} \\ \text{.67x} \quad \quad \quad = \quad \quad \quad \text{42.50} \\ \text{-----} \end{array}$$

Como bien sabes, lo que acabas de escribir es una ecuación de primer grado.

¿Esta ecuación tiene alguna similitud con la del problema 5? Sí.

¿En qué consiste? En que hay dos términos que contienen a la incógnita.

¿Se podrá resolver esta ecuación con la metodología que planteaste para el problema anterior? Inténtalo.

$$\begin{array}{r} \text{-----} \\ \text{x-.67x=42.50} \\ \text{-----} \\ \text{.33x=42.50} \\ \text{-----} \\ \text{x=42.50/.33} \\ \text{-----} \\ \text{x=128.78} \\ \text{-----} \end{array}$$

Fase: Formulación.

Con base en el trabajo que acabas de realizar, escribe una generalización de la metodología para resolver este tipo de ecuaciones.

Cuando se tiene una ecuación, en la que aparecen dos términos que contienen a la incógnita, y éstos están relacionados por una operación, se debe realizar ésta para reducir la ecuación a una del tipo $ax=b$ y se resuelve conforme a la metodología

adecuada para éstas.

Problema no. 7.

Este problema pretende conducir al estudiante a establecer una ecuación del tipo $ax + bx + c = d$, con lo que para resolverla deberá hacer tres operaciones, esencialmente: una suma de términos semejantes, un despeje de una cantidad sumada y un despeje de una cantidad multiplicada, además deberá discernir en que orden deberá hacer estos despejes.

“El heredero inconforme”.

La semana pasada platicué con un amigo que hace tiempo que no veía y me encontré con que estaba muy disgustado. Al preguntarle el motivo, me platicó que tras varias dificultades, por fin, en su familia habían encontrado el testamento de su papá y habían hecho la distribución de la herencia. Me dijo lo siguiente:

- ¿Te acuerdas que siempre me dijo mi papá que si no estudiaba una carrera profesional, me arrepentiría de no haberle dado gusto el día que él se muriera?, bueno, pues me lo cumplió. Se acaba de repartir el dinero de su cuenta bancaria, cuyo saldo era de \$1,920,000 y a mi me tocó una miseria de eso.

A lo que yo le respondí. “Yo creo que exageras, no pudo ser tan malo para ti”.

- ¡Cómo no!, Fíjate nada más, a su chofer le dejó \$120,000, a mi hermano le dejó diez veces lo que me tocó a mí y a mi mamá te correspondió una cantidad que es 25 veces la mía. ¿Cómo me dices que no fue tan malo para mí?

- De acuerdo, pero en concreto, ¿cuánto te tocó a ti?

- Ni me preguntes, que nada mas me acuerdo y me vuelvo a enojar.

Tras decir esto, mi amigo se despidió y se marchó, como soy muy curiosa, deseo saber de cuanto fue su herencia.

Fase: Acción.

Resolvamos el problema de la curiosa narradora de la historia anterior y descubramos el monto de la herencia de su amigo.

En principio, ¿qué es lo que se desea averiguar? cuanto heredó el amigo.

Siguiendo nuestra costumbre vamos a representarla con la letra, digamos x .

La herencia de otras dos personas está relacionada con esta cantidad, ¿cuáles?

la de la mamá y la del hermano.

Hay un cuarto heredero, lo que le corresponde ¿está directamente relacionado con la cantidad que queremos averiguar? no.

Ahora expresa algebraicamente, usando la literal elegida en donde sea pertinente, lo que le corresponde a cada heredero.

el amigo: x

su hermano: $10x$

su mamá: $25x$

el chofer: $120,000$

Bien, para establecer la ecuación que representa al problema, solo falta expresar la relación que hay entre todas estas cantidades y el total del dinero que dejó el papá.

Por favor, hazlo.

$$\underline{x+10x+25x+120000} = \underline{1920000}$$

Ahora hay que resolver la ecuación, para encontrar la solución al problema. Para ello,

habrá que emplear los conocimientos adquiridos en el trabajo realizado con los problemas anteriores.

Adelante, procede a ello.

$$x+10x+25x+120000=1920000$$

$$36x+120000=1920000$$

$$36x=1920000-120000$$

$$36x=1800000$$

$$x=1800000/36$$

$$x=50000$$

Conforme a tus cálculos, ¿cuál es la cantidad que heredó el amigo de la narradora? 50000

Ahora, vas a verificarlo. Para ello, calcula con base en tu resultado anterior, el monto de la herencia de cada persona y confirma que haya sido correcto.

amigo: 50000

hermano: $10(50000)=500000$

mamá: $25(50000)=1250000$

chofer: 120000

la suma de todos: 1920000

¿Estuvo bien?, de ser así, ¡felicidades!, de lo contrario, vuelve a escribir tu ecuación y resuélvela de una manera diferente. Al concluir, verifica de nuevo el resultado que obtengas.

Sección D.

Resolución de ecuaciones de primer grado, de dificultad media.

En esta parte no se presentan problemas sino una serie de ecuaciones de dificultad media que se pretende, el alumno resuelva empleando los conocimientos que ha ido adquiriendo al realizar el todo el trabajo planteado hasta este punto.

Tomando en cuenta el proceso que realizaste para llegar a la solución correcta del problema 7, describe los pasos que seguiste para encontrarla.

sumé todos los términos que tenían x, luego pasé el número que no tenía x al otro lado, lo pasé restando, luego hice la resta que me quedó, para terminar el 36 que estaba con x, lo pasé dividiendo del otro lado y me dio 50,000.

Independientemente de tu proceso particular, seguramente hiciste dos cosas, al menos: realizaste una operación algebraica dentro de tu ecuación y efectuaste un proceso de despeje de la incógnita.

Conforme a ello, resuelve las ecuaciones siguientes:

$3x + 5 = 50$ $3x + 5 = 50$ $3x = 50 - 5$ $3x = 45$ $x = 45/3$ $x = 15$	$2x + 8x - 7x + 10 = 22$ $2x + 8x - 7x + 10 = 22$ $3x + 10 = 22$ $3x = 22 - 10$ $3x = 12$ $x = 12/3$ $x = 4$	$5x - 10x + 8 = -7$ $5x - 10x + 8 = -7$ $-5x + 8 = -7$ $-5x = -7 - 8$ $-5x = -15$ $x = -15/-5$ $x = 3$
--	--	--

¿Estás listo para resolver ecuaciones más complicadas que las anteriores? ¡Claro que sí!, solo necesitas tener presente lo que has hecho hasta ahora, un poco de ingenio y algo de creatividad. Resuelve las siguientes:

$2x + 5 = 3x + 2$ $2x + 5 = 3x + 2$ $2x - 3x = 2 - 5$ $-x = -3$ $x = 3$	$5(3x + 1) = 45$ $5(3x + 1) = 45$ $15x + 5 = 45$ $15x = 45 - 5$ $15x = 40$ $x = 40/15$ $x = 8/3$
$\frac{5x}{2} = -10$ $5x/2 = -10$ $5x = -10(2)$ $5x = -20$ $x = -20/5$ $x = -4$	$\frac{x - 3}{2} = -4$ $(x - 3)/2 = -4$ $x - 3 = -4(2)$ $x - 3 = -8$ $x = -8 + 3$ $x = -5$

$2(x-1) = 4(x-2)$ $2(x-1) = 4(x-2)$ $2x-2 = 4x-8$ $2x-4x = -8+2$ $-2x = -6$ $x = -6/-2$ $x = 3$	$\frac{x-5}{6} = \frac{x-6}{3}$ $(x-5)/6 = (x-6)/3$ $3(x-5) = (x-6)6$ $3x-15 = 6x-36$ $3x-6x = -36+15$ $-3x = -21$ $x = -21/-3$ $x = 7$
---	---

Resultados de la puesta en práctica del diseño para el aula.

El diseño elaborado para este trabajo, y que es presentado en el anexo 1, fue puesto en práctica el día 22 de octubre del 2005, en una sesión de 3 horas con 8 estudiantes de primer semestre del CECyT Miguel Bernard, del IPN, que en su curso de Álgebra no habían llegado aún al tema de “ecuaciones de primer grado”.

Sección preliminar.

Se incluyó esta sección para tener un panorama aproximado de las condiciones de los estudiantes con los que se realizó el trabajo. En principio se les inquirió acerca de su edad, con lo que se sabe que de los 8 estudiantes, 6 tienen 15 años, uno tiene 14 años y uno tiene 16. Además, dos son mujeres y seis son varones.

Posteriormente, para conocer su propia percepción previa acerca de sus habilidades y conocimientos previos se les hicieron dos preguntas al respecto.

La primera de ellas fue:

¿CÓMO VALORAS TU HABILIDAD MATEMÁTICA?

Con tres opciones de respuesta: alta, regular y escasa.

Sus respuestas fueron:

Respuesta	Número de personas	Porcentaje
alta	1	12.5
regular	4	50.0
escasa	3	37.5

Cuadro 21.

La segunda pregunta fue:

¿CÓMO VALORAS TUS CONOCIMIENTOS DE MATEMÁTICAS ADQUIRIDOS EN LA ESCUELA SECUNDARIA, PARTICULARMENTE EN EL TEMA DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO?

Las opciones de respuesta son: buenos, regulares y escasos.

Sus respuestas fueron:

Respuesta	Número de personas	Porcentaje
buenos	0	0.0
regulares	6	75.0
escasos	2	25.0

Cuadro 22.

Esta sección preliminar contiene las tres ecuaciones y el problema que aparecen también en el cuestionario para alumnos que se elaboró para conocer el estado actual de la enseñanza de las ecuaciones de primer grado y del que se habla ampliamente en “metodología y materiales”, así como las cuestiones sobre la concepción del signo = entre los estudiantes.

Esto se hizo con el propósito de valorar sus conocimientos en el tema de las ecuaciones de primer grado, previos a la realización de las actividades diseñadas para la sesión de prueba del diseño. Se les indicó que la respondieran de manera individual y que lo que no supieran hacer lo dejaran en blanco.

Las ecuaciones y los resultados obtenidos en el trabajo de los alumnos son:

Ecuación	Respondió	Respondió	No respondió
----------	-----------	-----------	--------------

	correctamente		erróneamente		número	%
	número	%	número	%		
$3(x+2) = 5(x-6)$	0	0	7	87.5	1	12.5
$\frac{x-2}{3} = \frac{x}{7}$	0	0	3	37.5	5	62.5
$x(x+2) = x(x+4) - 12$	3	37.5	3	37.5	2	25.0

Cuadro 23.

El problema y la instrucción que se dio respecto a él fue:

RESUELVE EL SIGUIENTE PROBLEMA, DE LA MANERA QUE TE PAREZCA MÁS CONVENIENTE:

Un niño se midió a sí mismo y descubrió que su estatura ya es de 140 cm. Cuando se lo dijo a su mamá, se les ocurrió a ambos, medirlo por partes y descubrieron que la altura de su cabeza es cuatro veces el largo de su cuello, el largo de su tronco es 8 veces el de su cuello y el de sus piernas es 14 veces. Calcula la longitud en centímetros de cada parte del cuerpo de este niño.

Los resultados obtenidos con este fueron:

	personas	porcentaje
Lo resolvió correctamente	2	25.0
Lo resolvió erróneamente	2	37.5
No lo resolvió	3	37.5

Cuadro 24.

Aquí cabe señalar que ninguna de las personas que resolvieron el problema empleó una ecuación para ello.

Ante la pregunta: ¿QUÉ SIGNIFICADOS LE ENCUENTRAS AL SIGNO = EN MATEMÁTICAS?, cuatro estudiantes (50%) lo interpretó como “resultado”, uno (12.5%) como equivalencia, uno como igualdad (12.5%) y dos (25%) no la respondieron.

A la pregunta: ¿TE PARECE QUE EL SIGNO = REPRESENTA LO MISMO EN LAS EXPRESIONES SIGUIENTES? (1) $b = 3$, (2) $5 + 2 = 7$, (3) $4x + 2x = 3x + 3x$, (4) $3x + 4 = 20$, un (12.5%) alumno respondió **sí**, cuatro (50.0%) respondieron **no** y tres (37.5%) no respondieron.

La última pregunta: EN CASO DE QUE TU RESPUESTA A LA PREGUNTA ANTERIOR HAYA SIDO NEGATIVA, POR FAVOR, DESCRIBE LO QUE SIGNIFICA EL SIGNO = EN CADA UNA DE LAS EXPRESIONES PRESENTADAS?, solo hubo tres estudiantes que la respondieron, de los cuatro que debieron hacerlo por haber respondido **no** a la anterior y sus respuestas textuales son las siguientes:

Expresión	alumno 1	alumno 2	alumno 3
1	es la variable que dice o expresa el valor 3	en la uno si porque el valor de lo puede ser 3, al igual que puede ser 5,7,8,9,4,2,1, etc.	da a conocer que no importa la letra que sea por tiene el mismo valor que el 3
2	es la suma de dos números	en esta también son iguales	da el resultado de la operación
3	son dos sumas que hacen el mismo resultado	en esta sí porque sumando los productos da $6x$	da a conocer que aunque no sean números iguales pero en las dos da el mismo resultado
4	es una suma con resultado incorrecto	no porque no se sabe el valor de x , y lo más probable es que sea 8 pero el 20 sería negativo	

Cuadro 25.

Tras esta actividad preliminar, se procedió al trabajo con el diseño metodológico, el cual se realizó con la siguiente tónica:

Sección	Modalidad
A	grupal, con la intervención del maestro como moderador
B	en equipo de cuatro personas, sin intervención del maestro

C	en equipo de cuatro personas, sin intervención del maestro
D	en parejas, sin la intervención del maestro.

Cuadro 26.

Durante la aplicación del diseño se obtuvo lo siguiente:

Sección A.

Esta sección se trabajó con todo el grupo, cada estudiante leía una porción, ya fuere un problema, una explicación o una pregunta, cualquiera de los integrantes del grupo, espontáneamente respondía en el caso de las preguntas y en aquellas que requerían la escritura de una expresión, la profesora elegía al azar a quien debía pasar al pizarrón a hacerlo.

La intervención de la profesora fue solo moderando el trabajo, sin influir en las respuestas.

Con este manejo, las respuestas a todas las preguntas de la sección coinciden entre sí en los ocho cuestionarios, salvo por lenguaje y redacción, y también con las respuestas esperadas. No hubo discusiones, el grupo siempre manifestó estar de acuerdo con el compañero que respondía en voz alta.

La afirmación del párrafo anterior tiene dos excepciones:

La primera excepción consistió en que en la segunda pregunta de la fase de acción del problema 1: "Describe cómo encontraste esta solución", un alumno dijo "multiplicando", cuando todo el grupo coincidió con la respuesta esperada que es "dividiendo". Cabe recordar que se preguntaba como saber cuanto cuesta cada boleto de cine, sabiendo que por la compra de 6 de éstos se pagó \$192.00 y en la pregunta anterior ya se había dicho que \$32.00. La profesora le preguntó entonces al alumno, como podía saber la respuesta multiplicando, él dijo: *"pensé en números que se acercaran a 192, o sea, 180 y 200, entonces como 6 por 30 son 180, esto se acercaba, pero me faltan 12,*

entonces, como 6 por 2 son 12, entonces tenía que ser 32". Se le pidió que anotara esto en su cuestionario, pues se trató de una solución muy interesante, pero al revisar se encontró que solo escribió "multiplicando".

Ninguna otra respuesta discordante con el resto del grupo volvió a presentarse durante el desarrollo de toda la sección.

La segunda excepción fue que en el problema cuatro se esperaba que se plantearan dos ecuaciones diferentes y esto no ocurrió, se propuso solo una con la que todos los integrantes del grupo estuvieron de acuerdo.

Sección B.

Para esta sección, se solicitó a los alumnos que se integraran en dos equipos de cuatro personas, a cada uno de ellos se les entregó un ejemplar del diseño conteniendo estas dos secciones, para que lo trabajaran conjuntamente entre todos.

Al principio la profesora estuvo observando el desempeño, notando que uno de los equipos, al que se designó como equipo 2, por su ubicación en el aula, se integró muy bien, discutiendo entre ellos como responder a cada cuestión que se presentaba, pero el equipo 1 no lo hizo así, sino que se distribuyeron el trabajo entre los integrantes. A éstos se les solicitó que trabajaran de manera conjunta, su respuesta fue: "usted dijo que trabajáramos en equipo, es lo que estamos haciendo, distribuir lo que hay que hacer para no duplicar esfuerzos".

Se optó por dejarlos solos en el salón, durante cierto lapso para que cada equipo decidiera la manera en que le resultaba mas conveniente organizar su labor.

Con la finalidad de abreviar un poco el tiempo invertido en la sesión, pues los alumnos manifestaron el deseo de que ésta no fuese muy prolongada se les dio la indicación de que solo resolvieran 8 de las 16 ecuaciones propuestas.

No se realizó la validación de los resultados mediante la exposición de resultados en plenaria, pues el material correspondiente a la sección se entregó junto con el de la C, que se trabajó de manera análoga.

La revisión del trabajo realizado por ambos equipos en la sección B mostró:

	Equipo 1		Equipo 2	
	número	porcentaje	número	porcentaje
respuestas a las 5 preguntas planteadas	5	100	3	60
coincidencia de respuestas a las 5 preguntas planteadas, con las esperadas	4	80	3	60
coincidencia en clasificación de 16 ecuaciones, con lo esperado	16	100	16	100
resolución correcta de las 8 ecuaciones que se indicó resolver	6	75	6	75

Cuadro 27.

Es importante destacar que en el equipo 1, los errores en los resultados de las ecuaciones trabajados obedecieron a un error de signo al hacer una división y a una división de fracciones mal realizada.

En el equipo 2, los errores se debieron a las mismas causas, solo que en ecuaciones diferentes.

Sección C.

Esta parte de trabajó por equipos y a continuación de la anterior, puesto que a cada equipo se le entregó un ejemplar que contenía el material de las secciones B y C.

Las actitudes de los equipos ya fueron descritas en el apartado anterior. Los resultados obtenidos con ellos en esta sección fueron los siguientes:

	Equipo 1		Equipo 2	
	número	porcentaje	número	porcentaje
respuestas a las 12 preguntas del problema 5	12	100	11	91.6
coincidencia de respuestas en las preguntas del problema 5, con las esperadas	2	16.6	2	16.6
respuestas a las 9 preguntas del problema 6.	0	0	2	22.2
coincidencia de respuestas en las preguntas del problema 6, con las esperadas	0	0	2	22.2
respuestas a las 11 preguntas del problema 7	10	90.9	2	18.1
coincidencia de respuestas en las preguntas del problema 7, con las esperadas	8	72.7	1	9.0

Cuadro 28.

Sección D.

Las actividades correspondientes a esta sección se desarrollaron en parejas, a cada una se le entregó un ejemplar del cuestionario y se les solicitó trabajarlo de manera conjunta. Por cuestiones de tiempo, se les indicó que del primer grupo de tres ecuaciones, solo resolvieran 2 y del segundo de seis, solo 4; la profesora no intervino de ninguna forma en la resolución.

La revisión posterior del trabajo realizado mostró lo siguiente:

	Pareja A		Pareja B		Pareja C		Pareja D		Total	
	núm	%	núm	%	núm	%	núm	%	núm	%
Soluciones correctas a las 2 primeras ecuaciones que se indicaron	1	50	2	100	2	100	2	100	7	87.5
Soluciones correctas a las 4 siguientes ecuaciones que se indicaron	0	0	3	75	2	50	2	50	7	43.7
Respuesta a la pregunta planteada	1	100	1	100	1	100	0	0	3	75.0
Concidencia de la respuesta a la pregunta, con la esperada	1	100	0	0.0	0	0	0	0	1	25.0

Cuadro 29.

Del total de 9 soluciones erróneas a las 6 ecuaciones planteadas, 5 (55.5%) se debieron a errores en el manejo correcto de los signos algebraicos.

Sección de evaluación.

Esta sección, que se manejó de manera individual, se incluyó en la prueba del diseño metodológico con la idea de conocer, en primer lugar, la apreciación de los estudiantes del trabajo realizado, así como los logros obtenidos a través de éste en cuanto a su percepción personal de sí mismos y en segundo lugar, si se habían logrado aprendizajes que permitieran resolver por sí mismos ecuaciones y problemas.

En atención al primer propósito se plantearon tres preguntas que se muestran a continuación, anotando en cada recuadro de respuesta el número de ocurrencias de la misma:

1. ESTA SESIÓN Y EL MANEJO QUE SE HIZO DE ELLA:

te agradó te resultó indiferente te desagradó

2. SENTISTE QUE APRENDISTE:

mucho algo nada

3. TU PERCEPCIÓN ACERCA DE TU PROPIA HABILIDAD MATEMÁTICA:

mejoró **7 (87.5%)** quedó igual **1 (12.5%)** disminuyó **0 (0%)**

Considerando solo estos resultados, podría decirse, que conforme a la percepción de los estudiantes, la metodología propuesta es útil.

Para valorar los aprendizajes logrados, se volvieron a presentar las ecuaciones y el problema contenidos en la sección preliminar. La valoración de resultados consistió en la comparación de lo que los estudiantes lograron la primera vez y la segunda efectuada tras la aplicación del diseño bajo prueba, misma que se presenta a continuación:

	EQUIPO 1							
	PAREJA A				PAREJA B			
	Alumno 1		Alumno 2		Alumno 3		Alumno 4	
	pre.	eval.	pre.	eval.	pre.	eval.	pre.	eval.
Ecuación a	I	I	I	I	I	I	I	I
Ecuación b	I	I	N	N	I	I	I	I
Ecuación c	C	I	I	I	I	I	C	I
Problema.	C	C	I	I	N	N	C	C
Aciertos totales	2	1	0	0	0	0	2	1
	EQUIPO 2							
	PAREJA C				PAREJA D			
	Alumno 5		Alumno 6		Alumno 7		Alumno 8	
	pre.	eval.	pre.	eval.	pre.	eval.	pre.	eval.
Ecuación a	N	I	I	C	I	C	N	C
Ecuación b	N	N	N	N	N	N	N	N
Ecuación c	N	C	C	C	I	C	N	C
Problema.	N	I	I	C	N	C	I	C
Aciertos totales	0	1	1	3	0	3	0	3

Cuadro 30.

Donde las letras que aparecen significan:

C - correcto

I - incorrecto

N - no realizado

Podemos notar que en dos casos (25%) no hubo cambio en el número de aciertos, en dos (25%) hubo un descenso y en 4, que representan el 50% hubo un incremento.

Para valorar estos resultados, es importante recordar que los alumnos que integraron el equipo 1 fueron quienes al trabajar las secciones B y C, optaron por distribuirse el trabajo, mientras que los del equipo 2 se integraron discutiendo entre ellos cada cuestión, ecuación y problema.

También es relevante el hecho de que los estudiantes están habituados a trabajar sesiones de clase de 1 hora y el trabajo aquí realizado tomó alrededor de 3.5 hrs.

A partir de lo que aquí se aprecia, puede decirse que la metodología planteada es útil aunque debe ser revisada y mejorada.

CONCLUSIONES GENERALES.

La investigación desarrollada en este trabajo nos muestra que por lo general la enseñanza de las ecuaciones lineales se realiza con una secuencia que en la mayoría de los casos es: planteamiento de definiciones y propiedades, resolución de diversas ecuaciones y resolución de algunos problemas, quizás este último punto precedido de un enfoque gráfico, según manifiestan estudiantes y profesores, aunque el manejo de este aspecto no es tocado en los libros de texto que se emplean.

El aprendizaje logrado por los estudiantes bajo este sistema es pobre, tienen dificultad para resolver un problema sencillo mediante una ecuación de primer grado y no logran resolver cualquier ecuación que se les plantee.

Podría decirse que las percepciones de estudiantes y profesores de sus procesos en relación al tema, no concuerdan con la apreciación aquí planteada, pues a decir de ellos, el aprendizaje de los procesos de resolución de ecuaciones es “bueno” y en lo referente a problemas es “regular”.

Los objetivos del programa de estudio de la materia correspondiente en los CECyT's del IPN no son logrados, pues éstos se centran en la pretensión de que los estudiantes logren resolver problemas mediante el uso de las ecuaciones.

Algo similar ocurre con los objetivos y estudiantes de las escuelas del SI de la UNAM en la modalidad de ENP.

El diseño para el aula que se propone en este trabajo como una vía de aproximación a los estudiantes a las ecuaciones de primer grado se puso en práctica en una sesión de tres horas con un grupo de 8 estudiantes de primer semestre del CECyT Miguel Bernard del IPN que en este nivel no habían estudiado aún el tema que nos ocupa y

en la parte de aritmética que ya se había trabajado en el curso habían tenido un desempeño deficiente.

Esta experiencia mostró que sí es factible el trabajo didáctico de las ecuaciones de primer grado partiendo de problemas concretos y no de definiciones pues los resultados de aprendizaje obtenidos no son malos al lograr un avance en los conocimientos mostrados por los alumnos de un 50%.

Dicha puesta en práctica también mostró que trabajar todo el diseño en una sola sesión resulta muy cansado para los alumnos, factor que pudo haber provocado que la efectividad no fuese mas elevada.

Tomando en consideración lo anteriormente expuesto, es posible aventurarse a afirmar que la causa de la problemática encontrada en cuanto al no cumplimiento de los programas de estudio, muy posiblemente, radica en el hecho de que la enseñanza se realiza de manera opuesta a la génesis natural del conocimiento.

Es decir, mientras que, la historia muestra que el hecho de presentarse un problema provoca el surgimiento de la ecuación como el recurso para resolverlo, en el ámbito académico se parte de la enseñanza conceptual y algorítmica de dicha herramienta para justificarla después mediante la resolución de problemas, proceso a todas luces, antinatural.

Por ello, una metodología como la que se siguió en el diseño aquí presentado, que sigue el proceso natural de generación del conocimiento resulta ser una alternativa de enseñanza por asemejarse más a la generación natural del conocimiento a lo largo del desarrollo de la matemática a través del devenir histórico de la humanidad.

RECOMENDACIONES Y SUGERENCIAS PARA TRABAJOS FUTUROS.

A partir de la investigación desarrollada en esta tesis, se hace palpable la necesidad de realizar una investigación más amplia y de generar alternativas de solución a la problemática detectada, por lo que se sugiere, entre otras cosas:

1. Extender la investigación a otras modalidades educativas del nivel medio superior, tales como el “Colegio de Bachilleres”, el “Colegio de Ciencias y Humanidades”, los bachilleratos con programa SEP, tanto tecnológico como general, entre otros.
2. Tomar en cuenta al indagar sobre las concepciones y métodos seguidos por los profesores, la formación y motivación de éstos.
3. Buscar recursos didácticos adecuados para que los estudiantes conceptualicen interiormente de manera mas precisa, amplia y progresiva los significados del signo =.
4. Generar más y mejores metodologías de enseñanza de las ecuaciones de primer grado que realmente se ocupen de propiciar la adquisición de aprendizajes significativos y con ello duraderos, basados en la génesis natural del conocimiento en cuestión, para lo cual podría tomarse en cuenta la pregunta: ¿qué pasaría en cuanto al aprendizaje, si en la enseñanza se siguiera el proceso natural con que surgió el conocimiento, es decir, que a partir de problemas concretos se vea la necesidad de la ecuación de primer grado como un elemento necesario para su solución?

5. Evaluar con mayores tiempos, la efectividad de tales metodologías de enseñanza para lograr mediciones precisas de la ganancia cognitiva que se puede obtener a partir de ellas.

BIBLIOGRAFÍA

Libros consultados, sobre temas de matemática educativa, docencia e historia de las matemáticas:

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En: **Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.) (1995).** *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México. Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 33 – 59.

Cantoral, R. (1995). *Matemática, Matemática Escolar y Matemática Educativa*. Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. En Farfán, R. (ed.). Ministerio de Educación de Cuba. Vol. 1, 1-10. La Habana, Cuba.

Cantoral, et.al. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México. Trillas..

Chevallard, Y. (1993). *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina. Aique.

Díaz-Barriga, F. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México. Mc Graw - Hill.

Struik, D.J. (1994). *Historia concisa de las matemáticas*. México. IPN, Dirección de Publicaciones.

Material citado como antecedentes de este trabajo:

Ramiro, S., et.al. (2005). *El proceso de estudiar matemáticas en el nivel medio superior*. México. Aula XXI, Santillana y CONACyT- Guerrero.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de maestría no publicada. México. Cinvestav – IPN.

Andrade, L., Perry, P. Guacameme, E., Fernández, F. (2003). La enseñanza de las matemáticas, ¿en camino de transformación?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 6, num. 2, julio, 2003, pp. 80 -106.

Web Sites consultados sobre historia de las ecuaciones:

<http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n>

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/14/historia.html>

Libros de texto de álgebra:

Alvarado, R. (2001). *Álgebra para preuniversitarios*. México. Esfinge.

Angel, A. (1997). *Álgebra intermedia*. México. Prentice Hall.

Baldor, A. (2002). *Álgebra*. México. Publicaciones cultural.

Barnett, R. (1988). *Álgebra y trigonometría*. México. Mc Graw – Hill.

Carpinteyro, E. y Sánchez, R. (2003). *Álgebra*. México. Cultural.

Cruz, T. (1999). *Álgebra con aritmética. Un enfoque moderno*. México. Edimaf

Cuéllar, J. (2004). *Álgebra*. México. Mc Graw – Hill.

De Oteyza, E., et.al. (1996). *Álgebra*. México. Prentice Hall.

Fuenlabrada, S. (2000). *Aritmética y álgebra*. México. Mc Graw – Hill.

García, M. y López, G. (2003). *Aritmética y álgebra*. México. Esfinge.

Gustafson, R.D. (1996). *Álgebra intermedia*. México. Thomson.

Rees, P. y Sparks, F. (1960). *Álgebra*. México. Reverté.

Además:

Alarcón, J., et.al. (1994). *Libro para el maestro. Educación secundaria. Matemáticas*. México. S.E.P.

Programa de estudio de la asignatura de Álgebra, para los CECyT's del IPN. 2001.

Programa operativo para la planeación didáctica de Matemáticas IV para las Escuelas preparatorias incorporadas a la UNAM. Plan 1996.