**Instituto Politécnico Nacional**

**Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada**

# "Las Ecuaciones Diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme"

**Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemática Educativa.**

PRESENTA:

***Marco Antonio Hernández Rodríguez***

**Directora de tesis: Dra. Patricia Camarena Gallardo**

**Enero de 2009 ,México D. F.**

SIP-14

# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
## SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

*ACTA DE REVISIÓN DE TESIS*

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 20 del mes de noviembre de 2008 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme"

Presentada por el alumno:

| Hernández | Rodríguez | Marco Antonio |
|---|---|---|
| Apellido paterno | materno | nombre(s) |

Con registro:

| A | 0 | 3 | 0 | 2 | 1 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Patricia Camarena Gallardo

Director de tesis

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dra. Cecilia Rita Crespo Crespo

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dra. Gabriela Buendía Ábalos

Dr. Gustavo Martínez Sierra

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 14 del mes Noviembre del año 2008, el que suscribe Marco Antonio Hernández Rodríguez alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A 0 3 0 2 1 9 , adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dra. Patricia Camarena Gallardo y cede los derechos del trabajo intitulado , "Las Ecuaciones Diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme" al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección Nogal No.36 Fraccionamiento San Rafael Tlalnepantla Estado de México c.p. 54120. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Marco Antonio Hernández Rodríguez

## ÍNDICE

**CONTENIDO** **PÁGINA**

## GLOSARIO

**Actividad de aprendizaje.-** Consiste en un grupo de actividades planeadas y organizadas de acuerdo a los componentes epistemológico, didáctico y cognitivo presentes en un sistema docente.

**Constructivismo.-** Los constructivistas creen que los humanos construyen todos los conocimientos en sus mentes al participar en experiencias seguras; el aprendizaje ocurre cuando uno construye sus propios mecanismos para aprender y su propia versión del conocimiento.

**Epistemología**.- Las raíces etimológicas de Epistemología provienen del griego ep.st.µ. (*episteme*), conocimiento, y - (logía) estudio. La epistemología estudia la naturaleza y validez del conocimiento. También ha sido llamada *Teoría del conocimiento* (términos más comúnmente usados y difundido por los alemanes e italianos), o *gnoseología* (utilizado frecuentemente por los franceses). En las últimas décadas también es conocida como *filosofía de la ciencia*.

**Epistemología genética**.- En donde plantea cómo inicia el conocimiento y cómo se desarrolla en el individuo.

**Ingeniería didáctica.-** Surge a principios de los años 80s, al seno de la didáctica de las matemáticas francesa, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de situaciones didácticas y de la transposición didáctica. El nombre de Ingeniería didáctica surge de la analogía con la actividad de un ingeniero, pues no sólo se apoya en resultados científicos, sino que demanda de la toma de decisiones y el control de los diferentes componentes del proceso.

**Teoría de la matemática en el contexto de las ciencias**.- Se fundamenta en la función específica que tiene la matemática en el nivel superior en carreras donde no se van a formar matemáticos y unos de los paradigmas dice que los conocimientos nacen integrados. Dentro de la teoría de la matemática en el contexto se tienen 5 fases las cuales son: curricular, didáctica, epistemológica, formación de docentes y cognitiva.

**Teoría de la transposición Didáctica.-** Según (Chevallard, 1997) el saber se presenta mediante textos de saber; estos tienen como una de sus características, la de seguir un orden lógico en la presentación de los saberes. Todo discurso tiene un principio y un fin (autocontención de los textos del saber) y opera en un encadenamiento lógico de razonamientos. Este mecanismo está presente en los diversos niveles: desde el más elemental en donde se alude a cierto orden que es el adecuado en la presentación de los contenidos hasta el más sofisticado, que se encuentra en la presentación axiomática de las matemáticas.

# Índice de tablas

## Índice de figuras

## Índice de fotos



## Gráficos

## Resumen

Históricamente hablando la matemática dentro de otras áreas del conocimiento es utilizada como una herramienta de apoyo. En este sentido, se están impartiendo los cursos de ecuaciones diferenciales como una serie de procedimientos los cuales están destinados a resolver propiamente las ecuaciones (Zill 2006), es decir, que el objetivo final de los procedimientos usados en los cursos de ecuaciones diferenciales es obtener la solución general y particular de la ecuación diferencial proporcionando las condiciones iniciales, además se presentan muy pocas aplicaciones a los estudiantes, y si se llega a éstas en muchos de los casos son artificiales. Tomando como base este contexto se desea realizar una propuesta nueva de enseñanza de las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme. Para realizar este trabajo se tomaron en cuenta algunos trabajos de investigación en relación con la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, entre los que destacan los de Barajas (1998), Herrera (1992 y 1996) y Camarena (1987). La finalidad del trabajo de investigación es el diseño una serie de actividades didácticas de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en el contexto de la física, tomando en cuenta los conocimientos previos, las representaciones, así como las creencias de los alumnos.

Se incluyen en el diseño de las actividades tres de los fenómenos más conocidos en física que son: desplazamiento, velocidad y aceleración. Para el diseño de las actividades se toma en cuenta los tres componentes básicos en matemática educativa que son: epistemológico, cognitivo y didáctico. El marco teórico que sirve a esta investigación es la teoría denominada “La matemática en el contexto de las ciencias” (Camarena 1987, 1995, 2001, 2005). Se aplicaron las actividades didácticas a alumnos de ingeniería de nivel superior, finalmente se realizo un análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes y se obtuvieron las conclusiones generales del trabajo.

## *Abstract*

*In this thesis work the theorical mark decides the Mathematics in the Sciences context theory, which fundaments the work. In this thesis is given the methodology utilizes a long the work for the development to fundamental the aspects of epistemologic kind, cognitive and didactive that prevail an will fundamental the outline of the didactical activities, it summarizes some the epistemologic,didactig and cognitives obstacles in the apprenticeship of the differential equations. The outlines of the didactical activities, which were elavorated considerating basically the four components studied to know the necessities of the pupils, according to the necessary understanding to solve the didactical activities an finally develop the didactic activities of displacement, velocity and aceleration considering, the mathematics in the science context theory wich is based in the scientific method. At next is faused to define which are the conditions for the setting of the didactical activities. Finally is realized an analysis of cuantitative an cualitative kind of didactic activities performed, and establish the general conclusion of the aplication of the didactic activities as well as the suggested recommendations for future works.*

# 1.-La problemática por abordar

## 1.1.-Introducción.

La matemática educativa en la actualidad está trabajando para que la matemática tradicional sea más accesible a cualquier persona que desee introducirse en esta materia, la matemática en las escuelas de nivel medio superior y superior es considerada como una materia básica, la cual se utiliza como una herramienta durante la formación de los estudiantes, es por esta razón que este trabajo pretende contribuir al diseño de actividades de aprendizaje las cuales permitan al estudiante introducirse de una manera fácil al significado y concepto de ecuación diferencial.

## 1.2.-El problema

> *A nivel mundial, es conocido el hecho del alto índice de reprobación en las asignaturas de matemáticas en áreas de ingeniería, la reprobación es sólo un síntoma de toda la problemática. En este conflicto inciden muchos factores de tipo social, económico, de orden curricular, asociados a la didáctica, que contribuyen en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas, relacionados a la formación de los docentes inferidos al propio tema de estudio, por causas de la infraestructura cognoscitiva de los alumnos, etc. (Camarena, 1984).*

Otro aspecto que influye en el aprendizaje es la poca motivación que demuestran los estudiantes al realizar alguna actividad matemática, esto debido a la falta de trascendencia de los resultados obtenidos del procesamiento a partir de los datos iniciales. Los alumnos perciben a la matemática como una serie de procedimientos definidos que nos permiten encontrar resultados que son aplicados en ciertas áreas bien definidas, pero que tales aplicaciones no encuentran cierta continuidad con los temas vistos en el programa de estudio. Es por este motivo que se tomarán nuevos paradigmas de enseñanza y de aprendizaje de la matemática. El desarrollo de las actividades se llevará acabo manejando tres fenómenos fundamentales en física que son: desplazamiento, velocidad y aceleración. El alumno se encontrará inmerso en una situación problemática en donde tendrá que utilizar parte del bagaje de conocimientos que posee y además se le guiará en la solución del problema planteado mediante el uso de la metodología de la matemática en contexto con este enfoque el estudiante obtendrá soluciones más relevantes dentro de su contexto de vida, de tal manera que los conocimientos adquiridos sean significativos.

## 1.3.-La Justificación

En la actualidad la educación si bien ha sufrido cambios en varios ámbitos desde el nivel primario hasta el nivel licenciatura, los ajustes han sido básicamente en como los docentes deben abordar las diferentes temáticas que se incluyen en los programas de estudios, así como las nuevas modalidades de aprendizaje en muchos ámbitos de estudio como son los cursos de formación vía Internet. En la enseñanza de las matemáticas se han implementado nuevas modalidades de enseñanza que van desde los cursos en línea hasta los cursos tutoriales utilizando los equipos de cómputo. Aunque se han tenido avances en el aspecto docente didáctico, aún se presentan ciertos problemas de integración de los conocimientos adquiridos por los estudiantes a su vida diaria, es por esta razón que es necesario el diseño de materiales didácticos que permitan la interiorización de los procesos cognitivos de los alumnos que estudian matemáticas, los cuales puedan subsanar estas deficiencias en el nivel profesional, y que los profesionales egresados de las diferentes universidades sean formados dentro de un nuevo paradigma de aprendizaje, que consiste en la integración de los diferentes conocimientos adquiridos durante su formación. Dentro de la formación de los profesionistas en las carreras de físico-matemáticas y las ingenierías se imparte la materia de ecuaciones diferenciales, la cual es fundamental en la capacitación profesional del estudiante en proceso de formación. Actualmente se están impartiendo cursos de ecuaciones diferenciales los cuales están plagados de muchos procedimientos matemáticos los que el alumno tiene que aprender y memorizar, pero que carecen de aplicaciones reales, es por estas razones que se realiza una propuesta de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en el ámbito del movimiento uniforme, es decir se pretende enseñar las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, pero teniendo como contexto una materia que sirve de motivación para el alumno en su aprendizaje que en este caso será la física, esta propuesta contempla el diseño de actividades de aprendizaje incluyendo fenómenos comunes y corrientes como son el desplazamiento, velocidad y aceleración.

## 1.4.-Objetivos y Metas.

Esta investigación se centrará sobre el diseño, prueba e implementación de actividades de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales de primer y segundo en el contexto de la física, ésta última es una de las materias básicas de las carreras de ingeniería. La física, la matemática y la química constituyen materias fundamentales en la formación de los estudiantes y son estas materias las que se estudian desde el nivel secundario y en algunos casos continúan siendo profundizadas en sus contenidos a lo largo de la formación de los estudiantes y los futuros profesionales que requiere México. Es por esta razón que se seleccionó la física como una materia clave en el diseño de las actividades didácticas, también la física es una materia que se puede observar a diario en los fenómenos naturales, las cuales podemos observar a nuestro alrededor, como por ejemplo el desplazamiento o movimiento de cualquier objeto. El estudio de las ecuaciones diferenciales en las matemáticas que se imparten actualmente aborda aplicaciones de la física, pero tales aplicaciones no toman relevancia en un contexto aislado, por lo que el estudiante al abordar las aplicaciones físicas las ve un tanto desvinculadas de su realidad, es por esta razón que existe la necesidad de poder vincular la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ligándolas con fenómenos físicos comunes tales como el desplazamiento, la velocidad y la aceleración. En otro aspecto la física y las matemáticas son consideradas en el currículum de las escuelas como ciencias básicas tanto de educación media básica así como de universidades, éstas materias se imparten desvinculadas, lo que realiza nuestra propuesta consiste en relacionar a la matemática con la física construyendo actividades didácticas que faciliten el entendimiento del concepto de ecuación diferencial en el contexto de una situación problemática.

Esto aunado a que en la mayoría de los cursos de matemáticas se tratan muchos procedimientos los cuales tiene poco o ningún significado para los alumnos, inclusive al alumno hace preguntas al profesor tales como: ¿Para que me servirán las ecuaciones diferenciales?, ¿Dónde voy a utilizar las ecuaciones diferenciales?, es decir el alumno esta buscando significado a lo que aprende en la escuela, y el profesor responde: "más adelante en cursos de aplicación le encontraras su uso", es por eso que es necesario rediseñar nuevos tipos de cursos para la enseñanza de las matemáticas dentro de un marco real de aplicación. También existe la necesidad de preparar profesionales de acuerdo a un campo específico de especialización, el cual le permitirá al nuevo profesional tomar las mejores decisiones en el área particular donde se desempeñe. Uno de los temas menos comprendidos es el de las ecuaciones diferenciales, (Cuevas, p 16, 1992) él afirma

> "*Hemos visto que la psicología clásica, se fundamenta en el mecanismo de crear una imagen rígida de una operación, ésto trae consigo la adquisición de hábitos. Dos observaciones podemos hacer de esta adquisición de hábitos: primero se observa que aún habiendo automatizado el proceso para resolver algún problema, digamos el de resolver una ecuación diferencial, el alumno no entiende lo que hace, repite mecánicamente lo expuesto en clase*",

Y dentro de éstas se encuentran desde las más simples que son las ordinarias de primer y segundo orden hasta las derivadas parciales de orden enésimo**.** Los temas de derivada e integral, son de fundamental importancia en cuanto al entendimiento de las variables y su comportamiento de cambio en el tiempo de cualquier fenómeno dentro de la vida real, como ejemplo veamos la velocidad y la aceleración de un cuerpo, donde estos fenómenos los podemos representar mediante ecuaciones diferenciales, los cuales se pueden mostrar mediante un modelo matemático que se aproxime más al comportamiento del fenómeno en la realidad. La falta de significado que le atribuye el alumno a una ecuación diferencial es debido a su falta de contexto, es en éste en donde al alumno percibe de una manera más clara el comportamiento y significado de una ecuación diferencial, es la física la que se seleccionó en este caso para abordar la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, y en donde se guiará al alumno dentro de una situación problemática y por tanto se pretende lograr que el alumno posea un significado claro entre el concepto de ecuación y el fenómeno estudiado. La matemática en el contexto de las ciencias es una teoría donde se han realizado bastantes estudios comprobándose los beneficios sustanciales en el aprendizaje de los alumnos los cuales nos permiten tener resultados promisorios (Camarena 1987, 1990, 2002). La investigación pretende lograr una visión diferente de la enseñanza de la matemática, en donde la física ocupa un lugar preponderante dentro de la enseñanza de las matemáticas

Basados en la descripción del problema de investigación se plantea la siguiente pregunta la cual de alguna manera cuestiona sobre lo que se pretende realizar.

¿Cómo diseñar actividades didácticas en el contexto de la física que vinculen las ecuaciones diferenciales lineales de primer y segundo orden con el análisis movimiento uniforme, que conduzcan al alumno a la comprensión del significado y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales lineales, tomando en cuenta los conocimientos previos, las representaciones y las creencias?

Esta pregunta centrará la atención en aspectos fundamentales los cuales se abordarán y tratarán a lo largo de la investigación, además nos servirá de guía para poder evaluar los pasos seguidos durante el proceso de estudio desde el planteamiento de las necesidades, diseño de la actividad, puesta en escena, análisis cualitativo y conclusiones.

**Objetivo General**

**"Diseñar una serie de actividades didácticas de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto de la física, en las cuales se tomarán en cuenta las siguientes características de los alumnos: conocimientos previos, representaciones y creencias lo conducirán a la comprensión del significado y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales lineales"**

Para poder lograr el objetivo general planteado anteriormente se definen los objetivos particulares los cuales se pretenden alcanzar durante la presente investigación.

A)Determinar los conocimientos previos del alumno sobre los temas de cálculo diferencial e integral, así como el concepto de ecuación diferencial.

B)Identificar en el alumno la relación cuantitativa y cualitativa entre las ecuaciones diferenciales ordinarias de primero y segundo orden en el fenómeno de movimiento en el plano cartesiano.

C)Determinar cuáles son algunos procedimientos llevados acabo por el alumno en la solución de problemas de fenómenos de movimiento en el plano cartesiano.

D)Analizar las diferentes formas que usan los alumnos en la representación de un problema de movimiento en el plano cartesiano usando las ecuaciones diferenciales.

E)Determinar las estrategias utilizadas por los alumnos en la de solución de problemas de movimiento en el plano cartesiano utilizando las ecuaciones diferenciales.

F)Evaluar cuáles son las creencias de los alumnos en relación con las ecuaciones diferenciales y su relación con el movimiento en el plano cartesiano.

G)Analizar los aprendizajes logrados por los alumnos usando ejercicios preparados en la enseñanza del movimiento en el plano cartesiano

La investigación pretende adicionalmente realizar una evaluación general en varias áreas del aprendizaje y comprensión humana las cuales son: metacognición, epistemológica, heurística de la solución de problemas, creencias del alumno en cuanto a los problemas y soluciones, así como las representaciones que hacen los alumnos de las ecuaciones diferenciales aplicados en un fenómeno físico.

## 1.5.- Antecedentes

### 1.5.1-Trabajos en matemática educativa

El análisis lo dividiremos en dos partes la primera incluye la descripción de trabajos de tesis de matemática educativa y la segunda abarca el conjunto de artículos de matemática educativa.

El trabajo más antiguo en relación con la enseñanza de las ecuaciones diferenciales es el llamado "Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos" (Camarena, 1987), este trabajo permite la construcción de las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos de los distintos temas de circuitos eléctricos, en éste curso se realiza la explotación de los fenómenos de circuitos eléctricos, esto crea una motivación en el alumno durante la impartición del mismo, en el desarrollo se hace uso de todas las ecuaciones diferenciales utilizadas en un curso ordinario, además es importante mencionar que el curso está diseñado para que el aprendizaje ocurra de forma natural, esto debido a que el curso se imparte dentro del contexto de los circuitos eléctricos. El trabajo realiza un importante tratamiento didáctico en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Casi paralelamente en el trabajo denominado "Las ecuaciones diferenciales ordinarias en las escuelas de Ingeniería Civil un doble estudio de evaluación curricular" (Castro, 1987), el proceso de estudio comprende el análisis que se hace de los alumnos de los conocimientos de algunos conceptos como: función, derivada e integral, posteriormente el autor diseña y aplica una serie de actividades de aprendizaje las cuales concluye favorecen el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

En el año 1992 en el trabajo llamado: "Modelo didáctico para un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias", (Herrera, 1992), Usa los principios definidos por Piaget para el diseño de algunas actividades de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, este trabajo incide fundamentalmente en el campo cognitivo y didáctico.

En el mismo año de 1992 "La interpretación fusi como una alternativa didáctica de las ecuaciones diferenciales" (Filo, 1992), es el primer trabajo que construye modelos matemáticos a través de una problemática definida en el ámbito de la física, entre los fenómenos físicos que incluye se encuentran el del movimiento de una partícula y la caída libre de un cuerpo en el plano.

La investigación del trabajo titulado "Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso matemático escolar; la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar" (Pulido, 1998), usa una visión epistemológica de los diferenciales, plantea algunos aspectos de ecuaciones diferenciales en el contexto donde surgieron (Clairaut,Euler,Lagrange), se hace uso de varios aspectos en la descripción de los fenómenos estudiados y realiza un estudio de la integral de línea, superficie y volumen, el trabajo resalta algunos aspectos Epistemológicos de los diferenciales enfocados a la explicación de las ecuaciones diferenciales en el contexto de la física.

Finalmente en el año 2000 el trabajo llamado "Análisis de textos para ingeniería (un breve estudio sobre las cantidades en movimiento)" (Camacho, 1992), realiza un estudio detallado de la variabilidad de los fenómenos físicos y el planteamiento de la ecuación diferencial que lo describe, hace énfasis sobre los aspectos geométricos del manejo de la serie de Taylor.

En lo que se refiere a los artículos de investigación, se pueden agregar los siguientes aspectos: En el trabajo denominado “Ecuaciones diferenciales con aplicaciones”, (Martínez 2002), el autor muestra evidencias de la correlación que existe entre la motivación del estudiante y la presentación por parte del docente de los ejemplos que se relacionan con la matemática y con otras asignaturas de la carrera de ingeniería. En otro artículo llamado “Un análisis del significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales “, (Buendía,2002), presenta el estudio de la resignificación de las ecuaciones diferenciales apoyada en argumentos de tipo gráfico, relacionándolo con la familia de soluciones y las condiciones iniciales , esta propuesta incide directamente en la generación de significados de los libros de texto, tanto de matemáticas como de física, define las características generales de las condiciones iniciales para varios casos e identifica las propiedades visuales de las condiciones iniciales de tal forma que se puedan vincular algebraicamente tales propiedades y deja abierta el diseño de una secuencia didáctica para identificar algunos puntos de referencia. Mientras que en la investigación “Ecuaciones diferenciales y cinética química”, (Martínez,2002), el autor trabaja los temas matemáticos a través del modelado de problemas y su relación con las diferentes materias dentro de la formación del estudiante, incluyendo problemas del área de ingeniería química. Por otro lado Oviedo en “Un problema motivador para un trabajo interdisciplinario en matemática y física”, (Oviedo, 2004), plantea una serie de estrategias problemáticas en física y donde los alumnos utilizan a la matemática para poder resolverlos, tales problemas incluyen problemas de mecánica como el movimiento oscilatorio armónico y la resonancia, otro trabajo en ese mismo sentido es el que tiene como título “El tratamiento de fenómenos físicos para aprender matemáticas”, (Ramírez, 2005), en donde diseña una serie de actividades de aprendizaje que incluyen tres fases denominadas el trabajo, la confrontación y la experimentación, dentro de estas tres fases trata de confrontar los aprendizajes realizados por el alumno dentro de un marco sociocultural, para llevar acabo esta confrontación el autor utiliza problemas de física. En el ámbito de las condiciones iniciales el reporte denominado “Elementos socioepistemológicos de las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales lineales”, (Buendía, 2005), la autora realiza un análisis de elementos socioepistemológicos donde toma los contextos analítico, gráfico y físico de las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, también considera el comportamiento de las ecuaciones diferenciales en relación con los modelos, la relación de linealidad, la graficación y la predicción del comportamiento de la gráfica. Mientras que el trabajo de Fascella “Utilización de un modelo de crecimiento económico para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales”, (Fascella, 2006), realiza una investigación de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales vinculados con la economía, esta vinculación reditúa, según indica la autora muchas ventajas. Finalmente los trabajos de Camarena (2004) “La transferencia de conocimiento: Ecuaciones diferenciales parciales hacia una cuerda vibrante” (2004), ”Hacia la integración del conocimiento” (1999), ”La modelación matemática en las carreras universitarias” (2005), “La serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa” (Camarena y Muro, 2004), en estos artículos define una situación problemática en un contexto específico a través de la matemática en contexto, la cual es abordada hasta llegar a la interpretación de la solución en términos del problema inicialmente planteado, en estos trabajos Camarena plantea el modelo matemático del fenómeno estudiado y resuelve la ecuación diferencial planteada bajo ciertas condiciones iniciales preestablecidas. Se

puede decir que en estas últimas investigaciones se hace énfasis sobre los contextos de la matemática, los cuales son diversos, así como en los beneficios en la motivación e integración de los conocimientos en el estudiante.
En general los artículos de investigación en materia de las ecuaciones diferenciales hacen énfasis sobre el contexto del problema, también consideran los contextos gráfico, analítico y físico en el aspecto de análisis de las propiedades y de las condiciones iniciales aplicadas en las soluciones de las ecuaciones diferenciales

### 1.5.2.-Características de los libros de texto de ecuaciones diferenciales

Ahora dentro del análisis bibliográfico realizaremos una revisión de las características sobresalientes en los libros de texto de ecuaciones diferenciales.

Los textos de ecuaciones diferenciales revisados inician con definiciones básicas de las ecuaciones diferenciales en cuanto al orden, grados, variables utilizadas (dependiente e independiente), derivadas ordinarias o parciales. Se realiza la presentación del significado gráfico de lo que representa resolver una ecuación diferencial, el concepto de la constante de integración y el de las condiciones iniciales para definir finalmente la ecuación particular que determina el comportamiento del fenómeno estudiado. En los aspectos históricos solo dos o tres libros (Boyce-Diprima, 1992, Ince, E. 1939), dan una reseña histórica completa de cómo surgen las ecuaciones diferenciales los demás textos se limitan a realizar una lista breve de las aportaciones de cada autor.

Algunos textos como los de (Trench, 2001), (Choud, 2005),(Stroud, 2005) se concretan a realizar una descripción de los procedimientos utilizados en las diferentes ecuaciones diferenciales que se puedan presentar, destina los primeros capítulos para estudiar aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en varios campos de aplicación que van desde la Administración, Ingeniería, Física, Construcción, etcétera, aunque algunos textos más actualizados tratan de introducir una variedad aplicaciones a lo largo de su desarrollo (Spiegel, 1981, Zill, 2006 ). Algunos aspectos que son relevantes en el tratamiento de las ecuaciones diferenciales son: Las ecuaciones diferenciales se ven de forma muy aislada con relación a su contexto, la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, más bien se ve centrada en la enseñanza de procedimientos en los cuales se instruye a los alumnos, el significado conceptual gráfico de la solución de una ecuación diferencial está casi ausente y se ve limitado a las soluciones que se presentan en las aplicaciones, aunque en la actualidad existen uno o dos textos que hacen énfasis sobre los aspectos gráficos de las ecuaciones diferenciales (Loumen, 2000, Zill 2006).

Euler incluyo una clasificación de las ecuaciones diferenciales que perdura hasta nuestros días. Cauchy posteriormente agrega la los conceptos de Euler el concepto de derivada, no es sino Lacroix (1837) quien trata de ensamblar varios descubrimientos realizados por investigadores europeos, es Lacroix el primer maestro que trata de reunir los conocimientos existentes hasta ese tiempo y darles un enfoque de tipo pedagógico. Es observable que la mayoría de los libros de texto están plagados de procedimientos algorítmicos y los aspectos de tipo gráfico o numérico están muy reducidos o bien están ausentes de los libros de texto. En cuanto a los temas de existencia y unicidad de las soluciones los autores nos remiten a textos de análisis matemático o de álgebra lineal. Los libros de texto analizados (Ayres,1969), (Blanchard,1996 y 1998), (Choud,2005), (Nagle,2001) dirigen más bien su atención a la solución de las ecuaciones diferenciales en lugar de al análisis de métodos generales o de propiedades generales de solución, así como aspectos de tipo cuantitativo en el análisis de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones.

Algunos textos de mediados del siglo XX empiezan a incluir el desarrollo de algunos métodos numéricos como es el de Runge Kutta, así como algunos métodos de tipo operacional que se gestan en el siglo XIX con los trabajos de Heaviside (operador D), y su función impulsiva. Es hasta 1940 que aparece en los libros de texto la Transformada de Laplace la cual se utiliza para simplificar las ecuaciones diferenciales ordinarias y darles solución con los métodos de solución más simple. Los libros analizados (Bevering,1997),(Spiegel,1981) manejan un predominio de tipo algebraico en su gran mayoría y poco son los que trabajan aspectos de tipo numérico y geométrico. La mayoría de los textos inicia con una serie de definiciones entre las que se encuentran ecuación diferencial, solución de ecuación diferencial, orden, grado, familia de soluciones, interpretación geométrica, etcétera, continuando con el tema de separación de variables. Existen muchos libros que tratan las ecuaciones diferenciales haciendo uso del campo de pendientes y curvas isoclinas como aparecen en los libros (Abell,1996), (Zill,2006), (Davis,1992), también hay algunos libros los cuales tratan las ecuaciones diferenciales con curvas isoclinas y campos de direcciones y van más allá hasta extendiendo sus resultados hasta las ecuaciones diferenciales de segundo orden (Ayres,1969), (Blanchard,1996 y 1998), (Choud,2005),(Nagle,2001). También se pueden observar que algunos libros que tratan de explotar el aspecto numérico de la solución de ecuaciones diferenciales entre los que tenemos (Stroud,2005), (Nagle,2001), y en algunos textos se usa el nivel de programación, aunque esta es limitada en los textos (Bevering,1997), (Spiegel, 1981). El libro que ofrece mas novedades en este ámbito es (Derrik/Grossman, 1997). Los ámbitos de aplicación que algunos libros son por ejemplo en ingeniería eléctrica (Derrik/Grossman, 1997), fenómenos físicos, biológicos, velocidades de reacción química etcétera, textos como (Boyce-Diprima, 1992), y el (Braun,1976), contiene aplicaciones de los sistemas lineales y la ingeniería de control el cual es distinto en lo que se refiere al discurso matemático escolar, también es importante mencionar que el texto (Zill, 2006), el cual trata distintas aplicaciones en distintos ámbitos, lo que lo hace novedoso es que al final de cada capítulo es el modelaje de los fenómenos aplicados, este texto es el que más prefieren los profesores para guiar sus cursos.

La Transformada de Laplace es un tema que se inventa en 1937 por Doetsch y se trata en varios textos como un método alternativo en la solución de ecuaciones diferenciales (Kreysig,1988), (O’Nell,1995), la transformada la aplican mas bien en la solución de algunos problemas de ingeniería eléctrica.

Del análisis anterior se pude realizar una propuesta de Transposición Didáctica en cuanto a los aspectos básicos de la enseñanza de los cursos de ecuaciones diferenciales. Esta propuesta se puede integrar de la siguiente manera: Introducción, definiciones de tipo geométrico, algebraico y numérico, la parte geométrica manejaremos campos de pendientes, isoclinas. En las propuestas de solución de las ecuaciones diferenciales se utilizan predominantemente los aspectos geométricos, en la pare numérica se requiere hacer énfasis sobre los aspectos geométrico, algebraico y numérico como elementos de interrelación en el planteamiento y la solución de la ecuación diferencial, además en el aspecto algebraico incluir los diferentes métodos contemplados en el programa de estudio de la materia. La intención de construir otra manera de impartir la materia es tratar de dar mayor significado a las expresiones algebraicas como soluciones y traer con esto una representación espacial del significado de la solución, así como su aproximación numérica. Es evidente que con este enfoque los alumnos tendrán una transición más suave en la integración de su curso de ecuaciones diferenciales, a las otras materias que consolidan su formación y donde el objeto de ecuación diferencial adquiere un mayor significado en la aplicación práctica.

### 1.5.3.-Uso de las ecuaciones en los libros de texto de física

Ahora nos detendremos a realizar un análisis de los libros de texto de física los cuales manejan ecuaciones diferenciales en su contenido, principalmente de los fenómenos de movimiento de partículas entre los que tenemos inicialmente (Gettys,2005), (Ercilla, 2006), (Cutnell,2004), éstos textos realizan un tratamiento de los fenómenos de movimiento de los que se de los que se pueden mencionar los siguientes elementos:

1.-Las expresiones que se usan para describir el movimiento son de tres tipos:

- Ecuación polinomial que puede ser de primer o segundo orden.
- La velocidad instantánea, es planteada en función de diferenciales que son el de desplazamiento y tiempo, incluyendo el concepto de límite cuando el tiempo se aproxima a cero.
- La aceleración instantánea es presentada como una expresión de un límite de un cociente de la velocidad y el tiempo cuando el tiempo tiende o se aproxima a cero.
- Se plantean finalmente expresiones de cálculo para el caso de la aceleración constante, donde se calculan, velocidad final, desplazamiento, velocidad media entre algunas de las variables más importantes.

2.-Los textos dejan planteado el fenómeno de movimiento en términos de una ecuación diferencial.

Ahora se presenta una tabla en donde se resumen las representaciones que muestran los libros de física de las ecuaciones diferenciales usadas en fenómenos de movimiento tabla 1.

**Tipos de ecuaciones diferenciales usadas en los libros de física.**

| | Fenómeno estudiado | Tipo de ecuación diferencial | |
|---|---|---|---|
| | | Primer Orden | Segundo orden |
| Movimiento Rectilíneo | Velocidad Promedio | $\int_{xo}^{x} dx = \int_{to}^{t} vdx$ | |
| | Velocidad instantánea | $v = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta v / \Delta t$<br>$v = dx / dt$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Aceleración promedio | | $\int_{vo}^{v} dv = \int_{to}^{t} adt$ |
| | Aceleración instantánea | | $a = \lim_{\Delta t \to o} \Delta v / \Delta t$<br>$a = d^2 x / dt^2$ |
| Movimiento Circular | Velocidad promedio | $\int_{\theta o}^{\theta} d\,\theta \;=\; \int_{to}^{t} wdt$ | |
| | Velocidad instantánea | $w = \lim_{\Delta t \to o} \Delta \theta / \Delta t$<br>$w = d\theta / dt$ | |
| | Aceleración promedio | | $\int_{wo}^{w} dw = \int_{to}^{t} \alpha dt$ |
| | Aceleración instantánea | | $\alpha = \lim_{\Delta t \to o} \Delta w / \Delta t$<br>$\alpha = d^2\theta / dt$ |

Tabla 1

Analizando la tabla anterior se puede observar que las velocidades tanto promedio como instantánea de movimiento rectilíneo o circular se trata de ecuaciones ordinarias de primer orden; es observable que el concepto de velocidad instantánea se explica usando el concepto de límite. En el caso de la aceleración, la ecuación diferencial es la ordinaria de segundo orden; es notorio que la aceleración instantánea queda también definida usando el concepto de límite.

Delimitando el tipo de ecuación diferencial tanto de movimiento rectilíneo o circular es importante mencionar que los textos escasamente manejan el concepto de velocidad o aceleración variable, es decir solo algunos libros de texto de física tratan tanto a la velocidad como a la aceleración como funciones las cuales pueden ser derivadas e integradas, para posteriormente aplicar ciertas condiciones iniciales definidas por el problema en particular, lo que permite determinar de manera particular el comportamiento del fenómeno en estudio.

## Variables utilizadas en los libros de texto de física

Las variables importantes dentro de los libros de texto de física son las que se muestran en la tabla 2.

**Variables utilizadas en los libros de texto de física.**

| Nombre de la variable | Símbolo utilizado |
|---|---|
| Desplazamiento lineal | x |
| Desplazamiento angular | θ |
| Velocidad lineal | v |
| Aceleración lineal | a |
| Velocidad angular | w |
| Aceleración angular | α |
| Tiempo | t |

Tabla 2

Es evidente que el parámetro más importante a considerar en el estudio es el tiempo, esto es debido a que los fenómenos de desplazamiento, velocidad y aceleración ocurren en un intervalo de tiempo determinado, así mismo el tiempo es la variable común para todos los fenómenos estudiados.

## 1.5.4.- Resumen de los antecedentes de las ecuaciones diferenciales.

Los trabajos de matemática educativa sobre ecuaciones diferenciales aportan la interrelación que debe existir entre los aspectos algebraico, gráfico y numérico, así como la necesidad de contextualizar las ecuaciones. En cuanto a los libros de ecuaciones diferenciales, la mayoría se concreta a la exposición de los métodos de solución con aportaciones geométricas, gráficas y numéricas. Algunos textos (Beverlywest,1997), (Spiegel,1981), (Stroud, 2005) explican las aplicaciones utilizando los métodos numéricos. En lo que se refieren al uso de las ecuaciones diferenciales en los libros de física, las ecuaciones diferenciales son tratadas de forma muy superficial en cuanto a la relación con el fenómeno físico estudiado, se observa que los textos de física hacen un breve énfasis entre lo que significa una ecuación diferencial y su correspondiente solución particular. En específico, se puede decir que el fenómeno no se clarifica en cuanto al entendimiento de las condiciones iniciales y la constante de integración obtenida y su significado en el contexto estudiado. Finalmente los programas de estudio que se estudiarán posteriormente en el análisis didáctico del presente estudio contienen una lista de métodos de solución de ecuaciones diferenciales, dando poca importancia sobre la relación algebraica y gráfica con el fenómeno físico estudiado, además las aplicaciones se ven relegadas al final de cada uno de los capítulos estudiados. Para el profesor es difícil terminar el temario de la materia debido a su extensión, además los temas finales de los libros de ecuaciones diferenciales que son: diferenciales parciales y sistemas de ecuaciones diferenciales es difícil llegar a ellos por las limitaciones de tiempo en el curso.

# 2.- Marco Teórico y Metodología

## 2.1.-Marco Teórico

### 2.1.1.-La matemática en el contexto de las ciencias.

### Introducción.

Existe una gran problemática en torno de la enseñanza de las matemáticas, esta problemática no es únicamente en los países subdesarrollados, sino que en los países en vías de desarrollo o desarrollados, también se presentan altos índices de reprobación el cual es un síntoma de la necesidad de desarrollar materiales de enseñanza de matemática educativa. La situación presente lleva a reflexionar sobre qué cambios se pueden realizar para mejorar o resolver la problemática anterior. Existen muchos problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, uno de ellos es la aversión que tienen los estudiantes a las matemáticas como lo menciona Camarena (1984) en los cursos que se imparten en las carreras de ingeniería. Esta forma de recibir los cursos posteriormente repercutirá en los futuros profesionales, pues no podrán modelar los fenómenos de la ingeniería, un aspecto clave dentro de esta reflexión es la integración de los cursos de matemáticas con las materias de ingeniería.

La matemática que se necesita en las escuelas de ingeniería es producto de un contexto del área de conocimiento donde se utiliza.

> *En el trayecto del tiempo la matemática ha perdido esta contextualización de su origen y se presenta como un conocimiento acabado, la cual presenta una formalidad matemática y una estructura la cual la hace demasiado abstracta para los estudiantes que tratan de utilizarla en su formación (Camarena, 2003).*
>
> *La Matemática en el Contexto de las Ciencias es una teoría que se concibe en 1982, la cual reflexiona acerca de la relación que debe existir entre la matemática y las diferentes ciencias que la requieran (Camarena, 1984,1987,1990,1995,1999,2001,2003,2005,2007).*
>
> *La teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias tiene como premisa que:*
>
> *Con los cursos de matemáticas el estudiante poseerá los elementos y herramientas que utilizará en las materias específicas de su carrera, es decir, las asignaturas del área de matemáticas no son una meta por si mismas sino una herramienta de apoyo a la carrera en estudio, sin dejar a un lado el hecho de que la matemática debe ser formativa para el alumno.*
>
> *La teoría de la matemática en el contexto aborda 5 fases:*
>
> *La curricular (desde 1984), la didáctica (desde 1987), la epistemológica (desde 1988), la de formación de docentes (desde 1990) y la cognitiva (desde 1992).*

Dentro de la matemática en el contexto de las ciencias, la fase didáctica posee una estrategia didáctica denomina la matemática en contexto, que presenta a los alumnos los conocimientos integrados a partir de cierta situación problemática en otras disciplinas, que al tratar el alumno de resolver y encuentra nuevos puntos de interés hacia la matemática que está estudiando, así como la necesidad de nuevos conocimientos matemáticos.

> *En el salón de clases están presentes los contenidos de las cinco fases y éstas interactúan entre sí en un ambiente social, económico y político; es decir, los cinco elementos no están aislados unos de los otros y tampoco son ajenos a las condiciones sociológicas de los actores del proceso educativo (Camarena, 1987), véase la figura 1.*
>
> *Fuente: Camarena (1990)*

***Terna dorada en la educación***

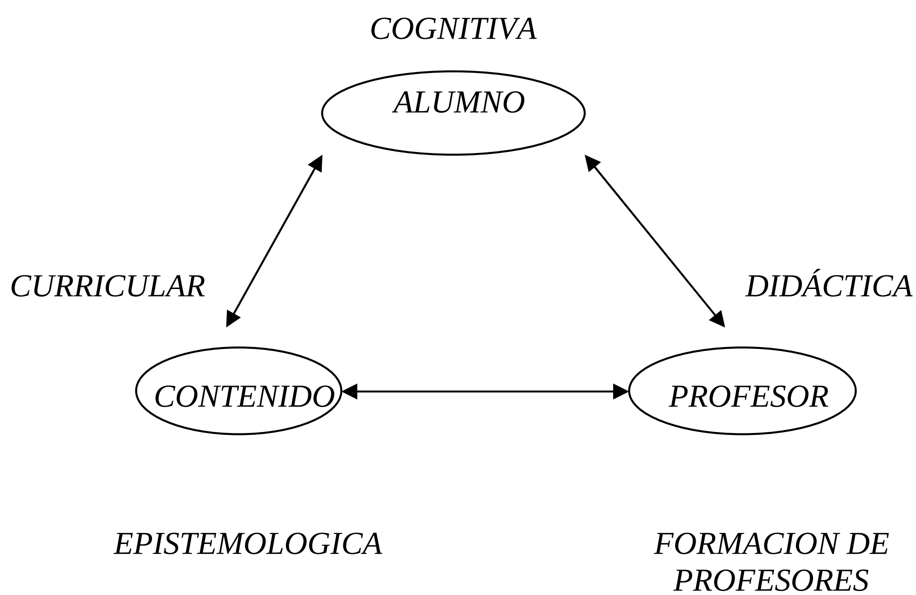



***Figura 1***

Entre los resultados más sobresalientes en la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias resalta la metodología curricular DIPCING, la cual establece un puente entre el contenido y el profesor, esta metodología permite el diseño de programas de estudio de matemáticas.

> *La metodología se fundamenta en el siguiente paradigma educativo: Con los cursos de matemáticas el estudiante poseerá los elementos y herramientas que utilizará en las materias específicas de su carrera, es decir, las asignaturas de matemáticas no son una meta por si mismas; sin dejar a un lado el hecho de que la matemática debe ser "formativa" para el alumno.*
>
> *Así mismo, la premisa alrededor de la cual gira la metodología es que: El currículo de matemáticas debe ser objetivo, es decir, debe ser un currículo fundado sobre bases objetivas.*
>
> *Para cumplir con la premisa dentro del marco del paradigma planteado, se cuenta con una estrategia de investigación dada en tres etapas: la central, la precedente y la consecuente (Camarena 1984).*
>
> *ETAPA CENTRAL*

> *Hacer un análisis de los contenidos matemáticos, tanto explícitos como implícitos, en los cursos específicos de la ingeniería.*
> *ETAPA PRECEDENTE*
> *Detectar el nivel de conocimientos matemáticos que tienen los alumnos a su ingreso a la carrera.*
> *ETAPA CONSECUENTE*
> *Realizar una encuesta a los ingenieros en ejercicio, sobre el uso que tienen de la matemática en su labor profesional.*

En la presente investigación, de las tres etapas del diseño curricular se utilizará la etapa central en donde se revisarán los libros de texto de ecuaciones diferenciales, libros de texto de física donde se utilizan las ecuaciones diferenciales, tesis de matemática educativa donde las ecuaciones diferenciales tiene predominancia y artículos de investigación realizados con el tema de ecuaciones diferenciales. Asimismo, de la etapa dos se aplicarán dos cuestionarios uno denominado preliminar en donde se detectarán las condiciones de los alumnos anteriores al diseño de las actividades didácticas; el cuestionario diagnóstico será un cuestionario en donde se detallarán algunos comportamientos de objetos matemáticos así como sus procedimientos de operación. La etapa tres no se utilizará pues sobrepasa el alcance de la presente tesis.

> *En la fase epistemológica de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias se han llevado a cabo investigaciones que han verificado cómo gran parte de la matemática que se incluye en los cursos de áreas de ingeniería nace en el contexto de problemas específicos de otras áreas del conocimiento y a través del tiempo pierden su conexión para ofrecer una matemática "pura" que es llevada a las aulas de clases sin que tenga sentido para los estudiantes que no van a ser matemáticos como lo describe Chevallard (Camarena, 2001).*
> *Hay situaciones en donde el ingeniero emplea procesos o métodos sin conocer su origen, la fase epistemológica de la Matemática en el Contexto de las Ciencias pone a la luz estas génesis, como el caso de las impedancias complejas en circuitos eléctricos (Camarena, 1987).*
> *También se ha determinado un constructo teórico denominado transposición contextualizada; en donde la matemática que han aprendido los estudiantes en la escuela sufre transformaciones para adaptarse a la forma de trabajar en otras ciencias, como el caso de la delta de Dirac para modelar una señal eléctrica impulsiva (Camarena, 1999).*
> *Los obstáculos epistemológicos, como han sido definidos por Brousseau (1983), se identifican en esta fase para ser usados en la planeación didáctica de los cursos, a través del diseño de actividades de aprendizaje que ayuden a enfrentar estos obstáculos (Camarena, 2001).*

Respecto a los estudios de origen cognitivo para la enseñanza de las matemáticas sobresale el de Duval en donde se presentan registros de tipo cognitivo de objetos matemáticos en los ámbitos de representación que son gráfico, algebraico y numérico, pero el grupo de la matemática en contexto ha encontrado un cuarto registro fundamental para el aprendizaje de las matemáticas y es el del contexto.

La fase de formación de docentes se realiza mediante la impartición de una especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica, en donde las asignaturas de matemáticas se ven vinculadas con otras disciplinas propias de la electrónica y sus áreas afines (Camarena, 1990).

La propuesta de la matemática en contexto se manifiesta en la generación de material didáctico para cursos en contexto como son: Ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos (Camarena, 1987), Análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales electromagnéticas (Camarena, 1990), Series de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa (Muro, 2002), y Cálculo vectorial en el contexto de la teoría electromagnética, La transformada de Laplace en el contexto de los circuitos eléctricos (Suárez, 2000).

La Matemática en Contexto motiva al estudiante en relación con los cursos que recibe los cuales entiende porqué se le imparten y cómo y dónde se les necesitará, ve a la matemática sin aplicaciones artificiales llegando a modelar de manera natural los problemas que en su vida profesional de la ingeniería se le lleguen a presentar (Camarena, 1987).

Las etapas de la matemática en contexto con la concepción que se ha dado (Camarena, 1997) son:

1.-Identificación de los problemas a abordar.
2.-Planteamiento del problema.
3.-Determinación de las variables y las constantes del problema.
4.-Incorporación e los temas y conceptos matemáticos.
5.-Determinación del modelo matemático.
6.-Solución matemática del problema.
7.-Determinación de la solución requerida por el problema.
8.-Interpretación de la solución en términos del problema.
9.-Descontextualización de la matemática.

Es importante mencionar que dentro de la matemática en contexto el paso de modelación es uno de los más importantes o centrales, en el sentido que sin ésta etapa es imposible resolver el problema.

La Matemática en Contexto toma el problema, lo resuelve e interpreta la solución, para lo cual se requiere del modelo matemático, el cual es la representación matemática del problema (Camarena, 1997).

Un aspecto descuidado en las carreras de ingeniería en el currículo son los modelos matemáticos, en la matemática en contexto se contempla en la fase didáctica la enseñanza de la deducción de modelos matemáticos y que su estudio al nivel superior es considerado como parte del currículo oculto (Camarena, 1984).

A través de la matemática en contexto se resuelven problemas contextualizados en otras áreas del conocimiento en problemas de la vida cotidiana y en la futura actividad laboral, situación que lleva a incorporar los elementos teóricos que intervienen en la teoría de solución de problemas. La necesidad de resolver problemas fue materializada por el Suizo George Polya (1976) el cual establece una metodología general en la solución la cual tiene los siguientes pasos: Comprender el problema, concebir un plan para llegar a la solución, ejecutar el plan, verificar el procedimiento y comprobar los resultados**.**

> *En la fase cognitiva la matemática en el contexto ayuda a que el alumno construya su propio conocimiento con relaciones firmes y duraderas y no volátiles, además refuerza los conocimientos y*

> *habilidades del alumno mediante el proceso de resolución de problemas (Camarena, 2001).*

En diferentes ámbitos de la ingeniería se usa la matemática en contexto (Camarena, 1987), la matemática en contexto aborda diferentes factores los cuales intervienen en la enseñanza de las matemáticas en las distintas escuelas de ingeniería en el mundo entre los que se pueden mencionar el contar con una didáctica específica para la impartición de las clases para los ingenieros en formación lo cual favorece el proceso de enseñanza y aprendizaje (Camarena, 1984).

Se ha demostrado en diferentes trabajos, que la estrategia didáctica de la matemática en contexto facilita la transferencia de conocimientos y favorece la construcción de conocimiento en el alumno a través de aprendizajes significativos, lo que propicia que los conocimientos sean duraderos, así como que el alumno se encuentre más motivado en relación con las demás materias que entran en su formación y que poseen mayor significado al estudiarlas relacionadas entre sí (Camarena, 1999, 2003).

Una de las mayores bondades de la matemática en contexto es que les ayuda a los alumnos a desarrollar ciertas habilidades del pensamiento, habilidades para aplicar heurísticas y metacognición y hacer consciente al alumno de sus habilidades cognitivas que están en juego al resolver problemas.

Un aspecto que es importante mencionar es el concepto de metacognición el cual consiste en que el individuo se da cuenta del estado interior que guarda en relación de la solución de un problema, es decir el alumno se da cuenta si está en el camino correcto de la solución, si hay contradicciones en el planteamiento, en la teoría de la matemática en contexto de las ciencias se les conoce como “puntos de control de error”.

Los elementos descritos forman parte de la teoría de la matemática en el contexto de la ingeniería, los cuales conducen a la necesidad de contextualizar los conceptos y temas matemáticos en la ingeniería. Así, se tiene la necesidad de identificar las formas como los ingenieros utilizan los conocimientos matemáticos en su actividad profesional, para lo cual se construye el constructo teórico de la matemática en contexto que establece la transposición del saber a enseñar, al saber de aplicación denominado: “transposición contextualizada” (Camarena, 2000).

Finalmente como dice Camarena (1999) en relación con la opinión que tienen algunas personas de la matemática en contexto sin haberla utilizado:

> *En general al hablar de la matemática en contexto no es simplemente ofrecer aplicaciones, sino desarrollar la teoría matemática a las necesidades y ritmos que dictan los cursos de ingeniería. El problema que algunas personas que no han practicado la matemática en contexto ven, es que de esta forma se estará ofreciendo un curso de tipo operativo y no será formativo porque solamente se está dando lo que necesitan. Para esto cabe recordar que el decir que se dan los temas a las necesidades y ritmos que dictan los cursos básicos de la ingeniería y propios de la ingeniería, no implica que se dé un curso mecánico, ni un curso no formativo, pues estos elementos son determinados por la forma como imparta estos temas el profesor*.” (p , 951).

## 2.2.-Metodología.

A)Análisis previo.
a)Componente Epistemológico.
b)Componente Cognitivo.
c)Componente Didáctico.
B)Diseño de las actividades didácticas usando los pasos de la matemática en contexto.

Para realizar el diseño de las actividades didácticas, usaremos las etapas centrales de la matemática en contexto, las cuales incluyen los siguientes pasos:

a) Planteamiento del problema.
b)Determinación de las variables (dependientes, independientes y controladas) y las constantes del problema.
c) Determinación del modelo matemático.
d) Solución matemática del problema.
e) Determinación de la solución requerida por el problema.
f) Interpretación de la solución en términos del problema.
C)Puesta en escena de las actividades diseñadas.
D)Análisis de los resultados.

## 3.0.- Estudio Epistemológico, cognitivo y didáctico de las ecuaciones diferenciales

Con la finalidad de poder realizar el diseño de las actividades diagnóstico y de aprendizaje es necesario realizar un análisis de los tres componentes importantes recomendados en el análisis del problema según la matemática educativa las cuales son:

a) Componente Epistemológica.
b) Componente Cognitiva.
c) Componente Didáctica.

### 3.1.-Componente epistemológica

Este estudio no pretende hacer un análisis exhaustivo de los hechos epistemológicos que se llevan acabo en la génesis de las ecuaciones diferenciales, sino más bien una revisión de la evolución que han sufrido las ecuaciones diferenciales a lo largo del tiempo como objeto matemático estudiado, además de cuáles fueron las condiciones o circunstancias, el momento histórico, los elementos básicos que sirvieron a los investigadores y que permitieron dar luz a éstos descubrimientos y su importancia en nuestros días, y como ha influido la transposición didáctica en relación con el estado actual que guardan los libros de texto y que han influido de manera determinante en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Un elemento fundamental y que sirve de base a las ecuaciones diferenciales es la diferencial, es por esta razón que en la primera parte de este análisis abordaremos algunos aspectos que expuso Leibniz acerca de los diferenciales utilizados, así mismo estudiaremos como es que ha evolucionado este concepto matemático el cual forma a la ecuación diferencial. La segunda parte incluye los aspectos relevantes realizados por Clairaut y Euler en cuanto al tratamiento que hacen sobre el uso de los diferenciales en el contexto de la física. En este segundo apartado también se incluye un breve recuento acerca de la variación de los diferenciales en las ecuaciones diferenciales.

El estudio de las ecuaciones diferenciales se originó en los albores del cálculo con Issac Newton (1647-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1649-1716). En el presente análisis iniciaremos con el término de diferencial concepto fundamental en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales.

El concepto de diferencial.

Precisamente, al identificar una variable con una secuencia de valores infinitamente próximos, el diferencial de una variable es de nuevo una variable que se obtiene de tomar la diferencia (infinitamente pequeña) que existe entre cada dos valores sucesivos de la variable y se denota por dy.

> "*Aquí dx significa el elemento, esto es el incremento o decremento (instantáneos) de la cantidad (continuamente) creciente o decreciente x. Es también llamada diferencia, a saber, la diferencia entre dos x´s que difieren por un elemento (o por un inasignable), una originándose de la otra, cuando de crece o decrece (momentáneamente)*". (Leibniz citado en Bos, 1974:18).

En cuanto a la consideración por parte de Leibniz de las cantidades infinitamente pequeñas, tenemos el siguiente texto:

> "*Si unimos a una línea un punto de otra línea o una línea a una superficie, no incrementamos su magnitud. Sucede lo mismo sucede si adjuntamos a una línea otra línea, incomparablemente más pequeña. Tales incrementos no pueden ser exhibidos por construcción alguna. Así como en el ejemplo del libro V de Euclides en la Definición 5, considera que son comparables las magnitudes homogéneas para que el producto de una de ellas por un número, un número finito se entiende, que pueda superar a la otra. Establezco entonces, que cantidades cuya diferencia no es de esta naturaleza son iguales, como lo admite Arquímedes y todos los que le siguieron. Este es precisamente el caso en el que se dices que es más pequeña que cualquier magnitud dada*" (Leibniz, 1695: 327).

Veamos que significa esto de la diferencia en el siguiente gráfico (figura 2) dibujada por Leibniz:

**Triángulo característico de Leibniz**

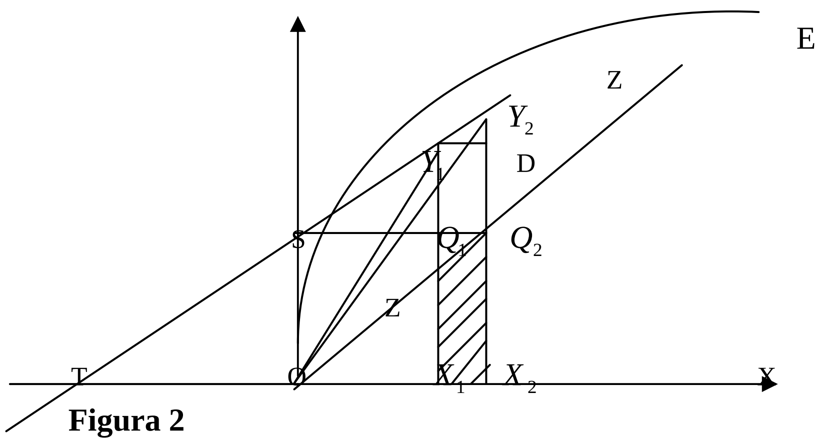



**Figura 2**

El área abarcada por la curva $OY_1Z$, el eje horizontal y la "última" ordenada XZ, es igual a la del triángulo OZX mas la comprendida por la curva $OY_1Z$ y la recta OZ. Pero ésta última se puede obtener por medio de la suma de las áreas de los triángulos $OY_1Y_2$ de lado $Y_1Y_2$ infinitamente pequeño

Conviene puntualizar que el diferencial opera sobre las variables (ya vimos como se conciben) y es una magnitud infinitamente pequeña.

Es necesario detenerse a considerar las ideas que condujeron a Leibniz a la construcción de su cálculo: esto servirá para clarificar sus alcances y la naturaleza recíproca de las operaciones de suma y diferencia.

La primera idea es sobre la preocupación más profunda, que rodea al trabajo de Leibniz.

> "*La primera idea se refiere a la construcción de una characterística generalis lo que concibió Leibniz, es decir, de un lenguaje simbólico general mediante el cual se pudiera escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de argumentación y de razonamiento; éstos símbolos debían de obedecer ciertas reglas de combinación entre ellos que vendían a garantizar la corrección de los argumentos formulados por ese lenguaje. Esta idea guió a Leibniz en la mayor parte de su pensamiento*

*filosófico, y nos explica de paso su gran interés por las cuestiones de simbolismo y notación en matemáticas y en general, sus esfuerzos por traducir las proposiciones y métodos matemáticos en fórmulas y algoritmos respectivamente. Así por ejemplo, al estudiar la geometría de las curvas estaba más interesado en el método que en los resultados, y muy especialmente en la manera de poder transformar estos métodos en algoritmos que pudieran llevarse acabo por medio de fórmulas. Dicho de otra manera, lo que buscaba era un cálculo para tratar los problemas geométricos-infinitesimales*" (Grattan-Guinness, 1980; 83-84)

La segunda idea consiste en extrapolar a la geometría aquellos conocimientos propios de lo numérico referentes a ciertas propiedades de las series; veamos esto con el siguiente desarrollo:

Si S={$a_n$} es una sucesión numérica. Se puede definir la sucesión de diferencias de S como:

$\Delta S = \{\Delta_i S\}$ con $\Delta_i S = a_{i+1} - a_i$

y a la sucesión de sumas de S como

$\sum S = \{ \sum iS \}$ con $\sum iS = \sum_{j=1}^{i} a_j$

Luego se puede hablar de las operaciones de suma y diferencia aplicadas a sucesiones.

Las operaciones dan otra sucesión, la de las diferencias y las de las sumas. Estas operaciones son inversas una de las otras:

$$\sum \Delta S = \sum \left\{ \Delta_j S \right\} = \left\{ \sum_i \Delta_j S \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^{i} \Delta_j S \right\} =$$

$$\left\{ (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_{i+1} - a_i) \right\} = \left\{ a_{i+1} - a_1 \right\}$$

$$\Delta \sum S = \Delta \left\{ \sum_i S \right\} = \left\{ \Delta_j \left\{ \sum_i S \right\} \right\} = \left\{ \sum_{j+1} S - \sum_j S \right\}$$

$$= \left\{ (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{j+1}) - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_j) \right\} = \left\{ a_{j+1} \right\}$$

Así al considerar a una variable y (de valores finitos) como una sucesión infinita de valores infinitamente próximos, las operaciones *d* (diferencial) y $\int y$ cuyos valores son, respectivamente, magnitudes infinitamente pequeñas e infinitamente grandes en relación con y. Además, estas operaciones pueden aplicarse reiteradamente consiguiendo así, *ddy*, *ddddy*, $\iint y$ etc. ; y por supuesto $\int dy = y$ y $d \int y = y$.

La tercera idea es la aplicación a cualquier curva del triángulo característico.

Leibniz supuso el siguiente triángulo tomando como base los trabajos de Pascal sobre el círculo (figura 3). Triángulo característico a cualquier.

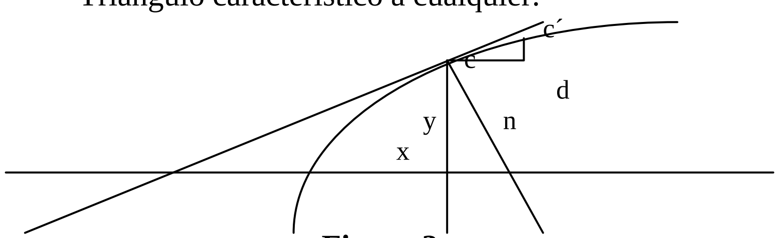



**Figura 3**

Ahora se realizan algunos comentarios que se desprenden del triángulo característico de Leibniz: "Acerca de los senos de un cuadrante del circulo"

Sea ABC (figura 5) el cuadrante de un círculo cuyo radio AB sea considerado el eje y el radio perpendicular AC la base; sea D cualquier punto sobre el arco cuyo seno DI se dibuja hacia el radio AC; y sea DE la tangente sobre la cual se eligen los puntos E arbitrariamente, y desde estos puntos se dibujan las perpendiculares ER hacia el radio AC (figura 4).

Acerca de los senos de un cuadrante del circulo

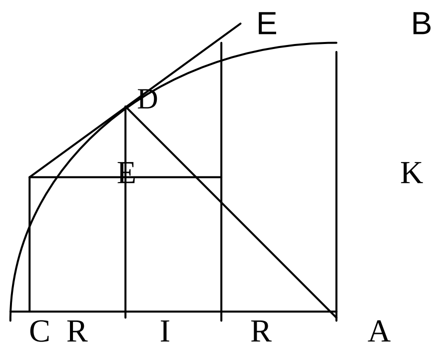



**Figura 4**

Digo que el rectángulo formado por el seno DI y la tangente EE es igual al rectángulo formado por una porción de la base (encerrada entre las paralelas) y el radio AB.

Considerando que el radio AD es el seno DI así como EE es a RR, o a EK, lo cual es claro por la similitud de los triángulos rectángulos DIA, EKE, el ángulo EEK o EDI es igual al ángulo DAI.

Proposición 1.La suma de los senos de cualquier arco de un cuadrante es igual a la porción de la base entre los senos extremos, multiplicado por el radio.

Preparación para la prueba. Sea cualquier arco BP dividido en un número infinito de partes por los puntos D (figura 6) desde el cual se dibujan los senos PO,DI, etc..; permítase tomar en otro cuadrante del círculo el segmento AQ, igual a AO (que miden la distancia entre los senos extremos del arco, BA,PO); sea AQ dividido en un número infinito de partes iguales por los puntos H, en los cuales las ordenadas HL serán dibujadas figura 5.

**Circulo completo**

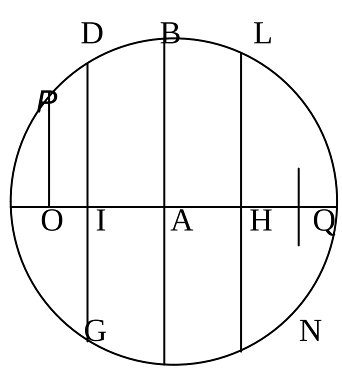


**Figura 5**

Prueba de la proposición 1.Digo que la suma de los senos DI (cada uno de ellos multiplicado por supuesto por uno de los arcos iguales DD) es igual al segmento AO multiplicado por el radio AB. Además, permítanos dibujar en todos los puntos D las tangentes DE (figura 5), cada una interseca a su vecino en los puntos E; si colocamos las perpendiculares ER es claro que cada seno DI multiplicado por la tangente EE es igual a cada distancia RR multiplicada por el radio AB. Por lo tanto, todos los cuadriláteros formados por los senos DI y sus tangente EE (quienes son iguales entre ellos) son iguales a todos los cuadriláteros formados por todas las porciones RR con el radio AB; esto es (ya que una de las tangentes EE multiplica a cada seno, y que el radio AB multiplica a cada distancia), la suma de los senos Di, cada una de ellas multiplicada por una de las tangentes EE, es igual a la suma de las distancias RR, cada una multiplicada por AB. Pero cada tangente EE, es igual a cada uno de los arcos iguales DD. Por lo tanto, la suma de los senos multiplicada por uno de los pequeños arcos iguales será igual a la distancia AO (figura 6) multiplicada por el radio. Nota. Esto no debe causar sorpresa cuando digo que todas las distancias RR son iguales AO y del mismo modo que cada segmento EE es igual a cada uno de los pequeños arcos DD, ya que es bien sabido que, aunque esta igualdad no es cierta cuando el número de senos es infinito, de todas maneras la igualdad es verdadera cuando el número es infinito; porque entonces la suma de todas las tangentes iguales EE difiere del arco entero BD, o de la suma de los arcos DD, en menos de cualquier cantidad dada: similarmente la suma de los RR de OA completo.

Hasta este momento nuestra atención se ha centrado en el manejo geométrico que se da a los diferenciales desde el punto de vista geométrico, ahora nos concentraremos en analizar los diferenciales en la física.

Los diferenciales están arraigados en la física y van ligados a manera de estudiar los fenómenos. Afirmamos que tal arraigo se explica por la fecundidad que han revelado para la construcción del pensamiento físico esas formas de observar, de matematizar la naturaleza.

Si bien es cierto que los diferenciales de Leibnitz nacieron al interior de la geometría, pronto demostraron ser una valiosa fuente de la que emanaron recursos muy poderosos para el estudio de los fenómenos de la física. Con base a estos diferenciales fueron creados otros diferenciales mas sofisticados, conforme lo requería la complejidad de los fenómenos por analizar. En esta sección analizaremos el devenir de los diferenciales ligados a formas de acercamiento de estudio de ciertos fenómenos de la física.

**El uso de los diferenciales en la Física**

A partir de esta sección haremos referencia a la forma que trataron los diferenciales Clairaut y Euler ,así como haremos referencia la fuente de donde provienen dichos extractos, al final de cada autor realizaremos una serie de comentarios sobre el manejo de los diferenciales de los autores y su relación con el trabajo que estamos desarrollando.

El trabajo de Clairaut que se tomará como inicio incluye diferenciales de una función de varias variables, se ha tomado de Cantoral (1990,59) el siguiente extracto del libro ”la figura de la tierra” publicado en 1747.

> [...] *Clairaut estudia las condiciones que deben satisfacer por la ley de la gravedad para garantizar la conservación de la forma de una masa de fluido que se encuentre girando. Para lo cual supone descompuesta en un par de componentes a la fuerza de gravedad. Considera a las componentes P y Q paralelas a los ejes perpendiculares CP y CE. Para*

*ello considera un ducto arbitrario ON que finalice sobre la superficie de la tierra y toma de él un elemento Ss, sobre la que habría que reconocer la condición de equilibrio de toda la masa. En el elemento, las componentes Sr y sr serán respectivamente dx y dy*. (Cantoral ,1990, pp64) (figura 6).

**Clairaut :La descomposición de fuerzas de una masa de fluido moviéndose.**

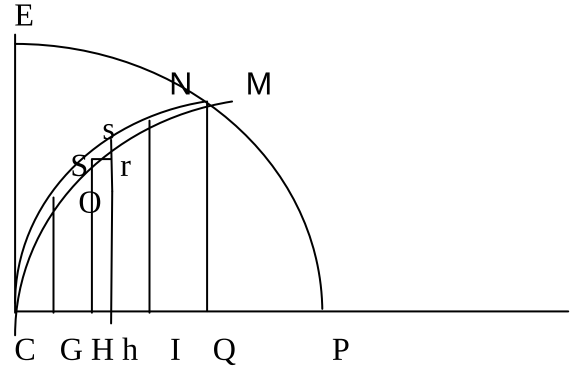



**Figura 6**

Como la componente Q de la gravedad actúa a lo largo del segmento SH, entonces la proyección sobre la dirección del ducto Ss, tiene el valor.

$$Q\frac{rs}{Ss}$$

ésto es

$$\frac{Qdy}{Ss}$$

Ahora bien, suponiendo que tanto la densidad del elemento como la “base del dúcto son unitarias, la masa es justamente Ss. De ahí que multiplicando la gravedad por la masa se tendría el esfuerzo.

$$Qdy$$

Análogamente se obtiene la dirección complementaria.

$$Pdx$$

De donde el esfuerzo total multiplicado por la masa será justamente.

$$Pdx + Qdy$$

Sobre el que haciendo consideraciones acerca de la arbitrariedad del canal, concluye que debe ser independiente de la forma de éste y por tanto no dependerá de la relación y=f(x) que se tenga, o lo que es lo mismo en el proceso de integración.

$$\int Pdx + Qdy$$

El resultado dependerá de que el integrando sea un diferencial total, esto es que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Esta última expresión ya representa una ecuación diferencial, con diferenciales parciales.

“*Por cierto, esta característica (el proponer un factor de integración que convierta a la ecuación diferencial en exacta), es usada por Euler en forma frecuente como un método para reducir el orden de una ecuación diferencial*” (Hernández, 1994,12).

Comentarios: En esta parte aparecen nuevos objetos matemáticos a diferencia del cálculo de Leibniz. Esta es una forma reconocimiento que se les ha otorgado a los diferenciales en la física, este reconocimiento se extiende la los diferenciales de línea, superficie y de volumen, además de las formas diferenciales cuadráticas. Reconocer este estatus en la física implicará aceptar el tremendo desacuerdo con la forma de introducir los diferenciales en los libros de texto de calculo: una negación a las cantidades infinitamente pequeñas, una definición de diferencial totalmente fuera del contexto de la física.

Otro aspecto que utiliza Leibniz es el de considerar una curva como un polígono con un número infinito de lados; tomar un elemento diferencial de la curva, de la superficie o del volumen, será un elemento característico del método geométrico diferencial que observaremos constantemente en el estudio de la física.

### *Euler: El estilo geométrico diferencial*

Se reproduce parte del trabajo de Euler relacionado a la mecánica de fluidos (Dalmedico, 1992).

Si la teoría del equilibrio de los fluidos (hidrostática) se trata, Euler la resume en el siguiente problema:

> “*Las fuerzas, por las que todos los elementos del fluido son afectadas, están dadas por la relación que subsiste en cada punto entre la densidad y la elasticidad del fluido; encontrar las presiones que tienen lugar en todos los puntos de la masa fluida por las que se encuentra en equilibrio*” (Dalmedico,1992:20)

En este contexto donde aparece el “método geométrico del paralelepípedo de Euler”: Euler asume la presión de una fuerza que actúa sobre cada partícula y que puede expresarse como una función de las coordenadas que determinan el lugar de la partícula dentro de una masa fluida.

Euler considera un paralelepípedo rectangular elemental de lados dx,dy, dz, construido a partir de un punto Z del fluido con coordenadas x,y,z. Llama P,Q,R, a las componentes de la “force accélératrice” aplicadas a ese elemento y q a la densidad del fluido en Z:

El elemento de volumen dxdydz es entonces sometido a la “force motrice” de componentes:

Pqdxdydz, Qqdxdydz, Rqdxdydz

La presión p en el punto Z es una función desconocida de tres variables x,y,,z y su diferencial se podrá escribir como:

Dp=Ldx + Mdy + Ndz

“*Euler formula un razonamiento muy simple que será clásico: la diferencia de presiones entre dos caras opuestas y paralelas de un paralelepípedo ficticio aislado da la fuerza que tiende a mover la partícula en el centro de ese paralelepípedo, perpendicularmente a esas caras, fuerza que debe equilibrar las fuerzas aceleratrices donde la partícula se mueve*” (Dalmedico, 1992).

El método geométrico que consiste en descomponer ficticiamente un fluido en volúmenes elementales para aplicarle a cada uno de ellos el razonamiento de equilibrio de fuerzas, transportado de la mecánica de sólidos, constituye un método_modelo que Euler aplicará a la hidrodinámica.

En sus estudios de hidrodinámica, Euler considera que un fluido que puede ser comprensible o no, homogéneo o no. Su estado primitivo se supone conocido (es decir la disposición inicial de la partícula del fluido y sus respectivas velocidades), así como las fuerzas externas que les son aplicadas. Busca determinar en cada punto geométrico del espacio la presión, la velocidad y la densidad del elemento del fluido que pasa por ese punto.

Para estudiar el estado del fluido en el instante t en un punto Z(x,y,z), Euler da los componentes P,Q,R de la fuerza aceleratriz , que son funciones conocidas de x,y,z,t. La densidad q, la presión p y las componentes u,v,w de la velocidad del elemento de fluido que se encuentra en Z en el instante t, son las funciones desconocidas.

El elemento de fluido en Z se mueve durante el tiempo dt al punto Z´ de coordenadas (x+udt,y+vdt,z+wdt), Euler considera otro elemento de fluido en el punto z1 próximo a Z de coordenadas (x+dx,y+dy,z+dz).

Este último tiene una velocidad de componentes:

$$u + \partial_x udx + \partial_y udy + \partial udz,$$
$$v + \partial_x vdx + \partial_y vdy + \partial vdz,$$
$$w + \partial_x wdx + \partial_y wdy + \partial wdz$$

y se mueve durante el tiempo dt, a un punto z´1.(Dalmedico aclara aquí que por razones de simplicidad tipográfica se ha utilizado esta notación para las derivadas parciales, para las cuales Euler utiliza siempre una d recta en las fracciones du/dx,dv/dy).

Euler considera en principio, para hacer el cálculo, que el segmento Zz1 es paralelo al eje de las $x_s$ (su longitud es dx) y después que ese segmento gira al final de un cierto tiempo dt, un ángulo infinitamente pequeño.

Él muestra que la longitud del segmento Z´z´1 es:

$$\mathbf{Z'z'1 = dx(1+dt\,\partial_x u)}$$

Despreciando el término de segundo orden se tiene (figura 7):

**Manejo de diferenciales en un fluido**

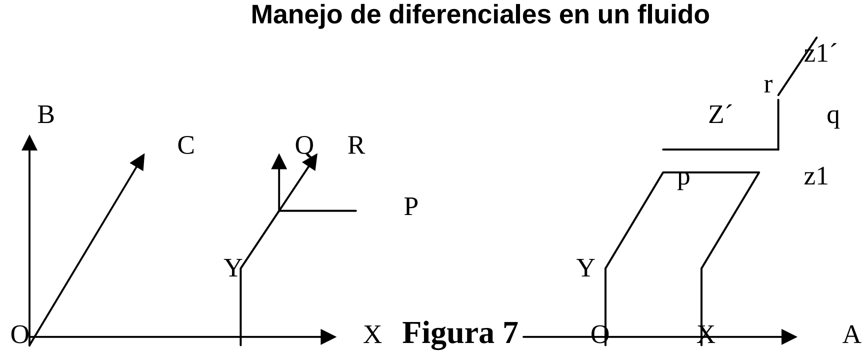



**Figura 7**

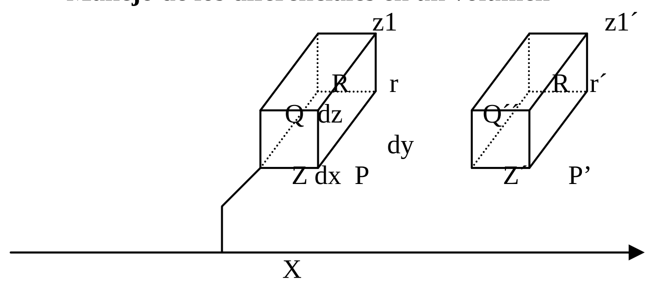
$$Z'P' = dx(1+dt\partial_x u), Z'Q' = dy(1+dt\partial_y v), Z'R' = dz(1+dt\partial_z w)$$

Repitiendo el cálculo para Zz1 paralelo al eje y y paralelo al eje z, Euler elucida el paralelepípedo elemental que deviene en el instante t+dt, del paralelepípedo con origen Z y de lados dx,dy,dz debido al movimiento del fluido (Figura 8).

Encuentra que su volumen cambia a:

$$dxdydz(1+dt\partial_x u + dt\partial_y v + dt\partial_z w)$$

**Manejo de los diferenciales en un volumen**




•

**Figura 8**

Paralelamente la densidad q del fluido en Z cambia en Z´ a:

$$(q+dt\partial_t q + udt\partial_x q + vdt\partial_y q + wdt\partial_z p)$$

Euler expresa entonces la conservación de la masa durante el curso del movimiento.

La masa siendo igual al producto de la densidad por el volumen obtiene:

$$\partial_t q + u\partial_x q + v\partial_y q + w\partial_z q + q\partial_x u + q\partial_y v + q\partial_z w = 0$$

Esta es la ecuación de continuidad el fluido que puede escribirse entonces como:

$$\partial_r q + \partial_x (qu) + \partial_u (qv) + \partial_z (qw) = 0$$

Es decir:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + div(qv) = 0$$

Para un fluido incomprensible (q es una constante) esta ecuación se reduce a:

$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0$ **o sea div(v)=0**

Euler calcula enseguida la aceleración del elemento del fluido que está en Z. Las componentes de la velocidad en el punto Z´ son:

$$u + dt\partial_t u + udt\partial_x u + vdt\partial_y u + wdt\partial_z u,$$
$$v + dt\partial_t v + udt\partial_x v + vdt\partial_y v + wdt\partial_z v,$$
$$w + dt\partial_t w + udt\partial_x w + vdt\partial_y w + wdt\partial_z w$$

De donde se tienen las componentes de la aceleración:

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u,$$
$$\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v,$$
$$\partial_t w + u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w$$

Como en las memorias sobre la hidrostática, Euler obtiene las componentes de la fuerza aceleratriz que resultan de las presiones del fluido sobre el paralelepípedo de volumen dx dy dz construido sobre Zz1.El método consiste en tomar las diferencia de presiones sobre 2 caras opuestas y paralelas del paralelepípedo. Las componentes sobre los tres ejes de esta fuerza aceleratriz (diferencia de presiones) serán:

$$-\frac{1}{q}(\partial_x p, \partial_y p, \partial_z p)$$

La aplicación del primer principio de la mecánica permite finalmente escribir las ecuaciones del movimiento del fluido, llamadas ecuaciones de Euler.

$$P - \frac{1}{q}\partial_x p = \partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u,$$
$$Q - \frac{1}{q}\partial_y p = \partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v,$$
$$R - \frac{1}{q}\partial_z p = \partial_t w + u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w$$

La cual se une a la ecuación de continuidad.

Así el punto de vista de Euler consiste en dar un punto geométrico fijo en el espacio y se propone determinar en cada instante el estado del movimiento del movimiento en ese punto, es decir, la velocidad (u,v,w) del fluido y su presión p en función de la posición del punto y del tiempo. Las variables (x,y,z,t ) escogidas por Euler proporcionan en cada instante particular la situación cinemática completa del medio. Ellas permiten estudiar el régimen es decir el estado de las velocidades (u,v,w) en el instante t.( Dalmedico 1992:22-25)

Una primera lección se extrae de este trabajo de Euler. Cuando discute el movimiento de un cuerpo asimilable a una masa puntual debe descomponer al cuerpo, imaginariamente, en dos partes, una exterior y otra interior, que ha sido ficticiamente aislado y que ejercen los campos de fuerzas definidos en la frontera. Así se descubre una nueva perspectiva que se revelará particularmente fecunda para la ciencia física.

Más aún, su método hace escuela. Consiste en descomponer un cuerpo en volúmenes elementales ficticios para efectuar en ese nivel razonamientos, no sólo de equilibrio de fuerzas(como en la primera memoria de hidrostática) sino de verdaderos balances de acciones de fuerza y del mismo modo, posteriormente balances energéticos.

Este método un verdadero estilo (de tipo geométrico), que se reafirma en la nueva física matemática de principios del siglo XIX cuando se le usa en tratar de matematizar los nuevos fenómenos. En estas circunstancias, Fourier aplica un método de balance (térmico) a los volúmenes ficticiamente aislados, para obtener las leyes de programación térmica. Veremos que su método presentará fuertes analogías con el acercamiento euleriano y que Cauchy se sitúa en la misma tradición dentro de la primera teoría de la elasticidad. A la vez, este estilo se distingue notablemente del de los físico-matemáticos que adoptan el paradigma mecánico molecular tanto como de aquel de los científicos que privilegian el acercamiento variacional.

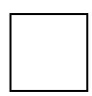
En términos generales, la teoría de los fluidos es la única teoría constituida al final del siglo XVII que trata de la materia dinámicamente continua, la primera teoría en haberse liberado parcialmente de ciertas intuiciones de la mecánica de sólidos, y que brindará una reserva de formas intuitivas y semánticas, alternativas a la mecánica newtoniana, para los sabios que abordan nuevos dominios de matematización. Es palpable por otro lado, que la teoría euclidiana de los fluidos inaugurara el período de los fluidos sutiles, en principio el éter, después otros fluidos como el eléctrico, magnético, calórico, etc., a pesar de que en esta época faltan los fundamentos experimentales suplementarios para tales teorizaciones. (Dalmedico, 1992:27-28)

Comentario: La exposición anterior omite algunos detalles sobre los diferenciales los cuales nos interesa resaltar. Uno de estos detalles corresponde a la obtención del volumen del nuevo paralelepípedo, que se ha generado a partir del paralelepípedo infinitesimal considerado originalmente durante un instante de tiempo.

Se considerará la dimensión x del paralelepípedo tridimensional de dimensiones dx dy dz , para fines de simplicidad.

La idea es ver el desplazamiento de x junto con el de x+dx en un instante de tiempo dt. La resta de ambos desplazamientos, dará la longitud del nuevo lado. Tomemos el lado inicial, en el tiempo t, dx figura 9.

**Elemento diferencial**



x+dx

**Figura 9**

En esa posición inicial, los extremos del lado tienen velocidades:

u(x,t) y u(x+dt,t)

En el instante de tiempo siguiente dt, la posición de cada extremo cambiará en la siguiente forma:

$$x+ u(x,t)dt,\ (x+dx)+u(x+dx,t)dt$$

Entonces el nuevo lado tendrá un tamaño igual a la resta de los puntos extremos:

$$(x+dx)+u(x+dx,t)dt -[x+ u(x,t)dt] = dx +[ u(x+dx,t) - u(x,t)]dt$$

finalmente este nuevo tamaño puede escribirse como:

$$dx + \frac{\partial u}{\partial x} dxdt = dx(1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt)$$

De igual forma los otros lados tendrían las dimensiones:

$$dy(1+\frac{\partial v}{\partial y}dt), dz(1+\frac{\partial w}{\partial z}dt)$$

Multiplicando las tres dimensiones obtenidas tendríamos el volumen del nuevo cubo.

$$dxdydz(1+\frac{\partial u}{\partial x}dt)(1+\frac{\partial v}{\partial y}dt)(1+\frac{\partial w}{\partial z}dt)$$

**Los diferenciales en las ecuaciones diferenciales.**

Después de haber incluido la revisión de la evolución que sufrieron las ecuaciones diferenciales relacionándolas como objeto matemático, así como evolucionaron éstas en las aplicaciones específicas en la Física, consideramos importante dentro de esta revisión incluir un apartado del manejo que se han hecho de la variación de los diferenciales desde sus orígenes que incluyen a Oseme, Newton, Leibniz, Hospital, Agnési y Euler hasta nuestros días, así mismo hacer un análisis de este importante objeto matemático que define a las ecuaciones diferenciales y como es que lo manejan los libros de matemáticas y de física. El objeto de diferencial sirve de base a muchos objetos matemáticos como son el límite, derivada, integral y ecuación diferencial.

Partiremos de la premisa básica de que, en la naturaleza, la única constante es el cambio. Las plantas, los arboles y los animales crecen, el torrente de los ríos y de las tempestades fluye incesantemente, los vientos desplazan gigantes y multiformes nubes, el cultivo de la bacteria crece a su máximo límite, la cantidad de circulante en una economía fluctúa de un momento a otro, los planetas se enfrían y se calientan en un proceso cíclico, la sangre corre por las venas, la energía se transforma y con ella, se perciben los distintos estados de un proceso de modificación, los puentes vibran; en fin, un vasto tejido de situaciones de cambio escenifica nuestra cotideaneidad. Este cambio, como parte de la realidad, resulta independiente de la conciencia, pero sólo a través de ella lo hacemos parte de nuestros conocimientos. Este devenir va primero de lo sensorial a lo perceptual, lo concebimos como un primer estadio de abstracción para apropiarse de lo real y, finalmente, lo creamos en un mundo de objetos abstractos en el que adquiere sentido a través de otros objetos y de sus relaciones. En este mundo de entidades ideales, las nociones y conceptos hacen que aparezca con la ayuda de sus representaciones.

El cambio que caracteriza a la naturaleza esconde, bajo su intrincado aspecto desordenado, un robusto sistema de regularidades que han captado el interés de grandes colectivos humanos durante distintas épocas y bajo programas de investigación. Basta revisar brevemente la literatura científica para encontrar que Newton, Euler, Clairaut, Feynman, Maxwell, Aristóteles, Oseme, Galileo, Laplace y Einstein trataron con las situaciones de cambio.

Como un primer tratamiento Oseme (1323-1382), él representa mediante la figura geométrica, la intensidad de una cualidad de un objeto. Veamos lo reportado por (Moreno, 1991). Para Oseme, el estudio de un cuerpo se compone de dos tipos de mediciones: las extensionales (globales), como el peso del cuerpo, y las intencionales (puntuales), como la temperatura. En este caso, la medición es puntual; cada “punto” del cuerpo tiene asociada una temperatura. Oseme, in primera instancia, se propone construir un modelo geométrico que le sirviera para medir.

En el modelo geométrico de Oseme, la teoría de las proporciones constituye el campo operatorio para confrontarnos con el problema: representar para calcular; además están presentes las concepciones aristotélicas del continuo. Por eso habla de los puntos de una recta como "una ficción necesaria" para representar un lugar del cuerpo sobre el cual se hace una medición intencional, que puede representarse como un segmento, de preferencia perpendicular al cuerpo, allí donde se realiza la medición, figura 10.

**Representación de una medición**

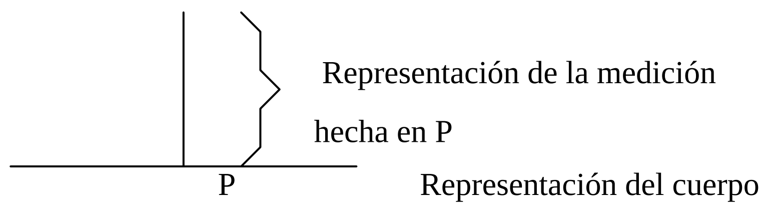
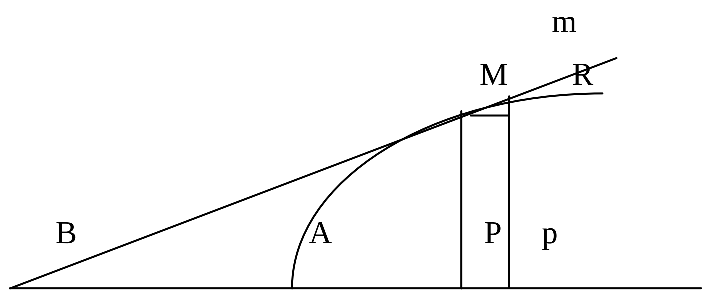



**Figura 10**

Para finalizar este análisis epistemológico no podemos dejar pasar la aportación que realizó Maria Cayetana Agnesi sobre el concepto de primeras y segundas diferencias, las cuales sirven de base para conocer el concepto de ecuación diferencial de primer y segundo orden que es uno de los aspectos fundamentales que trata nuestro trabajo. Agnesi inicia su análisis sobre el concepto de diferencial infinitesimal de la siguiente manera:

*"Para determinar una diferencia infinitesimal. Agnesi emplea una representación gráfica usando la ya conocida relación establecida entre dos triángulos, uno de dimensiones finitas y otro de dimensiones infinitesimales: Dice que una vez determinada la variación de P, es decir el punto p, es posible trazar las paralelas PM y p, si de traza la recta MR paralela a AP, se observan dos triángulos, el BPM y el MRm cuya relación está dada por BP:PM::PR:Rm. En esta relación geométrica la cuerda Mn no se distingue del arco infinitesimal y pueden tomarse indistintamente uno por el otro figura 11.*

**Una diferencia infinitesimal**




(Agnesi, 1748, pág. 433)

**Figura 11**

*De lo anterior, Agnesi establece una distinción importante entre la naturaleza de las cantidades, por una parte explica que los segmentos BP, PM son cantidades finitas, MR infinitesimal y por consiguiente concluye, que Rm es también una cantidad infinitesimal la cual es además la diferencia de la ordenada PM.*

Además más adelante Agnesi advierte, el caso en que la curva decrece y entonces sus diferencias son negativas, reconoce al respecto que existe una variación negativa, que afirma, no es producto de una inventiva.

En su primer teorema, Agnesi sustenta una construcción geométrica en donde explica, por una parte, la naturaleza de las curvas y por la otra las diferencias de orden superior a uno.

TEOREMA I

*“Sia una qualunque MBC, ed una porzione di essa BC infinitesima del prima orde.Da punti B,C, si conducano perpendicolri alla curva le rette BA, CA.Dico: che le rette BA,CA si portanno per eguali.*

***Diferencia infinitesimal otro método***

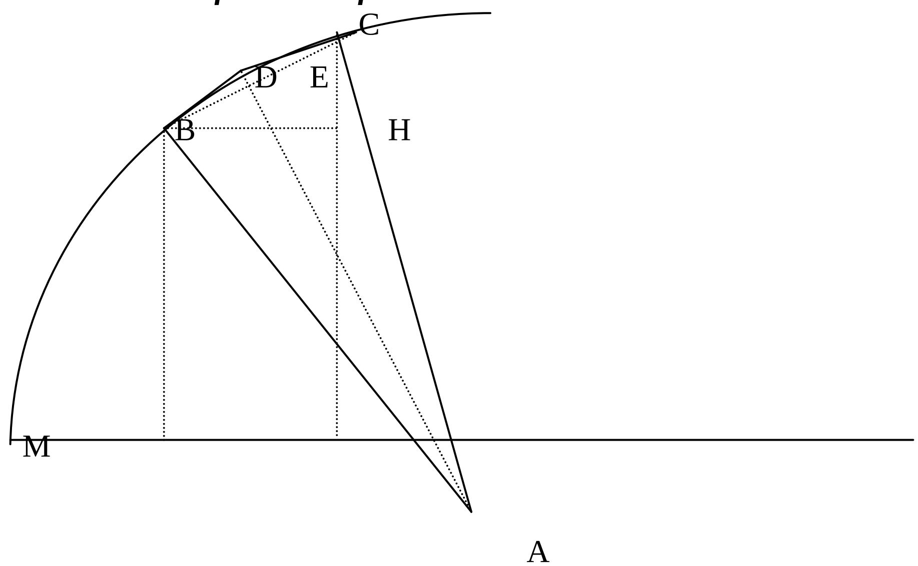



**Figura 12** (Agnesi, 1748, pág. 438)

El teorema anterior argumenta las propiedades geométricas de una construcción geométrica, dada la curva MBC, se determina una porción de arco infinitamente pequeña BC, al trazar una secante por esos puntos, por las propiedades de los infinitesimales, es posible tomar indistintamente el arco infinitesimal y la secante. En los puntos B y C respectivamente, se trazan tangentes y sobre estas rectas perpendiculares, al prolongarlas el cruce determina el punto al que llamaremos A.

Dadas estas condiciones en referencia a la figura 12 el Colorario I, asevera que entonces el triángulo BAC es isósceles y por consecuencia los ángulos ABC, ACB son iguales así mismo los ángulos ACD y DBC y por consecuencia las dos tangentes BD, CD permanecen iguales.

En el C*olorario II*, Agnesi explica que al trazar la recta DA se divide en dos partes iguales al triángulo ABC en los triángulos ADB y ADC y a su vez se parten los ángulos BAC y BDC respectivamente en dos. De tal forma que los triángulos AEB y AEC son semejantes, de lo que se concluye finalmente, que AD será normal a BC y su cruces será el punto E.

El *Colorario III,* alude a las medidas angulares de los triángulos; si DAC y EDC son semejantes, entonces por proporción el ángulo DCE será igual al ángulo DAC y la suma de los ángulos DEC y DBE será igual al ángulo BAC.

De lo anterior, el *Colorario IV*, expresa una propiedad muy importante respecto a la naturaleza de las curvas basado en el estudio de las propiedades geométricas; el arco BC de cualquier curva tendrá las mismas propiedades del arco del círculo descrito con centro en A y de radio AB o AC. Así como los antiguos determinaron polígonos circunscritos e inscritos para aproximar las naturaleza infinitesimal de las curvas.

Con relación a las propiedades que enuncian estos colorarios, Agnesi hace una importante caracterización a las diferencias segundas y terceras. Explica que siendo semejantes los dos triángulos AEB, BED es posible determinar la relación AE:EB::EB:ED, de la que distingue que AE es de dimensiones finitas. EB infinitésima del primo grado y ED será la infinitesimal de segundo orden, cuyo valor se obtiene de la relación anterior.

$$\frac{EB}{AE} = \frac{ED}{EB}$$

$$ED = \frac{(EB)^2}{AE}$$

Esta última relación nos muestra cual es la magnitud de un infinitesimal de segundo orden con respecto al de primer orden, lo interesante aquí es relacionar estas magnitudes obtenidas por Agnesi y que son útiles cuando se utilizan ecuaciones diferenciales en donde la aparición de los diferenciales de primer y segundo orden son tan comunes, por lo que el significado del infinitesimal es un significado muy valioso en el contexto del fenómeno que se estudio, el cual puede arrojar luz en la interpretación que se le atribuye a un diferencial de primer orden a un diferencial de segundo orden.

**Conclusiones del análisis epistemológico**

Es importante puntualizar los siguientes elementos:

a)La forma de trabajar de Euler con los cubos infinitesimales será de uso frecuente a lo largo del desarrollo de la física.

b)La generalización de la idea de mantener constante una magnitud variable y multiplicarla por un diferencial, para extender conceptos en la física tales como el trabajo, el flujo, el campo eléctrico, etc..

c)Dentro del diseño de las actividades didácticas se retomarán aspectos relacionados con los diferenciales de desplazamiento y de velocidad con la intención de poder poner en juego la relación de pendiente y ordenada al origen.

### 3.2.-Componente Cognitiva.

Tratando de encontrar algunas dificultades cognitivas en lo referente a los conceptos de función, derivada, integral y ecuación diferencial es que se aplicará un cuestionario preliminar. El diseño del cuestionario preliminar se realizó tratando de encontrar cuáles son los obstáculos de tipo epistemológico, didáctico y cognitivo, de esta manera tener elementos guía en el diseño de un cuestionario diagnóstico de mayor detalle previo al diseño de las actividades didácticas. Los reactivos que se plantean incluyen aspectos de los temas de función, derivada, diferenciales, integrales, aplicaciones de derivada y aplicaciones de integral. Posteriormente al análisis diagnóstico se realizará el diseño de las actividades didácticas de Matemáticas en Contexto.

Para el cuestionario preliminar se le aplico a un grupo de 22 alumnos de la carrera de Ingeniería Industrial de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán (U.N.A.M.), la duración del ejercicio fue de aproximadamente de 30 minutos, las preguntas que incluyeron fueron las siguientes y no se incluyeron ningún tipo de representación gráfica complementaria dentro de la actividad.

### Cuestionario Diagnóstico Preliminar

Estimad@ alumn@ con la intención de determinar las necesidades presentes en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primero y segundo orden en el contexto de la física se te solicita que contestes las siguientes preguntas.

| |
|---|
| 1.- ¿Cuál es el concepto que tienes de función algebraica?<br>R= |
| 2.- ¿Cuál es el concepto de derivada de una función algebraica en cuanto al cociente del incremento de y entre el incremento de x?<br>R= |
| 3.- ¿Qué significa para ti el realizar la integral de una función en ciertos límites definidos de integración?<br>R= |
| 4.- ¿Qué significado tiene para ti la solución de una ecuación diferencial y como interpretas la constante de integración dadas las condiciones iniciales?<br>R= |

**Análisis cognitivo de los alumnos en relación con los objetos de derivada, integral y ecuación diferencial.**

El concepto de función muy arraigado en el discurso matemático escolar, se considera a la función como una fórmula en donde tenemos constantes y variables las cuales se relacionan para calcular una variable que se le llama dependiente a partir de una variable independiente. Algunos alumnos tienen el concepto de pares ordenados correspondientes y muy pocos alumnos (2) le atribuyen ciertas características gráficas asociadas con la expresión algebraica.

El concepto que tienen de función el (45%) alumnos la definen como una relación de correspondencia entre 2 conjuntos de elementos. El (55%) de los alumnos considera a la función como una expresión de calculo entre 2 pares ordenados (x,y). Esto pone en evidencia la gran influencia que tiene la algoritmia en el discurso matemático escolar actual.

Los alumnos tienen el concepto de derivada como un cociente $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ y gráficamente algunos alumnos asocian la derivada de una función con la recta tangente en un punto de la curva (82%), uno de los alumnos (4.5%) define a la derivada en términos de una función que se calcula el límite en un punto dado de la curva, por otro lado un alumno (4.5%) define la derivada en términos de la aplicación de los cuatro pasos de la definición de derivada, un aspecto relevante de mencionar es que dos alumnos (9%) la definen como el área bajo la curva. En general los alumnos consideran a la derivada como un cociente asociado con una recta tangente en un punto determinado de la curva.

En lo que se refiere a la integral definida 100% de los alumnos tienen el concepto de que la integral es el área bajo la curva entre los límites, preestablecidos dos de los alumnos (9%) definen a la integral como una sumatoria de áreas bajo la curva considerando los limites de integración como elementos base para determinar el incremento en el eje de las abscisas, esto quizá sea por conocimientos de los aspectos numéricos en lo que se refiere a la área final bajo la curva en los límites definidos de integración, es decir estos alumnos poseen el concepto de acuerdo a la siguiente sumatoria:

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Donde: $a_i$ = área parcial dentro de los límites de integración

A = área total en los límites de integración

N= Total de subintervalos ( $\Delta x$ ) en que se divide el intervalo de integración.

El 91% de los alumnos considera a la integral como el área bajo la curva y fundamentalmente es un procedimiento algebraico para su cálculo sólo el 9% considera que la integral está relacionada con una sumatoria de áreas, asociándola con el aspecto numérico del calculo de dicha área entre los límites de integración.

En lo que se refiere al concepto de ecuación diferencial de los veintidós alumnos únicamente contestaron nueve, tres alumnos (13.6%) respondieron que es una solución que sustituyéndola en la ecuación diferencial se convierte en una igualdad satisfaciendo la ecuación inicial. En cuanto al significado de la constante de integración dos alumnos (9%) se refieren a que representa una infinidad de soluciones, un alumno (4.5%) define la ecuación diferencial en términos de una expresión que contiene derivadas.

Además se puede añadir algunos problemas de tipo cognitivo que han encontrado algunos investigadores que a continuación se mencionan:

Los aspectos cognitivos relacionados con el concepto de función resultante de la investigación realizada por (Hill, 2003) en donde se enuncian algunos conflictos en relación con el concepto de función son los que a continuación se mencionan:

"*Uno asociado a una falta de visión global sobre el comportamiento de las funciones. Este conflicto se puede detectar de inmediato al solicitar al alumno la tarea de proporcionada la gráfica de una función, construir su correspondiente función algebraica*."

"*Otro conflicto asociado a una concepción de la función como una función continua. Este conflicto se puede detectar solicitando la construcción de funciones diferentes que* *cumplan ciertas características. Por ejemplo, con el ejercicio: Se desea construir tres funciones diferentes* $f_1, f_2\, f_3$ *de los reales en los reales, tal que* $|f_1(x)| = |f_2(x)| = |f_3(x)| = 2,$ *para toda x real*".

**Conclusión del análisis cognitivo**.-Del análisis realizado anteriormente de los aspectos cognitivos, se observa que es necesario incluir en el cuestionario diagnóstico el concepto de función como una correspondencia entre el dominio y el contradominio de la función. Otro aspecto que se considerará en el diseño es que la derivada tiene que ir asociada con una serie de incrementos en las ordenadas con sus correspondientes abscisas, este es un concepto relacionado estrechamente con el concepto de diferencial el cual es manejado por Euler y que le da vida a la ecuación diferencial, es decir el diferencial es un objeto matemático que nos determina la variación de un parámetro con respecto al tiempo y que entendido es fundamental en la comprensión de cualquier fenómeno estudiado, pero en el discurso matemático escolar actual la asociación de los diferenciales se considera como una operación sobre la función algebraica correspondiente. En lo referente a la integral se incluirán actividades dirigidas a realizar la asociación de áreas múltiples de sus correspondientes intervalos en el eje de las abscisas y sus correspondientes ordenadas con la intención de justificar las sumatoria de todas las áreas consideradas bajo la curva en análisis y el manejo de los diferenciales asociados con sus incrementos determinarán junto con la ordenada correspondiente una sumatoria de áreas infinitesimales la que determinará el área total.

Finalmente se considerarán la asociación de curvas neoparamétricas con la solución general de la ecuación diferencial de tal manera que el alumno pueda obtener la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales, esto proporcionará una visión más específica de lo que significa una solución particular de la ecuación diferencial resuelta.

## 3.3.-Componente Didáctica.

### Análisis de los programas de ecuaciones diferenciales

Después de haber realizado un análisis muy general de la evolución de las ecuaciones diferenciales realizaremos una pequeña discusión en relación con los programas de la materia de ecuaciones diferenciales lo cual nos proporcionará una visión global de lo que se ha perdido en el proceso de transposición didáctica.

A continuación se muestra los programas de estudios de ecuaciones diferenciales en ingeniería de las 2 instituciones más grandes y reconocidas en México (U.N.A.M. y I.P.N.) con la intención de visualizar las características de los programas de estudio de la materia tabla 3.

**Características de programas de ecuaciones diferenciales**

| U.N.A.M. (Tema) | I.P.N. (Tema) |
|---|---|
| Objetivo: Analizar los elementos matemáticos que permitan al estudiante explicar los conceptos básicos de ecuaciones diferenciales y emplearlos en la resolución de problemas físicos y | Objetivo El alumno utilizará los conceptos fundamentales de ecuaciones diferenciales de manera eficiente en la solución de problemas en los distintos campos de ingeniería. |

| | |
|---|---|
| geométricos. | |
| 1.-Ecuaciones diferenciales lineales<br>2.-Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.<br>3.-Transformada de Laplace<br>4.-Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales | 1.-Introducción.<br>2.-Ecuaciones diferenciales de primer orden.<br>3.-Ecuaciones diferenciales lineales de n-ésimo orden con coeficientes constantes.<br>4.- Ecuaciones diferenciales lineales de n-ésimo orden con coeficientes constantes.<br>5.-Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.<br>6.-Transformada de Laplace. |

**Tabla 3**

Como puede observarse los objetivos de los dos programas coinciden en cuanto al tratamiento de los distintos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, con la finalidad de aplicar los diferentes métodos a la modelación de problemas en los diferentes campos de la ingeniería. Hay ciertas diferencias en cuanto a la inclusión de sistemas de ecuaciones diferenciales y a las ecuaciones en derivadas parciales que se incluyen en el temario de la U.N.A.M. y que no se incluyen en el temario del I.P.N. , aunque en términos generales los 2 temarios incluyen los diferentes métodos más comunes de resolución de ecuaciones diferenciales. En cuanto a las aplicaciones se puede observar que el temario de la U.N.A.M. no las incluye en cada tema de forma explícita , aunque queda implícito la impartición de aplicaciones, a su vez el temario del I.P.N. si incluye aplicaciones al final de cada tema como la ecuación de onda, calor, Laplace y modelo de Kronig y Penney, para las ecuaciones diferenciales de primer orden se incluyen aplicaciones de sistemas mecánicos, eléctricos, químicos y finalmente para las ecuaciones diferenciales no-lineales de primer orden se incluyen ecuaciones de Bernoulli, Ricatti y Clairaunt.

La impartición de los cursos está sustentada a los contenidos definidos en los programas de estudio, y como se puede ver los contenidos de los programas son enfocados a mostrar los diferentes métodos para la resolución de las ecuaciones diferenciales.

Enseguida se muestran los contenidos generales de los programas de estudio de la U.N.A.M. y del I.P.N. haciendo énfasis en los métodos utilizados en la solución de las ecuaciones diferenciales tabla 4.

**Comparación de programas de UNAM y IPN en cuanto a sus contenidos**

| Capítulo | U.N.A.M. | I.P.N. |
|---|---|---|
| I | Definición ecuación diferencial, solución de la ecuación diferencial, solución general y particular. Ecuación diferencial lineal de primer orden y solución de la homogénea asociada. Ecuación diferencial no homogénea. | Conceptos fundamentales de ecuaciones diferenciales, clasificación, expresión de ecuaciones diferenciales como modelos. |
| II | Sistemas de ecuaciones de primer orden, matrices de funciones, solución de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes. | Ecuaciones diferenciales de primer orden, variables separables, variables homogéneas exactas y factores integrantes, lineales y no lineales. |
| III | Transformada de Laplace como un operador, transformada de una función periódica, transformada inversa de Laplace, teorema de traslación en el dominio de la definición de convolución y teorema de convolución, aplicaciones de la transformada. | Ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes, no homogéneas con coeficientes constantes, coeficientes indeterminados, variación de parámetros. |
| IV | Definición de ecuación en derivadas parciales, serie generalizada de Fourier series seno y coseno, método de separación de variables, resolución de problemas con condiciones iniciales de frontera. | Resolución de ecuaciones diferenciales por los siguientes métodos, Cauchy-Euler, series de potencias, Fróbrenius y aplicaciones. |
| V | Métodos de solución por coeficientes indeterminados y variación de parámetros. | Sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes métodos de operadores y matriz exponencial. |

**Tabla 4**

Como se puede observar, los dos programas hacen énfasis sobre el aspecto algorítmico de las soluciones de ecuaciones diferenciales y poco espacio del curso se destina a la interpretación geométrica, así como para entender el comportamiento numérico y significado de la ecuación diferencial.

En cuanto la forma de la impartición del curso se enfoca fundamentalmente en la exposición de los distintos métodos de solución de ecuaciones diferenciales usando, como recurso didáctico el pizarrón y el gis, hay contados profesores que imparten el curso basados en contextos de aplicación, pues la mayoría de los cursos dejan las aplicaciones al final de los temas propuestos que parecen ser más artificiales que reales. En algunos casos escasos el profesor utiliza algún recurso de tipo computacional con la finalidad de apoyar el curso con aplicaciones que son comunes en ciertas áreas de la ingeniería.

Como se puede observar los contenidos impartidos son fundamentalmente sobre las soluciones de las ecuaciones diferenciales, dándole mayor importancia al aspecto algorítmico estando casi ausente el aspecto de aplicaciones realistas en el contexto de la formación del ingeniero.

Análisis de los programas de estudio de la materia de ecuaciones diferenciales de I.P.N. y U.N.A.M.

Los cursos de ecuaciones diferenciales de las dos instituciones se encuentran ubicados en los primeros semestres de la carrera, esto debido a que forman parte de las materias básicas de tipo formativo, debido a que el estudiante las utilizará como una herramienta en los cursos posteriores de carácter tecnológico. En relación con el objetivo general se observa que está dirigido al aprendizaje de los diferentes métodos de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, la diferencia entre los dos temarios es que la U.N.A.M. dirige sus aplicaciones a la resolución de problemas de tipo físico y geométrico y el I.P.N. a problemas relacionados con la ingeniería de comunicaciones y electrónica, pero fundamentalmente el objetivo es probar la existencia y unicidad de las soluciones.

En cuanto a la bibliografía que presentan como básica las dos instituciones tenemos lo siguiente tabla 5.

**Bibliografía utilizada en el curso de ecuaciones diferenciales en I.P.N. y U.N.A.M.**

| **I.P.N.** | **U.N.A.M.** |
|---|---|
| Textos básicos | Textos básicos |
| 1.-Denis G. Zill, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones, Grupo editorial Iberoamérica. | 1.-Garcia M.,P y de la Lanza E., Ecuaciones diferenciales y en diferencias, editorial Limusa,México,1984. |
| 2.-George F. Simmons, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas, Mc. Graw hill | 2.-Rainville E. D. Y Bedient P., Ecuaciones diferenciales, Ed. Internacional,1987. |
| 3.-Sheply L. Ross, Introducción a las ecuaciones diferenciales aplicadas, Editorial Prentice Hall. | |
| 4.-Murray R. Spiegel, Ecuaciones diferenciales aplicadas, Editorial Prentice Hall. | |
| 5.-William E. Boyce,Richard C. Diprima, Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, Editorial Limusa. | |
| 6.-Edwards/Penney, Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones, Editorial Prentice Hall Hispanoamérica. | |
| 7.-James G. Holbrook, Transformada de Laplace para ingenieros en electrónica, Editorial Limusa-Noriega. | |

| | |
|---|---|
| 8.-Takeuchi, Sucesiones y series, Vol. I y II Editorial Limusa. | |
| Textos complementarios | Textos complementarios |
| 1.-Erwing Kreyszing. Matemáticas avanzadas para ingeniería vol. I y II Editorial Limusa. | 1.-Carmona J.I., Ecuaciones diferenciales, Alhambra Mexicana, México, 1988. |
| 2.-Kaj.L. Nielsen, Ecuaciones diferenciales, Nielsen.,CECSA. | 2.-Zill D., Ecuaciones diferenciales con aplicaciones, Grupo editorial Iberoamérica, México, 1988. |
| 3.-Ricahard Bronson, Ecuaciones diferenciales modernas, Serie Chaum Mc. Graw Hill. | 3.-Edwards y Penney; Ecuaciones diferenciales elementales, Prentice Hall Hiberoamérica., México, 1986. |
| 4.-KA Plan, Matemáticas avanzadas para estudiantes de ingeniería, Editorial Sistemas Técnicos de Edición. | |
| 5.-Robert, Charles E. Jr, Ecuaciones diferenciales ordinarias un enfoque al cálculo numérico, Editorial Prentice Hall Iberoamérica. | |

**Tabla 5**

Los textos básicos que sugiere el I.P.N. están más dirigidos para aplicaciones en diferentes campos de la ingeniería, como son el Zill, Simmons y Ross, en cuanto a lo que se refiere a la transformada de Laplace pareces ser que prevalece el enfoque de aplicación en ingeniería electrónica y comunicaciones.

En comparación el temario de la U.N.A.M. los textos básicos sugeridos son los de Rainville y García que están más enfocados al análisis de significados de las ecuaciones diferenciales relacionados con el significado geométrico y su utilización en la física, es importante notar que ambos programas de estudio son de carreras de ingeniería, en la U.N.A.M. Ingeniería Mecánica Eléctrica y en el I.P.N. Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica.

La diferencia básica entre los programas de estudio es el ámbito de aplicación, mientras que en el I.P.N. se solicita aplicaciones en un ámbito de aplicación específico de la carrera, en la U.N.A.M. se requiere que el alumno tenga conocimientos que incidan en el significado de las ecuaciones diferenciales y problemas de existencia y unicidad de las soluciones, y en la parte de Aplicación se limitan al aspecto geométrico y físico.

Se puede observar que los dos enfoques son en las Carreras en donde la matemática es una materia formativa, la cual se utilizará durante la preparación del futuro profesionista, y el enfoque ya sea en el ámbito general de aplicación o bien en el aspecto geométrico y físico de las mismas, redundará en el uso de las ecuaciones diferenciales en cursos posteriores a la formación y encontrará aplicaciones más específicas según las materias de definidas en el plan de estudio en particular.

Antes de realizar las conclusiones del análisis de la componente didáctica se considera importante considerar los siguientes aspectos relacionados son los elementos algorítmicos, gráficos y numéricos que se utilizan en la impartición de un curso de ecuaciones diferenciales y que son determinantes en el entendimiento y manejo que poseen los alumnos del concepto de ecuación diferencial.

a)Propiamente el concepto de Ecuación Diferencial aparece a fines del siglo diecisiete con los trabajos de Hospital y Agnesi que son los que vienen a sentar las bases acerca del entendimiento de lo que eran los diferenciales tanto de primer, segundo y tercer orden, posteriormente Cauchy introduce el concepto de derivada que es el que se mantiene actualmente, notamos que en este aspecto la transposición didáctica ha eliminado los aspectos de origen geométrico que sustenta el calculo diferencial e integral. Es en el tiempo de Cauchy donde se introduce el concepto de derivada como el cociente entre 2 números llamados diferenciales, es aquí donde se hace énfasis sobre el aspecto de tipo algebraico, pero es en este momento donde el discurso matemático escolar considera a la derivada $dy/dx$ como un operador que se puede aplicar a cualquier función en términos de la variable x, considerando a la derivada como una operación algorítmica olvidando la razón que dio origen al diferencial.

b)La expresión diferencial introducida de pdx +qdy por Cauchy y Euler es introducida como la diferencial de una función u=u(x,y) de donde du=0, para llegar finalmente a la solución u(x,y)=C. En el caso que no pueda ser integrada la expresión construyen un factor de integración el cual permita realizar la integración en cuestión. Esta situación no permanece en el discurso matemático actual, los principales hechos que demuestran que se han perdido elementos en cuanto a la unión que existe entre los objetos de integración y derivación lo constituye la aparición y demostración del Teorema Fundamental del Álgebra, realizado por Gauss, en el cual se afirma que todo polinomio de grado n en C, tiene exactamente n ceros complejos iguales o diferentes, por lo que C representa un dominio numérico que provee soluciones a cualquier ecuación algebraica, así como la aparición de la teoría de las funciones de variable compleja que presentan la teoría de solubilidad para ecuaciones lineales de orden n y que son una herramienta invaluable para modelar cualquier fenómeno de la naturaleza.

c)La manera de encontrar las soluciones a las ecuaciones diferenciales en el discurso matemático escolar es manejada en tres aspectos diferentes : algebraico, numérico y geométrico, y de los tres el que predomina en los programas es el algebraico, perdiéndose los aspectos de tipo numérico que se deja en los programas de estudio de métodos numéricos y el geométrico se le deja en el manejo del tratamiento de isoclínas y campos de pendientes de las curvas, el aspecto de gráficas isoclínas y campos de pendiente en la mayoría de los libros de texto se encuentran al inicio y posteriormente en la parte del desarrollo del curso casi se olvidan, quizá por la poca importancia y el tiempo mas extenso que pueda requerir una representación geométrica relacionada con la representación algebraica asociada, se olvida que las representaciones geométricas históricamente han sido razón de del entendimiento profundo de los objetos matemáticos más importantes.

d)Una cuestión crucial en la concepción actual del curso de ecuaciones diferenciales es su carácter algorítmico y algebraico, el cual está determinado por la relación muy cercana que existe del desarrollo del álgebra (como búsqueda de las raíces de un polinomio en términos de radicales) y de las ecuaciones diferenciales lineales (en cuanto a la integración de cuadraturas). Incluso aún en la concepción “moderna” de operadores lineales, esta herencia está presente. Es evidente que el programa actual obliga a los alumnos que piensen sobre los métodos algorítmicos de solución que sobre las soluciones geométricas espaciales de solución o bien iteradas que aproximen a la solución de la ecuación diferencial.

e)La prevalescencia del aspecto algebraico también es debido a los siguientes elementos:

Los procedimientos son fáciles de aprender, pero que se han constituido en un rechazo de las tendencias cognitivas y conductistas de la educación matemática actual. Por otro lado el aprendizaje de las matemáticas se ha orientado a la resolución de problemas como una concepción didáctica epistémica distinta.

La transformada de Laplace ofrece un impulso a mediados de este siglo del uso de los procedimientos algebraicos para la solución de ecuaciones diferenciales lo cual constituye un reforzamiento de los procedimientos algebraicos manejados en el discurso matemático actual.

Como comentario final de los programas de ecuaciones diferenciales éstos incluyen los sistemas de ecuaciones diferenciales donde se propone resolverlas por algunos métodos específicos como la matriz exponencial, así como la transformada de Lapace se utiliza para resolver las ecuaciones diferenciales de forma simplificada, adicionalmente los programas describen el tratamiento de las ecuaciones diferenciales parciales, con valores frontera y algunos métodos de solución como es la serie de Fourier y el de separación de variables. Por la extensión de los temas de ecuaciones diferenciales y el número tan grande de procedimientos solo se llega a ver en el salón de clase los procedimientos de solución para ecuaciones diferenciales de lineales de orden n y ocasionalmente se alcanza a cubrir con el tema de sistemas de ecuaciones diferenciales, dejándose para cursos especializados el tema de ecuaciones diferenciales parciales. Es evidente que el tratamiento que hacen los programas sobre los temas es netamente algorítmico como se había apuntado anteriormente lo cual le deja despropósito de significado para el alumno en cuanto a la relación del modelo matemático y el fenómeno físico en cuestión.

Para dejar sentadas las bases con relación al uso que los alumnos realizarán en el manejo de los diferenciales en las actividades didácticas que se pretenden diseñar más adelante es necesario realizar algunos comentarios teóricos sobre el concepto de pensamiento variacional y que sirve de marco para consolidar la componente didáctica que nos ocupa.

A manera de ejemplo, centraremos la atención en el movimiento, diremos que existe en la naturaleza independientemente de la conciencia, ya que es un proceso autónomo a nuestras elaboraciones teóricas; sin embargo, nuestra visión del movimiento requiere, esclarecer el concepto del cambio, con la que podemos enfocar los sucesivos estados, como un primer nivel de elaboración teórica, una abstracción de primer orden.

“*Este cambio, que ha abstraído del movimiento un aspecto; el de sus estados sucesivos, puede ser sometido a un nuevo proceso de abstracción de segundo orden y conducir a una nueva elaboración a la que llamaremos variación*” (Cantoral 1997). De este modo, la noción de cambio da lugar a la de variación, la cual describe las cualidades del cambio y nos proporciona elementos para saber su proceso de transformación. En este sentido, la variación trata de la medida de los cambios

El pensamiento y lenguaje variacional que centra su interés en los procesos del pensamiento que inciden en el estudio de las matemáticas del cambio y entre cuyos temas podemos encontrar las derivadas sucesivas y las ecuaciones diferenciales. Los cambios pueden considerarse en muchos niveles: ¿cuáles son los tipos de cambios posibles?, ¿Cómo se resuelven las ecuaciones?

El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de cambio en las actividades de la vida cotidiana, las cuales pueden ser cuantificables. Esto ha sido estudiado desde la didáctica en los años 70 en Europa (Vasco, 2003).

Los procesos del pensamiento y lenguaje variacional entre los alumnos se requiere de procesos temporalmente prolongados a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos de pensamiento asociado, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional.

"Cada concepto avanzado es basado en conceptos elementales, y no puede ser captado fuera de un sólido de conceptos y llegan a ser significativos dentro de una estructura, es decir, los conceptos de matemática avanzada llevan un alto grado de complejidad y solamente pueden ser comprendidos dentro de una red total de otros conceptos, por ejemplo, los estudiantes no pueden entender que significa una ecuación diferencial a menos que tengan bien entendido el concepto de diferenciación, no pueden captar las ideas tras los métodos de solución fuera de entender la integración vinculada a ideas visuales y numéricas" (Cantoral, 1996).

El tratamiento que actualmente se le da al concepto de ecuación diferencial de primer y segundo orden contiene derivadas, mientras que el escrito de Euler contiene diferenciales. Así pues la razón por la cual las ecuaciones diferenciales se llaman así es porque en un principio eran ecuaciones que relacionan diferenciales en su estructura.

En relación con el concepto de ecuación diferencial que estamos estudiando Benítez concluye "*En la actualidad se usa este nombre para ecuaciones con derivadas en las cuales el nombre pierde su significado original, es mas este nombre no tiene un significado que está relacionado de manera directa con el tipo de ecuaciones a las que representa, a pesar de esto (Resnick, 1983,pp 314) dice: Una ecuación que contiene derivadas se llama ecuación diferencial por contener derivadas.*

*Este es un caso que con el transcurso del tiempo se ha perdido el significado del nombre de un objeto matemático (el objeto matemático son las ecuaciones diferenciales).*" (Benítez, 1993).

En el aspecto del tratamiento que se les da a los diferenciales Benítez añade "*Así pues en la actualidad el diferencial adquiere significaciones de acuerdo al contexto en que se encuentre, en la derivada no tiene significación, y en la integral adquiere una significación operacional, cosa que no ocurre en el escrito de Euler donde el diferencial tiene el mismo significado ya sea que aparezca como* $dx/dy$ *o como parte de una integral*." (Benites,1993).

Otro aspecto poco comprendido dentro del manejo de los diferenciales es el relacionado con el significado del primer, segundo y tercer diferencias, aquí realizaremos una revisión muy breve sobre estos conceptos los cuales de alguna forma sirven de base a las ecuaciones diferenciales como comento Benítez en el párrafo anterior. (Castañeda, 2000) realiza un análisis bastante extenso y profundo sobre estos conceptos, inicia con la determinación de una diferencia infinitesimal de la siguiente manera:

**Conclusión del análisis didáctico.-**Como en el diseño de la actividad se considerarán actividades didácticas considerando la metodología de la matemática en contexto utilizando a la física como elemento básico de relación con la vida real, se trabajarán sobre las funciones desplazamiento, velocidad y aceleración de una partícula en movimiento.

En la elaboración de las actividades didácticas es necesario considerar los aspectos de tipo gráfico y algorítmico, introduciendo el concepto de variación de los diferenciales, esta característica de variación le adicionará al fenómeno estudiado un carácter dinámico el cual ayudará al alumno a considerar los aspectos continuos de variación del fenómeno estudiado.

### 3.4.-Obstáculos epistemológicos, cognitivos y didácticos en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales (Hernández, 1995).

Para finalizar este capítulo es necesario mencionar que tipos de obstáculos se pueden presentar en la enseñanza o el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, estos obstáculos se considerarán previos al diseño del cuestionario diagnóstico.

La matemática en el contexto de las ciencias en su fase didáctica clasifica a los obstáculos en epistemológicos, cognitivos, didácticos y ontogénicos, en este apartado se identificará los tres primeros tipos de obstáculos.

**Obstáculos epistemológicos**: Se presentan debido a un conocimiento superficial de las relaciones que tienen los objetos matemáticos de función, derivada, integral y ecuación diferencial, así como las implicaciones gráficas con las representaciones geométricas son las que impiden establecer una relación entre la ecuación diferencial y el fenómeno en la vida real.

Otro obstáculo es que en la actualidad se utiliza el nombre de ecuaciones diferenciales para definir relaciones operacionales de derivación entre las variables dependientes y la variable independiente, es decir el objeto se considera que es una ecuación diferencial por la razón de que contiene derivadas. Esto último en contraposición a como originalmente lo concibió Euler, en donde la ecuación diferencial representa a un conjunto de diferenciales relacionados entre sí, que representan la variación de los parámetros en el tiempo o en el espacio del fenómeno físico estudiado.

Existe otro problema en relación con la variación de los diferenciales, este es originado por el pobre significado geométrico que tienen los alumnos en relación con el significado del concepto de diferencial de primer, segundo y de orden enésimo el cual esta definido claramente en los trabajos de Hospital y Agnesi, pero que en discurso matemático esta ausente.

**Obstáculos cognitivos**: En este apartado hablaremos sobre los obstáculos cognitivos que presentan las ecuaciones diferenciales, este concepto de obstáculo lo trataremos como lo concibió originalmente Bachelard, Brousseau y Cornu (Bachelard, 1987, pp15-21, Cornu, 1991 pp 158). La definición de ecuación diferencial en el texto de (Kreyszing, p 1, 1972) “Una relación la cual involucra una o algunas derivadas de una no especificada función de y de x con respecto a x; la relación puede también involucrar a y en si misma, dando funciones de x y constantes.” Esta definición nos da una idea clara de lo que es una ecuación diferencial, ahora en relación con la notación usada es la que uso Cauchy para la definición de ecuaciones diferenciales ordinarias, en la cual utiliza los siguientes símbolos: dy/dx, y´, DxY, pero al aplicar el método de “separación de variables” se interpreta la derivada como un cociente diferencial pues Bernoulli, Hospital y Agnesi interpretaban las diferenciales como magnitudes extremadamente pequeñas. Lagrange introduce el término de derivada y posteriormente Cauchy la definición actual, por lo que la ecuación diferencial se convierte también en ecuación derivacional, en derivadas, por lo que muchos autores en la actualidad toman la separación de variables como una operación en donde el operador derivada es el más importante, esto es lo que origina el conflicto de enseñanza-aprendizaje.

Ahora tratando el concepto de solución de una ecuación diferencial, los autores la definen por ejemplo “*Se dice que una función f cualquiera, definida en un intervalo I, es una solución de una ecuación diferencial en el intervalo, si sustituida en dicha ecuación la* *reduce a una identidad (Zill, 2006 p3). Aunque en algunas soluciones se presenten problemas cuando las soluciones se presentan como una expresión algebraica que no es función (pero que define implícitamente la función como y = f(x), solución implícita cuando es una relación g(x,y)=0)".*

Algunos otros textos (Zill , P8,Makarrnko, p12 y Simmons, p7) recurren a la justificación mediante el teorema de existencia y unicidad de las soluciones para justificar la existencia de las soluciones encontradas, lo cual origina un obstáculo en la enseñanza del concepto de solución debido al problema de formalidad en las matemáticas utilizadas para este fin. Otro aspecto que obstaculiza el entendimiento de la solución es querer que los alumnos asimilen los métodos algebraicos para llegar a la solución que en este caso será una función, evadiéndose con esto las representaciones gráficas que pudieran arrojar luz sobre el concepto de solución.

Parecería ser que en las ecuaciones diferenciales la clave es encontrar un factor integrante el cual nos lleve a la solución general y después llegar a la solución particular aplicando las condiciones límite, adicionalmente a esto es aplicable a las ecuaciones exactas, parece ser que lo que se trata de encontrar son artificios para llegar a la solución particular, no hay esa esencia subyacente al conocimiento de encontrar de la solución a la ecuación mas que un formalismo mecánico de la algoritmia.

Otro aspecto que se considera un obstáculo es la transición entre las ecuaciones de primer orden y las de segundo orden, en el caso de la ecuación cuadrática se aborda de una forma muy artificial, proponiendo la solución a la ecuación y después reduciéndola a un polinomio característico, esto quizá sea porque a los matemáticos de 1836 decidieron cambiar el punto de vista de un polinomio de segundo grado a un problema de encontrar las raíces de la ecuación cuadrática.

Con relación a los obstáculos de modelación estos se presentan cuando el alumno trata de representar un fenómeno real mediante un modelo matemático, en cuanto a las ecuaciones diferenciales de primer orden y de tipo exponencial se distinguen algunas aplicaciones como son: la conducción de calor, movimiento rectilíneo, circuitos eléctricos RL y RC, decaimiento radioactivo, mezclas, crecimiento poblacional, etcétera por el lado de los modelos de tipo logísticos se distinguen por ejemplo: crecimiento poblacional, propagación de la innovación tecnológica y procesos químicos. En cuanto a las ecuaciones diferenciales de segundo orden se distinguen algunos modelos aplicables en distintas áreas como son: circuitos eléctricos RLC, vibraciones mecánicas, análisis del movimiento acelerado, etcétera. Los problemas que se presentan son cuando el alumno intenta encontrar el modelo matemático el cual describe el comportamiento del fenómeno en la vida real. Los obstáculos que se presentan en los modelos se encuentran en los siguientes aspectos:

Al alumno le cuesta trabajo pensar en la traducción de ciertos parámetros como son: la velocidad de movimiento, velocidad de crecimiento, propagación del calor en el tiempo, velocidad de enfriamiento, esfuerzos en un volumen etc., el problema es pasar del manejo de las variables a la expresión diferencial.

Es difícil aislar las variables que intervienen en el fenómeno y jerarquizar su importancia en el modelo propuesto, para el alumno es fácil enumerar las variables que intervienen en el fenómeno, pero es difícil para él discriminar cuales de ellas son fundamentales en el comportamiento del fenómeno en el tiempo, es por lo tanto básico que en el planteamiento de la ecuación diferencial identifique cuales de ellas son fundamentales.

**Obstáculos didácticos**: El alumno aprende los procedimientos algorítmicos como consecuencia del currículo escolar, pero no por la comprensión de los objetos matemáticos, por otro lado la falta de vinculación entre la parte gráfica y numérica es evidente en el curso, esto dificulta el reconocimiento y resolución de una ecuación diferencial relacionada con el fenómeno físico de donde procede, esta característica de desvinculación es la que establece una barrera entre las ecuaciones diferenciales y las diferentes aplicaciones en la vida real.

Un ejemplo de obstáculo didáctico de las ecuaciones diferenciales consiste precisamente que cuando el profesor realiza la exposición de los contenidos del programa de estudio, resulta que las temáticas ya han sido definidas por un proceso muy antiguo (mediados del siglo XVIII), donde se definen el orden de los temas por enseñar, este proceso es el conocido con el nombre de "Transposición Didáctica", la cual desvincula el conocimiento matemático del contexto, esta descontextualización crea precisamente un obstáculo cognitivo cuando el alumno trata de modelar los fenómenos de la realidad.

### *3.5.- Conclusiones sobre el análisis epistemológico, cognitivo y didáctico de las ecuaciones diferenciales.*

Para finalizar este capítulo es necesario realizar una serie de conclusiones las cuales identifiquen y sirvan de guía para el diseño de las actividades didácticas que se plantearán en el siguiente capítulo.

a)El enfoque que ofrecen los programas de estudio y los libros de texto son muy similares en cuanto al enfoque algorítmico utilizado en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y esto es influido por la propuesta realizada por Euler en la antigüedad. Esto quiere decir que es necesario dar un enfoque del curso de ecuaciones diferenciales usando el enfoque geométrico y algebraico.

b)Es necesario nutrir el discurso matemático escolar con elementos que fueron transformando a las ecuaciones diferenciales como un objeto matemático que tiene vida y ha evolucionado durante mucho tiempo

c)Es importante considerar en la impartición de los cursos de ecuaciones diferenciales el aspecto de contextualización de los problemas, pues si no es así el alumno solo aplicará reglas para resolver problemas, pero tendrá problemas para poder realizar la modelación de problemas reales dentro de su ámbito laboral.

d)Uno de los aspectos menos comprendidos es el significado profundo de las ecuaciones diferenciales, es decir que los alumnos saben muy bien aplicar los diferentes algoritmos de solución para resolver las ecuaciones diferenciales, pero rara vez comprenden como esta relacionado el modelo deducido con el fenómeno estudiado, esto es un obstáculo el cual impide a los futuros profesionales tener una visión clara de los aspectos prácticos vistos desde el punto de vista de continuidad de los fenómenos. Además los alumnos tienen problemas para plantear los modelos matemáticos que describe el fenómeno en cuestión.

Considerando los problemas que los alumnos tienen al resolver una ecuación diferencial y tomando en cuenta otros objetos matemáticos como el diferencial, derivada e integral, se diseñará un cuestionario diagnóstico el cual nos permita identificar las necesidades de diseño de las actividades didácticas para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme.

## 4.0 Diseño de actividades de aprendizaje

Basados en el análisis de los componentes analizados en el capítulo anterior diseñaremos un cuestionario diagnóstico el cual tendrá el objetivo de poder identificar algunos de los problemas de tipo cognitivo y epistemológico de los alumnos y posteriormente considerarlos como necesidades en el diseño de las actividades de aprendizaje. El cuestionario se aplicó a dos grupos de alumnos de la carrera de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán (U.N.A.M.), estos alumnos han cursado las siguientes materias: álgebra, geometría analítica y cálculo diferencial e integral los cuales son anteriores a la impartición del curso de ecuaciones diferenciales. El cuestionario fue aplicado a 88 alumnos en grupos independientes, sin la utilización de calculadora o cualquier otra herramienta de cálculo, el tiempo que se les dio para la resolución del cuestionario fue de hora y media. Se indicó a los alumnos que no podían comunicarse entre sí para sobre la solución de los ejercicios, además se les hizo notar que con los conocimientos que poseían era suficientes para poder resolver el cuestionario diagnóstico.

### 4.1-Diseño del Cuestionario Diagnóstico

**Los siguientes ejercicios son propuestos para realizar una evaluación previa sobre algunos objetos de cálculo diferencial e integral previos al curso de ecuaciones diferenciales.**

Te solicito que contestes los siguientes ejercicios, agradeciéndote tu participación en esta actividad.

1.-Se tiene 2 puntos P y Q en una curva continua, el punto P se encuentra fijo y el punto Q se mueve aproximándose al punto P, Cauchy define la derivada de la siguiente forma (figura13):

$$\frac{df(x_1)}{dx} = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

**Relación de abscisas y ordenadas en una curva**

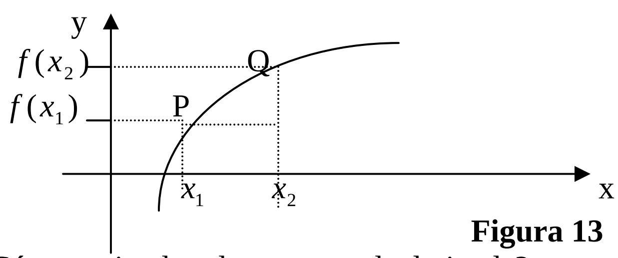



**Figura 13**

.¿Cómo entiendes el concepto de derivada?

2.-¿Cuál es el concepto de la diferencia de 2 abscisas $x_1$ y $x_2$ muy próximas sobre la recta numérica? observa la figura 14.

**Diferencia de abscisas en la recta numérica.**

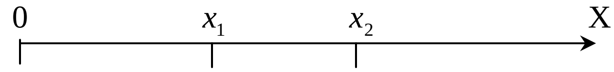



**Figura 14**

¿Puedes plantear una fórmula de cálculo de esta diferencia entre estas dos abscisas?

3.-En el uso de la definición de primera derivada visto en el ejercicio número 1 se maneja el concepto de primeras diferencias, que es fundamental en la definición de la derivada según Cauchy .La segunda derivada y derivadas sucesivas están fundamentadas en el concepto de segundas diferencias y diferencias sucesivas (terceras diferencia, cuartas diferencias, etc.), como se puede observar en los siguientes gráficos realizados por el Barón de Hospital en el siglo XVIII. En estas figuras existen dos enfoques diferentes sobre la explicación de las diferencias.

a) Usando un segmento rectilíneo AB para observar la variación lineal figura 15.

**Concepto geométrico de primera y segunda diferencia**

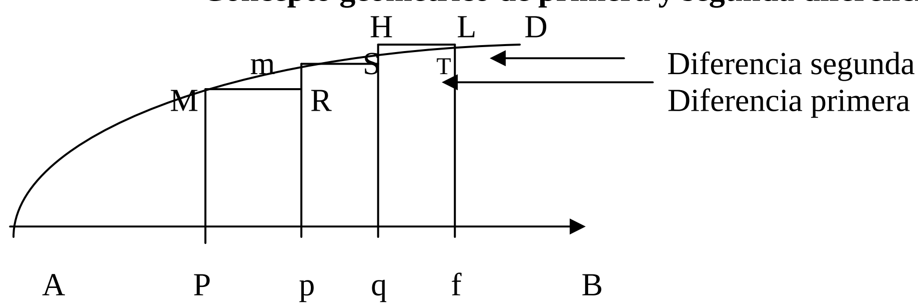



**Figura 15**

b) Mediante el uso de un arco en el que se localizan varios puntos en la curva los cuales se unen en un punto común B como centro figura 16.

**Diferencias infinitesimales angulares**

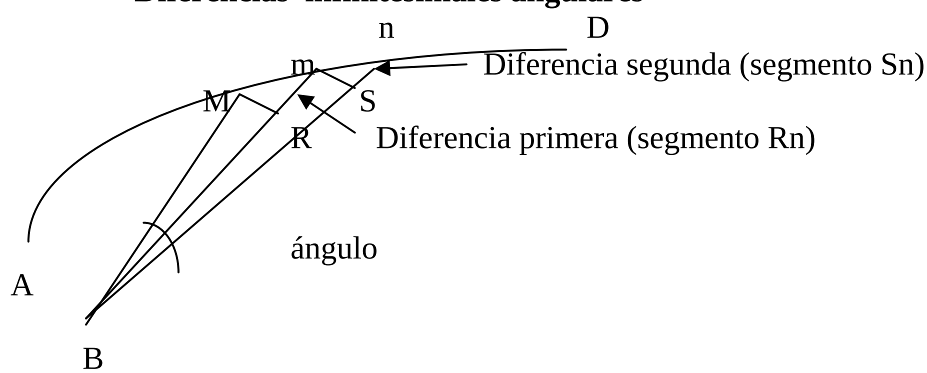
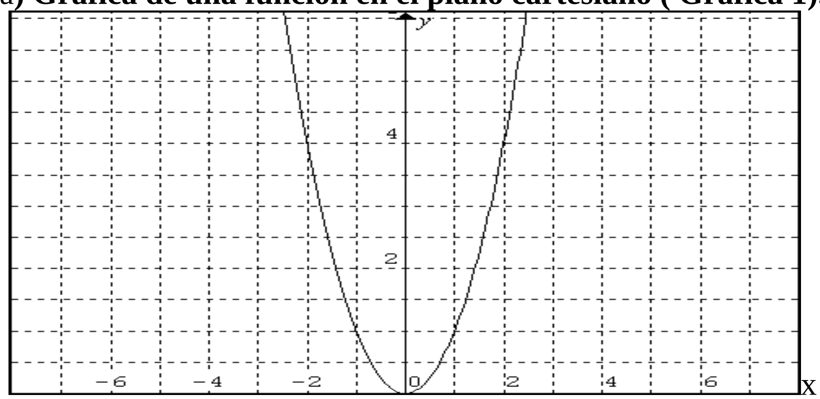



**Figura 16**

¿Podrías comentar lo que significan las segundas diferencias en relación con los esquemas que se mostraron anteriormente?

4.-Explica brevemente el concepto de función, considera las siguientes representaciones:

a) **Gráfica de una función en el plano cartesiano ( Gráfica 1).**




Gráfica 1

b) **Tabla de valores para la función** $y = x^2$ **, (ver tabla 6 ) .**

| | |
|---|---|
| Ecuación | |
| $y = x^2$ | |
| x | y |
| -------------- | |
| 7.0 | 49.0 |
| 6.0 | 36.0 |
| 5.0 | 25.0 |
| 4.0 | 16.0 |
| 3.0 | 9.0 |
| 2.0 | 4.0 |
| 1.0 | 1.0 |
| 0 | 0 |

Tabla 6

c) **Conjuntos de datos, ( figura 17).**

**Conjunto de datos dominio y contradominio**

Dominio Contradominio

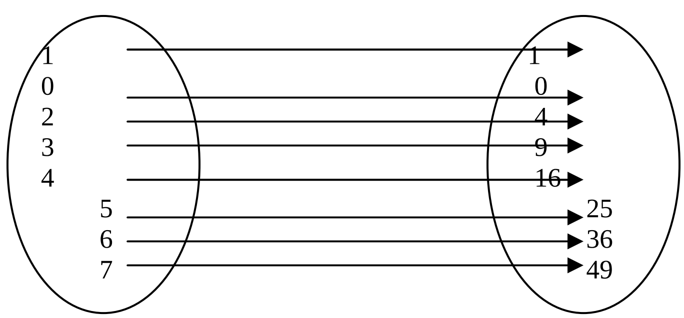



Figura 17

d) **Tiro Parabólico de un proyectil, ( figura 18).**

**Tiro parabólico de un proyectil**

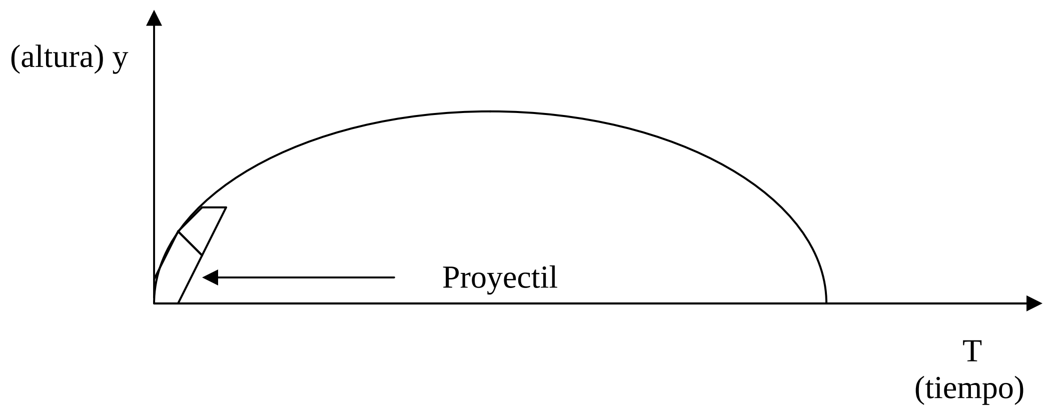



**Figura 18**

5.-De las siguientes funciones identifica el tipo de curva a que se refiere, por ejemplo:

a) $x^2 + y^2 = 16$ Circunferencia

b) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{8} = 1$ ____________________

c) $x * y = 9$ ____________________

d) $y = 15x^2 - 5x$ ____________________

e) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 25 = 0$ ____________________

6.-En la siguiente integral $\displaystyle\int_{x=1}^{x=3} 2x\,dx$

¿Qué significado físico-geométrico tiene para ti el realizar la integración en los límites indicados?

7.-En el caso de la ecuación $x^2 + 2x + 3 = 0$ contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Que significa resolver esta ecuación?

b) Si te es posible resuélvela usa cualquier método.

8.-En el caso de la ecuación diferencial y’ = 2x contesta las siguientes preguntas.

a) Resuelve la ecuación diferencial.

b) ¿Qué significa resolver la ecuación diferencial?

c) Si resolviste la ecuación diferencial planteada ¿Cuál es la interpretación que le atribuyes a la constante C de la nueva función obtenida?

9.-Observe los 2 procedimientos siguientes.

Derivación de la función

$y = x^2$

$\frac{dy}{dx} = 2x$

Integración de la función

y’ = 2x

$\frac{dy}{dx} = 2x$

dy = 2xdx

Integrando ambos lados de la igualdad

$\int dy = \int 2xdx$

$y = x^2 + C$

a) ¿Qué relación encuentras entre los 2 procedimientos?

b) ¿Qué interpretación le das al término independiente “C” resultado de la integración.

**Aplicación de la derivada**

10.-Obtener las dimensiones de un rectángulo con perímetro 240 metros, de manera que el rectángulo sea de área máxima.

**Aplicación de la integral**

11.-En una columna rectangular con base cuadrada de un metro de lado, la densidad del aire ρ (en kilogramo / metro) depende de la altura h y está dada por la fórmula: $\rho(h) = \frac{1.28}{h^2 + 1}$ .Calcular la masa de la columna de aire de 10 metros de altura, puedes utilizar la siguiente integral $\int f(h)dh = \int \frac{1.28}{h^2 + 1} dh$ y la fórmula para integrar la expresión anterior es: $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan(\frac{u}{a}) + C$

12.-Obtenga las derivadas de las siguientes funciones.

a) $y = 5x^2 + 2x - 3$

b) y = Sen(2x) – Cos(x)

13.-Obtenga las siguientes integrales.

a) $\int_{1}^{3} x^2 dx$

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Sen(x)dx$

c) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx$

**Nota:** Puede dejar indicadas las operaciones necesarias sin obtener un resultado numérico.
14.-¿Qué interpretación le das a una ecuación diferencial en lo que se refiere a su aplicación en el mundo físico?

## 4.2.-Análisis de los resultados del cuestionario diagnóstico

El análisis de los resultados arrojados por la aplicación del cuestionario diagnóstico a los alumnos que han cursado las materias de álgebra, geometría analítica y cálculo diferencial e integral nos muestra los siguientes resultados (88 cuestionarios) tabla 7:

## Análisis de los resultados del cuestionario diagnóstico.

| **Tema de la pregunta** | **Total de aciertos por pregunta** | **Porcentaje de aciertos** |
|---|---|---|
| 1.-Concepto de. Derivada. | 44 | 50 |
| 2.-Concepto de. Diferencial. | 9 | 10 |
| 3.-Concepto .1ª.y 2da diferencia. | 20 | 23 |
| 4.-Concepto de función. | 56 | 64 |
| 5.-Identificación de curvas-funciones. | 33 | 38 |
| 6.-Significado de integral. | 37 | 42 |
| 7.-Significado de solución de polinomio. | 57 | 65 |
| 8.-Solución y significado de ecuación diferencial. | 15 | 17 |
| 9.-Comparación derivada e integral, significado de la constante de integración. | 36 | 41 |
| 10.-Aplicación de derivada. | 3 | 3 |

| | | |
|---|---|---|
| 11.-Aplicación de integral. | 3 | 3 |
| 12.-Solución de derivadas. | 83 | 94 |
| 13.-Solución de integrales. | 50 | 57 |
| 14.-Significado de las ecuaciones diferenciales en la vida diaria. | 14 | 16 |

**Tabla 7**

El resultado de la evaluación diagnóstica muestra que los alumnos poseen los elementos básicos algorítmicos(función, derivada e integral), aunque se presentan problemas en cuanto al entendimiento de el significado de la ecuación diferencial y su relación con las condiciones iniciales presentes en un problema, en el caso de los temas de función, diferencias, constante de integración y aplicaciones el resultado fue bueno por lo que conviene considerar la inclusión de estos temas en el diseño de la actividad.

Es porque el alumno no comprende plenamente cual es el significado de una ecuación diferencial en su contexto real de vida que se justifica la elaboración de una actividad didáctica en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en el contexto de la física, para esto se utilizarán fenómenos de movimiento de partículas en el plano tanto del movimiento rectilíneo como el movimiento circular. Es necesario relacionar los aspectos de tipo algebraico y geométrico, la intención es que el alumno descubra de una forma autónoma el conocimiento, lo cual lo llevará a obtener un saber matemático significativo y con esto relacionar los fenómenos de la vida diaria, se intenta producir en el alumno una génesis del conocimiento matemático y con esto lograr aprendizajes significativos a largo plazo, y lo más relevante es que los alumnos podrán aplicar ese conocimiento cualquiera que sea el contexto en el que se presente el problema, lo cual le permitirá al futuro profesionista asimilar el concepto de una ecuación diferencial aplicada a los fenómenos de variación continua en el tiempo, este último aspecto de continuidad es de los menos entendido en la aplicación de las ecuaciones diferenciales.

En cuanto al análisis del cuestionario es importante realizar las siguientes observaciones: El alumno obtuvo un buen resultado en el concepto de función algebraicamente, aunque se observan ciertas limitaciones en la representación geométrica de la función lo cual le permite tener un panorama restringido de los aspectos de tipo geométrico, y con esto la falta de relación global entre los aspectos de conjuntos-tabular-algebraico y fenómeno físico, pues al presentarse estas distintas formas de visualizar el concepto de función la define tomando como base los conjuntos de dominio y contra dominio así como su correspondencia, lo cual nos hace ver la forma limitada que tiene el alumno del concepto de función. Otro aspecto es que los alumnos tienen una limitada claridad espacial de las curvas y sus representaciones geométricas, esto se manifiesta en la confusión que tienen en la identificación de las funciones, considerando únicamente su representación de tipo algebraica: La falta de visualización espacial de las funciones algebraicas también se observa sobre la falta de conciencia de la representación de integración de la ecuación diferencial y la constante resultante producto de la integración de una ecuación diferencial, así como su significado geométrico, algunos alumnos manifiestan el siguiente comentario en relación con el aspecto de la constante resultante de la integración “su derivada es cero cualquiera que sea el valor de la constante resultante de la integración”, llegan a la conclusión que esto no afecta en la derivación pues ésta constante se elimina en el proceso de derivación.

En lo que se refiere a las aplicaciones el alumno no entiende lo que significa la constante producto de la integración, así como cual es su significado en el contexto del problema en si mismo. Finalmente los alumnos prefieren las soluciones de tipo algorítmico sin prestarle atención a los aspectos de tipo geométrico.

## Integración de las actividades didácticas y sus fases

Después de haber hecho un análisis cuantitativo de las respuestas de los alumnos al cuestionario diagnóstico, se realizará una propuesta de la integración de las actividades didácticas, en las actividades se consideraron aspectos sobre los conocimientos que tienen los alumnos en cuanto al manejo que realizan sobre el concepto de diferencial aplicados al desplazamiento, velocidad y aceleración de una partícula, manejo de pendiente y ordenada al origen, así como la conceptualización de curvas resultantes del proceso de solución de la ecuación diferencial.

En los libros de física cuando se estudia el movimiento uniforme se incluyen tres fenómenos básicos los cuales son: desplazamiento, velocidad y aceleración, estos fenómenos son los que trataremos a lo largo del trabajo.

Para definir la configuración general de cada la actividad se indican las fases que integrarán las actividades didácticas de desplazamiento, velocidad y aceleración de tal manera que las tres actividades mencionadas incluirán una fase 1 inicial denominada “Conocimientos previos de los alumnos”, dentro de esta fase el alumno usará los conocimientos de matemáticas que le permitan introducirse a las fases 2 y 3 las cuales se denominaran “Contextualización de la actividad “, dentro de estas fases se considerarán para su desarrollo los pasos centrales de la Matemática en Contexto. Es importante mencionar que la actividad didáctica de aceleración por su mayor extensión incluirá tres fases para su desarrollo. Las actividades y sus fases que las integran quedaran definidas de la siguiente forma, tabla 8.

**Fases de desarrollo de las actividades didácticas.**

| Actividad didáctica | Fases de la actividad |
|---|---|
| Desplazamiento | Fase 1 |
| | Fase 2 |
| Velocidad | Fase 1 |
| | Fase 2 |
| Aceleración | Fase 1 |
| | Fase 2 |
| | Fase 3 |

**Tabla 8**

## Justificación de las actividades didácticas utilizadas de acuerdo a las componentes de diseño congitiva, didáctica y epistemológica.

Con la finalidad de realizar el diseño de las actividades didácticas para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, se considerarán los componentes principales de diseño que vienen siendo el cognitivo, didáctico y epistemológico, por lo que se irán desglosando para cada actividad los componentes necesarios dentro del diseño de la actividad didáctica, así como el paso que corresponda de acuerdo a la metodología de la Matemática en Contexto.

Los siguientes cuadros representan las necesidades epistemológicas, cognitivas y didácticas detectadas en la aplicación del cuestionario diagnóstico. Este cuadro nos servirá de guía en el diseño de las actividades didácticas que se pretenden implementar. Se incluyen tres cuadros para las actividades de desplazamiento, velocidad y aceleración, cada actividad esta dividida en dos o tres fases primera parte de la actividad, donde el participante tendrá que utilizar algunos conocimientos básicos de matemáticas. En la segunda y tercera fase al alumno se le introduce en una situación problemática de acuerdo a la Matemática en Contexto.

Ahora realizaremos una tabla que incluyen aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos los cuales se toman en cuenta en el diseño de las actividades didácticas, estas tablas reflejan las necesidades propias de los estudiantes en relación con los componentes antes mencionados. tablas 9, 10 y 11.

**Pasos utilizados en el diseño de la actividad desplazamiento según la Matemática en Contexto**

<table>
<tr><td colspan="5">Componentes consideradas en el análisis y diseño de las actividades didácticas:<br>C = Componente cognitiva.<br>D = Componente didáctica.<br>E = Componente epistemológica</td></tr>
<tr><td colspan="5">Fase 1<br>Conocimientos previos de los alumnos</td></tr>
<tr><td>1.-Representación del movimiento de una partícula.</td><td rowspan="2">Observaciones</td><td colspan="3">Componente</td></tr>
<tr><td>2.-Determinación de variables y constantes del problema.</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr>
<tr><td>3.-Determinación del modelo matemático.</td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Actividad 1 | E-Deducir diferencias de variación lineal con el apoyo gráfico.<br>D-Relacionar las diferencias deducidas con el fenómeno físico. | | X | X |
| Actividad 2 | C-Deducir un modelo matemático de las diferencias lineales. | X | | |
| Actividad 3 | E-Deducir diferencias de variación angular con el apoyo gráfico.<br>D-Relacionar las diferencias deducidas con el fenómeno físico. | X | X | |
| Actividad 4 | C-Deducir un modelo matemático de las diferencias angulares. | X | | |
| 4.-Solución matemática del problema. | | | | |
| Actividad 1 | E-Deducirá la diferencia de variación lineal del parámetro tiempo.<br>D-Relacionar la variación del tiempo con el fenómeno de desplazamiento del cuerpo. | | X | X |
| Actividad 2 | E-Deducir las diferencias de variación lineal del parámetro desplazamiento.<br>D-Relacionar las variaciones de desplazamiento con el fenómeno de desplazamiento del cuerpo | | X | X |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Actividad 3 | E-Deducir la relación de variación del desplazamiento con respecto a la variación del tiempo.<br>D-Relacionar la variación del desplazamiento con respecto al tiempo con el fenómeno de velocidad. | | X | X |
| Actividad 4 | E-Deducir de forma gráfica el modelo matemático de la recta.<br>D-Asociar el modelo matemático de la recta con el fenómeno de velocidad de un cuerpo. | | X | X |
| **Fase 2**<br>**Contextualización de la actividad** | | | | |
| I.-Planteamiento del problema. | | | | |
| II.-Determinación de las variables y constantes del problema. | | | | |
| Actividad 1 | D-Asociar las distintas variables asociadas con el fenómeno de velocidad. | X | | |
| III.-Determinación del modelo matemático. | | | | |
| Actividad 1 | C-Deducir el modelo matemático de velocidad usando la relación de proporcionalidad entre desplazamientos e incrementos de tiempo.<br>E-Basándose en la variación de desplazamiento y tiempo, deducir el modelo de velocidad. | X | | X |
| Actividad 2 | C-Deducir el modelo lineal considerado la variación de la ordenada al origen<br>D-Asociar la ordenada al origen con las condiciones iniciales del modelo de velocidad. | X | X | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| IV.-Solución del modelo matemático. | | | | |
| Actividad 1 | D-Introducir el significado del concepto de constante de integración asociándola con los desplazamientos iniciales de la partícula.<br>E-Asociar la constante de integración de la ecuación diferencial con la familia de curvas neoparamétricas. | | X | X |
| V.-Determinación de la solución requerida. | | | | |
| Actividad 1 | D-Encontrar la función desplazamiento dada un conjunto de condiciones iniciales.<br>. | | X | |
| Actividad 2 | D-Graficar la función particular y dar un significado físico a la constante de integración | | X | |
| VI.-Solución en términos del problema. | | | | |
| Actividad 1 | D-Encontrar la distancia avanzada por el cuerpo después de un tiempo determinado y lo relacionará con el problema definido. | | X | |

**Tabla 9**

## Pasos utilizados en el diseño de la actividad velocidad según la Matemática en Contexto.

Componentes consideradas en el análisis y diseño de las actividades didácticas:
C = Componente cognitiva.
D = Componente didáctica.
E = Componente epistemológica

**Fase 1**
**Conocimientos previos de los alumnos**

| | | |
|---|---|---|
| 1.-. El concepto de velocidad una partícula. | Observaciones | Componente |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2.-Determinación de variables y constantes del problema. | | C | D | E |
| 3.-Determinación del modelo matemático. | | | | |
| Actividad 1 | C-Encontrar el modelo matemático partiendo de una curva lineal.<br>D-Asociar una curva lineal con el fenómeno de velocidad de la partícula. | X | X | |
| Actividad 2 | D-Asocia un conjunto de curvas con las funciones de desplazamiento de la Partícula<br>E-Encuentra las funciones de comportamiento gráficas, considerando el concepto de ordenada al origen y pendiente | | X | X |
| Actividad 3 | C-Encuentra una relación de comportamiento entre la pendientes de las curvas asociadas. | X | | |
| 4.-Solución matemática del problema. | | | | |
| Actividad 1 | C-Resolverá una ecuación diferencial de primer grado. | X | | |
| **Fase 2**<br>**Contextualización de la actividad** | | | | |
| I.-Planteamiento del problema. | | | | |
| II.-Determinación de las variables y constantes del problema. | | | | |
| Actividad 1 | D-Encuentra las variables que intervienen en el problema. | | X | |
| III.-Determinación del modelo matemático. | | | | |
| Actividad 1 | D-Planteará el modelo matemático en base a las condiciones del problema.<br>C-Interpretará el signo negativo de la velocidad de la partícula. | X | X | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Actividad 2 | C-Realiza la gráfica de varias funciones constante.<br>D-Asocia el fenómeno de velocidad constante con curvas horizontales paralelas al eje del tiempo. | X | X | |
| IV.-Solución del modelo matemático. | | | | |
| Actividad 1 | C-Encuentra la función desplazamiento resolviendo la ecuación diferencial. | X | | |
| Actividad 2 | D-Relaciona el grupo de curvas con el fenómeno de velocidad.<br>E-Realiza una interpretación del resultado entre la parte gráfica y la algebraica. | | X | X |
| Actividad 3 | E-Elabora conclusiones sobre la solución de la ecuación diferencial y el conjunto de curvas neoparamétricas obtenidas. | | | X |
| V.-Determinación de la solución requerida. | | | | |
| Actividad 1 | C-Encuentra el valor de la constante de integración con las condiciones iniciales. | X | | |
| Actividad 2 | D-Realiza la asociación de la gráfica con la función particular obtenida.<br>E-Encuentra una relación entre la función encontrada y el fenómeno físico del problema. | | X | X |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Actividad 3 | C-Descubre como a partir de la función velocidad se llega a la función desplazamiento.<br>E-Descubre una relación entre las condiciones iniciales y la curva asociada. | X | | X |
| Actividad 4 | E-Asocia el conjunto de curvas con el significado físico del fenómeno estudiado. | | | X |
| Actividad 5 | C-Resuelve la ecuación diferencial considerando las condiciones iniciales del fenómeno estudiado.<br>D-Relaciona las curvas con el fenómeno de movimiento y el significado de la solución de una ecuación diferencial.<br>E-Relaciona el conjunto de curvas neoparamétricas con el valor de una de ellas que satisface las condiciones iniciales. | X | X | X |
| VI.-Solución en términos del problema. | | | | |
| Actividad 1 | D-Relaciona el fenómeno estudiado con el significado de la solución de una ecuación diferencial. | | X | |
| Actividad 2 | E-Encuentra la relación entre la constante de integración y el significado con la asociación de un conjunto de curvas neoparamétricas. | | | X |

**Tabla 10**

**Pasos utilizados en el diseño de la actividad aceleración según la Matemática en Contexto.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Componentes considerados en el análisis y diseño de las actividades didácticas:<br>C = Componente cognitiva.<br>D = Componente didáctica.<br>E = Componente epistemológica | | | | |
| **Fase 1**<br>**Conocimientos previos de los alumnos** | | | | |
| 1.-Descripción del movimiento de una partícula. | Observaciones | Componente | | |
| 2.-Determinación de variables. | | C | D | E |
| 3.-Determinación del modelo matemático. | | | | |
| Actividad 1 | C-Representará la línea recta usando los conceptos de ordenada y pendiente.<br>D-Asociará la función lineal con el fenómeno de velocidad. | X | X | |
| Actividad 2 | C-Determinará las pendientes de las rectas tomando como base las diferencias de ordenadas y ordenadas al origen. | X | | |
| Actividad 3 | C-Deducirá el comportamiento regular de las pendientes de rectas paralelas entre si. | X | | |
| Actividad 4 | D-Asociará el fenómeno de aceleración constante de forma algebraica y de forma gráfica. | | | X |
| 4.-Solución matemática del problema. | | | | |
| Actividad 1 | Reconocerá el conjunto de curvas neoparamétricas asociadas con la ordenada al origen de la curva. | | | X |
| **Fase 2**<br>**Contextualización de la actividad** | | | | |
| I.-Planteamiento del problema. | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| II.-Determinación de las variables y constantes del problema. | | | | |
| Actividad 1 | D-Enumerará las variables utilizadas en los fenómenos de velocidad y aceleración. | | X | |
| III.-Determinación del modelo matemático. | | | | |
| Actividad 1 | C-Identificará los parámetros importantes de la línea recta.<br>D-Dará significado al sigo de la función con el fenómeno de movimiento de la partícula. | X | X | |
| Actividad 2 | D-Relacionará los valores constantes de velocidad con una representación gráfica. | | X | |
| IV.-Solución del modelo matemático. | | | | |
| Actividad 1 | C-Resolverá la ecuación diferencial de aceleración y sustituirá las condiciones iniciales. | X | | |
| V.-Determinación de la solución. requerida | | | | |
| Actividad 1 | C- Resolverá la ecuación diferencial de velocidad y sustituirá las condiciones iniciales.<br>D-Relacionará los valores de las constantes de integración con el fenómeno de velocidad y aceleración.<br>E-Reconocerá el significado de C1 y C2 como parte del conjunto de curvas neoparamétricas que definen a la función general de la solución de la ecuación diferencial. | X | X | X |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Actividad 2 | E-Reconocerá el conjunto de curvas neoparamétricas, asociándolas con una función algebraica. | | | X |
| Actividad 3 | D-Identificará las curvas paralelas entre sí con el fenómeno de velocidad y su solución particular. | | X | |
| Actividad 4 | D- Identificará las curvas paralelas entre sí con el fenómeno de desplazamiento y su solución particular. | | X | |
| Actividad 5 | E-Reconocerá lo que significa la constante de integración en la solución de la ecuación diferencial. | | | X |
| Actividad 6 | D-Reconocimiento de las funciones de velocidad y desplazamiento en función del problema de movimiento estudiado. | | X | |
| Actividad 7 | D-Determinar la relación entre curvas o soluciones particulares y sus constantes de integración en términos del movimiento de la partícula. | | X | |
| VI.-Solución en términos del problema. | | | | |
| Actividad 1 | D-Encontrar la respuesta al problema de movimiento de la particular, después de resolver la ecuación diferencial y aplicar las condiciones iniciales. | | X | |
| **Fase 3**<br>**Contextualización de la actividad** | | | | |
| I.-Planteamiento del problema. | | | | |
| II.-Determinación de las variables y constantes del problema. | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Actividad 1 | D-Enumerará las variables utilizadas en los fenómenos de velocidad y aceleración. | | X | |
| III.-Determinación del modelo matemático. | | | | |
| Actividad 1 | C-Identificará los parámetros importantes de la línea recta.<br>D-Dará significado al sigo de la función con el fenómeno de movimiento de la partícula. | X | X | |
| Actividad 2 | D-Relacionará los valores constantes de velocidad con una representación gráfica. | | X | |
| IV.-Solución del modelo matemático. | | | | |
| Actividad 1 | C-Resolverá la ecuación diferencial de aceleración y sustituirá las condiciones iniciales. | X | | |
| V.-Determinación de la solución. requerida | | | | |
| Actividad 1 | C- Resolverá la ecuación diferencial de velocidad y sustituirá las condiciones iniciales.<br>D-Relacionará los valores de las constantes de integración con el fenómeno de velocidad y aceleración.<br>E-Reconocerá el significado de C1 y C2 como parte del conjunto de curvas neoparamétricas que definen a la función general de la solución de la ecuación diferencial. | X | X | X |
| Actividad 2 | E-Reconocerá el conjunto de curvas neoparamétricas, asociándolas con una función algebraica. | | | X |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Actividad 3 | D-Identificará las curvas paralelas entre sí con el fenómeno de velocidad y su solución particular. | | X | |
| Actividad 4 | D- Identificará las curvas paralelas entre sí con el fenómeno de desplazamiento y su solución particular. | | X | |
| Actividad 5 | E-Reconocerá lo que significa la constante de integración en la solución de la ecuación diferencial. | | | X |
| Actividad 6 | D-Reconocimiento de las funciones de velocidad y desplazamiento en función del problema de movimiento estudiado. | | X | |
| Actividad 7 | D-Determinar la relación entre curvas o soluciones particulares y sus constantes de integración en términos del movimiento de la partícula. | | X | |
| VI.-Solución en términos del problema. | | | | |
| Actividad 1 | D-Encontrar la respuesta al problema de movimiento de la particular, después de resolver la ecuación diferencial y aplicar las condiciones iniciales. | | X | |

**Tabla 11**

**Análisis de los aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos incluidos en las tres tablas anteriores**.

a)El diseño de las actividades necesita de la inclusión de algunas actividades que le permitan al estudiante realizar una reflexión de variación del parámetro estudiado con respecto al tiempo para que pueda ligar el fenómeno en estudio con las diferenciales muy utilizadas en ecuaciones diferenciales.

b)Conociendo la relación de variación el participante pueda encontrar el modelo matemático que define el fenómeno estudiado en el contexto de una situación problemática.

c)Identificar el significado gráfico y de contexto de la constante de integración encontrada como consecuencia de un proceso relacionado con su contexto.

## 4.3.-Actividad didáctica de ecuación diferencial lineal de primer orden (función desplazamiento)

Habiendo realizado la evaluación diagnóstica y el análisis de los resultados, se puede captar la necesidad del diseño de una actividad didáctica en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en el contexto de la física específicamente en el movimiento de la partícula en el plano. Los fenómenos específicos que se tratarán son: desplazamiento, velocidad y aceleración de la partícula en movimiento uniforme.

### Función desplazamiento

### Introducción:

Estimad@ compañer@, con la finalidad de poder terminar el diseño de una actividad didáctica en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en el contexto de la física se te pide que contestes las siguientes preguntas y actividades las cuales tendrás que completar. Es observable que en el desarrollo de esta actividad no necesitará de ningún formulario o calculadora. Si alguna parte por alguna razón no es entendible indica al final cual es la razón o dificultad que encontraste. De antemano te damos las gracias por tu participación.

**Fase 1**

**1.- Representación del movimiento de una partícula.**

En los cursos regulares de ecuaciones diferenciales se hace énfasis sobre los distintos procedimientos de solución de una ecuación diferencial, pero poca atención se centra al querer relacionar la ecuación diferencial con el fenómeno físico, es por esta razón que se hace una propuesta la cual pretende fortalecer el entendimiento del significado de una ecuación diferencial, así como la aplicación en el contexto donde se utiliza la ecuación. El problema consiste en determinar la función desplazamiento de una partícula considerando que ésta se esta moviendo con velocidad constante.

El desplazamiento de una partícula es un fenómeno simple, pero que merece ser tratado desde un enfoque más profundo, el cual muestre luz sobre el concepto de movimiento y su variación, es decir el movimiento de una partícula es dependiente del tiempo que ha transcurrido, esta variación de la posición en función del tiempo es la que sustenta el movimiento específico y es la que nos interesa tratar, debido a que de esta forma podemos calcular la posición de esta partícula en cualquier tiempo, por lo que se pretende encontrar el modelo matemático de la función desplazamiento partiendo que la partícula se mueve con una velocidad constante y de ésta forma poder calcular los desplazamientos específicos que experimenta la partícula en un tiempo dado.

**2.-Determinación de variables y constantes del problema.**

Dentro de las variables a considerar son: el desplazamiento tanto lineal como angular y tiempo que pasa entre los desplazamientos, así como la velocidad con la que se mueve la partícula. Las constantes serán la resistencia del aire que será despreciable, la fricción de la partícula si ésta rueda y la ausencia de deformaciones de la partícula por fuerzas externas que provoquen el movimiento.

**3.-Determinación del modelo matemático.**

Movimiento rectilíneo.

**Actividad 1**:

En las siguientes figuras a, b y c tenemos representaciones de desplazamientos de una partícula que parte de una posición inicial y ocupa distintas posiciones, las longitudes representadas son unitarias. Esto se muestra en la figura 19 (a,b,c,d).

**Movimiento de una partícula**.

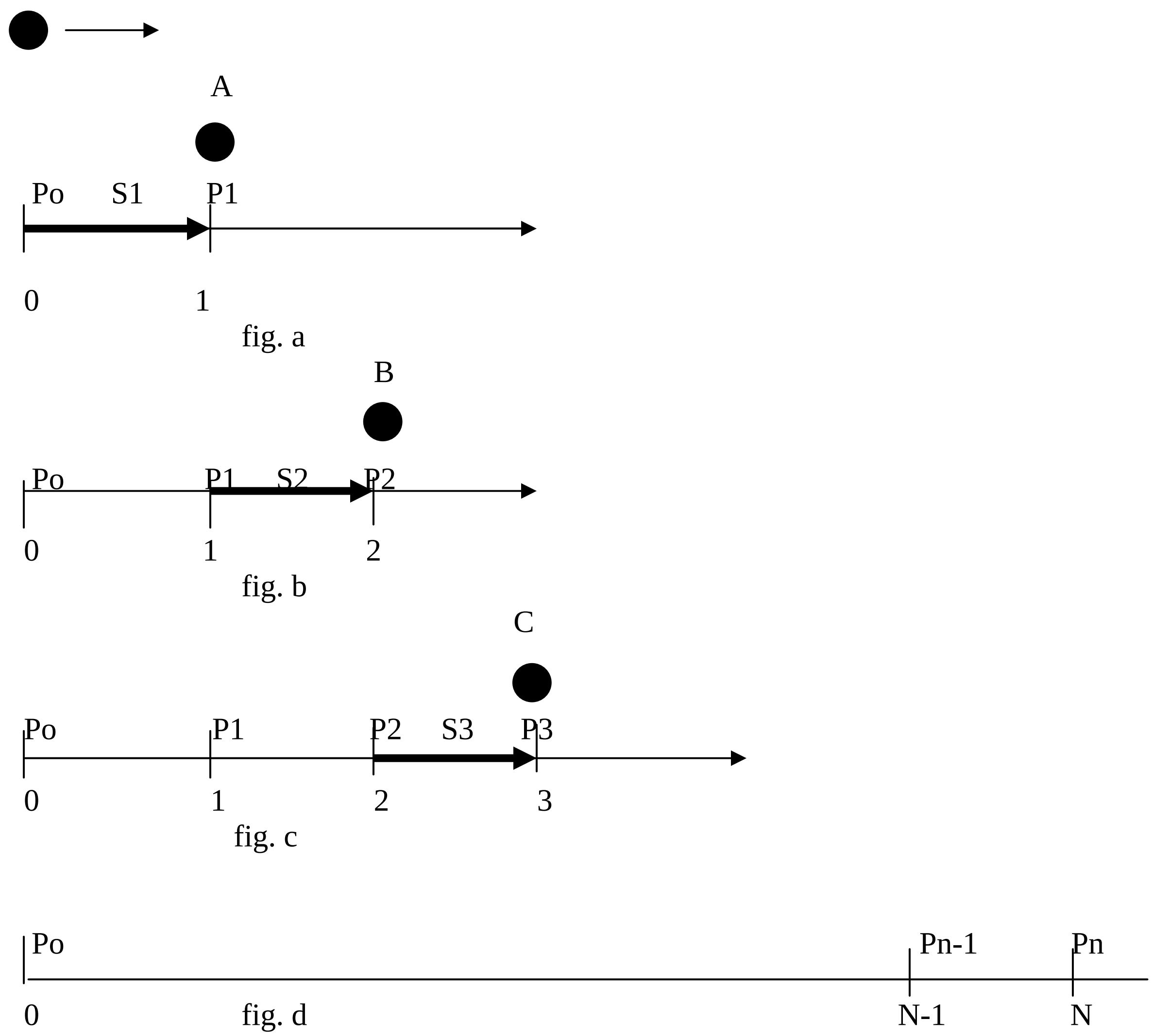



**Figura 19**

Encuentre el valor del desplazamiento efectivo obtenido (S1, S2 y S3) en las posiciones A, B y C de la partícula, según muestran las figuras (posiciones relativas de la partícula, es decir desde la última posición ocupada). Plantee las relaciones entre, los puntos en la línea recta Po, P1, P2 y P3.

| |
|---|
| S1=<br>S2=<br>S3= |

**Actividad 2:**

Tomando como base a la actividad 1 trate de encontrar una fórmula general que nos represente el cambio efectivo de posiciones obtenidas por la partícula en movimiento de las posiciones P1,P2,P3... Pn-1,Pn (hasta la posición n (enésima), suponga que la partícula ocupa varias posiciones).

| |
|---|
| |

**Movimiento circular**

**Actividad 3:**

En la siguiente figura tenemos representado un desplazamiento circular de una partícula que parte de una posición inicial y ocupa distintas posiciones. Las longitudes son múltiplos de la unidad ver figura 20.

**Desplazamientos circulares**

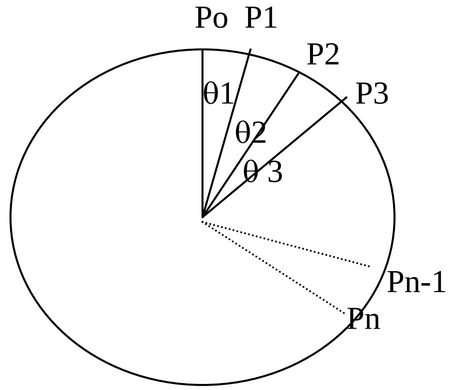



**Figura 20**

Encuentre el valor del desplazamiento angular efectivo obtenido por la partícula en las posiciones P1,P2 y P3 (posiciones relativas de la partícula, es decir desde la última posición ocupada). Plantee las relaciones entre θ1, θ2 y θ3, use para esto los puntos que se encuentran sobre la línea circular Po, P1, P2 y P3.

| |
|---|
| θ1= |
| θ2 = |
| θ3 = |

**Actividad 4:**

Con base en la actividad 3, intente encontrar una fórmula general que nos represente el cambio efectivo de posiciones obtenidas por la partícula en movimiento desde 1 hasta la posición n(enésima) utilice la notación del punto Pn (punto enésimo) y punto. Pn-1 (punto enésimo menos uno).

| |
|---|
| |

**4.-Solución matemática del problema.**

Ahora visualicemos una partícula que se mueve en el plano xy la cual avanza distancias iguales en tiempos iguales en la siguiente figura se muestra una partícula que cambia de posición ocupando tres posiciones diferentes, en tres tiempos diferentes figura 21.

**Diferencias lineales en ordenadas y abscisas**

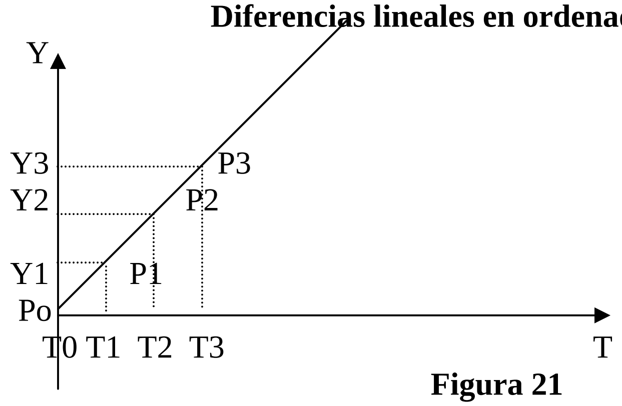



**Figura 21**

**Actividad 1:**

Completa la siguiente tabla de tiempos relativos transcurridos en el eje T para los puntos P1, P2 y P3 tabla 12.

**Representación algebraica de diferencias lineales horizontales**

| **Punto** | **Abscisa** | **ΔT** |
|---|---|---|
| Po | To | |
| P1 | T1 | |
| P2 | T2 | |
| P3 | T3 | |

**Tabla 12**

**Actividad 2:**

Completa la siguiente tabla de desplazamientos relativos en el eje Y para los puntos P1, P2 y P3 tabla 13.

**Representación algebraica de diferencias lineales verticales**

| Punto | Ordenada | ΔY |
|---|---|---|
| Po | Yo | |
| P1 | Y1 | |
| P2 | Y2 | |
| P3 | Y3 | |

**Tabla 13**

**Actividad 3:**

Establece una relación básica de comportamiento entre los puntos Po, P1, P2 y P3 en base a las diferencias entre abscisas y ordenadas que determine la dirección que siguen los puntos Po,P1,P2 y P3. (utiliza las relaciones básicas encontradas en las actividades 1 y 2 ) tabla 14.

**Relación diferencia desplazamiento vs diferencia de tiempo**

| Punto | $\Delta Y$ | $\Delta T$ | Relación |
|---|---|---|---|
| P1 | | | |
| P2 | | | |
| P3 | | | |

**Tabla 14**

¿Cómo es esa relación de diferencias entre sí ?

Si tenemos que cualquier posición de X puede ser determinada conociendo el valor de T, establece una función de correspondencia entre X y T, toma en cuenta la relación deducida en actividad 3.

X= ________ T

**Actividad 4:**

Consideraremos la misma recta anterior, pero ahora se trazarán rectas paralelas a la recta original y que pasen por el punto (0, b1),(0,b2),(0,b3), como se muestra en la figura siguiente.

Esta disposición consiste en que se colocarían varias partículas separadas una de la otra con respecto a una línea de referencia (es decir, una partícula se colocaría a una distancia del punto de origen o referencia, el siguiente a una distancia adelante de primero y así sucesivamente) como se muestra en la figura 22.

**Representación lineal del movimiento de una partícula desde distintas posiciones iniciales.**

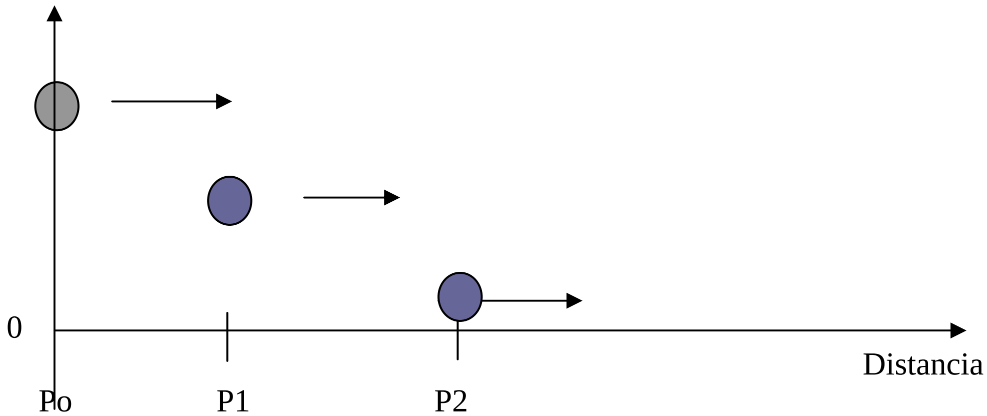



**Figura 22**

De esta forma obtendremos las líneas que definen el comportamiento según la figura 23

**Representación en el plano cartesiano del desplazamiento de una partícula en un tiempo determinado To.**

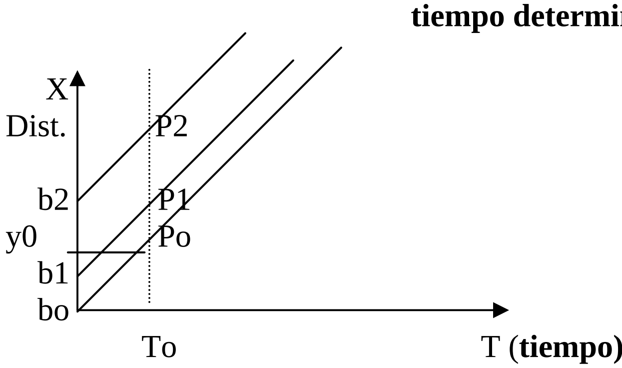



**Figura 23**

Si obtenemos el valor de bo para Po, de la misma forma obtengamos los valores de su ordenada para los puntos P1 y P2 tabla 12.

**Relaciones de incremento de ordenada al origen**

| Ordenada | Po | P1 | P2 |
|---|---|---|---|
| Desplazamiento | yo + bo | yo + b1 | yo + b2 |

**Tabla 15**

Por lo que se puede deducir una relación de cálculo para encontrar cualquier ordenada conociendo el punto de cruce de la recta en el eje de las ordenadas

$$y = m*T + bn$$

Donde m = relación de variación entre desplazamientos y tiempos.

El cual representa el modelo matemático del cálculo del desplazamiento respecto al tiempo dependiendo de la posición inicial de la partícula con respecto a su origen.

## Fase 2

### Contextualización sobre la función desplazamiento

A continuación se plantea un problema de acuerdo a la Matemática en Contexto.

### I.-Planteamiento del problema

Un tractor se mueve a una relación constante de desplazamiento con respecto al tiempo de 3 m/seg., se pretende encontrar la función desplazamiento que describe el movimiento del tractor, además se calculará el desplazamiento total alcanzado por el tractor en un tiempo de 10 segundos.

Las condiciones iniciales del movimiento del tractor son: El tractor ha tenido un desplazamiento inicial de 20 metros medidos desde un punto de referencia y han transcurrido 5 segundos desde que se inició el movimiento, figura 24.

**Desplazamiento de un tractor**

**Figura 24**

### II.-Determinación de las variables y constantes del problema

Enumera las variables que intervienen en el fenómeno de movimiento del tractor.

| |
|---|
| |

### III.-Determinación del modelo matemático

**Actividad 1:**

El tractor se mueve en línea recta siguiendo la siguiente relación de cambio de desplazamiento vs tiempo tabla 16.

**Desplazamiento vs tiempo**

| Tiempo (segundos) | Desplazamiento (metros) |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |
| 3 | 9 |

**Tabla 16**

Encuentre el modelo matemático de la función desplazamiento, encontrando previamente la relación de variación d el desplazamiento con respecto al tiempo.

| |
|---|
| X= __ t+ C |

**Actividad 2:**

Si varios tractores se mueven a la misma relación de desplazamiento con respecto al tiempo, pero partiendo desde distintos puntos del origen. Representa este comportamiento en el siguiente sistema coordenado. Usa las letras a,b,c y d para indicar el punto donde inicia el desplazamiento el tractor figura 25.

**Representación gráfica de desplazamiento vs tiempo**

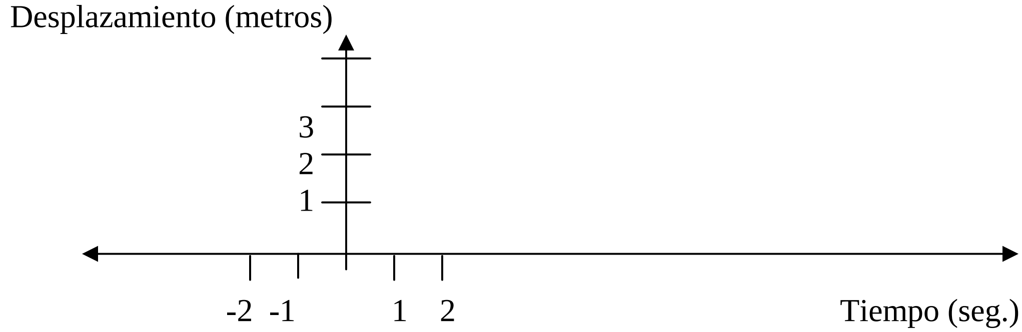



**Figura 25**

## IV.-Solución del modelo matemático

Retomando la función desplazamiento en el paso anterior de determinación del modelo matemático tenemos:

$$X = 3T + C$$

La cual representa la función desplazamiento que describe el movimiento.

**Actividad 1:**

Si la constante C tomara los valores de 10,20 y 30 ¿Cuál sería la gráfica resultante en cada caso?, (no uses la tabulación) ¿Cuál sería la interpretación que daría a estas curvas? figura 26.

**Representación gráfica de la ordenada al origen**

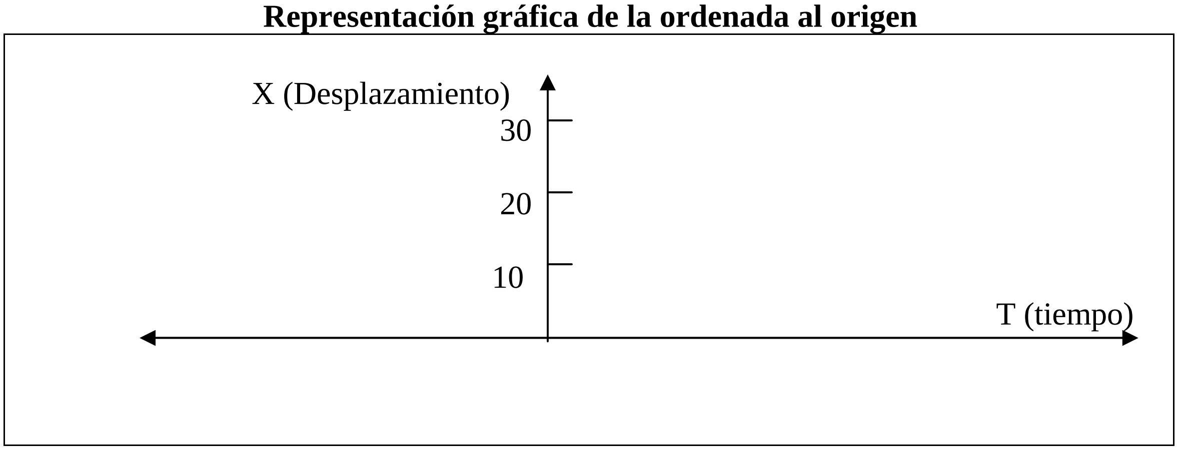



**Figura 26**

Interpreta las gráficas resultantes en cuanto al significado del término independiente y el establecimiento de familias de curvas:

**V.- Determinación de la solución requerida.**

**Actividad 1:**

Retomando el enunciado, el tractor se desplaza 15 metros medidos desde el origen, y han transcurrido 5 segundos desde el inicio del movimiento, determine la función desplazamiento.

**Actividad 2:**

Realiza la gráfica de la función obtenida en el siguiente sistema cartesiano figura 27.

**Representación gráfica de la solución requerida**

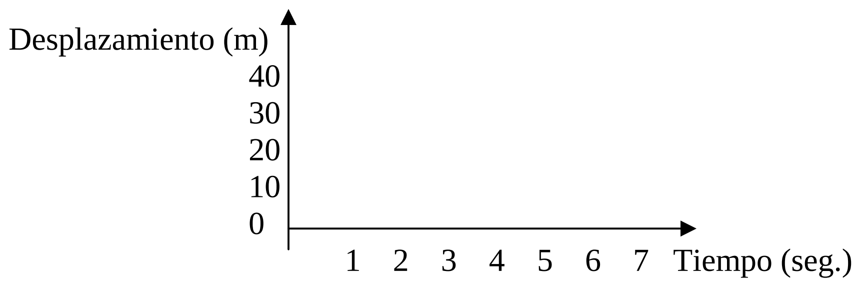



**Figura 27**

¿Qué significado le atribuyes a la constante C incluida en la función desplazamiento?

**VI.- Solución en términos del problema.**

Finalmente retomando el enunciado del problema se desea encontrar la distancia total recorrida por el tractor si transcurren 10 segundos después de iniciarse el movimiento. (use la función desplazamiento encontrada).

**Nota**: Puedes comentar cualquier dificultad que se te presento en cuanto a claridad, dificultad, secuencia de ideas, trabajo por realizar durante la actividad, etcétera.

**!!!! Mil gracias por tu apoyo a ésta actividad !!!!**

## 4.4.-Actividad didáctica de la ecuación diferencial lineal de primer orden (función velocidad)

El concepto de velocidad, está definido en los libros de física de la siguiente manera " Es la variación del desplazamiento de una partícula con respecto a la variación del tiempo". Esta variación se puede representar mediante de una ecuación diferencial y el objetivo será encontrar las funciones originales de desplazamiento que la satisfagan las condiciones iniciales. Por lo que ahora planteamos una actividad didáctica la cual nos conduzca al significado de una ecuación diferencial y su resolución y cuál es el significado de las condiciones iniciales del fenómeno estudiado.

## Función velocidad

### Introducción:

Estimad@ compañer@, con la finalidad de poder terminar el diseño de una actividad didáctica en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en el contexto de la física se te pide que contestes las siguientes preguntas y actividades las cuales tendrás que completar. Es observable que en el desarrollo de esta actividad no necesitará de ningún formulario o calculadora. Si alguna parte por alguna razón no es entendible indica al final cuál es la razón o dificultad que encontraste. De antemano te damos las gracias por tu participación.

**Fase 1**

### 1.- El concepto de velocidad una partícula

En los cursos regulares de ecuaciones diferenciales se hace énfasis sobre los distintos procedimientos de solución de una ecuación diferencial, pero poco interés se logra al querer relacionar la ecuación diferencial con el fenómeno físico, es por esta razón que se hace una propuesta la cual pretende fortalecer el entendimiento del significado de una ecuación diferencial, así como la aplicación en el contexto donde se utiliza la ecuación que describe el comportamiento del fenómeno estudiado.

Partiremos del concepto de velocidad, la cual se define de la siguiente manera "Es la variación del desplazamiento de una partícula con respecto a la variación del tiempo", esta variación se puede representar mediante de una ecuación diferencial y el objetivo será encontrar las funciones originales de desplazamiento que satisfagan las condiciones iniciales planteadas. Por lo que ahora planteamos una actividad didáctica la cual nos conduzca al significado de una ecuación diferencial y su resolución, además de conocer cuál es el significado de las condiciones iniciales del fenómeno estudiado.

Se desea encontrar la posición que ocupa una partícula en su desplazamiento en el plano de coordenadas cuando la partícula se mueve a una velocidad uniforme en una trayectoria recta y en un cierto instante de tiempo, obteniendo el valor de la posición en cualquier momento dado, por lo que se pretende encontrar el modelo matemático de la función desplazamiento partiendo que la partícula se mueve con una velocidad constante (3 km / seg ) y de ésta forma poder calcular los desplazamientos específicos que experimenta la partícula en un tiempo, el caso que nos ocupa calcularemos la distancia recorrida después de haber transcurridos 20 segundos. Para lograr esto se partirá inicialmente de la ecuación diferencial siguiente que representa a un cuerpo que se mueve a una velocidad constante "v".

$$\frac{dx}{dt} = v$$

Es decir el cuerpo se mueve con la misma velocidad durante el tiempo que dure en movimiento.

**2.-Determinación de las variables.**

Dentro de las variables consideradas en el estudio tenemos la velocidad, desplazamiento, tiempo y la ordenada al origen. La fricción del piso, fricción del aire, masa y la indeformabilidad del cuerpo las cuales se consideran como despreciables.

**3.-Determinación del modelo matemático.**

**Actividad 1:**

Supóngase la partícula se mueve en línea recta avanzando distancias iguales en tiempos iguales como se observa en la siguiente gráfica figura 28.

**Desplazamiento de una partícula**

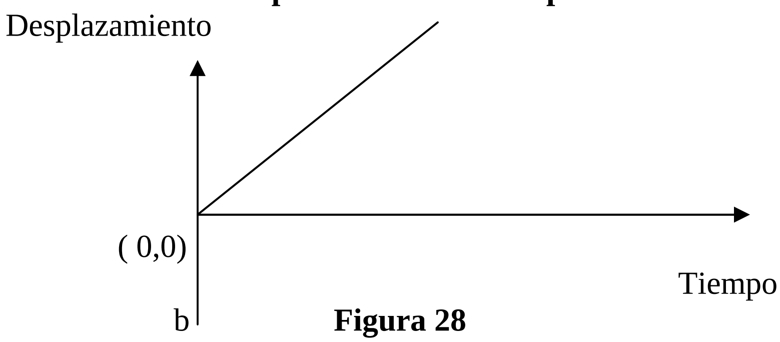



**Figura 28**

Si la partícula no inicia su movimiento desde el origen sino que parte de un punto inicial "b" moviéndose recorriendo desplazamientos iguales en tiempos iguales, ¿Cómo representarías este comportamiento de la partícula usando una curva? figura 29.

**Representación gráfica de una función con ordenada fuera del origen**

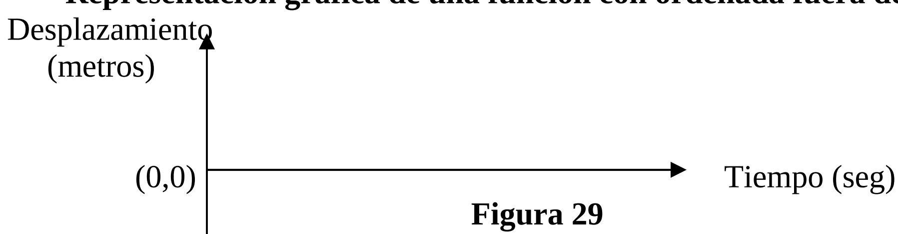



**Figura 29**

¿Cómo se representa algebraicamente la función graficada en la actividad 1?

**Actividad 2:**

Ahora, la partícula parte de distintas posiciones iniciales ¿Cómo representaría de forma algebraica las funciones que describen el comportamiento de la partícula? Observa la siguiente figura y usa el concepto de pendiente (M) figura 30.

**Representación gráfica de partícula que inician de posiciones diferentes**

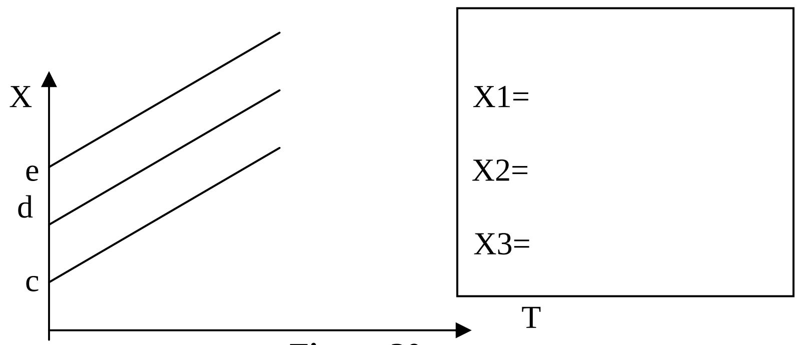



**Figura 30**

**Actividad 3:**

Si derivamos las tres funciones anteriores respecto al tiempo tenemos las siguientes diferenciales.

$$\frac{dX1}{dt} =$$

$$\frac{dX2}{dt} =$$

$$\frac{dX3}{dt} =$$

¿Qué conclusión se puede obtener sobre el resultado de la derivada aplicada a estas tres funciones en relación con el valor de la variación de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo (pendiente) de la partícula?

**Actividad 4:**

De acuerdo a la actividad 3 se puede decir que la variación del desplazamiento con respecto a la variación del tiempo es constante, por lo que se puede representar la curva de velocidad con respecto al tiempo en la figura 31.

**Representación de velocidad constante de la partícula**

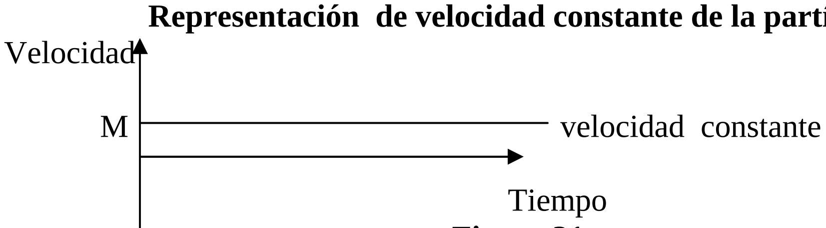



**Figura 31**

**4.-Solución matemática del problema.**

Ahora si seleccionamos una expresión de la variación del desplazamiento con respecto al tiempo que sea constante, tenemos la siguiente ecuación diferencial la cual representa el movimiento que experimenta la partícula que se mueve en línea recta, esta expresión muestra que la velocidad es un parámetro que depende fundamentalmente del tiempo, como se observa en la figura 32.

**Desplazamiento de una partícula**

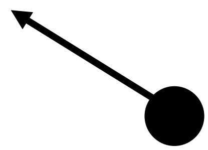


**figura 32**

La siguiente expresión representa la velocidad del cohete.

$$\frac{dx}{dt} = v$$

La cual representa una ecuación diferencial de primer orden, la que resolvemos separando variables de la siguiente manera:

$$dx = vdt$$

Si integramos los 2 lados de la igualdad tenemos la siguiente expresión:

$$x = vt + C_1$$

**Actividad 1**:

¿Cuál es el significado gráfico que usted le atribuye a la constante $C_1$ resultante de la integración?

| |
|---|
| |

## Fase 2

### Contextualización sobre la función velocidad

A continuación se plantea un problema de acuerdo a la matemática en contexto.

### I.-Planteamiento del problema

Una nave espacial se mueve a velocidad constante de 3 m /seg y se pretende encontrar la función desplazamiento que describe el movimiento de la nave, y calcular el desplazamiento total alcanzado por la nave espacial en un tiempo de 20 segundos.

Las condiciones iniciales del fenómeno son que la nave habrá recorrido una distancia de 5 en un tiempo de 0.5 segundos.

### II.-Determinación de las variables y constantes del problema

**Actividad 1:**

Enumera las variables que intervienen en el fenómeno del movimiento del cohete.

| |
|---|
| |

## III.-Determinación del modelo matemático

**Actividad 1:**

Plantee la ecuación diferencial que describe el movimiento de acuerdo al enunciado, utilice la expresión diferencial $\frac{dx}{dt}$.

**Actividad 2:**

La expresión anterior la podemos representar en la siguiente figura 33.

**Representación gráfica de la velocidad del cohete**

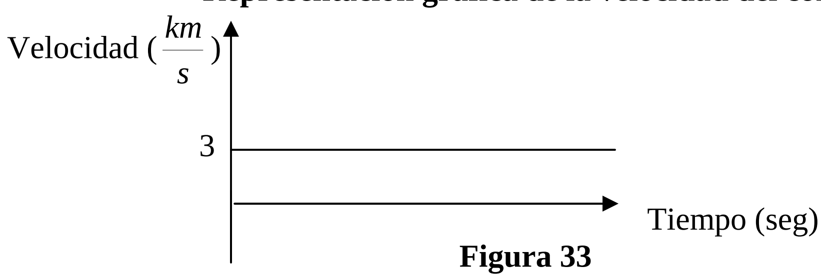



**Figura 33**

¿Cuál es el significado que le atribuyes al signo de la función velocidad relacionado con el fenómeno físico de movimiento del cohete?

**Actividad 3:**

Supongamos que varios cohetes se desplazan a diferentes velocidades todas constantes de acuerdo a la siguiente tabla.

Función velocidad (Km./seg)

v1 = 4
v2 = 2
v3 = 0
v4 = -2
v5 = -4

Representa la función algebraica en el plano coordenado figura 34.

**Representación gráfica del de la velocidad del cohete**

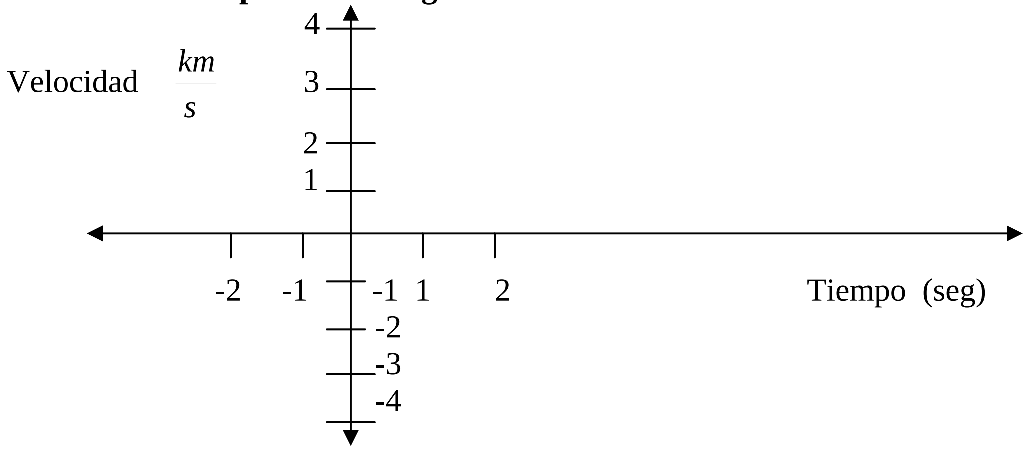



**Figura 34**

## IV.-Solución del modelo matemático

Retomando la función velocidad propuesta en la definición del problema.

$$\frac{dx}{dt} = 3\frac{km}{s}$$

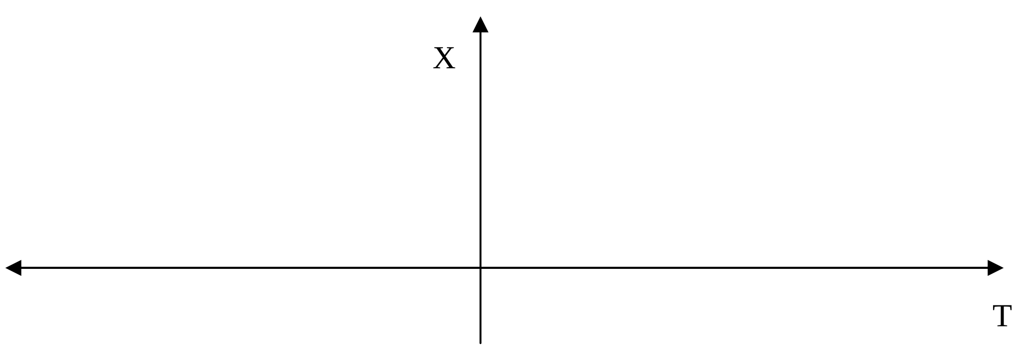
**Actividad 1:**

Resuelve la siguiente ecuación diferencial y encuentra la función desplazamiento que describe el comportamiento del movimiento.

**Actividad 2:**

Si la constante C tomara los valores de 1,2 y 3 ¿Cuál sería la gráfica resultante en cada caso?, (no uses la tabulación) ¿Cuál sería la interpretación que daría a estas curvas como producto de la integración anterior? figura 35.

**Representación gráfica de la constante de integración**




Interpretación de las gráficas resultantes:

**Figura 35**

**Actividad 3:**

A partir de la función anterior propuesta realiza algunas conclusiones sobre el significado de la resolución de una ecuación diferencial en términos de las curvas obtenidas y su relación con el movimiento del cohete.

**V.- Determinación de la solución requerida.**

**Actividad 1:**

Las condiciones iniciales del fenómeno son que el cohete habrá recorrido una distancia de 5 en un tiempo de 0.5 segundos.

Aplica las condiciones iniciales del problema a la función desplazamiento encontrada y calcula el valor de la constante C1.

**Actividad 2:**

Realiza la gráfica de la función obtenida en el siguiente sistema cartesiano figura 36.

**Representación gráfica de la solución obtenida**

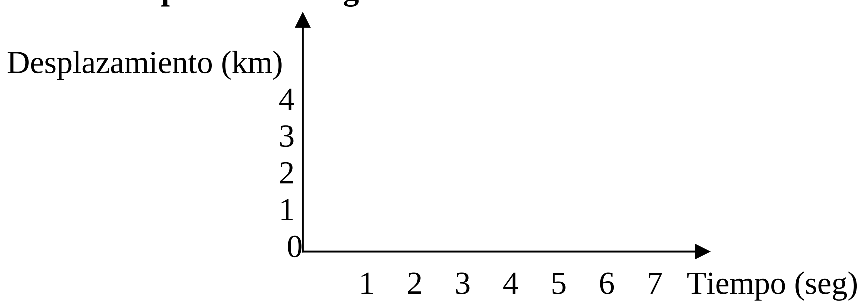



**Figura 36**

¿Qué significado le atribuyes a la constante C1 obtenida de la ecuación diferencial resuelta considerando las condiciones iniciales correspondientes en términos del problema del movimiento del cohete?

**Actividad 3:**

Es decir, es posible llegar a encontrar la función desplazamiento original realizando la integración de la función velocidad, pero ¿Qué significado tienen para ti las condiciones iniciales aplicadas a la función previamente integrada en relación al fenómeno de movimiento del cohete estudiado?

**Actividad 4:**

Si la constante C1 tomara valores de 1,2 y 3 respectivamente ¿Cuál sería la gráfica resultante en cada caso? (No utilices la tabulación) figura 37.

**Representación gráfica de varias constantes**

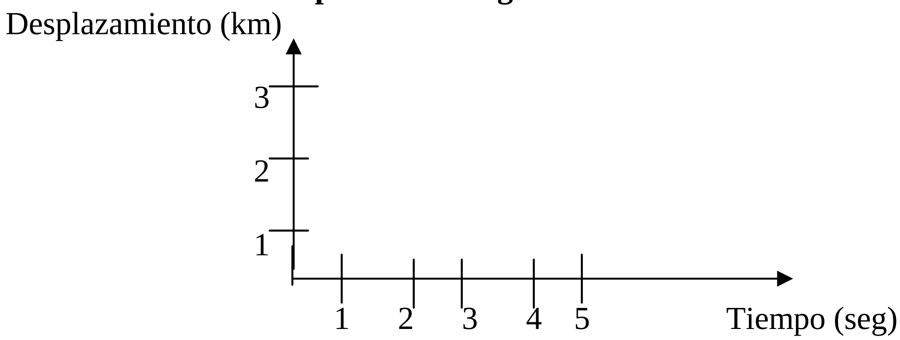



**Figura 37**

¿Cuál sería la interpretación que le daría a estas curvas en términos movimiento del cohete?

**Actividad 5:**

Finalmente ¿Cuáles serían algunas conclusiones que puedes obtener de la relación entre las curvas de velocidad y desplazamiento obtenidas en las actividades 3 y 4 en relación con el significado de la solución de una ecuación diferencial dadas las condiciones iniciales del problema?

**VI.- Solución en términos del problema.**

Se desea encontrar la distancia total recorrida por el cohete si transcurren 20 segundos después de considerarse el movimiento, (utilice la función desplazamiento encontrada).

**VI.- Interpretación de la solución en términos del problema.**

La función velocidad es una función lineal y la función resultante de la integración es una función cuadrática, ¿Tiene algún significado físico la función resultante de la integración con el fenómeno de movimiento de la partícula?

El resultado de la solución de la ecuación diferencial tiene incluida un término independiente, ¿Cuál es la interpretación física que usted le atribuye a este término independiente a la luz del fenómeno físico de movimiento de la partícula?

**Nota**: Puedes comentar cualquier dificultad que se te presento en cuanto a claridad, secuencia de ideas, trabajo por realizar durante la actividad, etcétera.

**!!!! Mil gracias por tu apoyo a ésta actividad !!!!**

## 4.5.-Actividad didáctica de la ecuación diferencial lineal de segundo orden

### Función aceleración

Estimad@ compañer@, con la finalidad de poder terminar el diseño de una actividad didáctica en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en el contexto de la física se te pide que contestes las siguientes preguntas y actividades. Es observable que en el desarrollo de esta actividad no se necesitará de ningún formulario o calculadora. Si alguna parte de las actividades no es entendible indica al final cual es la razón o dificultad que encontraste. De antemano te damos las gracias por tu participación.

**Fase 1**

### 1.- Descripción del movimiento de una partícula

### Introducción:

En los cursos regulares de ecuaciones diferenciales se hace énfasis sobre los distintos procedimientos de solución de una ecuación diferencial, pero poco interés se logra al querer relacionar la ecuación diferencial con el fenómeno físico, lo que lleva como consecuencia el que los alumnos no asimilen adecuadamente el significado de una ecuación diferencial que es fundamental para el desarrollo de muchos profesionistas en la actualidad, es por esta razón que se hace una propuesta la cual pretende fortalecer el entendimiento del significado de una ecuación diferencial, así como la aplicación en el contexto donde se utiliza la misma. El problema consiste en determinar la función desplazamiento de una partícula considerando que ésta se esta desplazando con un movimiento uniformemente acelerado, es decir el cuerpo experimenta una aceleración constante durante la trayectoria de su movimiento. El análisis que se pretende realizar es el estudio del movimiento de la partícula partiendo que se conoce la función aceleración de una partícula la cual se mueve bajo una aceleración constante, durante el análisis del movimiento se determinará la función velocidad con la que se mueve la partícula y finalmente se pretende llegar a la determinación de la función desplazamiento y con esto calcular el estado que guarda la partícula después de determinado tiempo de haber transcurrido viajando en el espacio.

### 2.-Variables que influyen en el estudio.

Las variables a considerar en el estudio son:
a = Aceleración de la partícula.
v = Velocidad de la partícula.
t = Tiempo de movimiento de la partícula.
x = Desplazamiento adquirido por la partícula.

### 3.-Determinación del modelo matemático.

**Actividad 1:**

Supóngase que una partícula se mueve en línea recta incrementando su velocidad en una magnitud constante como se muestra en la siguiente figura 38

**Representación gráfica de velocidad vs tiempo con velocidad inicial cero**

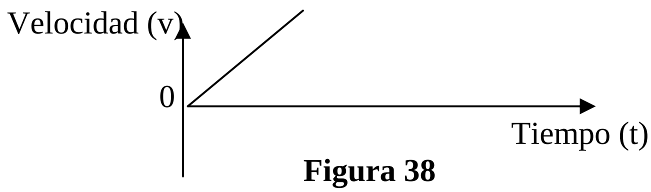



**Figura 38**

Si la partícula pasa por un punto de referencia con una velocidad inicial "Vo" moviéndose en un t = 0 de referencia e incrementando su velocidad en forma constante. ¿Cómo representarías mediante el uso de una curva el comportamiento de la partícula? figura 39.

**Representación gráfica de velocidad vs tiempo con una velocidad inicial**


**Figura 39**

¿De que forma representarías la función graficada en la actividad 1 usando una expresión algebraica?

**Actividad 2:**

Sabemos que la pendiente hablando en términos del problema tratado nos mide la variación de la velocidad con respecto al tiempo en cada momento.

Si ahora la partícula inicia con distintas velocidades iniciales (V) ¿Cómo representarías en forma algebraica las funciones que describen el comportamiento de la partícula, observa las gráficas siguientes. Para plantear las relaciones de variación del desplazamiento con respecto al tiempo utiliza las ordenadas x1,x2,x3,x4,x5,x6; y observe los puntos de cruce de la función (0,b), (0,c) y (0,d), que corresponden con la ordenada al origen. Considera $\Delta t = t_2 - t_1$, figura 40.

**Diferencias de velocidad y tiempo**

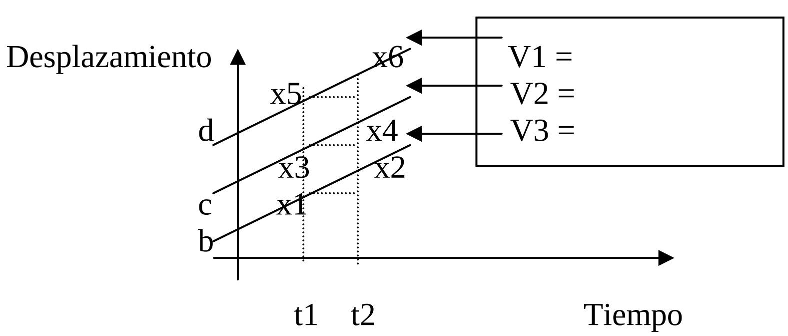



**Figura 40**

**Actividad 3:**

Si ahora tomamos los distintos intervalos de velocidades con respecto a los puntos b, c y d a su correspondiente intervalo de tiempo (considera t1 y t2) y obtenemos el límite del desplazamiento con respecto al tiempo cuando $\Delta t$ tiende a cero. Completa los siguientes cocientes:

En función del punto (t1,y1) y (t2,y2)

Lím $\Delta x1/\Delta t$ =
$\Delta t \rightarrow 0$

En función del punto (t1,y3) y (t2,y4)

Lím $\Delta x2/\Delta t$ =
$\Delta t \rightarrow 0$

En función del punto (t1,y5) y (t2,y6)

Lím $\Delta x3/\Delta t$ =
$\Delta t \rightarrow 0$

De acuerdo a las funciones gráficas y a sus correspondientes cocientes.¿Cómo son estos cocientes entre sí? y ¿qué conclusión puedes obtener sobre el concepto de derivada aplicado a estas 3 formas de variación de desplazamiento con respecto al tiempo de la partícula en estudio en cuanto al valor de su magnitud?

**Actividad 4:**

Considerando lo realizado en la actividad 3 podrías representar las rectas de aceleración con respecto al tiempo de las tres relaciones anteriores suponiendo que tomaran las magnitudes de 1,2 y 3 km/seg.$^2$ respectivamente figura 41.

**Representación de aceleraciones constantes**

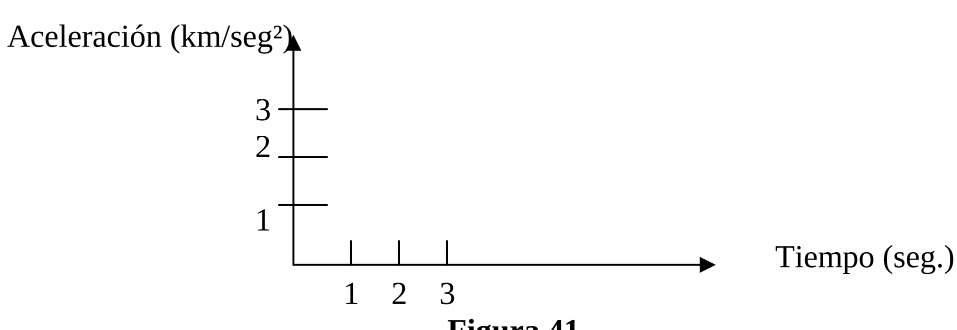



**Figura 41**

Ahora si expresamos a la velocidad de la partícula obtenidas en las relaciones anteriormente y la derivamos con respecto al tiempo obtenemos el modelo matemático de la aceleración la que podemos representar de la siguiente manera:

$$a = \frac{d(\frac{dy}{dt})}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

## 4.-Solución matemática del problema

Habiendo encontrado el modelo matemático, ahora realiza la integración considerando que el valor de a es una constante.

## Fase 2

## Contextualización sobre la función velocidad

A continuación se plantea un problema de acuerdo a la Matemática en Contexto.

### I.-Descripción del movimiento de una nave espacial.

Se desea encontrar la velocidad de una nave espacial la cual en un tiempo cero se mueve con una velocidad inicial (Vo diferente de cero) y con una desaceleración constante de –0.4 km/seg.². Es decir la velocidad de la nave va decreciendo en su velocidad inicial (Vo) en –0.4 km/seg.², de tal manera que la nave un tiempo determinado alcanzará el reposo en la trayectoria que sigue e invertirá el sentido de la velocidad. Las condiciones iniciales que la función velocidad debe satisfacer habiendo calculado la función general velocidad son que la nave espacial en un momento de su trayectoria tuvo una velocidad de 0 km/s en un tiempo de 5 segundos.

### II.-Variables que intervienen en el estudio.

Enuncia cuales son las variables que intervienen en el fenómeno de movimiento de la nave espacial.

### III.-Determinación del modelo matemático.

**Actividad 1**

Ahora si retomamos del enunciado del problema que la velocidad del cohete disminuye con una aceleración de -4 m/seg ², planea una el modelo de aceleración como una ecuación de segundo orden.

### IV.-Solución matemática del problema.

**Actividad 1.**

Ahora resolvamos la ecuación diferencial encontrada en la actividad 1 del paso III.

**Actividad 2.**
Explica cual es el significado de la constante de integración si ésta tomara valores de 1,2 y 3 K m./seg considera a la función encontrada y su relación con el fenómeno de movimiento de la nave espacial.

## V.- Solución requerida por el problema.

**Actividad 1.**
Si sustituyes sus condiciones iniciales en la que la velocidad es de 0 km/seg. y han transcurrido 5 segundos ¿Cuál es el significado gráfico que le atribuyes a la constante C resultante de la integración?

.

**Actividad 2.**
Define la función particular que define la velocidad de la nave espacial en términos del problema.

## Fase III

## I.-Planteamiento del problema

La nave espacial se mueve a una velocidad constante de acuerdo al problema descrito en la fase II, ahora se desea calcular la distancia total avanzada por el cohete después de un tiempo de 8 segundos.

## II.-Determinación de las variables y constantes del problema

**Actividad 1:**
Enumera las variables que intervienen en el fenómeno del movimiento la nave espacial.

## III.-Determinación del modelo matemático

**Actividad 1:**
Retomando la función velocidad que describe el movimiento que se calculó en la sección de solución matemática del modelo en la actividad1 se tiene:

$$v = \frac{dx}{dt} = -0.4t + 2$$

La nave espacial de la fase II, paso V, actividad 2 anterior plantea esta función lineal de la velocidad, esta función describe el movimiento de la nave espacial considerando que la velocidad es variable foto 1.

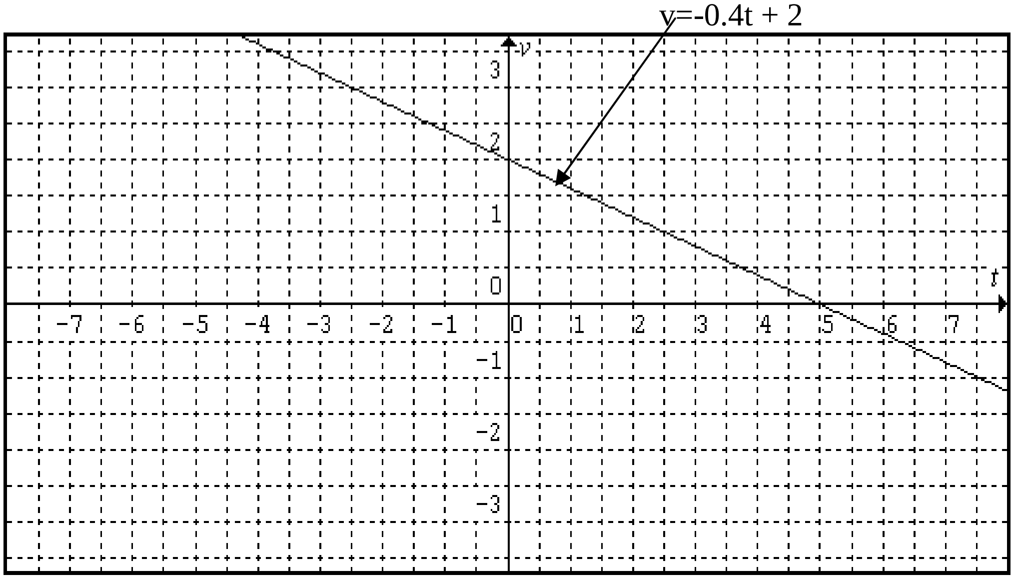
**Movimiento de nave espacial**

Vo (velocidad inicial)

**Foto 1**

La expresión anterior la podemos representar en la gráfica 2:
**Gráfica de función velocidad del cohete.**

v=-0.4t + 2




**Gráfica 2**

¿Cuál es el significado que le atribuyes al signo de la función velocidad relacionado con el fenómeno físico de movimiento de la nave espacial?

**Actividad 2:**

Si varias naves espaciales se mueven a diferentes velocidades todas constantes en el tiempo de acuerdo a la siguiente tabla, es decir la velocidad es constante durante toda la trayectoria.

Función velocidad (km/seg)

v = 4
v = 2
v = 0
v = -2
v = -4

Representa las funciones algebraicas anteriores en el plano coordenado figura 42.

**Gráfica de función velocidad en el plano cartesiano**

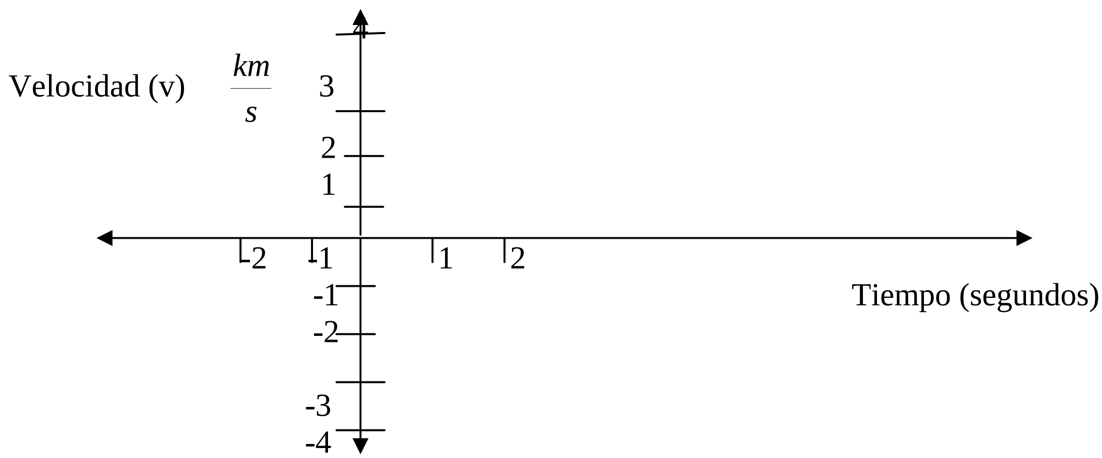



**Figura 42**

¿Cuál es el significado que atribuye a la velocidad igual a cero que adquiere la nave espacial?

## IV.-Solución del modelo matemático

**Actividad 1:**

Resuelve la función planteada en el paso III, actividad 1 la cual es igual a : $\frac{dx}{dt} = -0.4t+2$ y encuentra la función desplazamiento que describe el movimiento de la nave espacial.

## V.- Solución requerida por el problema

**Actividad 1:**

Aplica las condiciones iniciales del problema a la función desplazamiento encontrada, considerando que las condiciones iníciales a la que está sujeta la nave espacial son: desplazamiento 5 km y tiempo 5 seg.

¿Qué significado le atribuyes a las constantes C1 y C2 obtenidas de las 2 ecuaciones diferenciales resueltas considerando las condiciones iniciales correspondientes?

**Actividad 2:**

Es decir, es posible llegar a encontrar la función desplazamiento original realizando las integraciones de la función aceleración y velocidad respectivamente, pero ¿Qué significado físico tienen para ti el sustituir las condiciones iniciales aplicadas a las funciones previamente integradas trata de relacionar el fenómeno de movimiento del cohete estudiado?

Si ahora realizamos la gráfica correspondiente a la función velocidad que calculaste tenemos la siguiente figura 43.

**Función velocidad de la solución de la ecuación diferencial**

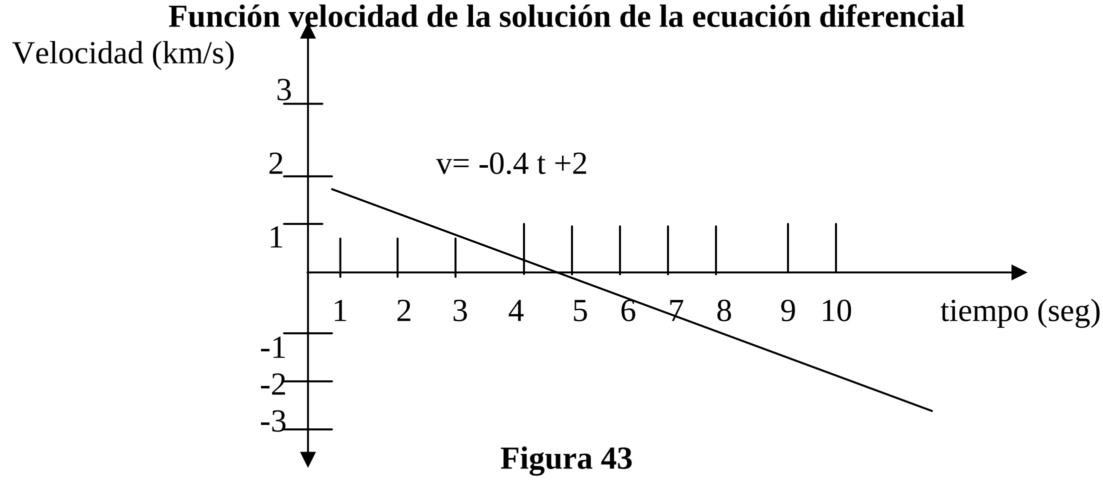



**Figura 43**

**Actividad 3:**

Si la constante C1 tomara valores de 1, 2 y 3 respectivamente ¿Cuál sería la gráfica resultante en cada caso? (No utilices la tabulación) figura 44.

**Representación de la constante de integración en términos del problema**

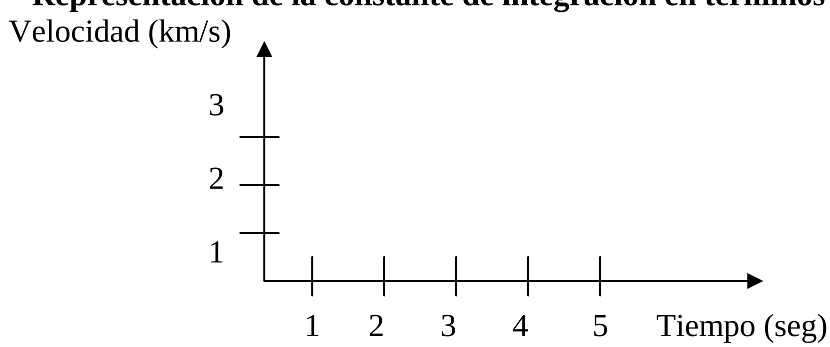



**Figura 44**

¿Cuál sería la interpretación que usted atribuye a estas curvas como producto de la integración y la sustitución de sus condiciones iniciales considerando el fenómeno físico del cohete?

**Actividad 4:**

Si graficamos la función desplazamiento que obtuviste como producto de la integración y de las condiciones iniciales se obtiene la siguiente figura 45.

**Representación gráfica del desplazamiento en términos del problema**

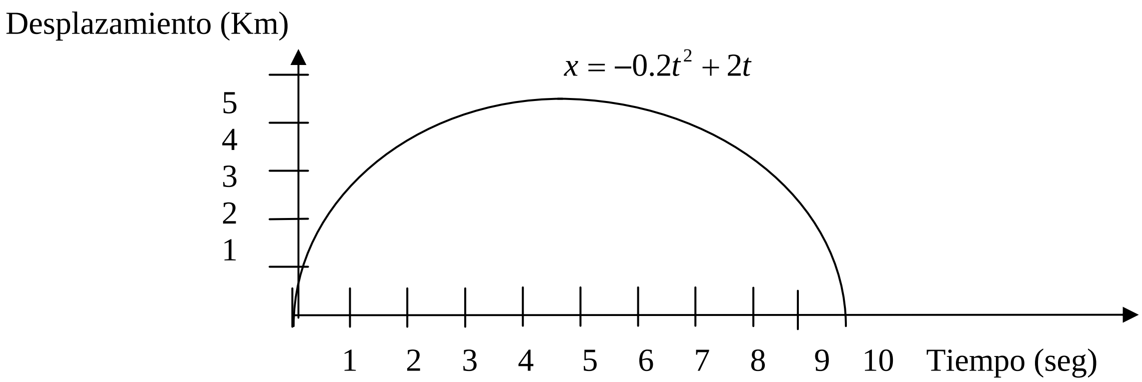



**Figura 45**

Si la constante C2 tomara valores de 1,2 y 3 respectivamente ¿Cuál sería la gráfica resultante en cada caso? (No utilices la tabulación) figura 46.

**Representación de varios desplazamientos en términos del problema**

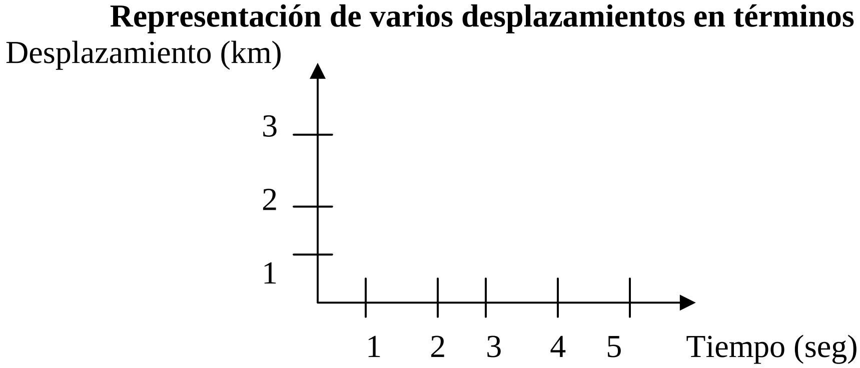



**Figura 46**

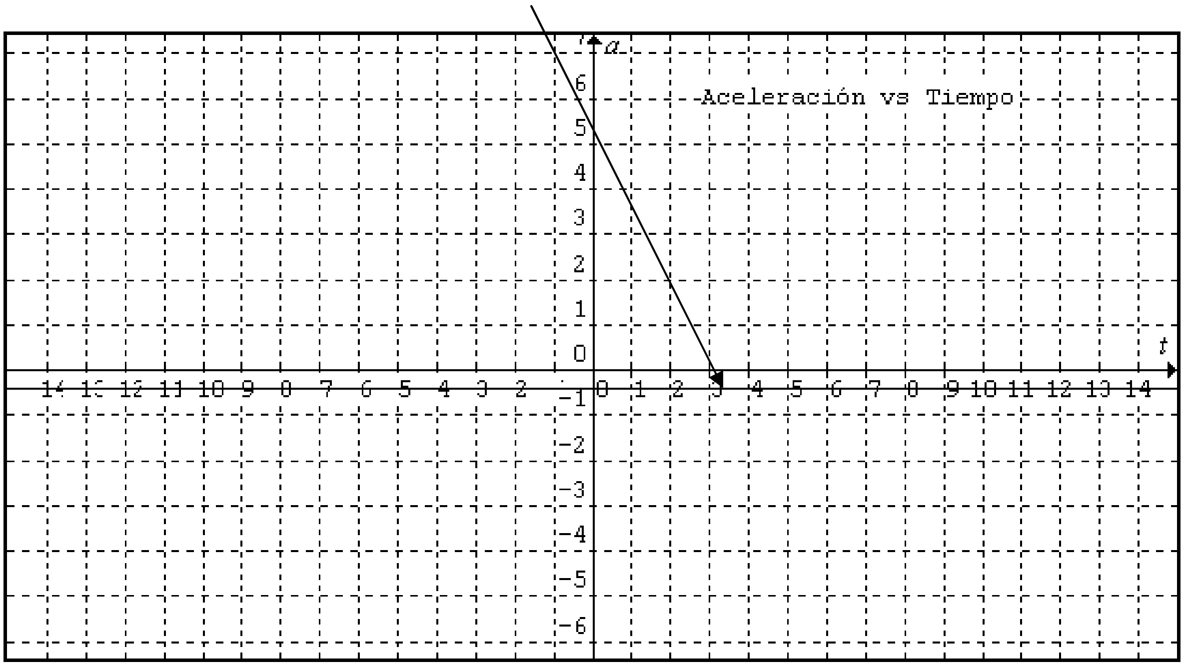
**Actividad 5:**

¿Cuál sería la interpretación que le usted le asignaría a estas curvas como producto de la integración y la sustitución de sus condiciones iniciales considerando el fenómeno físico del cohete?

Si ahora graficamos las curvas de aceleración, velocidad y desplazamiento de forma separada, así como en el mismo plano cartesiano, considerando las condiciones iniciales definidas con anterioridad se obtienen las gráficas 3, 4 y 5.

**Gráfica de Función aceleración en términos del problema**

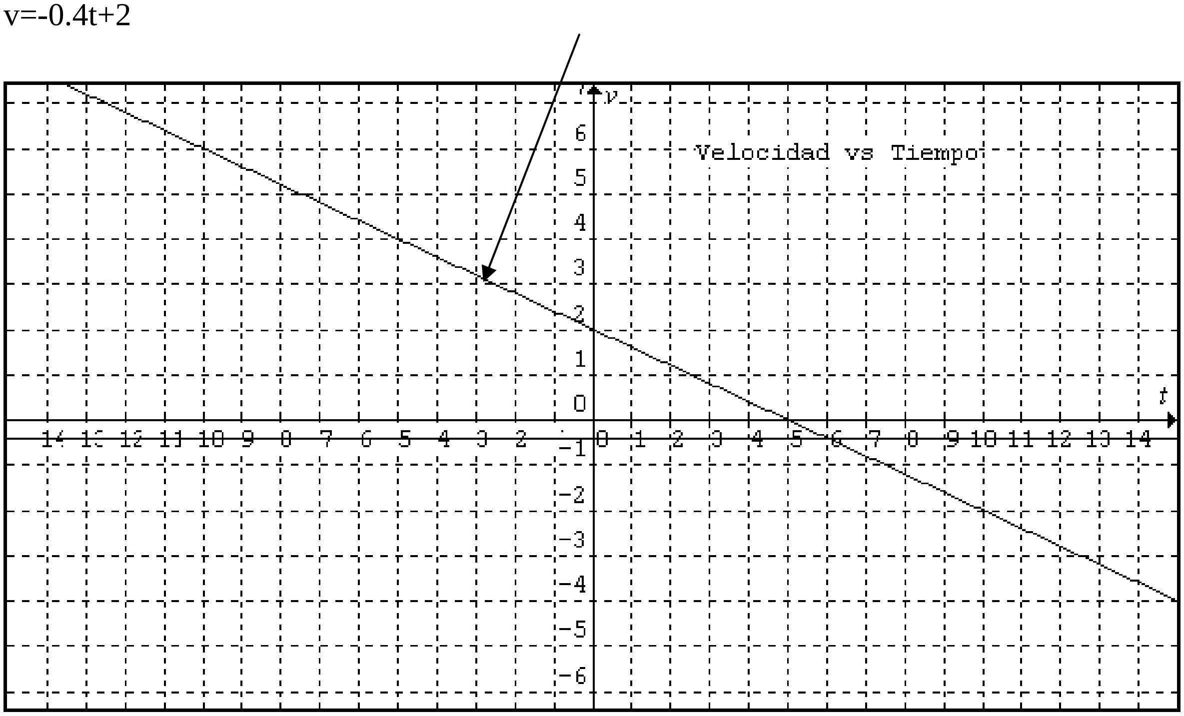
Para la función aceleración se tiene: a=-0.4




**Gráfica 3**

**Gráfica de función velocidad en términos del problema**

Para la función velocidad se tiene:
v=-0.4t+2

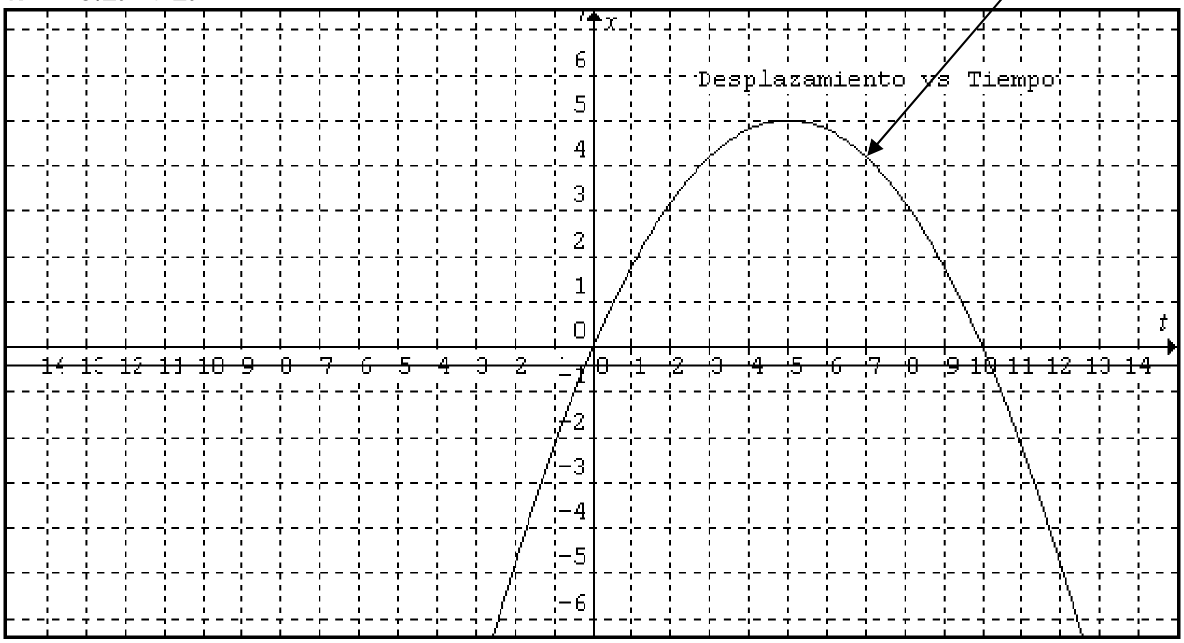



**Grafica 4**

**Gráfica de función desplazamiento en términos del problema**

Para la función desplazamiento se tiene:

$x = -0.2t^2 + 2t$

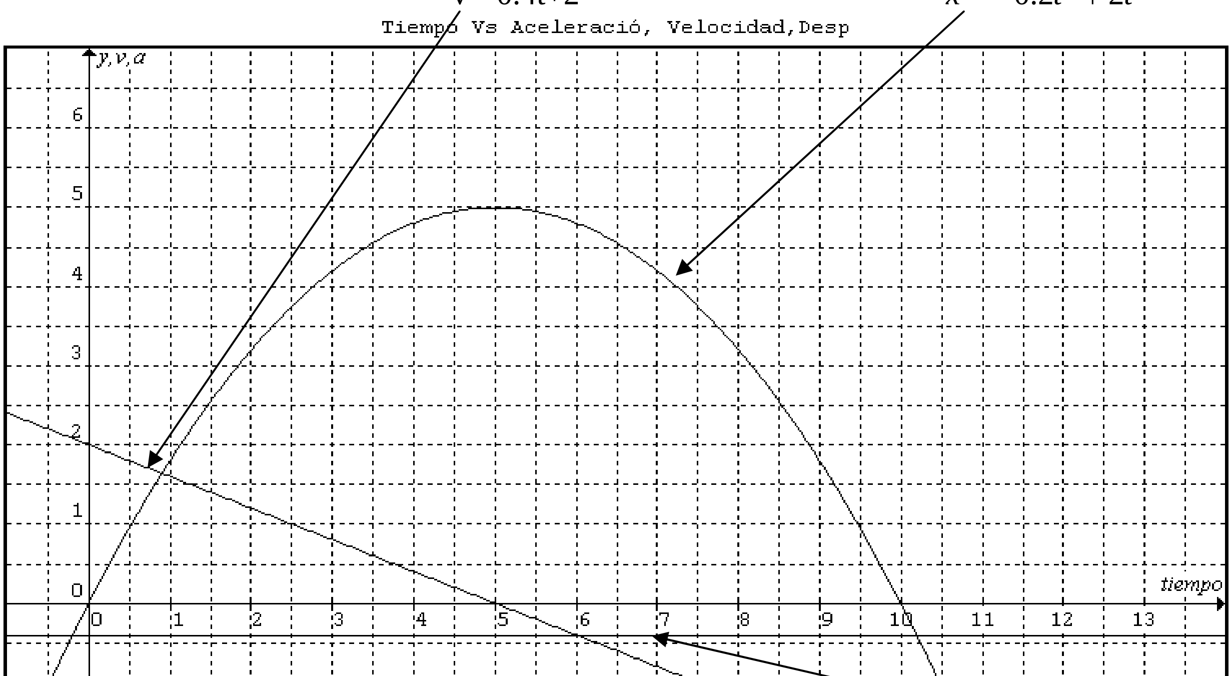



**Gráfica 5**

Para todas las funciones graficadas en el mismo plano, se tiene:

**Gráfica de función desplazamiento, velocidad y aceleración en términos del problema**

v=-0.4t+2 $x = -0.2t^2 + 2t$




**Grafica 6** a= - 0.4

**Actividad 6:**

¿Cuál sería la interpretación que le darías a estas curvas de aceleración, velocidad y desplazamiento en cuanto a su relación en el tiempo (considera únicamente el primer cuadrante), en relación con el fenómeno estudiado de la nave espacial?, analiza los puntos clave de las funciones ( punto máximo y puntos de intersección con los ejes).

**Actividad 7:**

Finalmente ¿Cuáles serían algunas conclusiones que puedes obtener de la relación entre las curvas de velocidad y aceleración obtenidas en las actividades 2 y 3 en relación con el significado de la solución de una ecuación diferencial dadas las condiciones iniciales del problema?, es decir puedes explicar lo que entiendes al resolver una ecuación diferencial (para nuestro caso de aceleración y velocidad) y aplicarles las condiciones iniciales a cada solución encontrada.

**VI.- Solución en términos del problema.**

**Actividad 1:**

Finalmente ahora se desea encontrar la distancia total recorrida por el cohete si transcurren 8 segundos después de iniciado el movimiento.

**Nota**: Puedes comentar cualquier dificultad que se te presento en cuanto a claridad, dificultad, secuencia de ideas, trabajo por realizar durante la actividad, etcétera.

**!!!! Mil gracias por tu apoyo a ésta actividad !!!!**

## 5.0.-Implementación de las actividades de aprendizaje

La aplicación de la actividad didáctica se realizó con un grupo de quinto semestre de la carrera de Ingeniería Química (I.Q.) y un grupo de sétimo semestre de la carrera de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (I.M.E.) de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán (F.E.S.C.), la materia que toman los alumnos de Ingeniería Química en el momento de la aplicación es Ecuaciones Diferenciales. Es conveniente mencionar que la actividad de aceleración que resolvieron en la carrera de Ingeniería Mecánica se realizó en dos sesiones de 1 hora 30 minutos esto debido a la mayor extensión de la actividad.

La duración de la actividad en la carrera de Ingeniería Química fue aproximadamente de 1 hora 30 minutos, se distribuyeron catorce cuestionarios en dos grupos. La siguiente tabla muestra estos datos tabla 17.

**Relación de alumnos que participaron en la actividad**

| TIPO DE ACTIVIDAD | No. DE ALUMNOS y (carrera) |
|---|---|
| Desplazamiento | 7 (I.Q.) |
| Velocidad | 7 (I.Q) |
| Aceleración | 4 (I.M.E.) |

**Tabla 17**

I.Q.= Ingeniería Química.

I.M.E.= Ingeniería Mecánica Eléctrica.

Se distribuyeron dos grabadoras en la actividad de velocidad y desplazamiento para captar algunos de los diálogos obtenidos de los alumnos durante el desarrollo de la actividad didáctica y de ésta manera poder relacionar los diálogos con la resolución. Previo a la resolución de la actividad didáctica se les indicó a los alumnos que la actividad didáctica estaba diseñada para ser contestada usando los conocimientos que ellos tenían de las ecuaciones diferenciales, además de que la actividad se desarrolla en el contexto de la física, incluyéndose temas básicos de la física como son: desplazamiento, velocidad y aceleración.

La razón de selección de los grupos de alumnos de Ingeniería Química así como de Ingeniería Mecánica y Eléctrica fue porque ya estaban llevando el curso de ecuaciones diferenciales, lo que les permitía tener los conocimientos frescos en cuanto al significado e implicaciones del concepto de ecuación diferencial, así como la interpretación de las condiciones iniciales en un problema específico, los alumnos además ya habían cursado física 1,álgebra y calculo diferencial e integral por lo que ellos tenían los conocimientos previos de contexto de en física.

Como se puede observar los grupos seleccionados a los cuales se les aplicó la actividad didáctica tienen en común que han cursado las materias de Algebra, Calculo Diferencial e Integral, Cinemática, Dinámica y el curso de Ecuaciones Diferenciales, esta formación previa a la aplicación les permitirá resolver la actividad didáctica, además todos los alumnos pertenecen a las carreras de tipo físico matemáticas lo cual refuerza que los conocimientos deben ser sólidos en relación con el ámbito del conocimiento matemático y físico que serán fundamentales en la resolución de la actividad didáctica.

Además de las materias anteriormente mencionadas durante la formación los alumnos tanto de Ingeniería Mecánica como los de Ingeniería Química incluyen otras materias complementarias como son: cálculo vectorial, álgebra lineal, métodos numéricos, así como geometría analítica.

El salón de clases está constituido por 60 butacas y pizarrón al frente.

Se les indica a los alumnos que no es necesario el uso de calculadoras, esto debido a que la solución de los problemas no lo requeriría.

# 6.0.-Análisis de las actividades didácticas

## 6.1.-Análisis de las respuestas de los estudiantes a las actividades de aprendizaje.

En este apartado realizaremos un análisis de las respuestas de los estudiantes a la luz del marco teórico y los objetivos planteados al inicio del trabajo, esto nos permitirá encontrar evidencias que muestren cómo la matemática en el contexto permite construir actividades didácticas que toman en cuenta conocimientos previos, representaciones y creencias, y al mismo tiempo ayuda al estudiante a la comprensión del significado y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales lineales.

El análisis se dividirá en varias fases de acuerdo al formato de diseño de las actividades didácticas (capítulo 4), es decir la primera fase de la actividad en donde el alumno usará herramientas matemáticas para dar solución a las actividades particulares planteadas. La segunda y tercera fases incluirán una situación problemática, en donde el alumno tendrá que resolver un problema que se encuentra contextualizado que en nuestro caso será en el ámbito de la física.

En términos generales el análisis se dividirá en las siguientes fases las cuales son las que integran las actividades didácticas de desplazamiento, velocidad y aceleración.

A)Conocimientos previos del alumno.

B)Contextualización de la actividad.

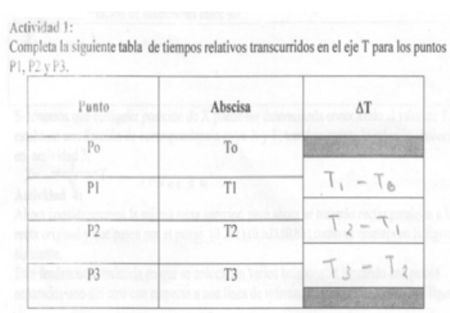
Para cada actividad aplicada se realizará este análisis, las actividades aplicadas son: desplazamiento, velocidad y aceleración.

**Análisis de la actividad desplazamiento**.

A) Conocimientos previos del alumno.

Se puedes observar en la figura 47(a,b,c) que los alumnos tienen un concepto claro en cuanto a la relación de cambio, es decir, ellos definen la relación de cambio lineal del parámetro con respecto al tiempo de la siguiente manera:

$$\frac{\text{Cambio del parámetro de un valor inicial a un valor final}}{\text{Cambio del parámetro en un intervalo de tiempo}}$$



Actividad 1:
Completa la siguiente tabla de tiempos relativos transcurridos en el eje T para los puntos P1, P2 y P3.

| Punto | Abscisa | ΔT |
|---|---|---|
| Po | To | |
| P1 | T1 | $T_1 - T_0$ |
| P2 | T2 | $T_2 - T_1$ |
| P3 | T3 | $T_3 - T_2$ |

**Figura 47 a**

Actividad 3:
Establece una relación básica de comportamiento entre los puntos Po, P1, P2 y P3 en base a las diferencias entre abscisas y ordenadas que determine la dirección que siguen los puntos Po,P1,P2 y P3.

| Punto | ΔY | ΔT | Relación $\Delta Y / \Delta T$ |
|---|---|---|---|
| P1 | $T_1 - T_0$ | $Y_1 - Y_0$ | $Y_1 - Y_0 / T_1 - T_0$ |
| P2 | $T_2 - T_1$ | $Y_2 - Y_1$ | $Y_2 - Y_1 / T_2 - T_1$ |
| P3 | $T_3 - T_2$ | $Y_3 - Y_2$ | $Y_3 - Y_2 / T_3 - T_2$ |

**Figura 47b**

Actividad 2:
Completa la siguiente tabla de desplazamientos relativos en el eje Y para los puntos P1, P2 Y P3.

| Punto | Ordenada | ΔY |
|---|---|---|
| Po | Yo | |
| P1 | Y1 | $Y_1 - Y_0$ |
| P2 | Y2 | $Y_2 - Y_1$ |
| P3 | Y3 | $Y_3 - Y_2$ |

**Figura 47c**

En la figura anterior se muestra el concepto de pendiente en una función lineal, es decir tienen un concepto de pendiente como la operación resultante del cociente, y su significado de cambio uniforme del parámetro estudiado para el caso de una función lineal. También se evidencia el significado de la ordenada al origen de una expresión algebraica lineal relacionando la ordenada al con el término independiente. El alumno representa correctamente las funciones obtenidas de la solución de la ecuación diferencial y su relación con las constantes obtenidas producto de la integración. La constante de una expresión algebraica lineal es un concepto relacionado con la intersección de la función en estudio con el eje de las ordenadas de ahí que los alumnos conceptualizan a la constante de integración como un elemento de la función lineal que determina su comportamiento figura 48.

**Respuesta de estudiante**

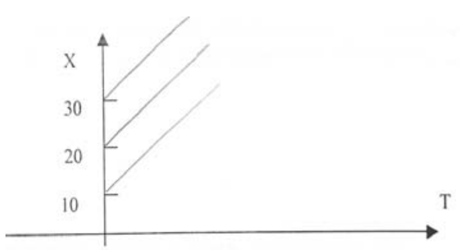



**Figura 48**

Entre los comentarios expresados por los alumnos en relación con la pregunta sobre el significado gráfico que le atribuyen a la constante resultante de la integración se obtuvieron las siguientes respuestas tabla 18.

**Respuestas de alumnos a la actividad desplazamiento con conocimientos previos**

| Número de alumno | Respuesta |
|---|---|
| 1 | La ordenada al origen. |
| 2 | Representa el principio de nuestra partícula. |
| 3 | Es el valor de inicio de la función |
| 4 | Representa una magnitud de velocidad. |

**Tabla 18**

Es importante mencionar que tres alumnos plantean las relaciones de cambio de desplazamiento y tiempo en términos de funciones trigonométricas como son el seno, coseno y tangente, parece ser que para ellos el cambio del eje cartesiano del tiempo lo asocian con la función seno, la variación en desplazamiento la asocian con la función coseno, además la localización de los puntos sobre la función lineal la asocian con la tangente, esto aunque es incorrecto se ve la gran influencia que tiene el aspecto algorítmico en el discurso matemático escolar, en donde el alumno trata de encontrar soluciones basadas en los aspectos algebraicos y geométricos, separando los aspectos problemáticos de contexto, es decir el alumno evade utilizar su capacidad de metacognición evaluando los resultados parciales y confrontarlos para aceptarlos como correctos o no, en resumen el alumno únicamente aplica reglas, específicamente en este caso las referentes al teorema de Pitágoras construido en un segmento de la función lineal que describe el comportamiento de la partícula, como podemos ver a continuación en la siguiente imagen figura 49.

**Respuesta de estudiante**

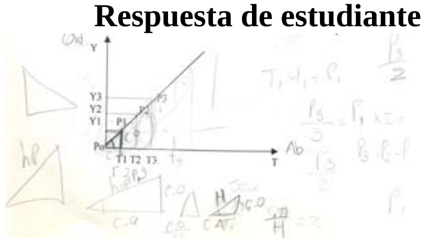


**Figura 49**

B) Contextualización de la actividad.

En el análisis siguiente se considerarán los pasos centrales de la Matemática en Contexto, así como los objetivos tanto generales como particulares. El paso inicial es la definición de un problema físico contextualizado a un fenómeno de movimiento donde se establecen las características del fenómeno que el alumno analizó detenidamente. En la definición de variables la mayoría de los alumnos identifican las variables que intervienen en el fenómeno físico, aunque influenciados por el fenómeno introducen otras variables no consideradas en el movimiento como son la masa, la fuerza de fricción y aceleración, esto evidencia algunas creencias sobre las variables involucradas en el fenómeno, quizá influenciados por los conceptos vistos en otras materias dentro de su formación como son cinemática o dinámica, pero más es probable que se trate de una falta de atención en el análisis del problema. En la determinación del modelo matemático las representaciones algebraicas y gráficas que usan los alumnos son adecuadas con relación a los conceptos de pendiente y ordenada al origen aplicados al problema contextualizado, es decir el alumno le resulta importante la contextualización del problema por resolver.

Habiendo el alumno planteado el modelo matemático realiza una interpretación correcta en cuanto al significado contextual de la ordenada al origen y el concepto que le acompaña de que la función general se relaciona con un grupo de curvas que lineales con la misma pendiente, esto último valida los conocimientos que el alumno posee, además al alumno se le facilita la interpretación de éstas curvas dentro del modelo contextualixzado, algunas de las respuestas dadas por el alumno son las siguientes tabla 19.

**Respuestas de los alumnos a la actividad desplazamiento en contexto**

| Alumno | Respuesta |
|---|---|
| 1 | Para el mismo tiempo las tres líneas se comportan igual m(pendiente), solo se modifica a la constante n=10 donde es el valor inicial del origen. |
| 2 | Las líneas de la gráfica siguen la misma dirección y sentido, excepto la pendiente cuyo valor es 10,20 y 30. |
| 3 | Se comporta constante y no puede variar. |

**Tabla 19**

Esta última respuesta, a pesar de que el alumno graficó correctamente el comportamiento de las curvas, él tiene la creencia que al hablar de curva se refiere a aquellas funciones que no tienen su pendiente constante, es decir en su creencia la recta no es una curva figura 50.

**Respuesta de estudiante**

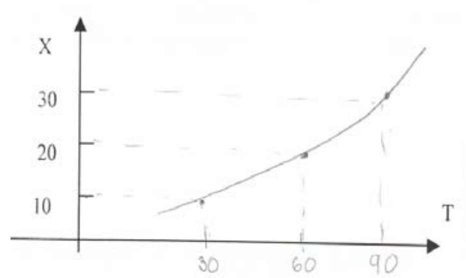



**Figura 50**

Es importante observar que en el desarrollo de la actividad interpretan incorrectamente la siguiente afirmación “Si varios automóviles se mueven a la misma relación de desplazamiento con respecto al tiempo, pero partiendo de distintos puntos de origen”, graficaron incorrectamente, esto les lleva a definir funciones lineales que cambian de pendiente, quizá causado por la interpretación que hacen del enunciado que dice “partiendo de distintos puntos de origen” y esta idea del cambio de origen, es lo que motiva a cambiar las pendientes de las rectas, es decir que en este caso los alumnos pierden de vista la contextualización en cuanto al significado de tener varios automóviles que parten de tres puntos diferentes todos medidos desde el único origen. Los alumnos que contestaron de ésta manera fueron cuatro los cuales se encontraban en un mismo grupo por lo que se presento el problema de influencia de unos con otros, porque sus respuestas contienen los mismos errores conceptuales figura 51

**Respuesta de estudiante**

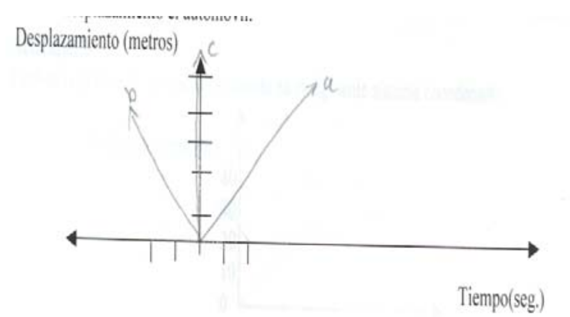



**Figura 51**

La determinación de la solución requerida es realizada correctamente asignándole al término independiente de la expresión algebraica un significado contextual, es decir los alumnos asocian al gráfico obtenido con el fenómeno estudiado y contextualizado.

Finalmente con relación a la solución en términos del problema, los alumnos obtienen la respuesta correcta en términos de la contextualización, asignándole un significado, es decir el alumno asigna una interpretación propia del desplazamiento uniforme de la partícula como una función lineal la cual por ser una expresión general representa un conjunto de curvas, donde una de ellas es la función particular que determina el comportamiento del fenómeno estudiado, estas respuestas el alumno las genera tomando en cuenta la situación problemática, lo que prueba que para ellos la contextualización del problema es importante, así como la asociación que hacen de los aspectos algorítmico y gráfico del fenómeno físico estudiado.

En términos generales la actividad didáctica de desplazamiento evidencia cierta influencia conceptual del discurso matemático escolar, en donde los aspectos conceptuales pasan a segundo término, debido a que existe la creencia que la parte formal es fundamental. Además se muestra una renuencia a lograr la interpretación cognitiva del problema contextualizado. Esto último confirma que es necesario desarrollar cursos formales y curriculares contextualizados figura 52.

**Respuesta de estudiante**

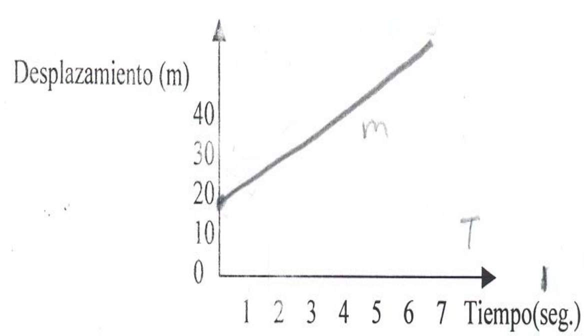



**Figura 52**

Antes de finalizar este apartado no podemos de dejar de hacer algunos comentarios generales de las acciones tomadas por los estudiantes al resolver ésta actividad didáctica.

Con el propósito de mostrar el concepto de diferencias tanto lineales como angulares, muchos de los alumnos mostraron que poseen estos conceptos de diferencias, aunque existen ciertas discrepancias al mostrar las diferencias angulares, esto es, algunos alumnos trataron de mostrar las diferencias mediante el uso de las funciones trigonométricas como se muestra la figura 53.

**Respuesta de estudiante**

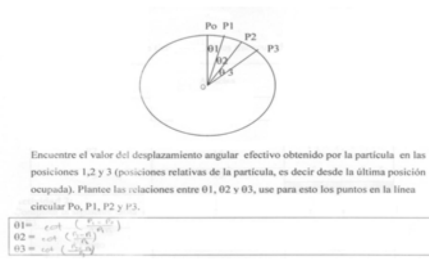



**Figura 53**

El uso de las funciones trigonométricas considero que no fue adecuado por parte de los alumnos en lo referente a la comprensión del concepto de derivada, cuando el movimiento es angular parece ser que el alumno tiende a realizar una asociación con los triángulos rectángulos los cuales permiten calcular los valores asociados a las funciones trigonométricas. Más adelante cuando se les solicita que planteen las diferencias básicas tanto lineales como angulares también representan la relación de variación de desplazamiento entre el tiempo, pero nuevamente realiza el planteamiento en términos de las funciones trigonométricas, presentó un obstáculo el cual alteró de alguna manera el seguimiento de resolución de la actividad didáctica para que el alumno pudiera llegar por si mismo al concepto de pendiente en el fenómeno de movimiento lineal, a pesar de que los lineamientos propios de la actividad mostraban de forma explícita el concepto linealidad de algunos puntos que se encuentran formando parte de una función lineal. Es relevante mencionar que algunos alumnos al solicitarles encontrar las diferencias lineales entre distintos puntos todos ubicados en la línea recta optaron por colocar las relaciones de conjuntos (específicamente de unión) entre los puntos, mezclando puntos sobre la recta con los desplazamientos relativos, lo cual parece ser que el alumno no identifica la relación entre los desplazamientos efectivos y sus correspondientes puntos sobre la recta, parece ser que el problema se encuentra en la mezcla que realiza el alumno de distancias relativas (S1,S2 y S3) con los puntos (P0,P1,P2 y P3) sobre la recta.

En cuanto a la comprensión del concepto de pendiente al alumno responde claramente el concepto de proporcionalidad o de variación del desplazamiento con respecto al tiempo, es decir el alumno tiene una idea cognitiva clara del concepto representado por la pendiente y ellos concluyen que la pendiente es una constante, pero aunque algunos de los alumnos presentaron algunos problemas del calculo de las diferencias la mayoría de ellos llega a la expresión esperada en cuanto al concepto de variabilidad del desplazamiento con respecto al tiempo. Un aspecto que es importante mencionar es que un alumno no llegó al modelo matemático general del fenómeno debido a que tuvo problemas para transferir el concepto matemático hacia la representación del fenómeno físico de movimiento estudiado, el fenómeno de movimiento lo representa con modelos matemáticos de la física de movimiento uniforme como lo muestra esta expresión: $x=Vot + at^2/2$.

En lo que se refiere a la contextualización de la función desplazamiento al alumno identifica cuales son las variables básicas que intervienen en el fenómeno, se presentan dos casos en donde los alumnos indican otros tipos de variables las cuales presentan las mismas respuestas, pero que no tienen relación con las variables propias del fenómeno, es decir que algunos alumnos incluyeron variables como la fricción, peso, etcétera las cuales no tienen influencia en la deducción del modelo matemático. En cuanto la deducción del modelo matemático 6/7 de los alumnos lograron llegar a la deducción sin ningún problema. Al resolver el modelo matemático sólo un alumno no encontró la solución, debido parece ser a la influencia del concepto de lo que es el tiro parabólico. La determinación de la solución del modelo matemático particular, los alumnos llegan a la solución correcta planeada con algunas desviaciones, pues dos de los alumnos no dejan planteada la solución en términos en donde se incluya la ordenada al origen, lo cual nos hace ver que estos alumnos no comprendieron el significado de la constante de integración, otro de los alumnos deja la solución de la ecuación, pero no lo aplica en términos del fenómeno particular sino la deja en términos algebraicos, a pesar que en el enunciado del problema se incluye claramente las características del fenómeno, este alumno deja la solución en términos de una expresión general incluyendo el valor de la ordenada al origen.

La solución en términos del problema únicamente dos alumnos la pudieron expresar de manera correcta, los alumnos que no llegaron a la solución correcta es debido a que los alumnos pierden de vista las condiciones iniciales bajo las cuales se da el fenómeno.

**Análisis de la actividad velocidad.**

A)Conocimientos previos del alumno.

En esta parte de la actividad el alumno reconoce las variables que intervienen en el fenómeno, los alumnos identifican al modelo matemático del problema planteado, además definen el modelo matemático en función de su pendiente y ordenada al origen, inclusive se observa que los alumnos utilizan con familiaridad, el concepto de cambio en las diferencias dejando planteado el modelo matemático. Después de haber encontrado el modelo matemático se les pide que deriven la función lineal encontrada con respecto al tiempo, el 85% de los alumnos llegan a la conclusión de que la primera derivada de la función lineal es constante o es proporcional, es decir al derivar una función lineal consideran que la derivada obtenida es una constante. Esto evidencia que el estudiante tiene un concepto claro del significado de la función constante figura 54.

**Respuesta de estudiante**

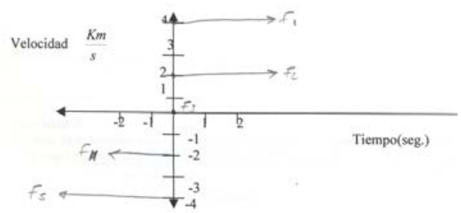



**Figura 54**

Finalmente al plantear la ecuación diferencial de primer orden de la aceleración en términos de la velocidad y se les solicita que obtengan la primera derivada y que a su vez la expresión obtenida, la integren separando variables y además de preguntarles sobre el concepto que tienen de la constante de integración como resultado de la integración, a lo que ellos responden que representa la ordenada al origen o bien el inicio de la función, es evidente que en este momento de la actividad el alumno identifico el significado de la constante de integración en términos de la ordenada al origen ya que la función es lineal y él conoce el papel que tiene el término independiente en una expresión algebraica. Es en esta fase de la actividad donde se observa que los alumnos poseen los elementos básicos geométricos y algebraicos para iniciar la actividad en el contexto.

B)Contextualización de la actividad.

Al inicio de la actividad los alumnos identifican plenamente las variables que intervienen en el fenómeno de movimiento. En cuanto al planteamiento del modelo matemático lo muestran en términos de una expresión diferencial del desplazamiento con respecto al tiempo, ésta expresión diferencial la igualan a una constante expresada de forma algebraica haciendo caso omiso de lo que describe el enunciado, aunque si le atribuye un significado al signo de la función como consecuencia de la contextualización del fenómeno. En esta fase los alumnos entienden que el signo de la función representa el cambio de sentido del móvil o partícula, esta última afirmación sobre el signo de las funciones lo confirma al ejecutar las gráficas solicitadas de forma correcta variando la velocidad y el sentido, esto también confirma que los alumnos están entendiendo bien el aspecto de la contextualización cuando el móvil cambia de sentido de movimiento o de magnitud de la velocidad del automóvil figura 55.

**Respuesta de estudiante**

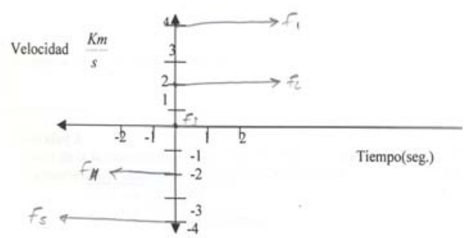



**Figura 55**

La solución del modelo matemático es resuelta correctamente, aunque al graficar tres curvas particulares de la solución general encontrada únicamente dos de ellos realizan una representación correcta en función de la pendiente y la ordenada al origen, aunque algunos alumnos no grafican correctamente la función lineal se unifican en el concepto de que la solución de una ecuación diferencial representan un conjunto de curvas que describan el comportamiento del objeto o la partícula en estudio, aunque ellos ven a la solución como una relación funcional entre desplazamiento y tiempo, quizá por la idea que deja el discurso matemático escolar actual acerca de la importancia en la algorítmia de dar significado matemático puro a los términos que forman la expresión algebraica figuras 56 y 57.

**Respuesta** de estudiante

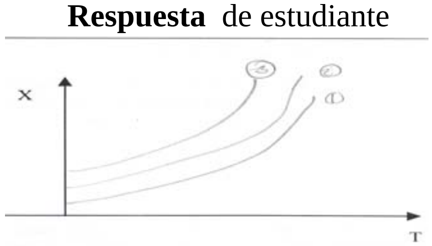



Figura. **56**

Respuesta de estudiante

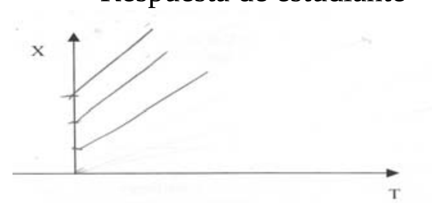



**Figura 57**

Para finalizar el análisis de la actividad velocidad, en la determinación de la solución de únicamente dos alumnos aplican las condiciones iniciales para encontrar la solución particular y cuatro de los alumnos realizan una interpretación sobre el significado de la función encontrada e indican, “es donde empieza el desplazamiento del cuerpo y que en realidad el desplazamiento del cuerpo se encuentra fuera del origen”. Los alumnos que no aplicaron las condiciones iniciales se concretan a realizar una representación gráfica de una función general, pero esta acción les limita poder realizar el análisis posterior del significado de la solución en relación con el significado contextual del problema relacionando los aspectos algorítmicos y gráficos. Aunque la actividad está diseñada para reafirmar el concepto de ecuación diferencial en relación con la representación de un conjunto de curvas, en donde una de ellas representa la función particular la cual está incluida dentro de las posibles soluciones planteadas por la solución general. En términos generales se puede decir que los alumnos interpretan claramente el significado de lo que representa el cambio de la constante de integración en el caso de que una función lineal, aunque se puede observar que no relacionan claramente el valor particular de una de esas constantes de integración con la solución particular, esto posiblemente por la falta de práctica de las diferentes materias en el campo contextual.

Finalmente dos alumnos calculan la solución pedida por el problema de forma correcta, pero tienen dificultades al dar la interpretación de la solución en términos del problema, esto debido a que no están acostumbrados a realizar la transferencia entre los resultados matemáticos del proceso algorítmico y la interpretación que tienen que hacer bajo una situación contextualizada, como se puede observar en este último paso, ellos tienen los elementos básicos para dar el paso de transición entre lo algorítmico y la interpretación contextualizada, pero debido a que en la práctica docente se disponen de muy pocas actividades dirigidas a que puedan desarrollar esta capacidad cognitiva.

Ahora realizaremos un pequeño análisis general de las respuestas generales comunes de los estudiantes.

El concepto que el alumno tiene asociado con el fenómeno de velocidad constante es correcto, es decir tiene una visión clara entre el fenómeno, su función gráfica y su representación algebraica. Aunque existen algunos problemas transitar del modelo gráfico al modelo algebraico, quizá por la visión espacial de su representación, es decir a pesar de que el alumno conoce cual es la representación de una función lineal no está familiarizado con la representación de varias funciones gráficas asociadas sus correspondientes funciones algebraicas, cuando se cambian algunos de los parámetros de las mismas funciones como por ejemplo el término independiente de una función lineal. Por otro lado al realizar la derivada de funciones o expresiones algebraicas generales, los alumnos determinaron el modelo matemático que se esperaba pero sin realizar la generalización o extensión de la obtención de la derivada de varias rectas tomando en cuenta ciertas regularidades que se mostraba en el ejercicio propuesto, es decir se esperaba que los alumnos encontraran la relación común que liga a las rectas que es la pendiente en un conjunto de rectas paralelas, algunos alumnos entienden que la primera derivada de una recta es una función constante, pero al parecer al obtener la derivada de la función lineal general no transfiere el concepto al obtener una pendiente constante, lo que hacen es asignar el valor de la pendiente igual a uno lo cual no corresponde con un valor general de la pendiente sino un valor particular. Esto parece ser un obstáculo cognitivo, el alumno no está acostumbrado a trabajar de forma algebraica e interpretar las respuestas obtenidas en términos del problema propuesto. Los alumnos poseen un concepto claro de lo que representa la velocidad constante que corresponde con desplazamientos iguales en tiempos iguales lo muestran al expresar que los desplazamientos y los tiempos son “proporcionales entre si”, el alumno interpreta claramente el proceso de solución de una ecuación diferencial lineal, en donde se obtiene una constante y ésta representada en la función lineal obtenida por la ordenada al origen.

En cuanto a la contextualización de la función velocidad en términos generales los alumnos definen bien las variables que intervienen en el fenómeno En lo que se refiere al modelo matemático en contexto, se puede decir que el alumno de alguna forma encuentra el modelo matemático, en ésta parte de la actividad se evidenció que los alumnos tienen un concepto claro del concepto de sentido de velocidad y lo relaciona con una fuerza la cual puede modificar el estado de inercia del cuerpo.

Es observable que cuando al alumno se le solicita graficar velocidades positivas y negativas pueden graficar la parte positiva de la función, lo que evidencia la comprensión que tiene el alumno del fenómeno físico, pero la velocidad negativa les cuesta trabajo su representación gráfica, un alumno realiza la gráfica de la función constante como un punto en el sistema coordenado, lo que pone en evidencia una falta de capacidad conceptual en cuanto a la representación de una función constante.

La solución del modelo matemático es correcta, lo que muestra un manejo eficiente de los procedimientos de solución de ecuaciones diferenciales, con relación a la interpretación de gráficas, se observo que un alumno no posee un conocimiento espacial de las funciones gráficas obtenidas en cuanto a los valores de la constante de integración c de forma general, aunque cuando de forma particular a la constante se le dan valores de 1,2 y 3 los alumnos resuelven correctamente éstas funciones. Se presenta en algunos casos que confunden la representación de la solución en términos de una función lineal con un gráfico de una función parabólica.. Finalmente en cuanto a la comprensión de la constante de integración se observa que tienen leve conciencia sobre el significado de la función resultante y el conjunto de gráficas asociadas relacionadas son la solución general de la ecuación diferencial. El significado que uno de los alumnos tiene sobre el significado de la constante c es el siguiente "que a partir de una ecuación diferencial es posible conocer el tipo de relación entre las variables", aunque éste razonamiento es correcto en cuanto al significado de la constante de integración c y la ordenada al origen, parece ser que todavía no hay la concepción de que la constante c de integración representa un conjunto de curvas asociadas al comportamiento del fenómeno del cuerpo en movimiento partiendo de un punto con respecto al origen, esto a pesar de que se trata de un grupo de alumnos de la materia de ecuaciones diferenciales en donde se ha impartido el 77% del total del curso.

Al tratar de encontrar la solución requerida, parece ser que un alumno relaciona la solución obtenida de la ecuación diferencial con calcular la constante de integración en función de las condiciones iniciales dadas previamente en el enunciado del problema, las cuales determinarán cual del conjunto de funciones satisface el comportamiento de la partícula estudiada. Finalmente la interpretación que el alumno da sobre el significado gráfico de la solución es que la función encontrada "inicia a una distancia desde el origen desde donde parte la partícula", lo cual es correcto en su interpretación física, lo que maneja de forma incorrecta es el tipo de gráfica representada para la función de tipo lineal, aunque e tres alumnos usan una representación parabólica, esto quizá sea porque ellos no reconocen donde utilizar las condiciones iniciales en la solución general de la ecuación diferencial, lo cual les lleva a suponer que la curva que representa el comportamiento del fenómeno es una curva de tipo parabólico. En significado de las condiciones iniciales que se plantean los alumnos considera que las condiciones iniciales les sirven para encontrar la función que en términos del problema nos muestra la distancia inicial del cohete con respecto al origen, parece ser que el alumno no alcanza a comprender el conjunto de curvas involucradas en la solución de una ecuación diferencial, en donde las condiciones iniciales determinan la función particular que las satisface y la representación gráfica obtenida atraviesa a una distancia inicial del origen. A pesar que se les plantea a los alumnos de forma explícita una serie de curvas las cuales representan un conjunto de soluciones posibles, de las cuales únicamente una de ellas corresponderá con la solución y al sustituir las condiciones iniciales se obtendrá la función particular, parece ser que el alumno no alcanza a comprender lo que significa la resolución de la ecuación diferencial en relación con que una de las curvas satisface plenamente las condiciones iniciales y que ésta función determina el movimiento seguido por la partícula, algunos alumnos persisten en graficar la función como una de segundo grado, esto parece ser porque no tienen una visualización espacial de la gráfica del la función, esto también provocado por la expresión de la solución algebraica, es decir algunos de los alumnos incluyen en el modelo matemático derivadas de algunas de las variables, esto muestra una contradicción sobre el significado de la solución ya que la solución de la ecuación debe estar exenta de éstas diferenciales y quedar en términos de las variables involucradas y su constante de integración.

En conclusión los alumnos llegan a la solución de la ecuación diferencial y a la sustitución de las condiciones iniciales establecidas por el problema y encuentran una función la cual depende de una posición inicial relativa al origen de coordenadas, es decir que el alumno considera que el valor de c determina la ordenada al origen por donde la curva cruza el eje de las ordenadas.

Finalmente los alumnos llegan a conclusiones verdaderas en cuanto al significado geométrico de la solución particular, aunque muestran cierta limitación en cuanto al significado atribuido al fenómeno físico asociado con la ecuación diferencial resuelta, aunque algunos de ellos si son conscientes del significado propio de la solución en términos del problema.

**Análisis de la actividad aceleración.**

A)Conocimientos previos del alumno.

En lo que se refiere a los conocimientos previos que los alumnos muestran en relación con la variación de los diferenciales de desplazamiento con respecto al tiempo y su representación gráfica, los alumnos muestran que conocen el significado de pendiente y ordenada al origen de una función lineal, además son capaces de reconocer las funciones que son constantes. Los conocimientos básicos utilizados por los alumnos en la solución de la actividad, así como las interpretaciones son adecuadas previas a la contextualización del problema. Se observa que las representaciones gráficas de las funciones relacionadas con su representación algebraica particular es correcta, fundamentalmente en relación con el significado que le asignan al término independiente y al concepto de cambio de un parámetro determinado con respecto al tiempo, este concepto de cambio confirma las ideas que tienen los estudiantes sobre el significado del término independiente y la pendiente en una función lineal figura 58.

**Respuesta de estudiante**

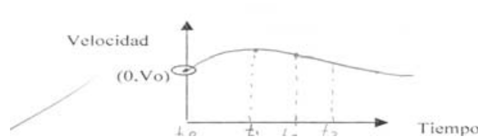


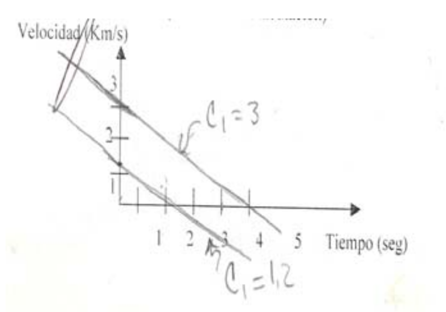

**Figura 58**

El alumnos poseen una capacidad limitada en relación a la interpretación de la constante resultado de la integración en términos geométricos y gráficos, ellos proporcionan una interpretación en función del valor inicial que toma la velocidad y los demás se concretan a sustituir los valores sin proporcionar una interpretación gráfica después de la sustitución de las condiciones iniciales, esto es un indicador que evidencia que los procedimientos algorítmicos si bien son necesarios limitan al alumno para poder proporcionar algún significado al problema contextualizado.

B)Contextualización de la actividad.

En a la determinación de los valores de las variables y constantes los alumnos identifican las más importantes. En el paso de la determinación del modelo matemático retoman a la función de velocidad encontrada anteriormente, pero la dejan en términos de la constante de integración general, es decir no consideran las condiciones iniciales dadas en la actividad previa a la contextualización las cuales determinaron el valor específico de esta constante, esto obedece a que el alumno no puso atención al enunciado del problema o bien falto repetir el dato de condiciones iniciales del problema para que lo pudiera utilizar en la fase de solución de modelo matemático. En lo que se refiere al signo negativo de la velocidad indican que representa una disminución de la misma en su valor inicial, también relacionan correctamente el concepto de velocidad constante de cualquier valor inclusive al valor cero de velocidad se lo atribuyen a la falta de movimiento del cuerpo, esto confirma que la contextualización le da significado a los modelos gráficos y algorítmicos presentes en la actividad figura 59.

**Respuesta estudiante**




. **Figura 59**

En la solución matemática del problema, éste es resuelto en términos de una constante de integración general y no retoman las condiciones iniciales, para el alumno es claro que el significado gráfico de la constante de integración es el corte de las curvas en el eje de las velocidades. Considera la integración de la función velocidad para obtener la función desplazamiento y se observa que ellos se muestran influenciados por los aspectos algebraicos sin considerar a la constante de integración con el fenómeno estudiado. En términos generales se pude decir que los alumnos atribuyen un significado a la constante de integración como el valor de inicio de la velocidad o la aceleración del problema estudiado, esto muestra evidencias de la influencia de la contextualización del problema.

Finalmente en el paso donde se realiza la contextualización o sea la solución en términos del problema físico a resolver, los alumnos no realizan la sustitución de las condiciones iniciales, se observa que a estas alturas de la actividad el alumno no ha considerado tomar en cuenta las condiciones iniciales del inicio del problema quizá por olvido o por la poca importancia que le dan al significado de las condiciones iniciales en el problema estudiado.

Esta actividad es la más extensa, además incluye el cálculo de las funciones de velocidad y desplazamiento en el contexto, las cuales dependen directamente de las condiciones iniciales correspondientes. Lo que faltó fue enfatizar los valores de las condiciones iniciales en el momento oportuno para que el alumno las pudiera retomar y pueda abordar el problema tal como esta planteado al inicio de la actividad, pues las condiciones iniciales fueron omitidas por algunos alumnos.

Finalizaremos este apartado reflexionando sobre algunos aspectos generales de las respuestas de los alumnos en la actividad aceleración.

El concepto que los alumnos poseen de diferencias de desplazamiento y tiempo es correcto pues todos los alumnos contestaron exitosamente, aunque en la actividad 4 del paso 3 algunos alumnos confundieron el concepto de velocidad constante con aceleración uniforme, parece ser que el concepto de velocidad constante es confundido con el concepto de aceleración constante, lo que parece ser que causó esta confusión es el concepto que tienen de aceleración en cuanto a la variación de la velocidad en igual intervalos de tiempo.

La interpretación que hicieron los alumnos del significado de la ecuación diferencial asociado con el problema contextual es correcta, pero en el aspecto intuitivo de la solución el cual interpretan como la velocidad inicial del cuerpo en lo que se refiere a la gráfica de velocidad con respecto al tiempo.

La identificación de las variables que intervienen en el fenómeno todos los alumnos respondieron correctamente, lo que muestra una buena discriminación de los elementos que intervienen en fenómeno de movimiento. En el paso de encontrar el modelo matemático partiendo del enunciado del problema, sólo dos alumnos lo relacionaron con el dato inicial de -4 $m / seg^2$ lo cual demuestra una falta de atención en la lectura del enunciado o bien este dato referente a la función es necesario retomarlo, los alumnos que no presentan el modelo matemático como una función constante de aceleración negativa lo incluyeron en una fórmula muy común en el estudio del movimiento uniformemente acelerado la cual es v = Vo + at. En la actividad 2 sobre la obtención del modelo matemático algunos alumnos equivocan el concepto del gráfico de la velocidad constante y la representan de forma gráfica como velocidad variable, aunque es curioso, pero estos alumnos contestan correctamente en cuanto al cuestionamiento del significado de la velocidad cero, el cual definen en función de la contextualización del problema “que los propulsores están ejerciendo la misma fuerza de aceleración y el cohete no adquiere velocidad”, esto explica el concepto de velocidad variable del cuerpo, pues el cuerpo quizá se encuentre moviéndose disminuyendo su velocidad de forma constante, esto debido a que hay un equilibrio dinámico, estos elementos quizá es lo que los confunde en relación con su concepto de velocidad cero.

En la solución del modelo matemático sólo un alumno no pudo encontrar la solución al modelo matemático, esto ocasionado porque no obtuvo el modelo matemático general en el paso III, y no pudo aplicar las condiciones iniciales y encontrar la solución particular, es observable que los alumnos resuelven correctamente el modelo matemático planteado en el paso III, es conveniente apuntar que el modelo matemático planteado en el paso III fue un modelo matemático general de solución de movimiento para calcular la velocidad de un cuerpo con aceleración constante. De los dos alumnos que pusieron como modelo alternativo el modelo adecuado en función de la aceleración negativa de –4 $m/seg^2$, pero posiblemente por influencia de grupo no decidieron resolverlo. La solución de la ecuación fue resuelta en cuanto al modelo matemático obtenido en el paso III.

Las actividades restantes hasta el paso V se vieron alteradas por equivoco del modelo matemático determinado en el paso III, esto limito las actividades del paso V en cuanto las respuestas correctas obtenidas, a pesar de ésta alteración en la solución de la actividad los alumnos no pierden de vista el significado contextual de lo que representan las constantes de integración involucradas, los cuales representan condiciones donde inicia la velocidad y la aceleración del movimiento de la partícula con respecto a un punto de referencia.

## Conclusiones

De la aplicación de las actividades didácticas se pueden obtener las siguientes conclusiones:

1.-Se observa que las condiciones iniciales del problema si bien son inherentes a la definición del problema, éstas no tienen un significado práctico en cuanto a la determinación de una función final como producto de la integración, es decir las condiciones iniciales toman significado cuando el alumno ha encontrado la ecuación general del problema y desea determinar la función particular lo cual le llevará a la determinación de la constante producto de la integración en el proceso de solución de la ecuación diferencial. En los cursos actuales de ecuaciones diferenciales en el tema de las aplicaciones se plantea un enunciado en donde se proporcionan las condiciones iniciales del problema lo cual si bien es un requisito en la solución particular, pero estas deben ser proporcionadas después de encontrar la solución general del problema planteado. En realidad cuando se proporcionan inicialmente las condiciones iniciales en un problema planteado el alumno no tiene una visión global de lo que representarán en el fenómeno particular que se trata de resolver.

2.-En el desarrollo de una actividad grupal es necesario estar muy al pendiente de cualquier posible desviación que pueda presentarse, esto puede alterar el desarrollo de la misma y cambiar los resultados que se esperan obtener de la experimentación, es decir que el grupo puede plantear un modelo incorrecto de la solución por una equivocada percepción grupal, también es importante verificar que el grupo haya terminado completamente la actividad.

3.-Se comprobó que es recomendable la colocación de temas relacionados con las diferencias sucesivas obtenidas de la variación de los parámetros manejados en el fenómeno en cuestión. Esto permitió hacer conciencia en el alumno del concepto de variabilidad del parámetro y asociarlo con el concepto de diferencial en el manejo de la variable de un fenómeno en un tiempo intervalo de tiempo determinado.

4.-Se observa una clara conciencia del alumno en cuanto a la resolución de una ecuación diferencial desde el punto de vista algorítmico pero, el alumno no posee un concepto claro en relación con el significado de la solución particular asociada con el conjunto de gráficas definidas en la solución general de la ecuación diferencial. Esto prueba cuál es la influencia que tiene los cursos de ecuaciones diferenciales tradicionales sobre el aprendizaje de los alumnos en donde no se contextualiza la materia. Se muestra una incapacidad de los alumnos de percibir el comportamiento visual de las funciones, esto provocado por el interés que tiene los cursos de matemáticas sobre los aspectos algorítmicos y donde el aspecto gráfico está ausente en gran parte del discurso matemático escolar.

5.-El alumno tiene claro el procedimiento de solución de una ecuación diferencial, pero tiene un significado parcial en cuanto al significado de la solución obtenida y aplicada al fenómeno particular tratado, esto muestra la necesidad de construir más cursos de forma contextualizada.

6.-La actividad desarrollada provocó en algunos alumnos un nuevo significado en relación entre los aspectos algebraico y geométrico lo cual le lleva a la comprensión de la solución de una ecuación diferencial en el contexto de la física.

7.- Es evidente que la actividad didáctica de aceleración necesita mayor tiempo en su resolución debido a la extensión de la misma, esta actividad maneja algunas actividades equivalentes a las contenidas en las actividades de desplazamiento y velocidad aunque la misma actividad de aceleración goza de independencia propia.

8.-Se presenta una disminución en el porcentaje de respuestas correctas en los alumnos de Ingeniería Mecánica Eléctrica debido a que ellos llevaron el curso de ecuaciones diferenciales un año y medio antes.

9.- El discurso matemático escolar limita muchas de las materias curriculares de aplicación que los futuros profesionales usarán posteriormente en sus cursos futuros, pero desvinculados de la realidad y en el discurso matemático se tratan los temas como recetas condensadas, fórmulas, tablas o procedimientos ya hechos, es por esta razón que es necesario el diseño de materias totalmente contextualizadas dentro de la currícula de los futuros profesionales.

## Recomendaciones.

En esta investigación se ha trabajado con ecuaciones diferenciales lineales, ahora queda mucho por hacer en cuanto al diseño de actividades didácticas las cuales favorezcan el aprendizaje de los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales relacionadas con los diferentes fenómenos físicos. Las actividades didácticas diseñadas en el presente trabajo, son una muestra de que sí se pueden contextualizar las ecuaciones diferenciales y trabajar con la Matemática en Contexto, para que al alumno se le facilite la aplicación de las ecuaciones diferenciales a su vida diaria.

Es importante visualizar el futuro de todos los conocimientos adquiridos en la formación de los estudiantes de manera ligada en el contexto de las ciencias, es decir con la matemática en contexto los conocimientos adquiridos por el alumno quedan ligados a la vida diaria del estudiante de tal manera que no existirán sobresaltos en cuanto a la integración del conocimiento adquirido y el aplicado durante la práctica profesional

## Bibliografía

Abell, (1996). *Modern Differential Equations: Theory, Applications*, Technology Harcourt Brace & Company.

Alonso E. M. (2000). *Física*, Vol. 1 ,Ed. Fondo educativo interamericano,

Armbruster, (1996). *Introductory Differential Equations: From Linearity to Chaos,* Addison Wesley Publishing Company.

Arnold,V.I (1997). *Ecuaciones Diferenciales ordinarias*, Editorial Nauka, Moscú (en ruso).

Aplan, W. (1962). *Operational Méthods for Lineal Systems,*Addison-Wesley, Masachusetts and London.

Arquímedes (1986). *El método, Alianza Editorial*, Madrid, (Traducción, Introducción y notas :Luis Vega).

Artigue M,L Viento and J. Menigaux (1990). *Some aspects of students conceptions and dificulties about differentials*, Eur. J.Phys. 11, pp 262-267.

Ayres, F. (1969). *Ecuaciones Diferenciales,* Serie Schaum's, Mc Graw Hill.

Barajas E. J. I. (1987). *Ecuaciones diferenciales ordinarias en las escuelas de Ingeniería Civil*, Tesis de Maestría, Cinvestav, I.P.N.,México.

Baron, M.E. (1969). *The origins of the infinitesimal calculus*, Pergamon-Press,Oxford-Edimburg-New york.}

Benites L. (1993). *Significado de los objetos matemáticos con centrado en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden,* Tesis de Maestría, Cinvestav I.P.N,México.

Berezin ,I.S. and N.P. Zhidkov. (1970). *Computing Methods*,.2 Vols,Ediciones R. ,La habana.

Bevering West. (1997). *Interactive Differential Equations*, Addison Wesley.

Bidikov,Y.N. (1980). *Curso general de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias,* Universidad de Leningrado.

Blanchard P. (1998). *Ecuaciones diferenciales*, Ed. Thompson.

Blanchard (1996). *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach,* Preliminary Ed. PWS Publishing,

Borrelli, (1996). *Differential Equations: A Modeling Perspective*, Preliminary Ed. John Wiley & Sons, Inc.

Boudonov, N. (1980). *Teoría de estabilidad de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Universidad de la Habana.

Boyce-Diprima, (1992). *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*, 5th Ed. John Wiley & Sons, Inc.

Braun, M. (1976). *Diferential Ecuations and their applications*, Springer Verlang.

Brodetsky, S. (1902). *The Graphical of Differential Equations,* The Mathematical Gazette,vol X, No 146,45-49,USA.

Buendía G. (2002). Un análisis del significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales, *Acta latinoamericana de matemática educativa*; Vol. 12, pp 109-114.

Buendía G. (2005). Elementos socioepistemológicos de las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales lineales, *Acta latinoamericana de matemática educativa*; Vol. 15, pp, Camacho R. A. (1992). *Análisis de textos para ingeniería (un breve estudio sobre las cantidades en movimiento),* Tesis de Maestría, Cinvestav I.P.N,México.

Camacho, R. A., (2000). *Análisis de textos para ingeniería (un breve estudio sobre las cantidades en movimiento),*Tesis de Maestría 207,Cinvestav,I.P.N., México.

Camarena G. P. (1984). El currículo de las matemáticas en Ingeniería. *Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el I.P.N*., México.

Camarena G. P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos,* Tesis de Maestría, Cinvestav I.P.N, México.

Camarena G. P. (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*. Edit. Esime-IPN, México.

Camarena G. P. (1990). *Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctr*icas, Esime-IPN, México.

Camarena G. P. (1995). La enseñanza de la matemática en el contexto de la ingeniería, *Resúmenes del XXXVII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana*, Colima.

Camarena G. P. (1997). Rocha M. Modelos matemáticos de la electricidad y el magnetismo. *XI Reunión matemática de matemática educativa*, Morelia

Camarena G. P. (1999). Hacia la Integración del Conocimiento: Matemáticas e Ingeniería,2º. *Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, I.P.N.,México.

Camarena G. P. (1999). *Las funciones generalizadas en ingeniería, construcción de una alternativa didáctica*, Tesis de doctorado, Cinvestav.

Camarena G. P. (2000). La transformada de Laplace en el contexto de la ingeniería, *Acta latinoamericana de matemática educativa*, Vol 13,pp 124-129.

Camarena G. P. (2001,octubre-diciembre). Contextualización de las Series en Ingeniería (Estrategia Didáctica*), Científica:the Mexican Journaly of Electromrchanical Engineering* Esime, Vol. 5 Num. 4 .

Camarena G.P. (2002, Octubre-Diciembre). La serie de Fourier en el Contexto de Transferencia de Masa, *Científica: the Mexican Journaly of Electromrchanical Engineering* Esime,Vol. 6 Num. 4.

Camarena G. P. (2003). La matemática en el contexto de la ciencias: Fase didáctica, XI *Conferencia Latinoamericana de Educación Matemática*, Brasil.

Camarena G.P. (2003, Novimbre-Diciembre). La matemática en el contexto de la resolución de problemas, *Innovación Educativa*, Vol 3 Num. 17.

Camarena G. P. (2004). Desarrollo de competencias profesionales del futuro ingeniero, *IV Congreso(Retos y Expectativas de la Universidad)*, México.

.Camarena G.P. (2005). La modelación matemática en las carreras universitarias, *IV Congreso Internacional Trujillano de Educación en Matemática y Física*, Venezuela.

Campbell, (1996). *Introduction to Differential Equations with Boundary Value Problems* Houghton Mifflin Company.

Cantoral U.R. (1996). *Pensamiento variacional* , Cinvestav, I.P.N.

Cantoral U.R. ,(2001). *Matemática Educativa*, Grupo Editorial Iberoamérica.

Castañeda A. (2000). *Estudio de la Evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepiestemológica*, Tesis de Maestría,Cinvestav-IPN, México.

Castro A. (1987). *Las ecuaciones diferenciales ordinarias en las escuelas de Ingeniería Civil un doble estudio de evaluación curricular.*, Tesis de Maestría ,Cinvestav,I.P.N.,México.

Cauchy, A. L. (1981). *Equations Differentiellis Ordinaries*, Cours inédit, Fragment,Introduction Christian Gilan,Editions Études Vivantes.

Choud B. DP (2005). *Ordinary differential equqtions*,Alpha Science.

Chevallard Y, (1991). *La transposición didáctica*. El saber sabio al saber enseñado. Aique Grupo editor S.A.

Coughanowr, D.R. and L.B. Koppel (1969). *Process System Analyisis and Control*, Willey & Sons, New York.

Crigorian, A. *T. (1992). Lyapunov Alexandr Mijailovich* , Dictionary of Scientific Biography 8, 559-563.

Cuevas V. (*1992).* Modelo didáctico para un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. Tesis de maestría Cinvestav, México.

Cutnell J.D. (2004). *Física*, Limusa Wiley.

Dalmedico,D. (1992). *Mathématisations*, Augustin-Louis CAUCHY et l´École Francaise.París, Francia:Editions Du Choix.

Daoven. (1985). The history of Mathematics from Antiquite to the present , A selective Bibliography, *Garland Publishing* pp. 254-258.

Darboux, G. (1913). Eloge historique D'Henri Poincaré lu dans la séance publique annuelle du 15 décembre 1913, Gauthier-Villars, París.

Davis (1992). *Differential Equations for Mathematics, Science, and Engineering* Prentice Hall, Inc.

Dedron, P. Et J. Tirad (1959). *Mathematiques et Mathématiciens*·,Magnar,París.

Defares, S. And I. G. Sneddon(1963). *The Mathematics of Medicine and Biology*, Academic Bess,New York.

Derrik/Grossman (1997). *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems,* 4th Ed. Addison Wesley Longman.

Díaz G. J. Y M. C. Batanero (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, Vol. 14, No. 3, pp325-355.

Dieudonné, J. (1950). Jeux ejemples singuliers d´équations differentielles, *Acta Sci. Math.* 12B,pp 38-404.

Dieudonné, J. (1969). *Foundation of Modern Analysis*, *Academic* Press, New york an London, p 290.

Douady, R. (1986). Jeuz de cadres et dialectique outil-object, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, Vol. 7 No. 2, 5-31.

E. Nápoles y Valdés J., Negrón S. C.,(2002,octubre). La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto, *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*, año 3 ,num. 2.

Edward/Peney, (1989). *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*, 2nd Ed. Prentice-Hall, Inc .

Edwards, C.H. Jr. (1979). *The historical development of the calculus*, Springer-Verlang,New York.

Edwards, C.H. (2001). *Ecuaciones diferenciales*, Ed. Prentice Hall.

Elock (1996). *Exploring Differential Equations via Graphics and Data,* Preliminary Ed. John Wiley & Sons, Inc.

Ercilla S.B. (2006). *Física General*, Alfaomega.

Eugene Hecht (2002). *Física álgebra y trigonometría*, Thomson.

Euler, L. (1768-1770). *Institutiones Calculi Integralis*, Ediderunt Friedrich Engel et Ludwing Schlesinger, Lipsiae et Berloni Typis et in aesibus B.G.:Teubneri, mcmxiv.

Fascella M.B. ,(2006). "Utilización de un modelo de crecimiento económico para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales", *Acta latinoamericana de matemática educativa*; Vol 19, pp 83-88, Venezuela.

Farlow (1994). *Introduction to Differential Equations and Their Applications* McGraw-Hill, Inc.

Filo Lopez Ernesto (1992). *La interpretación fusi como una alternativa didáctica de las ecuaciones diferenciales*, Cinvestav, I.P.N., México

Garces, W. (1997). *El Sistema de Tareas como Modelo de Actuación Didáctica en la Formación de profesores de Matemáticas-Computación*, Tesis de Maestría, ISPH.

Garciadiego D., A. (1967). *Pedagogía e historia de la ciencia ¿simbiosis innata?, en El velo y la trenza, F. Zalamea* (ed) Editorial Universidad , Colombia, 17-34.

Gettys E.D. (2005). *Físca para ciencias e ingeniería*, tomo I, Mc. Graw Hill.

Grabiner. J. (1981). *The origins of Cauchy´s Rigorus Calculus*, Cambridge, MIT Press.

Granville, W. A., L.F. Smith and W.R. Longley (1985). *Calculo Diferencial e Integral*, Limusa.

Grattan_Guinness,I. (1991). ¿Qué es y qué debería ser el cálculo? *Matheis*, vol.VII No. 3.Departamento de ciencias, Facultad de Matemáticas UNAM, México.

Guterman, (1992). *Differential Equations: A First Course*, 3rd Ed. Harcourt Brace Jovanovich.

Hartman, P. (1964). *Ordinary Differential Equations*, Wiley & Sons.

Hawkins, T. (1970). *Lesbesgue´s theory of integration. Its origins and development*, the University of Wisconsisn Pres, Madison, Wis-London.

Hebert Scham (1989). *Física Dic*, Ed. Reverte, tercera edición.

Hernández Ramírez Arturo (1994). *Obstáculos de la articulación de los marcos numéricos, gráfico y algebraico y su relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias*, Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

Herrera, H. J. (1992). *Modelo didáctico para un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias*, Tesis de Maestría, Cinvestav.I.P.N., México.

Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática*, Barcelona: Labor.

Hewilt G. P. (1998), *Física coneptual*, Addison Wesley , tercera edición.

Hirsh, M.W. (1984). *The Dinamical System Approach of Differential Ecuations*, Bull, American Mathematical Society, Vol . 11, No, 1.

Hill W. F., (1998). *Teorías contemporáneas de aprendizaje*, Paidos.

Hitt, F. (1992). Intuición en Matemática , representación de la microcomputadora *Memorias de la sexta reunión Centroamericana y del Caribe sobre la formación de profesores e investigadores en Matemática Educativa* , 254-266.

Hitt, F (1995). Intuición Primera Vessus Pensamiento Analítico :Dificultades en el paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa, *Revista Educación Matemática.*

Hubbard-West (1995). *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach* ,Springer-Verlag,

Hurewics, W (1958). *Lectures of Ordianry Differential Equations*, MIT Press, Massachusetts an London.

Ince, E. (1926). *Ordinary Differential Equations* ,Dover, New York.

Ince, E. (1939). *Integración de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ed. Dossat, Madrid.

Kaplan, W.(1968). *Ordinary Differential Ecuations*, *Edición Revolucionaria*, La Habana.

Kelli,L.M. (1976). *Ecuaciones Diferenciales Elementales*, Ediciones del Castillo, Madrid.

Kent N. (1999). *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*, Ed. Adison Wesley.

Kiseliov, A. I. M.L. Krasnov y G.I. Makarenko (1937), *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Eitorial Mir, Moscu.

Kitcher, P. (1983). *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York /Oxford: Oxford University Press.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press.

Kline, M. (1985). *Matemática la Pérdida de la certidumbre* ,Madrid: Siglo XXI.

Knight, W.J. (1975). *A counter example to a theorem on differential equations in Hilbert space*s, Proc. Amer. Math. Soc. , 51(2),pp378-380.

Kreysig (1988). *Advanced Engineering Mathematics*, 6th Ed. John Wiley & Sons, Inc.

Lacroix, S. F. (1837). *Traité Elémentaire et calcul Differentiel et Calcul Intégral.*

Lakatos, I. (1970). *Falsifications of methodology scientific research programmmes*, Cambridge.

Lebniz-Newton (1977). *El Calculo Infinitesimal orígen-polémica*, Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Lioyd, G.E.R (1979). *Magic reason and experience. Studies in the origin and development of Greek science*, Cambridge, University Press.

Lovelock David (2000). *Ecuaciones diferenciales a través de gráficos*, Ed. C.E.C.S.A.

Loumen D. (2000). *Ecuaciones Diferenciales a través de gráficos*, CECSA:

Márquez M. H. C. (2002). *Resignificación de las derivadas sucesivas en las ecuaciones diferenciales de segundo orden*, Tesis de Maestría, Cinvestav, I.P.N. , México.

Martínez L.V. (2002). *Ecuaciones diferenciales y cinética química*, *Acta latinoamericana de matemática educativa*; Vol 15, pp 144-149.

Matvev, N.M. (1963). *Método de Integración de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Escuela Superior, Moscú(en ruso).

Mawhin, J. (1994). The centennial legacy of Poncairé and Lyapunov in Ordinary Differential Equations, *Rendiconti del Cicloro Matematico di Palermo*, Serie II, No.34, 9-46.

Maza G. C. (1996). El dibujo el embaldosado: un ejemplo de matematización, *Summa*, No, 21,89-96.

Mochón S. (2000). *Modelos matemáticos: los puentes entre las matemáticas y el mundo real, Matemática educativa* Cinvestav, México.

Moreno, L. (1991). *En torno a las nociones de número y variación*: *Mathesis*, 7(2), 189-204

Morris, M. Y O. E. Brown (1972). *Ecuaciones Diferenciales*, Ed. Ciencia y Técnica, La Habana.

Motzm L. Y J. H. Weaver (1991). Conquering Mathematics, *From Aritmetic to Calculus·*, Plenum, New York and London.

Muro. C. (2000). *Significación de la serie de Fourier en la transferencia de masa*,.Tesis de maestría UAEH.

Nagle (1996). *Fundamentals of Differential Equations*, 4th Ed. Addison Wesley Publishing Company.

*Nagle K. (2001). Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*, Addison Wesley.

Nápoles, J.E. (1996). De las cavernas a los fractales. *Conferencias de historia de la Matemática*, ISPH(Cuba),publicación interna.

Nápoles, J.E. (1997 b). *Cien años de teoría cualitativa*. Algunas observaciones, dado a publicar.

Nápoles, J.E. (1997 c). *Las Ecuaciones Diferenciales con Signos de los tiempos*, dado a publicar.

Nápoles, J.E. (1997 a). *Ecuaciones Diferenciales y Contemporaneidad*, dado a publicar.

Nápoles, J.E. (1998). El legado histórico de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Consideraciones (auto) criticas ,*Boletín de Matemáticas (UNC*), V,53-79.

Nápoles, J.E. y C. Negrón (1994). De la Mecánica Analítica a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Algunos apuntes históricos, *Revista Llull*, Vol. 17(No. 32),190-206.

Nápoles, J.E. y C. Negrón (1994). *El papel de la historia en la integración del marco geométrico, algebraico y numérico en la Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, dado a publicar.

Nesher y J. Kilpatrick (eds). *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by th International Group for the P.M.E.*, Cambridge Universiyt Press, Cambridge.

Oviedo L. (2004). Un problema motivador para un trabajo interdisciplinario en matemática y física , *Acta latinoamericana de matemática educativa*, Vol 17, pp 687-692, Cuba.

O'Nell, (1995). *Advanced Engineering Mathematics*, 4th Ed. PWS Publishing Company.

Pastor, J.R. y J. Babini (1960). Historia de la Matemática, Vol. I, *Editorial Gedisa*, Barcelona, p.62.

Petrovsky, I.G. (1958). *Ordinary Differential Equations*, Academic Press, New York.

Piaget J. (1986). *La epistemología genética*, Ed. Paidos

Piskunov, N. (1969). *Calculo Diferencial e Integral*, Editorial Mir Moscú, 2 vols..

Polya G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.

Pontriaguin, L.S. (1981). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Pulido R. (1998). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso matemático escolar, la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar*, Tesis de Maestría, Cinvestav I.P.N, México.

Ramírez P. (2005). El tratamiento de fenómenos físicos para aprender matemáticas, *Acta latinoamericana de matemática educativa*; Vol 18, pp 625-630.

Resnick, y Halliday, (1992). *Física parte II*, Ed. C.E.C.S.A.

Rondero C. (1995). *Ensayo sobre la dualidad discreta*, Cinvestav, I.P.N.

Ross (1994), *Differential Equations*, 3rd Ed. John Wiley & Sons.

Sanchez, F.C. (1987). *Conferencias sobre problemas filosóficos y metodológicos de la matemática*, U.H.

Shybring, G. (1987). *On the Methodology of Analysing Historical Texbook:* Lacroix as Textbooks Author, For the Learning of Mathematics 7,3.

Simmons, F. (1972). *Differential Equations with aplications and historial Notes*, Mc. Graw Hill.

Simmons, (1996). *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, 2nd Ed. McGraw-Hill, Inc..

Smirnov, V.I. (1992). Bibliography of A.M. Lyapunov,*Intern. J.Control* 55,No.3, 775-784 el que contiene una traducción inglesa de su memoria de 1892.

Smith D.E. (1929). *Source Boob in Mathematics* , New York, pp. 619-626.

SMP (The School Mathematics Proyect) (1981). Revised Advanced Mathematics, *Book 3*, caps. 33 and 38, Cambridge, Unioversity Press.

Spiegel, M.R. (1981). *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*, Montaner y Simmons, Barcelona.

Steiner, M. (1975). *Mathematical Knowledge*,Ithaca:Cornell University Press.

Stewart J. (1985). *Física I*, Ed. Thompson, Tercera edición.

Stroud K.A. (2005). *Diferential Ecuations*, Industrial Press Inc.

Tall, D. (1991). *Mathematics and the imagen of Reason*, London/New York:Routledge.

Thaler, G.J. and M.P. Pastel(1971). *Analysis an Design of Nolineal Feeback Control System*, Edición Revolucionaria, La Habana.

Vega, L. (1996). Está en crisis la idea clásica de demostración matemática?,*Actas compumat´96*,Universidad de Holguín, Septiembre.

Vasco Carlos (2003). *El Pensamiento Variacional y la Modelación Matemática* XI CIAEM, Brasil.

Vergnaud, G.(1990). *Epistemology and psychology of mathematics educations***.**

Vergnaud,G (1994). *Vingt ans de didactique des mathematiques on France: hommage a Guy Brousseau et Gerard***.**

Vuky, R. (1980). *Panorámica de la epistemología genética de Piaget*,1980.

Volkenshtein, M.V. (1985). *Biofísica*, Mir, Moscú.

Wilder, R.L. (1981). *Mathematics as a Cultural System*, New York/Oxford, Pergamon Press.

Zalamea, F. (1994). *La filosofía de Albert Lautman*, *Mathesis* 10, 273-289.

Zeldóvich, Ya. Y I. Yaglon (1987*). Matemática Superiores para los físicos y técnicos principiantes*, Ed. Mir , Moscú.

Zill-Cullen (1996). *Differential Equations with Boundary-Values Problems*, 4th Ed. PWS-Kent Publishing Company.

Zill (2003*). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, Mc Graw Hill.

Zill (2006). *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*, 4th Ed.,Thomson.