INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

DE LA ARITMÉTICA AL CÁLCULO. UN ESTUDIO TRANSVERSAL SOBRE LA RAÍZ CUADRADA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA

MARÍA PATRICIA COLÍN URIBE

DIRECTOR DE TESIS:
DR. GUSTAVO MARTÍNEZ SIERRA

CO-DIRECTOR DE TESIS:
DR. APOLO CASTAÑEDA ALONSO

MÉXICO, D. F. OCTUBRE DEL 2005

CGPI-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 27 del mes de mayo del 2005 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

De la aritmética al Cálculo: Un estudio transversal de la raíz cuadrada

Presentada por la alumna:

COLIN	URIBE	MARIA PATRICIA
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 1 | 0 | 6 | 9 | 6 |

aspirante al grado de:

Maestra en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Gustavo Martínez Sierra

Codirector

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

M. en C. Mario Sánchez Aguilar

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

Título

De la Aritmética al Cálculo: Un estudio transversal de la raíz cuadrada

RESUMEN

La presente investigación parte del supuesto que uno de los objetivos centrales de la Matemática Educativa es el elaborar descripciones y explicaciones sobre el funcionamiento del sistema didáctico: ***saber – profesor – estudiante***

Su marco de referencia es la línea de investigación denominada *desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional* (Cantoral y Farfán, 1998).Dentro de las investigaciones en esta línea se ha prestado atención especial a la construcción de la noción de función (Farfán *et al*., 2002a, 2002b)

Nuestro tema de investigación surge a partir de las respuestas de los estudiantes de nivel universitario sobre ejercicios que involucran raíz cuadrada, por ejemplo:

Al resolver la ecuación $x^2=4$ *contestan solamente que* $x=2$*, pues "sacan" raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad*

Establecen que $\sqrt{4}+\sqrt{9}$ *tiene cuatro valores que se obtienen de combinar los resultados* $\sqrt{4}=\pm 2$ *y* $\sqrt{9}=\pm 3$

Nuestros antecedentes son aquellas investigaciones relativas a la noción de función. Al respecto, haremos uso de las investigaciones al momento de explicar la construcción de la noción de función, en especial las que dotan de particularidades a su explicación, especialmente en lo referente a las funciones trascendentes como lo son las funciones logarítmicas (*Ferrari, 2001*), exponenciales (*Martínez, 2000*) y trigonométricas.

Tomando en cuenta el papel fundamental que desempeña la raíz cuadrada en la matemática escolar en todos los niveles escolares, desde los básicos hasta los universitarios, consideramos importante profundizar en estas concepciones las cuales muestran la complejidad propia de este concepto matemático.

Así, nuestra investigación se centra en estudiar este concepto desde el punto de vista de la aritmética, posteriormente del álgebra y por ultimo del cálculo, mediante el análisis de libros de texto desde el nivel básico hasta el superior, así como la aplicación de un cuestionario a estudiantes de Secundaria y de Nivel Universitario.

Finalmente mostraremos que las concepciones que entre los estudiantes permanecen están las siguientes

- Consideran a la $\sqrt[2]{100}=50$
- La raíz cuadrada de un número negativo elevado al cuadrado es él mismo $\sqrt{(-2)^2}=-2$
- La grafica de la función $y^2=x$ es la misma que la de $y=\sqrt{x}$
- Las propiedades de la igualdad se extienden hasta la radicación

La raíz cuadrada genera concepciones específicas propias que permanecen en los estudiantes desde que inician su instrucción escolar en el nivel básico y hasta terminar una carrera

Por todas las razones anteriores, proponemos incorporar a la raíz cuadrada al grupo de funciones trascendentes.

Title

From Arithmetic to Calculus: A transversal study of the squarer root

SUMARRY

The present investigation leaves from one of the central objectives of Mathematics Education is to elaborate descriptions and explanations on the operation of the didactic system: knowledge - teacher - student

Its reference frame is the line of denominated investigation *development of the thought and variational language* (Cantoral & Farfán, 1998). Within the investigations in this line special attention to the construction of the function notion has been lent (Farfán *et al*., 2002a, 2002b)

Our subject of investigation arises from the answers of the students of university level on exercises that involve square root, for example:

- When solving the equation $x^2=4$ only answers that x=2, because "they remove" square root to both sides of the equality
- They establish that $\sqrt{4}+\sqrt{9}$ has four values that are obtained to combine the results $\sqrt{4}=\pm 2$ *and* $\sqrt{9}=\pm 3$

Our antecedents are those investigations relative to the function notion. On the matter, we will make use of the investigations at the time of explaining the construction of the notion of function, in special those that equip with particularitities their explanation, specially with respect to the important functions as they are it the logarithmic functions (Ferrari, 2001), exponential (Martinez, 2000) and trigonometrical.

Taking into account the fundamental paper that it carries out the square root in the mathematical student in all the scholastic levels, from the basic ones to the college students, we considered important to deepen in these conceptions which show the own complexity of this mathematical concept. Thus, our investigation is centered in studying this concept from the point of view of the Arithmetic, later of algebra and at last Calculus, by means of the text book analysis from the basic level to the superior one, as well as the application of a questionnaire to students of Secondary and University Level

Finally we will show that the conceptions that between the students remain are the following ones

- They consider $\sqrt[2]{100}=50$
- The square root of an elevated negative number to the square is himself $\sqrt{(-2)^2}=-2$
- The plot of the function $y^2=x$ is the same one that the one of $y=\sqrt{x}$
- The properties of the equality extend until the radication

The square root generates specific conceptions own that remain in the students since they initiate its scholastic instruction in the basic level and until finishing a race By all the previous reasons, we propose to incorporate to the square root the group of important functions.

Índice

Página

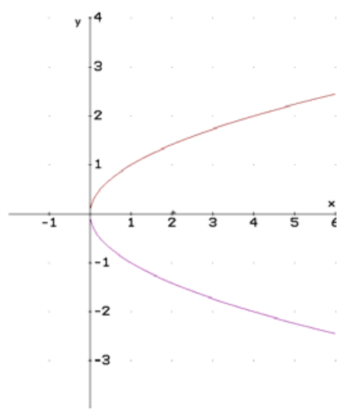
Índice de figuras

Índice de tablas

Introducción

Nuestro tema de investigación surge a partir de las concepciones de estudiantes de diversos niveles educativos sobre conceptos relacionados con el operador raíz cuadrada. Entre ellas encontramos la siguiente:

- Los estudiantes grafican la función $y = \sqrt{x}$ como



  porque saben que la raíz la cuadrada puede tener dos valores.

Nuestro trabajo tiene pertinencia en el campo de la Matemática Educativa, la cuál tiene como uno de sus objetivos el hacer descripciones del funcionamiento del sistema didáctico: saber - profesor – alumno. Siendo el sistema didáctico nuestro objeto de estudio, reconocemos la importancia del estudio de *fenómenos didácticos*; es decir aquellos fenómenos que suceden al seno del sistema didáctico conformado con la intención de comunicar contenidos, métodos y significados matemáticos, de entre los cuales se derivan los *fenómenos ligados a las concepciones y representaciones de los estudiantes*.

Esta investigación encuentra su marco de referencia en la línea de investigación denominada *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional* (Cantoral y Farfán, 1998), la cuál busca determinar los procesos de construcción social del conocimiento relacionado con la matemática de la variación y el cambio. Esta línea de investigación tiene como necesidad el dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar los cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: la componente epistemológica, la didáctica, la cognitiva y la social. Nuestro trabajo únicamente se enfocará a las tres primeras componentes. En cuanto a la variación y el cambio, nos enfocaremos al análisis del operador raíz cuadrada en 3 contextos:

- el aritmético, en donde se aplica a *números concretos*,
- el algebraico, en donde es aplicado a *números generalizados o incógnitas* y
- el funcional, en donde es aplicado a *variables*

Dentro de las investigaciones en esta línea se encuentran aquellas que prestan atención a la construcción de la noción de función (Farfán, R., Albert, A. y Arrieta, J. (2000a) y Farfán, R.; Martínez-Sierra, G. y Ferrari, M. (2000b)). Dentro de éstas se encuentran las investigaciones que elaboran explicaciones que dotan de particularidades a su explicación, especialmente en lo referente a las funciones trascendentes como lo son las funciones logarítmicas (Ferrari, 2001, Ferrari y Farfán, 2004) y exponenciales (Lezama, 1999, 2003; Confrey y Smith, 1994, 1995; Martínez-Sierra 2002, 2003).

Con lo anterior podemos decir que la construcción de la noción de función posee particularidades íntimamente relacionadas con el "tipo" de función que se trate. Aquí, nuestro interés por la función raíz cuadrada adquiere pertinencia; pues una de nuestras hipótesis consiste en señalar que ésta posee particularidades específicas que generan fenómenos didácticos específicos.

El objetivo de nuestra investigación consiste en la descripción de los fenómenos didácticos ligados a las concepciones de los estudiantes respecto a la raíz cuadrada.

De acuerdo con nuestra perspectiva sistémica la descripción de las concepciones se encuentra estrechamente ligada a los aspectos escolares y a la naturaleza y significados de la raíz cuadrada, como ejemplo podemos mencionar que en matemáticas la noción de "raíz" posee al menos dos significados explícitos. La primera es usada para señalar cada uno de los valores que puede tener la incógnita de una ecuación. La segunda acepción es usada para señalar a la cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado. En este sentido la radicación (la acción de determinar la cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado) es considerada la operación inversa de la potenciación (la acción de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado). En particular, la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado.

Así, la noción de raíz cuadrada es un operador matemático relacionado con otro operador (elevar al cuadrado) a través de un proceso inverso. De esta manera los significados y funcionalidad de la raíz cuadrada esta fuertemente condicionado a aquellos presentes en el operador elevar al cuadrado y aquellos presentes en los procesos inversos de un operador.

La presente investigación consta de análisis epistemológico, análisis didáctico, análisis funcional, conclusiones y anexos.

Análisis epistemológico: ¿Cuál es la naturaleza y significados de la raíz cuadrada?

El objetivo de este análisis es determinar los significados y funcionalidad de la raíz cuadrada desde un punto de vista histórico-epistemológico; estudiamos a grosso modo diferentes épocas rastreando que tipo de construcciones fueron realizadas en relación a la raíz cuadrada en tanto un operador matemático que se desarrolla e incluye en al menos cuatro contextos diferentes: el geométrico, el aritmético, el algebraico y el funcional.

En el contexto geométrico encontramos este proceso como el proceso inverso al construir un cuadrado de una recta, es decir, el proceso de "cuadrar" una figura.

En el contexto aritmético el operador raíz cuadrada se aplica a números concretos, en el contexto algebraico es aplicado a números generalizados e incógnitas y en el contexto funcional es aplicado a variables.

Análisis didáctico: ¿Cuáles son las costumbres escolares al momento de tratar la raíz cuadrada?

En esta parte realizamos una revisión bibliográfica de los libros de texto de matemáticas que se utilizan en los diferentes niveles educativos mexicanos.

Encontramos que en los libros de texto de nivel básico (secundaria) el significado del operador[1] raíz cuadrada solamente es manejado en el contexto aritmético. En cuanto a los libros de texto utilizados para los niveles medio superior y superior, es manejada en tres contextos, el algebraico, el aritmético y el funcional.

En este análisis, nuestra investigación muestra los diferentes significados que el operador raíz cuadrada tiene en los contextos aritmético, algebraico y funcional y la *disfuncionalidad escolar* que presenta este operador al movernos de un contexto aritmético a uno algebraico y de un contexto algebraico a uno funcional. Además, mostramos algunos ejemplos de *disfunciones escolares*[2] presentes entre el tránsito de estos contextos.

[1] En este trabajo entenderemos como operador a un símbolo matemático que denota un conjunto de operaciones que han de realizarse sobre cierto tipo de objetos.

[2] Entenderemos por disfunción escolar a la ambigüedad que produce el empleo escolar de significados que en un contexto son válidos pero fuera este no lo son.

<u>*Análisis cognitivo*</u>: ¿Qué concepciones poseen los estudiantes respecto a la raíz cuadrada?

Para contestar esta pregunta utilizamos un cuestionario el cual aplicamos a estudiantes de distintos niveles educativos: Educación Secundaria, Educación media superior y superior.
El cuestionario utilizado constó de 16 preguntas relacionadas al concepto matemático raíz cuadrada. Las concepciones que creemos están ligadas a cada una de las preguntas del cuestionario son las siguientes:

- La raíz cuadrada es una operación básica.
- Significado del operador $\sqrt{\ }$
- Existencia de raíces cuadradas negativas
- Si $a^2 = b \quad entonces \quad a = \sqrt{b}$
- $\sqrt{a} = \pm b$
- $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt[2]{a} = \frac{a}{2}$
- Si $a = b \quad entonces \quad \sqrt{a} = \sqrt{b}$
- Las leyes de los exponentes son válidas

<u>*Conclusiones:*</u> ¿Cuáles son los resultados obtenidos de esta investigación?

Con los resultados obtenidos por la presente investigación, mostramos algunas concepciones que tienen los estudiantes con respecto a la noción de raíz cuadrada y que no desaparecen en ellos, es decir, se presentan desde los niveles básicos de enseñanza hasta los superiores. Algunas de estas concepciones son:

- La extensión de las propiedades de la igualdad son extendidas hasta la radicación

- La ecuación $x^2 - 4 = 0$ tiene una sola solución, puesto que sólo se toman en cuenta las raíces principales
- La radicación es la operación inversa de la potenciación, y podemos extenderla a todos los reales, por lo cuál es válido lo siguiente $\sqrt{a^2} = a$
- La expresión $\sqrt[2]{a}$ representa una división en la cuál se encuentra la mitad del número dentro del operador

Anexos:

En los anexos mostramos los cuestionarios aplicados a los estudiantes, así como los planes y programas de estudio autorizados por la Secretaría de Educación Pública para el nivel básico secundaria y los planes y programas de estudio para los estudiantes de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Capítulo 1

Marco teórico, metodológico y problema de investigación

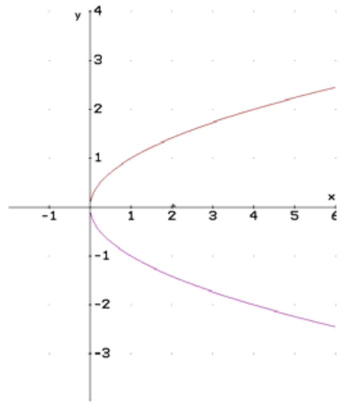
En este capítulo describimos, en primer lugar, la idea base de nuestra investigación. A continuación se presentan los elementos teóricos que establecen nuestra postura como matemáticos educativos. En función de este marco y de los antecedentes surge nuestro problema de investigación y su pertinencia en el ámbito de la Matemática Educativa. Después son presentados los propósitos y los objetivos específicos que se derivan del problema de investigación. Finalmente se describe la metodología utilizada para alcanzar los objetivos.

1.1. Primer acercamiento al problema de investigación

En mi práctica como profesora de matemáticas en el nivel básico (secundaria) y superior me he percatado de la existencia de respuestas por parte de los estudiantes en lo que respecta al uso de la raíz cuadrada. Algunas de ellas son:

- Los estudiantes establecen la igualdad $\sqrt[2]{6} = 3$ ya que el 6 lo dividen entre 2.

- Los estudiantes grafican la función $y = \sqrt{x}$ como



porque saben que la raíz la cuadrada puede tener dos valores.

- Al resolver la ecuación x^2=4 contestan que x=2 al calcular la raíz en ambos lados.
- Establecen que $\sqrt{4} + \sqrt{9}$ tiene cuatro valores: +2+3 = 5, +2-3 = -1; -2+3 = 1 y -2-3 =5

Los puntos anteriores muestran la existencia de concepciones (presentes en los estudiantes) relacionadas con la complejidad propia de la "raíz cuadrada". Tomando en cuenta el papel fundamental que desempeña la raíz cuadrada en la matemática escolar en todos los niveles universitarios, se nos presenta importante profundizar en estas concepciones. Esta profundización constituye, de manera esencial, nuestro problema de investigación. Al final de este capítulo se precisará formalmente en qué consiste.

1.2 Marco Teórico

Esta investigación parte de la idea de que uno de los objetivos centrales de la Matemática Educativa consiste en elaborar descripciones y explicaciones sobre el funcionamiento del sistema didáctico; entiendo por éste a aquel conformado por el saber, el profesor y el estudiante. Desde este punto de vista el saber matemático desempeña un papel protagónico en nuestro trabajo, lo cual nos sitúa en el campo específico de la Matemática Educativa.

De la premisa sistémica anterior se deriva la importancia de describir y explicar las relaciones entre las diferentes componentes del sistema didáctico. (Higueras 2000, citado en Lezama, 2003) presenta el siguiente esquema (Figura 1) que establece el tipo de relaciones del sistema didáctico.

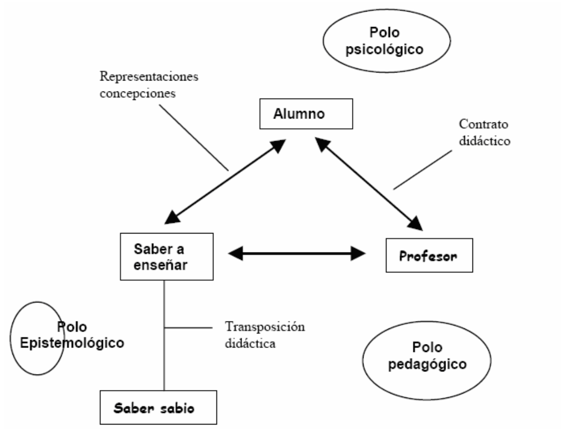


Figura 1. El sistema didáctico

Siendo el sistema didáctico nuestro objeto de estudio, reconocemos la importancia del estudio de *fenómenos didácticos*; es decir aquellos fenómenos que suceden al seno del sistema didáctico conformado con la intención comunicar contenidos, métodos y significados matemáticos.

A partir del diagrama sistémico anterior se deriva que los principales fenómenos didácticos son:

- Fenómenos ligados al contrato didáctico.
- Fenómenos ligados a las concepciones y representaciones de los estudiantes.
- Fenómenos ligados a la relación entre el profesor y el saber.
- Fenómenos ligados a la transposición didáctica.

1.3. Antecedentes

La presente investigación encuentra su marco de referencia en la línea de investigación denominada *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*[3](Cantoral y Farfán, 1998); la cuál busca determinar los procesos de construcción social del conocimiento relacionado con la matemática de la variación y el cambio[4]. Dentro de las investigaciones en esta línea se ha prestado atención especial a la construcción de la noción de función (Farfán et al., 2002a, 2002b), la de derivada (Dolores, 2000) e integral (Cordero, 2003). La toma de estas nociones se debe, fundamentalmente, a que estos contenidos son objetos de estudio señalados por el currículo de bachillerato y universidad.

Por nuestra parte, debido a nuestro interés por la noción de raíz cuadrada, nuestros antecedentes son aquellas investigaciones relativas a la noción de función. Al respecto es posible distinguir dos tendencias en las investigaciones al momento de explicar la construcción de la noción de función. Unas elaboran explicaciones a través de un proceso único y otras dotan de particularidades a su explicación, especialmente en lo referente a las funciones trascendentes como lo son las funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas.

Con respecto a las investigaciones que elaboran explicaciones a través de un proceso único destacamos a las de Harel y Dubinsky (1992) y Sfard (1992). Así, por ejemplo, Sfard establece un proceso cognitivo caracterizado por las etapas de interiorización, condensación y reificación, partiendo del modelo epistemológico de que la función es una dialéctica entre una faceta operativa y una estructural. En este mismo sentido Harel y Dubinsky

[3] Una de sus necesidades es la de dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar los cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: la componente epistemológica, la didáctica, la cognitiva y la social. Nuestro estudio únicamente se enfocará a las tres primeras componentes.

[4] En nuestro trabajo de investigación, nos enfocaremos al análisis del operador raíz cuadrada en 3 contextos:
el aritmético, en donde se aplica a *números concretos*,
el algebraico, en donde es aplicado a *números generalizados* y
el funcional, en donde es aplicado a *variables*

caracterizan las construcciones mentales, necesarias para construir el concepto de función, en términos de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas.

Respecto a la segunda tendencia, su particularidad radica en que elaboran explicaciones que dan cuenta de características específicas para el desarrollo del pensamiento funcional. Con respecto a la función exponencial señalamos las investigaciones de Lezama (1999, 2003), Confrey y Smith (1994, 1995) y Martínez-Sierra (2002, 2003) y acerca de la función logaritmo la de Ferrari (2001) y Ferrari y Farfán (2004).

Confrey y Smith (1994, 1995) centran su atención en describir que es necesario un desarrollo de las estructuras multiplicativas (dejando atrás la preeminencia de las estructuras aditivas) y consideran que ello es posible a través de la elaboración de las nociones de *covariación*[5] y *splitting* (partición de la unidad de referencia). Por su parte Lezama (1999, 2003) hace consideraciones análogas a las de covariación cuando atiende, en la situación que diseñó, a las características geométricas de la gráfica de la función exponencial, pues entre sus objetivos se encuentra que los estudiantes se percaten de la particular forma en que las ordenadas se incrementan de forma geométrica cuando la abscisa lo hace de manera aritmética. Por su parte Martínez-Sierra (2002, 2003) señala que la construcción de función exponencial está constituida fundamentalmente por procesos de convención matemática; es decir por procesos de búsqueda de coherencia y unidad entre diversos significados. De entre las investigaciones que particularizan el desarrollo de la función logaritmo, es de destacar la de Ferrari (2001) y Ferrari y Farfán (2004). En ellas se indica que el desarrollo de los logaritmos puede ser caracterizado por tres etapas: el logaritmo como transformación, como modelizador y como objeto teórico. Es importante subrayar que Ferrari considera como eje central, la relación entre estas etapas y la covariación.

[5] Se entiende por covariación a la relación existente entre dos formas de variación. En el caso de la función exponencial y logaritmo la covariación es expresada de la siguiente manera: la variación aritmética (la variable toma los valores que corresponden a un progresión aritmética) de una de las variables corresponde con una variación geométrica de la otra (la variable toma los valores que corresponden a un progresión geométrica).

Lo señalado en el párrafo anterior nos indica que la construcción de la noción de función posee particularidades íntimamente relacionadas con el "tipo" de función que se trate. Es aquí donde nuestro interés por la función raíz cuadrada adquiere pertinencia; pues una de nuestras hipótesis consiste en señalar que ésta posee particularidades específicas que generan fenómenos didácticos concretos.

1.4. Problema de investigación

En el marco de lo mencionado en las secciones anteriores nos planteamos como problema de investigación **la descripción de los fenómenos didácticos ligados a las concepciones de los estudiantes respecto a la raíz cuadrada en diferentes momentos escolares.**

1.5. Metodología

De acuerdo con nuestra perspectiva sistémica la descripción de las concepciones se encuentran estrechamente ligada a los aspectos escolares y a la naturaleza y significados de la raíz cuadrada. Es por ello que procederemos a través de las siguientes fases metodológicas:

- *Análisis epistemológico*: ¿Cuál es la naturaleza y significados de la raíz cuadrada?

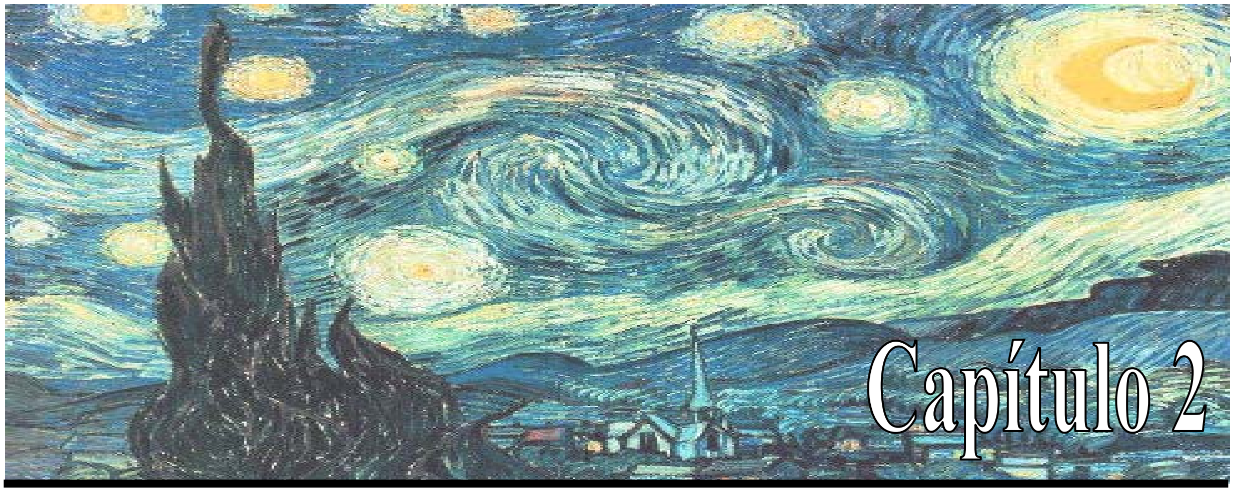
El objetivo de este análisis es determinar los significados y funcionalidad de la raíz cuadrada desde un punto de vista histórico-epistemológico; estudiamos a grosso modo diferentes épocas rastreando que tipo de construcciones fueron realizadas en relación a la raíz cuadrada en tanto un operador matemático que se desarrolla e incluye en al menos cuatro contextos diferentes: el geométrico, el aritmético, el algebraico y el funcional.

- *Análisis didáctico*: ¿Cuáles son las costumbres escolares al momento de tratar la raíz cuadrada?

En esta parte realizamos una revisión bibliográfica de los libros de texto de matemáticas que se utilizan en los diferentes niveles educativos mexicanos.
En función de los datos de estos análisis procederemos al:

- *Análisis cognitivo*: ¿Qué concepciones poseen los estudiantes respecto a la raíz cuadrada?

Este análisis será realzado a través del diseño e implementación de cuestionarios a estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad.



Elementos de un Análisis epistemológico de la raíz cuadrada

En este capítulo son presentados los principales elementos de un análisis epistemológico de la raíz cuadrada. El objetivo que guía nuestro análisis es determinar los significados y funcionalidad de la raíz cuadrada desde un punto de vista histórico-epistemológico. Para ello estudiaremos a grosso modo diferentes épocas rastreando qué tipo de construcciones fueron realizadas en relación a la raíz cuadrada en tanto un operador[6] matemático que se desarrolla e incluye en al menos cuatro contextos diferentes: el geométrico, el aritmético, el algebraico y el funcional.

2.1. Panorama global de la epistemología de la raíz cuadrada

En matemáticas la noción de "raíz" posee al menos dos significados explícitos. La primera es usada para señalar cada uno de los valores que puede tener la incógnita de una ecuación. La segunda acepción es usada para señalar a la cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado. En este sentido la radicación (la acción de determinar la cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado) es considerada la operación inversa de la potenciación (la acción de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un

[6] En este trabajo entenderemos como operador a un símbolo matemático que denota un conjunto de operaciones que han de realizarse sobre cierto tipo de objetos.

número determinado). En particular, la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado. El operador tradicional para esta operación es el símbolo $\sqrt[2]{\ }$, pero convencionalmente se utiliza el símbolo $\sqrt{\ }$.

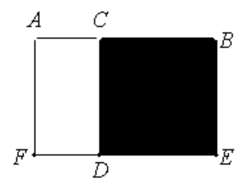
Así, la noción de raíz cuadrada es un operador matemático relacionado con otro operador (elevar al cuadrado) a través de un proceso inverso. De esta manera los significados y funcionalidad de la raíz cuadrada esta fuertemente condicionado a aquellos presentes en el operador elevar al cuadrado y aquellos presentes en los procesos inversos de un operador.

En el contexto aritmético el operador raíz cuadrada se aplica a números concretos, en el contexto algebraico es aplicado a números generalizados e incógnitas y en el contexto funcional es aplicado a variables.

2.2. La raíz cuadrada como operador geométrico

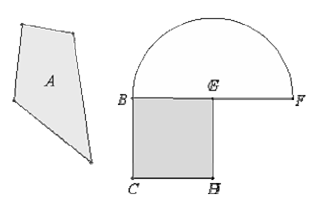
Dentro de la tradición euclidiana el producto de dos longitudes es interpretada como la superficie de un rectángulo construido sobre las dos longitudes que hacen la multiplicación (Definición 1, Libro II, Elementos de Euclides). A su vez la multiplicación de tres longitudes puede ser interpretada como el volumen de un prisma rectangular construido sobre las tres longitudes que hacen la multiplicación. En este contexto se construyeron operadores matemáticos sobre segmentos (en los Elementos de Euclides los segmentos reciben el nombre de rectas) como son: el “cuadrado de un segmento” o el “cubo de un segmento” los cuales son literalmente cuadrados y cubos geométricos (En la proposición 46 del libro I se establece una manera de “Construir un cuadrado sobre un segmento dado”). Por ejemplo en la Proposición 3 del Libro II (conocido como el libro del *Algebra geométrica*) encontramos lo siguiente (el subrayado es nuestro):

Proposición 3 (Libro II). Si se corta al azar una línea recta, el rectángulo comprendido por la recta entera y cada uno de los segmentos, es igual al rectángulo comprendido por los segmentos y el cuadrado del segmento primero.



En el contexto anterior se podría interpretar la determinación de la raíz cuadrada como la determinación de la "línea recta" que produce un área dada (entendido esto como una figura dada). Esta hipótesis lleva a plantearnos la existencia del problema de la cuadratura de figuras geométricas. Recordemos que algunos de los problemas griegos clásicos era la construcción de cuadrados (con regla y compás) con la misma área que ciertas figuras geométricas; es por ello de la existencia, por ejemplo, del problema de la "cuadratura del círculo". Al respecto encontramos la proposición 14 del Libro II de los Elementos.

Proposición 14 (Libro II). Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea[7] dada.



La proposición anterior muestra la presencia de una especie de "raíz cuadrada geométrica"; entendido esto como un proceso inverso al de construir un cuadrado de una recta. Cabe notar que este proceso puede ser identificado "cuadrar" una figura.

[7] En esta obra, A representa una figura rectilínea.

Por otro lado, los babilonios utilizaban el concepto matemático raíz cuadrada para “cuadrar” rectángulos. En el papiro de Berlín (citado en Lorenzo 2005) se encuentra registrado un problema que muestra como calculaban raíces cuadradas: “*Te dicen que el área de un cuadrado de 100 codos cuadrados es igual a la suma de la de otros 2 cuadrados más pequeños. El lado de uno de ellos es 1/2 + 1/4 del otro. Averigua los lados de los cuadrados”*.

2.3. La raíz cuadrada como operador aritmético

Partimos de la idea básica que la aritmética trata fundamentalmente con los números y las operaciones hechas con ellos. En este sentido la raíz cuadrada en este contexto sería la operación inversa de elevar al cuadrado a un número.

Continuando con lo dicho en la sección anterior, nos encontramos en los elementos de Euclides (Euclides, 2002, Libro VII conocido como el libro de *Fundamentos de la teoría de los números*) con las siguientes definiciones con respecto a lo que se entiende por número y su multiplicación:

> **Definición 1**. Una unidad es aquello en virtud de la cual cada una de las cosas que hay, se llama *una*.
> **Definición 2**. Un número es una pluralidad compuesta de unidades.
> **[…]**
> **Definición 15**. Se dice que un número multiplica a un número cuando el multiplicado se añade a si mismo tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número.

La operación de multiplicación es usada para definir los números planos, sólidos, cuadrados y cubos.

> **Definición 16**. Cuando dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún número, el resultado se llama *número plano* y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí.
> **Definición 17**. Cuando tres números, al multiplicarse entre sí, hacen algún número, el resultado es un *número sólido* y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí.

> **Definición 18.** Un número cuadrado es el multiplicado por si mismo o el comprendido por dos números iguales.
> **Definición 19.** Y un número cubo el multiplicado dos veces por sí mismo o el comprendido por tres números iguales.

A diferencia del contexto puramente geométrico en el contexto de los números euclidianos no encontramos, en las definiciones y proposiciones del libro VII u otros, un proceso inverso al de elevar al cuadrado.

En cuanto a los textos matemáticos babilonios (citados en Lorenzo, 2005), consisten esencialmente en tablillas que contienen series de números, relaciones geométricas y listas de problemas. En particular las tablillas contienen multiplicaciones, números y sus inversos, cuadrados y cubos y también algunas relaciones numéricas en términos de exponentes. El contenido matemático revelado por estos textos es lo suficientemente variado como para que sea útil exponer sus distintos componentes. El estudio de los textos que tienen relación con la geometría babilónica, está íntimamente ligada a las mediciones prácticas. Tratan sobre todo, de la medición de figuras planas, salvo algún indicio de problemas referentes a sólidos. Los geómetras babilónicos estaban familiarizados con el teorema de Pitágoras. Desde la prehistoria los babilonios podían resolver ecuaciones cuadráticas (por compleción de cuadrados o por sustitución), algunas ecuaciones cúbicas y bicuadráticas.

Un problema encontrado en estas tablillas (citado en Lorenzo, 2005) consiste en conocer la longitud del lado de un cuadrado cuya área menos el lado es igual a 870. Esto, en nuestro lenguaje actual equivale a resolver la ecuación $x^2 - x = 870$ ¿Cómo solucionaban los babilonios este problema? R = Se toma la mitad de 1, que es 0; 30 (en base 60) y se multiplica 0;30 por (0;30) lo que da 0;15, posteriormente se suma este resultado a
14;30 + 0;15 = 14, 30 ; 15, ya que 0.15 significa 0;15; pero 14,30,15 es el cuadrado de 29;30 por ultimo , se suma 0;3 a 29;30 y el resultado es 30 que es el lado del cuadrado.

Los babilonios emplearon un procedimiento muy eficaz para evaluar la raíz cuadrada. Sea *x* tal que $x = \sqrt{b}$, la raíz buscada y sea b_1 una aproximación de esta raíz.

Supongamos que a_1 es otra aproximación, tal que $a_1 = \frac{b}{b_1}$. Si b_1 es demasiado pequeño, entonces evidentemente a_1 es demasiado grande. Elijamos entonces la media aritmética $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$.

Si b_2 es demasiado grande, entonces $a_2 = \frac{b}{b_2}$ será demasiado pequeño. Luego será suficiente tomar la media aritmética $b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$. Este procedimiento se continúa indefinidamente.

Los babilonios también aproximaron el valor de la $\sqrt{2}$, pues en una de las tablillas de Yale (citada en Lorenzo 2005), se tiene que $\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1.414213$.

2.4. La raíz cuadrada como operador algebraico

En principio asumimos al Álgebra como una especie de aritmética generalizada. En este sentido la raíz cuadrada sería un operador que actúa sobre "números generalizados" representados comúnmente por las letras del alfabeto *x, y* y *z*. De acuerdo con algunos investigadores (Rojas P., Rodríguez, J., Romero, J., Mora, L., Castillo, E., 1997; Ursini, 1996) existen diversas interpretaciones que pueden darse a la letra en contextos algebraicos. Aquí nos interesan las siguientes:

- **Letra como objeto**. La letra es vista como el nombre para un objeto o como el objeto propiamente dicho.
- **Letra como incógnita**. Aquí la letra se piensa como un número particular pero desconocido.

- **Letra como número generalizado**. La letra se interpreta como representante de valores o capaz de tomar varios valores más que como un valor especifico.
- **Letra como variable**. La letra representa un rango de valores.

En la historia de las ideas, la raíz cuadrada de incógnitas y números generalizados se dió en el contexto de los llamados carácteres cósicos. En términos bastante resumidos la "cosa" es una incógnita y los demás caracteres son las potencias de ella. Dos ejemplos muestran esto.
En el *Libro primero de arithmetica algebratica* de Marco Aurel (publicado en Valencia en 1552) se lee lo siguiente (Meavilla, 1993) en donde se ofrece el nombre, símbolo y descripción de cada uno de los diez caracteres "cósicos":

Nombre	Símbolo utilizado por Marco Aurel	Símbolo actual	Significado del nombre
Dragma o número	φ	x^0	x^0
Rayz o cosa	χ	x	x
Censo	ξ	x^2	x^2
Cubo	ζ	x^3	x^3
Censo de censo	ξξ	x^4	$(x^2)^2$
Sursolidum o primo relato	β	x^5	x^5
Censo de cubo	ξζ	x^6	$(x^3)^2$
Bissursolidum o segundo relato	*b*β	x^7	x^7
Censo de censo de censo	ξξξ	x^8	$((x^2)^2)^2$
Cubo de cubo	ζζ	x^9	$(x^3)^3$

Chuquet en *La triparty en la Science des Nombres* (documento fechado en 1484) elaboró los siguientes caracteres cósicos (Paradís, 1993):

> "Chuquet explica que cada número puede considerarse como cantidad estricta, y así para indicarlo, se puede añadir un cero en la parte superior del número, como por ejemplo 12^0, 13^0 para indicar 12 o 13. Pero cada número puede considerarse como número primero de una

cantidad continua, también dicho número lineal, indicando así: 12^1, 13^1... o bien número superficial cuadrado: 12^2, 13^2 ... y así sucesivamente hasta el orden que se quiera (12^0 quiere decir doce; 12^1 indica $12x$; 12^2 significa $12x^2$,...).”

En cuanto a Chuquet, él justifica su opción notacional de esta forma (Paradís, 1993):

‘Los antiguos han dicho cosas a lo que yo denomino primero, y el simbolismo utilizado ha sido ρ. A los segundos los han denominado cuadrados (champs), con el símbolo π. Los terceros denominados cubos, distinguidos con □. A los cuartos los llamaban quadrado-quadrado (Champ de champ) con el carácter ππ(...) estas denominaciones no son suficientes para considerar todas las clases de números distintos, que son innumerables’

Unas páginas después Paradis afirma (las cursivas son nuestras):

“Chuquet opta resueltamente, desde el primer momento, por abandonar las distintas nomenclaturas para designar el orden de las raíces, así como el de las potencias de la incógnita, *para exponer una forma de denominación unificadora, que facilite las operaciones entre estas entidades.* Es evidente que su posición abandona cualquier referente geométrico asociado a la idea de radical, o bien al de la potencia, pero éste era un obstáculo que había que superar para establecer una gramática que permitiera manejar cómodamente y de forma general las entidades aritméticas y algebraicas”

Es en este contexto que Chuquet da entrada al tema de raíces bajo el título “La segunda parte de este libro trata sobre raíces y números compuestos”. De acuerdo con Paradis en esta parte de la obra presenta la definición de raíz de índice cualquiera, con un enfoque puramente aritmético adoptando de entrada un criterio moderno, que encontrara reflejo en una notación más evolucionada respecto al contexto de las aritméticas de principios del siglo XVI. Además muestra la forma de reducir raíces de distinto índice a índice común. También muestra la forma de resolver una raíz de raíces mediante ejemplos: $R_{\lambda}^{2}R_{\lambda}^{3}13$ es igual a $R_{\lambda}^{6}13$.

En el segundo capítulo explica la manera de simplificar y extraer raíces. De acuerdo con Paradis empieza exponiendo el algoritmo de extracción de raíz cuadrada, de forma parecida a la actual. No sabemos exactamente los detalles del algoritmo, pero es de suma importancia remarcar que la presencia de este algoritmo marca la inserción del operador raíz cuadrada dentro del campo del álgebra; ya que es *posible extraer la raíz cuadrada de cualquier número* y da sentido a expresiones del tipo $R^2_\lambda 2$. En este sentido podemos retomar el método de intercalación que Chuquet utiliza para resolver ecuaciones de segundo grado. Este método se basa en las dos series de desigualdades:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \cdots \qquad \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \cdots$$

Y en la intercalación entre dos fracciones: Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Por ejemplo Chuquet hace uso de este procedimiento para resolver la ecuación $x^2 + x = 39\frac{13}{81}$ de la manera siguiente:

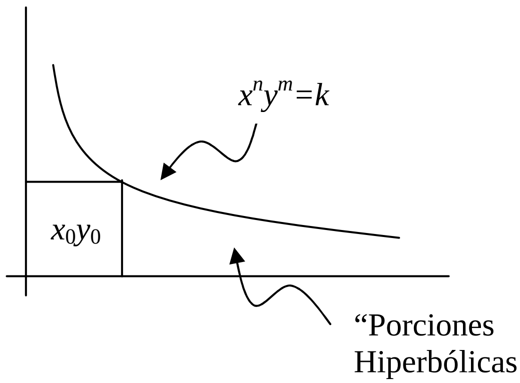
x	x^2+x	
5	30	que es menor que 39 y 13/81 (lo que indica por $\overline{m}$)
6	42	que es mayor que 39 y 13/81 (lo que indica por $\rho 1$)
$5\frac{1}{2}$	$\overline{m}$	
$5\frac{2}{3}$	$\overline{m}$	
$5\frac{3}{4}$	$\overline{m}$	
$5\frac{4}{5}$	$\rho 1$	
$5\frac{7}{9}$	De diferencia cero	Lo cual indica que la solución (en esta caso exacta) es $x = 5 + 7/9$.

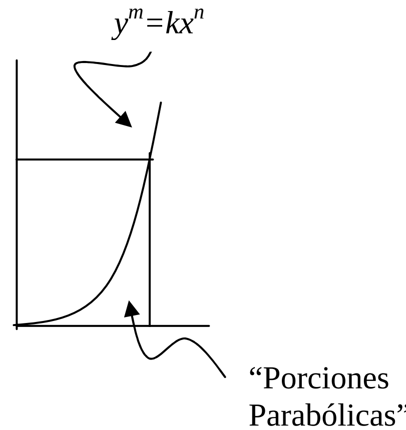
En la tercera parte de libro ("La tercera y última parte de este libro, que trata sobre las regla de los primeros"). Chuquet entiende por regla de los primeros la formación y comportamiento operativo de los monomios, que será el sustrato sobre el que se construirán los distintos tipos de ecuaciones. Es por ello que esta última parte introduciendo metódicamente las sucesivas potencias de la incógnita tal y como lo mencionamos al principio de esta sección. Después de definir las primeras potencias enteras de la incógnita, Chuquet construye un modelo con el objetivo de dar cabida a las nuevas entidades introducidas. Para esto define un radical de índice cualquiera que opera sobre un monomio, y de esta forma encontramos expresiones del tipo $R_{\lambda}^{4}13^{5}$ para referirse a $\sqrt[4]{13x^5}$, y ya dentro de esta perspectiva encuentran significado expresiones del tipo: $\overline{m}R_{\lambda}^{2}12^{1}$, o bien $\overline{m}R_{\lambda}^{2}12^{3}$ para indicar $-\sqrt{12x}$, o $-\sqrt{12x^3}$.

2.5 La raíz cuadrada como operador funcional

Hemos comentado en la sección anterior que la existencia de un algoritmo para extraer la raíz cuadrada fue requisito necesario para incrustar a la raíz cuadrada como operador algebraico (en el sentido de operar sobre incógnitas y números generalizados). En este mismo sentido cabe preguntarse bajo qué circunstancias el operador raíz cuadrada fue incluido en el contexto de las funciones. Al parecer el hecho de querer representar las ecuaciones de las curvas de una variable respecto a otra fue un factor importante, como por ejemplo $y = f(x)$. Por ejemplo es posible encontrar obras de finales de siglo XVI en donde no es posible encontrar curvas con ecuaciones del tipo $y = \sqrt{x}$, pero si la curvas con ecuaciones del tipo $y^2 = x$. Lo anterior señala que el operador raíz cuadrada no es necesario en contexto en donde las variables no guardan mingo jerarquía una respecto a otra.

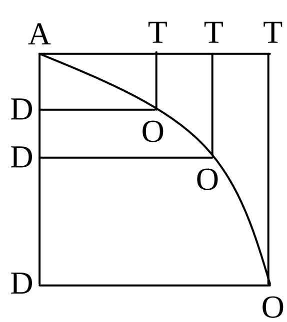
Por ejemplo Fermat (Mahoney, 1973) habla de "porciones parabólicas" y "porciones hiperbólicas" para hacer referencia a las áreas contenidas por las gráficas de las curvas con ecuaciones respectivamente del tipo $y^m=kx^n$ y $x^n y^m=k$. (m y n enteros positivos).





En otros escritos más o menos contemporáneos a Fermat es posible encontrar una distinción entre las curvas $y=\sqrt{x}$ y $y^2=x$. Es importante señalar aquí que un contexto donde las cantidades negativas no tienen el status de número las gráficas de estas ecuaciones es una sola. Por ejemplo Wallis hacia la última tercera parte del siglo XVI escribía en relación a la "parábola cúbica" (Struik, 1986):

> "*Proposition 42. Corollary*. The complement AOT [ver figura siguiente] of half the area of the cubic parabola therefore is to the parallelogram TD over the same arbitrary base and altitude as 1 to 4.



> Indeed, let AOD be the area of half the parabola AD (its diameter AD, and the corresponding ordinates DO, DO, etc.) and let AOT be its complement.

> Since the lines DO, DO, etc., or their equals AT, AT, etc. are the cube roots of AD, AD, ..., or their equals TO, TO, ... , these TO, TO, etc. will be the cubes of lines AT, AT, ... The whole figure AOT therefore (consisting of the infinite number of lines TO, TO, etc. which are the cubes of the arithmetically progressing lines AT, AT, ...) will be to the parallelogram ATD (consisting of just as many lines, all equal to the greatest TO), as 1 to 4, according with the previous theorem. And the half-segment AOD of the parabola (the residuum of the parallelogram) is to the parallelogram itself as 3 is to 4 "

En lo anterior se puede notar el hecho de que la raíz cuadrada (o cúbica como en el ejemplo) le corresponde la misma gráfica que la del cuadrado; es decir que no había una notación especial para el operador raíz cuadrada, a pesar de la existencia de operadores algebraicos como los señalados en la sección anterior.

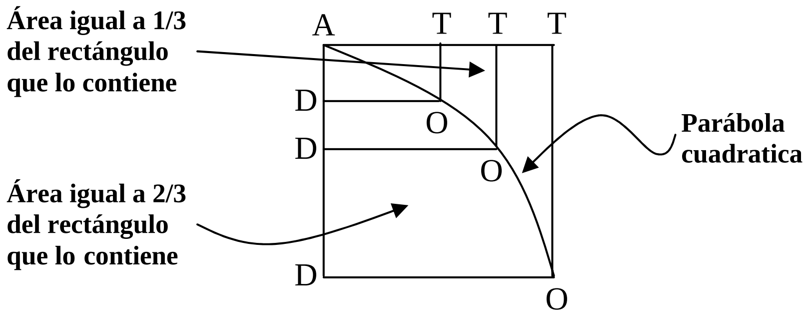
Un dato interesante para la inserción de un operador explícito para la raíz cuadrada lo encontramos en los mismos trabajos de Wallis. Él se basa, para hallar áreas, en el método de los indivisibles de Cavalieri, es decir, él considera una superficie como la suma de un número infinito de segmentos de líneas paralelas y a un volumen como la suma de un número infinito de porciones de planos paralelos. Es a través de este método que él determina que es posible resolver distintos problemas de cálculo de áreas y superficies a través de razones aritméticas de la forma:

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k}$$

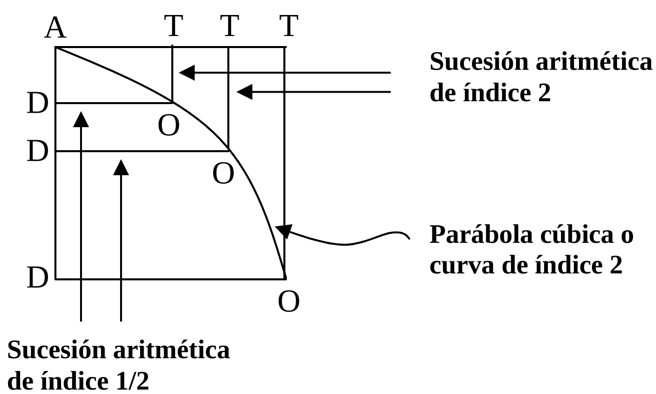
Wallis (Martínez-Sierra, 2002, 2003) investigó el comportamiento de estas razones cuando el valor de *n* se incrementa para k=1,2,3,4 y 5 utilizando las fórmulas, no demostrados por él, de las sumas $0^k+1^k+2^k+\ldots+n^k$ (k=1,2,3,4 y 5) para establecer el límite siguiente (por decirlo en términos modernos):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0^k + 1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k} = \frac{1}{k+1} \quad (k=1, 2,3,4,5)$$

A tales límites Wallis los nombra *razones características* de *índice* 1, 2, 3, 4 y 5 según sea el valor de *k*. A partir de estas consideraciones hace la afirmación general de que la razón característica de índice *k* es 1/(*k*+1) para todos los enteros positivos. Las siguientes figuras muestran la manera en que Wallis utiliza estas razones para el cálculo de cuadraturas y la construcción de un operador para la raíz cuadrada denominado *índice 1/2*.



Wallis se refería a sucesiones aritméticas (empezando desde cero) y curvas de índice *k* y no a un número de tal índice; gráficamente esto se puede ver en la figura siguiente:



Confrey y Dennis (2000) afirman que fue a partir de consideraciones sobre el complemento de las áreas (como lo hace en el pasaje anterior) de las gráficas $y=x^k$, (*k* entero positivo) que Wallis sugirió la noción de índices fraccionarios. Así, debido a que el área bajo la curva $y=\sqrt{x}$ es el complemento del área bajo $y=x^2$ debe tener una razón característica de 2/3=1/(1+1/2) por lo que el índice de $y=\sqrt{x}$ debe ser 1/2. Lo mismo puede verse para $y=\sqrt[3]{x}$, cuya razón característica debe ser 3/4=1/(1+1/3).

Tiempo después, cuando las cantidades negativas adquirieron el status de número y variable, podemos encontrar la operador raíz cuadrada tomar otros significados. Por ejemplo en Euler (1835/1738), *Introducción al Análisis Infinitesimal:* Capítulo VI: "De las cantidades exponenciales y logarítmicas", el manejo del operador raíz conlleva la existencia de dos valores y se construye una convención matemática (Martínez-Sierra, 2003) que toma la forma de una restricción que emana de la petición de que a^z sea una *función uniforme de z* (uniforme es que esa es univaluada):

> 97. Al proponer la cantidad exponencial a^z, o lo que es lo mismo una potencia de una constante a que tiene por exponente una variable z [(8)], se sustituye sucesivamente todos los enteros positivos posibles y se obtienen para a^z los valores determinados a^1; a^2; a^3;a^4;a^5;a^6; yc; y si ahora se sustituye a z por los números negativos -1,-2,-3, yc, la cantidad a^z devendrá sucesivamente en $1/a^1$; $1/a^2$; $1/a^3$;$1/a^4$; yc; y si se hace $z = 0$ entonces $a^0 = 1$. Si ahora se sustituye a z por fracciones, como 1/2; 1/3; 2/3; 1/4; 3/4; yc, se tienen como resultado las cantidades $\sqrt{a};\sqrt[3]{a};\sqrt[3]{a^2};\sqrt[4]{a};\sqrt[4]{a^3}$; yc; las cuales consideradas ellas mismas, pueden poseer dos o más valores, ya que la extracción de raíces así lo hace. Sin embargo se admitirá ordinariamente el caso que presentan las primeras; es decir aquellas que son reales y positivas, ya que la cantidad a^z será tomada como una función uniforme de z. De esta manera $a^{5/2}$ tendrá una valor entre a^2 y a^3 que será una cantidad del mismo género y aunque $a^{5/2}$ tiene dos valores $-aa\sqrt{a}$ & $+aa\sqrt{a}$, no se tendrá en cuenta el primero. De igual manera sucede cuando el exponente z toma valores irracionales; pero como es difícil en este caso concebir el número de valores que contiene la cantidad propuesta, bastará considerar un solo valor real. Así $a^{\sqrt{7}}$ será un valor comprendido entre los limites a^2 y a^3.

[8] Euler (1835/1738, Articulo 3) "Una cantidad variable es una cantidad indeterminada, o universal, que comprende en sí misma a absolutamente todos los valores determinados. En consecuencia, prosigue, una cantidad variable comprende en si misma absolutamente a todos los números, tanto positivos como negativos, tanto enteros como fraccionarios, tanto racionales como irracionales y trascendentales. Ni siquiera el cero o los números imaginarios quedan excluidos del significado de cantidad variable".

Análisis Didáctico

En este capítulo describiremos el funcionamiento en la escuela, desde el nivel básico hasta el superior del concepto matemático raíz cuadrada. Haremos una revisión de textos de todos los niveles educativos de forma que tengamos una idea de cómo es tratado este concepto matemático en los diferentes momentos escolares del estudiante. Observaremos que existen disfunciones escolares[9] en el tránsito de contexto aritmético a uno algebraico y de un algebraico a uno funcional.

3.1 La raíz cuadrada en la escuela básica

Uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas en la escuela básica es crear en los estudiantes herramientas funcionales que le permitan resolver situaciones problemáticas que se les presenten. En la escuela Primaria, la enseñanza de la raíz cuadrada no es contemplada en ninguno de los grados.

El operador raíz cuadrada es oficialmente introducido en el primer año de Educación Secundaria. En este grado, este concepto es utilizado implícitamente como la operación inversa de elevar al cuadrado números naturales, es decir, únicamente se obtienen raíces cuadradas exactas a través de tablas de cuadrados que los estudiantes han obtenido previamente.

[9] Entenderemos por disfunción escolar a la ambigüedad que produce el empleo escolar de significados que en un contexto son válidos pero fuera este no lo son.

Los ejercicios que proponen los libros de texto dirigidos al estudiante de este nivel educativo son del tipo:

I.- Completa la tabla

a	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$\sqrt{a}$										

II.- Calcula la parte entera de la raíz cuadrada de los siguientes números. Utiliza la tabla de la lección anterior y comprueba tus respuestas con la calculadora.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{22}$ c) $\sqrt{70}$

El tema es nuevamente tratado hasta tercer año, con el cálculo de raíces cuadradas por diversos métodos (algoritmo tradicional o método de la "casita", babilonio, gráfico, de Newton y aproximación). Aquí, la raíz cuadrada de un número puede ya tener parte decimal. En este grado escolar, la raíz cuadrada es utilizada en diversos temas:

- la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado
- el cálculo de longitudes y distancias entre dos puntos del plano cartesiano,
- el cálculo de uno de los catetos de un triangulo rectángulo
- el cálculo de la diagonal de cubos y paralelepípedos.

Los libros revisados por (Lorenzo,2005) exponen ejemplos y ejercicios tales como:

$\sqrt{25} = 5$, Porque 5^2=25

$\sqrt{1225} = 35$, Porque 35^2=1225

Solamente en (Briseño, 2003 citado en Lorenzo 2005) además de la definición anterior, se observa la siguiente consideración:

"La raíz cuadrada de **a** puede tomar dos valores, el positivo y el negativo, por ejemplo:

$\sqrt{25} = 5$ porque 5^2=25 y $\sqrt{25} = -5$ porque $(-5)^2$=25 "

En general, los libros de texto autorizados por la SEP definen al proceso de calcular raíces cuadradas como sigue:

> "La raíz cuadrada de un número a (donde $a>0$) es otro número b tal que al elevarlo al cuadrado sea igual a a , es decir, b es la raíz cuadrada de a si $b^2=a$"[10]

Esto es un antecedente de que la raíz cuadrada es positiva, o positiva y negativa, pero nunca negativa independientemente, es decir

$$\sqrt{81} = 9 \text{ ó } \sqrt{81} = \pm 9 \quad \text{pero nunca } \sqrt{81} = -9$$

En conclusión, en la escuela básica:

- La raíz cuadrada es el proceso inverso de elevar a la potencia 2
- La raíz cuadrada de un número a (donde $a>0$) es otro número b tal que al elevarlo al cuadrado sea igual a a , es decir, b es la raíz cuadrada de a si $b^2=a$
- La raíz cuadrada o bien es positiva, es negativa y positiva, pero nunca sólo es negativa

3.2 La raíz cuadrada en el contexto aritmético y algebraico en la educación Media Superior y en la Educación Superior

En estos niveles escolares, los planes de estudio de la materia de matemáticas hacen referencia a diferentes libros, pero entre la gran diversidad propuesta destacan los libros escritos por Aurelio Baldor, Aritmética (Baldor, 1990) y Álgebra (Baldor, 1978), así como Elementos de Álgebra (Wentworth y Smith, 1985) . Hacemos notar que estos libros son los mas representativos, puesto que en la investigación de Lorenzo (2005), los profesores, en su mayoría, respondieron que esos eran los libros que utilizaban como apoyo didáctico. En estos libros, el tratamiento de la raíz cuadrada es diferente, es decir, ***el significado del operador raíz cuadrada es diferente según el contexto en el que se encuentre.***

[10] Nuestro trabajo se enfocara únicamente a las raíces cuadradas de números positivos, puesto que las raíces negativas suponemos generan fenómenos didácticos distintos. Al final del trabajo se propondrá trabajar con este tipo de raíces.

Así, (Baldor, 1990) define a la extracción de raíces como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{significa que } b^n = a$$

Además se define a la raíz cuadrada exacta de un número como el número que elevado al cuadrado reproduce exactamente el número dado. Así, 3 es la raíz cuadrada exacta de 9, porque $3^2 = 9$ y 5 es la raíz cuadrada exacta de 25 porque $5^2 = 25$. Cabe señalar que en este libro sólo se manejan números naturales.

En (Baldor,1978) se define a la raíz de una expresión algebraica como toda expresión algebraica que elevada a una potencia reproduce la expresión dada. En nuestro caso particular, la raíz cuadrada de una expresión algebraica es aquella expresión algebraica que elevada al cuadrado reproduce la expresión dada.

En (Wentworth y Smith,1985) se explicitan los dos significados que tiene la palabra raíz en el contexto matemático

- la raíz de un número es todo número del cual el primero es una potencia.
- Se le llama raíz al valor de la incógnita o incógnitas de una ecuación

Este autor afirma que:

> "Todo número positivo tiene dos raíces cuadradas que son numéricamente iguales pero de signos contrarios", así, 9 tiene dos raíces cuadradas, el 3 y el -3".

Una vez que se ha definido la raíz cuadrada, se introduce el concepto de raíz aritmética, la cual es la real positiva, es decir, sólo se tomarán las raíces cuadradas positivas y se hace la consideración de que ***el radical por si solo representa la raíz cuadrada aritmética***

(Lehmann, 1974) explicita que

> "el valor positivo de la raíz cuadrada de una cantidad *a*, se expresa $\sqrt{a}$, el valor negativo por $-\sqrt{a}$ y ambos valores, el positivo y el negativo por $\pm\sqrt{a}$ ".

De entre las justificaciones para considerar únicamente a las raíces cuadradas positivas señalamos las siguientes:

1) “ $\sqrt{4}=2$, pues no sería propio escribir $\sqrt{4}=-2$, aunque -2 también es raíz de 4” (Wentworth y Smith,1985).

2) “Para evitar ambigüedades asignaremos a $\sqrt[n]{a}$ un valor único llamado raíz principal, o valor principal de la raíz. Si n es dos, existen dos raíces reales de igual valor absoluto y de signos contrarios. En este caso, la raíz principal es la raíz positiva. Por ejemplo, el valor principal de la raíz cuadrada de 4 es +2 ” (Lehmann, 2001).

3) “Debe entenderse, por convenio, que si no aparece ningún signo delante de la raíz cuadrada indicada de una cantidad, se considera siempre que se trata del valor positivo, Si se debe tomar la raíz cuadrada negativa, debe aparecer el signo menos delante del radical, así, la distancia *d* entre dos puntos

$P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por la formula

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

La distancia d es positiva, siendo P_1 y P_2 el valor numérico o absoluto de la longitud del segmento rectilíneo”(Lehmann, 1974).

Al parecer, con lo anterior se trata de evitar concepciones de los estudiantes como las que observamos en los estudiantes de nivel superior y lo que nos motivó a iniciar este trabajo de investigación.

De esta manera, la expresión $\sqrt{4}+\sqrt{9}$ significa 2 + 3 y no ± 2 ± 3, pero los valores de la ecuación $x^2=5$ se expresan como $x=\pm\sqrt{5}$ y no como $x=\sqrt{5}$

En conclusión:

El significado de la raíz cuadrada cambia en el tránsito del contexto aritmético al contexto algebraico

3.3 Disfunciones presentes en el tránsito del Aritmética al Álgebra

En el discurso matemático escolar encontramos disfunciones tales que hacen que el concepto raíz cuadrada cambie de significado al pasar de un contexto aritmético a un contexto algebraico. A continuación mostramos algunos ejemplos.

3.3.1 Obtención de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado

En ese caso, el significado del operador raíz cuadrada aparece en el mismo sitio pero con significado relacionado con diferentes contextos.

La fórmula general para la solución de ecuaciones de segundo grado se deduce de la siguiente manera:

Partimos de una ecuación de segundo grado $$ax^2 + bx + c = 0$$

Dividiendo entre *a* ambos miembros de la ecuación $$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Considerando que $a \neq 0$, pues de lo contrario la ecuación no sería de segundo grado, además de que la división por cero no está determinada

Completando un trinomio cuadrado perfecto $$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

Factorizando y despejando $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Sacando raíz cuadrada tenemos $$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

Lo cual da como resultado $$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aquí podemos observar que el operador raíz cuadrada tiene varios significados los cuales se manejan al mismo tiempo:

1) Para pasar de

$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}$ a $x+\frac{b}{2a}$ la raíz cuadrada es la operación inversa de la potencia 2

2)

$\sqrt{4a^2}$ a $2a$ el símbolo $\sqrt{\ }$ representará la raíz principal o aritmética (Contexto aritmético)

3)

$\sqrt{b^2-4ac}$ a $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ $x=\pm\sqrt{a}$ con a>0 (contexto algebraico)

Además de la aplicación de la "propiedad radicalizadora de la igualdad[11]".

4)

Si $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ entonces podemos sacar raíz cuadrada $\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$

En conclusión, encontramos 4 significados del operador raíz cuadrada que están presentes en el proceso de obtener la formula general para calcular las soluciones de ecuaciones cuadráticas

3.3.2 El manejo de fórmulas en geometría analítica

En Lehmann (1974), los temas matemáticos aparecen bajo el siguiente orden:

[11] Si a,b,c son números cualesquiera, tales que $a=b, \quad entonces \quad \sqrt[c]{a}=\sqrt[c]{b}$. Hablaremos de esta propiedad en el siguiente capítulo

Distancia entre dos puntos

Para calcular la distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ se llega a la expresión

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

De donde

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

La distancia *d* es positiva, siendo P_1P_2 el valor numérico o absoluto de la longitud del segmento rectilíneo.

<u>En esta sección es utilizado el significado que la raíz cuadrada tiene en el contexto aritmético</u>

Extensión de una curva

Son los intervalos de variación para los cuales los valores de *x* y *y* son valores reales. Éstos se determinan, simplemente resolviendo la ecuación dada para *y*, en términos de *x* y para *x* en términos de *y*. La extensión de la curva dada por $y^2 = x^3$. Despejando *y* en función de *x* tenemos que $y = \pm\sqrt{x^3}$

<u>En esta sección es utilizado el significado que la raíz cuadrada tiene en el contexto algebraico</u>

Línea recta

La forma general de la ecuación de una recta

$Ax + By + C = 0$ puede reducirse a la forma normal dividiendo cada término entre

$r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

En donde el signo que precede al radical se escoge como sigue:

a) Si C ≠ 0, *r* es de signo contrario a C
b) Si C = 0 y B ≠ 0, *r* y B tienen el mismo signo
c) Si C = B = 0, *r* y A tienen el mismo signo

<u>En esta sección es utilizado el significado que la raíz cuadrada tiene en el contexto algebraico</u>

Circunferencia:

La circunferencia cuyo centro es el punto (*h,k*) y cuyo radio es la constante r, tiene por ecuación

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

De donde

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

<u>En esta sección es utilizado el significado que la raíz cuadrada tiene en el contexto aritmético</u>

Parábola

Ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje un eje coordenado. Sea *P* (*x,y*) un punto cualquiera de la parábola y *F* (*p.0*) el foco de la parábola sobre el eje X. La distancia entre P y F es

$$\left|\overline{FP}\right|=\sqrt{(x-p)^2+y^2}$$

Haciendo algunas operaciones llegamos a la expresión $y^2=4px$

Despejando a *y* de la ecuación tenemos

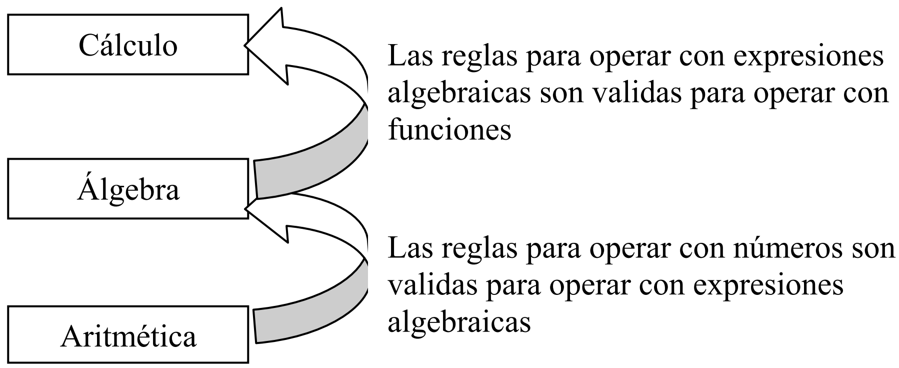
$$y=\pm\sqrt{x}$$

<u>En esta sección es utilizado el significado que la raíz cuadrada tiene en el contexto algebraico</u>

En conclusión, observamos que el significado de la raíz cuadrada tanto en el contexto aritmético como en el algebraico aparece ambiguamente a lo largo del texto.

3.4 La raíz cuadrada en el contexto algebraico y el contexto funcional en la educación Media Superior y en la Educación Superior

En el discurso matemático escolar, la Matemática se presenta seccionada, es decir, se divide en áreas que están lineal y jerárquicamente estructuradas; bajo el supuesto que las reglas del nivel anterior serán respetadas en el nivel posterior.



Para nuestro tema de interés, la raíz cuadrada, esta jerarquización presenta disfuncionalidades, puesto que las reglas de la aritmética para obtenerla no son respetadas al movernos en el plano algebraico. Esta disfunción probablemente funciona como un obstáculo para que el estudiante comprenda el significado de este operador en el contexto algebraico.

Lo mismo sucede al pasar del plano algebraico al plano funcional, las reglas del nivel inmediato anterior no son respetadas.

En la sección 3.2., mostramos cómo la raíz cuadrada es tratada algebraicamente y concluimos que en el contexto algebraico, si $x^2 - 4 = 0 \quad x^2 = 4 \quad x = \pm\sqrt{4} \quad x = \pm 2$. Ahora mostraremos cómo la raíz cuadrada es tratada en el plano funcional. Nuestra fuente de información serán los libros de cálculo mas representativos en cuanto a la enseñanza del Cálculo. Utilizamos a los que hace referencia el plan y programa de estudios de las materias de Cálculo de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAG.

Al introducirnos al Cálculo, encontramos las siguientes definiciones de función:

1) "Una función es un conjunto de pares ordenados de números reales (x,y) en el que no hay dos pares ordenados distintos que tengan el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de x recibe el nombre de dominio de la función. Al conjunto de todos los valores resultantes de y se les denomina ámbito o contradominio de la función" (Leithold, 1989).

2) "Una función f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento x de D un elemento único y de E. Si una función se define por medio de una expresión y no se especifica explícitamente el dominio D, entonces se considera que D consta de todos los números reales x para los que la función es un número real " (Swokowski, 1989).
3) "Cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda " (Granville, 2004).

En conclusión, los libros utilizados para introducir y manejar el Cálculo, definen a una función como:

Una correspondencia en la cual a cada elemento del dominio le corresponde ***uno y sólo uno*** *del contradominio*[12]

Con esta definición las expresiones

$y = 5x + 2 \qquad y = x^2 + 4 \qquad y = \dfrac{-3x}{x^2 + 1}$ representan funciones, pero la

expresión $y^2 = x$ *en donde* $y = \pm\sqrt{x}$ no representa una función

En Lehmann (2001) encontramos la siguiente definición de función:

> "Si dos variables x y y están relacionadas de tal modo que para cada valor admisible de x (dentro de su dominio), le corresponden uno o mas valores de y, se dice que y es función de x. Si a cada valor de la variable independiente le corresponde un solo valor de la función, ésta recibe el nombre de función uniforme; si le corresponden mas de un valor se le llama función multiforme, Así, en $y = 2x + 5$, y es una función uniforme de x porque para cada valor x queda determinado uno y solo un valor de y. pero en la relación $y = \pm\sqrt{x+1}$, y es una función multiforme de x ya que para cada valor asignando a x quedan determinados dos valores correspondientes de y"

[12] Llamaremos a esta definición, definición usual de función

Entre los libros de texto utilizados para el tratamiento del Cálculo, (Lehmann, 2001) es el único que explicita que si existe una correspondencia en la cual a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo uno del contradominio, se tratará de una función uniforme.

Entonces, el considerar si la expresión $y^2 = x$ es una función o no lo es depende del libro de texto que se utilice como apoyo didáctico.

De aquí en adelante, para determinar si una expresión determina una función o no, utilizaremos la definición usual de función

Bajo este supuesto, la expresión $y = \pm\sqrt{x}$ no representa una función. Asumiendo que en el contexto algebraico, se había convenido que la raíz cuadrada tendría dos valores, ($x = \pm 2$), podemos concluir que

El significado de la raíz cuadrada cambia en el tránsito del contexto algebraico al contexto funcional.

Si dividimos en dos partes la ecuación $y = \pm\sqrt{x}$, de modo que tengamos las ecuaciones $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$, éstas, por separado, cumplirán con la definición tradicional de función.

En el contexto funcional, la raíz cuadrada tiene un significado diferente. No podemos considerar únicamente el significado de la raíz cuadrada en el contexto aritmético, puesto que también se considera a la raíz negativa. Y si consideramos el significado de la raíz cuadrada en el contexto algebraico, ya no cumple con la definición formal de función. De aquí, hacemos la siguiente observación

Una expresión de la forma $y = \pm\sqrt{x}$ *no define a* $\underline{y}$ *como una función, pero las expresiones* $y = \sqrt{x}$ *e* $y = -\sqrt{x}$ *, por separado, definen una función.*

3.5 Disfunciones presentes en el tránsito del Álgebra al Cálculo

En el discurso matemático escolar encontramos disfunciones tales que hacen que el concepto raíz cuadrada cambie de significado al pasar de un contexto algebraico a un contexto funcional.

Para graficar funciones, primero debemos entender en qué consiste la graficación de ecuaciones, así, los textos consultados afirman que:

1) "La grafica de una ecuación en R^2, es el conjunto de todos los puntos *(x,y)* en R^2 cuyas coordenadas son números que satisfacen la ecuación". (Leithold,1989).
2) "Para graficar una ecuación en el plano cartesiano, se dan valores a la variable independiente, se evalúa la ecuación y así se obtienen los valores de la variable dependiente ". (Swokowski,1989).
3) "El conjunto de todos los puntos y sólo ellos, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = f(x)$ se llama gráfica de la ecuación". (Lehmann,2001).

Para graficar ecuaciones, el uso de tablas es muy útil. Veamos el siguiente ejemplo en el que se pide graficar la ecuación

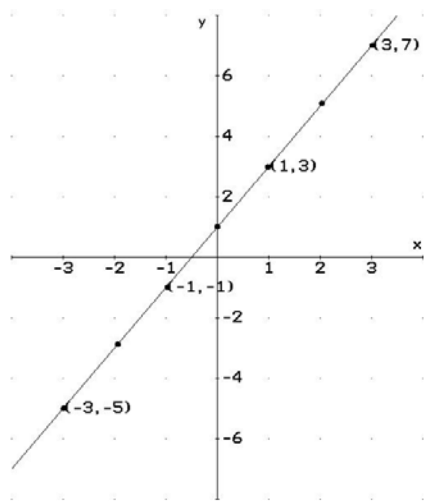
$$y = 2x + 1$$

Dando valores a la variable independiente (que es *x*) obtenemos los valores de la variable dependiente (que es *y*). Con este resultado, localizamos las parejas ordenadas en el plano cartesiano

valores de la variable independiente x	*ecuación 2x+1*	*valores de la variable dependiente y*	*Pares ordenados*
-3	2(-3)+1	-5	(-3,-5)
-2	2(-2)+1	-3	(-2,-3)
-1	2(-1)+1	-1	(-1,-1)
0	2(0)+1	1	(0,1)
1	2(1)+1	3	(1,3)
2	2(2)+1	5	(2,5)
3	2(3)+1	7	(3,7)

Tabulación para obtener la grafica de $y=2x+1$

La grafica queda así:



Gráfica de $y=2x+1$

Los números que satisfacen la ecuación $y = 2x + 1$ son aquellos cuyas coordenadas se encuentran sobre la recta.

Observamos que no hay pares ordenados que tengan al mismo número como entrada.

¿Qué pasa si la expresión no muestra a ninguna de las variables en función de la otra como en el ejemplo anterior?

Cuando nos piden graficar ecuaciones en donde la variable independiente no está despejada, se hacen las operaciones necesarias para poner a una en *función* de la otra (Granville,2001), es decir, la ecuación $2x - y = -1$ puede quedar en términos de x o de y:

$$y = 2x + 1 \qquad ó \qquad x = \frac{y-1}{2}$$

En este caso, los pares ordenados resultantes siguen siendo los mismos y la grafica también.

Ahora bien, veamos que es lo que sucede con ecuaciones que involucran raíces cuadradas

Tenemos la ecuación $x - y^2 = 0$. Al expresar a una variable en función de la otra obtenemos las siguientes expresiones

$$x = y^2 \qquad ó \qquad y = \pm\sqrt{x}$$

bajo el supuesto que las reglas del Álgebra son respetadas en el Cálculo. Si no fuera así, ¿Qué sucedería si tomáramos las reglas de la aritmética para hacer los despejes?. La expresión quedaría expresada como

$$x = y^2 \qquad ó \qquad y = \sqrt{x}$$

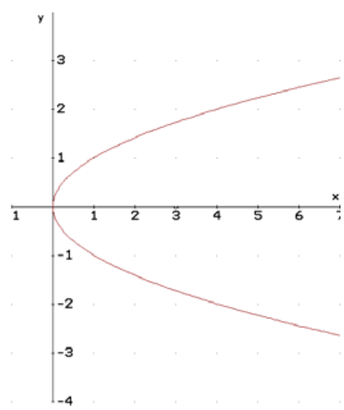
En este caso los valores negativos de y no estarían siendo considerados, por lo cual la ecuación tendría una sola solución, hecho que contradice el teorema

“Una ecuación tiene a lo mas tantas raíces como lo indica su máximo exponente”

valores de la variable independiente x	*valores de la variable independiente* y	*Pares ordenados*
0	0	(0,0)
1	1	(1, 1)
	-1	(1, -1)
4	2	(4, 2)
	-2	(4, -2)
9	3	(9, 3)
	-3	(9, -3)

Tabulación para obtener la grafica de $y = \pm\sqrt{x}$

La gráfica de esta ecuación es:



Gráfica de $y = \pm\sqrt{x}$

Los números que satisfacen la ecuación $x - y^2 = 0$ son aquellos cuyas coordenadas se encuentran sobre la curva

Observamos que hay por lo menos 2 pares ordenados que tienen al mismo número como primera entrada: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(2,\sqrt{2})$, $(2,-\sqrt{2})$,..................

En (Leithold, 1989) observamos el siguiente ejemplo:

Trazar la grafica de la ecuación

$$y^2 - x - 2 = 0 \quad \text{………(2)}$$

<u>Solución</u>: Resolviendo la ecuación (2) para *y* tenemos

$$y = \pm\sqrt{x+2} \quad \text{………..(3)}$$

Las ecuaciones (3) son equivalentes a las dos ecuaciones:

$$y = \sqrt{x+2} \quad \text{…………(4)}$$

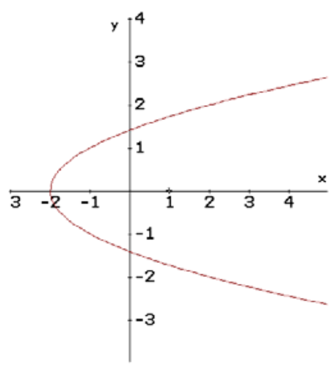
$$y = -\sqrt{x+2} \quad \text{…………(5)}$$

Las coordenadas de todos los puntos que satisfacen la ec. (3) satisfarán la ec (4) o la ec (5) y las coordenadas de cualquier punto que satisfacen la ec (4) o la ec (5) satisfarán la ec (3).

La tabla da algunos de estos valores de x e y

x	0	0	1	1	2	2	3	3	-1	-1	-2
y	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	2	-2	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	1	-1	0

La gráfica es una parábola

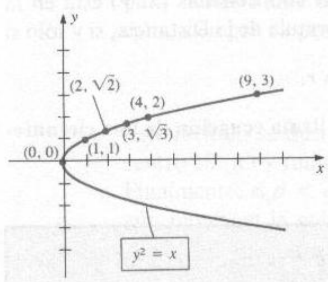


Probablemente (Leithold, 1989), introduce esta expresión de esta forma para, mas adelante, tratarla por separado y establecer que cada una de las expresiones, por separado, representa una función.

Otro ejemplo del tratamiento de una ecuación del tipo $y^2 = x$ lo encontramos en (Swokowsky, 1989)

> Trazar la gráfica de la ecuación $y^2 = x$
>
> Solución
>
> Como al sustituir y por $-y$ no cambia la ecuación, la gráfica es simétrica con respecto al eje X [Criterio de Simetría[13]]. Por tanto, basta localizar puntos con ordenadas no negativas y luego reflejar con respecto al eje X. Como $y^2 = x$, las coordenadas de los puntos arriba del eje X están dadas por $y = \sqrt{x}$. En la siguiente tabla aparecen las coordenadas de varios de los puntos de la gráfica:

FIGURA 1.22



x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**9**
y	**0**	**1**	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	**2**	**3**

> En la figura 1.22 aparece una parte de la gráfica. Se trata de una parábola que abre hacia la derecha y que tiene su vértice en el origen. En este caso el eje de la parábola coincide con el eje *X*.

Probablemente Swokowky (1989), introduce esta expresión utilizando simetría para mas adelante no tener problemas cuando se tenga que despejar la variable y de una expresión que involucre y^2. Mas adelante considera por separado las expresiones $y = \sqrt{x}$ y $y = -\sqrt{x}$, las cuales, por separado, representan una función.

[13] La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al origen si al sustituir simultáneamente x por $-x$ y y por $-y$ resulta una ecuación equivalente.

De los tres ejemplos mostrados podemos concluir lo siguiente:

a) La ecuación $y = 2x + 1$ representa una función, pues a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo uno del contradominio.

b) La ecuación $y^2 = x + 2$ NO representa una función, pues a cada elemento del dominio le corresponden dos del contradominio. Las ecuaciones $y = -\sqrt{x+2}$ y $y = \sqrt{x+2}$ cada una por separado, SI representan una función, puesto que a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo uno del contradominio.

c) La ecuación $y^2 = x$ NO representa tampoco una función, pues a cada elemento del dominio le corresponden dos del contradominio. Las ecuaciones $y = -\sqrt{x}$ y $y = \sqrt{x}$ cada una por separado, SI representan una función, puesto que a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo uno del contradominio.

En el contexto funcional, expresiones de la forma $ay^2 + bx = c$ NO representan funciones, puesto que al despejar a la variable y de esta ecuación, obtenemos la expresión

$$y = \pm\sqrt{c - bx} \quad \text{donde } c - bx \geq 0$$

Si consideramos las raíces positiva y negativa por separado, entonces Si representarán una función.

Si queremos que la expresión $y = \pm\sqrt{c - bx}$ (con $c - bx \geq 0$) *tenga sentido en el contexto funcional, debemos considerar un nuevo significado para la raíz cuadrada:*

*Ahora tendrá que ser **o** positiva **ó** negativa.*

Análisis Cognitivo

En este capítulo mostraremos las concepciones que estudiantes de Secundaria, Bachillerato y Licenciatura en Matemáticas tienen de objetos relacionados con la raíz cuadrada. Para llevar a cabo esta investigación, nos auxiliamos de un cuestionario que incluía preguntas en diferentes contextos: lo aritmético, lo algebraico y lo funcional. Cada una de las preguntas fue elaborada con el objetivo de explorar las concepciones asociadas a la raíz cuadrada. Describiremos las respuestas que dieron los estudiantes y mostraremos tanto las concepciones esperadas como las no esperadas. Además, intentaremos explicar el origen de cada una de estas respuestas.

4.1 Las costumbres escolares

En la escuela es muy útil el empleo de técnicas que le permitan llegar al estudiante (y al profesor) a un resultado matemático de una manera rápida y sin complicaciones. .

A lo largo de nuestra instrucción escolar, utilizamos criterios de despeje válidos al hacer operaciones algebraicas, por ejemplo, para despejar x de la expresión

$$4x+18=22$$

$4x=22-18$ “18 pasa restando porque está sumando”

$x=\frac{22-18}{4}$ “4 pasa dividiendo porque está multiplicando”

Estos criterios los utilizamos en la práctica regularmente, pero lo que no se explicita es que lo podemos hacer gracias a las propiedades de la igualdad (Lehmann, 2001)

<u>Propiedad aditiva de la igualdad</u>

Si a, b, c son números cualesquiera, tales que $a = b$, *entonces* $a + c = b + c$

<u>Propiedad sustractiva de la igualdad</u>

Si a, b, c son números cualesquiera, tales que $a = b$, *entonces* $a - c = b - c$

<u>Propiedad multiplicativa de la igualdad</u>

Si a, b, c son números cualesquiera, tales que $a = b$, *entonces* $ac = bc$

<u>Propiedad divisora de la igualdad</u>

Si a, b, c son números cualesquiera y $c \neq 0$, tales que $a = b$, *entonces* $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Además, en la práctica escolar, es sabido que:

- La operación inversa de la suma es la resta y viceversa
- La operación inversa de la multiplicación es la división y viceversa
- La operación inversa de la potenciación es la radicación y viceversa.

En especial, la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado.

Entonces, bajo estos criterios, la practica escolar nos dicta que

- $\sqrt{a^2} = a$ si extraigo raíz cuadrada a una expresión que está elevada al cuadrado, la expresión no se altera pues “no se le ha hecho nada”
- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ si elevo al cuadrado una expresión y luego le extraigo raíz cuadrada, la expresión no se altera, pues “no se le ha hecho nada”

Esto ocurre en la práctica a pesar de que en los libros de matemáticas se explicita claramente que

$$\sqrt{a^2} = |a| \qquad \forall a \in \Re$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \qquad a \geq 0$$

Observamos que tanto profesores como estudiantes tienden a extender estas propiedades a la radicación y a la potenciación, y, en nuestro caso de interés, establecen el "teorema de facto"[14] Si a, b, c son números cualesquiera, tales que $a = b, \quad entonces \quad \sqrt[c]{a} = \sqrt[c]{b}$

En particular, si $c = 2$

$$\text{Si } \; a = b \quad \text{entonces} \quad \sqrt{a} = \sqrt{b}$$

A esta "propiedad" le llamaremos "propiedad radicalizadora de la igualdad" para designar la práctica escolar cotidiana que determina que

$$\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

$$\text{Si } \; a = b \quad \text{entonces} \quad \sqrt{a} = \sqrt{b}$$

4.2 Aplicación de cuestionario

Este cuestionario fue aplicado a estudiantes de diversos niveles educativos, los cuales dividimos en 3 grupos, con las siguientes características:

Grupo 1: Estudiantes de tercer año de secundaria de la Escuela Secundaria Técnica 81 de la Ciudad de Chilpancingo, Gro, cuyas edades fluctúan entre los 14 y 16 años. En este grupo participaron 64 estudiantes.

Grupo 2: Estudiantes del primer año de la Licenciatura en Matemáticas, de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAG[15]. Este grupo está formado por estudiantes que

[14] Según (Vergnaud, 1992) citado en (Farfán, 1997), estos teoremas están ligados a la "inducción de las propiedades válidas" y en el "recurso de la analogía".
[15] Universidad Autónoma de Guerrero

acaban de egresar de escuelas preparatorias de la UAG; sus edades fluctúan entre los 18 y 19 años. Estos estudiantes han llevado cursos de aritmética, álgebra y cálculo diferencial.

Grupo 3: Estudiantes de tercer año de la Licenciatura en Matemática Educativa, de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAG, nodo Chilpancingo. Hasta este momento, estos estudiantes han cursado 25 materias. Dentro de los contenidos matemáticos que manejan están el Cálculo Diferencial e Integral y la Geometría Analítica

Nuestro objetivo al aplicar este cuestionario es el MOSTRAR que, a pesar de las características de cada grupo, las concepciones de los estudiantes respecto a expresiones que involucran raíces cuadradas no desaparecen.

Cabe señalar que algunas preguntas no fueron aplicadas al Grupo 1, pues consideramos que no contaban con los antecedentes matemáticos para responderlas. Además, incluimos preguntas que sólo nos sirvieron para contextualizar la siguiente pregunta, razón por la cual, las respuestas obtenidas de los estudiantes no son mostradas en este trabajo.

El cuestionario consta de las siguientes preguntas:

1) ¿Cuántas y cuáles son las operaciones básicas de la aritmética?
2) ¿Por qué se llaman básicas?
3) ¿Qué significa para ti encontrar la raíz cuadrada de un número? Explica ampliamente
4) $\sqrt{81} =$ _________
5) Resuelve la ecuación $x^2 = 4$ (entendemos por solución de una ecuación, el o los valores que hacen posible que se conserve la igualdad)
6) Resuelve la ecuación $4x^2 + 20x + 24 = 0$ por el método que tu quieras

La formula general para la solución de ecuaciones de segundo grado se deduce de la siguiente manera:

La formula general de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$

Dividiendo entre ***a*** ambos miembros de la ecuación $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Completando un trinomio cuadrado perfecto $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$

Factorizando y despejando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

Sacando raíz cuadrada tenemos $\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

7) ¿Cómo explicas el signo ± antes de la expresión $\sqrt{b^2 - 4ac}$?

8) ¿Por qué crees que a la expresión $x + \frac{b}{2a}$ y a la expresión 2 a del denominador no se les coloca el signo ± al sacarles la raíz cuadrada y en la expresión $\sqrt{b^2 - 4ac}$ se queda indicado?

9) Contesta lo que se te pide

$\sqrt{(5)^2} =$ ____________	$\left(\sqrt{25}\right)^2 =$ ____________
$\sqrt{(8)^2} =$ ____________	$\left(\sqrt{81}\right)^2 =$ ____________
$\sqrt{(-2)^2} =$ ____________	$\left(\sqrt{-4}\right)^2 =$ ____________
$\sqrt{(x)^2} =$ ____________	$\left(\sqrt{x}\right)^2 =$ ____________

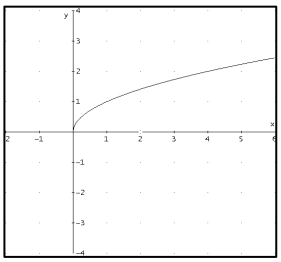
10) $\sqrt[2]{100} =$ ____________

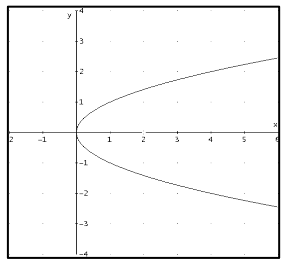
11) Observa la siguiente secuencia

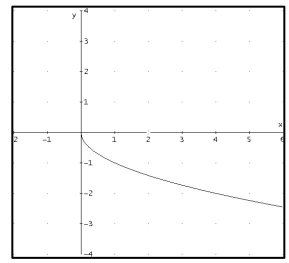
$$4 = 4$$
$$(-2)^2 = (2)^2$$
$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{(2)^2}$$
$$-2 = 2$$

Explica ampliamente dónde está el error, si es que lo hay, y en qué consiste

12) ¿Cuál de las graficas corresponde a la expresión $y^2 = x$

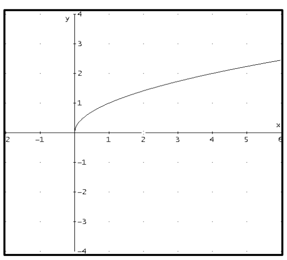

A

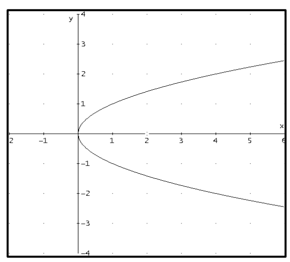

B

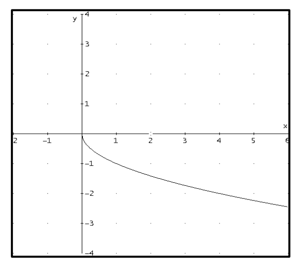

C

Explica ampliamente

13) ¿Cuál de las graficas corresponde a la expresión $y = \sqrt{x}$


A


B


C

Explica ampliamente

Por definición sabemos que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$,
En especial

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Utiliza las propiedades de los exponentes y encuentra lo que se te pide

14) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$ $\qquad\qquad$ $(x^2)^{\frac{1}{2}} =$

De lo anterior podemos concluir que

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = (x^2)^{\frac{1}{2}} = x$$

4.3 Concepciones respecto a la raíz cuadrada involucradas en las preguntas del cuestionario

El cuestionario utilizado constó de 14 preguntas relacionadas al concepto matemático raíz cuadrada.

A continuación describimos cada una de las concepciones que consideramos, podrían aparecer en el cuestionario aplicado

- La raíz cuadrada es una operación básica.

Entenderemos por operación básica de la aritmética a aquella que aparece con más frecuencia en los cálculos matemáticos cotidianos que realizamos.

- Significado del operador $\sqrt{\ }$

Definimos al operador raíz cuadrada como el proceso que permite encontrar números tales que al multiplicarlos por sí mismos nos den el número que se encuentra dentro del operador

- Existencia de raíces cuadradas negativas

Un número tiene 2 raíces cuadradas, de las cuales una es negativa

- Si $a^2 = b \quad entonces \quad a = \sqrt{b}$

Un numero tiene 2 raíces cuadradas, del mismo valor pero de signo contrario. La expresión $\sqrt{b}$ representará la raíz aritmética o principal[16]

- $\sqrt{a} = \pm b$

Un numero tiene 2 raíces cuadradas, del mismo valor pero de signo contrario.

[16] Entendemos por raíz principal o aritmética a la raíz positiva

- $\sqrt{a^{2}} = a$

La radicación es la operación inversa de la potenciación

- $\sqrt[2]{a} = \frac{a}{2}$

La expresión $\sqrt[n]{a}$ representa una división

- Si $a = b \quad entonces \quad \sqrt{a} = \sqrt{b}$

Se aplica la propiedad radicalizadora de la igualdad

- Las leyes de los exponentes son válidas

Para todo *a*, se cumple que $(a^{\frac{1}{2}})^{2} = (a^{2})^{\frac{1}{2}} = a$

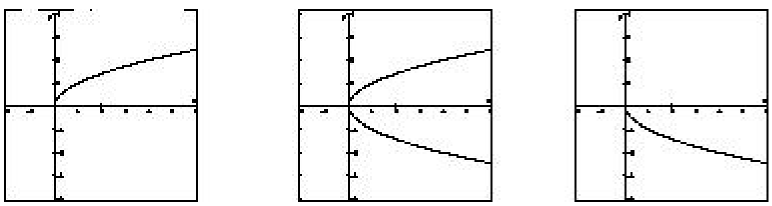
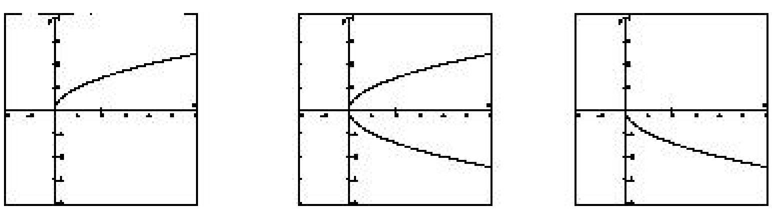
4.4 Concepciones asociadas y esperadas a las preguntas del cuestionario

La siguiente tabla muestra las concepciones que se asocian a cada una de las preguntas del cuestionario aplicado a los estudiantes y que se espera que éstos asocien también. Es decir, queremos mostrar que cada una de estas concepciones aparecerán en las respuestas de los estudiantes.

Pregunta	Enunciado	Concepción(es) asociada(s)
1	*¿Cuántas y cuales son las operaciones básicas de la aritmética?*	La raíz cuadrada es una operación básica
2	*¿Por qué se llaman básicas?*	Una operación básica es aquella que se utiliza en los cálculos cotidianos
3	*¿Qué significa para ti encontrar la raíz cuadrada de un número?*	*Significado del operador* $\sqrt{\ }$

Pregunta	Enunciado	Concepción(es) asociada(s)
4	$\sqrt{81} =$ __________	• Si $a^2 = b$ *entonces* $a = \sqrt{b}$ • $\sqrt{a} = \pm b$
5	*Resuelve la ecuación* $x^2 = 4$	$\sqrt{a} = \pm b$
7	*¿Cómo explicas el signo ± antes de la expresión* $\sqrt{b^2 - 4ac}$ *?*	$\sqrt{a} = \pm b$
8	*¿Por qué crees que a la expresión* $x + \frac{b}{a}$ *y a la expresión 2 a del denominador no se les coloca el signo ± al sacarles la raíz cuadrada y en la expresión* $\sqrt{b^2 - 4ac}$ *se queda indicado?*	La radicación es la operación inversa de la potenciación
9[17]	$\sqrt{(5)^2} =$ __________ $\left(\sqrt{25}\right)^2 =$ __________ $\sqrt{(8)^2} =$ __________ $\left(\sqrt{81}\right)^2 =$ __________ $\sqrt{(-2)^2} =$ __________ $\left(\sqrt{-4}\right)^2 =$ __________ $\sqrt{(x)^2} =$ __________ $\left(\sqrt{x}\right)^2 =$ __________	La radicación es la operación inversa de la potenciación
10	$\sqrt[2]{100}$	$\sqrt[2]{a} = \frac{a}{2}$

[17] la concepción que queríamos detectar era la de la radicación como operación inversa de la potenciación. Únicamente analizamos las respuestas que tuvieron los estudiantes en cuanto al inciso $\sqrt{(-2)^2} =$______ pues esta respuesta es la más representativa de la secuencia de ejercicios propuestos.

Pregunta	Enunciado	Concepción(es) asociada(s)
11	*Observa la siguiente secuencia* $4 = 4$ $(-2)^2 = (2)^2$ $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{(2)^2}$ $-2 = 2$	Si $a = b$ entonces $\sqrt{a} = \sqrt{b}$
12	*¿Cuál de las graficas corresponde a la expresión* $y^2 = x$ *?*  *A* *B* *C*	$\sqrt{a} = \pm b$
13	*¿Cuál de las graficas corresponde a la expresión* $y = \sqrt{x}$ *?*  *A* *B* *C*	la radicación es la operación inversa de la potenciación
14	$(x^{\frac{1}{2}})^2 = (x^2)^{\frac{1}{2}} = x$	Son válidas las leyes de los exponentes $\forall x \in \Re$

4.5 Análisis de datos

A continuación mostramos las respuestas que dieron los estudiantes de cada uno de los grupos. Para cada una de ellas se mostrarán dos tablas

- la primera mostrará la cantidad y tipo de respuestas que tuvieron los estudiantes

- la segunda mostrará el porcentaje de incidencia de esta respuesta en cada uno de los grupos. Los porcentajes suman 100 en forma horizontal, pues lo que deseábamos era mostrar el porcentaje de incidencia por grupo pero en conjunto, no por separado, es decir, encontramos estos porcentajes haciendo el siguiente proceso

Respuesta	*Grupo 1 Numero de alumnos de un total de 64*	*Grupo 2 numero de alumnos de un total de 22*	*Grupo 3 numero de alumnos de un total de 12*	*total de alumnos que dieron esta respuesta*
$x = 2$	**64**	**2**	**3**	**69**
$x = \pm 2$	**0**	**20**	**9**	**29**

Respuesta	*porcentaje interno del Grupo 1*	*Porcentaje interno del grupo 2*	*Porcentaje interno del grupo 3*	*suma de porcentajes internos*
$x = 2$	**100**	**9**	**25**	**134**
$x = \pm 2$	**0**	**91**	**75**	**166**

Respuesta	*grupo 1* $\frac{\%\ \text{int}\,erno}{suma\ \%\ \text{int}\,ernos}\times 100$	*grupo 2* $\frac{\%\ \text{int}\,erno}{suma\ \%\ \text{int}\,ernos}\times 100$	*grupo 3* $\frac{\%\ \text{int}\,erno}{suma\ \%\ \text{int}\,ernos}\times 100$	*suma de porcentajes*
$x = 2$	**75 %**	**7 %**	**18 %**	**100**
$x = \pm 2$	**0 %**	**55 %**	**45 %**	**100**

4.5.1 Pregunta 1: ¿Cuáles son las operaciones básicas de la aritmética?

Respuesta	*Grupo 1 Numero de alumnos de un total de 64*	*Grupo 2 numero de alumnos de un total de 22*	*Grupo 3 numero de alumnos de un total de 12*
La raíz cuadrada es una operación básica	**13**	**3**	**0**
las operaciones básicas son suma, resta, multiplicación y división	**44**	**19**	**12**
otras respuestas	**7**		

En el renglón *otras respuestas*, únicamente los integrantes del Grupo 1 tuvieron respuestas tales como simplificación, ecuación, sustitución, etc. Notamos que es importante el por qué de ellas, pero para nuestro trabajo, estas respuestas no eran representativas del fenómeno que deseábamos detectar, así que no fueron consideradas en el análisis. Para mayor referencia, consultar (Lorenzo, 2005).

Respuesta	*Grupo 1*	*Grupo 2*	*Grupo 3*	*suma de porcentajes*
La raíz cuadrada es una operación básica	**60%**	**40%**	**0%**	**100**
las operaciones básicas son suma, resta, multiplicación y división	**27 %**	**34 %**	**39 %**	**100**

Concepción asociada: La raíz cuadrada es una operación básica.

Conclusión: Los resultados nos muestran que a medida que el estudiante avanza en su instrucción escolar, la raíz cuadrada ya NO es considerada una operación básica

Cabe señalar que dentro del Grupo 3, obtuvimos la respuesta de un estudiante en la que solo consideraba a la suma y la multiplicación como operaciones básicas

4.5.2. Pregunta 2 ¿Por qué se llaman básicas?

Esta pregunta nos proporcionó elementos para saber qué es lo que significa para los estudiantes una operación básica. Aquí encontramos que la mayoría entiende que son las que mas utilizan en su vida diaria, es decir, las que les sirven para resolver problemas cotidianos.

En el caso del Grupo 3, observamos lo siguiente:

a) A pesar de que en la escuela, el operador $\sqrt{\ }$ está presente en infinidad de temas de cálculo, geometría analítica, ecuaciones diferenciales, etc., incluso en cálculo de áreas, esta operación no es considerada básica; en otras palabras, los problemas a resolver en la escuela no son considerados como cotidianos.

b) El estudiante que contestó que solamente la suma y la multiplicación eran operaciones básicas considera que éstas son aquellas a partir de las cuales obtengo las demás; a partir de la suma obtengo la resta (porque la resta es la operación contraria de la suma), a partir de la multiplicación obtengo la división (porque la división es la operación contraria de la multiplicación) y a partir de estas 4 operaciones obtengo la raíz cuadrada.

4.5.3 Pregunta 3: ¿Qué significa para ti encontrar la raíz cuadrada de un número?

Respuesta	*Grupo 1 Numero de alumnos de un total de 64*	*Grupo 2 numero de alumnos de un total de 22*	*Grupo 3 numero de alumnos de un total de 12*
Encontrar un número que elevado al cuadrado me de el que está en el radicando	**15**	**19**	**11**
no contestaron	**40**	**-**	**-**
otras respuestas	**9**	**3**	**1**

Observamos que una gran mayoría del Grupo 1 no contestó a la pregunta. Suponemos que esto se debe a que el proceso para encontrar raíces cuadradas no ha sido considerado como tal, es decir, el algoritmo tradicional (mejor conocido como el método de la "casita") no ha sido interiorizado. Además, en este grado escolar, de acuerdo a los planes y programas de estudio de nivel secundaria, los estudiantes ya han visto diversos métodos para calcular raíces cuadradas. A pesar de ello, "*el proceso para obtener raíces cuadradas no tiene sentido para el estudiante*" (Lorenzo 2005)

En este grupo, en el renglón otras respuestas, los estudiantes trataban de describir en qué consistía el algoritmo tradicional.

Para nuestro análisis porcentual, no fueron tomados en cuenta los estudiantes que no contestaron o que tuvieron otras respuestas

Respuesta	*Grupo 1*	*Grupo 2*	*Grupo 3*
Encontrar un número que elevado al cuadrado me de el que está en el radicando	**12 %**	**43 %**	**45 %**

Concepción asociada: Significado del operador $\sqrt{\ }$

Conclusión: Los porcentajes de las respuestas obtenidos nos muestran que el operador raíz cuadrada toma significado conforme el estudiante avanza por las aulas escolares.

4.5.4. Pregunta 4: $\sqrt{81} =$ __________

Respuesta	*Grupo 1* *Numero de alumnos de un total de 64*	*Grupo 2* *numero de alumnos de un total de 22*	*Grupo 3* *numero de alumnos de un total de 12*
9	**52**	**19**	**10**
±9	**0**	**2**	**2**
No contestaron	**8**	**1**	**0**

Respuesta	*Grupo 1*	*Grupo 2*	*Grupo 3*
9	**32 %**	**34 %**	**34 %**
±9	**0 %**	**35 %**	**65 %**
No contestaron	**73 %**	**27 %**	**0 %**

A pesar de que la gran mayoría de los estudiantes logró definir al proceso de extraer raíz cuadrada como el "*encontrar un número que elevado al cuadrado dé el que esta en el radical*", y de que en los tres grupos ya son conocidos los números enteros y la ley de los signos para la multiplicación de éstos, el -9 no fue considerado como raíz cuadrada. En ninguno de los grupos se observó una sola respuesta en la que el -9 fuera considerado como raíz cuadrada. La combinación de los signos ± se observa sólo en los grupos 2 y 3.

De acuerdo a las respuestas de los estudiantes, esto lo podemos asociar con el hecho de que sólo podemos extraer raíz cuadrada a números positivos (pues las raíces cuadradas de números negativos no son números reales) pero los estudiantes dan por hecho que esta tendrá que ser también positiva

Concepciones asociadas:

a) Si $a^2 = b$ *entonces* $a = \sqrt{b}$

Conclusión: Una gran mayoría de estudiantes de los tres grupos consideran solamente a la raíz principal como la raíz cuadrada de un número. Esto es, el significado que le dan al operador raíz cuadrada es el que tiene en el contexto aritmético

b) $\sqrt{a} = \pm b$

Conclusión: Los estudiantes que tienen relación cotidiana con procesos algebraicos, es decir, los del grupo II y II, manejan las interpretaciones tanto en el contexto aritmético como en el algebraico.

4.5.5 Pregunta 5: Resuelve la ecuación $x^2 = 4$

Respuesta	*Grupo 1* *Numero de alumnos de un total de 64*	*Grupo 2* *numero de alumnos de un total de 22*	*Grupo 3* *numero de alumnos de un total de 12*
x = 2	**64**	**2**	**3**
x = ±2	**0**	**20**	**9**

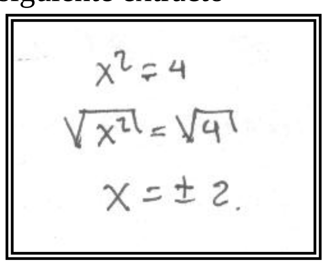
Respuesta	*Grupo 1*	*Grupo 2*	*Grupo 3*
x = 2	**75%**	**7 %**	**19 %**
x = ±2	**0 %**	**55 %**	**45 %**

En esta pregunta los estudiantes mostraron claramente el teorema de facto

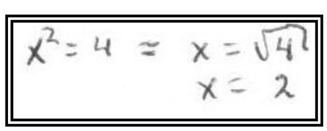
la propiedad radicalizadora de la igualdad

al extraer de ambos lados de la igualdad la raíz cuadrada. Algunos colocaron el $\pm$ a la raíz cuadrada y consideraron 2 resultados, utilizaron el significado de la raíz cuadrada en el contexto algebraico.

De esta costumbre mostramos el siguiente extracto



Otros únicamente utilizaron el significado aritmético de la raíz cuadrada, obteniendo solo un resultado para la ecuación, como se muestra en el siguiente extracto



Concepción asociada: $\sqrt{a} = \pm b$

Conclusión:

Aquí encontramos aspectos interesantes:

Para el Grupo 1, el concepto de “raíz” de una ecuación es entendido como un operador aritmético, no algebraico. La extracción de raíces cuadradas solamente da números positivos como resultado.

En los Grupos 2 y 3, los estudiantes ya diferencian entre que la raíz o solución de una ecuación es la raíz algebraica y no aritmética, por eso, la mayoría considera a 2 y a -2 como soluciones de la ecuación $x^2 = 4$, pero aun aparecen casos en los que se considera el significado en el contexto aritmético para resolver este tipo de ecuaciones.

4.5.6. Pregunta 6: Resuelve la ecuación $4x^2 + 20x + 24 = 0$

Respuesta	*Grupo 1* *Numero de alumnos de un total de 64*	*Grupo 2* *numero de alumnos de un total de 22*	*Grupo 3* *numero de alumnos de un total de 12*
$x_1 = -2 \quad x_2 = -3$	**1**	**21**	**10**
Resultado incorrecto	**5**	**1**	**2**
no contestaron	**44**	**-**	**-**
no pudieron aplicar la fórmula	**14**	**-**	**-**

Con esta pregunta solo queríamos saber si los estudiantes conocían y manejaban la formula general para resolver ecuaciones cuadráticas. Las observaciones que hicimos son las siguientes, pero no representan información a nuestro tema de estudio

En esta pregunta cabe señalar que los estudiantes del Grupo 1 tenían 1 semana de haber visto el tema de ecuaciones cuadráticas, razón por la cual la mayoría no contestó o tuvo problemas para utilizar la formula general para la solución de ecuaciones de segundo grado.

En los Grupos 2 y 3, observamos que todos los estudiantes conocían perfectamente la formula general para calcular soluciones de una ecuación cuadrática. Los estudiantes que tuvieron resultados incorrectos aplicaron la formula general, pero se equivocaron en alguna operación aritmética durante el proceso.

En cuanto al análisis porcentual

Respuesta	*Grupo 1*	*Grupo 2*	*Grupo 3*
$x_1 = -2 \quad x_2 = -3$	**1 %**	**53 %**	**46 %**
Resultado incorrecto	**27 %**	**15 %**	**58%**

A pesar del nivel escolar de los 3 Grupos, observamos que los errores al utilizar la formula siguen presentes.

4.5.7. Pregunta 7: ¿Cómo explicas el signo ± antes de la expresión $\sqrt{b^2 - 4ac}$?

Respuesta	*Grupo 1* *Numero de alumnos de un total de 64*	*Grupo 2* *numero de alumnos de un total de 22*	*Grupo 3* *numero de alumnos de un total de 12*
Porque la raíz cuadrada puede ser negativa o positiva		**5**	**8**
Porque es de 2º grado y tiene que tener 2 soluciones		**8**	**2**
Porque no se sabe si la expresión dentro de la raíz es positiva o negativa		**5**	**2**

Esta pregunta aunque fue aplicada al Grupo 1, las respuestas no fueron consideradas como significativas, como dijimos anteriormente, tenia una semana que habían visto el tema y el proceso de obtención de la formula no les fue mostrado

Respuesta	*G r u p o 1*	*G r u p o 2*	*G r u p o 3*
Porque la raíz cuadrada puede ser negativa o positiva		**25 %**	**75 %**
Porque es de 2º grado y tiene que tener 2 soluciones		**69 %**	**31 %**
Porque no se sabe si la expresión dentro de la raíz es positiva o negativa		**58 %**	**42 %**

Analicemos cada una de las respuestas:

a) *Porque la raíz cuadrada puede ser negativa o positiva*: se observa que los estudiantes tienen en un alto porcentaje la concepción del operador algebraico raíz cuadrada

b) *Porque es de 2º grado y tiene que tener 2 soluciones*: a este nivel de estudios, el estudiante ya conoce un teorema algebraico que dice *"una ecuación entera* $f(x)=0$, *de grado n, tiene exactamente n raíces"*. Observamos que esta respuesta es una justificación a este teorema, pues se trata de un resultado matemático básico, así, suponemos que los estudiantes justifican de esta forma el que haya dos soluciones, pues de "algún lado tienen que surgir las 2 soluciones, de lo contrario se estaría contradiciendo un resultado matemático". El siguiente extracto es muestra de ello

> Bueno, Pues como sabemos que partimos de una ecuación de segundo grado, por lo tanto, dicha ecuación tiene dos raices.

> yo entiendo que los signos ± significan que al resolver una ecuación de segundo grado esta va a tener 2 valores diferentes ya sean positivos o negativos.

c) La respuesta *Porque no se sabe si la expresión dentro de la raíz es positiva o negativa* nos da un indicio de que los estudiantes aun no tienen claro el hecho de que si el discriminante[18] es negativo, la solución no existe en los reales.

Concepción asociada: $\sqrt{a} = \pm b$

Conclusión: Los estudiantes utilizan el significado de la raíz cuadrada en el contexto algebraico para justificar el doble signo en la expresión

[18] Entendemos por discriminante a la expresión $\sqrt{b^2-4ac}$

4.5.8. Pregunta 8: ¿Por qué crees que a la expresión $x+\frac{b}{2a}$ y a la expresión $2a$ del denominador no se les coloca el signo ± al sacarles la raíz cuadrada y en la expresión $\sqrt{b^2-4ac}$ se queda indicado?

Respuesta	*Grupo 1* *Numero de alumnos de un total de 64*	*Grupo 2* *numero de alumnos de un total de 22*	*Grupo 3* *numero de alumnos de un total de 12*
Porque $\sqrt{x^2}=x$		**18**	**8**
porque $\sqrt{x^2}$ *es positivo*		**4**	**4**

Esta pregunta definitivamente no se les hizo a los estudiantes del grupo 1.

Respuesta	*Grupo 1*	*Grupo 2*	*Grupo 3*
Porque $\sqrt{x^2}=x$		**55 %**	**45 %**
porque $\sqrt{x^2}$ *es positivo*		**35 %**	**65 %**

Aquí detectamos fuertemente el manejo de la costumbre escolar

La radicación es la operación inversa de la potenciación

Como muestra de ello tenemos el siguiente extracto

En la expresión $x+\frac{b}{2a}$; no se coloca porque, como he mencionado anteriormente la radicación es la operación inversa a la potenciación y podríamos así para eliminar el exponente 2 (cuadrado) de esta expresión, solo la transponemos directamente al segundo miembro.

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} = x+\frac{b}{2a}.$$

$$\sqrt{4a^2} = \sqrt{(2a)^2} = 2a.$$

Además, observamos que también consideran que, el número que está dentro del operador es positivo, por lo tanto, la raíz será positiva. Aquí volvemos a encontrar la concepción de los estudiantes que aun no tienen claro el hecho de que si el discriminante es negativo, la solución no existe en los reales.

> A LA EXPRESION $X+\frac{B}{2A}$ Y A LA EXPRESION 2A DEL DENOMINADOR ESTOS SON POSITIVOS Y AL SACARLES RAIZ CUADRADA RESULTA UN VALOR POSITIVO.
> A LA EXPRESION $\sqrt{B^2-4AC}$ SE QDA INDICADO POR Q= NO SE LE PUEDE SACAR RAIZ CUADRADA A UN NUMERO NEGATIVO TAL ES EL CASO DE
> -4

Concepción asociada: La radicación es la operación inversa de la potenciación

Conclusión: La costumbre escolar “la radicación es la inversa de la potenciación” es utilizada sin restricción

4.5.9. Pregunta 9: $\sqrt{(-2)^2} =$

Respuesta	*Grupo 1* Numero de alumnos de un total de 64	*Grupo 2* numero de alumnos de un total de 22	*Grupo 3* numero de alumnos de un total de 12
-2		**8**	**5**
2		**11**	**6**
±2		**3**	**1**

Esta pregunta no fue aplicada a los estudiantes del grupo 1

0

Respuesta	*Grupo 1*	*Grupo 2*	*Grupo 3*
-2		**47 %**	**53 %**
2		**50 %**	**50 %**
±2		**62**	**38**

En esta pregunta detectamos nuevamente el manejo del “teorema de facto”

La radicación es la operación inversa de la potenciación

Al observar el manejo que hacen los estudiantes de esta propiedad, como lo mostramos en el extracto

$$\sqrt{(-2)^2} = -2$$

También observamos que el estudiante primero realiza el cuadrado que se encuentra dentro de la raíz y después encuentra la raíz cuadrada (jerarquía de las operaciones) .Al realizar esto considera a la raíz principal (positiva)

$$\sqrt{(-2)^2} = 2 \quad \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Por último, una minoría maneja el significado de la raíz cuadrada en el plano algebraico considerando ambos signos, es decir, sus respuestas son del tipo ±2

Es de notarse que la definición correcta es la siguiente

$$\sqrt{\left(a^2\right)} = |a|$$

Concepción asociada: La radicación es la operación inversa de la potenciación

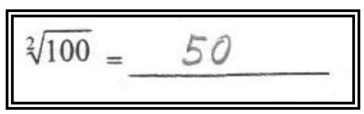
Conclusión: La costumbre escolar "la radicación es la inversa de la potenciación" es utilizada sin restricción. El estudiante maneja la solución en los planos algebraico y aritmético

4.5.10. Pregunta 10: $\sqrt[2]{100}$

Respuesta	*Grupo 1* *Numero de alumnos de un total de 64*	*Grupo 2* *numero de alumnos de un total de 22*	*Grupo 3* *numero de alumnos de un total de 12*
x = 50	**8**	**0**	**1**
x = 10	**63**	**22**	**11**

Respuesta	*Grupo 1*	*Grupo 2*	*Grupo 3*
x = 50	**60 %**	**0 %**	**40 %**
x = 10	**30 %**	**36 %**	**34 %**

Observamos que el estudiante concibe el significado del operador raíz cuadrada, como una división en donde el índice del radical indica que se tiene que encontrar la mitad del número dentro del operador.



Concepción asociada: $\sqrt[2]{a} = \frac{a}{2}$

Conclusión: Esta concepción no aparece en el grupo 2. La igualdad $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ no es manejada aún por los estudiantes.

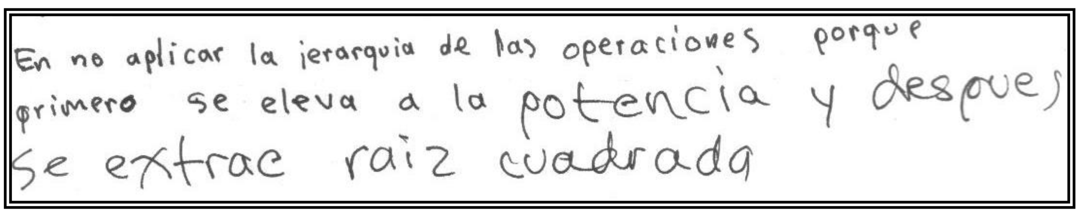
LAS SIGUIENTES 5 PREGUNTAS NO FUERON APLICADAS A LOS ESTUDIANTES DEL GRUPO 1

4.5.11.. Pregunta 11: Observa la siguiente secuencia

$$4 = 4$$
$$(-2)^2 = (2)^2$$
$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{(2)^2}$$
$$-2 = 2$$

Respuesta	*Grupo 2 numero de alumnos de un total de 22*	*Grupo 3 numero de alumnos de un total de 12*
Primero debe hacerse la operación dentro del paréntesis	**21**	**12**
no contestaron	**1**	**0**

En esta pregunta observamos que los estudiantes tienen perfectamente entendida la jerarquía de las operaciones, primero se resuelven las potencias y después las raíces.

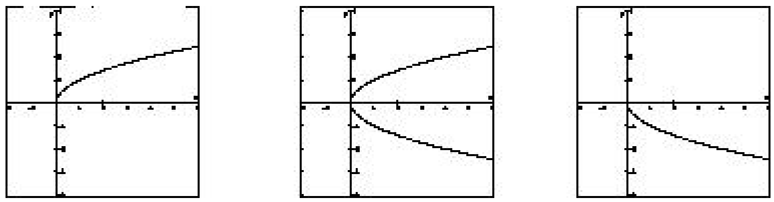

En no aplicar la jerarquia de las operaciones porque primero se eleva a la potencia y despues se extrae raiz cuadrada

Respuesta	*Grupo 2 numero de alumnos de un total de 22*	*Grupo 3 numero de alumnos de un total de 12*
Primero debe hacerse la operación dentro del paréntesis	**64 %**	**36 %**
no contestaron	**100 %**	**0 %**

Concepción asociada: Si $a = b$ entonces $\sqrt{a} = \sqrt{b}$

Conclusión: La costumbre escolar nos lleva a extender las propiedades de la igualdad y aplicar la propiedad radicalizadora de la igualdad Ningún estudiante detectó que el aplicar esta propiedad nos generaba la igualdad final, es decir, esta propiedad es manejada por todos los grupos.

4.5.12.. Pregunta 12: ¿Cuál de las graficas corresponde a la expresión $y^2 = x$?



A B C

Respuesta	Grupo 2 numero de alumnos de un total de 22	Grupo 3 numero de alumnos de un total de 12
A	**3**	**2**
B	**17**	**10**
Ninguna	**2**	**0**

Ningún estudiante respondió que era el inciso C. Suponemos que se debe a la definición de que la raíz cuadrada solo puede extraerse a números positivos y el estudiante asume que los valores de ésta también deben ser positivos.

Respuesta	*G r u p o 2*	*G r u p o 3*
A	**45 %**	**55 %**
B	**48 %**	**52 %**
Ninguna	**100 %**	**0 %**

Observamos que los estudiantes consideran en el mismo porcentaje tanto la pregunta A como la B, esto se debe a lo siguiente:

a) Despejan a *y* de tal forma que

$$y^2 = x$$
$$\sqrt{y^2} = \sqrt{x}$$

en donde la raíz que consideran es la principal (plano aritmético)

b) Despejan a *y* de tal forma que

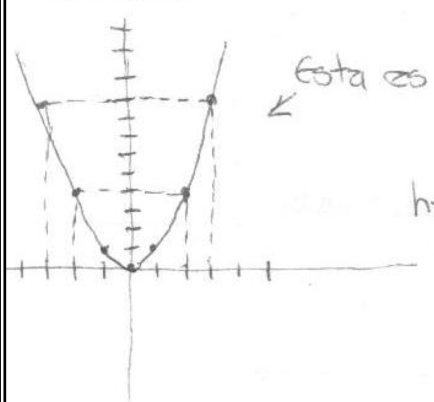
$$y^2 = x$$
$$\sqrt{y^2} = \pm\sqrt{x}$$

en donde la raíz tiene dos signos (plano algebraico)

Es la B, ya que al despejar $y^2=x \Rightarrow y=\pm\sqrt{x}$ y toma entonces valores positivos y negativos.

Las respuestas relativas a NINGUNA, se muestran extractos en el siguiente ejemplo:

NINGUNA



Esta es la grafica

¡Por q° todas se desplazan hacia el eje x a pesar de tener la forma parabolica pero las coordenadas no estan bien graficadas!

Concepción asociada: $\sqrt{a} = \pm b$

Conclusión: Notamos las siguientes concepciones

a) Aplicación de la propiedad radicalizadora de la igualdad

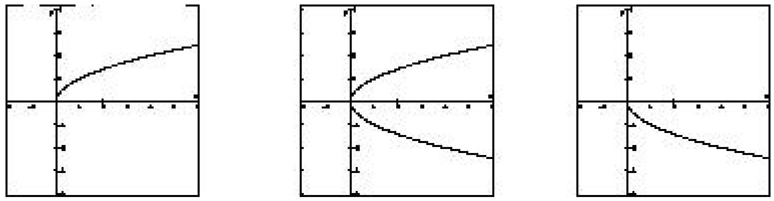
b) La radicación es la operación inversa de la potenciación

c) La raíz que se considera es la principal

d) La raíz tiene dos signos

Con esta pregunta detectamos que los estudiantes de ambos grupos no detectan que en este caso el manejo de la raíz se encuentra en el plano algebraico. Observamos más concepciones de las que suponíamos encontrar.

4.5.13.. Pregunta 13: ¿Cuál de las graficas corresponde a la expresión $y = \sqrt{x}$?



A B C

Respuesta	*Grupo 2* *numero de alumnos de un total de 22*	*Grupo 3* *numero de alumnos de un total de 12*
A	**18**	**8**
B	**3**	**4**
Ninguna	**1**	**0**

En esta pregunta únicamente los estudiantes fueron cuestionados acerca de la gráfica de la expresión, no de la función. Nuevamente observamos que la propuesta C no fue considerada por ningún estudiante.

Respuesta	*Grupo 2*	*Grupo 3*
A	**55 %**	**45 %**
B	**29 %**	**71 %**
Ninguna	**100 %**	**0 %**

Una cantidad considerable de estudiantes consideran, a pesar de que el operador no tenga ningún símbolo antepuesto, que la raíz cuadrada tiene dos signos, es por eso que la opción B tiene cabida.

En cuanto a la opción A como respuesta observamos las siguientes justificaciones

a) Se trata de la misma que la anterior

$y=\sqrt{x}$ equivalente afirmar, $y^2=x$, por lo tanto la grafica $y=\sqrt{x}$ es la B

b) Porque no hay raíces de números negativos. A pesar de que en las tres graficas los valores de x son positivos, los estudiantes consideran a la respuesta A como la correcta, pues suponemos que asumen que el valor de la variable y debe ser positivo.

como tenemos $y=\sqrt{x} \Rightarrow x$ deve ser ≥ 0 pues x no deve tomar valores negativos por que la raiz de un # negativo no esta definida en $\mathbb{R}$. ∴ La grafica que le corresponde es la (A).

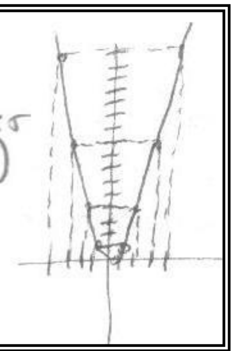
c) Cuando no tiene signo se trata de la positiva

Es la A, por que encaso contrario al anterior 13) este no contiene el ±; por lo cual solo toma los valores positivos. Y por ello es la primera grafica.

En la respuesta NINGUNA, se trata de los mismos estudiantes que consideraron que la grafica estaba mal trazada, ya que debería ser una parábola abriendo hacia el norte.

(Es la misma grafica q la anter Ejem.- $y=\sqrt{x} \Longleftrightarrow x=y^2$)

NINGUNA...



Concepción asociada: La radicación es la operación inversa de la potenciación

Conclusión: Además de la concepción que se buscaba reportar encontramos las concepciones

a) Si $x \geq 0$ la gráfica está definida en los reales, por lo tanto también debe ocurrir que $y \geq 0$

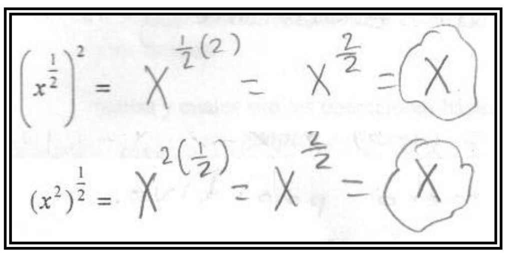
b) La propiedad radicalizadora de la igualdad

4.5.14.. Pregunta 14: $(x^{\frac{1}{2}})^2 =$ ________ $(x^2)^{\frac{1}{2}} =$ ________

Respuesta	*Grupo 2 numero de alumnos de un total de 22*	*Grupo 3 numero de alumnos de un total de 12*
$(x^{\frac{1}{2}})^2 = x \;\; y \;\; (x^2)^{\frac{1}{2}} = x$	**21**	**12**
$(x^{\frac{1}{2}})^2 = x \;\; y \;\; (x^2)^{\frac{1}{2}} = \lvert x \rvert$	**1**	**0**

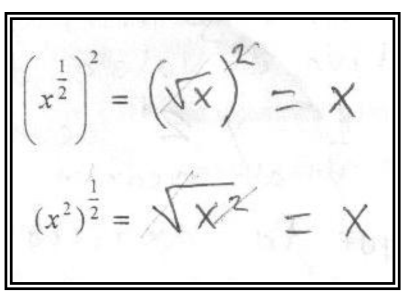
Respuesta	*Grupo 2*	*Grupo 3*
$(x^{\frac{1}{2}})^2 = x \;\; y \;\; (x^2)^{\frac{1}{2}} = x$	**49 %**	**51 %**
$(x^{\frac{1}{2}})^2 = x \;\; y \;\; (x^2)^{\frac{1}{2}} = \lvert x \rvert$	**100 %**	**0 %**

El estudiante recuerda y aplica correctamente las leyes de los exponentes.


$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{1}{2}(2)} = x^{\frac{2}{2}} = x$

$(x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{2(\frac{1}{2})} = x^{\frac{2}{2}} = x$

También pudimos observar estudiantes que no aplicaron leyes de exponentes, sino que, utilizaron la igualdad $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ y después la concepción de que la radicación es la operación inversa de la potenciación como se muestra en el siguiente extracto


$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (\sqrt{x})^2 = x$

$(x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2} = x$

Concepción asociada: Son válidas las leyes de los exponentes $\forall x \in \Re$

Conclusión: Los estudiantes utilizan un buen manejo algebraico de las leyes de los exponentes. Observamos que en éstas no se restringe el signo de la base. Además, observamos el manejo de la concepción de que la radicación es la operación inversa de la potenciación

4.6. Conclusiones de la aplicación de cuestionarios

De acuerdo a nuestras hipótesis en cuanto a las concepciones que debieron mostrarse en cada una de las preguntas notamos otras concepciones ligadas al concepto matemático raíz cuadrada que no habíamos contemplado, a saber:

- En la pregunta 11 ningún estudiante respondió que el error se debía a la aplicación de la propiedad radicalizadora de la igualdad

- En la pregunta 14, observamos las concepciones

    a) Si $x \geq 0$ la gráfica está definida en los reales, por lo tanto también debe ocurrir que $y \geq 0$

    b) La propiedad radicalizadora de la igualdad

- En la pregunta 13, detectamos las concepciones:

    a) Aplicación de la propiedad radicalizadora de la igualdad

    b) La radicación es la operación inversa de la potenciación

    c) La raíz que se considera es la principal

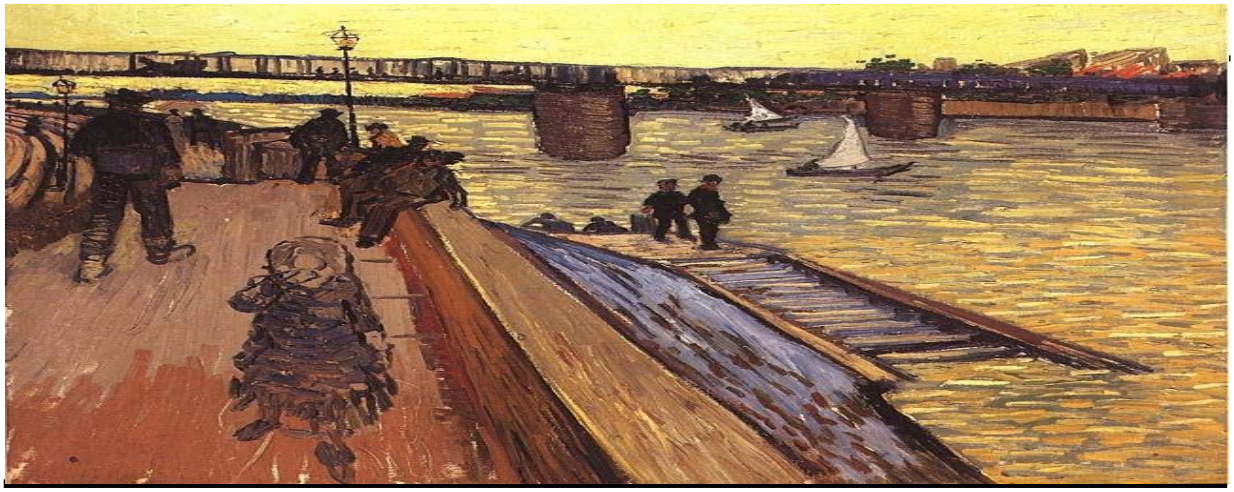
    d) La raíz tiene dos signos

- Nuestro análisis epistemológico nos muestra evidencia de la necesidad de introducir un algoritmo para el cálculo de raíces cuadradas. Chuquet nos muestra un método para resolver ecuaciones de segundo grado. El análisis didáctico muestra que existen diversos algoritmos para calcular raíces cuadradas, así como la fórmula general para encontrar soluciones de ecuaciones de segundo grado. El análisis cognitivo nos muestra los "métodos" que utilizan los estudiantes para hacer este tipo de cálculos. Tomando como antecedente estos hallazgos, tenemos lo siguiente:

- Chuquet, a pesar de aceptar y manejar números con signo ($\bar{m}R_{\lambda}^{2}12^{3}$ para indicar $-\sqrt{12x^3}$), no parece considerar el signo – para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática.
- Los libros de texto nos muestran que al calcular raíces cuadradas de números concretos, sólo se tomará la positiva (a la que se llamará raíz principal)
- Los estudiantes omiten el signo negativo de la raíz al considerar únicamente la raíz positiva para el cálculo de soluciones de una ecuación del tipo. $x^2 + a = 0$

- También nuestro análisis epistemológico nos muestra el hecho de que hasta antes Euler (1835/1738) a la raíz cuadrada le correspondía la misma gráfica que la del cuadrado; es decir, no había una notación especial para el operador raíz cuadrada, a pesar de la existencia de operadores algebraicos. Con Euler, "el manejo del operador raíz conlleva a la construcción de una convención matemática que toma la forma de una restricción que emana de la petición de que az sea una función uniforme de z (uniforme es que esa es univaluada)" (Martínez-Sierra, 2003). En nuestro análisis didáctico encontramos evidencia de cómo los libros de texto tratan por separado expresiones de la forma $y = \pm\sqrt{x+2}$ (Leithold, 1989) ó $y^2 = x$ (Swokowsky, 1989) El análisis cognitivo muestra los recursos del estudiante para la representación gráfica de expresiones del tipo $y^2 = x$. Tomando como antecedente estos hallazgos, tenemos lo siguiente:
  - Euler (1835/1738), en su Introducción al Análisis Infinitesimal: Capítulo VI: sugiere que al manejar funciones del tipo $y^2 = x$ se llegará a la existencia de dos valores y conviene en que esa función sea una función uniforme de z, es decir, que sea univaluada.

- Los libros de texto anticipan la segmentación de ecuaciones del tipo $y^2 = x$. El tratamiento de este tipo de expresiones será por separado $y = -\sqrt{x}$ y $y = \sqrt{x}$ representan dos funciones diferentes. En general, será considerada la expresión $y = \sqrt{x}$
- Los estudiantes muestran evidencia de que la grafica de una expresión $y^2 = x$ es la misma que la gráfica de la expresión $y = \sqrt{x}$.



Conclusiones

De acuerdo con las preguntas de investigación de este trabajo, a los análisis Epistemológico, Didáctico y Cognitivo realizados, y tomando en cuenta los resultados obtenidos de la aplicación de los cuestionarios aplicados a estudiantes de los grupos I, II y III, concluimos lo siguiente:

El principal hallazgo de este trabajo es la “Propiedad radicalizadora de la igualdad” que permanece en los estudiantes a lo largo de 9 años (desde la secundaria hasta el término de una carrera universitaria) la cual consiste en extender las propiedades de la igualdad

Sean a,b,c números reales entonces se cumple que si $a = b$

- $a + c = b + c$ propiedad de la igualdad con respecto a la suma
- $a - c = b - c$ propiedad de la igualdad con respecto a la resta
- $a\,c = b\,c$ propiedad de la igualdad con respecto a la multiplicación
- $\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \quad con \quad c \neq 0$ propiedad de la igualdad con respecto a la división

hasta

- $\sqrt[c]{a} = \sqrt[v]{b}$ propiedad radicalizadora de la igualdad

La permanencia de esta propiedad ocasiona que al ser aplicada en la secuencia

$$(-2)^2 = (2)^2$$

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{(2)^2}$$

se genere una contradicción

Resulta importante observar que la aplicación de esta propiedad funciona en casos como la obtención de la formula general para calcular raíces de ecuaciones de segundo grado, pues al aplicarla en la secuencia

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

Obtenemos

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Otras concepciones que permanecen son las siguientes

- La radicación es la operación inversa de la potenciación, la cual genera que se llegue a resultados del tipo

$$\boxed{\sqrt{(-2)^2} = -2}$$

Pero que funciona en el caso

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} = x+\frac{b}{2a}.$$

$$\sqrt{4a^2} = \sqrt{(2a)^2} = 2a.$$

Recordemos que para que la radicación sea la operación inversa de la potenciación debemos estar trabajando con números positivos.

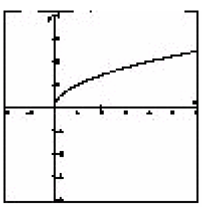
- La raíz cuadrada tiene dos valores, pero de signos contrarios, es decir, el operador $\sqrt{\ }$ genera dos resultados, pero en el contexto aritmético, únicamente se utiliza el valor positivo o raíz principal. Esta concepción genera respuestas como

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 = 4 \approx x = \sqrt{4} \\ \qquad\qquad\; x = 2 \end{array}}$$

cuando se pide al estudiante encontrar las soluciones de ecuaciones del tipo $x^2 + a = b$

- La combinación de las concepciones: la radicación es la operación inversa de la potenciación y la raíz cuadrada tiene dos valores, pero sólo se utilizará la positiva, llamada raíz aritmética o principal genera respuestas como

La gráfica de la expresión $y^2 = x$ es



porque

$$\boxed{\begin{array}{l} y^2 = x \\ \sqrt{y^2} = \sqrt{x} \end{array}}$$

- Nuestro análisis didáctico nos da elementos para afirmar que estas concepciones se generan por la disfuncionalidad escolar que presenta el operador $\sqrt{\ }$ en 2 contextos: aritmético y algebraico, a saber

  - Aritmético: el operador $\sqrt{\ }$ genera únicamente un resultado el cual, además, es positivo (raíz principal o aritmética)
  - Algebraico: el operador $\sqrt{\ }$ genera dos resultados, del mismo valor absoluto pero de signos contrarios

Nuestro análisis epistemológico muestra evidencia de la necesidad de introducir un algoritmo para el cálculo de raíces cuadradas. Chuquet nos muestra un método para resolver ecuaciones de segundo grado. El análisis didáctico muestra que existen diversos algoritmos para calcular raíces cuadradas, así como la fórmula general para encontrar soluciones de ecuaciones de segundo grado. El análisis cognitivo nos muestra los "métodos" que utilizan los estudiantes para hacer este tipo de cálculos. Tomando como antecedente estos hallazgos, tenemos lo siguiente:

- Chuquet, a pesar de aceptar y manejar números con signo ($\bar{m}R_{\lambda}^{2}12^{3}$ para indicar $-\sqrt{12x^3}$), no parece considerar el signo – para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática.
- Los libros de texto nos muestran que al calcular raíces cuadradas de números concretos, sólo se tomará la positiva (a la que se llamará raíz principal)
- Los estudiantes omiten el signo negativo de la raíz al considerar únicamente la raíz positiva para el cálculo de soluciones de una ecuación del tipo. $x^2 + a = 0$

También nuestro análisis epistemológico nos muestra el hecho de que hasta antes de Euler (1835/1738) a la raíz cuadrada le correspondía la misma gráfica que la del cuadrado; es decir, no había una notación especial para el operador raíz cuadrada, a pesar de la existencia de operadores algebraicos. Con Euler, "*el manejo del operador raíz conlleva a la construcción de una convención matemática que toma la forma de una restricción que emana de la petición de que a^z sea una función uniforme de z (uniforme es que es univaluada)*" (Martínez-Sierra, 2003). En nuestro análisis didáctico encontramos evidencia de cómo los libros de texto tratan por separado expresiones de la forma $y = \pm\sqrt{x+2}$ (Leithold, 1989) ó $y^2 = x$ (Swokowsky, 1989) El análisis cognitivo muestra los recursos del estudiante para la representación gráfica de expresiones del tipo $y^2 = x$. Tomando como antecedente estos hallazgos, tenemos lo siguiente:

- Euler (1835/1738), en su *Introducción al Análisis Infinitesimal*: Capítulo VI: sugiere que al manejar funciones del tipo $y^2 = x$ se llegará a la existencia de dos valores y *conviene*[19] en que esa función sea una función uniforme, es decir, que sea univaluada.
- Los libros de texto anticipan la segmentación de ecuaciones del tipo $y^2 = x$. El tratamiento de este tipo de expresiones será por separado: $y = -\sqrt{x}$ y $y = \sqrt{x}$ representan dos funciones diferentes. En general, será considerada la expresión $y = \sqrt{x}$
- Los estudiantes muestran evidencia de que la grafica de una expresión $y^2 = x$ es la misma que la gráfica de la expresión $y = \sqrt{x}$.

Finalmente concluimos que, el operador $\sqrt{\ }$ tiene diferentes significados cuando se aplica a números concretos (contexto aritmético), números generalizados (contexto algebraico) y variables (contexto funcional). Las disfunciones escolares en el manejo de este operador en el tránsito de contextos (aritmético, algebraico y funcional) generan fenómenos didácticos específicos.

[19] En el sentido de la convención matemática caracterizada por (Martínez-Sierra, 2003)

Recomendaciones para trabajos futuros

Mostrar mediante una investigación profunda, como es que la "*propiedad radicalizadora de la igualdad*", (principal hallazgo de este trabajo) se da en el Discurso Matemático Escolar

Investigar que concepciones tienen los estudiantes sobre el operador raíz cuadrada en el tránsito de un contexto algebraico a un contexto funcional.

El algoritmo tradicional o "*método de la casita*" es el procedimiento mas usual para el cálculo de raíces cuadradas ¿Por qué es que funciona? ¿Dónde surgió? ¿Qué necesidades había para establecerlo?

Tomar como base este trabajo para investigar cómo es que los estudiantes grafican expresiones que involucran raíces cuadradas, en particular, $y = \sqrt{-x}$ y $y = -\sqrt{x}$ ¿Qué concepciones se asocian al tratamiento de ellas?

Si el operador raíz cuadrada en el contexto funcional acarrea dificultades especificas (pues expresiones del tipo $y = \pm\sqrt{x}$ no representan funciones, pero por separado, $y = \sqrt{x}$ o $y = -\sqrt{x}$ si las representan) ¿Qué necesidad había de introducir a la raíz cuadrada al conjunto de funciones hasta ese momento existentes?

Bibliografía

Baldor, A. (1978). *Álgebra*. España, Ediciones y distribuciones Códice.

Baldor, A. (1990). *Aritmética*. España, Ediciones y distribuciones Códice

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"*. 42, 353-369.

Confrey, J. y Dennis, D. (2000). La Creación de Exponentes Continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(1), 5-31.

Confrey, J. y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics 26*, 135-164.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education 26*(1) 66-86.

Dolores C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (coordinador). *El futuro del cálculo infinitesimal*. (Capítulo V, pp. 155-181). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Euclides (1996). *Euclid´s elements*. Versión electrónica por D.E. Joyce (Clark University) disponible en http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements.

Euclides (2002). *Los elementos de Euclides*. Versión electrónica disponible en http://www.xtec.es/~jdomen28/indiceeuclides.htm#libroVII.

Euler, L. (1835/1738). *Introduction a l'analyse infinitésimale.*París, Francia: L'Ecole Polytechnique (Trabajo original publicado en 1738).

Farfán, R., Albert, A. y Arrieta, J. (2000a). *Resolución gráfica de desigualdades*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M.; Martínez-Sierra, G. y Ferrari, M. (2000b). Lenguaje Algebraico y pensamiento funcional. Un estudio de las funciones pretextando la resolución de desigualdades (Cap. 7, pp. 89-145). En R. Cantoral, F. Cordero, R. Farfán, et al. (2000). *Desarrollo de Pensamiento Matemático*. ITESM- Universidad Virtual. México: Editorial Trillas.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. XVII.* (pp. 145 -149).

Granville, W. (2004). *Calculo. diferencial e integral*. México. Editorial Limusa

Harel, G. y Dubinsky, E. (1992). *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy*. EEUU: MAA, Notes 25

Lehmann, C. (1974). *Geometría Analítica*. México: Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana

Lehmann, C. (2001). *Álgebra*. México: Editorial Limusa

Leithold, L. (1989). *Matemáticas previas al Cálculo. Análisis Funcional y Geometría Analítica*. México: Editorial Harla

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproduciblidad: El caso de la función exponencial*, Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado, no publicada. DME-Cinvestav-IPN, México.

Lorenzo, D. (2005). *Sobre la vida escolar del concepto raíz cuadrada en la escuela básica (secundaria)*. Tesis de licenciatura, no publicada. Unidad Académica de Matemáticas, UAG, México

Mahoney, M. S. (1973). *The mathematical carrer of Pierre Fermat 1601-1665*.

Martínez-Sierra, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(1) 45-78.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN. CICATA-IPN. México.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN. CICATA-IPN. México.

Meavilla, V. (1993). Una aproximación al "Libro primero de arithmetica algebratica" de Marco Aurel. En T. Rojano y L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991*. (pp. 65-95). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Paradís, J. (1993). La triparty en la Science des Nombres de Nicolas Cehuquet. En T. Rojano y L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.* (pp. 31-63). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia – PNFAMP-México.

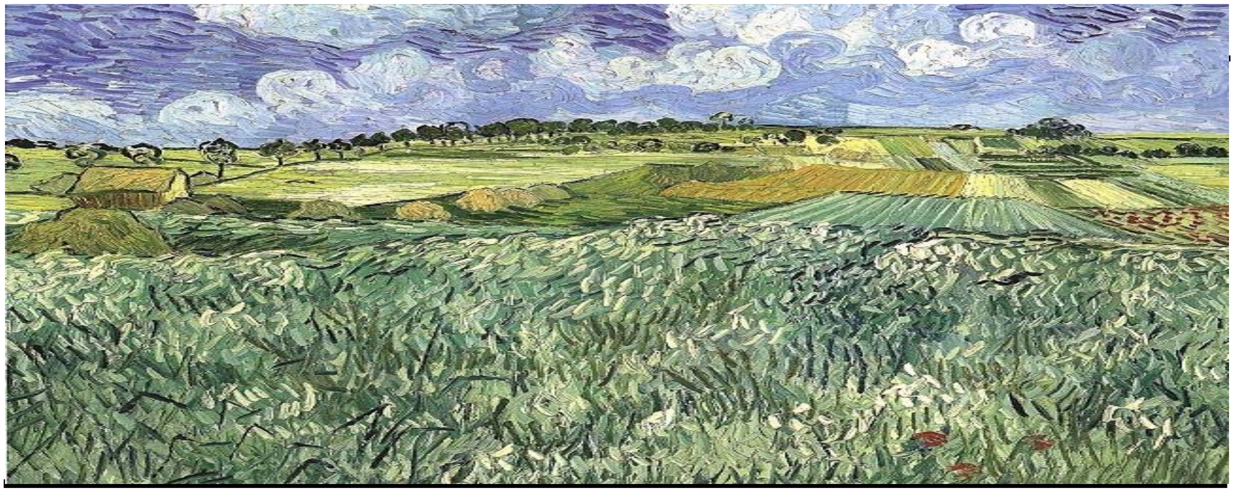
Rojas P., Rodríguez, J., Romero, J., Mora, L., Castillo, E., (1997). La variable matemática como problema puntual. En *La transición Aritmética al Álgebra (Capítulo 39, pp. 30-66).* Colombia: COLCIENCIAS y Universidad Distrital Francisco José Caldas (Santa Fe de Bogotá).

Struik, D. J. (1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. EEUU: Princeton University Press.

Swokowski, E. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamerica

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. *Educación matemática. 8*(2), 33-40.

Wentworth, J. y Smith, D. (1985). *Álgebra*. México: Editorial Porrúa.



Anexos

Programas de estudio de Matemáticas de Educación Básica Secundaria

Programas de estudio de la Licenciatura en Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero

Cuestionario aplicado a estudiantes

Educación básica

Secundaria

Matemáticas. Programas

Primer grado

Temas de aritmética
Los números naturales y sus operaciones
Lectura y escritura de números naturales
- Orden y comparación
- Ubicación en la recta numérica
Operaciones con naturales
- Problemas y aplicaciones diversas
- Práctica del cálculo mental y la estimación de resultados
- Revisión de los algoritmos, verificaciones
Múltiplos y divisores de un número
- Criterios de divisibilidad usuales (entre 2, 3, 5 y 9)
- Escritura de un número terminado en "ceros" como el producto de un natural por 10, 100, 1000...
Cuadrados y cubos de números
- Cuadrados perfectos y raíz cuadrada

- Uso de una tabla de cuadrados y de la calculadora para obtener la parte entera de la raíz cuadrada de un número
Problemas variados de conteo
- Uso de diagramas de árbol
- Arreglos rectangulares (cartesianos)

Sistemas de numeración
Ejemplos para ilustrar:
- La evolución de los sistemas de numeración: sistemas egipcio, romano, maya, etcétera; su razón de ser y los principios en los que se basaban
- La escritura de números en sistemas posiciónales con base distinta de diez (por ejemplo, escritura de los primeros números naturales con base de dos)

Los decimales y sus operaciones
Revisión de la noción de número decimal
- Uso en la medición y otros contextos familiares
- Lectura y escritura, orden y comparación
- Ubicación en la recta numérica

Fracciones decimales: escritura en forma de fracción de un decimal finito y, recíprocamente, escritura decimal de fracciones decimales
Operaciones con decimales
- Problemas y aplicaciones diversas
- Práctica del cálculo mental y la estimación de resultados
- Revisión de los algoritmos, verificaciones

Cálculos con números truncados y redondeados para aproximar o estimar un resultado o para controlar el resultado obtenido en una calculadora

Fracciones
Revisión de la noción de fracción, sus usos y significados en diversos contextos
Paso de fracciones a decimales, aproximaciones decimales al valor de una fracción
Fracciones reducibles e irreducibles
- Simplificación de fracciones
- Conversión de dos fracciones a un común denominador

Comparación de fracciones previa reducción a un común denominador o realizando la división a mano o con calculadora
Suma y resta de dos fracciones

Proporcionalidad
Ejemplos para introducir la noción de razón entre dos cantidades y su expresión por medio de un cociente
Cálculos con porcentajes y sus aplicaciones en la vida cotidiana
- Por ejemplo, cálculo del 10%, 15%, 25% etcétera, de una cantidad
- Elaboración de tablas de aumentos y descuentos en un porcentaje dado (multiplicación por un factor constante en la calculadora)

Tablas de números o cantidades que varían proporcionalmente
- Ejemplos diversos
- Constante o factor de proporcionalidad

Problemas de variación proporcional directa

Números con signo
Ejemplos para introducir los números con signo
- Ubicación en la recta numérica
- Simétrico y valor absoluto de un número
- Orden en la recta numérica

Suma y resta de números con signo. Uso de la calculadora (teclas +/-, M+ y M-)

Preálgebra
Jerarquía de operaciones y uso de paréntesis en la aritmética
Iniciación al uso de literales
- Fórmulas de geometría; problemas que llevan a la escritura de expresiones algebráicas sencillas
- Primeras reglas de la escritura algebráica (por ejemplo, 2a en lugar de a + a o 2 ´ a; ab en lugar de a ´ b; a^2 en

lugar de a *a o aa)
- Construcción de tablas de valores a partir de fórmulas o expresiones algebraicas

Operaciones asociadas: suma y resta; multiplicación y división. Ecuaciones de un paso del tipo:
237.45 + ... = 513.25
809.60 - ... = 579.85
45 x ... = 325.5

Temas de geometría

Dibujo y trazos geométricos

Uso de la regla graduada, el compás y las escuadras
- Reproducción y trazado de figuras, diseños y patrones geométricos
- Familiarización con los trazos y el vocabulario básico de la geometría

Trazado y construcción de las figuras básicas, de perpendiculares y paralelas

Uso del transportador en la medición de ángulos y para la reproducción y trazado de figuras

Simetría axial

Observación, enunciado y aplicación de las propiedades de simetría axial de una figura a partir de situaciones que favorezcan las manipulaciones, el dibujo y la medición
- Determinación y trazado de los ejes de simetría de una figura, en particular, de las figuras usuales
- Aplicaciones a la solución de problemas y en la construcción y trazado de mediatrices y bisectrices

Medición y cálculo de áreas y perímetros

Revisión y enriquecimiento de las nociones de área y perímetro y sus propiedades

Determinación del área de figuras dibujadas sobre papel cuadriculado o milimétrico

Unidades para medir longitudes y distancias, áreas y superficies

Cálculo de áreas de cuadrados, rectángulos, triángulos rectángulos y de figuras compuestas por las anteriores

Conocimiento y aplicación de las fórmulas para calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo

Uso de una tabla de fórmulas para calcular el área de otras figuras usuales

Sólidos

Familiarización con los sólidos comunes a través de actividades que favorezcan:
- La construcción y manipulación de modelos de sólidos
- La observación de las similaridades y diferencias existentes entre los diferentes tipos de sólidos
- La comprensión y uso adecuado de los términos y el lenguaje utilizado para describir los sólidos comunes
- La observación y enunciado de las características de los poliedros (forma de las caras; número de caras, vértices y aristas)

Desarrollo, armado y representación plana de cubos, paralelepípedos rectos y sólidos formados por la combinación de los anteriores

Revisión y enriquecimiento de las nociones de volumen y capacidad y sus propiedades. Unidades para medir volúmenes y capacidades

Cálculo de volúmenes y superficies laterales de cubos y paralelepípedos rectos

Presentación y tratamiento de la información

Lectura y elaboración de tablas y gráficas:
- Construidas a partir de un enunciado, de situaciones extraídas de la geometría (por ejemplo, variación del área de un cuadrado al cambiar las longitudes de sus lados), de la física, de datos recolectados por los alumnos
- De uso común en la estadística, la economía, las diversas ciencias y en la vida cotidiana
- Uso del papel milimétrico en la elaboración de tablas y gráficas

Utilización de una tabla o de una gráfica para explorar si dos cantidades varían proporcionalmente o no

Ejemplos para ilustrar el uso de razones y porcentajes en la presentación de información

Probabilidad

Actividades y problemas que favorezcan:
- El registro y tratamiento, en situaciones sencillas, de los resultados de un mismo experimento aleatorio que se repite varias veces
- La exploración y enumeración de los posibles resultados de una experiencia aleatoria
- La estimación y comparación de probabilidades en situaciones diversas, en forma empírica o teórica
- La familiarización con algunas de las situaciones ideales de la probabilidad: volados, lanzamientos de dados, rifas, ruletas, extracciones de una urna, etcétera

- La apropiación gradual del vocabulario empleado en la probabilidad: resultados posibles, casos favorables, etcétera

Uso de diagramas de árbol y arreglos rectangulares en la enumeración de los posibles resultados de una experiencia aleatoria (resultados de dos o tres volados consecutivos, lanzamiento de dos dados, etcétera)

Expresión de la probabilidad de un evento como una fracción, un decimal y un porcentaje

Segundo Grado

Temas de aritmética

Números naturales y decimales

Verificación del grado de adquisición de las operaciones con números naturales, decimales y sus algoritmos.

Práctica del cálculo mental y la estimación de resultados

Potencias sucesivas de un número, ejercicios y aplicaciones diversas

Potencias de 10 y notación científica o exponencial, su uso en la calculadora y en las ciencias

Orden de magnitud de un número y de un resultado; ejemplos para ilustrar el uso de unidades microscópicas y astronómicas

Conteo

Problemas variados de conteo, en particular, aplicaciones de las reglas de la suma y el producto

Números primos y compuestos

Números primos y compuestos

- Elaboración de tablas de números primos
- Factorización en primos de un número y sus aplicaciones (enumeración de los divisores de un número, cálculo del m.c.d. y m.c.m. de dos o más números...)

Fracciones

Revisión de suma y resta de fracciones

- Sumas de más de dos fracciones
- Sumas y restas combinadas

Equivalencia y orden en las fracciones; criterio de la razón cruzada para saber si dos fracciones son equivalentes o no

Situaciones asociadas a la multiplicación de fracciones

- Algoritmo de la multiplicación
- Recíproco de una fracción y división de fracciones

Números con signo

Revisión de suma y resta de números con signo

Multiplicación y división de números con signo. Las reglas de los signos

Álgebra

Iniciación al lenguaje algebraico

Introducción y uso de la incógnita en la traducción al lenguaje algebraico de problemas que conducen a ecuaciones sencillas

Primeras reglas para simplificar la escritura y operar con expresiones algebráicas (por ejemplo, 3a en lugar de a + a + a o 3 x a; a2 en lugar de a x a o aa; 3x + 2x = 5x,...)

Ejemplos para introducir y practicar el uso de paréntesis en el álgebra

Ecuaciones lineales o de primer grado

Métodos de solución de ecuaciones de las formas $a + x = b$, $ax = b$, $ax + b = c$ y de otras ecuaciones que pueden llevarse a esta forma; en particular ecuaciones de las formas $ax + b = cx + d$, $ax + bx + c = dx + ex + f$ y casos sencillos de ecuaciones con paréntesis

El plano cartesiano

Coordenadas de un punto: ejercicios de localización de puntos y otras actividades en el plano cartesiano

Representación en el plano cartesiano de regiones y conjuntos de puntos que satisfacen condiciones algebráicas sencillas, por ejemplo:

Semiplanos: $x > 2$, $y < -3$, $x < y$, $y > 2x$,...

Franjas: $2 < x < 5$, $-4 < y < 0$,...

Rectas: $x = -5$, $y = 3$, $x = y$, $x + y = 10$,...
Sistemas de ecuaciones lineales
Problemas que conducen a sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su solución por el método de sustitución
Operaciones con monomios y polinomios
Ejemplos para ilustrar los diferentes tipos de expresiones algebráicas. Familiarización con los términos y con el lenguaje utilizado en la descripción de monomios y polinomios
Evaluación de polinomios en una variable
- Uso de la calculadora para construir tablas de valores de polinomios sencillos
- Ejemplos de gráficas de polinomios lineales y cuadráticos

Propiedades de las operaciones y su aplicación al simplificar u operar con expresiones algebráicas
- Reducción de los factores con una base común en un monomio
- Simplificación de términos semejantes en un polinomio

Operaciones con monomios y polinomios: suma y resta; primeros ejemplos y ejercicios de multiplicación
Temas de geometría
Figuras básicas y trazos geométricos
Reproducción y trazado de figuras geométricas que satisfacen condiciones dadas. Ejecución y descripción de los pasos de una construcción geométrica
Aplicación de las propiedades de las figuras básicas en la solución de problemas y los trazos geométricos.
Primeras exploraciones sobre el círculo
Práctica del dibujo a escala
- Observación del efecto de una reducción o ampliación a escala sobre las dimensiones lineales, el área y el volumen de una figura o cuerpo geométrico
- Invariancia de los ángulos

Simetrías axial y central
Simetría axial: reflexión respecto a una recta de un punto, de una figura
Simetría central: reflexión respecto a un punto de una figura y centro de simetría de una figura
Observación y enunciado de las propiedades de las simetrías axial y central: conservación de la colinealidad, las distancias y los ángulos
Aplicaciones a la exploración de las propiedades de las figuras básicas y la solución de problemas
Actividades para observar el resultado de componer dos reflexiones respecto a una recta
Ángulos entre paralelas y una secante
Rectas paralelas y secantes. Igualdad de los ángulos opuestos por el vértice
Posiciones relativas de tres rectas en el plano: ángulos entre paralelas y una secante (igualdad de los ángulos correspondientes, de los ángulos alternos internos y de los alternos externos)
Suma de los ángulos interiores de un triángulo, de un cuadrilátero y de un polígono convexo en general; recubrimiento del plano por polígonos regulares
Equivalencia de figuras y cálculo de áreas
Equivalencia de figuras
- Justificación de las fórmulas para calcular el área de paralelogramos, triángulos, trapecios y polígonos regulares
- Demostración(es) del teorema de Pitágoras por descomposición y equivalencia de áreas
- Ejercicios y problemas de aplicación

Sólidos
Desarrollo, armado y representación plana de prismas y cilindros rectos
Conocimiento y aplicación de las fórmulas para calcular el volumen de prismas y cilindros rectos. Uso de una tabla de fórmulas para calcular volúmenes y superficies de otros sólidos comunes
Estudio de las figuras (secciones planas) que se forman al cortar un cubo o un paralelepípedo recto por un plano (casos sencillos)
Presentación y tratamiento de la información
Organización y presentación de datos
- Tablas y gráficas de frecuencias absolutas y relativas, incluidos ejemplos de datos agrupados
- Tablas y gráficas de datos que varían con el tiempo, con ejemplos de interpolación gráfica
- Pictogramas, diagramas de barras y bastones, diagramas de sectores y otras gráficas de uso común en la

estadística
Cálculo y determinación de tantos por ciento, por mil y partes en millón. Su empleo en la construcción de tablas y gráficas comparativas y en la elaboración de ciertos índices o indicadores
Cálculo de promedios y densidades, sus usos y limitaciones
Ejemplos para introducir la noción de función como una relación entre dos cantidades:
- Descripción de fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas por medio de una tabla, una gráfica o una fórmula
- Paso, en casos sencillos, de una tabla o una gráfica a una fórmula (funciones de las formas y = mx, y = mx+b, xy = k)

Probabilidad
Noción frecuencial de la probabilidad
- Registro y tratamiento de los resultados de experimentos aleatorios
- Ejemplos para ilustrar el uso de la noción frecuencial de la probabilidad
- Valores de la probabilidad y su significado usual

Experiencias aleatorias y fórmula clásica
- Ejemplos de experiencias aleatorias con resultados equiprobables y no equiprobables; ejemplos de experiencias repetidas
- Uso de diagramas de árbol en la enumeración y descripción de los posibles resultados de una experiencia aleatoria
- Aplicaciones de la fórmula clásica de la probabilidad
- Elaboración de tablas y gráficas de probabilidades

Problemas sencillos que pueden resolverse por simulación
Primeros cálculos con probabilidades
- Probabilidad de que un evento no ocurra
- Aplicaciones elementales de la regla de la suma

Tercer grado

Temas de aritmética
Raíz cuadrada y cálculos aproximados
Cálculo de la raíz cuadrada por diversos métodos
Errores de aproximación
- Componentes de un cálculo; fuentes de error en un cálculo (errores en los datos o de entrada, errores introducidos por el procedimiento y errores de salida). Ejemplos
- Estimación y acotación de errores, casos sencillos

Álgebra
Plano cartesiano y funciones
Ejemplos para revisar la noción de función:
- Funciones dadas por fórmulas, por tablas, por gráficas, por las teclas de la calculadora
- Funciones extraídas de la geometría, la física, la economía, etcétera

Ejercicios de graficación de funciones; estudio en casos sencillos del comportamiento local de una función, por ejemplo:
y = alrededor de x = 0
y = x2 + a alrededor de x = 0 con a = 1, o a = 2, o...
y = (x - a)2 alrededor de x = a con a= 5, o a = 9, o...
Estudio de familias de gráficas de la forma y = mx + b, por ejemplo:
y = mx + 1, para m = -3, m = -2, m = -1...
y = 1/2 x + b, para b = -4, b = -3, b = -2...
Representación en el plano cartesiano de conjuntos de puntos y regiones que satisfacen ecuaciones y desigualdades lineales en dos variables (casos sencillos)

Operaciones con expresiones algebráicas
Monomios y polinomios

- Leyes de los exponentes y su verificación en algunos casos particulares
- Revisión de la suma, la resta y la multiplicación de polinomios

Fracciones algebráicas

- Revisión y expresión simbólica de las operaciones con fracciones comunes
- Operaciones con fracciones algebráicas: simplificación; multiplicación y división; suma y resta

Ejercicios de despeje y de sustitución algebráica (por ejemplo si u = x + 5 y v = 2u - 3, expresar v en términos de x)

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales

Profundización en el estudio de las ecuaciones lineales

- Ecuaciones con paréntesis
- Ecuaciones

+ a)2 = x2 + 2ax + a2

(x - a)2 = x2 - 2ax + a2

(x + a)(x - a) = x2 - a2

(x + a)(x + b) = x2 + (a+b)x + ab

y sus aplicaciones al cálculo numérico y a la factorización de polinomios de segundo grado

Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas

Solución de ecuaciones incompletas (ax2 + c = 0, ax2 + bx = 0); de ecuaciones completas por factorización y completando cuadrados

Fórmula general, discriminante y número de soluciones de una ecuación cuadrática

Geometría

Triángulos y cuadriláteros

Observación de los elementos que determinan una figura geométrica, en particular, criterios de igualdad o congruencia de triángulos (LLL, LAL y ALA)

Aplicación de los criterios de congruencia en la justificación de construcciones geométricas y algunas de las propiedades de los triángulos y los paralelogramos

Círculo

Nociones básicas

- Rectas y segmentos en el círculo
- Posiciones relativas de un círculo y una recta: rectas secantes, tangentes y exteriores a un círculo
- Perpendicularidad del radio y la tangente de un círculo

Ángulos central e inscrito en una circunferencia, en particular, ángulo inscrito en una semicircunferencia (ángulo semiinscrito)

Construcciones con regla y compás: por ejemplo, del círculo que pasa por tres puntos; del centro de un círculo o arco de círculo; de la tangente por un punto sobre, o exterior a, un círculo...

Semejanza

Teorema de Tales en el triángulo y su recíproco; criterios de semejanza de triángulos

Aplicaciones al cálculo de distancias inaccesibles y en construcciones con regla y compás (división de un segmento en n partes iguales, en una razón dada, construcción de la cuarta y la media proporcional, etcétera)

Aplicaciones de la semejanza al estudio de las homotecias y aplicaciones de las homotecias al dibujo a escala

Efecto de una reducción o ampliación a escala sobre las magnitudes lineales, el área y el volumen de una figura o sólido geométrico. Invariancia de los ángulos

El teorema de Pitágoras

Demostración del teorema de Pitágoras por diversos métodos

Aplicaciones al cálculo de longitudes y distancias; por ejemplo, cálculo de la hipotenusa o de uno de los catetos de un triángulo rectángulo, distancia entre dos puntos del plano cartesiano, etcétera (para otras aplicaciones véase el tema de "Sólidos").

Sólidos

Utilización de la representación plana de cubos y paralelepípedos como auxiliar en el dibujo de otros cuerpos espaciales. Por ejemplo:

Desarrollo, armado y representación plana de pirámides y conos

Observación y estudio (casos sencillos) de las secciones que se forman al cortar un prisma o una pirámide recta por una familia de planos paralelos

Conocimiento y aplicación de las fórmulas para calcular el volumen de pirámides, conos y esferas y la

superficie de la esfera
Cálculo de la diagonal de cubos y paralelepípedos; de la altura, la arista o el apotema de pirámides rectas y conos de revolución
Elementos de trigonometría
Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno y tangente
Valores del seno, el coseno y la tangente para los ángulos de 30o, 45o y 60o. Uso de tablas (ejercicios de interpolación) y calculadora para los otros ángulos agudos
Resolución de triángulos rectángulos y su aplicación a la solución de problemas: cálculo de distancias inaccesibles; del lado y la apotema de polígonos regulares; etcétera
Presentación y tratamiento de la información
Tasas, sus usos y aplicaciones
- Estudio de fenómenos que varían a tasa constante (ejemplos de proyección a futuro)
- Crecimiento aritmético vs crecimiento exponencial o geométrico

Descripción de una lista de datos
- Moda, media (promedio) y mediana; usos y limitaciones
- Formas de indicar la dispersión de los datos de una lista, ejemplos ilustrativos (casos sencillos)

Nociones de población y muestra; de censo y encuesta (ejemplos de proyección a toda la población de los resultados observados en una muestra). Ejemplos de estudios estadísticos
Probabilidad
Nociones de la probabilidad
- Enriquecimiento y explotación de la noción frecuencial en la solución de problemas de probabilidad
- Aplicaciones diversas de la fórmula clásica de la probabilidad

Cálculos con probabilidades
- Probabilidad de que un evento no ocurra; de que ocurra uno de dos eventos; aplicabilidad del principio de la suma
- Uso de diagramas de árbol en la enumeración y descripción de los posibles resultados de un experimento aleatorio. Probabilidades de transición y regla del producto. Aplicaciones

Solución de problemas por simulación; esquema de urnas de Bernoulli

Contenidos programáticos de las asignaturas para el Área de formación básica de la Licenciatura en Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero.

Cálculo diferencial e integral I

Sistema de conocimientos

Conjuntos numéricos. El conjunto de los números reales. Representación decimal de números reales. Acotación de conjuntos de números reales. Puntos de acumulación de conjuntos de números reales.

Sucesiones numéricas. Sucesiones convergentes y divergentes. Sucesiones monótonas. Propiedades de las sucesiones convergentes. Relación entre punto de acumulación y límite de sucesiones. Subsucesiones. Criterio de Bolzano-Cauchy. Series numéricas. Suma de una serie. Series convergentes y divergentes. Propiedades de las series convergentes.

Funciones reales de variable real. Función inversa y función compuesta. Funciones elementales. Límite de funciones. Continuidad de una función. Propiedades del límite de una función y de las funciones continuas. Clasificación de las discontinuidades. Propiedades de las funciones continuas en un punto y en un intervalo.

Cálculo diferencial e integral II

Sistema de conocimientos

Derivada y diferencial de una función en un punto. Funciones derivables. Derivadas de orden superior. Teoremas básicos del cálculo diferencial. Fórmula de Taylor. Extremos relativos y absolutos de una función. Resolución de indeterminaciones. Análisis del crecimiento y de la convexidad de una función. Asíntotas a una curva. Determinación de asíntotas al gráfico de una función real de variable real.

Primitiva e integral indefinida. Métodos de integración por partes y cambio de variable. Integral según Riemann. Interpretación geométrica y física. Condición necesaria y suficiente de integrabilidad. Clases de funciones integrales Propiedades de la integral definida. Cálculo de una integral definida mediante una primitiva de la función. Algoritmos de cálculo aproximado de la integral. Aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes y a la determinación de algunas magnitudes físicas.

Integral de una función en intervalos no acotados. Integral de funciones no acotadas.

Cálculo diferencial e integral III

Sistema de conocimientos

R^n como espacio métrico y como espacio normado. Distancias usuales. Bolas. Conjuntos abiertos y cerrados. Límite de una sucesión en R^n y de una función cuyo dominio sea un subconjunto de R^n. Conjuntos conexos, arco conexos y compactos en R^n. Propiedades de las funciones continuas sobre conjuntos conexos, arco conexos y compactos de R^n.

Derivadas parciales y direccionales de funciones de varias variables. Interpretación geométrica. Diferencial de funciones entre espacios R^n. Condición suficiente de diferenciabilidad. Diferencial de la función compuesta. Derivadas de orden superior. Fórmula de Taylor. Extremos absolutos y relativos de funciones de varias variables. Condición necesaria y condición suficiente de extremo. Teorema sobre la determinación local de una función implícita mediante una o varias ecuaciones funcionales. Teorema sobre la inversa de una función entre subconjuntos de R^n. Extremos condicionados. Método de los multiplicadores de Lagrange.

Integral de una función acotada sobre un conjunto con frontera de contenido cero. Propiedades. Condiciones necesarias de integrabilidad. Reducción a integrales iteradas. Cambio de variables. Coordenadas polares. Coordenadas cilíndricas y esféricas. Curvas en R^n. Longitud de arco. Integrales de línea de 1ro. y 2do. tipos. Teorema de Green. Aplicaciones de la integral de línea. Condiciones para la independencia de la trayectoria. Relación con los diferenciales exactos.

Superficies paramétricas en R^n. Superficies orientables. Área de una superficie. Integrales de superficie de 1er. y 2do. tipos. Teoremas de Stokes y Ostrogradaki. Aplicaciones de las integrales de superficies. Campos escalares y vectoriales. Divergencia. Rotacional. Interpretaciones físicas.

Cálculo diferencial e integral IV

Sistema de conocimientos

Series numéricas. Convergencia de series numéricos. Criterios de convergencia. Vinculación entre las series numéricas y las integrales impropias.

Análisis de la convergencia uniforme de sucesiones y series de funciones. Determinación de la posibilidad de derivar o integrar término a término. Uso de estas propiedades en la solución de problemas sencillos. Determinación del radio de convergencia de una serie de potencias. Desarrollo en serie de potencias de una función. Aplicación de los desarrollos en serie para diversos cálculos aproximados.

Determinación de la convergencia uniforme de integrales impropias paramétricas. Análisis de las propiedades de funciones definidas por integrales paramétricas propias e impropias. Aplicación al cálculo de integrales y al estudio de algunas funciones especiales.

Obtención del desarrollo de Fourier de una función periódica respecto al sistema trigonométrico. Desarrollo de funciones definidas en intervalos finitos. Determinación de la convergencia de los desarrollos a la función. Integral y transformada de Fourier.

Cuestionario aplicado a estudiantes de los grupos I, II y III

Universidad Autónoma de Guerrero
Facultad de matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero
Ciudad Universitaria C.P. 39087 Chilpancingo, Gro**.**

Nombre: ____

1) *¿Cuántas y cuales son las operaciones básicas de la aritmética?*

2) *¿Por qué se llaman básicas?*

3) *¿Qué significa para ti encontrar la raíz cuadrada de un número?*

4) $\sqrt{81} =$ __________

5) *Resuelve la ecuación* $x^2 = 4$

6) *Resuelve la ecuación* $4x^2 + 20x + 24 = 0$ *por el método que tu quieras*

La formula general para la solución de ecuaciones de segundo grado se deduce de la siguiente manera:

La formula general de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$

Dividiendo entre ***a*** *ambos miembros de la ecuación* $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Completando un trinomio cuadrado perfecto $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$

Factorizando y despejando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

Sacando raíz cuadrada tenemos $\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

7) *¿Cómo explicas el signo ± antes de la expresión* $\sqrt{b^2 - 4ac}$ *?*

8) *¿Por qué crees que a la expresión* $x + \frac{b}{a}$ *y a la expresión 2 a del denominador no se les coloca el signo ± al sacarles la raíz cuadrada y en la expresión* $\sqrt{b^2 - 4ac}$ *se queda indicado?*

9) Contesta lo que se te pide

$\sqrt{(5)^2} =$ ____________	$\left(\sqrt{25}\right)^2 =$ ______________
$\sqrt{(8)^2} =$ ____________	$\left(\sqrt{81}\right)^2 =$ ______________
$\sqrt{(-2)^2} =$ ___________	$\left(\sqrt{-4}\right)^2 =$ ______________
$\sqrt{(x)^2} =$ ____________	$\left(\sqrt{x}\right)^2 =$ ________________

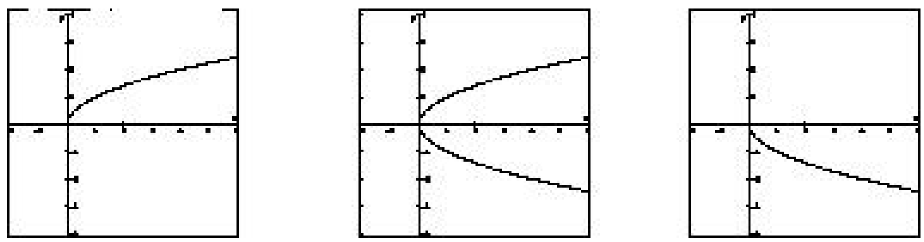
10) $\sqrt[2]{100} =$ __________

11) Observa la siguiente secuencia

$$4 = 4$$
$$(-2)^2 = (2)^2$$
$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{(2)^2}$$
$$-2 = 2$$

Explica ampliamente dónde está el error, si es que lo hay, y en qué consiste

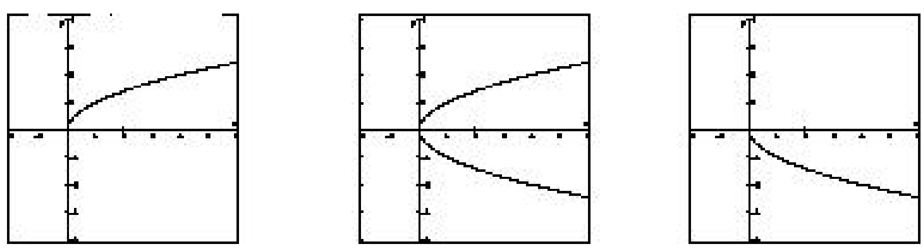
12) ¿Cuál de las graficas corresponde a la expresión $y^2 = x$ *?*



A *B* *C*

Explica ampliamente

13) ¿Cuál de las graficas corresponde a la expresión $y = \sqrt{x}$ *?*



A *B* *C*

Explica ampliamente

Por definición sabemos que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$,
En especial

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Utiliza las propiedades de los exponentes y encuentra lo que se te pide

14) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$ $\qquad$ $(x^2)^{\frac{1}{2}} =$

De lo anterior podemos concluir que

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = (x^2)^{\frac{1}{2}} = x$$

Glosario

Sistema didáctico: Modelo de la unidad mínima para explicar los fenómenos didácticos. Está constituido por *Tres subsistemas***:**

- aquél que aprende
- el de quien enseña en un medio determinado
- un cuerpo de conocimientos a aprender (saber enseñado) alrededor de un saber

(designado ordinariamente por el programa) se forma un *contrato didáctico*, que toma a ese saber como objeto de un proyecto compartido de enseñanza y aprendizaje, y que une en un mismo sitio a profesores y alumnos.

Disfunción escolar : Ambigüedad que produce el empleo escolar de significados que en un contexto son válidos pero fuera este no lo son.

Raíz cuadrada de un numero *a* : Es todo número que elevado al cuadrado nos da ***a***

Función: Se le llama así a toda correspondencia en la cual a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo uno del contradominio

Concepción: Todo aquel significado que tiene el estudiante sobre ciertos objetos matemáticos.

Operador: Símbolo matemático que denota un conjunto de operaciones que han de realizarse sobre cierto tipo de objetos.

Propiedad radicalizadora de la igualdad: Si a, b, c son números cualesquiera, tales que

$a = b, \quad entonces \quad \sqrt[c]{a} = \sqrt[c]{b}$