

**Instituto Politécnico Nacional
Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN**



**Representaciones estudiantiles de la variación.
*Un estudio con bitácoras reflexivas***

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Jorge Iván Ávila Contreras

Directora de Tesis:
Dra. Leonora Díaz Moreno

Co-Director de Tesis:
Dr. Apolo Castañeda Alonso

México, D. F., Octubre de 2005



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION



ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 07 del mes de dic ordinaria del 2005 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de **CICATA LEGARIA** para examinar la tesis de grado titulada:

“Representaciones estudiantiles de la variación. Un estudio con bitácoras reflexivas”

Presentada por el alumno:

Ávila
Apellido paterno

Contreras
materno

Jorge Iván
nombre(s)

Con registro:

A	0	1	0	6	7	0
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

Maestra en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Leonora Díaz Moreno

Codirector

Dr. Apolo Castañeda Alonso



CICAIA - IPN

Centro de investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Gustavo Martínez Sierra

Dra. Eréndira Valdez Coiro

M. en C. Mario Sánchez Aguilar

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

Representaciones estudiantiles de la variación. *Un estudio con bitácoras reflexivas*

Resumen

El presente estudio indaga representaciones estudiantiles acerca de nociones variacionales. Aborda la pregunta de cómo el estudiantado construye entendimientos asociados a la variación -en el marco de un curso de Cálculo Inicial- y distingue modos de apropiación de esos saberes estudiantiles. La investigación atiende a la complejidad de los aprendizajes, buscando conocer los entendimientos del estudiantado a partir de su propia reflexión en torno a los focos de estudio tratados por el profesor, así como aquellos que emergen desde la interacción en el aula. La reflexión es, entonces, acerca de aquello que le hace sentido al estudiante y que, por lo mismo, va articulando sus aprendizajes, con mayor o menor conciencia del propio estudiante.

Para determinar facetas de las representaciones de la variación presentes en el estudiantado -según ellas se manifiestan en dos cursos de Cálculo Inicial, uno el 2002 y otro el 2003- el problema de investigación se aborda con una metodología de tipo cualitativa. Como medio privilegiado para analizar los procesos de construcción de entendimientos del estudiantado, se recurre a la técnica de la bitácora reflexiva, la cual se complementa con un cuestionario. El análisis de discurso de las textualidades estudiantiles se realiza por codificación abierta y desde una sensibilidad teórica con sustento en la perspectiva del conocimiento encarnado y las metáforas conceptuales.

El estudio aporta hipótesis interpretativas para dar cuenta de una evolución de representaciones variacionales del estudiantado. Devela entendimientos estudiantiles en los cuales se distinguen facetas de las representaciones de la noción de variación. Algunas de tales representaciones corporizan nociones variacionales como metáforas provenientes del ámbito sociocultural con estructura de cadenas asociativas complejas y uso de registro icónico-gráfico-dinámico.

En síntesis, la investigación aporta para que el profesorado, por una parte, se acerque a la complejidad de lo que aprenden sus estudiantes, y por otra, revise y reflexione acerca de su propia práctica pedagógica en el aula y su relación con esta complejidad.

Student representations of variation. *A study with reflexives binnacles*

Abstract

The present study investigates student representations about variational notions. It tackles the question of how the students construct understandings associated with the variation -in the frame of a course of Initial Calculation- and distinguishes ways of appropriation of these student knows. The investigation attends on the complexity of learnings, thinking about how to know the understandings of the students from its own reflection concerning the foci of study treated by the teacher, as well as those that emerge from the interaction in the classroom. The reflection is, then, about what it does sense to him to the student and that, by the same, is articulating his learnings, with greater or smaller conscience of the own student.

To determine facets of the present representations of the variation in the students - according to them they are evident in two courses of Initial Calculation, one 2002 and another 2003 - the problem of investigation is approached with a qualitative methodology of type. Like average privileged to analyze the processes of construction of understandings of the students, one resorts to the skill of the reflexive binnacle, which complements with a questionnaire. The analysis of speech of the student textuality is realized by open codification and from a theoretical sensibility with sustenance in the perspective of the knowledge incarnated and the conceptual metaphors.

The study contributes interpretive hypotheses to give account of a evolution of variational representations of the students. It reveals student understandings in which there differ facets of the representations of the notion

of variation. Some of such representations embody variational notions as originating metaphors of the sociocultural scope with structure of complex associative chains and use of iconic-graph-dynamic registry.

In synthesis, the investigation reaches port so that the professorship, on the one hand, approaches the complexity of learn its students, and by other one, checks and reflects about its own pedagogic practice in the classroom and its relation with this complexity.

Índice

GLOSARIO	10
RELACIÓN DE CUADROS, GRAFICAS E ILUSTRACIONES	13
INTRODUCCIÓN	14
CAPÍTULO I	
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	18
1.1. Descripción del problema	18
1.2. Objetivos.....	20
1.3. Preguntas de Investigación.....	21
1.4. Justificación	22
CAPÍTULO II	
MARCO CONCEPTUAL	23
2.1. Pensamiento y Lenguaje Variacional y las Ideas Previas.....	23
2.1.1. Antecedentes.....	25
2.1.2. La Variación y el Cotidiano	30
2.2. Miradas desde las Ciencias Cognitivas	32
2.2.1. Preliminares.....	32
2.2.2. Metáforas Conceptuales y Corporalidad	34
2.3. Representaciones estudiantiles variacionales	42
2.4. Una mirada a partir de la Investigación Narrativa	46

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO.....	49
3.1. Tipo de investigación	49
3.2. Diseño de investigación	50
3.3. Los casos.....	50
3.4. Recolección de la Información.....	51
3.5. Método de análisis de la información.....	52

CAPÍTULO IV

PROCESO DE LAS BITÁCORAS DE REFLEXIÓN	54
4.1. Dos fuentes principales del currículum vivido	54
4.1.1. Discurso curricular fenoménico del texto guía	57
4.1.2. Discurso curricular clásico-formal	66
4.2. Análisis del Proceso de las Bitácoras	69
4.2.1. Dos casos que ilustran el proceso de elaboración de bitácoras	69
4.2.2. Complejidades del aula evidenciadas por las Bitácoras..	80

CAPÍTULO V

RESULTADOS RELATIVOS A NOCIONES VARIACIONALES	92
5.1. Análisis de episodios de las bitácoras de reflexión.....	92
5.1.1. El caso de Ana	93
5.1.2. El caso de Mario.....	114

5.1.3. El caso de Mirtha.	118
5.2. Análisis transversal de las bitácoras de reflexión	121
5.2.1. Gráfica como pseudo concepto icónico-gráfico-dinámico	121
5.2.2. Gráfica como modelación de cuerpos en movimiento: ...	123
5.2.3. Movimiento constante es un “cambio siempre igual”:.....	125
5.2.4. Constante es “nunca cambiar”:.....	126
5.2.5. Intervalo es “un valor numérico”:	127
5.2.6. Intervalo es “fragmento o parte de algo”:.....	128
5.3. Resultados a partir del cuestionario exploratorio	128
5.3.1. Representaciones de la diferencia.	129
5.3.2. Representaciones de Intervalo.	131

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES	134
--------------------	-----

BIBLIOGRAFÍA	140
---------------------------	-----

ANEXOS

- ANEXO 1: Indicaciones para la elaboración de las bitácoras
- ANEXO 2: Secuencia implementada en la actividad curricular
- ANEXO 3: Cuestionario
- ANEXO 4: Transcripción del Cuestionario

Glosario

Cadena Asociativa. Una asociación o reunión de conceptos, ideas, íconos, gráficas, etc. que eslabona un sujeto en situación de aprendizaje, conectando significaciones que atribuye a cada eslabón y estableciendo con ello un significado cognitivamente coherente para él.

Complejidad. Hacemos parte del sentido que le atribuye Morín (1990, p. 32) quien señala “la complejidad es, efectivamente, el tejido de eventos, acciones, interacciones, retroacciones, determinaciones, azares, que constituyen nuestro mundo fenoménico (...) se presenta con los rasgos inquietantes de lo enredado, de lo inextricable, del desorden, la ambigüedad, la incertidumbre”.

Enacción. Enfoque de las ciencias cognitivas, incorporado por el neurobiólogo chileno Francisco Varela en la década de los ochenta. Dicho enfoque de la cognición centra la atención en las propiedades interaccionales que determinan el conocimiento, aquí la cognición no se entiende como un dispositivo que resuelve problemas mediante representaciones sino que se considera como una acción efectiva “historia del acoplamiento estructural que enactúa (hace emerger) un mundo” y que ésta funciona “a través de una red de elementos interconectados capaces de cambios estructurales durante una historia ininterrumpida” (Varela, 1990).

Lo cotidiano. Siguiendo a Baeza (2001) quien cita a Kaiser (1982, p. 86) lo cotidiano, como objeto de investigación, lo entendemos como “un contexto de interacción, que es mediado en forma significativa (simbólicamente) y que es experimentado por el individuo subjetivamente como ‘pleno de sentido’ recurriendo a sus sistemas individuales de significación”.

Metáfora. En nuestro estudio recurrimos a dos desarrollos para la noción de metáfora, uno sobre la base de la neurolingüística, y otro, sobre la base de la sociología. Ambos reconocen a la metáfora como un instrumento para la elaboración de saberes, en donde el sujeto toma elementos de un cuerpo de saberes relativamente conocido, llamado dominio de origen, y los transfiere a un cuerpo de saberes -que emerge como resultado de la acción metafórica- llamado dominio de llegada. Lizcano, desde la sociología, devela campos semánticos de origen, de saberes construidos en una cultura determinada, siendo por lo tanto su dominio de origen sociocultural e históricamente situado. Por su parte, los desarrollos de Lakoff y Núñez, develan experiencias corporales cristalizadas en saberes más abstractos.

Obstáculo socio-cultural. De acuerdo a Díaz (1999) los entendemos como cuerpos de conocimientos que tienen naturaleza propia, que ingresan al aula sin conciencia de los protagonistas y que manifiestan gran resistencia a su modificación. Nociones cotidianas que están jugándose inconscientemente en el entendimiento de los estudiantes, estableciendo otra fuente de obstáculos a los aprendizajes, obstáculo que viene a añadirse a los referidos por la literatura, a saber, obstáculos didácticos, cognitivos y epistemológicos.

Pseudoconcepto. Adherimos a la noción de pseudo concepto de Vygotsky (referenciado en Díaz, 1999) que entre sus características señala que un “niño produce un pseudo-concepto cada vez que rodea un ejemplo con objetos que bien podrían haber sido reunidos sobre la base de un concepto abstracto (...) Se guía por una similitud concreta, visible, y forma solo un complejo asociativo limitado a un determinado tipo de enlace perceptual” (Op. Cit, Anexo-J, p.3).

Representaciones estudiantiles variacionales. Está constituida por dos dimensiones: un dispositivo analítico de entendimientos y un esquema de actividad matemática. Usamos el dispositivo analítico de “entendimientos” para comprender la imbricación entre redes semánticas y redes de tonalidades emocionales del estudiantado. La red semántica la construye el estudiante en la medida que establece redes de significados constituidas y constituyéndose en tanto los estudiantes van configurando nociones variacionales en contextos de enseñanza, en un proceso en el que van activando secuencias de nodos de distinta naturaleza. Este proceso toma lugar simultáneamente con la constitución de la emocionalidad estudiantil asociada a su semantización de lo variacional, estableciéndose por tanto una red de tonalidades emocionales imbricada con la red de significados. A esa imbricación es a lo que denominamos entendimiento. Implícitos en los entendimientos se encontrarán los esquemas de actividad matemática, susceptibles de ser desarrollados por el estudiantado que porta estas representaciones. Esta última dimensión dota de un carácter predictor a las representaciones estudiantiles variacionales.

Relación de cuadros, graficas e ilustraciones

Fig.1a	Concavidad de una curva por análisis de razón de cambio	p. 61
Fig.1b	Concavidad de una curva por análisis de pendiente	p. 61
Fig. 2	Acercamiento Gráfico de una curva y razón de cambio	p. 64
Fig. 3	Conceptualización de la derivada por discurso curricular fenoménico.	p. 65
Fig. 4	Conceptualización de la derivada por cociente de diferenciales.	p. 65
Fig. 5	Comportamiento tendencial entre la tangente a una curva en un punto	p. 66
Fig. 6	Conceptualización de la pendiente de una recta tangente a una curva, en el discurso curricular tradicional.	p. 68
Fig. 7	Conceptualización de la derivada por discurso curricular tradicional.	p. 68
Fig. 8	Cadenas asociativas que relacionan a la función lineal con la razón de cambio.	p. 100
Fig. 9	Significación estudiantil para razón de cambio/ diferencia/ intervalo (representación cuantitativa) y su relación con una representación cualitativa de intervalo.	p. 108
Fig. 10	Significación estudiantil para razón de cambio/ diferencia/ intervalo (representación cualitativa) y su relación con una representación cualitativa de intervalo.	p. 110
Fig. 11	Representaciones estudiantiles a la base de la cadena asociativa Función constante y razón de cambio cero.	p. 110
Fig. 12	Velocidad constante en el discurso disciplinar y cotidiano	p. 113
Fig. 13	Significación estudiantil para la derivada como razón de cambio instantánea	p. 119

Introducción

Varios estudios dan cuenta desde tiempo que los comportamientos y modos de conocer de las personas no se dan de la misma manera en forma colectiva que individual (Vygotsky, 1978 citado en Díaz, 1999; Varela, 1990; Morín, 1990); ello se torna particularmente relevante para el profesional de la educación cuyo ánimo es colaborar en democratizar los saberes matemáticos, esto es, lograr que cada uno de sus estudiantes se apropie de los saberes que pone en escena en su aula. Esta aula por si sola invisibiliza los procesos de entendimiento de la mayoría de los estudiantes.

Suele ocurrir, por ejemplo, que estudiantes que en interacción se acoplan bastante bien cognitivamente, cuando están a solas les complica generar pensamientos o ideas que en forma colectiva sí les resultaría más fácil explorar. Y recíprocamente, otros que en forma individual logran potenciar mejor su actividad cognitiva y que colectivamente les resulta más difícil. Podría pensarse -en un análisis escueto- que ambas formas se identifican excluyentemente una como actividad interpersonal (encuentro con otros) y otra como actividad intrapersonal (encuentro con uno mismo). No obstante, esta visión analítica que tiende a hacer tratamientos dicotómicos de modo absoluto se ha visto fuertemente cuestionada en las últimas décadas (Vygotsky, 1978, citado en Díaz 1999; Varela, 1990; Lizcano, 1993, 1996; Morín, 1990, 1999). Esto es, se conoce interpersonalmente de modo distinto a como se conoce intrapersonalmente, pero a su vez, ocurre una suerte de retroacción o inseparabilidad que involucra a ambas experiencias de conocer.

Por nuestra parte, consideramos que los procesos intrapersonales promovidos por aquellos procesos interpersonales de la interacción *in situ*, se

prolongan más allá de esa interacción en las personas. En el sentido que los procesos interpersonales siguen viviendo, transformados y resignificados en nuestras reflexiones intrapersonales, las cuales pueden caracterizarse como una interacción entre lo vivido, lo revivido, lo esperado por vivir y lo que emerge durante ese proceso. Esto último hace que nuestras reflexiones intrapersonales, sean mucho más que una interacción con algo que se recuerda, pues en ese proceso reflexivo intrapersonal surgen y se viven facetas personales nuevas, fruto de revivenciar, en ese momento, la prolongación de los procesos interpersonales. De alguna manera, *se interactúa nuevamente con lo vivido*, no solamente se reflexiona en términos de recuerdos, más bien se vive y re-vive. Ocurren cosas nuevas. Por ello, planteamos que reflexión intrapersonal e interacción interpersonal, como procesos, son inseparables.

Aunque adherimos a la importancia de los procesos interactivos en el aula y en puestas en escena de diseños didácticos, consideramos relevante el indagar *cómo lo que se da en los procesos interactivos o en una situación de enseñanza cualquiera impacta al estudiantado*, es decir, indagar *en los procesos intrapersonales de las y los estudiantes, relacionados a su experiencia en el aula, atendiendo a facetas presentes en sus procesos de aprendizajes en el período lectivo de una asignatura, tales como resistencias, motivaciones, asociaciones, estilos de aprendizaje, entre otros*.

En nuestra opinión, toda actividad da cuerpo a una experiencia y entendimientos nuevos que movilizan en sí a una historia de vida, la cual va marcando en gran parte, futuras interacciones y comprensiones en la forma de conocer y aprender (sea de modo implícito o explícito, consciente o inconsciente) y no vemos que la actividad de estudiar matemáticas constituya una excepción. En particular, resulta ilustrativa la reflexión de una estudiante que se refiere al proceso de estudiar matemáticas como algo que *“siempre*

está dependiendo de cómo nos relacionemos nosotros en el hacer matemáticas, no como si fuésemos una parte de nosotros, como si en ese quehacer se manifestase nuestro ser matemático desligado del resto de nuestro ser en general, pues al ponernos allí, nos ponemos enteros: con deseos, con ideologías, con sentimientos, con intenciones, con expectativas, con paradigmas, con limitaciones, etc.”¹

Con estas consideraciones, en la presente investigación, centramos nuestro interés en las reflexiones estudiantiles acerca de sus propios procesos de estudio y aprendizaje, mientras se hallan en el período lectivo de un curso de Cálculo Inicial. Y prestamos especial atención a cómo los estudiantes y las estudiantes comprenden y construyen entendimientos en torno a la variación, y a lo que concurre en esa actividad.

En el Capítulo I, *Planteamiento del Problema*, se presenta el problema de investigación, se explicitan los objetivos y preguntas guías del estudio y se justifica éste atendiendo a su relevancia y aportes.

En el Capítulo II, *Marco Conceptual*, se revisan las herramientas conceptuales consideradas en el estudio, entre las cuales se cuentan el Programa de Pensamiento y Lenguaje Variacional (Cantoral & Farfán, 1998) y, en ese marco, la línea de investigación de las representaciones cotidianas y su impacto en los aprendizajes matemáticos (Díaz et al., 2003). Se presentan antecedentes investigativos que guardan relación con el estudio de nociones variacionales en el ámbito del Cálculo Inicial. Asimismo, el marco conceptual consideró las nociones de metáfora conceptual, de representación social y de lo cotidiano.

¹ Reflexión de una de mis estudiantes de Pedagogía en Matemáticas, en un reporte de lectura de Lizcano (1996) solicitado en un curso de educación matemática comparada, en el segundo semestre del año lectivo del 2004.

En el Capítulo III, *Marco Metodológico*, se precisa el diseño utilizado para la investigación y se determina el tipo de estudio en términos de su necesidad y pertinencia, a saber, un estudio de casos de tipo cualitativo. Se explica en qué consisten las bitácoras de reflexión estudiantil, consideradas como principal técnica para la recogida de información en nuestra investigación, las cuales fueron elaboradas por el estudiantado durante el período lectivo en el que cursaban su asignatura de Cálculo Inicial.

En el Capítulo IV, *Proceso de las Bitácoras de Reflexión*, se describe el currículum vivido y el proceso de mediación subyacentes a la Elaboración de las Bitácoras de Reflexión por parte del estudiantado. Se ilustran dos casos de mediación escrita que dan cuenta de procesos de elaboración de bitácoras y, finalmente, se muestran evidencias de complejidades concurrentes al aula, a partir del análisis de contenido de textualidades estudiantiles registradas en bitácoras de reflexión.

En el Capítulo V, *Resultados relativos a nociones variacionales*, se analizan textualidades presentes en las bitácoras estudiantiles, y se explica la evolución de las representaciones variacionales de los estudiantes. Asimismo, se presentan los análisis de un cuestionario exploratorio, para profundizar las representaciones estudiantiles, particularmente en torno a las nociones de diferencia e intervalo.

Finalmente, en el Capítulo VI, *Conclusiones*, se sintetizan los hallazgos obtenidos con el estudio, en tanto representaciones estudiantiles de la variación y las bitácoras reflexivas como un medio privilegiado para acercarse a las tramas implícitas que vivencian los estudiantes, durante sus procesos de aprendizaje de nociones de pensamiento y lenguaje variacional en un curso de Cálculo Inicial.

CAPÍTULO I

Planteamiento del Problema

1.1. Descripción del problema

Para estudiar temáticas relativas a la variación en un curso de Cálculo Inicial, tales como la razón de cambio, la derivada, la tipificación de curvas en el plano o la modelación de situaciones problemas, entran en juego redes de significados asociadas a nociones variacionales que frecuentemente se tienden a naturalizar en el discurso, tanto pedagógico como estudiantil (nociones como intervalo, constante, razón, magnitud, entre otras). Sin embargo, debido a que el interés pedagógico y también estudiantil, en la práctica se centra más en los contenidos que *en lo que lleva al estudiantado a constituir esos contenidos*, poco se conoce de aquellas redes de significados.

Asimismo, en la práctica pedagógica, poco se conoce de las experiencias del estudiantado con relación a lo que a éste le afecta y le mueve a actuar durante sus procesos de aprendizaje mientras cursa una asignatura, en este caso de Cálculo Inicial. Es cierto que el profesorado puede conocer de aquellas dimensiones del vivir de sus estudiantes, a partir de las relaciones informales que establece con ellos durante el período lectivo de su asignatura, pero generalmente no lo hace de un modo sistemático de manera que le permita conocer en mayor profundidad lo que va ocurriendo con sus estudiantes, con relación a lo que a ellos “les hace sentido” en la experiencia de aprendizaje de la cual estén participando.

Consideramos necesario abordar comprensivamente lo que entra en juego cuando el estudiantado está en proceso de aprendizaje de nociones variacionales, e indagar y considerar lo que a éste “le hace sentido”.

Para ello, creemos importante prestar atención a la visión de las relaciones parte/todo a que refiere Pascal:

“Todas las cosas siendo causadas y causantes, ayudadas y ayudantes, mediatas e inmediatas, y todas sostenidas por una unión natural e insensible que liga las más alejadas y las más diferentes, creo imposible conocer las partes sin conocer el todo y tampoco conocer el todo sin conocer particularmente las partes”

(Pascal, citado en Morin, 1999, p. 15)

Hacemos parte de esta cita, por un lado, para relevar la importancia de las redes de significados y entendimientos, que en sí mismos son en todo momento lo causado y lo causante, lo ayudado y ayudante, para generar nuevos entendimientos. Por otro, relevar la simultaneidad de facetas de la experiencia humana -cognitivas, emocionales, éticas, estéticas, entre otras- que concurren al aula y que transversalizan en todo momento a aquello de lo que se apropia el estudiantado, en la medida que transcurre su estudio durante su asignatura. En el aula se actualizan unas u otras de tales facetas, en el marco de vivencias pedagógicas y estudiantiles que entran a escena por medio de acciones efectivas (Maturana & Varela, 1994) y que inevitablemente se entretajan en la construcción de entendimientos estudiantiles con relación a lo que se está aprendiendo.

En términos del triángulo didáctico (Brousseau, 1986) nos interesa pensar en una interacción no solamente entre los vértices que lo componen, esto es, *maestro, estudiantes y saber*, dinamizados por *el contexto*, sino también -y aunque no es el centro ni objetivo de esta investigación, pero sí

parte de las reflexiones que la han constituido- en esas interacciones que dan cuenta de ires y venires intra-vértices del triángulo didáctico, relevando la complejidad de cada vértice, y que llevan a relacionarse a los vértices del modo en que lo hacen, en determinadas situaciones contextuales, y no de otros modos también posibles.

A partir de las consideraciones expuestas, pensamos que es necesario conocer entendimientos estudiantiles que usualmente quedan “tras bambalinas” en una situación de enseñanza y aprendizaje en un curso de Cálculo Inicial. Como medio privilegiado para analizar los procesos de construcción de entendimientos estudiantiles, recurrimos al uso de bitácoras de reflexión, esto es, producciones escritas de las y los estudiantes en las que reflexionan acerca de sus aprendizajes, dificultades y aspectos didácticos, durante el período lectivo de su asignatura de Cálculo Inicial. Procuramos valorar estas producciones estudiantiles, más que por sus contenidos en sí mismos, por lo que estos esconden, es decir, los procesos y entendimientos que los llevaron a constituirse. Valoración que, por cierto, nuestra cultura occidental, que avala resultados y efectividad, parece desechar en lugar de realzar.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

El objetivo general de esta investigación es indagar representaciones estudiantiles acerca de nociones variacionales por medio de la descripción de procesos de construcción de entendimientos estudiantiles de nociones variacionales en situación de enseñanza.

1.2.2. Objetivos Específicos

1. Comprender entendimientos estudiantiles de nociones variacionales;
2. Distinguir modos de apropiación estudiantiles de nociones variacionales, con soporte en bitácoras de reflexión del estudiantado;
3. Develar facetas concomitantes a las cognitivas, en los procesos de aprendizajes, que concurren al aula y que puedan evidenciarse a partir de las bitácoras de reflexión estudiantil.

1.3. Preguntas de Investigación

En este trabajo, desarrollado principalmente con base en reflexiones de estudiantes de un curso de Cálculo Inicial con relación a sus propios procesos de aprendizaje, nos preguntamos por:

1. ¿Qué entendimientos construye el estudiantado con relación a nociones variacionales que se ponen en juego en un curso de Cálculo Inicial?
2. ¿Cuáles son algunos modos de apropiación de esos saberes estudiantiles?
3. ¿Cuáles son algunas de las complejidades concomitantes a las cognitivas presentes en procesos de aprendizajes estudiantiles?

1.4. Justificación

Aprender matemáticas es una actividad humana. Por ello se precisa considerar la complejidad de las miradas estudiantiles para el diseño y rediseño de secuencias de enseñanza que tomen en cuenta diálogos con esas miradas y representaciones del estudiantado.

Por la naturaleza de las interacciones humanas, resulta evidente que al involucrarse profesores y estudiantes en el aula, se entrecruzan representaciones, modos de conocer, subjetividades personales y sociales, entre otros aspectos. En ese entrecruce emergen emociones y nuevos modos de entender aquello que se enseña en clases.

En este trabajo estamos interesados en develar facetas de los procesos vividos por el estudiantado que suelen quedar invisibles a la práctica pedagógica, específicamente, en lo que “hace sentido” a cada estudiante en dichos procesos, cuando cursa su asignatura de Cálculo Inicial. En tanto esas facetas se entretujan con sus comprensiones y le facilitan u obstaculizan la evolución de sus representaciones y entendimientos con relación a lo que aprende en dicha asignatura y a lo largo de su vida escolar.

Vemos necesario que el actuar pedagógico preste atención a lo que ocurre con “bucles” de razón-afecto-impulso (Morín, 1990) -entre otras facetas de la complejidad propia a la naturaleza de la persona de cada estudiante- presentes durante sus procesos de aprendizaje mientras cursa su asignatura. De lo contrario, el profesorado se priva de conocer y, por tanto, de incorporar a su acción didáctica, aspectos como los que puedan relevarse de cada bucle razón-afecto-impulso, y que pueden favorecer el desarrollo de entendimientos estudiantiles durante sus procesos de aprendizaje.

CAPÍTULO II

Marco Conceptual

Nuestro estudio forma parte del Programa de Investigación que lleva a cabo Díaz et al. (2003) el cual, por un lado, adscribe al Programa de Pensamiento y Lenguaje Variacional, y por otro, al Programa de las Ideas Previas, incorporando además a la sensibilidad teórica del estudio, elementos de la investigación narrativa y de los desarrollos de las ciencias cognitivas y neurociencias de reciente data.

2.1. Pensamiento y Lenguaje Variacional y las Ideas Previas

Con los cambios de visiones respecto del conocimiento matemático escolar, se reconoce en los últimos años un giro desde una matemática estática a una matemática dinámica (Cantoral, 2001; Cordero, 2001; Ferrari, 2004; Arrieta, 2004) En lugar de aceptar unas matemáticas como producciones estructuradas e inmutables en el tiempo, éstas se conciben como elaboraciones sujetas a transformaciones y reconstrucciones mediante los sujetos y sus prácticas e interacciones, en un contexto social y cultural. Más que en las estructuras y las producciones matemáticas como resultado acabado de una progresión del saber, se brinda un papel protagónico a los procesos y a la actividad matemática, a las personas haciendo matemáticas.

Este cambio de mirada pone la atención en la construcción y resignificación de prácticas y herramientas tales como la modelación, la visualización y la covariación (no necesariamente presentes en el currículum

explícito de matemáticas) y, consecuentemente, en el estudio de los procesos argumentativos e interactivos, como vía para los aprendizajes matemáticos.

En estas aproximaciones, cobra especial importancia incorporar a los estudiantes a espacios de experimentación que les permitan construir matemáticas desde su actividad y, al mismo tiempo, que tengan una experiencia sobre la complejidad puesta en juego en esa actividad, en situación escolar, a fin de valorar el trabajo colectivo y, a la vez, las elaboraciones personales, en ambientes interactivos.

Buena parte de estos énfasis se han desarrollado en el seno de la socioepistemología, considerada ésta como una aproximación sistémica que engloba y articula las dimensiones cognitiva, epistemológica, didáctica y socio-cultural, para la investigación en Matemática Educativa. En ella, surge el Programa de Pensamiento y Lenguaje Variacional como línea de investigación que permite tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral & Farfán, 1998).

Particularmente, Cantoral (2004) sostiene que el pensamiento y lenguaje variacional “estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida, pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados, utilizando para ello diferentes estructuras y lenguajes variacionales” (op. cit, p.1).

En tanto que, desde el Programa de las Ideas Previas “se concibe al aprendiz como “actor”, constructor - en el curso de su historia social, en el

contacto de la enseñanza, pero, mucho más aún, a través de todas las informaciones mediatizadas y las experiencias de la vida cotidiana - de una estructura conceptual en la que se insertan y organizan los conocimientos apropiados y las operaciones mentales matrices. Ese ensamblaje es, por un lado, una estructura que permite o no asimilar las nuevas informaciones y, por otro lado, un medio a partir del cual va a determinar sus conductas y negociar sus acciones” (Díaz, 1999).

El Programa de las Ideas Previas, si bien nace en espacios y tiempos diferentes y cuya producción se expresa ilustrativamente en la “Revista Enseñanza de las Ciencias”, por su marco epistemológico confluye de modo natural con el primero, por lo que Díaz (1999) lo incorpora para abordar estudios al interior del Programa de Pensamiento y Lenguaje Variacional.

2.1.1. Antecedentes

Desde la perspectiva socioepistemológica se han desarrollado significativas investigaciones, abordando la naturaleza de las nociones que se encuentran a la base del Cálculo. Pionero en este campo investigativo, y primordial, es el trabajo de su fundador, Ricardo Cantoral, el cual postula que “ubicados en el *pensamiento físico* de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza y buscando la predicción de la evolución del sistema físico estudiado, se precisa como necesidad básica de funcionamiento de una centración en la manera de variar por encima incluso de la variable misma. Ello presupone una centración en el proceso más que en el estado, y precisa en consecuencia de *mecanismos de constantificación* de las variables y de sus variaciones” (Cantoral, 2001).

En su estudio, Cantoral detecta una noción que denomina genéricamente como <<El Praediciere>> la cual, afirma, se le conforma en la acción y el efecto de *predecir el estado vecino* a la luz de los datos que nos provee el conocimiento del *estado de facto*, y ubica esta noción como el motor central y la *idea germinal* a partir de la cual, tanto procedimientos como significaciones se construyen paulatinamente y adquieren así, su completa significación epistémica (op. cit., 2001).

De acuerdo al estudio epistemológico realizado por Cantoral, se establece que la noción de predicción posibilita el surgimiento del Cálculo desde el paradigma newtoniano (1990, citado en Alanís, 2000, p. 236). Al respecto, Alanís destaca:

“Cantoral se da a la tarea de buscar aquellas circunstancias que por su naturalidad hicieron posible la construcción del Cálculo y rescatar aquellas que pudieran ser asimilables a una didáctica actual (...) consistió [el paradigma newtoniano] en considerar a los problemas de la dinámica en particular y de la variación de las magnitudes variables en general, de la siguiente manera: ciertos valores de los parámetros de un sistema en un momento y lugar dados, determinan la evolución ulterior del sistema. De ahí que el objetivo de la mecánica desde entonces sea predecir dicha evolución sin plantearse preguntas sobre las “causas reales” o “causas inherentes” del movimiento. La búsqueda de la predicción de la evolución de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza condujo, según Cantoral, al surgimiento y desarrollo de la teoría de las funciones analíticas.”

(Alanís, 2000, p. 237-238)

Más específicamente, Cantoral “desentraña los mecanismos que permitieron el pasaje de la predicción, noción propia de las ciencias físicas, a lo analítico, noción propia de la matemática. En términos generales, dichos mecanismos son los siguientes:

- a. Antes que nada reconocer que los fenómenos bajo estudio tienen herencia, en tanto que son las condiciones iniciales las que determinan su evolución ulterior.
- b. De todas las variables relacionadas con el fenómeno, considerar como tales a unas cuantas y como constantes al resto de ellas.
- c. Considerar como constantes a algunas de las sucesivas variaciones de las variables.
- d. Construcción del instrumento predictor y su representación en el contexto matemático: la serie de Taylor”

(Alanís, 2000, p. 238).

Sobre la base de estos estudios epistemológicos, acerca del proceso de constantificación de las variables y de sus variaciones, Pulido et al. (2001) elaboran una propuesta didáctica para la enseñanza del Cálculo, que se plasma en el texto “Elementos del Cálculo. Reconstrucción para el Aprendizaje y su Enseñanza”.

En su texto, los autores, en lugar de ofrecer una presentación tradicional que muestre el orden lógico y estructurado que caracteriza la exposición clásica de los textos de Cálculo, buscan que el primer contacto que los estudiantes tengan con las nociones y conceptos del Cálculo sea enfrentarlos previamente con aquellas situaciones problemáticas que propician de una manera natural su construcción. Esto es, abordar la problemática de la predicción.

Con este acercamiento didáctico, se propicia la comprensión de la derivada como herramienta para resolver problemas específicos de variación,

a la vez que se le dota de significado físico y geométrico, previo a su formulación analítica y, como consecuencia de ello, en esta aproximación, las definiciones formales de límite y continuidad no resultan relevantes para conceptualizar la derivada.

Igualmente, hay otros estudios didácticos que proponen introducir el concepto de derivada siguiendo su génesis histórica, esto es, la derivada antes del límite. En Badillo (2003) se documentan dos tendencias: aquellas que optan por definir primero $f'(a)$ y luego $f'(x)$ y las que proponen definir primero $f'(x)$ y luego $f'(a)$. Entre las primeras -señala Badillo (2003)- está el Grup Zero (1982; 1984) y Azcárate (1990) quienes consideran incluso que el estudio de la derivada sirve para introducir el concepto de límite de una función en un punto. Estos trabajos, contemplan la enseñanza conjunta de la tasa instantánea de variación y la pendiente de la recta tangente, para lo cual, a fin de facilitar la superación de las dificultades que presentan cada uno de estos conceptos por separado, recomiendan el tratamiento conjunto de aspectos gráficos, numéricos y algebraicos. Por su parte, Trigueros y Álvarez (1995) consideran conveniente la presentación por separado.

Mientras que, en el marco de la segunda tendencia -señala Badillo (2003)- Azcárate y otros (1996) proponen la siguiente secuencia: un tratamiento previo con conceptos de precálculo tales como la tasa de variación media como pendiente de la recta secante y como velocidad media; abordar las dificultades del proceso de límite con un acercamiento en conversión de registros; y, finalmente, la utilización de soporte TIC'S (para más detalles ver Badillo, 2003, p. 120).

Por otro lado, con relación a la noción de razón de cambio, Dolores et al. (2002) reportan una investigación acerca de las concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento, para el caso de la velocidad y

la trayectoria. Mediante el análisis de los resultados de un cuestionario conformado por seis situaciones (que incluyen gráficas) con preguntas cerradas, muestran la distancia existente entre las concepciones de estudiantes y profesores con respecto a las que se conocen de los expertos y de los textos. Haciendo uso, preferentemente, de la identificación de la razón de cambio, en su registro geométrico, como pendiente de la gráfica, concluyen que:

- a. se asocia “mayor velocidad” con la “ordenada de mayor altura”, y por otro lado, se asocia con el segmento rectilíneo de “mayor longitud”;
- b. para la comparación de *velocidades instantáneas* en un par de gráficas paralelas de coordenadas distancia-tiempo la mayoría de los estudiantes y profesores comparan las magnitudes de las ordenadas;
- c. la *velocidad negativa* la mayoría la asocia con una gráfica de coordenadas negativas; y,
- d. para el caso de la caída libre, se asocia la gráfica cartesiana con la *trayectoria*.

Con anterioridad Leinhardt et al. (1990, citado en Dolores et al., 2002) habían planteado cuatro tipos de categorías para las dificultades de los estudiantes en la comprensión de las gráficas, a saber: confusión entre la pendiente y la altura, confusión entre un intervalo y un punto, consideración de una gráfica como un dibujo y la concepción de una gráfica como construida por un conjunto discreto de puntos.

Otro estudio desde la socioepistemología que deviene importante para la resignificación de las nociones variacionales, es el reportado por Ferrari

(2004) con el cual marca una veta que se despliega hacia la apropiación del aprendizaje de las funciones, a partir de la reflexión y el análisis de las propuestas que en el medio existen sobre la covariación, como una manera alternativa de abordar el tema de la función. Particularmente, en su estudio, de resignificación de la función logaritmo, Ferrari (2004) considera la covariación como “la relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades. Así, una recta puede caracterizarse como la covariación entre progresiones aritméticas, en tanto que el logaritmo, como la covariación entre una progresión geométrica y una aritmética”.

2.1.2. La Variación y el Cotidiano

En cuanto a las representaciones cotidianas y escolares de la variación, Díaz et al. (2003)² actualmente realizan un estudio sobre las bases del Programa de Pensamiento y Lenguaje Variacional y del Programa de las Ideas Previas. La preocupación principal en esta investigación es determinar la estructura y contrastar las representaciones de la variación -conceptos y propiedades matemáticas del cambio- tanto cotidianas³ como aquellas de las que se apropian las y los estudiantes en la escuela.

En una primera etapa, se determinaron facetas de la noción de variación cotidiana que presentan los alumnos de 8° y 10° grado de escolaridad. Mediante los sinónimos de variación a que aluden los estudiantes se identificaron dos tipos de epistemologías, una de carácter más bien estático y discreto (cantidad, agrupación, harto, varias cosas, muchos estilos, diversidad, alternativas, elegir, escoger, diferencia, distinto) y otra dinámica y más bien

² Este trabajo de Tesis se ha desarrollado en el marco de dicha investigación: *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos*, Proyecto Fondecyt 1030413, período 2003-2005.

³ Se busca relevar aquellas representaciones del cambio y la variación a que recurren por mostrarse eficientes en su vida cotidiana.

continua (irregular, inconstante, inestabilidad, cambiar, cambio, transformación, variable) En tanto la noción de los especialistas refiere al vocablo variación, la noción del estudiantado refiere al vocablo cambio. Además se detectó que para los estudiantes hay cambios de tipo predecibles versus impredecibles. Dentro de los predecibles están los lineales y los cíclicos y dentro de los impredecibles: los eventuales y los azarosos.

Adicionalmente, en una segunda etapa, vía una profundización del marco teórico en la perspectiva de las ciencias cognitivas y las neurociencias, de reciente data, y atendiendo a las orientaciones de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), el equipo de investigación diseñó e implementó una secuencia didáctica a un grupo piloto de 8º año de escolaridad, la cual levantó facetas de representaciones cotidianas que permitieron a los estudiantes trabajar con la variación, trayendo a escena nociones de acepción cotidiana de velocidad, tiempo, rapidez y movimiento. De acuerdo a definiciones tomadas del diccionario de la Real Academia Española, se identifica que estas nociones no son independientes en el imaginario colectivo, sino que se sustentan unas de otras en una relación que se puede metaforizar como simbiótica, a saber, “tiempo duración (prontitud/lentitud) de las cosas sujetas a mudanza” “velocidad es ligereza o prontitud (tiempo breve/extenso) del movimiento” “rapidez es velocidad impetuosa”, entre otras. De modo que, estas nociones aportan núcleos de una red de nociones asociadas a los conceptos del discurso curricular comprometidos en el trabajo con el pensamiento y lenguaje variacional (Díaz et al., 2003).

2.2. Miradas desde las Ciencias Cognitivas

2.2.1. Preliminares

En Varela (1990) se distinguen tres grandes etapas de las ciencias cognitivas, que surgen de forma más o menos sucesivas, las cuales comienzan a vislumbrarse luego que en la década de los años '40 se produjese un esfuerzo interdisciplinario coincidente en Europa y Estados Unidos. De esa efervescencia por el conocimiento destacan la epistemología genética de Piaget, la epistemología evolutiva de Lorenz y la epistemología experimental de McCulloch, entre otras.

Por su parte, la corriente cibernética aspiraba a crear una ciencia de la mente, por ejemplo McCulloch y Pitts, en 1943, al considerar el cerebro como una máquina deductiva, proponen la lógica como la disciplina adecuada para comprender el cerebro y la actividad mental, donde el cerebro es un dispositivo que encarna principios lógicos en sus elementos constitutivos o neuronas. Wiener acuña uno de los conceptos más importantes para la cibernética: el concepto de feedback o retroalimentación. También como uno de los resultados de la fase cibernética puede considerarse a la Teoría de Sistemas, en donde cobran relevancia los conceptos de información y control⁴.

La primera etapa que caracteriza a las ciencias cognitivas, es la del *cognitivismo*, en 1956, en donde la cognición se concibe como un procesamiento de información mediante una manipulación algorítmica de

⁴ Para una revisión más detenida del devenir de la Teoría de Sistemas consultar (Echeverría, 1996) en donde, además, se sintetiza la obra de Humberto Maturana, quien con su *Biología del Conocimiento* y una de sus afirmaciones fundamentales, acerca que “desde el punto de vista de la información, los seres vivos son sistemas cerrados” objeta lo que denomina <<la falacia de las relaciones instruccionales>> y, a su vez, pone en duda uno de los conceptos fundamentales de la Teoría de Sistemas, el de *la información*.

símbolos en que el sistema interactúa sólo con la forma de los símbolos (sus atributos físicos) y no con su significado. Aquí el símbolo pasa a ser la representación mental (interna) de una realidad externa. No obstante, en esa época ya se perfilaban otras posturas, éstas no tuvieron eco en su tiempo, por ejemplo se planteaba que en los cerebros reales no había reglas ni un procesador lógico central, y que la información no estaba almacenada en lugares precisos. En cambio, era evidente que el cerebro operaba a partir de interconexiones masivas (Varela, 1990).

A fines de la década de los setenta, este tipo de ideas retomó fuerzas, entre otras razones por las ideas auto-organizativas en física y en matemática no lineal. Esta etapa se reconoce como *conexionismo* o *emergencia*, en ella el sistema cognitivo se construye no a partir de símbolos y reglas, sino de componentes simples que se conectan dinámicamente entre sí, donde cada componente opera sólo en su ámbito local y hay una cooperación global “que emerge” espontáneamente cuando todas las neuronas participantes alcanzan un estado mutuamente satisfactorio.

Lo que Varela (1990) critica de ambos enfoques es su arraigo profundo en la tradición científica acerca de que el mundo tal como lo experimentamos es independiente de quién lo conoce y, entonces, como opción radicalmente distinta, plantea que “la cognición no se puede entender adecuadamente sin sentido común, el cual no es otra cosa que nuestra historia corporal y social, la inevitable conclusión es que conocedor y conocido, sujeto y objeto, se determinan uno al otro y surgen simultáneamente” (Varela, 1990)

Con este pensamiento, surge el tercer enfoque: el de *la* enacción, el cual pone el énfasis en las propiedades interaccionales que determinan el conocimiento, aquí la cognición no se entiende como un dispositivo que

resuelve problemas mediante representaciones sino que se considera como una acción efectiva “historia del acoplamiento estructural que enactúa (hace emerger) un mundo” y que ésta funciona “a través de una red de elementos interconectados capaces de cambios estructurales durante una historia ininterrumpida”. Según Osorio (2003) en el enfoque enactivo se subraya la postura de que la cognición no es la representación de un mundo previo por una mente previa, sino la escenificación de un mundo y de una mente sobre la base de una historia de acciones que realiza un individuo en el mundo.

De manera que, en las últimas décadas, el acento en el campo de las ciencias cognitivas se ha deslizado desde comprender a la cognición humana como un proceso individual e interno hacia una comprensión que pone la atención en las experiencias tanto sociales como corporales, esto es, un deslizamiento hacia el plano de las experiencias humanas. Con este énfasis, se concibe a la cognición como un proceso individual y social a la vez, y que actúa fuera y dentro de la mente no como en sus inicios, en que se la consideraba como un proceso únicamente interno del individuo.

2.2.2. Metáforas Conceptuales y Corporalidad

Actualmente el estudio de las metáforas, no se remite únicamente a un asunto del campo literario, en la visión clásica de considerarlas como un recurso estético o desviación de un supuesto lenguaje literal. Las metáforas no son menos frecuentes que las expresiones de uso literal, e incluso, que ninguna expresión es literal en sí misma. Por ejemplo, la semántica de la expresión “*El camino está despejado*” se halla sujeta, en la cotidianidad, a sus contextos de uso, adoptando sentidos diferentes si se enuncia en el contexto de un chofer de ambulancia, alguien escondido que se apresta a escapar o en quién no tiene dificultades para sus aspiraciones, por ejemplo,

de un ascenso laboral o de las intenciones de conquistar a una dama, por mencionar algunos. Otro caso ilustrativo, resulta de la frase "Todos los hombres son unos animales" que claramente adopta semánticas diferentes si es enunciada por un profesor en una clase de biología o por una novia desechada.

La metáfora usualmente se consideraba una materia propia de críticos literarios. Sin embargo, desde diferentes ámbitos, se comenzó a atender al estudio de las metáforas como procesos de construcción de significados. Uno de los primeros iniciadores fue Max Black (1966, citado en Nubiola, 2000) quien se basaba en la idea de que cuando usamos una metáfora tenemos, en una sola expresión, dos pensamientos de cosas distintas en actividad simultánea, por lo cual, el significado de la expresión metafórica sería el resultante de la interacción de los dos elementos. A modo de ejemplo, en la expresión metafórica "Juan es una roca" los dos pensamientos activos a la vez serían la fortaleza de Juan y la solidez de la roca.

Por su parte, en los últimos años, desde la lingüística cognitiva se ha desarrollado el estudio de las metáforas conceptuales y el conocimiento encarnado, obtenido principalmente de los trabajos de Lakoff y Johnson (1980, citado en Nubiola, 2000) El principio básico del trabajo de Lakoff y Johnson se refiere al papel fundamental que le cabe a la experiencia corporal en la formación de los conceptos. Brindan evidencias de cómo los sistemas conceptuales humanos, incluso los más abstractos, se organizan en vastos sistemas metafóricos, los cuáles se caracterizan por crear entre un dominio conceptual de partida (dominio fuente) y otro de llegada (dominio objetivo) mapeos metafóricos que preservan la estructura del primero como medio de comprensión para el segundo; y demuestran que a través del estudio empírico del lenguaje humano se puede comprender aspectos

fundamentales de la organización conceptual del pensamiento humano y de su imbricación con la corporalidad (Núñez, 2004).

La corporalidad se ha tornado de interés tanto en las ciencias cognitivas como en la psicología. Al respecto, en una conferencia dictada en julio del 2004, en un Seminario de Actualización de la PUC, en Santiago de Chile, el Dr. en psicología, Carlos Cornejo señala:

“De alguna manera el conocimiento no está en la cabeza, está en el cuerpo. Mientras más difícil es lo que hay que explicar o aquello a qué referirse, más se tiende a gesticular, corporalmente.”

Por su parte, Lakoff y Johnson -explica Nubiola (2000)- se interesan en expresiones de uso cotidiano tales como "perder el tiempo", "ir por caminos diferentes" "bibliografía oceánica" "corriente filosófica", etc. Y plantean que expresiones como las anteriores son reflejo de conceptos metafóricos sistemáticos que estructuran nuestras acciones y nuestros pensamientos. Están "vivos" en un sentido más fundamental: son metáforas en las que vivimos. El hecho de que estén fijadas convencionalmente al léxico de nuestra lengua no las hace menos vivas (Lakoff y Johnson 1986, 95, citado en Nubiola, 2000).

Lakoff y Johnson distinguen fundamentalmente dos tipos de metáforas: las constitutivas y las explicativas. Las primeras corresponden a aquellas en que podemos reconocerlas como parte de un sistema metafórico conceptual, esto es, forman parte del fondo conceptual de una cultura, en gran medida estructurado metafóricamente; mientras que, las explicativas desempeñan otras conceptualizaciones metafóricas, habitualmente en el campo de las ciencias o, en general, de los discursos que abordan fenómenos con una intención descriptiva. De acuerdo a Nubiola (2000), estos autores desarrollan tres tipos de estructuras metafóricas, a saber:

- a. Metáforas Orientacionales. Organizan un sistema global de conceptos con relación a otro sistema. La mayoría de ellas tienen que ver con la orientación espacial y nacen de nuestra constitución física (arriba/ abajo, delante/ detrás, profundo/ superficial, entre otras);
- b. Metáforas Ontológicas. Por las que se categoriza un fenómeno de forma distintiva mediante su consideración como una entidad, una sustancia, un recipiente, una persona, etc;
- c. Metáforas Estructurales. En las que una actividad o una experiencia se estructura en términos de otra (por Ej. comprender es ver; una discusión es una guerra).

Acerca del trabajo de Lakoff y Johnson, refiere Núñez (2004) *“demostraron que a través del estudio empírico del lenguaje humano se puede comprender aspectos fundamentales de la organización conceptual del pensamiento humano y de su imbricación con la corporalidad (...) Que los sistemas conceptuales humanos, incluso los más abstractos, se organizan en vastos sistemas de **metáforas conceptuales** cuyas verdades e inferencias no son literales, sino metafóricas. Es decir, verdades e inferencias que heredan su estructura de un dominio para aplicarse a otro totalmente diferente.”* (op. cit., p. 419-420).

En tanto, Osorio (2003) destaca que para este enfoque el objeto central de estudio son los procesos de conceptualización, y que los conceptos aquí no son de naturaleza puramente mental, por el contrario, muchos de ellos están fuertemente anclados en la experiencia corporal y social, y proporcionan las bases para delinear otros conceptos más abstractos. En este marco, la metáfora sigue siendo un objeto susceptible

de ser abordado desde el plano lingüístico, pero sobre el fondo más amplio de las estructuras cognitivas.

A modo de ejemplo, ilustramos algunos párrafos donde se aprecian, en un lenguaje relativamente cotidiano, el uso de metáforas con base en la corporalidad:

“Tres aeropuertos, A, B, C se localizan sobre una línea norte – sur. B está 645 mi al norte de A, y C está 540 mi al norte de B. Un piloto voló de A a B, descansó 2 h y continuó hacia C. El viento sopló del sur a 15 mi/h durante la primera parte del viaje, pero durante el descanso cambió, comenzando a soplar desde el norte...”.

[Rees y Sparks, Texto de Álgebra, 1991, p. 133]

“El tema planteado en el texto es más que interesante, por lo menos a mí me ha dado pie para la duda y la reflexión (...) lo expuesto por el autor podría ayudarnos a ampliar nuestra visión docente”

“Me parece un texto muy atractivo, digerible y sólido: Atractivo porque absorbe una temática interesante (...) Digerible porque explica las ideas en forma simple y amena (...) Sólido porque los planteamientos tienen sustento...”

[Opinión escrita de dos estudiantes de Pedagogía en relación a la lectura de un artículo]

“Podemos decir que mientras mas se acerque a cero Δt (el intervalo de la magnitud de referencia) se acercará al valor exacto de la variable pedida (que quede claro que todo un proceso va anterior a este pero es lo que mas me quedo latiendo en la mente).”

[Reflexión escrita de un estudiante en un curso de Cálculo Inicial]

Particularmente, para nuestra investigación hemos puesto atención al texto de Lakoff & Núñez (2001) “Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being” sobre la naturaleza encarnada del conocimiento matemático. En su trabajo, estos autores abordan el estudio de la lingüística cognitiva en el área de las matemáticas. En él, analizan una serie de campos matemáticos (aritmética, cálculo infinitesimal, álgebra abstracta, entre otros) y, en palabras de uno de sus mismos autores,

concluyen que un cuerpo de conocimientos *"tan abstracto, objetivo, preciso, efectivo, y que aparentemente trasciende a la naturaleza humana, como son las matemáticas, resulta ser un producto originado por la complejidad de nuestra unidad mente-cuerpo."* (Núñez, 2004, p. 420).

Lakoff y Núñez estudian cómo algunos mecanismos conceptuales cotidianos son centrales para caracterizar las ideas matemáticas. Principalmente, los mecanismos que discuten son:

- a. Los esquemas icónicos. Como aquellos que se encuentran a la base de las relaciones espaciales de un lenguaje específico y que son - al parecer - de carácter universal;
- b. Los esquemas aspectuales. Se refieren a la estructura neurológica usada en el control de los esquemas motores complejos, los cuales con son los mismos que pueden usarse, también, para razonar sobre eventos y acciones;
- c. Las metáforas conceptuales. Se derivan de los *mapeos* (mapping) metafóricos que realizamos desde un dominio conceptual (dominio fuente) a otro dominio conceptual (dominio objetivo) Dichos mapeos metafóricos no son arbitrarios sino que sistemáticos y, además, preservan la estructura de los esquemas icónicos de cada dominio. Su función principal es permitirnos razonar acerca de dominios relativamente abstractos usando la estructura inferencial de dominios relativamente concretos.

Es decir, por "mapeo metafórico" se entiende a la relación que se establece entre el dominio fuente (colección de objetos) y el dominio meta (aritmética), de esta forma podemos deducir que nuestra interacción con la

realidad nos permite acercarnos a conocimientos abstractos relacionados con la matemática.

Una de las metáforas conceptuales básicas propuestas Lakoff & Núñez (2001) es “la aritmética como colección de objetos”. Esta metáfora consiste en un acercamiento de experiencias cotidianas que tienen directa relación con sumar o restar. Por ejemplo, una persona (más específicamente un niño) puede juntar una cantidad de manzanas en un mismo canasto, puede extraer (sacar) manzanas del canasto y sabrá que el canasto ha quedado con menos manzanas de las que tenía inicialmente; también puede agregar manzanas a la colección que hay en el canasto, en este caso sabrá que la colección de objetos (manzanas) ha aumentado.

Estos ejemplos, que se realizan habitualmente, según Lakoff y Núñez pueden ser los comienzos de la aritmética en las personas. En este punto se levantan las hipótesis neurológicas al respecto, ya que la acción corporal de agregar o quitar objetos a un grupo puede tener relación directa con la aritmética que conocemos, claro que sin los signos + y - que utilizamos habitualmente. Con relación a la metáfora conceptual “**la aritmética es una colección**” los autores presentan el siguiente mapeo metafórico:

<i>Dominio Fuente</i> COLECCIÓN DE OBJETOS		<i>Dominio Meta</i> ARITMÉTICA
Colección de Objetos del mismo tamaño	→	Números
El tamaño de la colección	→	El tamaño del número
Más grande que	→	Mayor que
Más chico que	→	Menor que
La colección más pequeña	→	La unidad (uno)
Poniendo colecciones juntas	→	Adición
Sacando una colección más pequeña, de una colección más grande	→	Sustracción

En el esquema se aprecian dos conceptos importantes: *Dominio fuente* y *Dominio Meta*. Dominio fuente, que es la colección de objetos, se basa en las experiencias comunes que tienen las personas al relacionarse con un conjunto de objetos. Por ejemplo, podemos encontrar colecciones de objetos de un mismo tamaño, puede existir una colección más grande que otra, podemos agregar objetos o quitar objetos de una colección, etc. Estas acciones tienen relación directamente con el “dominio meta” propuesto para esta metáfora como lo es la aritmética, en este caso el dominio meta estaría compuesto por números, tamaño del números, mayor que, menor que, adición y sustracción, etc. que son rudimentos de la aritmética básica que se enseña en el colegio.

Otra perspectiva más radical con relación a las metáforas, y que aporta a la sensibilidad teórica de nuestra investigación, es la que aborda Lizcano (1999) desde la sociología. Este autor, considera a las metáforas como un analizador social, para él, todo concepto es metafórico y toda metáfora es una institución social. Con base en esas dos hipótesis propone un método de análisis de textos y discursos mediante una hermenéutica sociológica de las metáforas usadas en los mismos, en donde el analizador central para este análisis socio-metafórico son aquellas metáforas ya cristalizadas como expresiones del lenguaje corriente o como conceptos técnicos o científicos.

De acuerdo a Lizcano, cada uno de los conceptos que utilizamos en nuestro lenguaje han sido, en su tiempo, metáforas. De modo que, no hay lenguaje natural, todo lenguaje es social. A una condición local de lo metafórico se añade una dimensión temporal o histórica que hace que lo propio y lo impropio, lo literal y lo metafórico, se viertan continuamente lo uno en lo otro.

Lizcano reconstruye significados que subyacen a la base de nociones matemáticas, por ejemplo la resta. Para ella, refiere dos construcciones metafóricas diferentes. La primera, una occidental, heredera de la cultura griega, sustentada en la construcción metafórica de *sustraer* números para llegar a obtener un *resto* como el escultor *extrae* material de un bloque de piedra para conseguir ese resto que es la estatua, lo cual lleva a una imposibilidad de extraer toda la roca para construir la estatua y, a una mayor imposibilidad, de extraer más del material con que porta el escultor, que es su piedra. Es decir, la imposibilidad de un cero y de los números negativos. La segunda, heredera de la cultura China, donde el foco de la construcción metafórica es la “destrucción mutua” entre dos entidades que se oponen entre sí. Pudiendo ocurrir que dos fuerzas enfrentadas se “hagan desaparecer” o “se aniquilen” la una a la otra si las fuerzas están “equilibradas”. De modo que el sustento metafórico, en un caso es la *abstracción* o *extracción* y en el otro la *oposición* (Lizcano, 1999).

2.3. Representaciones estudiantiles variacionales

Las comprensiones acerca del conocimiento humano, actualmente, se han enriquecido por estudios que imbrican diádas antes consideradas por separado, diádas como el objeto y el sujeto, lo individual y lo social, la parte y el todo, lo externo y lo interno, lo mental y lo corporal (Varela, 1990, Morin, 1994, 1999, Maturana y Varela, 1994, Lakoff y Núñez, 2001).

“en el origen está el principio de emergencia, es decir que cualidades y propiedades que nacen de la organización de un conjunto retroactúan sobre ese conjunto; hay algo de no deductivo en la aparición de cualidades o propiedades de todo fenómeno organizado (...) son las interacciones entre individuos las que producen la sociedad; pero es la sociedad la que produce al individuo”
(Morín, 1994, p. 5-6)

En particular, con la Epistemología de la Complejidad (Morín, 1999) se levantan naturalezas triádicas del conocimiento y la condición humana que - en forma de bucles- actúan de modos inseparables entre sí. Tríadas como razón/impulso/afecto, cerebro/mente/cultura e individuo/sociedad/especie (op. cit., p. 23-25).

En nuestro estudio recurrimos al dispositivo de “representación estudiantil variacional” movidos por consideraciones como las mencionadas y atendiendo a señalamientos que dicen relación con las representaciones sociales e individuales.

Para la perspectiva constructivista de las ciencias sociales, las realidades sociales se conciben como construcciones históricas y cotidianas de actores individuales y colectivos (Díaz, 1999, citando a Corcuff, 1995). Más específicamente la noción de "Representaciones Sociales" designa estructuras mentales cuya característica esencial es el ser sociales; es decir, producidas, compartidas y vehiculadas por un grupo social dado y que están estrechamente ligadas a la vida de ese grupo social (op. cit., citando a Bourgeois, 1991).

En los trabajos de Piret, Nizet y Bourgeois (1996, referenciados en Díaz, 1999) se destacan cuatro componentes para las representaciones sociales: *el contenido, una estructura, un aspecto normativo y un esquema actancial*. El contenido se compone de las frases, los conceptos, los términos que se utilizan. La estructura, refiere a la manera en que se presenta organizado el contenido, la articulación y relación de conceptos y términos entre sí. La normativa, responde a la valoración negativa o positiva que realiza el sujeto de esos significados. Y, el esquema actancial, se entiende como un esquema mínimo compuesto por un sujeto que convoca, el

sujeto que trata de obtenerlo y las posibles acciones que realiza éste para obtener ese objeto, lo cual da cuenta de las posibles acciones del sujeto. (Díaz, 1999)

En nuestro trabajo, consideramos que la noción de representación para estudiar el pensamiento variacional, implica asumir que la realidad tal y como es, resulta parcialmente determinada por la realidad tal y como es para cada individuo; esto es, la realidad es concebida como el producto de la construcción que subjetivamente hace el individuo de la misma. A su vez, la realidad construida socialmente pasa a tener una cierta "materialidad" o existencia objetiva (Díaz, 2005).

Hacemos parte de lo que señala Díaz (1999) en relación a que las representaciones individuales se elaboran parcialmente sobre la base de representaciones sociales, vehiculadas por el grupo de pertenencia y/o referencia de cada sujeto.

Entendemos que los estudiantes van conformando sus representaciones vehiculadas por lo social y lo pedagógico que se halla presente en una situación de enseñanza. De la convivencia tanto en el aula como fuera de ella, de la relación profesor/estudiante, estudiante/estudiante, conocimiento/estudiante/profesor. Es decir, consideramos a las representaciones estudiantiles no como si fuesen atribuibles a un pensar estudiantil de tipo exclusivo, aislado y/o encapsulado que se apreste a posteriori a dialogar con algún tipo de "representación social" o "representación pedagógica", sino que cada una se va imbricando de la otra y a su vez cobrando forma con ello, esto es, determinándose y quedando siempre con una apertura dinámica de transformación en un doble rol de constituido y constituyéndose.

Particularmente -como fruto de la misma investigación- entenderemos que las representaciones estudiantiles variacionales, están constituidas por dos dimensiones: un dispositivo analítico de entendimientos y un esquema de actividad matemática.

Usamos el dispositivo analítico de “entendimientos” para comprender la imbricación entre redes semánticas y redes de tonalidades emocionales del estudiantado. La red semántica la construye el estudiante en la medida que establece redes de significados constituidas y constituyéndose en tanto los estudiantes van configurando nociones variacionales en contextos de enseñanza, en un proceso en el que van activando secuencias de nodos de distinta naturaleza. Este proceso toma lugar simultáneamente con la constitución de la emocionalidad estudiantil asociada a su semantización de lo variacional, estableciéndose por tanto una red de tonalidades emocionales imbricada con la red de significados. A esa imbricación es a lo que denominamos entendimiento. Implícitos en los entendimientos se encontrarán los esquemas de actividad matemática, susceptibles de ser desarrollados por el estudiantado que porta estas representaciones. Esta última dimensión dota de un carácter predictor a las representaciones estudiantiles variacionales.

Terminamos esta sección intentando una resignificación acerca de lo que engloba la acción de reflexionar, motor principal de nuestro trabajo, toda vez que es ésta la actividad realizada por cada estudiante en sus bitácoras personales, principal fuente de información sobre la que se levanta la presente investigación.

Comprendemos a la acción de reflexionar como portadora de nuevas formas de conocer y resignificar lo que se vive en los procesos interpersonales, y con ello, de resignificar a las representaciones personales

de cada individuo. En otras palabras, acción portadora de nuevos aprendizajes, entendidos como cambio de representaciones estudiantiles.

La reflexión, de acuerdo al diccionario de la RAE es “la acción y efecto de reflexionar”, y *reflexionar* se entiende como “considerar nuevamente o detenidamente algo”. Por su parte, de la misma RAE, *considerar* se define como “pensar, meditar, reflexionar algo con atención y cuidado”. Nos encontramos entonces con un ir y venir asociativo entre los verbos reflexionar, considerar, pensar y meditar, que aparecen compartiendo significados, dejando entrever el carácter de red de significaciones que caracterizan a la acción de reflexionar.

De modo que, para este trabajo, destacamos a la acción de reflexionar como provocadora de adecuaciones y emergencias de nuevos entendimientos.

En suma, considerar a la reflexión estudiantil en situaciones de enseñanza, como un proceso socio-cognitivo que da por resultado nuevos entendimientos, gatillados por experiencias de enseñanza que le significan una confrontación dinámica con nuevas informaciones.

2.4. Una mirada a partir de la Investigación Narrativa

Para Connelly y Clandinin (1995) la narrativa es el estudio de la forma en que los seres humanos experimentamos el mundo, y por tanto, una forma de caracterizar los fenómenos de la experiencia humana.

“La razón principal para el uso de la narrativa en la investigación educativa es que los seres humanos somos organismos contadores de historias, organismos que, individual y socialmente, vivimos vidas relatadas.”

(Connelly y Clandinin, 1995, p. 11)

En la presente investigación valoramos y analizamos narraciones estudiantiles recogidas mediante el instrumento de las bitácoras de reflexión, de modo que la narración tiene un rol central en nuestro estudio. En Díaz (2005) se sintetizan algunos aspectos de la narratividad en cuanto a su relación con la educación y la investigación. Al respecto, señala Díaz:

“La narratividad es una condición natural de nuestra experiencia: los relatos nos descubren que la experiencia misma tiene un referente que está hecho de relatos. Los relatos se refieren a la experiencia y la experiencia se refiere a los relatos. Una experiencia presente se vuelve signo de ella misma, signo del relato que será luego.

Las obras de Kieran Egan (1998) y James Wertsch (1991) han difundido la importancia de la narración en el campo de la pedagogía y la didáctica, en el mundo de habla hispana. Egan ha insistido en la revalorización del papel de los relatos en la educación desde tres perspectivas: la enseñanza, el aprendizaje y la investigación. Egan comparte con Bruner (1988) que la narración es un recurso que posibilita captar y pensar el mundo y la propia experiencia. Los aportes de Egan destacan la narración como un medio eficaz que al mismo tiempo ayuda a recordar y proporciona un ambiente cómodo y hospitalario para la fantasía y la imaginación. Por su parte, Wertsch insiste en el valor de la narratividad como herramienta central para comprender la forma en que los estudiantes se representan un número muy importante de contenidos escolares. En general, la indagación con estudios narrativos nos permite describir y representar las relaciones humanas y la interacción inherente en los actos complejos de la enseñanza y el aprendizaje, para validar sus múltiples realidades y dimensiones (...) Para Teun van Dijk (1995), la primera característica fundamental del texto narrativo consiste en que este texto se refiere ante todo a acciones de

personas, de manera que las descripciones de circunstancias, objetos u otros sucesos quedan claramente subordinadas a tales acciones. Esta característica semántica de un texto narrativo se une a otra de orden pragmático –expresión asimismo del modo económico de operar de nuestro cerebro-: por regla general, un hablante sólo explicará unos sucesos o acciones que en cierta manera sean interesantes. Este criterio hay que considerarlo de modo relativo y de acuerdo a cada contexto; sin embargo, presupone que únicamente se explican el suceso o las acciones que hasta cierto punto se desvían de una norma, de expectativas o costumbres, generando una suerte de “ruido” o “alerta” en la persona. No se narra una historia sobre el desayuno, el mecanografiado de una carta o el abrir una puerta si con ello no va ligado algo especial. En otras palabras: un texto narrativo debe poseer de referentes, como mínimo, un suceso o una acción que cumplan con un criterio del interés. Mumby (2002) en tanto, ve la narrativa como parte de un terreno complejo y cambiante, constituyendo el sentido del mundo social, cuyos conflictos son puestos en escena por la narrativa misma, como parte constituyente de ese terreno complejo y cambiante. Tendremos entonces que el corpus de una narrativa cristaliza sucesos que se desvían de lo esperado, encerrando disrupciones en el devenir cotidiano, que por ello ameritan del análisis y búsqueda de alternativas, ya sea para incorporar esa dinámica y sus significaciones en el fluir usual-consciente de la vida de la persona o modificar aquello que se revele concomitante a un mal-estar o un nuevo-estar de la persona. Para nuestros fines, se corresponde con un mal-entender o con un nuevo entender del estudiante”.

(op. cit., 148-149)

Nuestro interés radica en la importancia de la narrativa para “capturar” esos eventos especiales que el estudiantado comunica durante sus procesos de aprendizaje, durante un período lectivo de su asignatura, a fin de permitirnos desentrañar su naturaleza.

CAPÍTULO III

Marco Metodológico

La metodología utilizada se inscribe en el Programa de Investigación de la Socioepistemología (Cantoral & Farfán, 1998) con un marco de indagación cualitativa, puesto que nuestro interés radica en comprender entendimientos del estudiantado a partir de su propia reflexión, es decir, desde el propio marco de referencia de quien actúa. Según Mella (2003) en las investigaciones cualitativas *“se debe en vez de la exactitud hablar de entendimiento en profundidad. Se trata de obtener un entendimiento lo más profundo posible”* (op. cit., p. 23) Por su parte, destacan Taylor y Bogdan (1986, citados en Pérez, 1994, p. 47) *“para el investigador cualitativo, todas las perspectivas son valiosas: busca una comprensión detallada de las perspectivas de otras personas”*.

3.1. Tipo de investigación

La presente investigación responde a un encuadre exploratorio ya que consideramos que aborda los entendimientos estudiantiles desde una perspectiva no muy conocida, como lo es a partir de la propia reflexión del estudiantado acerca de sus procesos de estudio y aprendizajes, mientras éste se halla en el período lectivo de una asignatura específica, en este caso, Cálculo Inicial. De acuerdo a Dankhe (1986, citado en Hernández et al., 1998, p. 59) *“Los estudios exploratorios sirven para familiarizarnos con fenómenos relativamente desconocidos, obtener información sobre la*

posibilidad de llevar a cabo una investigación más completa sobre un contexto particular de la vida real (...) establecer prioridades para investigaciones posteriores“.

3.2. Diseño de investigación

La investigación sigue un diseño de estudio de casos cualitativo. En el estudio se analizaron discursos estudiantiles registrados en bitácoras de reflexión así como algunos de los discursos del profesor que emergieron a propósito de la interacción en el aula de una asignatura de Cálculo Inicial. En dicho curso se pidió a los estudiantes -como parte de sus actividades lectivas- la elaboración de bitácoras de reflexión personal en las que ellos reflexionaron en torno a los focos de estudio tratados por el profesor.

3.3. Los casos

Se estudian los casos de dos grupos cursos de la Universidad Católica Cardenal Silva Henríquez, de Santiago de Chile, de primer año de la carrera de pedagogía en matemáticas e informática educativa, en la asignatura de Pensamiento Analítico I. Un grupo curso del segundo semestre lectivo del año 2002, y otro del año 2003. Con un promedio de 30 estudiantes por curso, los jóvenes responden a un nivel socio-económico medio-bajo, con edades que fluctúan entre los 18 y 20 años, provenientes en su mayoría del segundo ciclo de estudios, esto es, con doce años de escolaridad. El profesor de la asignatura, en cada grupo curso, es quien levanta el presente trabajo de investigación.

3.4. Recolección de la Información

Para obtener producciones estudiantiles se recurrió a las textualidades registradas en el medio didáctico de la bitácora reflexiva (cfr. Anexo 1) que, para efectos de este estudio se constituyó en la técnica privilegiada de recolección de información, complementada con la técnica del cuestionario.

Las bitácoras de reflexión fueron elaboradas por cada estudiante del grupo-curso. Las mismas, versaban sobre la reflexión del estudiantado acerca de sus procesos de aprendizaje durante la asignatura y de sus valoraciones didácticas con relación a las situaciones de enseñanza puestas en el aula, en su calidad de estudiantes en formación inicial de pedagogía.

La elaboración de las bitácoras, como parte de las actividades lectivas, tuvo una ponderación del 10% de la nota final del semestre, fijando como nota mínima de aprobación un 4.0 (cuatro)⁵. La intencionalidad didáctica durante su implementación fue generar acciones mediadoras que hicieran emerger la reflexión de los procesos estudiantiles de aprendizaje.

Con el fin de triangular con lo explorado por medio de las bitácoras, se aplicó a los grupos que realizaron el trabajo de bitácoras, un cuestionario exploratorio (cfr. Anexo 3) de algunas nociones variacionales de uso frecuente en sus reflexiones de bitácora.

⁵ En el sistema educativa chileno, la escala de calificaciones es de 1.0 (uno) a 7.0 (siete). Siendo la nota mínima de aprobación de una asignatura, la nota 4.0 (cuatro).

3.5. Método de análisis de la información

A partir de la lectura de las bitácoras, se realizaron dos tipos de análisis. Por una parte, se recurrió a aquellas bitácoras en las que se vislumbraba algún indicio de universo discursivo, a ser profundizado durante la investigación. Y, por otra, se prestó atención a diversas bitácoras que de cierto modo presentaban textualidades que ponían en juego una misma faceta representacional.

Para el análisis de las textualidades estudiantiles se consideró en algunos momentos un análisis frase a frase y, en otros, uno por párrafos. Se recurrió a un método comparativo constante, que permite desarrollar categorías mediante la búsqueda de relaciones y significados de la información presente en las propias palabras escritas por los estudiantes en sus bitácoras. Se codifican categorías inductivamente y cada expresión significativa que surge en la investigación -según Pérez (1994)- se clasifica y compara con las anteriores, lo que permite la reelaboración de categorías.

Los dispositivos que iluminan los análisis de las textualidades, tendientes a la distinción de entendimientos, son las nociones de pseudo concepto y cadena asociativa (Vygotsky, referenciado en Díaz, 1999) y de metáfora conceptual (Lakoff & Núñez, 2001; Lizcano, 1996) los cuales fueron de especial utilidad en orden a elaborar explicaciones de la evolución de las representaciones variacionales del estudiantado. Culminando los análisis se puso en diálogo lo elaborado con el dispositivo de las “representaciones estudiantiles variacionales” el cual distingue dos dimensiones: aquella de los “entendimientos” (que imbrican redes de significados con tonalidades emocionales) y esquemas de actividad matemática susceptibles de ser desarrollados por el estudiantado. Más específicamente, las nociones referidas de Vygotsky y de Lakoff y Núñez permitieron distinguir las redes de

significados comprometidas en las representaciones estudiantiles variacionales. Las tonalidades emocionales se levantaron con la técnica de la codificación abierta.

CAPÍTULO IV

Proceso de las Bitácoras de Reflexión

Como ya se ha mencionado, parte del componente metodológico de nuestro estudio fue el análisis de discurso de registros en bitácoras estudiantiles, elaboradas por el estudiantado mientras éste cursaba su asignatura de Pensamiento Analítico I (equivalente a un curso de Cálculo Inicial) en la carrera de pedagogía en matemática e informática educativa.

En este capítulo, se describe sucintamente el currículum vivido y se analiza el proceso de las bitácoras, ilustrando con dos casos el proceso de elaboración de éstas y evidenciando complejidades concomitantes a los aspectos cognitivos que concurren al aula -durante la situación de enseñanza- que dicen relación con tonalidades emocionales con respecto al saber, al docente o a la situación de enseñanza.

4.1. Dos fuentes principales del currículum vivido⁶

Los cursos fueron organizados sobre la base de la concurrencia de dos discursos curriculares: el discurso clásico-formal y aquel cristalizado en

⁶ Entendido este como aquel que se produce cotidianamente en la práctica de la enseñanza y que es el que efectivamente vivencia el estudiante durante el período lectivo en el aula.

un texto de Cálculo. Este último, lo hemos llamado *fenoménico*⁷ debido a que con él se buscó enfrentar a los estudiantes a situaciones problemas de un texto guía y su análisis cualitativo y cuantitativo, como hilo conductor para la enseñanza de las nociones del cálculo, vía el estudio de una magnitud que está cambiando.

Como ya se señaló en el capítulo anterior, la experiencia se implementó en dos períodos lectivos, uno el segundo semestre del año 2002, y otro, el segundo semestre del año 2003. Y el profesor que impartió la asignatura, fue el mismo quien levanta a posteriori este trabajo de tesis.

Para el curso del año 2002, la principal directriz fue el discurso fenoménico buscando conceptualizar, física y geoméricamente, la derivada, sin necesidad de incorporar de modo riguroso y formal a la noción de límite. Luego, se continuó con la algoritmia de derivadas y su “aplicación” a la resolución de problemas de optimización, usuales de los textos de cálculo diferencial tradicionales. En esta oportunidad, se pidió la elaboración de una bitácora semanal, significando esto un total de doce entregas de bitácoras, por parte del estudiantado. Dicho proceso resultó demasiado extenuante y difícil de llevar a cabo, por una parte, para la elaboración de las bitácoras por parte del estudiantado y, por otra, para la devolución escrita del profesor.

En la segunda experiencia, para el curso del año 2003, la situación fue ligeramente diferente debido a que por ese período se fue consolidando en la carrera la implementación del discurso curricular clásico-formal. No obstante aquello, debido a la diferente postura didáctico-epistemológica del profesor, se optó por hacer puente entre el discurso curricular fenoménico que se venía incorporando y el discurso clásico-formal efectivamente implementado

⁷ En el sentido que se comienza con el estudio de situaciones concretas para, a partir de ello, conformar objetos mentales en el ámbito matemático.

en la carrera. Para ello, se fueron intercalando ambas aproximaciones durante el desarrollo del curso, es decir, la clásica-formal y la fenoménica. Al inicio del curso, en un acto de transparencia con el estudiantado, respecto de la modalidad didáctica que se llevaría a efecto durante la asignatura, se les explicó que mediante dos “camino” de naturaleza distinta se conceptualizaría la noción de derivada, noción fundamental para el estudio del cálculo diferencial, a fin de enriquecer su formación y, por ende, se les pedía dedicación para la asignatura. Respecto de las bitácoras, y desde la experiencia del año anterior, se redujo la cantidad de entregas de éstas de doce, a cinco por estudiante.

En ambas experiencias, con la elaboración de las bitácoras se persiguió un papel central de acercamiento entre el profesor y la heterogeneidad de vivencias y entendimientos estudiantiles presentes en el aula en período lectivo. Adicional a ello, y siempre en el marco de actividad de la asignatura, a fin de familiarizar al estudiantado con el análisis cualitativo de fenómenos variacionales, se implementó durante las cuatro primeras sesiones de clases, una secuencia didáctica respecto de la construcción de la noción de periodicidad, vía las prácticas argumentativas de los participantes. (cfr. Anexo 2).

Para detallar lo que respecta a los discursos curriculares adoptados en la asignatura, señalamos que para la fase curricular fenoménica se contemplaron las siguientes unidades temáticas:

- Estudio de la variación mediante la razón de cambio (RDC).
- Conceptualización de la derivada como razón de cambio instantánea.
- Conceptualización de la derivada como cociente de diferenciales
- Formulación analítica de la derivada.

No obstante, en virtud que la asignatura correspondía a la primera de entre otras cuatro, de Pensamiento Analítico, que formaban parte de la malla curricular de la carrera, y que -como ya se mencionó- para el período del segundo curso se estaba consolidando en la carrera la implementación de prácticas pedagógicas que principalmente recurrían al enfoque clásico-formal de presentación de las nociones del Cálculo, es que se debió abordar, a su vez, la enseñanza de límite y continuidad para definir también la derivada con sustento en el conocimiento de esas nociones matemáticas. La progresión del saber en el ordenamiento clásico-formal, fue la del estilo tradicional:

- Funciones.
- Formulación analítica de límite. Cálculo de límites.
- Continuidad y análisis de discontinuidades.
- Definición analítica de la derivada (por medio de límites).
- Cálculo de derivadas y sus aplicaciones.

Particularmente, uno de los aspectos que posibilitó la co-implementation de ambos discursos curriculares fue el hecho que la asignatura, por Programa Oficial, contaba con 8 horas pedagógicas semanales (es decir, 8 bloques de 45 minutos cada uno).

4.1.1. Discurso curricular fenoménico del texto guía

El texto guía utilizado para el discurso curricular fenoménico fue el de Pulido et al. (2001)⁸ En él, sus autores, en lugar de ofrecer una presentación

⁸ A sugerencia de sus autores, se propone usar el Texto con un Cuadernillo de Talleres, con la modalidad de realizar primero (de forma individual y grupal) la actividad del Cuadernillo y luego abordar la unidad temática del texto. La propuesta no se aplicó exactamente igual a como señalan sus autores. Se modificó en su tratamiento para hacerla más cercana al contexto institucional, con relación a las prácticas pedagógicas y escolares vigentes. Es así

tradicional que muestre el orden lógico y estructurado que caracteriza la exposición clásica de los textos de cálculo diferencial, buscan que el primer contacto que los estudiantes tengan con las nociones y conceptos del cálculo se realice enfrentándolos previamente con aquellas situaciones problemáticas que propician de una manera natural su construcción. Así, la problemática común que se estructura en el texto es precisar el valor futuro de una magnitud que está cambiando. Es decir, abordar la problemática de predecir.

La utilización del texto, en la actividad curricular, se llevó a cabo básicamente con tres metodologías:

Talleres Grupales. Los estudiantes hacían lectura grupal en clases o antes de ella de algunas unidades del texto y, en otras ocasiones, resolvían secuencias de problemas propuestas en el Cuadernillo. Posteriormente, se realizaba una puesta en común de la actividad grupal. El objetivo fue discutir en clases, situar a los estudiantes en el contexto de la resolución de problemas, vivenciar el contraste de elaboraciones grupales y sistematización, al final de la clase, por parte del profesor;

Informes Grupales. Acerca de algunos capítulos del texto guía o temas relacionados, los cuales debían incluir una descripción de la modalidad de trabajo utilizada y ser entregados en plazos que se convenían en forma conjunta. El objetivo fue enfrentar a los estudiantes a la sistematización de las temáticas estudiadas y, promover así, una interiorización mayor acerca de lo realizado durante los talleres o una preparación para los mismos;

que el Cuadernillo se usó sólo al principio, para el estudio de la razón de cambio, y luego se prosiguió con trabajos grupales y disertaciones de los análisis presentados en el texto.

Disertaciones en clases. Similar a los Informes Grupales con la salvedad que, en este caso, se demandaba una etapa de organización y validación de su sistematización, por medio de presentaciones en Power Point.

La labor del profesor en dichas actividades fue principalmente la de monitorear los talleres grupales, coordinar las ideas expuestas por los equipos de trabajo e institucionalizar lo explorado y socializado por los estudiantes, en dichas actividades.

Descripción y utilización del texto guía.

Mediante la integración del análisis progresivo de algunas situaciones problemas por la conversión entre los registros fenoménico, gráfico, tabular, algebraico y geométrico, en el texto se presenta una reconstrucción con significado de los contenidos matemáticos involucrados en la resolución de la problemática abordada al predecir el estado futuro de una magnitud de interés que cambia con respecto a otra de referencia.

Primero se consideraron situaciones con razón de cambio constante (modelo lineal) comenzando con la problemática del movimiento rectilíneo uniforme, la cual se introduce con el análisis de la situación de un automóvil que transita por una carretera recta a velocidad constante. Luego, se extiende a otros contextos en donde, para fines prácticos, se supone que hay variación a razón constante. En esta parte de la implementación didáctica se buscó que los estudiantes analizaran el significado de la pendiente de una recta y su relación con la razón de cambio de una magnitud con respecto a otra.

El tratamiento de pendiente y razón de cambio se realizó prestando atención a los tipos de registros para indicar una u otra noción, reservando

generalmente la acepción de pendiente para el registro geométrico y la de razón de cambio para el físico, en tanto que para el registro gráfico, se transitaba de modo indistinto, desde uno a otro uso lingüístico entre estas dos acepciones, tal como se presenta en el texto.

A su vez, se buscó promover el uso de la noción de predicción, la que en algunos apartados del texto se presenta de modo bastante explícito, por ejemplo, en la página 24-25 donde se indica:

“estamos interesados en calcular un nuevo valor de **y** correspondiente a un nuevo valor de **x** obtenido al cambiar esta variable de **x₁** a **x₂**, es decir, habiendo cambiado $\Delta x = x_2 - x_1$.

Dicho valor de **y** lo podemos obtener si trabajamos algebraicamente la fórmula para calcular la pendiente **m**, obteniendo:

$$y_2 = y_1 + m(x_2 - x_1)$$

O bien

$$y_2 = y_1 + m\Delta x \quad (...)$$

“Un nuevo valor de **y** (llamémoslo **y₂**), es igual a un valor anterior (**y₁**) más el cambio que ha experimentado (**mΔx**). Este cambio experimentado, por su parte, se obtiene al multiplicar la razón de cambio (**m**) por el cambio de **x**, (**Δx**)”

(Pulido et al., 2001, p. 24-25)

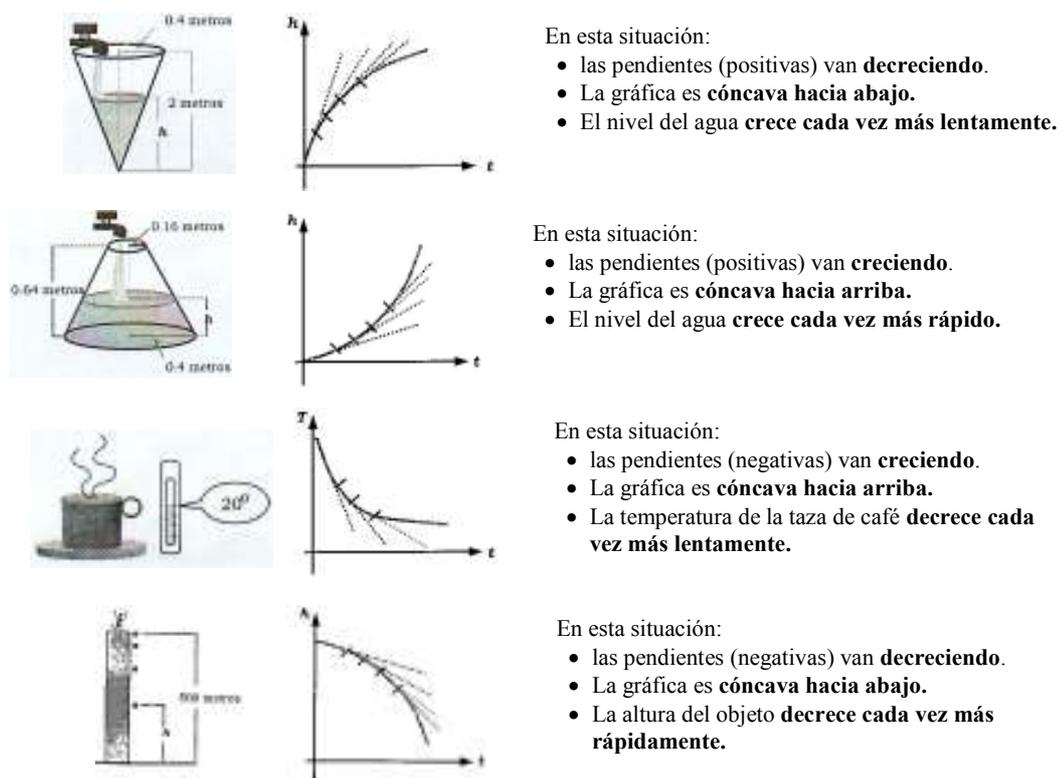
Luego, se estudió cualitativamente la problemática cuando la razón de cambio no es constante, con situaciones de llenado de recipientes cónicos, el enfriamiento de una taza de café y la caída libre. Para ellos, se relacionaron articulaciones entre los registros tabular, geométrico y gráfico. En el discurso áulico, se usó frecuentemente la caracterización del texto acerca de magnitudes que crecen cada vez más lento o cada vez más rápido (Pulido et al., 2001, p.33).

A su vez, en el texto, se sintetizan las principales ideas al final de cada capítulo, como los que se muestran en el siguiente esquema:



(Pulido et al., 2001) p. 51-52)

Fig. 1a. Cuadro sintetizador de la caracterización de concavidad de la curva, hacia arriba y hacia abajo, en términos de la rapidez de decrecimiento de la magnitud estudiada en la situación



(Pulido et al., 2001, p. 53-54)

Fig. 1b. Cuadro sintetizador de las concavidades de una curva en términos de la rapidez de crecimiento o decrecimiento de la magnitud de interés que se estudia, en el fenómeno que se modela, y su conexión con el análisis de la pendiente de la recta tangente en cada punto de la curva.

Luego, haciendo uso de las tipificaciones anteriores, se definió y caracterizó cualitativamente a las nociones de concavidad y punto de inflexión de una curva, en términos de la rapidez de variación de la respectiva magnitud en estudio. Posteriormente, se retomó el caso de una partícula que se mueve en línea recta, pero ahora cuando la partícula no tiene velocidad constante, pero sí su aceleración, tal es el caso de la caída libre de un cuerpo. Para su estudio se sigue el Método de Euler, cuya idea básica es:

Idea básica:
A pesar de que la razón de cambio de s con respecto a t (la velocidad) va cambiando, podemos considerarla como si fuera **constante** en pequeños lapsos de tiempo Δt .
Mientras más pequeño sea el lapso o intervalo de tiempo, menor será la variación que tenga la velocidad durante ese intervalo, y por ende, será más convincente el argumento de considerarla **constante**.

(Pulido et al., 2001, p. 67)

Por la vía geométrica se deduce la representación algebraica para la magnitud “distancia recorrida” en el movimiento de caída libre.

A partir de esta etapa, se adoptaron principalmente las actividades de informes y disertaciones, de los análisis presentados en el texto. Se consideró el caso de un movimiento rectilíneo con velocidad de modelación cuadrática (conocida su expresión algebraica) donde ya la aceleración no es constante, para luego, mediante el Método de Euler (Pulido et al., 2001, p. 93-96) aproximar valores de la magnitud de desplazamiento.

Posteriormente, se retomó la problemática de la caída libre para aproximar cuantitativamente la velocidad que lleva el cuerpo al transcurrir t_0 segundos. Siguiendo el Método de Euler, esto es, considerar un intervalo $[t_0,$

$t_0 + \Delta t$], tomar como constante la velocidad en t_0 , y así obtener una aproximación para la velocidad en t_0 ,

$$v(t_0) \cong \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Ello se realizó inicialmente para $v(1)$, mejorando las aproximaciones al considerar valores numéricos más pequeños para Δt , previo a generalizarlo para $v(t_0)$. De ese modo se incorpora la noción de límite con la metáfora de que mientras más pequeño el Δt considerado, entonces las aproximaciones $\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$ se irán “estabilizando” en el valor exacto $v(t_0)$. En esta etapa, se introduce, por primera vez, la simbología de límite, en términos de:

“ Δt tiende a cero”

y denotaremos esto mismo de manera compacta mediante el símbolo:

$$\Delta t \rightarrow 0$$

Utilizando esta notación, podemos asegurar ahora que, si $\Delta t \rightarrow 0$ entonces los valores de la expresión

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

se irán “estabilizando” en el **valor exacto** $v(t_0)$.

Este proceso lo denotaremos con la simbología:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

(Pulido et al., 2001, p. 129)

Una vez caracterizado como obtener la razón de cambio de la magnitud de interés, en un valor específico de la magnitud de referencia, se asocia un significado geométrico a ese proceso de aproximación, por “acercamientos” al punto de la gráfica que relaciona ambas variables:

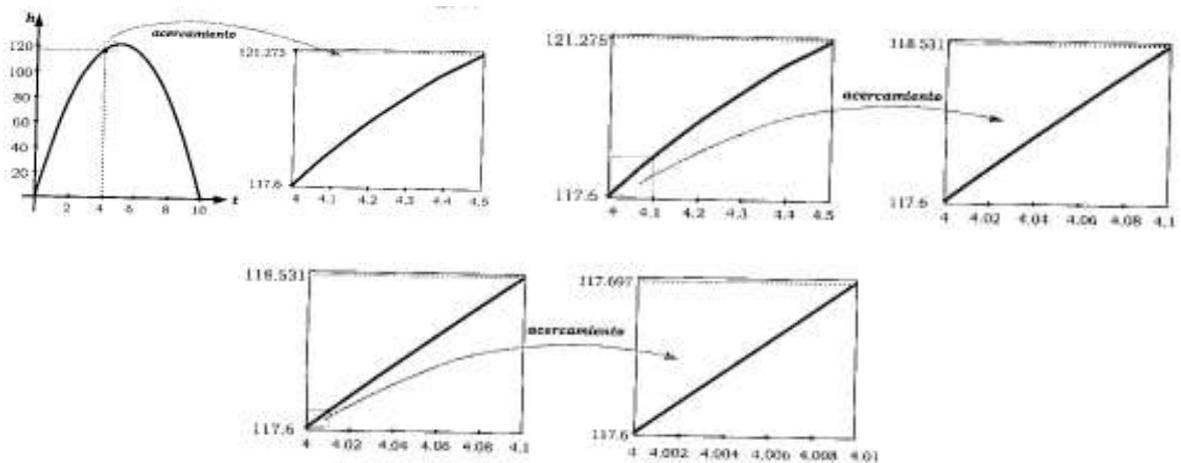


Fig. 2: (Pulido et al., 2001, p. 136)

Se sugiere que a medida que se mejora el acercamiento, las “porciones” de gráfica que se observan en las ventanas se asemejan cada vez más al segmento de recta que une a ambos extremos de la ventana. Y se verifica, mediante los cálculos de la pendiente de cada segmento de recta, la correspondencia con la estimación de la razón de cambio de la magnitud estudiada, en cada intervalo considerado.

Luego de este desarrollo, en el cual se fue dotando de significados concretos a la noción de razón de cambio, con las distintas situaciones abordadas, por medio de una problemática común, de predecir un valor futuro de una magnitud en estudio, conociendo su estado presente, se llevó a cabo el “desprendimiento”⁹ de significado concreto de las magnitudes para formular la noción matemática de derivada de una función, situación que se resume esquemáticamente a continuación:

⁹ En el sentido de proporcionar una fase similar a lo que, desde la Teoría de las Situaciones Didácticas, se conoce como un proceso de descontextualización (Brousseau, 1986) la cual la realiza el profesor, como parte de la institucionalización de la noción enseñada.

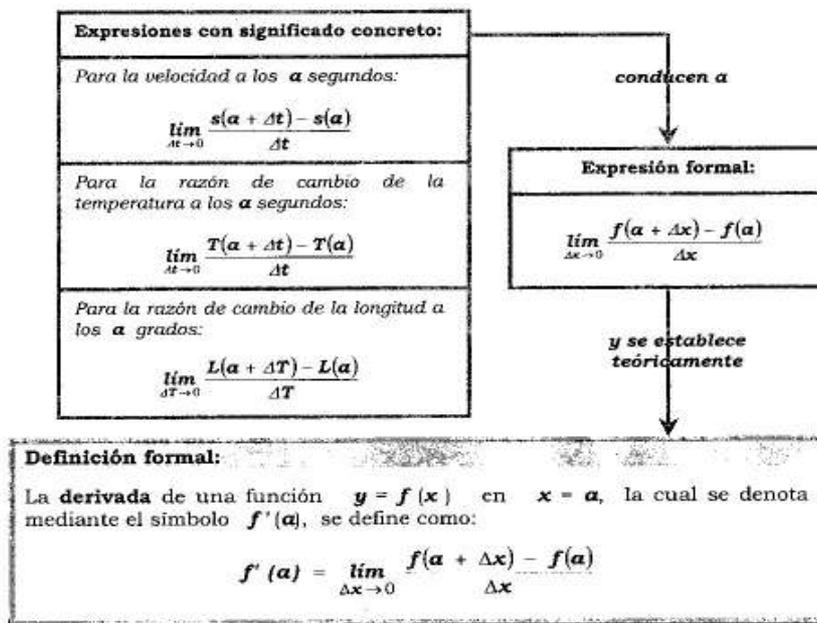


Fig. 3: (Pulido et al., 2001, p. 136)

Ya establecida la derivada a partir de su faceta física, se recupera el proceso geométrico vía el supuesto de constantificación de la velocidad, para pequeños intervalos de tiempo, como se venía trabajando con el método de Euler. Se forma una recta tangente al suponer constante la velocidad en un instante dado, lo que permite conceptualizar la derivada como cociente de diferenciales, con una mirada dinámica, como se muestra en el siguiente esquema:

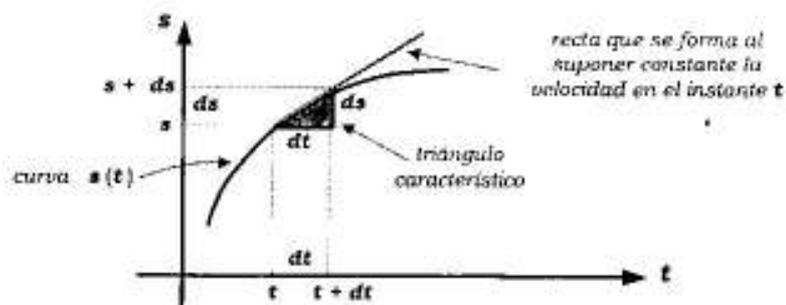
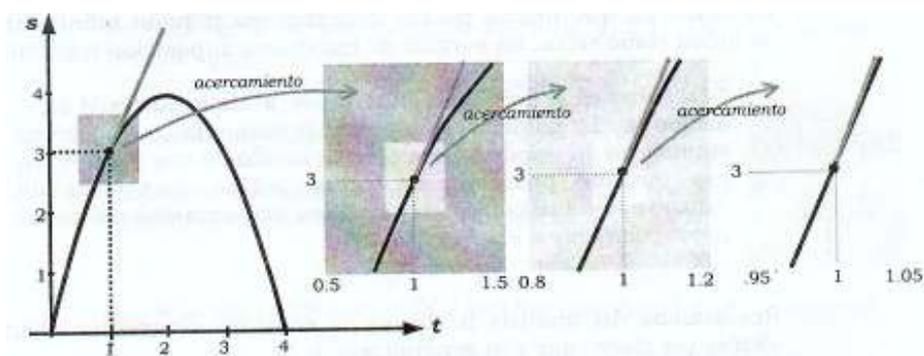


Fig 4: (Pulido et al., 2001, p. 186)

Aunque se realizan acercamientos infinitesimales, de ventanas alrededor del “punto de tangencia”, hay un significado dinámico que propicia la predicción para un estado ulterior al punto de tangencia, de suponer la velocidad o razón de cambio de s respecto del tiempo, constante en ese instante:



(Pulido et al., 2001, p. 185)

Fig 5: Se realiza un comportamiento tendencial entre la recta y la curva cuando se consideran “ventanas” cada vez más infinitesimales alrededor del punto en estudio. En este caso, el punto $(1,3)$.

4.1.2. Discurso curricular clásico-formal

Esta fase, se implementó con material y ejercicios preparados por el docente y se sugirió la utilización de textos tradicionales de Cálculo Diferencial tales como el Cálculo y Geometría Analítica. Volumen I de Larson & Hostetler (1995) y el Cálculo Diferencial e Integral de la conocida Serie Schaum. La labor del profesor se centró principalmente en desarrollar sesiones expositivas-interactivas, poniendo en juego conversiones entre registros de representación semiótica (Duval, 1999) a fin de facilitar la comprensión de las nociones matemáticas de límite y continuidad; y también, en el monitoreo de talleres grupales que buscaban el dominio de procedimientos de cálculos de límites, derivación, análisis gráfico y la resolución de problemas, por parte del estudiantado.

Este discurso curricular no considera necesario partir del estudio de fenómenos variacionales para conceptualizar la noción de derivada, sino que lo hace sobre la base de la progresión del saber señalada al inicio de esta sección.

En la implementación didáctica, para introducir la noción de límite se hizo una aproximación intuitiva y luego, se recurrió a la presentación clásica intentando realzar la comprensión gráfica de la definición analítica de límite, destacando la identificación de los números ϵ y δ como radios, el primero arbitrario y el segundo como indicador o controlador del encajonamiento o no de la “imagen intervalar” alrededor de δ , en una vecindad de ϵ . De modo que, la metáfora de la noción de límite, en esta aproximación, no requiere de movimiento de una partícula, pues lo “que varía” es el valor de δ para cada ϵ , es decir, el encajonamiento vía vecindades.

En esta aproximación, la faceta física de la derivada pierde significatividad, siendo la más recurrida para introducir la derivada, la faceta geométrica. A modo de ejemplo, el tratamiento que se hace en Larson & Hostetler (1995) es aquel en que después de haber expuesto la teoría de límites, se plantea la problemática de hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Se “acerca” al punto de tangencia, otro punto sobre la curva, por el cuál (además del de tangencia) se traza una recta secante. En el proceso de aproximar el otro punto al punto de tangencia, la recta tangente se concibe como “el límite al cual se aproxima la recta secante” y la pendiente de la recta tangente se conceptualiza por medio de la expresión analítica de límite, tal como se aprecia en el siguiente esquema:

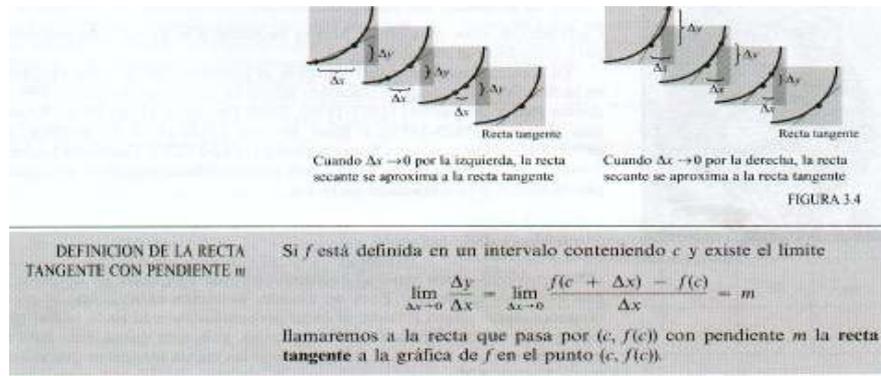


Fig. 6: (Larson y Hostetler, 2001, p. 104)

Es decir, se centra la atención en el proceso de aproximación a la tangente y pasa a segundo plano el comportamiento local de la curva y su “similitud” con la recta tangente, que Pulido & Alanís (2001) abordan por aproximaciones sucesivas de “ventanas” y cálculos de pendiente en las mismas, relacionando, por una parte, el comportamiento gráfico de la tangente y la curva, y, por otra, haciendo corresponder la aproximación a la razón de cambio instantánea en un punto, mediante razones de cambio y pendiente, por medio de la “estabilización” del valor numérico de dichas pendientes o razones de cambio en el valor numérico de la que se pretende encontrar.

Finalmente, en esta aproximación clásica-formal, se introduce la noción de derivada mediante la definición analítica:

“La derivada de una función. Hemos llegado a un punto crucial. El límite utilizado para definir la pendiente de la tangente se usa también para definir una de las dos operaciones fundamentales del cálculo: la derivada.

La **derivada** de f en x viene dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x_c)}{\Delta x}$$

supuesto que exista tal límite.”

Fig. 7: (Larson y Hostetler, 2001, p. 104)

4.2. Análisis del Proceso de las Bitácoras

En este apartado, se describe la mediación pedagógica puesta en aula por el profesor/investigador a fin de promover la reflexión del estudiantado, durante el período lectivo, con respecto a sus procesos de aprendizaje en el curso de Pensamiento Analítico I. Para ello, recurriremos a algunos episodios de bitácoras; reflexiones del estudiantado acerca del proceso vivido; y el estudio retrospectivo del profesor/investigador respecto de la aproximación mediadora llevada a cabo.

4.2.1. Dos casos que ilustran el proceso de elaboración de bitácoras

Llamamos bitácoras de reflexión personal a las reflexiones escritas, que las y los estudiantes debieron elaborar y entregar periódicamente durante su curso de Pensamiento Analítico I. Éstas fueron en formato libre y la reflexión debía centrarse en la comprensión de las temáticas tratadas en la asignatura (que ellos escogían escribir) o en otras variantes relativas a aspectos didácticos que consideraran importantes de abordar, en su calidad de estudiantes de pedagogía. En el instructivo escrito entregado para la elaboración de las bitácoras (cfr. Anexo 1) se caracterizaron como un diario reflexivo para recabar experiencias y aprendizajes del curso, a fin de evaluar el proceso de aprendizaje del estudiantado. En dicho instructivo, se explicitaron dos objetivos:

“Los propósitos fundamentales de la bitácora son:

- Que usted reflexione sobre su propio aprendizaje y que por lo tanto clarifique su entendimiento de la temática discutida.
- Dar al profesor retro-alimentación sobre lo que usted piensa acerca de las actividades de aprendizaje realizadas, de forma de hacer ajustes del caso durante el proceso, lo cual redundará en el mejoramiento del curso.”

(cfr. Anexo 1)

Para su segunda aplicación (año 2003), de la experiencia recogida con su primera aplicación, el instructivo inicial se modificó, dando mayor orientación a la elaboración de las bitácoras con la inclusión de las componentes ¿Qué hicimos? ¿Qué piensa usted sobre eso? y ¿Qué aprendió? (cfr. Anexo 1).¹⁰

No obstante el instructivo escrito, al ser la actividad de elaboración de bitácoras desconocida como actividad regular en período lectivo de una asignatura, en el contexto institucional en que fueron aplicadas, éste se reforzó durante el proceso por diversas acciones mediadoras que, con las bitácoras en sí mismas, es lo que llamamos mediación en su conjunto.

Por una parte, el profesor procuró una devolución escrita de las bitácoras a cada estudiante. Al contar los cursos con un promedio de cuarenta y cinco estudiantes, no siempre fue posible hacerlo, por lo que otra alternativa de mediación fue en varias clases, en los primeros minutos, dedicar tiempo a interactuar con el estudiantado y compartir opiniones respecto del proceso. Adicional a estas instancias, el profesor buscó propiciar un ambiente de diálogo y apertura para generar en sus estudiantes la confianza de escribir sus reflexiones. Se procuró generar horizontalidad en las relaciones profesor/estudiantado, y resaltar la importancia de la actividad, no por un “trámite” pedagógico, sino para que ellos, en la instancia de sus bitácoras, profundizaran sus aprendizajes y expusieran sus puntos de vista. Parte de la mediación escrita y oral, fue centrar el objetivo de las bitácoras, ya que no resultó fácil comprender la actividad, como se ilustra con las siguientes reflexiones:

¹⁰ En ambos casos, las indicaciones escritas corresponden a una adaptación de las indicaciones para la elaboración de bitácoras que el profesor recibió en cursos del período lectivo de la Maestría que cursaba durante el año 2001.

“Para mí en un principio fue difícil, poder llegar a lo que usted (profesor) pide, ya que pide una metacognición, o sea, el como mi mente puede llegar a resolver un problema matemático, con lo que uno piensa, como toma el ejercicio, de que contexto lo puede hacer más fácil, todo esto me costó durante todo el semestre y me sigue costando, ya que en la enseñanza media sólo nos enseñan a llegar al resultado, y si esto está bien un siete¹¹ (...) Entre la 5° y la 7° yo por lo menos tuve mi más alto entusiasmo por hacerla, ya que tenía distintas sugerencias de todo tipo, también pudo haber sido por la materia que a mi me agradó bastante o haber encontrado el verdadero objetivo de la bitácora (...) Luego de la 8° fue más complicada su redacción de bitácoras, porque uno sabía lo que usted pedía y no podía irse por las ramas” **[Mario, al final del proceso, 2002]**

“Todo comienza como una experiencia nueva, jamás en mi vida había visto una cosa así, en la cual tuviera que describir mi aprendizaje por intermedio de algo. ¿Bitácora...?”
[Ismael, al final del proceso, 2003]

“Cuando comenzamos el trabajo debo admitir que me desconcertó (...) no lograba entender que era lo que el profesor quería de ellas. Con el tiempo fui comprendiendo...”
[Maria, al final del proceso, 2003]

Para ilustrar aspectos involucrados a la mediación escrita, presentamos dos casos. El primero intencionando la descentralización de explicaciones procedimentales y, el segundo, la descentralización de aspectos fundamentalmente de corte didáctico, alentado a una mayor presencia de mirada estudiantil respecto de sus propios aprendizajes.

El Caso de Mirtha

MIRTHA participó del grupo curso de la segunda experiencia. Se caracterizó por ser una estudiante más bien silenciosa en clases, en sus bitácoras abordó en varias ocasiones lo mucho que le incomodaban las “copias” y los murmullos en clases o evaluaciones y que ella requería de

¹¹ En el sistema educativo chileno, la escala de notas es de 1 a 7, siendo la nota mínima de aprobación un 4.

concentración para trabajar. Sus preferencias en las matemáticas eran los ejercicios de tipo procedimental y los problemas que ameriten un desafío.

En sus primeras bitácoras Mirtha dio a conocer sus preferencias didácticas hacia un trabajo individual y expositivo en lugar de interactivo, y a su vez, su molestia por murmullos en clases o pruebas, tal como se aprecia en el siguiente párrafo de su bitácora 1:

“Creo que todas las clases de límites no han sido tan interactivas (...) lo que no las hace más aburridas, por el contrario me agradan más, pues creo que cuando se dialoga mucho se avanza poco, claro que quizás mediante el diálogo el aprendizaje es más parejo y de mejor nivel. Es sólo que en ocasiones cuando ya he entendido una idea me impaciento por continuar, avanzar, para aprender más” **[Mirtha, Bitácora 1, 2003]**

En esa bitácora, parte de la devolución escrita que emprendió el profesor fue mediar hacia una valoración de la participación de los pares como posibilidad de mejorar la comprensión de lo que inicialmente uno puede considerar como entendido, pues la intención didáctica también era movilizar reflexión en aspectos como ese:

“Es bueno este comentario que das (...) considero que mediante el diálogo y la interacción siempre está la posibilidad de enriquecer y comprender mejor lo que inicialmente ya pudieses haber entendido, ello puede darse por una opinión ya sea errónea o correcta de otro compañero(a) tuyo que esté interactuando contigo en ese momento o por alguna situación que genere la interacción mutua” **[Prof a relato anterior de Mirtha]**

El ambiente para las clases, fue tenor regular en sus bitácoras. Las mismas daban luces que su representación de aprendizaje lo sustentaba como un acto pasivo, donde la concentración y la atención en quién expone, es lo principal. La participación de compañeros en las clases lo visualizaba más como interrupción a lo que se expone que como complemento a ello y los talleres en grupos numerosos no eran de su preferencia:

“De las clases en general me molesta mucho que mis compañeros se adelanten a lo que se va a explicar, hablen mucho (...) Sin embargo, me agradan mucho las clases expositivas y la realización de talleres con menos integrantes.” **[Mirtha, Bitácora 2, 2003]**

“En cuanto a mi participación en la clase me mantuve muy atenta, bastante concentrada, sin embargo considero muy desagradable el murmullo constante de la clase además de las opiniones que interrumpen la clase adelantándose a lo que será expuesto, pues hacen que se entorpezca la explicación que se está exponiendo ya que le cortan la continuidad a las ideas.” **[Mirtha, Bitácora 3, 2003]**

Por su parte, respecto de su representación de aprender, este se da más bien como un acto pasivo sustentado por explicaciones, lo que también se dejaba ver en sus bitácoras cuando relataba acerca de lo qué había aprendido:

“Aprendí que para demostrar un límite primero escribo para todo ϵ mayor que cero (...) luego debo llegar desde el módulo de la función menos L (...) si no puedo llegar a $x - a$, entonces debo acotar para llegar al resultado de delta” **[Mirtha, Bitácora 1, 2003]**

“cuando al calcularlos [los límites] resulta de la forma 0/0; entonces se factoriza y se vuelve a calcular para llegar al resultado, pero si en el límite hay expresiones con raíces cuadradas se racionaliza, si hay raíces no cuadradas en la expresión, se ocupa el cambio de variable” **[Mirtha, Bitácora 2, 2003]**

(Los subrayados son nuestros)

Se aprecia que lo aprendido es una secuencia ordenada de opciones a seguir, que captura de las explicaciones dadas en clases. Ciertamente, en estos pasajes citados de sus bitácoras, prima lo procedimental. Ello nos lleva a una reflexión acerca del actuar didáctico del profesor, ya que la serie de secuenciaciones que Mirtha enumera en su episodio de uno u otro modo emergen del discurso áulico, o al menos en parte, por las valoraciones didácticas que hemos identificado, a partir de sus anteriores episodios de

bitácora, ya que como ella ha dejado entrever de sus relatos, las sustenta principalmente en la atención y concentración de las “ideas explicadas en clases”. Por cierto, hay imbricaciones y tramas con procesos propios de Mirtha y de la situación interactiva de aula, de los textos trabajados anterior y actualmente y de sus vivencias, pero es una alerta a las acciones didácticas del profesor. Esta es una de las resignificaciones que fuimos encontrando en las bitácoras, en el interés de entender un poco más los entendimientos y actuaciones del estudiantado, facetas de las prácticas pedagógicas también son develadas por medio de sus relatos escritos. De alguna manera se vivencia el mirarse desde la otredad.

Difícilmente se pudo apreciar en sus bitácoras 1 y 2 episodios claros de lo que ella estaba comprendiendo o significando, pues como se ilustró con los párrafos anteriores, al referirse a sus aprendizajes, en esos casos fue de modo procedimental, lo que no nos dice mucho respecto de sus entendimientos. No obstante, en su bitácora 1, se presenta una textualidad más relacionada con la representación de una noción matemática en estudio:

“Aprendí que un límite es como una barrera, la cual hace la diferencia entre dos segmentos, los elementos pueden acercarse mucho al límite pero nunca lo tocan es como una especie de pared” **[Mirtha, Bitácora 1, 2003]**

Esta representación de límite como una barrera o algo que no puede tocarse, es documentada por Díaz (1999) como un obstáculo sociocultural. Mirtha lo asume como un aprendizaje, y no como un obstáculo. Al parecer no le produce mayor problema, al contrario, para ella es un aprendizaje logrado, de comprender lo que es un límite. Con ello reporta su metáfora de límite “acercarse pero no tocar”, es decir, Límite desde el Dominio Conceptual de Proximidad Física. No un aprendizaje logrado como pudiese

pensarse en un sentido docente como un saber “disciplinar” sino como un saber que le hace sentido a ella.

Así, aunque había visiones respecto de lo que comprendía de alguna noción, el foco de sus relatos quedaba mayormente marcado por el ambiente de aula y lo procedimental. Procurando mediar para que Mirtha ahondara más respecto de sus propias comprensiones acerca de lo que aprendía, parte de las orientaciones que el profesor brindó en esa dirección a Mirtha, en sus bitácoras 1 y 2, fueron:

“Te sugiero poner énfasis en la reflexión acerca de tu comprensión de los conceptos o mecanismos y estrategias de trabajo propio, más que en los procedimientos que uno como profesor pueda brindarte” **[Prof. a bitácora 1 de Mirtha]**

“Te sugiero para la próxima bitácora, además de lo que quieras escribir, focalizar más detalladamente en algún aspecto cognitivo y tu proceso de comprensión respecto de él”
[Prof. a bitácora 2 de Mirtha]

Luego, no obstante que en su bitácora 3, siguió primando lo descriptivo en términos de aprendizaje por procedimientos, a su vez, Mirtha relató con palabras bastante propias su comprensión de una temática en estudio, la derivada como razón de cambio instantánea:

“¿Por qué la derivada es una razón de cambio instantánea? He pensado mucho en la respuesta, al principio creí que se refería a instantánea, pues no había que hacer todo el proceso de aproximación a un valor exacto, aminorando Δt sino que se calcula instantáneamente el valor exacto mediante la definición formal de derivada. Luego pensé que era una razón de cambio instantánea pues se deriva en un punto, es decir, en un instante. Finalmente he pensado que se le da esta característica por la última razón, es decir, por que se calcula la derivada de un instante para así poder llegar a un resultado

exacto, no es como aproximarse, achicando el Δt , sino que se parte del Δt más pequeño llegando así más eficazmente a la exactitud” [Mirtha, Bitácora 3, 2003]¹²

De este modo, tal vez motivada por las interacciones realizadas en clases respecto de lo que se esperaba de las bitácoras, o de las devoluciones escritas como las que se acaban de ilustrar, o de la práctica de escribir sus bitácoras, o seguramente, de una mixtura de lo anterior y de otras más, Mirtha se abocó, en esta ocasión, a revisar qué entendía, deslizándose en su narración, del considerar lo que había aprendido, en términos explicativos, a remirar lo que aprendió, en términos reflexivos.

El Caso de Mario

Mario participó del grupo curso del segundo semestre del año 2002. Se caracterizó por tener bastante dominio en la asignatura. A su vez, buena disposición para los trabajos grupales aunque prefería trabajar individualmente. En reiteradas ocasiones manifestaba su dificultad para escribir, cosa que llamó la atención del profesor pues en su opinión, Mario era expresivo en su escritura. Ya sea en conversaciones con él o en las devoluciones escritas de sus bitácoras, de una u otra forma, así se lo manifestó.

Durante sus tres primeras bitácoras, describía con opiniones respecto a qué encontraba más fácil o más difícil y elaboraba algunas conclusiones interesantes de las actividades realizadas en el curso. Sin embargo, no se detenía con mayor profundidad en las temáticas que aprendía. Le resultaba fácil aprender las ideas centrales y eso parecía bastarle. En su bitácora cuatro hubo un giro en el diálogo escrito:

¹² El análisis interpretativo de este episodio de bitácora lo presentamos en el Capítulo IV, pues lo que pretendemos en esta sección es dar cuenta de las acciones mediadoras generadas en el proceso de elaboración de las bitácoras.

“A mi modo de pensar siento que la bitácora no es de gran importancia, porque usted nos hace reflexionar y profundizar (...) es eso lo que yo no entiendo, el para qué indagar tanto en la materia, sobre nuestro modo de pensar, o el modo de realizar los ejercicios (...) en mi caso no soy muy bueno para expresar mis ideas por medio de una hoja y un lápiz.”

[Mario, Bitácora 4, 2002]

Ello era buen indicio porque Mario, que comprendía rápidamente las temáticas tratadas en clases, salía de la línea de conclusiones que venía realizando con las bitácoras anteriores y manifestaba su incomodidad con el proceso, lo que abría la posibilidad de mediar para potenciar su desarrollo metacognitivo acerca de qué era lo que estaba aprendiendo, y de dialogar con él el aspecto didáctico de si era importante o no reflexionar los contenidos, modos de pensar y de realizar los ejercicios como él mencionaba. El profesor procuró una continuidad escrita con Mario, acerca del tema:

“Para educar, tú deberás tener empatía e indagar no sólo en el “saber” que deberás enseñar sino también en el “modo de pensar” y “cómo entienden” tus alumnos, se trata de comenzar con uno mismo” **[Prof. a bitácora 4 de Mario]**

A su vez, interesaba que explorara en la reflexión de sus aprendizajes, sin embargo en el curso de las dos bitácoras venideras Mario continuó encausando sus reflexiones hacia sus valoraciones didácticas. Por ejemplo, en su bitácora 5, con relación a los trabajos grupales, señalaba:

“(...) le voy a hablar de lo que pienso de hacer los trabajos grupales, desde el punto de vista favorable de conocimiento, es más fácil y mucho más amplio la recolección de información, la ayuda entre compañeros cuando alguno no entiende y otro le ayuda a comprender, otro punto favorable que para llevar a cabo el trabajo uno se puede repartir entre todo y no darse la lata de hacerlo sólo. Los puntos en contra (...) nunca falta la conversación de cualquier cosa, por ende lleva a la distracción del uno, del otro y del otro y así sucesivamente, lo otro

es que nunca falta el más flojo y el más desordenado, también (...) uno se muestra más interesado que otro, esto lleva a hacer más lento el trabajo y desagradable para el más interesado (...) me siento identificado con todas las situaciones planteadas porque me han pasado todas las situaciones siendo el más flojo y el más interesado, sabiendo lo que siente en ambos casos, la persona” **[Mario, Bitácora 5, 2002]**

En sus bitácoras se apreciaba familiaridad de escritura y confianza para referirse a los temas que abordaba en ellas. Con relación a su apreciación de los beneficios de los trabajos grupales distaba de lo que uno como profesor desearía y lo relataba directamente. Es cierto que en muchas ocasiones los estudiantes a viva voz aluden respecto a trabajos grupales en pro o en contra, pero generalmente en una dinámica de cierto juego, en el sentido de las relaciones interpersonales más o menos distendidas, que se producen en la oralidad del aula cuando se organizan trabajos grupales. Sin embargo ¿leer aquello en una bitácora? producía sensaciones mezcladas ¿cuánto están entendiendo nuestros estudiantes acerca de la complejidad del aprender en equipo? ¿De la importancia no sólo de intercambiar información sino de comprender al otro? Su mirada resultaba enriquecedora.

La mediación escrita del profesor para Mario fue motivar su reflexión en lo que aprendía, por lo que en la devolución de su bitácora se le intencionó potenciar esa faceta:

“Estimado literato: me gusta que incluyas tus pensamientos en educación, sigue pero para otras bitácoras también haz el esfuerzo e intenta reflexionar también las ideas matemáticas en juego en el curso ¿ok?” **[Prof. a Bitácora 6 de Mario]**

En sus siguientes bitácoras, Mario gradualmente explicaba con más confianza sus propias maneras de entender.

Es así que, en los preámbulos de sus bitácoras 7 y 9, Mario relata:

"A lo mejor a usted, no le va a gustar mi método, ya que me va a decir que me lo aprendí de memoria, aunque no sea así, sino fue algo, que descifré solamente con la vista, al tratar de comprender, cuando se trataba de una pendiente creciente o decreciente."

[Mario, Bitácora 7, 2002]

"Voy a contarle algo que en un momento no tenía claro, y también le contaré como pude aclarar mi duda que me llevó, a más de un día, en el cuál tuve que aplicar no sólo el cálculo matemático, sino la parte de la visión, y esto me ayudó a darme cuenta de lo que era."

[Mario, Bitácora 9, 2002]

De una lectura inicial hacia el profesor como un agente que valida o no formas de aprender (*"A lo mejor a usted, no le va a gustar mi método, ya que me va a decir que me lo aprendí de memoria"*) Mario se desplaza a narrar no sólo su dificultad sino también cómo salió de ella, ya superada la barrera de si el profesor iba a validar o no su método, se apresta a contar su historia, su modo de resolver su duda.

Así, en sus bitácoras 7º y 9º, luego de la movilidad de relaciones entre la tríada profesor/estudiante/saber, Mario relató modos que ponía en acción para entender¹³. En sus explicaciones, puso en escena estrategias visuales, las que escribió en sus bitácoras, luego de superadas sus vacilaciones iniciales por considerarlas ajenas al ámbito matemático o porque iba a ser criticado por el profesor. Pero era lo que a él le hacía sentido.

Estos episodios de Mario, llevan también a reflexionar sobre aquellos estudiantes que no se atrevieron a "poner su voz" en las bitácoras porque a lo mejor al profesor no le iba a gustar "su método". Extendiendo lo mismo a la práctica pedagógica cotidiana ¿cuántos "Marios" no logran perder esa tradicional desconfianza mal llamada "respeto" hacia el profesor, dejando

¹³ Más detalles al respecto, se brindan en el *Capítulo V: Resultados relativos a Nociones Variacionales*.

entrevelados aspectos de fondo que les mueven en la actividad de entender las temáticas estudiadas, por temor a ser descalificados por su profesor en sus estrategias utilizadas? O, con una mirada más sistémica aún, cabe preguntarnos también por cuántas veces en lugar de “interactuar” con nuestros estudiantes, en la práctica pedagógica, lo que realmente hacemos es “instaurar”, alejando así la confianza y mutua nutrición de formas de saberes que tanto enriquecerían la comprensión del otro desde el otro, y que en definitiva propiciarían aprendizajes más robustos.

Con estos dos casos, buscamos ilustrar el tipo de mediación escrita abordada por el profesor, a su vez, nos han parecido relevantes ya que podemos también derivar de ellos, matices de un acervo cultural a la base del fenómeno educativo, que dice relación con las representaciones que de éste tienen nuestros estudiantes. En este sentido, *la bitácora permite ahondar en varias facetas del fenómeno educativo, a la luz de las reflexiones de uno de los actores principales de éste: nuestros estudiantes.* Acercándonos así, a dialogar con la complejidad de facetas relativas a los polos del triángulo didáctico.

4.2.2 Complejidades del aula evidenciadas por las Bitácoras

De las bitácoras, surgen también orientaciones para conocer un poco más de las sensibilidades estudiantiles presentes en el aula, respecto de los vértices del triángulo didáctico, las cuales, además de lo propio de cada estudiante, se nutren durante el proceso interactivo entre estos vértices (saber/estudiantes/profesor) dotando de una subjetividad particular a cada confección de bitácora. Estas son elaboradas en un mismo escenario externo para cada sujeto, en cuanto a que está constituido por los mismos actores y componentes (profesor, estudiantes, sala de clases, compañeros y

compañeras de curso, entre otros) pero en distinto escenario subjetivo, desde el cual cada estudiante que escribe, da forma a la trama que comunica en su bitácora.

La bitácora, junto con ayudar al docente a conocer un poco más del estudiantado, le ayuda también a conocer un poco más de sí mismo y de las resonancias de su práctica. El profesor es leído desde “la otredad”, en las textualidades estudiantiles, las cuales muestran facetas de intervenciones pedagógicas que son significativas para el estudiantado, pero que suelen pasar desapercibidas para quien enseña, desde la subjetividad con la que se ubica en el propio actuar. No todo lo que decimos, hacemos, enseñamos es precisamente lo que queríamos decir, hacer o enseñar.

Todo esto configura un entramado complejo que se constituye en el aula, que influye en ella, que marca actitudes y aprendizajes, que coarta o que libera de distinta manera. Y por ende, es parte del escenario desde el cual se construyen las bitácoras, de ese escenario que no podemos describir completamente porque nos es inabordable en toda su complejidad, y que sin embargo, mueve en gran parte el actuar del estudiantado y del profesorado.

Un escenario variable y subjetivo, en el que se constituyen los relatos de bitácoras. No es tan sólo entonces, un escenario objetivo, dotado de componentes estáticas, desde donde se forja una bitácora. Se trata de un “escenario entramado” constituido también por multi-escenarios de carácter subjetivo. Así, tales escenarios subjetivos tejen marcos de realidad diferentes para cada uno de los actores del aula en una simultaneidad espacio-temporal. También recibimos de un mismo estudiante, bitácoras de distinta naturaleza, provenientes de diferentes períodos espacio-temporales y en las que cristalizan sensibilidades, miradas, tendencias, historias personales.

Para ejemplificar esta variedad de realidades, escogimos algunos fragmentos de relatos, los que comentamos brevemente, sin hacer un análisis exhaustivo.

De la implementación didáctica...

“Tengo claro los conceptos que tratamos hasta el último taller, pero no logro darme cuenta si es el camino correcto para llegar a la derivada (...) comprendo fácilmente reglas y las aplico de buena forma, pero me cuesta un poco llegar a descubrir que modelan una regla o la confeccionan. El que el curso sea en base a talleres me hace sentir lejana la presencia del profesor (...) todo esto me tiene preocupado y ansioso (...) es mi última oportunidad y tengo claro que todo está en mis manos” **[Pedro, Bitácora 8, 2002]**

“Ahora sí cambió la cosa (...) me siento con más tranquilidad y confianza que había perdido (...) Al conceptualizar las ideas me quedó mucho más claro el texto que hacía referencia al análisis cualitativo de la razón de cambio no constante” **[Pedro, Bitácora 10, 2002]**

Los relatos corresponden a un estudiante que cursaba por tercera vez la asignatura. Había reprobado dos veces, y las dos veces anteriores las había cursado con profesores distintos con una implementación didáctica distinta. Evidentemente su historia personal marca un escenario diferente sobre el qué reflexionar y sobre el como actuar. La responsabilidad que se atribuye a sí mismo como su última oportunidad, la vive con una emocionalidad concomitante a su proceso de estudio, para luego de la conceptualización de ideas fundamentales, recobrar la tranquilidad y confianza perdida.

“Durante esta semana hemos realizado un trabajo, se debía realizar en Power Point y también hacer un informe (...) me he dado cuenta de que no he rendido bien durante este semestre, no sé lo que me ha ocurrido pero he tratado de comprender (...) me gustó lo que usted realizó el martes pasado acerca de las coevaluaciones del grupo que exponía”
[Victoria, Bitácora 9, 2002]

“Este semestre ha sido un semestre lleno de trabajos controles, talleres y bitácoras, de verdad se me ha hecho más pesado (...) Este tema de la derivada lo he podido entender pero no en su plenitud igual quedan bastantes dudas volando (...) la realización de todas mis bitácoras anteriores las he tratado de realizar a conciencia, a tratar de razonar por los temas que hemos pasado” **[Victoria, Bitácora 12, 2002]**

Del mismo grupo curso que el estudiante anterior, con bitácoras en espacio-tiempo cercanos, su realidad es otra, con más “tiempo” de mirar otras facetas del proceso. Por ejemplo, disfrutó la experiencia de coevaluar. Reconoce que su rendimiento no ha sido el óptimo, pero en ambos párrafos su interés se centra en el ir comprendiendo.

De saberes y emocionalidades...

“Me gusto harto porque era emocionante ver un gráfico y imaginarse que podría haber sido lo que había captado” **[Edith, Bitácora 1, 2003]**

“En las primeras dos actividades me sentí un poco incómodo al comienzo ya que me costó un poco relacionar lo concreto con lo abstracto” **[Victor, Bitácora 1, 2003]**

“Con respecto a mi problema con los gráficos es un poco complicado para mí explicarlo, ya que ni siquiera yo me comprendo (...) mi problema es que no me logro ubicar en el plano, es decir tengo que recurrir a los números para poder creer que lo que pienso esta bien o no, por ejemplo sin los números no entiendo cuando una función desciende o aumenta y cuando es más lento o más rápido” **[Nancy, Bitácora 3, 2003]**

“Sobre límites laterales, me gustó la forma en que se instruyeron, ya que primero lo visualizamos gráficamente, y luego lo calculamos algebraicamente hasta convencernos nosotros mismos de qué tratan los límites laterales, personalmente a mi me encantó mucho esto, ya que la parte grafica, de cualquier ejercicio considero que es realmente importante” **[Boris, Bitácora 3, 2003]**

“Cuando pasamos a limite yo creía que entendía todo, pero cuando vimos la definición analítica de dicho concepto me frustré mucho. No entendía ni entiendo el porque tanto procedimiento, cual es su fin y es que usted encuentra todo bien cuando alguien dice algo lo que no me permite ordenar los conceptos en mi cabeza y que dio curso a que quedara nuevamente en cero. Me dedique a estudiar por mi cuenta, ya que sus clases son verdaderos acertijos” [Iris, Bitácora 1, 2003]

“Cuando usted comentó que íbamos a ver logaritmos yo me dije noooo (...) pero luego me di cuenta que no eran tan fomes que eran entretenidos aplicarlos o hacer ejercicios de ellos, (...) el día viernes comenzamos a ver limites de este termino y ahí me comenzó a gustar un poco mas, ya que limites lo entiendo todo aquello que se asocie con el me llama bastante la atención “ [Edith, Bitácora 3, 2003]

Estas textualidades exponen diversas tonalidades emocionales que se entran en la actividad estudiantil en relación a sus procesos de aprendizaje, y más específicamente, en relación al saber. En este caso gráficas y límites. Dan cuenta de cómo la generación estudiantil de entendimientos va entretejiendo tonos de emocionalidad en relación al saber.

Desde una rica experiencia que significa para Edith el abordar un estudio en el registro gráfico (primera textualidad) es decir aspecto ligado a la emoción que favorece el estudio gráfico para esta estudiante, se tiene el otro extremo de ser indecible y una experiencia de incomprensión inclusive de sí misma para Nancy (tercera textualidad) en cuyo caso, se vislumbra que, su trabajo se ve obstaculizado por un encerramiento de habituada actividad en un registro numérico.

Por otro lado, se evidencia una aceptación estudiantil de situación de complejidad respecto de la temática de límite, que ya sea del discurso de aula, de compañeros de niveles superiores, de experiencia personal o de otras razones, luego de los “primeros encuentros” puede ser reconocida como abordable.

De actuares pedagógicos y emocionalidades...

“Se nota que usted es una persona apasionada con lo que hace, pero esto muchas veces permite que uno reprima su ignorancia evitando hacer preguntas para no entorpecer la clase y no significa que esté en contra de su forma de enseñar sino mas bien la materia es difícil y ello no permite la comprensión total de esta.” **[Iris, Bitácora 1, 2003]**

“Las clases tienen su dinámica ya que son combinaciones en que algunas exponemos nosotros y otras el profesor en conjunto a nosotros dando nuestras dudas e ideas, además nos administra guía y apuntes para complementar la materia, por último también que en esta clase especialmente el profesor nos fomenta a indagar de la materia que viene mas adelante y nuestras dudas en libros y/o Internet.” **[Gabriela., Bitácora 1, 2003]**

“Me he sentido súper apoyada por usted, ya que veo que ha encontrado las virtudes más y ha hecho que yo misma las reconozca, ejemplo: una vez me dijo que me encontraba inteligente y le diré que para mí es tan complicado entender las cosas a la primera que esto influía en que yo no fuera capaz de hacer las cosas (...) unas palabras que usted utilizó conmigo “me gusta como escribes” ha hecho que me sienta en confianza con lo que escribo y que no se va a reír de mis argumentos (...) es el miedo que siempre me limita a exponerme cuando hago introducciones o conclusiones en trabajos, incluso la mayoría de las veces están malos.” **[Ema, Bitácora 3, 2003]**

“a esta altura del partido estoy súper agotada no sé si seré solo yo o quizás los demás también se sienten de esta manera pero me siento súper desanimada (...)hay algo que me tira para arriba y ese es usted aunque suene un poco patera pero así es, siento que se preocupa de cada detalle que en el curso halla (...) siento que es súper importante haber dicho todo lo anterior mas que un profesor lo siento como un amigo y que no le puedo fallar” **[Edith, Bitácora 3, 2003]**

“La bitácora esta vez no mostrará alguna resolución de algún ejercicio, que por lo general representa algún tipo de conocimiento, sino más bien es una reflexión, en un momento de mucho enojo (no por su ramo sino por otro) lo que me ha llevado a darle mayor importancia que antes, a lo que es la “Didáctica”. Me he dado cuenta que en Matemáticas es muy fácil caer en mecanicismos algorítmicos para resolver un ejercicio olvidando el por qué del asunto. Por una parte el mecanicismo deja muy bien parado al profesor frente a los alumnos

y pareciera ser la única vía de resolución, es decir, este método de enseñanza somete a los alumnos a estudiar casi de memoria un método para resolver un ejercicio (lo que no me causa mucha gracia)” **[Julio, Bitácora 7, 2002]**

Se distinguen relatos con diferentes intensidades y formas de relacionarse del estudiantado con los polos del triángulo didáctico, imbricado con diversas tonalidades emocionales que no vienen desde una realidad etérea a hacerse partícipes en el contexto de las situaciones de enseñanza, sino que se entraman y funden, con los aspectos didácticos, cognitivos, epistemológicos y socioculturales que, de variadas direcciones y formas, discurren y concurren durante el proceso.

Buscamos no dejar tan entre-paréntesis el reconocimiento de estos aspectos presentes en toda relación humana, y particularmente, en el aprendizaje y la enseñanza, y por ende, en el aula. Tomamos nuevamente, algunas palabras de Morín (1999) cuando refiere acerca de las tríadas, y entre ellas, de la tríada razón/afecto/impulso “hay una relación inestable, permutante, rotativa entre estas tres instancias. La racionalidad no dispone pues del poder supremo; es una instancia que compete y se opone a las otras instancias de una triada inseparable” (op. cit., p. 24).

El afecto, los impulsos, la racionalidad, el desconcierto, el rechazo, la ansiedad, la inseguridad, las confusiones, entre otras sensibilidades concurrentes en el aula, se competen unas con otras y van dotando de cualidades al proceso y a sus integrantes. Cualidades que no siempre es posible controlar porque inclusive, la mayoría de las veces, en el actuar propio, ni siquiera uno se percata de su ocurrencia. Pero sí contribuyen en definir lo que sucede, o al menos parte de ello.

En ambas experiencias, en general no fue fácil para el estudiantado abocarse a la actividad de las bitácoras. Hubo resistencias y conflictos. Y a su vez, una ampliación de la mirada.

El estudiantado al involucrarse en la experiencia de intentar objetivar de modo escrito ¿qué estoy aprendiendo y qué me dificulta? mediante la actividad de elaboración de sus bitácoras, se hallaron en la necesidad de replantear lo que iban entendiendo. Ilustración de aquello son los siguientes párrafos:

“Todo comienza como una experiencia nueva, jamás en mi vida había visto una cosa así, en la cual tuviera que describir mi aprendizaje por intermedio de algo. ¿Bitácora? (...) me ha llevado a preguntarme ¿que realmente es lo que estoy aprendiendo?, y ese es el gran punto a cubrir por este trabajo (...) darse cuenta de los distintos puntos de vista que hay en torno a un tema, la variedad inmensa de llegar a un mismo punto desde distintos caminos. Según mi experiencia lo que más cuesta es el comienzo, en el que centrarse y como puedo explayarme con respecto al tema con el temor a equivocarme, pero me he dado cuenta que el temor a equivocarse no va en el punto en que cosa hago o que opino, por que lo que se busca es la sinceridad de que es lo que quedo en mi mente con respecto a la materia, del como yo lo aprendí y cual es mi posición (en que estoy parado en ese momento)”

[Ismael, 2° semestre, 2003]

“Cuando comenzamos el trabajo debo admitir que me desconcertó (...) no lograba entender que era lo que el profesor quería de ellas. Con el tiempo fui comprendiendo (...) cuando comenzaba a explicar lo que había logrado entender, según yo bien, comenzaban a aparecer los primeros signos de inseguridad sobre lo que sabía y si realmente estaba correcto. Fue en ese momento cuando pensé que ese era el real sentido de realizar dichos trabajos, comprender cuales son mis fortalezas y debilidades en relación a los temas abordados, no solo en cada bitácora sino en conjunto, como un todo, es preciso que esta reflexión no afloro de una bitácora para otra sino mas bien fue un proceso gradual que aun no termina.” **[María, 2° semestre, 2003]**

“... cuando deseaba escribir sobre algo que no entendía, como para poder expresar que era lo que no entendía realmente, debía meterme más aún en el asunto, lo que provocaba que

en vez de redactar lo que no entendía, terminaba explicando lo que había entendido y de que manera lo había logrado entender...” [Laura, 2º semestre, 2002]

Estas textualidades muestran que se removi6 la mirada ingenua con la que, en un sentido dualista, suele entenderse el Proceso Educativo. Aquella dualidad implícita en los roles tradicionales con relación a que el profesor explica “claramente” una tarea por hacer y el estudiante la “ejecuta” (aunque muchas veces no entienda qué sentido real o propio tiene lo que está haciendo, pero en donde si el profesor *explicita* algún tipo de sentido, éste debe ser *asumido*).

Notemos algunas valoraciones de los párrafos expuestos anteriormente, tales como:

“... darse cuenta de los distintos puntos de vista que hay en torno a un tema”

“... la variedad inmensa de llegar a un mismo punto desde distintos caminos”

“... comprender cuales son mis fortalezas y debilidades en relación a los temas abordado”

“... cuando deseaba escribir sobre algo que no entendía (...) terminaba explicando lo que había entendido”

Si bien es cierto, podrían atribuirse a valoraciones propias de una interacción entre los seres humanos (como aquello de “darse cuenta” de otras cosas) y que nos ocurre todos los días, no resulta claro que esa práctica cotidiana sea familiar en la relación educativa, menos aún para el aula de matemáticas. Estos “darse cuenta” aquí cobran sentido como experiencia que deviene de remover una comprensión inicial de la relación triádica profesor/estudiante/saber implícita durante el quehacer pedagógico en el discurso matemático escolar tradicional:

“... jamás en mi vida había visto una cosa así, en la cual tuviera que describir mi aprendizaje por intermedio de algo”

“... el trabajo me desconcertó (...) no lograba entender que era lo que el profesor quería de ellas”

Se distinguen entonces, algunas dificultades presentadas por el estudiantado al momento de realizar las auto-miradas vía la reflexión de sus procesos de entendimientos y aprendizajes, las cuales, como se ha ilustrado, pueden ser movilizadas por el temor a cómo hacerlo de modo escrito, el reconocimiento de una práctica poco usual -o inclusive ausente- en nuestro sistema educativo, el no comprender lo que el profesor esperaba de las bitácoras, entre otros.

En síntesis, la aplicación de las bitácoras de reflexión produce un acercamiento a las experiencias que el estudiantado vivencia en el aula y a sus procesos de aprendizaje. A su vez, se presentan atisbos de complejidades que concurren en el aula, con las cuales convivimos, pero que en la dinámica interactiva del día a día con el estudiantado, muchas veces resultan invisibles para el profesorado. Pudiese objetarse que no es novedad que haya heterogeneidad estudiantil en el aula, puesto que es un proceso entre personas, pero... ¿Desde donde se tipifica esa heterogeneidad en el quehacer pedagógico? ¿No es acaso, generalmente, a partir de las hipótesis pedagógicas profesionales en acto?

Aunque en el proceso de las bitácoras, la mediación escrita del docente buscaba, de algún modo, propiciar el desarrollo de determinadas facetas de acuerdo a las características del relato estudiantil (auto reflexión de qué aprende, sensibilidad didáctica, entre otras) ya sea desde lo que en ese momento vislumbra como profesor, a partir de su equipaje didáctico y disciplinar, como también de la sensibilidad que el mismo proceso le va dotando, es fundamental tener en cuenta que lo escrito en las bitácoras es lo que cada estudiante va decidiendo escribir. Esta decisión es extensible no

sólo a lo que escribe, sino también al modo en que lo escribe, a lo que cuenta y cómo lo cuenta. Así, prima la riqueza de su mirada, sin un prototipo pre-dado que puede brindar una actividad tradicional como sería por ejemplo el resolver un ejercicio tipo, responder un cuestionario, graficar una función que se le solicite en clases, estructurar una disertación respecto de alguna temática. En estos ejemplos, el *qué* está dado por la actividad específica y, el *cómo*, queda atado al desarrollo más local de lo que se esté tratando en ese momento. La bitácora brinda mayor libertad en el estudiantado, y por ende, como hemos podido apreciar, en general, mayor incertidumbre y preocupación, pues aquí cada uno y una debe hacerse cargo de lo *que* cuenta y *como* lo cuenta.

Al remirar la experiencia de aplicación de las bitácoras, y también algunas mediaciones realizadas durante el proceso, se abren nuevas miradas. Por ejemplo, el profesor aprecia cómo lecturas desde los propios objetivos de enseñanza, ensombrecían muchas veces las voces estudiantiles que, paradójicamente, era lo que se pretendía emergiera desde las bitácoras. Es así que en algunos casos pasaban desapercibidas en la lectura, in situ durante el proceso de aplicación, evidencias de obstáculos de entendimientos que los o las estudiantes plasmaban en sus escritos y que ahora se comprenden desde el análisis realizado para esta investigación. Por ejemplo, si en algún relato se hallaba alguna frase de esas que se pensaba eran seña de que aprendieron una noción, una reacción natural del profesor era de alegría y satisfacción. Con la mirada actual, sin embargo, se resignifica que lo que íntimamente podía estar buscando el profesor en ese entonces, era escuchar (o en este caso leer) lo que “tiene que ser”.

Entonces, hay actuaciones pedagógicas que funcionan como una especie de autoritarismo epistemológico con relación a que el profesorado suele buscar el discurso que pone en el aula y al no encontrarlo, ve nada, en

lugar de ver lo que hay. A su vez, es difícil dejar de lado la carga de significado que ya se posee de ciertas palabras o nociones y que, como hemos ilustrado en este capítulo (por ejemplo en el caso de Mirtha) no necesariamente coinciden con el posible significado que los estudiantes movilizan a la hora de esgrimir esas mismas palabras o nociones.

La tipificación del profesorado en el salón de clases, puede potenciarse con la experiencia de las bitácoras, ya que se deja entrever, a través de estas producciones estudiantiles, parte de las actuaciones pedagógicas que el profesorado no visualiza y que si visualizan algunas sensibilidades estudiantiles. Un aspecto de ello puede apreciarse en las ilustraciones que se han dado de las actuaciones pedagógicas y de las emocionalidades.

Lo que en un principio pretendía ser mirar al estudiantado en la reflexión para comprender mejor sus entendimientos se fue transformando también - durante el análisis de la experiencia de las bitácoras - en mirarse también uno mismo como profesor, desde las miradas del estudiantado. De modo que, con la lectura de las bitácoras es posible irse equipando con las ideas de nuestros estudiantes y se van produciendo varias cosas: conocer de qué quieren hablar nuestros estudiantes, por tanto ir comprendiendo sus entendimientos, conocernos desde nuestros estudiantes, y a la vez, ir ganando sensibilidad como profesor. Es decir, como un todo, las bitácoras son un proceso múltiple.

CAPÍTULO V

Resultados relativos a nociones variacionales

Con las consideraciones descritas en el capítulo anterior, respecto de la experiencia de las bitácoras llevada a cabo en dos cursos de Pensamiento Analítico I, exponemos en este capítulo los resultados del análisis hecho a sus bitácoras, para indagar sobre representaciones estudiantiles en torno a la variación. A su vez, se presentan los análisis de un cuestionario, para profundizar las representaciones estudiantiles que se indagan en torno a las nociones de diferencia e intervalo.

5.1. Análisis de episodios de las bitácoras de reflexión

Escogimos pasajes de bitácoras de tres estudiantes, en tanto estos nos proveen de información para la detección de representaciones en torno a la variación. Los estudiantes Mario y Mirtha, referenciados en el Capítulo anterior; y el caso de una estudiante que llamaremos Ana. Sus narraciones presentan aspectos relativos a:

- a. **Reflexiones estudiantiles acerca de nociones variacionales.** Corresponden a pasajes de bitácoras en que los estudiantes relatan de modo directo lo que aprenden, o se refieren a entendimientos que tienen de alguna noción variacional.

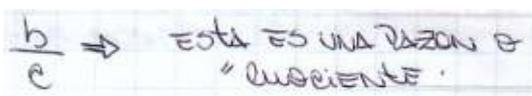
- b. **Modos de apropiación presentes en la reflexión de sus procesos de aprendizaje.** Corresponden a pasajes de bitácoras en que los estudiantes relatan de qué manera logran comprender algunas temáticas tratadas en el curso, lo cual les hace describir herramientas matemáticas o extra-matemáticas que utilizan para ello.

5.1.1. El caso de Ana

Ana participó de la primera experiencia. Se caracterizó por ser una muchacha alegre y bastante kinestésica. En sus bitácoras no se abocó a explicar dificultades o reflexionar modos de entendimiento acerca de algún proceso de aprender una temática en estudio. Sino que, en la mayoría de ellas, se dedicó a relatar de modo directo lo que entendía, pero no el cómo entendía. A partir del análisis de sus bitácoras, se desprende que lo visual marca sus comprensiones y que sus aprendizajes los establece primordialmente por medio de cadenas asociativas.

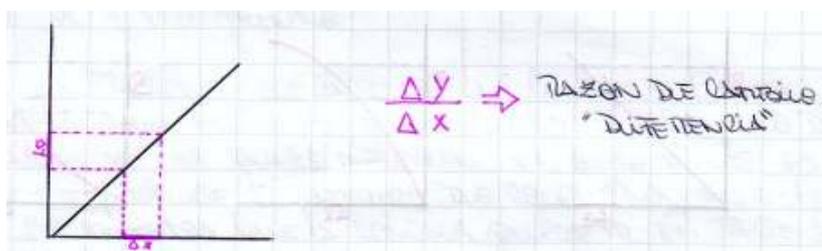
Relato: “La razón y el movimiento”.

“Las razones se conocen también como una división o se pueden llamar también como un cociente.

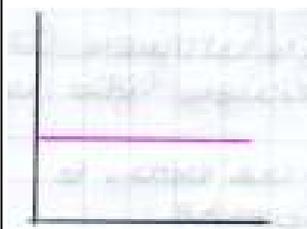


$\frac{b}{c} \Rightarrow$ esta es una razon o
"cociente".

Normalmente las razones se conocen por “razón de cambio”, esto es cuando nos referimos de las funciones, en la función siempre su razón de cambio es la diferencia.



Cuando el dibujo que se muestra en la gráfica es una recta su razón de cambio es “constante”, cuando en el dibujo se ve una recta que no tiene movimiento, o sea no varía, su razón de cambio es “cero”



Las razones según los intervalos pueden cambiar, las razones pueden variar según su posición, y función, ya sea si estas se encuentran con una función que está fija, sin movimiento o una función constante, entonces su intervalo es cero”

(...) Intervalo = es la distancia que se produce de un punto a otro punto.”

[Ana, Narración en Bitácora 2, 2002]

Visión General del Relato:

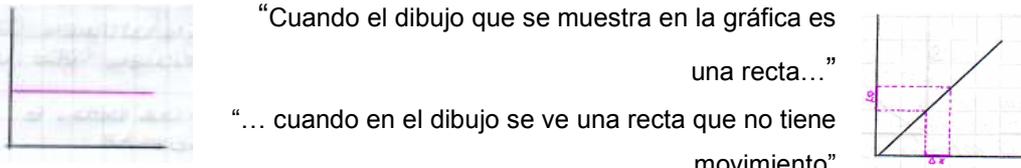
En una primera mirada de esta narración distinguimos algunos sentidos que para Ana parecen tener las nociones matemáticas:

- Objetos directamente definidos y que pueden mostrarse (“esta es una razón o cociente”);
- Se corporizan (“si estas [las razones] se encuentran con una función que está fija, sin movimiento” ... “una recta que no tiene movimiento”);
- Pueden acoplarse unas nociones a otras, cambiando la naturaleza de la noción resultante (por Ej. *razón* es entendida como cociente y *razón de cambio* como diferencia).

En el relato, Ana expone categóricamente una acepción para la razón de cambio (atribuida para una función) como LA DIFERENCIA. Esta acepción de razón de cambio como diferencia la retomaremos luego del análisis interpretativo que abordamos a continuación, con el cual nos interesa dilucidar representaciones variacionales presentes para la gráfica de una función lineal y su relación con la noción de razón de cambio.

Representaciones variacionales desde la gráfica de una función lineal.

“el dibujo que se muestra en la gráfica es una recta... en el dibujo se ve una recta”



“Cuando el dibujo que se muestra en la gráfica es una recta...”

“... cuando en el dibujo se ve una recta que no tiene movimiento”

“si estas [las razones] se encuentran con una función que está fija, sin movimiento”

a. Facetas de la Formación Conceptual:

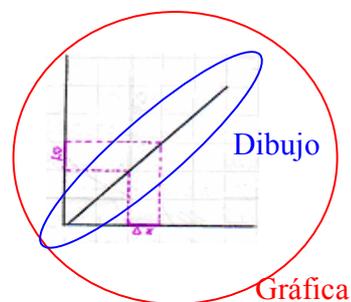
En la primera textualidad que aquí se expone, notamos que la gráfica toma sentido para esta estudiante como aquello que “permite mostrar” un dibujo (la recta) y, asimismo, de su expresión *“cuando en el dibujo se ve una recta”* apreciamos que allí el dibujo lo visualiza como algo que muestra a la recta. Bajo el supuesto de que la recta la entiende como la gráfica, tenemos que en esta segunda textualidad, el dibujo aparece significado como en la primera textualidad lo fue la gráfica. Es decir, como aquello que “permite mostrar” algo.

O bien, sin ese supuesto de visualización que hemos puesto acerca de que la recta la entiende como la gráfica, es viable que ocurra que el dibujo lo siga entendiendo como la recta, en el sentido que señaláramos al inicio acerca de que para Ana las nociones matemáticas parecen ser objetos que pueden mostrarse. Así, tal como la razón es (o se ve en) b/c aquí la recta es el dibujo (*“cuando en el dibujo se ve una recta”*).

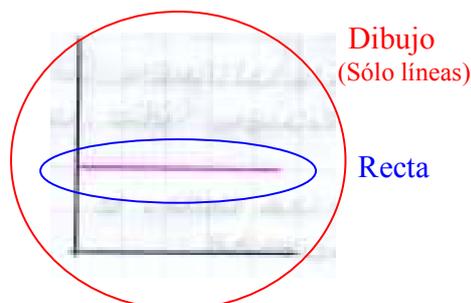
De uno u otro modo, las dos primeras frases en su conjunto - y que en la narración expuesta en el recuadro inicial, se siguen contiguas - nos permiten apreciar un uso alternativo, con el que Ana, en la práctica, al comunicar su entendimiento, manobra con un complejo difuso de tipo gráfica/dibujo, que llamaremos icónico-gráfico. Este es, la RECTA. La noción de complejo difuso, la tomamos de las nociones de Vygotsky (Díaz, 1999) la cual se caracteriza por la “fluidez que unen los elementos aislados. Por medio de vínculos difusos e indeterminados se forman grupos de objetos o imágenes perceptualmente concretos” (op. cit, Anexo-J, p.3). Para nuestro análisis, la adaptamos en el sentido que aquí, hay una fluidez que vincula dibujo y gráfica formando una imagen perceptual “concreta” que llamamos icónica-gráfica. En donde lo concreto se da en la manipulación del complejo difuso, que enacta la estudiante en su comprensión del mismo.

b. Epistemes de las nociones en juego:

Distinguimos dos dominios conceptuales que concurren en la comprensión de las nociones de gráfica y recta, uno matemático-escolar y otro cultural, que entramados entre sí dan forma a las estructuras que comprometen dichas nociones. Cuando la estudiante se refiere a gráfica, “coloca” un “dibujo” en ejes cruzados, indicando puntos como “soporte” del dibujo. Intentando articular en un registro “matemático”.

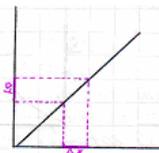


Cuando son trazos, sin puntos de soporte en esos trazos que la doten como “gráfica”, prevalece el registro cultural bajo la estructura de dibujo.



Se da cuenta así de una imbricación con el dominio sociocultural, en el que para la noción de recta concurren ambos dominios conceptuales.

“En el dibujo se ve una recta que no tiene movimiento”

	<p>“Cuando el dibujo que se muestra en la gráfica es una recta...”</p> <p>“... cuando en el dibujo se ve una recta que no tiene movimiento”</p>	
<p>“si estas [las razones] se encuentran con una función que está fija, sin movimiento”</p>		

a. Facetas de la Formación Conceptual:

Al complejo difuso icónico-gráfico recta le asigna, en su segunda textualidad, un atributo variacional “se ve una recta que no tiene movimiento” para luego en su tercera textualidad referirse también a la función como aquello que está fijo o sin movimiento cuando señala “una función que está fija, sin movimiento”. Lo cual nos sitúa en dos escenarios:

Primero, una permutabilidad/indistinción entre el complejo difuso icónico-gráfico recta y una función. Permutabilidad, en el sentido de accionar mediante el “uso lingüístico escrito” para referirse a un atributo (en este caso, el “estar sin movimiento”) e indistinción, aludiendo al campo de las representaciones semióticas de Duval (1999)¹⁴, acerca de no distinguir una función de su “gráfica”.

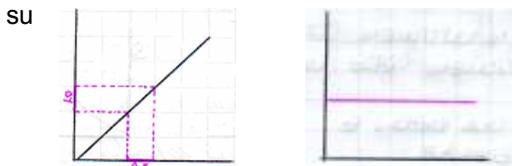
Segundo, detectar el uso de un complejo “pseudo concepto” RECTA mediante una acción metafórica de naturaleza icónico-gráfica-dinámica que

¹⁴ Con la Teoría de las Representaciones Semióticas (Duval, 1999) documenta respecto de la problemática que existe para distinguir la gráfica de una función y la función en sí.

la estudiante utiliza como medio para explicar su entendimiento de una razón de cambio constante y cero¹⁵. Adherimos a la noción de pseudo concepto, de las nociones de Vygotsky (Díaz, 1999) que entre sus características señala que un “niño produce un pseudo-concepto cada vez que rodea un ejemplo con objetos que bien podrían haber sido reunidos sobre la base de un concepto abstracto (...) Se guía por una similitud concreta, visible, y forma solo un complejo asociativo limitado a un determinado tipo de enlace perceptual” (op. cit, Anexo-J, p.3). Aquí, como recurso de explicación para la razón de cambio constante y cero, presenta en el icono-gráfico-dinámica una representación social alentada por nuestra cultura visual occidental en el “conocer”¹⁶. Este aspecto lo desarrollamos con más detalle a continuación:

b. Epistemes de las nociones en juego:

“Cuando el dibujo que se muestra en la gráfica es una recta su razón de cambio es “constante”, cuando en el dibujo se ve una recta que no tiene movimiento, o sea no varía, su razón de cambio es “cero””



Tenemos, el complejo pseudo concepto icónico-gráfico-visual RECTA con atributos variacionales (no movimiento versus otra que sí lo tiene) significado mediante una acción metafórica icónico-gráfica-visual implícita en la textualidad “una recta que no tiene movimiento” al explicar cuando una

¹⁵ En el marco de la narración expuesta en el recuadro inicial: “Cuando el dibujo que se muestra en la gráfica es una recta su razón de cambio es “constante”, cuando en el dibujo se ve una recta que no tiene movimiento, o sea no varía, su razón de cambio es “cero””.

¹⁶ Con relación al imaginario de la percepción visual en el modo de conocer occidental, ver Lizcano (1996).

razón de cambio es cero, y por dipolo¹⁷ (y parte de la primera textualidad) “una recta que tiene movimiento”, para explicar una razón de cambio constante.

El “Dominio Fuente” de esta acción metafórica lo identificamos como la cultura visual en la cual Occidente se halla inmerso, en que es usual comunicar con logos estilizados y minimales reservando la representación de movimiento para líneas oblicuas, así como el estado de una persona acostada suele percibirse indicando la cualidad de estar en reposo o sin movimiento. El “Dominio Objetivo” lo encontramos en la posición de la recta en el plano.

Así, tenemos una representación socio-cultural que interviene en la comprensión del estudiantado a la hora de abordar sus entendimientos respecto de gráficas lineales, oblicuas u horizontales, y su relación con una razón de cambio constante o cero.

Por otro lado, retomando las textualidades:

”... cuando (...) se ve una recta que no tiene movimiento, o sea no varía, su razón de cambio es “cero””

“... una función que está fija, sin movimiento o una función constante”

De la frase “no tiene movimiento, o sea no varía” surge una faceta representacional de la variación por medio de su dipolo, esta es, **VARIACIÓN ES TENER MOVIMIENTO.**

¹⁷ Mecanismo que opera de forma consciente o inconsciente en las personas, para establecer conceptos y argumentos. Por ejemplo, en la oración “La cara agresiva de Soledad” se entiende que Soledad tiene otra cara “no agresiva”. El dipolo en juego es “Cara agresiva versus Cara no agresiva”

En síntesis, con las consideraciones observadas hasta aquí, resumimos aspectos de las representaciones estudiantiles que entran en juego al momento de relacionar una función lineal con la noción de razón de cambio, las que se manifiestan por el uso de una cadena asociativa del tipo:

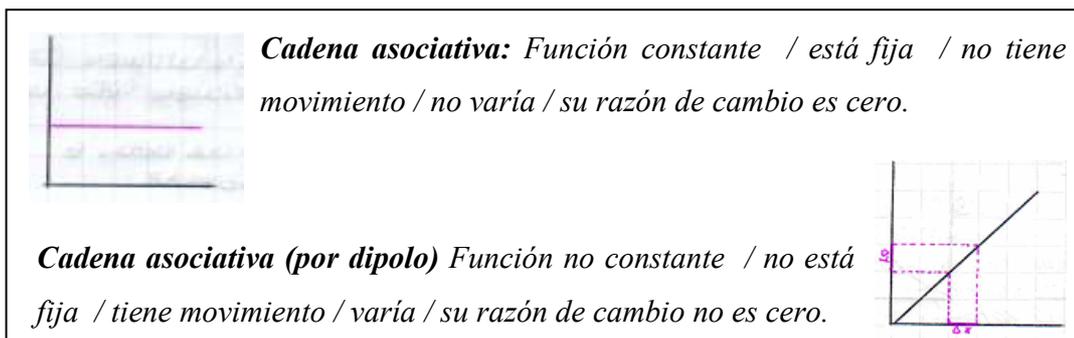


Fig. 8: Cadenas asociativas para la relación función lineal/razón de cambio: establecidas con el uso de un complejo pseudo concepto recta, significado por metáforas conceptuales icono-gráfica-visuales.

“En la función siempre su razón de cambio es la diferencia”

A continuación abordamos la afirmación categórica de Ana “en la función siempre su razón de cambio es la diferencia” y para ello recurrimos a episodios de sus bitácoras 2 y 9, a fin de dilucidar representaciones que puedan estar movilizando una comprensión de la noción de RAZÓN DE CAMBIO como DIFERENCIA o como INTERVALO, en términos cuantitativos o cualitativos.

En el discurso áulico¹⁸ se trabajó el hecho de que con una constantificación de los cambios Δx (de una magnitud de referencia x) basta

¹⁸ Constituido principalmente por la propuesta didáctica del texto guía y por la puesta en escena del profesor/investigador. Aunque con una intencionalidad didáctica similar a la del texto guía, sabemos se ve inevitablemente entrecruzada por el propio accionar del profesor/investigador, sus representaciones y lo que se hace presente durante el proceso interactivo *in situ* de la situación de enseñanza. De modo que, en términos no exhaustivos, iremos señalando más bien la la intencionalidad del discurso áulico.

observar el comportamiento de los cambios Δy (de una magnitud de interés y) para estudiar la razón de cambio de la magnitud de interés y (dependiente) con respecto a la magnitud de referencia x (independiente)¹⁹. De modo que, si a iguales cambios Δx se producen cambios iguales Δy entonces la razón de cambio resulta ser constante, la que es $\Delta y/\Delta x$. O, de modo similar, si el cambio Δx se constantifica como $\Delta x = 1$, entonces, la razón de cambio $\Delta y/\Delta x$ es el mismo cambio Δy .

De ahí que una primera interpretación pueda ser que Ana alude a diferencia como acepción cuantitativa de cambio (Díaz et al., 2003) asumiéndola como el cambio Δy , y capturando, de este modo, parte del discurso áulico, para significar a la razón de cambio.

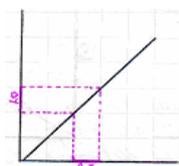
Sin embargo, estamos interesados en relacionar lo ya analizado, junto a otras textualidades que brinda en su relato, a fin de dialogar más exhaustivamente con lo que le pudiera estar haciendo sentido, en su afirmación.

Como se apreció del análisis inicial de su bitácora, respecto de la relación razón de cambio y función lineal, la razón de cambio fue asociada a la función en sí misma, esto es, la razón de cambio de una función. Con una mirada global de la función más que una local. La razón de cambio no fue atribuida en ningún momento a alguna variable dependiente (o magnitud de interés) con relación a otra independiente (o magnitud de referencia) sino que específicamente como de la función. Esto es de uso frecuente, inclusive en el lenguaje disciplinar cuando la función es lineal, y particularmente, cuando la función es constante, haciendo referencia a la razón de cambio

¹⁹ Más específicamente, el contexto de construcción de su bitácora fue en el período temporal de abordar la razón de cambio de magnitudes de interés (posición de un auto, temperatura) con respecto a la magnitud de referencia tiempo, mediante registros fenoménico, tabular, geométrico y gráfico.

(de una variable con respecto a la otra) como la pendiente de la recta (de modo global).

A continuación, supondremos, en un primer análisis, que esta “diferencia” que está significando para razón de cambio, la asume en términos cuantitativos. Posteriormente, en un segundo análisis, veremos la interpretación de que la esté visualizando cualitativamente como “un trazo vertical Δy ” que podría estar considerando en el gráfico que expone con su siguiente textualidad:

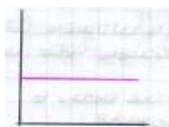


“Cuando el dibujo que se muestra en la gráfica es una recta su razón de cambio es “constante”

Atendiendo, de igual manera al gráfico anterior, interpretamos que el discurso áulico, referido a que para caracterizar a la razón de cambio de una variable de interés con respecto a otra de referencia, basta caracterizar los cambios Δy para cambios iguales Δx , parece “dialogar” con la representación socio-cultural icónico-gráfica-dinámica de recta oblicua en movimiento, produciendo que esta estudiante capture la significación de razón de cambio conectándola directamente con la diferencia Δy como atributo de la recta, como resultado de un “movimiento uniforme de la recta” invisibilizando las magnitudes, y particularmente, la constantificación de los Δx . En el sentido de que, recurriendo en parte a la estrategia visual que esta estudiante potencia con sus otras afirmaciones respecto del **movimiento de una función**, aquí la recta oblicua la asocia con razón de cambio constante desde la significación que “ésta tiene un movimiento siempre igual

produciendo una diferencia vertical Δy constante (que nunca cambia²⁰). Dicho de otro modo, en lugar de generarse los mismos cambios (diferencias) Δy por cada cambio Δx , para Ana parece ser que lo que motiva ese “mismo cambio Δy ” es el “movimiento (uniforme) de la recta”.

A su vez, buscamos profundizar a través del uso que hace de razón de cambio (diferencia) como intervalo, mediante el análisis conjunto de las tres siguientes textualidades:



“cuando en el dibujo se ve una recta que no tiene movimiento, o sea no varía, su razón de cambio es “cero””

“si estas [las razones (de cambio)] se encuentran con una función que está fija, sin movimiento o una función constante, entonces su intervalo es cero”

“(…) Intervalo = es la distancia que se produce de un punto a otro punto.”

En sus dos primeras textualidades hace corresponder la “función constante”²¹ con razón de cambio cero e intervalo cero, respectivamente.

En su primera gráfica había ubicado la variación Δy en el eje vertical, y en este caso no ¿tal vez porque la función al “estar fija” se corresponde con la diferencia Δy que aquí se calcularía de/al mismo punto del eje vertical donde “comienza” la recta? De lo cuál el “intervalo” que hace corresponder como razón de cambio de la función constante (textualidad dos) sería la distancia del punto al mismo punto (con relación al cuál permanece fija la función) distancia que es cero. Ello da cabida a que al señalar “*su intervalo es cero*” sea precisamente Δy . Y, que no “esté ubicado” en la gráfica calzaría

²⁰ De un episodio de su bitácora siete, que se analiza en unas páginas más, Ana señala “Para mí constante es cuando algo nunca cambia”.

²¹ Con la carga semántica ya analizada de estar fija, no tener movimiento y no variar que conlleva su metáfora icónica-gráfica-dinámica.

bien con la representación sociocultural occidental del “cero como la nada (no haber)”, de modo que resulta pensable que si $\Delta y = 0$ entonces no hay para qué ni cómo ubicarlo en la gráfica que expone. Por su parte, de la misma gráfica, al estar la recta “sin movimiento” no hay cambio, nada que varía, por lo que tampoco hay magnitudes ni cambios de magnitudes Δx y Δy que ubicar en los ejes coordenados (parte del icono-gráfico).

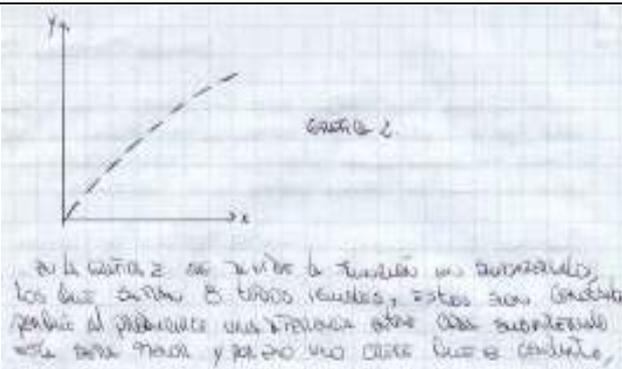
Hasta aquí, hemos levantado hipótesis interpretativas considerando al vocablo “diferencia” significado como “distancia”, y a su vez, con la acepción que en su tercera textualidad la estudiante brinda de intervalo (distancia).

Con lo anterior, se evidencia una representación cuantitativa para la noción de razón de cambio, como:

“Razón de cambio / diferencia / intervalo (referido a Δy)”

Ahora, recurriendo a un episodio observado de su bitácora nueve, analizamos en primera instancia, el uso de la díada representacional *razón de cambio / diferencia* con relación a una representación cualitativa de intervalo como “parte o fracción” de algo. Y, posteriormente, la interpretación de una representación cualitativa para Δy .

“En la gráfica 2 se divide la función en subintervalo, los que serán 8 todos iguales, estos son constante, porque al producirse una diferencia entre cada subintervalo ésta será menor y por eso uno cree que es constante”



En la gráfica 2 se divide la función en subintervalos, los que serán 8 todos iguales, estos son constantes, porque al producirse una diferencia entre cada subintervalo ésta será menor y por eso uno cree que es constante.

[Ana, Episodio de Bitácora 9, 2002]

En este episodio, interpretamos que los subintervalos los concibe como los “trocitos” de la curva “*en la gráfica 2 se divide la función en subintervalos, los que serán 8 todos iguales*”, en acuerdo a la gráfica que expone, en donde las secciones de la curva son ocho, de igual tamaño (visualmente) y también por lo ya interpretado respecto de la permutabilidad/indistinción con que manobra el complejo difuso icónico/gráfico y la función, puesto que aquí señala “*se divide la función*”. Así, con sus bitácoras 2 y 9, se detectan dos representaciones para un intervalo, una enunciativa y otra mediante su uso:

- a. **Distancia entre puntos.** De modo enunciativo en su bitácora dos cuando expresa “*Intervalo = es la distancia que se produce de un punto a otro punto*”.
- b. **Partes de algo*.** Mediante su uso, en este episodio de su bitácora nueve.

* En el episodio presentado, explícitamente hace corresponder a los subintervalos con los “trozos” de curva, es decir, partes de algo. Estamos suponiendo que si le hacen sentido los subintervalos como “trocitos” o “fragmentos de algo” entonces un intervalo en particular también puede hacerle sentido como un “fragmento o trozo de algo”.²²

En cuanto a la interpretación de este relato, observamos una mixtura entre la intencionalidad del discurso áulico, la relación *razón de cambio*

²² Esta representación, levantada a partir del supuesto, que hicimos, sobre su consideración para intervalo en términos de lo descrito para subintervalos, la vimos reforzada en el análisis posterior que hicimos del cuestionario que se aplicó en noviembre del 2004, para profundizar significaciones de los estudiantes en torno a vocablos analizados a partir de sus bitácoras. Uno de ellos fue intervalo, y pudimos detectar que varios estudiantes ante la pregunta ¿Qué viene a tu mente con la palabra intervalo? aluden a “fragmentos” “trozos” “partes” de algo (cfr. Anexo 4 o ver sección 5.3).

(diferencia)/función constante ya analizada y esta representación cualitativa de intervalo, lo que desglosamos de la siguiente manera:

En el discurso áulico, se constantifica la longitud de los subintervalos tomados en el eje horizontal (variable de referencia o independiente) En el relato de Ana, se invisibiliza la subdivisión hecha en el eje horizontal pues lo que se constantifica es la longitud de los fragmentos en que se divide la gráfica/función, significándolos estos mismos como subintervalos:

“En la gráfica 2 se divide la función en subintervalo, los que serán 8 todos iguales”

De modo que, en esta textualidad, se hace presente una representación cualitativa de intervalo, en conjunto con la indistinción de una función con su representación gráfica.

Por su parte, de la textualidad:

“los que serán 8 (los subintervalos) todos iguales, estos son constante, porque al producirse una diferencia entre cada subintervalo ésta será menor y por eso uno cree que es constante”.

Interpretamos que hay una caracterización de esos “trocitos” de curva como *más similares a una recta*. Esta caracterización viene a ser común entre el discurso áulico y del relato de Ana; sin embargo, movilizados de manera distinta.

Pues, por una parte, en el discurso áulico, eso ocurre *mientras más pequeños se consideren los subintervalos en que se subdivide el eje horizontal*. En cambio, para Ana, la subdivisión (y constantificación) actúa sobre la *gráfica en sí misma (función)* con una invisibilización respecto de la variable de referencia en el eje horizontal. De modo que, con significaciones

distintas, confluyen, la intencionalidad del discurso áulico y el relato de Ana, para una misma caracterización en la idea de “*a proceso de subintervalación más fino más similar a una recta quedan los trozos de curva*”. Cabe señalar que Ana no hace mención al refinamiento más fino, sino que se preocupa en *dibujar* los trocitos de gráfica *rectitos*. La interpretación que hacemos de esta caracterización compartida entre el discurso áulico y Ana, en términos discursivos pero no de significaciones, la trataremos de explicar en el siguiente párrafo.

En la textualidad, hace un uso doble de “lo constante”. En su primera mención, refiere a constante, en el sentido de que los ocho subintervalos son “*todos iguales*” (mismo tamaño) en cambio, en su mención final acerca de que “*uno cree que es constante*” está relacionando con su frase anterior respecto de que la diferencia entre cada subintervalo “*será menor*”. Interpretamos que se refiere a que mientras más a la derecha, la correspondiente diferencia (razón de cambio) del subintervalo (casi recta y más horizontal) es la que será menor. De lo cual, lo constante aquí está más bien referido al complejo difuso icono-gráfico (aquí el subintervalito) que en su bitácora dos fue caracterizado como “función constante” (recta horizontal) mediante la cadena asociativa *función constante / razón de cambio (diferencia) cero*. Así, la “diferencia” es usada, en este relato, como acepción de la razón de cambio.

El análisis recién expuesto, en conjunto con la textualidad en que señalaba “*si estas [las razones (de cambio)] se encuentran con una función (...) constante, entonces su intervalo es cero*”, y la acepción primera de que intervalo es la diferencia entre dos puntos, nos llevan a los siguientes esquemas:

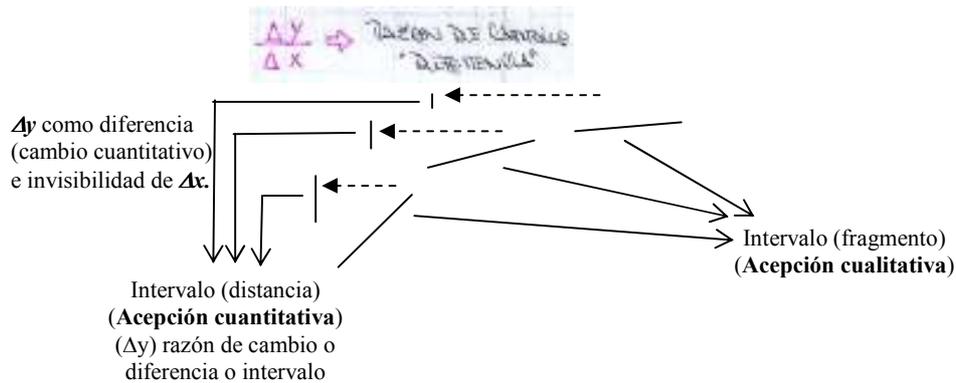
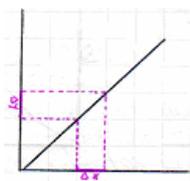


Fig. 9. Esquema que destaca la significación razón de cambio / diferencia / intervalo (representación cuantitativa) y su relación con una representación cualitativa de intervalo como fragmento de algo.

Finalmente, con la representación cualitativa de intervalo y la acepción de razón de cambio como intervalo y diferencia, puede ocurrir que la diferencia vertical Δy esté siendo abordada también cualitativamente como “el trazo vertical”, lo cual también tiene sentido con las respectivas textualidades ya analizadas.

Para esto, retomamos la textualidad inicial respecto de su caracterización de la razón de cambio en términos de una recta que tiene movimiento:



“Cuando el dibujo que se muestra en la gráfica es una recta su razón de cambio es “constante”

Como habíamos señalado en el primer análisis, recurriendo a la estrategia visual que potencian las afirmaciones del episodio de bitácora dos, respecto del movimiento de una función, aquí la recta oblicua la puede asociar con razón de cambio constante como resultado de un “movimiento

uniforme de la recta” (¿subir siempre igual?) con el que, en cualquier parte de la recta donde la estudiante “trace” los Δy y Δx que se aprecian en su gráfica, manteniendo la visualización del trazo vertical Δy , entonces, por el comportamiento de la recta, de modo natural el Δx también queda mantenido, lo cual para el caso poco importa, porque el rol central lo está teniendo el atributo variacional que está brindando a la recta que, para ella, en este caso, se mueve. Invisibilizando de este modo la constantificación Δx , a pesar de estar indicado en su gráfico.

Lo anterior, resignifica la interpretación del Δy que hicimos en el primer análisis con la acepción común de diferencia como “cambio cuantitativo”. Perfectamente, ese Δy , que donde se sitúe en la gráfica a medida que la recta se mueve será el mismo, puede estar siendo interpretado como “la visualización del trazo vertical” que ubica en su iconográfico.

Lo cual, tiene también consistencia con la ausencia de Δy en la gráfica para el caso en que la recta es horizontal, pues no se puede “visualizar el trazo vertical” porque no habría trazo vertical, de donde, con la representación socio-cultural occidental del cero como la nada, como el “no haber”, la diferencia (razón de cambio) con su acepción de intervalo con su representación cualitativa de “fragmento de algo”, sería cero.



De modo que también puede darse el siguiente esquema interpretacional:

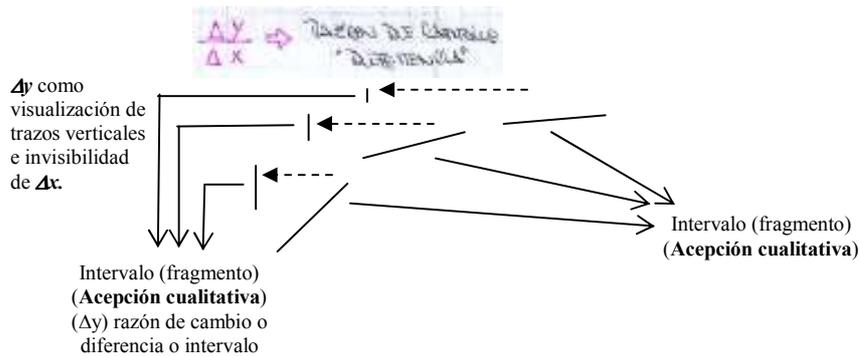


Fig. 10. Esquema que destaca una significación razón de cambio / diferencia / intervalo (representación cualitativa) y su relación con una representación cualitativa de intervalo como fragmento de algo.

Que para el caso en que la recta sea horizontal, las representaciones que actúan a la base de la cadena asociativa que se establece como *función constante / razón de cambio cero*, pueden devenir, en vistas de lo analizado, de alguna de las acepciones que se presentan en el siguiente esquema:

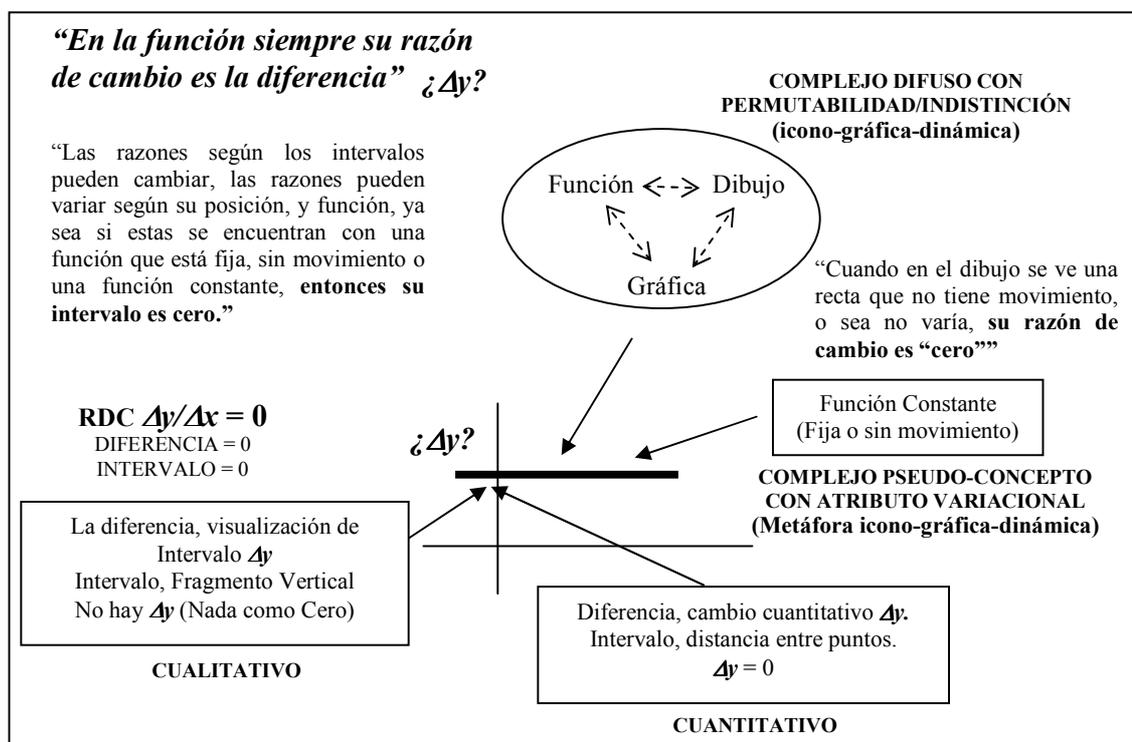


Fig. 11. Algunas representaciones estudiantiles a la base de la cadena asociativa Función Constante y Razón de Cambio Cero, con acepción de Razón de Cambio como diferencia o intervalo.

“Para mí constante es cuando algo nunca cambia”

El significado de “lo constante” es abordado por Ana en su bitácora 7. Narrando acerca de una actividad en clases (en parejas) Ante la pregunta ¿una magnitud puede cumplir el rol de constante en una situación y de variable en otra situación? La estudiante relata:

“Para mí constante es cuando algo nunca cambia, o sea con ejemplo, es cuando la temperatura disminuye siempre igual, o cuando un auto tiene siempre la misma velocidad, no cambia el tiempo, su tiempo siempre es igual, siempre sus cambios son iguales, para mí eso es constante. Y variable es la que indica la relación entre dos magnitudes, las cuales son variables de interés y dependiente y las de variable de referencia y de independiente.

Mi respuesta es que sí se puede cumplir el rol de constante en una situación y de variable en otra situación.

Ejemplos de esto es velocidad con que se traslada un automóvil, en una velocidad x , puede ser constante, ya que se establece que tiene un solo valor en la situación, a diferencia de la variable distancia y tiempo que puede adquirir cualquier valor (ecuación lineal). Si analizamos una situación donde un hombre cae desde 500 mts de altura, la velocidad con que cae va variando, ya que cada vez cae más rápido, a partir de esto dicho valor adquiere cualquier valor, la cuál queda convertida en una variable”

[Ana, Narración en Bitácora 7, 2002]

Para su afirmación inicial *“constante es cuando algo nunca cambia”* exhibe, en el desarrollo de su relato, dos tipos de acepciones para lo constante, una de primer orden y otra de segundo orden:

- a. De primer orden: Constante es no cambiar (correspondencia a un mismo valor). En su último párrafo, en donde señala *“... en una velocidad x , puede ser constante, ya que se establece que tiene un solo valor en la situación”*.

- b. De segundo orden: Constante es no cambiar (es cambiar siempre igual). Para los dos casos que refiere, en la ejemplificación de qué es constante *“la temperatura disminuye siempre igual” “o cuando el auto tiene siempre la misma velocidad (...) siempre sus cambios son iguales”*.

En el caso de la acepción de segundo orden, lo que no cambia es “el tipo de cambio” que, en los ejemplos que menciona Ana, serían la “variación de la temperatura” y la “variación de la velocidad del auto”. No hay cambio del cambio, éste es constante.

Es decir, detectamos que está presente lo que Cantoral en su desentrañamiento del paso de la predicción a lo analítico caracteriza por “considerar como constantes a algunas de las sucesivas variaciones de las variables.” (Alanís, 2000, p. 238).

También en el contexto de los ejemplos que brinda, se evidencia la presencia de una metáfora para la “velocidad constante”:

Velocidad constante es llevar un tiempo (tempo o ritmo del auto)

Esta metáfora se distingue a partir en el ejemplo que cita del auto *“cuando un auto tiene siempre la misma velocidad, no cambia el tiempo, su tiempo siempre es igual, siempre sus cambios son iguales”*.

La frase *“su tiempo siempre es igual”* atribuida al auto o al tiempo que demora el auto en desplazamientos equivalentes sucesivos, hace que **ese**

tiempo²³ (tempo del auto o tiempo de cambio de posición del auto) resulta **dependiente de la velocidad**.

De la frase “*su tiempo siempre es igual, siempre sus cambios son iguales*” parece ser que la velocidad constante se estaría vivenciando por medio de intervalos iguales de tiempo (tempo del auto) para intervalos iguales de desplazamiento.

Entonces, vía la velocidad constante, se entrecruzan una acepción disciplinar con una acepción cotidiana para un móvil (aquí el auto) en movimiento:

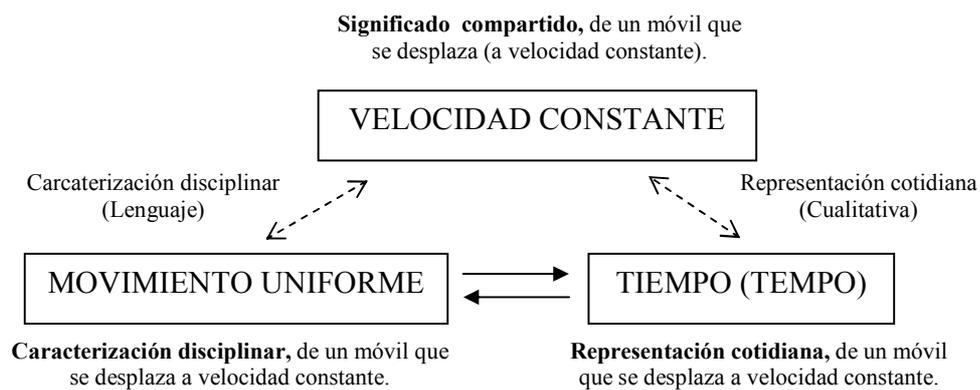


Fig. 12: *Velocidad Constante*: La velocidad como palabra del lenguaje disciplinar y cotidiano, cuando es constante resulta ligadora entre la caracterización disciplinar movimiento uniforme y la representación cotidiana de un tiempo propio o corporeizado (tempo).

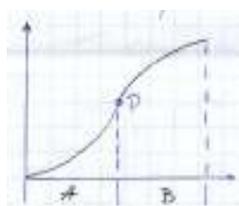
²³ Un trabajo detallado acerca de los *distintos tiempos* que vivencia el estudiantado, a partir de la indagación en la construcción de gráficas en matemáticas, dada su importancia como herramienta de representación para la modelación de fenómenos variacionales, es el que aborda Carrasco (2005) en su trabajo de Tesis de Maestría.

5.1.2. El caso de Mario

“Voy a plantearle algo que en un momento no tenía claro, y también le contaré como pude aclarar mi duda que me llevó, a más de un día, en el cual, tuve que aplicar no sólo el cálculo matemático, sino la parte de la visión, y esto me ayudó a darme cuenta de lo que era. La cosa es el punto de inflexión en el caso de:

Punto de inflexión: P

Aquí la razón de cambio alcanza su valor máximo entonces yo empecé por parte. En A, decimos es cóncava hacia arriba, su razón de cambio es creciente.



Al compararla con la cóncava hacia arriba completa, con la mitad de esta vemos que en el punto J, tiene su valor mínimo de la función, entonces podemos deducir que K, pasaría a ser un punto máximo ya que alcanza a ser como el tope de la función.

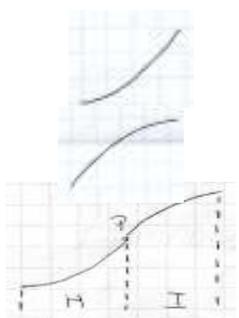


Ahora en B, decimos que la gráfica es cóncava hacia abajo y su razón de cambio es decreciente.



Si hacemos el mismo proceso que en lo anterior, de aquí vamos a sacar que en el punto C tenemos el valor máximo de esta función, de esto vemos que en el punto D es un valor mínimo de la función, en todo esto me confundía al juntar el pto. máximo de una función y el pto. Mínimo de otra y tenía como resultado el pto. máximo.

Pero luego, de varias observaciones al gráfico y a la definición del pto de inflexión, empecé a darme cuenta, de lo que hacía yo, no tenía nada que ver, en lo que significaba el pto de inflexión, porque se refería a la razón de cambio cuando toma un valor máximo o mínimo, siendo el pto cuando se cambia de concavidad. Con esto se me hizo más fácil.



Aquí tenemos una razón de cambio creciente, o sea mientras más a la izquierda, más pequeña su razón de cambio y al avanzar la gráfica, tenemos una mayor razón de cambio.

En esta gráfica, su razón de cambio es decreciente o sea, a la izquierda tenemos una razón de cambio mayor que hacia la derecha.

En el intervalo H, más cerca de P su razón de cambio es más grande y en el intervalo I, tenemos que más cerca del pto P será mayor su razón de cambio y en el punto P la razón de cambio será la máxima de toda la gráfica.

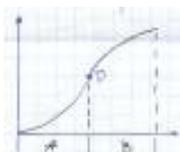
de toda la gráfica.

[Mario, Episodio de Bitácora 9, 2002]

“En todo esto me confundía al juntar el pto. Máximo de una función y el pto. Mínimo de otra y tenía como resultado el pto. Máximo”

Su problemática inicial fue comprender, para el caso de la gráfica que expone, la aseveración “*la razón de cambio alcanza su valor máximo (en el punto de inflexión P)*”. Al abordar su estudio, Mario pone en escena estrategias visuales descomponiendo la gráfica. Observamos además que en su gráfica, no considera (o invisibiliza) magnitudes que pudiesen estar involucradas en la representación gráfica, reduciendo el análisis a comprender la caracterización de punto de inflexión como máximo de la razón de cambio, supeditada a la gráfica. Visualmente no se hace problema en separar la gráfica como dos partes diferentes (similar a seccionar “un dibujo” en partes) su problema se suscita por la imposibilidad de que “dos puntos” que visualiza de naturaleza distinta (D y K) den origen, mediante el contacto de ambos, a “otro punto” (P) de naturaleza sólo de una de los dos anteriores. Es decir, en su análisis, surge un conflicto cognitivo que pasa por un obstáculo de sentido común, tal es la inconsistencia de “juntar” un punto máximo con un punto mínimo y obtener por resultado un punto máximo.

La descomposición que hace se ve coadyuvada con la vinculación *concavidad de la gráfica y crecimiento o decrecimiento de la razón de cambio (de la gráfica)* vía cadenas asociativas que no entra a problematizar. Dicha vinculación la considera, por una parte, como global y estática:



“Aquí la razón de cambio alcanza su valor máximo [en P] entonces yo empecé por parte.”
“En A, decimos es cóncava hacia arriba, su razón de cambio es creciente”
“Ahora en B, decimos que la gráfica es cóncava hacia abajo y su razón de cambio es decreciente.”

Y, por otro lado, hace una visualización más local y dinámica, a través de sus explicaciones acerca de la caracterización de la razón de cambio (siempre asociada a la gráfica):



Mientras más a la izquierda, más pequeña su razón de cambio y al avanzar la gráfica, tenemos una mayor razón de cambio.



A la izquierda tenemos una razón de cambio mayor que hacia la derecha.

De estas mismas textualidades, y de otras que están en su relato, se aprecia como entra también a escena la metáfora conceptual de uso frecuente en matemáticas para comprender la terminología de “mayor” y “menor”, sobre la base de un dominio conceptual de características corporeizadas, como lo es “más grande” y “más pequeño”.

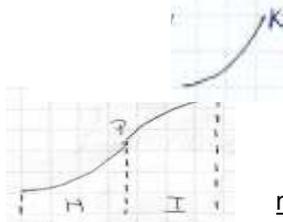
También, la visualización de gráfica en movimiento, ya detallada en el caso de Ana, vía la actuación de una cultura visual que moviliza metáforas de tipo icónica-gráfica-dinámicas para denotar el movimiento, la encontramos en su frase “y al avanzar la gráfica” cuando está explicando la razón de cambio “más pequeña” a la izquierda, en la primera textualidad de las que referimos anteriormente.

El uso del “cálculo matemático” que al principio de su relato señala que utilizó, nos parece es lo que respecta al uso de estas cadenas asociativas entre concavidad de la curva y crecimiento de la razón de cambio.

Posterior a su conflicto cognitivo, como resultado del intento fallido en solucionar su problemática inicial, señala:

“Empecé a darme cuenta, de lo que hacía yo, no tenía nada que ver, en lo que significaba el pto de inflexión, porque se refería a la razón de cambio cuando toma un valor máximo o mínimo, siendo el pto cuando se cambia de concavidad.”

En esta textualidad, el estudiante objetiva los dos significados puestos en aula para el punto de inflexión, uno como punto de cambio de concavidad y otro como punto en que la razón de cambio (de la magnitud de interés con respecto a la de referencia) toma un máximo o un mínimo. No obstante que en su análisis invisibiliza las magnitudes involucradas en la representación gráfica, sí logra separar la tipificación de máximo o mínimo que previamente había atribuido al punto, para distinguirla ahora, como atribuible a la razón de cambio.



“Podemos deducir que K, pasaría a ser un punto máximo ya que alcanza a ser como el tope de la función.”

“En el intervalo H, más cerca de P su razón de cambio es más grande y en el intervalo I, tenemos que más cerca del pto P será mayor su razón de cambio y en el punto P la razón de cambio será la máxima de toda la gráfica.”

Con la primera de estas textualidades, se manifiesta una representación de punto máximo como “un tope”, comprendida vía una metáfora de tipo espacial, que en este caso se da en el plano, anclada en lo visual. Sumado esto al conflicto cognitivo ya analizado con relación a intentar juntar un punto mínimo con un punto máximo, deja de manifiesto que su representación de punto máximo y o mínimo queda encerrado en el aspecto icónico-gráfico.

A su vez, de su segunda textualidad, se aprecia que finalmente comprende al punto de inflexión como punto de la gráfica en donde “*la razón de cambio será la máxima de toda la gráfica*”, pero avalado por la solución de

su conflicto cognitivo de juntar dos puntos de la misma naturaleza (en este caso máximos) aunque no precisamente, por el hecho de haber encontrado “dos puntos específicos que juntar” y que sean de la misma naturaleza, sino por la acción conjunta de una puesta en escena de **la idea intuitiva de límite**, como caracterización de la gráfica en términos de la razón de cambio, en su explicación con relación a “más cerca de P”, y de **la visualización local y dinámica de la cadena asociativa**, ya mencionada.

De manera que, con este episodio, dilucidamos como para la comprensión de la tipificación de un punto de inflexión en términos de la razón de cambio, la estrategia estudiantil movida por representaciones como las analizadas, funciona por encadenamientos y satisfacciones del sentido común, más que por un diálogo con la significación de razón de cambio y su relación con la tipificación que se hace desde los puntos de inflexión.

5.1.3. El caso de Mirtha.

“¿Por qué la derivada es una razón de cambio instantánea? He pensado mucho en la respuesta, al principio creí que se refería a instantánea, pues no había que hacer todo el proceso de aproximación a un valor exacto, aminorando Δt sino que se calcula instantáneamente el valor exacto mediante la definición formal de derivada. Luego pensé que era una razón de cambio instantánea pues se deriva en un punto, es decir, en un instante. Finalmente he pensado que se le da esta característica por la última razón, es decir, por que se calcula la derivada de un instante para así poder llegar a un resultado exacto, no es como aproximarse, achicando el Δt , sino que se parte del Δt más pequeño llegando así más eficazmente a la exactitud”

[Mirtha, Episodio de Bitácora 3, 2003]

De una representación cotidiana de “lo instantáneo” como algo que se hace de forma inmediata, la faceta física de la derivada le hace sentido como un procedimiento de evitar hacer el proceso de aproximación utilizado con la

aproximación fenoménica, y asigna a la definición formal de derivada el rol de calcular de modo inmediato (*instantáneamente*) lo antes hecho con un proceso más extenso en el tiempo. Así, de la primera parte de su reflexión, levantamos el siguiente esquema:

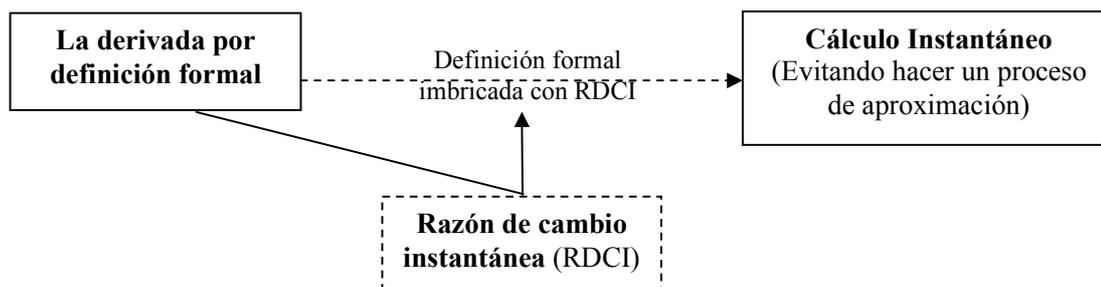


Fig. 13: Significación estudiantil inicial de la derivada (global) como Cálculo Instantáneo, vía un nexo entre la definición formal de derivada y la faceta física de derivada (sin atender a lo puntual).

Posteriormente, reformula haciendo uso de la metáfora conceptual de punto como un instante²⁴, cuando señala “*se deriva en un punto, es decir, en un instante*”. No obstante, el uso que sigue prevaleciendo es el de derivada como cálculo de “algo”.

“... se calcula la derivada de un instante para así poder llegar a un resultado exacto, no es como aproximarse, achicando el Δt ”

En esta textualidad, visualizamos una representación que actúa de obstáculo socio-cultural del límite (Díaz, 1999) como es la vivencia de quedarse en la proximidad. La validación sobre una comprensión de cálculo de la derivada la sostiene, como “portadora” de la exactitud. La representación estudiantil informa que la reconstrucción significativa, mediante aproximaciones (vía el método de Euler) con que se dio paso a un tratamiento (intuitivo) del límite con la metáfora de “estabilización de un valor”, para capturar así la razón de cambio de una magnitud de interés con

²⁴ De acuerdo a Lakoff & Núñez (2001) en el ámbito matemático, una metáfora conceptual para un punto es el instante.

respecto a otra de referencia en un instante (faceta física de la derivada en un punto)²⁵ no logra capturar la exactitud, en tanto el cálculo de la derivada sí lo estaría haciendo. Es decir, el cálculo (vía la definición formal de derivada) vendría, de acuerdo a esta representación, a solucionar el problema de la inexactitud.

“Se calcula la derivada de un instante (...) se parte del Δt más pequeño llegando así más eficazmente a la exactitud”

Para esta centración en el “cálculo de la derivada” movilizadora por “su efectividad para la exactitud”, vemos en la textualidad anterior, una especie de diálogo entre la significatividad que se procuró por la aproximación fenoménica y la representación cotidiana de lo instantáneo, cuando señala *“no es como aproximarse, achicando el Δt , sino que se parte del Δt más pequeño llegando así más eficazmente a la exactitud”*. De modo que, la definición formal de derivada quedó ligada a un Δt con sentido de proceso de proximidad y no únicamente como “algo” que se reemplaza por cero en cálculo del límite. Lo cotidiano lo vemos presente cuando refiere *“sino que se parte del Δt más pequeño llegando”* pues ese “se parte” y “llegando” denotan el inicio y final de un proceso, para ella menor y mejor en términos de eficacia en tanto se puede ir *“llegando así más eficazmente a la exactitud”*.

²⁵ “Podemos asegurar ahora que, si $\Delta t \rightarrow 0$ entonces los valores de la expresión $\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$ se irán “estabilizando” en el valor exacto $v(t_0)$. Este proceso lo denotaremos por la simbología: $v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$ ” (Pulido, Alanís y otros, p. 129).

5.2. Análisis transversal de las bitácoras de reflexión

A diferencia de la sección anterior, en que se ilustraron algunos análisis exhaustivos de bitácoras; ahora, presentamos un análisis de corte transversal, esto es, por episodios que levantan representaciones desde varios estudiantes.

Gráficas...

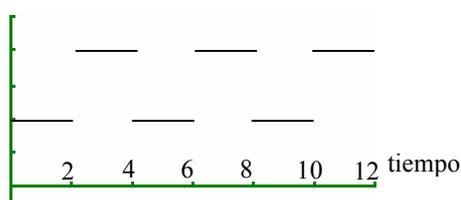
5.2.1. Gráfica como pseudo concepto icónico-gráfico-dinámico:

De las reflexiones estudiantiles se aprecia un desplazamiento de los atributos variacionales de un fenómeno, a la gráfica *per se*.

Ejemplos de esta representación, se ilustran en los siguientes casos:

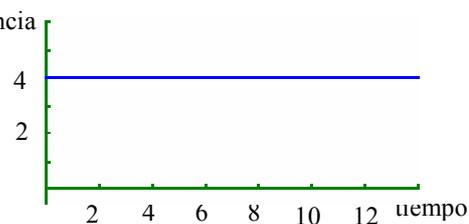
a) En el contexto de las reflexiones estudiantiles acerca de una secuencia didáctica implementada en clases, en la cual se pide determinar el comportamiento de un cuerpo para que un sensor registre determinadas gráficas que se exponen, se obtienen las siguientes reflexiones estudiantiles:

distancia



“Lo que yo puedo rescatar de esta gráfica es que durante 2 segundos, se encuentra en reposo, es decir la gráfica no tiene movimiento, en los mismos 2 segundos aumenta (...) luego se mantiene en reposo [la gráfica] 2 segundos más y luego baja en forma drástica (...)” [Ana, Bitácora 1, 2002]

distancia



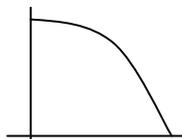
“En el gráfico no se puede decir mucho, sólo que permanece estático en la unidad 4 mientras pasa el tiempo” [Mabel, Bitácora 1, 2002]

“Y por último para terminar mi primera bitácora le contaré que sé diferenciar cuando un gráfico está en reposo o cuando sea curvo, tenga un período o no lo tenga, cuando tiene distintas alturas y va variando el tiempo”

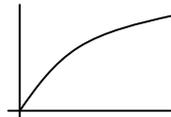
[Javiera, Bitácora 1, 2002]

En estas textualidades, se dota a los gráficos de características variacionales tales como estar en movimiento, permanecer estático o estar en reposo. El segmento horizontal (textualidades 1 y 3) es visto como un gráfico en reposo, sin movimiento o estático. En la textualidad 3 se distingue, por dipolo contrario, la acepción de gráfico curvo como no estar en reposo (“sé diferenciar cuando un gráfico está en reposo o cuando sea curvo”).

b) En el contexto del estudio de la razón de cambio de una magnitud de interés con respecto a otra de referencia, se invisibilizan las variables de los ejes coordenados, dotando de atributos variacionales a la gráfica, la que actúa como un complejo pseudo concepto comprendido vía metáforas conceptuales de dominios icónico-gráfico-dinámico:



“en donde se daba a entender que era cóncava abajo y que decrece más lento al principio y más rápido al final.”

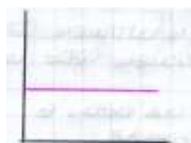


“En este gráfico crece más rápido al principio y lento es al final.” [Irma, Bitácora 3, 2003]



“Cuando el dibujo que se muestra en la gráfica es una recta su razón de cambio es “constante”, cuando en el dibujo se ve una recta que no tiene movimiento, o sea no varía, su razón de cambio es “cero””.

[Ana, Bitácora 2, 2002]





“Podemos deducir que K, pasaría a ser un punto máximo ya que alcanza a ser como el tope de la función (...) mientras más a la izquierda, más pequeña su razón de cambio y al avanzar la gráfica, tenemos una mayor razón de cambio.”

[Mario, Bitácora 9, 2002]

En la primera textualidad se alude a una caracterización utilizada en el discurso áulico, no obstante, para las variables que covarían por medio de la gráfica. En una mirada global, y tal vez con la influencia cultural visual que detallamos más exhaustivamente en el análisis de la sección anterior, se hace manifiesto un desentendimiento de las variables que covarían y el atributo de más rápido a más lento se atribuye directamente a la gráfica.

5.2.2. Gráfica como modelación de cuerpos en movimiento:

“Razón de cambio no constante, a mi esta materia no me costó casi nada por que lo había visto antes en física, me refiero a que me había dado cuenta de que es lo que ocurría, pero se lo explicaré de todas formas: para poder ver graficas distancia v/s tiempo, donde si nos situamos en el eje x y tomamos móviles de igual tamaño, y luego tomamos el mismo móvil mas adelante y reflejamos su imagen en el eje y, podremos ver si es mas rápido o mas lento si la imagen nos da mas pequeña, eso quiere decir que el móvil va disminuyendo su velocidad, si da mas grande es que el móvil va aumentando su velocidad.”

[Boris, Bitácora 3, 2003]

“Esto de poder saber como es el movimiento de los cuerpos con sólo ver la gráfica lo pude entender con el 2º trabajo que tuvimos que hacer, en el cual tuvimos que clasificar las gráficas según semejanzas y diferencias” **[Luisa, Bitácora 1, 2002]**

“Era emocionante ver un gráfico y imaginarse que podría haber sido lo que había captado” **[Edith, Bitácora 1, 2003]**

Estas textualidades muestran como desde distintos focos, tales como, ideas previas, trabajo grupal y emocionalidad, va conformándose un tipo de representación estudiantil para comprender una gráfica como herramienta de

modelación de un fenómeno. En el caso de la primera, se pone en acción una cadena asociativa que relaciona la velocidad de un móvil con la proyección vertical de “móviles” de igual tamaño en el eje x. Se produce en esta cadena asociativa un doble sentido para el uso del vocablo móvil, uno de tipo abstracto situado en una misma dimensionalidad del plano cuando señala *“nos situamos en el eje x y tomamos móviles de igual tamaño”* y, el otro, haciendo referencia a la velocidad de un móvil *“si la imagen nos da mas pequeña, eso quiere decir que el móvil va disminuyendo su velocidad, si da mas grande es que el móvil va aumentando su velocidad”*.

Si este doble uso se toma de manera literal como que en ambos casos se refiere al móvil que toma en el eje x, entonces una representación, a la base de su visualización de relacionar el desplazamiento más rápido o más lento con “el móvil” que toma en el eje x, puede sustentarse metafóricamente desde la experiencia cotidiana, y también corporal, de vivenciar los desplazamientos horizontales con la sensación de avanzar. Actuando la gráfica, como una especie de conexión-puente que liga un espejo vertical (eje y) que caracteriza el avance de un cuerpo en desplazamiento horizontal (móvil del eje x) *“si la imagen nos da mas pequeña, eso quiere decir que el móvil va disminuyendo su velocidad, si da mas grande es que el móvil va aumentando su velocidad.”*

Lo Constante...

5.2.3. Movimiento constante es un “cambio siempre igual”:

“El movimiento que hay en relación de la Tierra hacia el Sol, el cual nos resultó algo así: Al ser este un movimiento circular, me refiero que después de un punto se vuelve a repetir la misma secuencia, a esto lo podemos llamar un movimiento constante, esta es una duda que se produjo en un grupo de amigas que comentamos el ejercicio, yo creo que no, porque para mí el hecho que sea constante me dice que si va un movimiento en aumento, este aumento será constante por ejemplo si va aumentando cada 2 cm, siempre aumentará en 2 cm, y no que aumente y disminuya en 2 cm.”



[Luisa, Bitácora 1, 2002]

Aquí, un movimiento es caracterizado como constante si el cambio producido es siempre igual. La estudiante, comienza explicando un “movimiento en aumento” para caracterizar un “movimiento constante” para luego terminar su caracterización en el “tipo de aumento” que siempre debe ser igual, y que si disminuye ya no se estaría hablando de aumento. Así, lo constante del movimiento entonces es su aumento siempre igual, es decir, lo que se está caracterizando como constante no es el movimiento sino el comportamiento o tipo de movimiento, en este caso, su aumento. Es decir, el cambio del cambio. Lo que prima como constante no es el valor numérico de 2 cm., sino ese valor numérico junto con el comportamiento, esto es, un aumento constante.

Así, en su reflexión, vislumbramos dos tipos de acepciones, una cualitativa y otra cuantitativa, las que en conjunto caracterizan a un cambio de segundo orden (cambio del cambio): “El aumento (lo cualitativo) y la constantificación del aumento (lo cuantitativo)”. Por dipolo contrario, levantamos también la acepción: “La disminución (lo cualitativo) y la

constantificación de la disminución (lo cuantitativo)". Además, de la reflexión que presenta, parece no extender su representación a una del tipo: "Un comportamiento cíclico o periódico (lo cualitativo) y la constantificación del comportamiento (lo cuantitativo)".

5.2.4. Constante es "nunca cambiar":

"Para mí constante es cuando algo nunca cambia, o sea con ejemplo, es cuando la temperatura disminuye siempre igual, o cuando un auto tiene siempre la misma velocidad, no cambia el tiempo, su tiempo siempre es igual, siempre sus cambios son iguales, para mí eso es constante (...) en una velocidad x , puede ser constante, ya que se establece que tiene un solo valor en la situación"

[Ana, Bitácora 7, 2002]

Se exhiben, dos acepciones para lo constante. Una de primer orden, constante es no cambiar como correspondencia a un mismo valor, de su textualidad "*en una velocidad x , puede ser constante, ya que se establece que tiene un solo valor en la situación*". Y otra, de segundo orden, constante es no cambiar como es cambiar siempre igual, de su ejemplificación de qué es constante "*la temperatura disminuye siempre igual*" "*o cuando el auto tiene siempre la misma velocidad (...) siempre sus cambios son iguales*".

En el caso de la acepción de segundo orden, lo que no cambia es "el tipo de cambio" que, en los ejemplos que menciona Ana, serían la "variación de la temperatura" y la "variación de la velocidad del auto". O sea, no hay cambio del cambio, éste es constante.

5.2.5. Intervalo es “un valor numérico”:

“v(velocidad), s(distancia) y t(tiempo) (...) Podemos decir que mientras mas se acerque a cero Δt (el intervalo de la magnitud de referencia) se acercará al valor exacto de la variable pedida (que quede claro que todo un proceso va anterior a este pero es lo que mas me quedo latiendo en la mente).” **[Ismael, Bitácora 3, 2003]**

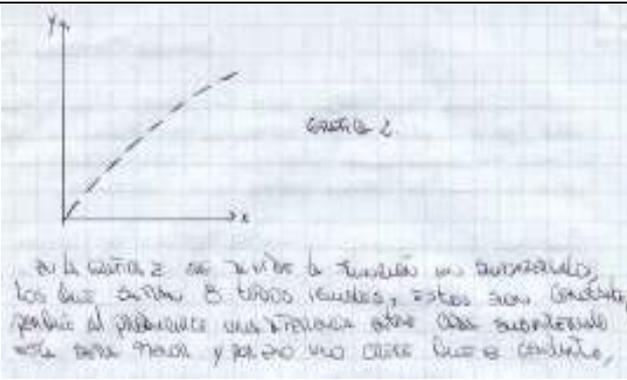
“A esas pequeñas diferencias la llamaremos diferenciales dy y dx , con la secante obteníamos los delta Δy y Δx que son intervalos o diferencias más grandes”
[Luisa, Bitácora 12, 2002]

“Intervalo = es la distancia que se produce de un punto a otro punto.”
[Ana, Bitácora 2, 2002]

En la primera textualidad, de una representación de comprender un intervalo de tiempo como un lapsus o diferencia entre un instante y otro, se señala directamente a la variación Δt como el intervalo. Por su parte, en la segunda textualidad, hay una extensión para representación de intervalo como la misma variación ya sea Δx o Δy , indicado como una diferencia. Del indicar a los diferenciales como las pequeñas diferencias y, al final de la textualidad, diferencias más grandes, lo que también llama intervalo, suponemos que la acepción que está utilizando de diferencias es resta. De la tercera textualidad, se hace más explícita la representación de intervalo como distancia.

5.2.6. Intervalo es “fragmento o parte de algo”:

“En la gráfica 2 se divide la función en subintervalo, los que serán 8 todos iguales, estos son constante, porque al producirse una diferencia entre cada subintervalo ésta será menor y por eso uno cree que es constante”



En la gráfica 2 se divide la función en subintervalos, los que serán 8 todos iguales, estos son constantes porque al producirse una diferencia entre cada subintervalo esta será menor y por eso uno cree que es constante.

[Ana, Episodio de Bitácora 9, 2002]

En la sección anterior, se hizo un análisis exhaustivo con el que interpretamos, para este episodio de bitácora, la representación de un intervalo como “fragmento o parte de algo”.

5.3. Resultados a partir del cuestionario exploratorio

Una vez analizada la información, vía las bitácoras de reflexión personal, en el marco de la investigación que lleva a cabo Díaz et al. (2003) se aplicó en noviembre del 2004 un cuestionario a los estudiantes que vivieron el proceso de las bitácoras de reflexión. Con el cuestionario se indaga en relación a cinco nociones variacionales, a saber, intervalo, diferencia, magnitud, variable y razón. (Cfr. Anexo 3).

Para el caso de este trabajo de tesis, se considera el análisis de dos de estas nociones: intervalo y diferencia. Ya que ambas, a partir de su presencia en las narraciones, parecen generar una red de significados, asociada con la noción de razón de cambio.

5.3.1. Representaciones de la diferencia.

La diferencia es considerada con una gama de acepciones, que en general responden a características de un objeto al compararlo con otro:

- Comparación;
- Distinción;
- No Coincidencia;
- Distinto;
- Clasificación (destacando lo no igual);
- Contrario;
- Distancia.

En el ámbito de la matemática, el estudiantado relaciona la diferencia con resta. Lo cual ocurre con distintos matices:

“Es la comparación que hace al ver dos objetos, pero en matemáticas la diferencia sobre todo es la resta, es cuánto falta para llegar al número esperado.” **[Estudiante 12, M]**

“diferencia es lo que tu puedes tener distinto de otra. La diferencia es la resta entre dos o más números, es lo que le falta a uno para alcanzar al otro”



[Estudiante 8, M]

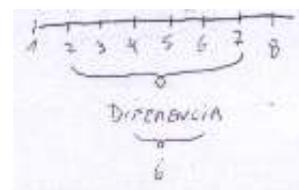
“en lenguaje matemático se le denomina diferencia a la resta entre dos números. Entonces cuando escuchas hablar (en matemáticas) de diferencia debes asociarlo inmediatamente con una resta.” **[Estudiante 10, F]**

“Es la comparación que hace al ver dos objetos, pero en matemáticas la diferencia sobre todo es la resta, es cuánto falta para llegar al número esperado.” [Estudiante 12, M]

En la primera y segunda textualidad se significa la resta como “lo que falta para llegar a otro número” de modo que estaría implícita una práctica de comparación entre dos cantidades. No obstante, en la tercera textualidad, se da muestra de una relación más bien escolarizada en donde se conecta el vocablo diferencia con el vocablo resta. Inclusive, en la cuarta textualidad, aparece como explícitamente se hace una “distinción” entre un significado de comparación (para lo cotidiano) y uno de resta (para lo matemático) que a pesar de estar el significado de “lo que falta para llegar a un número esperado”, parece haber una desconexión con el sentido de comparación. Es decir, en esa textualidad, la diferencia como resta no se vivencia comparativamente.

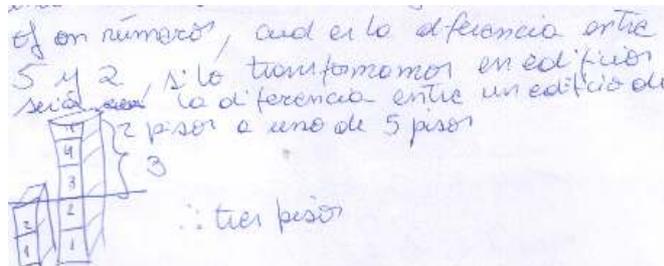
Por su parte, la acepción más cotidiana de comparar un objeto con otro, se presenta en como lo que hace sentido al estudiantado al determinar la diferencia en términos numéricos. Por medio de una visualización de “calcular” lo que separa, como se muestra a continuación:

“es lo que existe y no es común entre una cosa y otra cosa, por ejemplo, en números cual sería la diferencia entre 1 y 8, tiene 6 números de diferencia.”



[Estudiante 1, M]

“es lo distinto que podemos encontrar entre dos cosas o más. La diferencia es lo que distingue un hecho u objeto y hace que este sea único y especial. Exceptuando las cosas que son replicas de otras Ej.: la diferencia (en objetos) entre una cosa y un edificio, es que dentro de un edificio encontramos varias cosas y la cosa es unitaria.”



[Estudiante 4, F]

En la primera textualidad, la diferencia (como resta) se contrapone con la acepción comparativa de “lo que existe y no es común entre una cosa y otra”, ya que al “haber seis números” entre 1 y 8, el estudiante ejemplifica que la diferencia entre 1 y 8 es 6, resultando un obstáculo, la acepción comparativa mencionada. Por su parte, en la segunda textualidad, una acepción comparativa similar “es lo distinto que podemos encontrar entre dos cosas o más” está calzando bien, para esta estudiante, con la diferencia numérica corporeizada en la cantidad de pisos de cada edificio.

5.3.2. Representaciones de Intervalo.

Del cuestionario, se distinguen varios tipos de acepciones para intervalo:

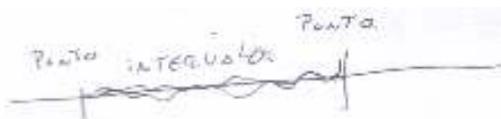
- Un espacio;
- Algo (espacio o conjunto) que se halla limitado;
- Una parte, sección o trozo, fragmento de, pedazo de algo;
- Distancia;
- Lapso, período de tiempo, pausa;
- Estructura de similitudes, algo separador;
- Clasificación.

Para el caso de intervalo como **espacio**, entre otras, se asocia a un “espacio” lineal o a un espacio de tiempo:

Acepción: Un espacio o pausa.

“Los jugadores de fútbol descansan en un intervalo de 15 min.” [Estudiante 35, M]

Acepción: Espacio entre algo visualmente concreto.



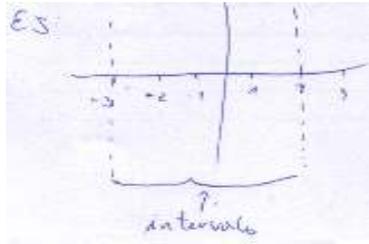
“es lo que existe dentro de 2 puntos marcados ya sea en una recta o en cualquier otra cosa.” [Estudiante 8, M]

Intervalo y el **espacio entre algo**, presenta una cadena asociativa de intervalo con distancia. Aquello pasa a ser disfuncional si esta representación, legitimada para el caso del plano, se sigue para una curva sobre la esfera. En el plano, “la línea de intervalo” no alcanza a ser disfuncional con la distancia. De modo que el intervalo, en el plano pasa a ser para el estudiantado, solamente segmentos rectilíneos. En el plano, resulta legítima la cadena asociativa de distancia y segmento lineal (para intervalo).

Las acepciones de **una parte, sección o trozo, fragmento de, pedazo de algo**, responden mayormente a una representación cotidiana, aunque también se corporaliza en un registro matemático icónico-visual:

Acepción: un subsector de algo... “Lo ejemplificaría seccionando un sin fin de cosas que existen en la vida diaria como una calle larga la separaría en varios “intervalos” etc.”

[Estudiante 22, M]



Acepción: Fragmento de... “Es un sector determinado por numerales dentro de un plano cartesiano o una tabla de valores.”

[Estudiante 14, M]

Las representaciones más cotidianas parecen ser aquellas referidas a las acepciones relacionadas con el tiempo (sea en términos de espacio o lapsus por ejemplo) y aquellas relacionadas con un fragmento o parte de algo. Tenemos el caso de la Estudiante N°10 para quién:

Acepción: INTERVALO: Lapsos...

“en lenguaje matemático intervalo es como un “pedazo” de algo, sea de números reales, de tiempo, de espacio. Es como un pedacito de algo que se encuentra acotado y en donde suceden algunas cosas (y otras no)”

[Estudiante 10, F]

La estudiante comienza a vislumbrar para intervalo que allí sucede “algo” y otras cosas no. No dice que cosas suceden y cuáles no. Se encuentra en una etapa muy precaria de dipolo, para la noción de intervalo. Movilizada tal vez, por la experiencia del aula de estadística, en donde uno de los tratamientos más utilizados para intervalo es de clasificador. Sin embargo, la asociación comienza recién a conformarse en esta estudiante, en diálogo con una representación más cotidiana, cuando señala “es un pedacito de algo”.

Se distingue aquí una concurrencia de representaciones. Una representación cotidiana, “un pedacito de algo”, con representaciones del contexto del cálculo y otra de un contexto estadístico, a saber, “se encuentra acotado” y “suceden algunas cosas”, que no alcanzan a cobrar aún sentido desde los propósitos de la enseñanza.

CAPÍTULO VI

Conclusiones

En este trabajo nos hemos preguntado por la complejidad de los aprendizajes, procurando comprender los procesos de entendimientos estudiantiles, no obstante, sin pretender llegar realmente a “los entendimientos”, empresa de mayor envergadura. En nuestra aproximación hemos buscado reconocerlos en el marco de su manifestación, al momento de abocarse los estudiantes a la actividad de explicarlos por medio de las bitácoras reflexivas. De las explicaciones estudiantiles emergen aspectos propios de sus formas de entender. Ilustra este aserto, la reflexión de una estudiante, al final de su proceso de elaboración de las bitácoras:

“... cuando deseaba escribir sobre algo que no entendía, como para poder expresar que era lo que no entendía realmente, debía meterme más aún en el asunto, lo que provocaba que en vez de redactar lo que no entendía, terminaba explicando lo que había entendido y de que manera lo había logrado entender...”

Como fruto de la investigación surge el dispositivo analítico de las *representaciones estudiantiles variacionales* constituidas por dos dimensiones: un dispositivo analítico de entendimientos y un esquema de actividad matemática. Este dispositivo permitió comprender entendimientos estudiantiles de nociones variacionales.

El dispositivo analítico de “entendimientos” se usó para comprender la imbricación entre redes semánticas y redes de tonalidades emocionales del estudiantado. La red semántica la construye el estudiante en la medida que

establece redes de significados en tanto va configurando nociones variacionales en contextos de enseñanza, en un proceso durante el cual activa secuencias de nodos de distinta naturaleza. Este proceso toma lugar simultáneamente con la constitución de la emocionalidad estudiantil asociada a su semantización de lo variacional, estableciéndose por tanto una red de tonalidades emocionales imbricada con la red de significados. A esas redes y su imbricación es a lo que denominamos “entendimiento”. Junto a los entendimientos, se encontrarán los esquemas de actividad matemática susceptibles de ser desarrollados por el estudiantado que porta estas representaciones. Esta última dimensión dota de un carácter predictor a las representaciones estudiantiles variacionales y abre un importante espacio para continuar esta investigación explorando conjeturas sobre dislexias y entendimientos que viven en el aula de cálculo inicial.

Las nociones de pseudoconcepto y cadena asociativa de Vygotsky y de metáfora conceptual de Lakoff y Núñez, nos permitieron distinguir redes de significados comprometidas en las representaciones estudiantiles variacionales. En tanto, las tonalidades emocionales se levantaron con la técnica de la codificación abierta realizada a las bitácoras de reflexión.

Las tonalidades emocionales -en las bitácoras- se develan como parte imbricada en sus procesos y se refieren tanto al profesor como a las situaciones de enseñanza y al saber. A modo de ilustración:

“Se nota que usted [profesor] es una persona apasionada con lo que hace, pero esto muchas veces permite que uno reprima su ignorancia evitando hacer preguntas”

“Me he sentido súper apoyada por usted [profesor] ya que veo que ha encontrado las virtudes mías y ha hecho que yo misma las reconozca”

“Me gustó harto porque era emocionante ver un gráfico y imaginarse que podría haber sido lo que había captado”

“En las primeras dos actividades me sentí un poco incómodo al comienzo ya que me costó un poco relacionar lo concreto con lo abstracto”

“Cuando usted comentó que íbamos a ver logaritmos yo me dije noooo (...) luego me di cuenta que no eran tan fomes que eran entretenidos (...) el día viernes comenzamos a ver límites de este termino y ahí me comenzó a gustar un poco más”

De manera que la bitácora de reflexión permitió vislumbrar aspectos relacionados a diversos vértices del triángulo didáctico que dicen relación con tonalidades emocionales del estudiantado, lo cual provee al profesor de una sensibilidad en ese aspecto.

De la información recabada en la investigación, se identificaron entendimientos estudiantiles que corporizan nociones variacionales en metáforas formadas por cadenas asociativas complejas y mixturas con nociones y metáforas cotidianas. En el estudio se pudo identificar distintos modos de apropiación estudiantil de nociones variacionales. En efecto, a la hora de comunicar los estudiantes sus entendimientos de nociones variacionales recurrieron al uso de complejos pseudo conceptos, de cadenas asociativas y de metáforas conceptuales que incorporaban registros icónicos y gráficos con un atributo dinámico.

- Para la noción de intervalo se detectan imbricaciones entre nociones cotidianas y matemático-escolares, que se presentan bajo acepciones entremezcladas de intervalo como espacio, lapso, pausa, fragmento de algo o distancia. Algunas textualidades de estudiante ilustran este aspecto.

“Los jugadores de fútbol descansan en un intervalo de 15 min”

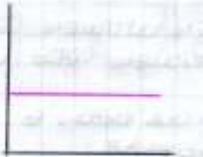
“una calle larga la separaría en varios ‘intervalos’”

“en lenguaje matemático intervalo es como un “pedazo” de algo, sea de números reales, de tiempo, de espacio. Es como un pedacito de algo que se encuentra acotado y en donde suceden algunas cosas (y otras no)”

- En relación a la faceta física de la derivada en un punto, como razón de cambio instantánea, se detecta una mixtura presente en el entendimiento estudiantil que pone el foco en la definición formal o transfiere al vocablo *instantáneo* (asociado a la razón de cambio instantánea) una representación cotidiana de “algo breve” e “inmediato en el tiempo”.

“creí que se refería a instantánea, pues no había que hacer todo el proceso de aproximación a un valor exacto, aminorando Δt sino que se calcula instantáneamente el valor exacto mediante la definición formal de derivada”

- Uso de cadenas asociativas para significar una función lineal.



Cadena asociativa: *Función constante / está fija / no tiene movimiento / no varía / su razón de cambio es cero.*



Cadena asociativa (por dipolo) *Función no constante / no está fija / tiene movimiento / varía / su razón de cambio no es cero.*

Cadenas asociativas para la relación función lineal/razón de cambio: establecidas con el uso de un complejo pseudo concepto recta, significado por metáforas conceptuales icono-gráfica-visuales.

- Se devela la presencia de una cadena asociativa que forma una red de significados para la razón de cambio, a saber, *razón de cambio / intervalo / diferencia*.
- En el aspecto gráfico, en general el estudiantado no considera a las variables involucradas para la representación gráfica, sino que echa mano a un tratamiento icónico-gráfico. Por el uso de complejos pseudo conceptos, o bien -en conexión con la función y/o fenómeno que esté vinculada- por metáforas conceptuales de tipo icónico-gráfica-dinámicas. Por ejemplo, mientras la enseñanza refiere a una recta horizontal con pendiente igual a cero, una visualización estudiantil la entiende como una recta que *no se mueve*, asimismo, una recta con pendiente positiva, como una recta que *sí se mueve*. Lo anterior, evidencia la presencia de una metáfora conceptual con dominio fuente en *lo socio-cultural* y dominio meta en lo *icónico-gráfico-dinámico*.

Con relación a las bitácoras de reflexión, además de elicitar facetas cognitivas de las representaciones estudiantiles variacionales, éstas permitieron acercarse a las tramas implícitas que vivencian los estudiantes, concomitantes a cualquiera sea la situación de enseñanza que se implemente en el aula. En efecto, la bitácora de reflexión personal permitió develar tramas implícitas, de facetas propias de una complejidad de aula, en la calidad de procesos entre seres humanos, elicidadas en las narraciones estudiantiles. Éstas,

- provocaron sensibilidad pedagógica respecto de lo que se realiza en el aula y de lo que aprende el estudiantado en la situación de enseñanza que se implemente;

- mostraron incidencias de las situaciones de enseñanza en el estudiantado;
- permitieron conocer de complejidades en bucles que imbrican razón/afecto/impulso.

También permitieron acompañar los procesos de construcción de significados variacionales, dialogando con los entendimientos estudiantiles que quedan a la base de las producciones escolares, toda vez que, de las bitácoras, fueron surgiendo entendimientos estudiantiles referentes a las temáticas estudiadas; a sus sensibilidades didácticas acerca de las acciones y modos de enseñanza y a sus emocionalidades, que orientan en cómo el profesorado puede afectar positiva o negativamente posibilidades de aprendizaje del estudiantado.

A modo de cierre, consideramos que las representaciones detectadas responden a facetas de la complejidad que se instala en un aula comprometida en generar entendimientos con respecto a la variación. Las reflexiones estudiantiles han discurrido en el marco de una enseñanza y las representaciones estudiantiles se han ido estableciendo sobre la base de lo que a cada estudiante le va haciendo sentido en esos “escenarios-tramas” que dan contexto a cada relato estudiantil en simultaneidades espacio-temporales, incluyendo relatos de sus entendimientos de cómo conocemos, para saber qué realmente conocemos.

Bibliografía

- Alanís, A. (2000). La predicción: un hilo conductor para el desarrollo de un curso de cálculo. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8* (pp. 233-245). Sevilla, España: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Andrade, R., Cadenas, E., Pachano, E., Pereira, L. & Torres, A. (2002). *El Paradigma Complejo. Un cadáver exquisito*. Obtenido en noviembre 12, 2004, del sitio web de Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Sociales:
<http://rehue.csociales.uchile.cl/publicaciones/moebio/14/andrade.htm>
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática venezolana* 10 (2), 117-134. Obtenido en marzo 12, 2005, de <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/artigue.pdf>
- Arrieta, J. (2004). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado, Cinvestav, México.

- Ávila, J. (2004). Reflexiones estudiantiles ligadas a la razón de cambio. Ponencia presentada en *La Duodécima Jornada de la Sociedad Chilena de Educación Matemática*. Valparaíso, Chile: Sochiem.
- Badillo, J. & Edelmira, R. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia: "la derivada un concepto a caballo entre la matemática y la física"*. Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, España. Obtenido en noviembre 12, 2004, de http://www.tdx.cesca.es/TESIS_UAB/AVAILABLE/TDX-0611104-144929/
- Baeza, J. (2001). *El oficio de ser alumno en jóvenes de liceo de sector popular*. Santiago, Chile: Ediciones Universidad Católica Cardenal Raúl Silva Henríquez.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(2), 165-198.
- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Francia: Universidad de Bourdeaux.
- Candela, A. (2001). Corrientes teóricas sobre discurso en el aula. *Revista Mexicana de Investigación Educativa* 6 (12), 317-333. Obtenido en diciembre 10, 2004, de <http://www.comie.org.mx/revista/Pdfs/Carpeta12/12invest1.pdf>
- Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 17, Tomo I, pp. 1-9). México: CLAME.
- Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* 42, 14 (3), 353-369.
- Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez R., & Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Editorial Trillas.
- Carrasco, E. (2005). *Visualizando lo que varía. Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo*. Tesis de maestría no publicada, CICATA-IPN, México.
- Connelly, M. & Clandinin, J. (1995). Relatos de experiencia e investigación narrativa. En J. Larrosa (Ed.), *Déjeme que le cuente. Ensayos sobre narrativa y educación* (pp. 10-24). España: Editorial Alertes.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4 (2), 103-128.
- Díaz, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos*. Tesis doctoral, PUC, Chile.

- Díaz, L. (2003). Reflexión de nuestras epistemes como eje transversal en procesos de estudio de matemática educativa. Ilustraciones. En R. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 16, Tomo I, pp. 68-72). Chile: Clame.
- Díaz, L., Ávila, J., Carrasco, E. & Gutiérrez, E. (2003). *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos*. Proyecto Fondecyt 1030413, período 2003-2005, Santiago, Chile.
- Díaz, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (2), 145-168.
- Dolores, C., Alarcón, G. & Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 5 (3), 225-250.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali, Colombia: Editorial Peter Lang.
- Echeverría, R. (1996). *El Búho de Minerva*. Chile: Dolmen Ediciones.
- Ferrari, M. (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 17, Tomo I, pp. 45-50). México: Clame.

- Hernández, R, Fernández, C. & Baptista, P. (1998). *Metodología de la Investigación*. México: Editorial Mc Graw Hill.
- Larson, R., Hostetler, R. & Edwards, B. (1995). *Cálculo y geometría analítica, Vol. 1*. España: McGraw-Hill/Interamericana.
- Lakoff, G. & Núñez, R. (2001). *Where Mathematics Comes From, How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. EEUU: Basic Books.
- Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática. La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia*. España: Gedisa Editorial.
- Lizcano, E. (1996). *Ser/No Ser y Yin/Yang/Tao. Dos maneras de sentir, dos maneras de contar*. Obtenido en agosto 28, 2004, de <http://sociored.uned.es/Lizcano/lizcano/artco.htm>
- Lizcano, E. (1999). *La metáfora como analizador social*. Obtenido en agosto 28, 2004, de <http://www.uned.es/dpto-sociologia-l/Lizcano/lizcano/MetafEmpiriafinal.doc>
- Maturana, H. & Varela, F. (1994). *De máquinas y seres vivos. Autopoiesis: La organización de lo vivo*. Santiago, Chile: Editorial Universitaria.
- Mella, O. (2003). *Metodología cualitativa en ciencias sociales y educación: Orientaciones teórico-metodológicas y técnicas de investigación*. Chile: Editorial Primus.
- Morin, E. (1990). *Introducción al pensamiento complejo*. México: Editorial Gedisa.

- Morin, E. (1999). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. Obtenido en noviembre 20, 2004, de <http://www.complejidad.org/27-7sabesp.pdf>
- Najmanovich, D. (2003). *El sujeto Encarnado: Límites, devenir e incompletitud*. Obtenido en agosto 24, 2004, de <http://www.fac.org.ar/fec/foros/cardtran/gral/sujeto%20encarnado.htm>
- Nubiola, J. (2000). El valor cognitivo de las Metáforas. *Cuadernos de Anuario Filosófico* 103, 73-84. Pamplona España. Obtenido en septiembre 10, 2004, de <http://www.unav.es/users/ValorCognitivoMetaforas.html>
- Núñez, R. (2004). ¿Qué idea de mente o cuerpo para el nuevo milenio? Reflexiones sobre el homo sapiens y una falacia en cuestionamiento. En A. Fischer (Ed.), *Nuevos paradigmas a comienzos del tercer milenio* (pp. 413-422). Santiago, Chile: El Mercurio Aguilar.
- Osorio, J. (2003). *Metáfora y análisis conceptual del discurso*. Obtenido en septiembre 8, 2004, del sitio web de la Universidad de Concepción, Programa de Doctorado en Lingüística: <http://www2.udec.cl/~prodoci/serie/ARTICULO1.htm>
- Pérez, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. Madrid, España: La Muralla.
- Pulido, R., Alanís, A., Salinas, P., Escobedo, J., Garza, J. & Santos, F. (2001). *Elementos del cálculo. Reconstrucción para el aprendizaje y su enseñanza*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

RAE (2005). *Diccionario de la Real Academia Española*. Obtenido en enero 24, 2005, de <http://www.rae.es/>

Rees, P., Sparks, F. & Rees, C. (1991). *Álgebra*. México: Mc Graw Hill.

Toboso, M. (2003). Tiempo y sujeto: Nuevas perspectivas en torno a la experiencia del tiempo. *A Parte Rey. Revista de Filosofía* 27(2), 1-10. Obtenido en febrero 21, 2005, de <http://serbal.pntic.mec.es/~cmunoz11/toboso.pdf>

Varela, F. (1990). *Conocer. Las ciencias cognitivas: tendencias y perspectivas. Cartografía de las ideas actuales*. Barcelona: Editorial Gedisa.

Varela, F. (2000). *Conversaciones con Francisco Varela* [Entrevista por Eric Goles]. Obtenido en Noviembre 12, 2004 de http://inalambrico.reuna.cl/fichas/entrevistas/francisco_varela.htm

Anexos

ANEXO 1: Indicaciones para la elaboración de las bitácoras

(1° Curso) Elaboración de Bitácora

Durante todo el curso deberá llevar una *bitácora*, contenida en una carpeta personal. La bitácora será su diario reflexivo, es su record de experiencia y aprendizaje en este curso. No olvide que *la reflexión es fundamental cuando de aprendizaje se trata* y por lo tanto este modelo para evaluar el proceso de aprendizaje es una componente muy importante del curso. Por favor asegúrese de dar oraciones completas y escribir en su bitácora doce entradas, es decir, una por semana.

Los propósitos fundamentales de esta bitácora son:

- Reflexionar sobre su propio aprendizaje y por tanto clarificar su entendimiento de la temática discutida durante esa semana.
- Darle retroalimentación sobre lo que piensa acerca de las actividades de aprendizaje realizadas, de forma que se puedan hacer los ajustes del caso durante el proceso, lo cual redundará en el mejoramiento cualitativo del curso.

La bitácora personal será evaluada atendiendo a que se entregue en las fechas estipuladas y a que refleje, lo más fundamentadamente posible, la evolución de su aprendizaje.

(2° Curso) Indicaciones para la realización de una Bitácora Metacognitiva

La reflexión es fundamental cuando de aprendizaje se trata y por lo tanto este modelo para evaluar el proceso de aprendizaje es una componente muy importante del curso. Sin reflexión el aprendizaje no toma posición. Durante este curso deberá hacer entrega de cinco bitácoras metacognitivas en las fechas indicadas en la programación.

Los propósitos fundamentales de la bitácora son:

- Que usted reflexione sobre su propio aprendizaje y que por lo tanto clarifique su entendimiento de la temática discutida.
- Dar al profesor retro-alimentación sobre lo que usted piensa acerca de las actividades de aprendizaje realizadas, de forma de hacer ajustes del caso durante el proceso, lo cual redundará en el mejoramiento del curso.

Cada bitácora debe contener las siguientes componentes:

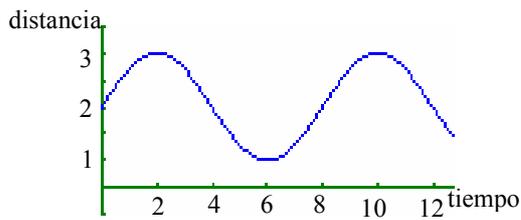
- **¿Qué hicimos?** Incluya una descripción breve con lo más relevante, de lo visto y estudiado en el período acerca del cuál debe hacer su bitácora.
- **¿Qué piensa usted sobre eso?** Se trata de expresar lo que piensa de lo que hicimos en clase. Por ejemplo, actividad desarrollada, trabajo en grupos, discusión de un tema o presentación de algún tema por parte del profesor y/o estudiantes (¿Fue muy fácil?, ¿Muy difícil?, ¿Qué tanto conocía del tema?, ¿Hubo claridad en la ideas expuestas?, ¿Qué tan activa estuvo la participación de los estudiantes? ¿Y la suya?, ¿Fue interesante la discusión?, ¿Fue aburrida?).
- **¿Qué aprendió?** Usted dará algunas ideas sobre lo que aprendió respecto a la temática del curso y que aprendió sobre usted misma(o)? Esta sección es ciertamente la más importante de toda la bitácora, por favor ponga especial dedicación en ella.

ANEXO 2: Secuencia implementada en la actividad curricular

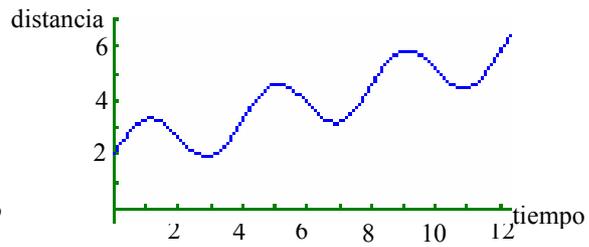
SECUENCIA 1

1. Supóngase que un sensor está registrando el comportamiento de un cuerpo durante un determinado tiempo. Describa en cada caso dicho comportamiento para que el sensor dibuje las siguientes gráficas

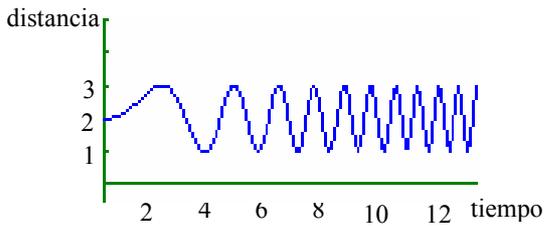
a)



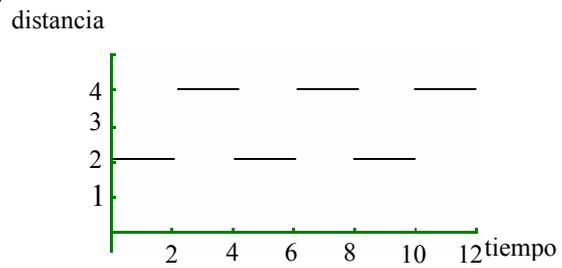
b)



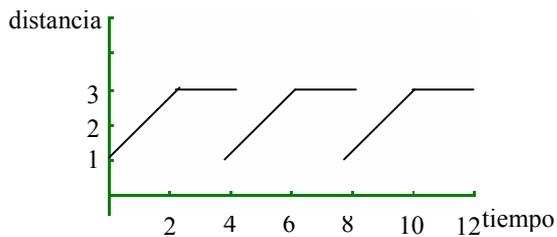
c)



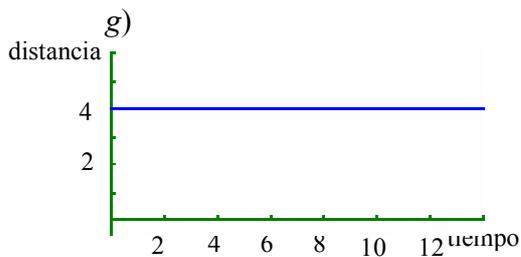
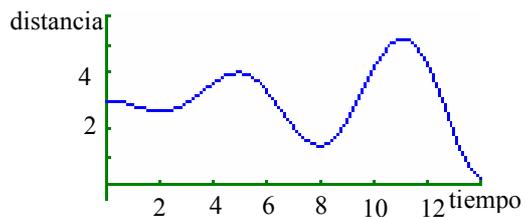
d)



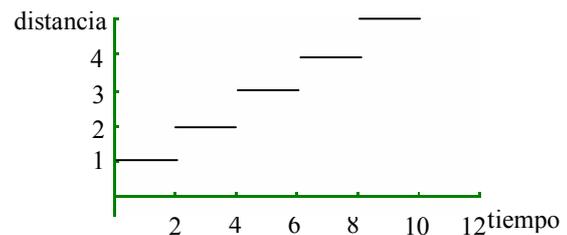
e)



f)



h)

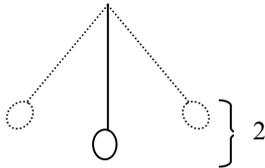


2. ¿Cómo agruparía usted a las gráficas anteriores de acuerdo a semejanzas y diferencias?
3. Prediga usted cuál será la posición del móvil en el segundo 231. Argumente su predicción lo más ampliamente posible.
4. ¿Cómo agruparía usted a las gráficas anteriores de acuerdo a semejanzas y diferencias?

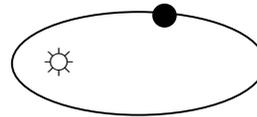
SECUENCIA 2

1. Supóngase que un sensor está registrando el comportamiento de un cuerpo durante un determinado tiempo. Describa en cada caso cómo sería la gráfica tiempo-distancia dibujada por el sensor.

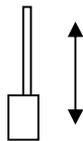
a) Movimiento de un péndulo



b) Movimiento de la Tierra con relación al Sol



- c) Luz roja de un semáforo con relación a un observador permanente parado en una avenida.
- d) Luz verde de los semáforos de toda una avenida con relación a un automóvil parado
- e) Pistón en una máquina que deja de funcionar poco a poco



2. ¿Cómo agruparía usted a las gráficas anteriores de acuerdo a semejanzas y diferencias?
3. ¿Cómo podría predecir la posición del objeto en cualquier tiempo; digamos, en el tiempo 231?
4. ¿Cómo agruparía usted a las gráficas anteriores de acuerdo a semejanzas y diferencias?

SECUENCIA 3

Dadas las dos secuencias anteriores, ¿cuáles de los anteriores comportamientos y gráficas son periódicas? Justifica ampliamente tu respuesta.

ANEXO 3: Cuestionario

CUESTIONARIO - FORMA A

DATOS DE IDENTIFICACIÓN

Nombre Completo..... Género.....

INSTRUCCIONES

Estimado(a) estudiante:

A continuación de cada enunciado, te solicitamos responder en la forma más completa posible.

Todas tus respuestas y aportes son buenos e interesantes para nuestro Proyecto.

No se pone nota por esta actividad y lo que tú escribas tiene carácter de reservado.

El equipo de investigadores agradece tu valiosa cooperación.

ACTIVIDADES

1. Cuando **escuchas, lees o usas** las siguientes palabras **en tu vida diaria**, **¿Qué viene a tu mente?** Escríbelo, a continuación, de cada una de ellas.

a) **Magnitud**.....
.....

b) **Variable**.....
.....

c) **Intervalo**.....
.....

2. Después de cada una de las siguientes palabras, **inventa tres frases distintas**, en que uses dicha palabra.

a) **Magnitud**
I).....
.....
II).....
.....
III).....
.....

b) **Variable**
I).....
.....
II).....
.....
III).....
.....

c) Intervalo

- I).....
- II).....
- III).....

3. ¿Cómo explicarías el significado de las siguientes palabras a alguien que no las conoce? Utiliza las líneas para las explicaciones y el espacio en blanco si deseas usar esquemas o dibujos en tu explicación.

a) Magnitud

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) Variable

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) Intervalo

.....

.....

.....

.....

.....

.....

CUESTIONARIO - FORMA B

DATOS DE IDENTIFICACIÓN

Nombre Completo..... Género.....

INSTRUCCIONES

Estimado(a) estudiante:

A continuación de cada enunciado, te solicitamos responder en la forma más completa posible.

Todas tus respuestas y aportes son buenos e interesantes para nuestro Proyecto.

No se pone nota por esta actividad y lo que tú escribas tiene carácter de reservado.

El equipo de investigadores agradece tu valiosa cooperación.

ACTIVIDADES

4. Cuando **escuchas, lees o usas** las siguientes palabras **en tu vida diaria**, **¿Qué viene a tu mente?** Escríbelo, a continuación, de cada una de ellas.

a) **Diferencia**.....
.....

b) **Razón**.....
.....

c) **Intervalo**.....
.....

5. Después de cada una de las siguientes palabras, **inventa tres frases distintas**, en que uses dicha palabra.

a) **Diferencia**
I).....
.....
II).....
.....
III).....
.....

b) **Razón**
I).....
.....
II).....
.....
III).....
.....

c) Intervalo

- I).....
.....
- II).....
.....
- III).....
.....

6. ¿Cómo explicarías el significado de las siguientes palabras a alguien que no las conoce? Utiliza las líneas para las explicaciones y el espacio en blanco si deseas usar esquemas o dibujos en tu explicación.

a) Diferencia

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

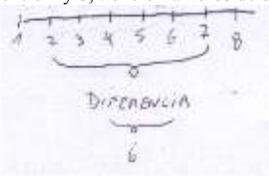
b) Razón

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

c) Intervalo

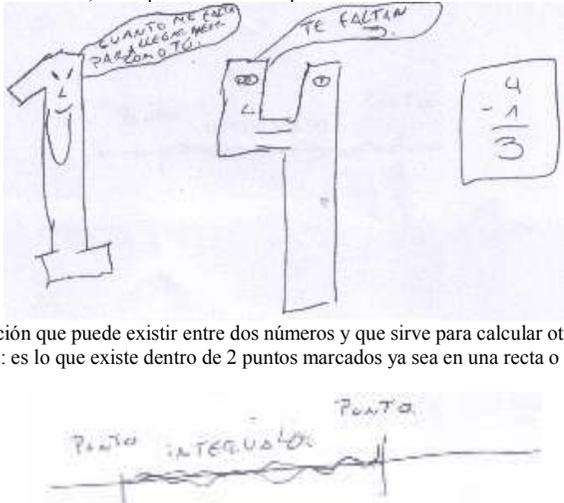
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

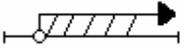
ANEXO 4: Transcripción del Cuestionario

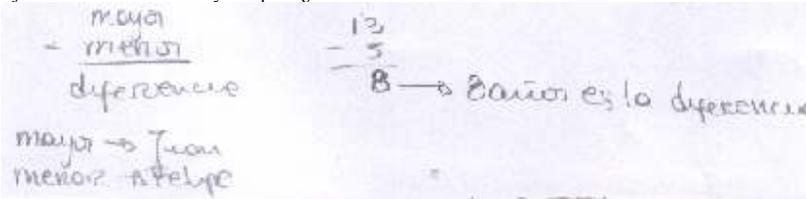
CUESTIONARIO		Cuando escuchas, lees o usas las siguientes palabras en tu vida diaria , ¿Qué viene a tu mente?	Inventa tres frases distintas, en que uses dicha palabra .	¿Cómo explicarías el significado a alguien que no las conoce?
ALUMNO	GÉNERO (M-F)			
1	M	<p>DIFERENCIA: Aspectos los cuáles no tienen en común una cosa o otra o intervalo de diferencia entre ambos.</p> <p>RAZÓN: Algo que está prescrito, por lo cual uno se debe guiar.</p> <p>INTERVALO: Diferencia que se puede producir entre una cosa y otra.</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.vea la diferencia que existe entre los números 2.que diferencia logra apreciar 3.cuales son las diferencias mas notorias <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.cual es la razón de cambio 2.que razón hay entre una y otra 3.en razón a que varia <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.cual es su intervalo 2.que intervalo es el menor 3.como varia el intervalo 	<p>DIFERENCIA: es lo que existe y no es común entre una cosa y otra cosa, por ejemplo, en números cual seria la diferencia entre 1 y 8, tiene 6 números de diferencia.</p>  <p>RAZÓN: es algo que está prescrito, te debes guiar por este, por ejemplo la gráfica aumenta en razón de tres, o varia en razón a tres, etc ...</p> <p>INTERVALO: dentro de la explicación de diferencia los intervalos son los números que se encuentran entre los puntos mencionados ejemplo entre 2 y 8.</p> 
2	M	<p>DIFERENCIA: clasificación de modo tal que se destaque lo que no es igual</p> <p>RAZÓN: es una proporción</p> <p>INTERVALO: tramo entre dos puntos</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.la diferencia de logros educacionales se ve reflejado en las clases sociales 2.¿ cuál es la diferencia entre 5 y 3? 3.busque las diferencias entre esas dos personas <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. esto tiene razón de ser 2.ella tiene razón en lo que dice 3.la razón es de 3:5 <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.el vino por un intervalo corto de tiempo 2.el resultado se encuentra en el intervalo [3,5 [3.hay un intervalo en la carretera que esta malo 	<p>DIFERENCIA: es la sustracción de todo el segundo elemento en el primero.</p> <p>RAZÓN: es la proporción que existe entre dos objetos, que tiene relación de cómo es una respecto a la otra y se denota como una división, solo la expresión (a:b).</p> <p>INTERVALO: es la distancia entre dos puntos.</p> <p>¿el tiempo como la distancia de un momento (punto) a otro?</p>

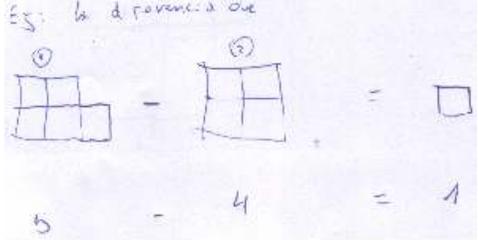
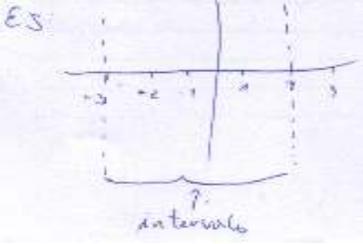
3	F	<p>DIFERENCIA: cosas que normalmente son totalmente contrarias</p> <p>RAZÓN: cosas que pasan y son por algo, o cuando tus padres te retan y ellos “tienen la razón”.</p> <p>INTERVALO: distancia</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. la diferencia que existe entre esta ropa y la otra es el precio 2. la diferencia es notoria entre -3^2 y $(-3)^2$ 3. no me parezco a mi hermano, si somos totalmente diferentes <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. tengo la razón cuando te digo esto, lo leí en el texto 2. perdón, me equivoque tu tienes la razón 3. si yo tengo razón, defendiendo mi postura <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. el intervalo de tiempo fue grande 2. el intervalo entre 6, 7 es cerrado en ambos casos 3. el resultado de la inequación es un intervalo 1° abierto y luego cerrado. 	<p>DIFERENCIA: son las cosas, opiniones que no son iguales.</p> <p>RAZÓN: cosas que yo se que manejo y si me las discuten puedo dar mi punto de vista.</p> <p>INTERVALO: es una distancia</p>
4	F	<p>DIFERENCIA: “lo distinto” que pueden tener dos o más objetos, formas de pensar, etc. lo que distingue una cosa de otra.</p> <p>RAZÓN: el raciocinio, la capacidad que tiene cada persona para darse cuenta de las cosas, es para discernir algo.</p> <p>INTERVALO: una clasificación que tiene límites, que restringen, o clasifican algún dato</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. la “diferencia” entre perro y gato es que uno ladra y el otro maulla. 2. hay que marcar la “diferencia” dentro de la universidad 3. la diferencia entre 49 y 9 es <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. tu tienes la “razón” de lo que digiste a cerca del alza de arancel 2. 4:3 de pan del día miércoles a “razón” de 3:5 que compro el día jueves 3. la razón que utilizaste te sirvió de mucho <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. los alumnos de 1° medio se encuentran entre los “intervalos” [14 , 16] años 2. de las 12:30 a las 13:30 hay un “intervalo” de tiempo para almorzar 3. los intervalos que se pueden analizar se encuentran entre el 2 y el 5. 	<p>DIFERENCIA: es lo distinto que podemos encontrar entre dos cosas o más. La diferencia es lo que distingue un hecho u objeto y hace que este sea único y especial. Exceptuando las cosas que son replicas de otras ej: la diferencia (en objetos) entre una cosa y un edificio, es que dentro de un edificio encontramos varias cosas y la cosa es unitaria.</p> <p>RAZÓN: la razón es la capacidad que tiene el ser humano para pensar y actuar siendo consciente de sus actos. En matemáticas la razón es una proporción o sea la razón que tiene 1/5 de 3/4.</p> <p>INTERVALO: es una limitación, los intervalos se sitúan entre extremos que te limitan. Ej.: no puedes pasarte de una línea roja para partir y cuando lleguen a la línea azul terminas la carrera, la línea roja y la línea azul son los intervalos. Ej.:</p>

5	F	<p>DIFERENCIA: lo único que pienso con esta palabra es la distancia entre una cosa y otra</p> <p>RAZÓN: cuando alguien esta bien mentalmente, como también cuando alguien acierta o sabe de algo</p> <p>INTERVALO: cuando se ve entre dos puntos, generalmente yo lo veo en clases esa palabra, no para conversaciones socialmente.</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. existe una diferencia entre mi amiga y su hermana 2. el resultado de una sustracción se puede llamar diferencia 3. las cosas distintas o puntos distintos se le podía llamar diferencia. <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. la persona que sabe mucho de una disciplina tiene la razón 2. si aquella persona posee la razón, quiere decir que es verdadero lo que dice 3. si una persona esta “cuerda” como se dice a veces, tiene razón, en relación a una buena salud mental. <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. hay muchos números reales que existen entre los intervalos cinco y ocho 2. la ubicación de el segmento se encuentra en los intervalos ocho y seis 3. los puntos de ubicación del plano se le pueden llamar pares ordenados o intervalos (creo) 	<p>DIFERENCIA: podría ser las cosas distintas, cualidades, como físicas, matrices, etc., que puede existir entre personas u objetos en el cual realizará la comparación</p> <p>RAZÓN: sería como: El entendimiento sería como un ejemplo de razón Un ejemplo sería: Cuando alguien habla algo que es cierto o hace algo que realmente corresponde, se podría decir que tiene razón</p> <p>INTERVALO: se podría decir: Es lo que hay o existe entre un punto y otro, o de un tramo a otro</p>
6	F	<p>DIFERENCIA: entre dos o más objetos, existen cosas que uno, de los de análisis no tiene o si y ello provoca la diferencia</p> <p>RAZÓN: en mi vida diaria se utiliza cuando algo o alguien tiene la verdad sobre algún caso</p> <p>INTERVALO: no la utilizo</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. la diferencia que existe entre mi padre y mi madre es que mi padre es mala leche 2. 3. la diferencia que existe entre aprendizaje y enseñanza es que una es el efecto y la otra la causa <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. la razón de vida es mi propia vida 2. todo lo que hago tiene una razón de ser 3. <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 2. 3. 	<p>DIFERENCIA: tienes dos objetos o personas que quizás son iguales entre sí, pero siempre tienen algo que uno no tiene y el otro si y viceversa y es aquello que podemos denominar diferencia</p> <p>RAZÓN: son dos o más objetos que se encuentran en una misma línea pero en si son distintos entre si y la cantidad que se cuente de cada uno va relacionado con las demás cantidades</p> <p>INTERVALO:</p>

7	F	<p>DIFERENCIA: es cuando distingues una cosa de otra ya sea por tamaño, color, etc.</p> <p>RAZÓN: un motivo</p> <p>INTERVALO: algo que separa en algo definido una cosa</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. la diferencia de 2 niños es de 3 años 2. para poder desarrollar un estudio se debe observar la diferencia de tamaños de las personas 3. a diferencia de usted yo soy más viejo <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. dame una buena razón para irte 2. no se que razón tuvo para echarle la culpa 3. en un 4º medio la mujeres están en una razón de 5:3 <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. los alumnos de 8º año básico están en un intervalo de 12 a 14 años 2. 3. 	<p>DIFERENCIA: la diferencia es una</p> <p>RAZÓN:</p> <p>INTERVALO:</p>
8	M	<p>DIFERENCIA: comparación entre algo. Pregunta. Resta</p> <p>RAZÓN: inteligencia, pensar</p> <p>INTERVALO: espacio entre algo. Pausa</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. existe alguna "diferencia" entre ellos 2. como se "diferencia" el frío y el calor 3. la "diferencia" de 3 y 5 <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. tengo la "razón" 2. puede que tengas la "razón" 3. conocer el termino "razón" y proporción <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. el intervalo de aquí hasta tu casa es de 5 cuadras 2. calcula el intervalo de 1,5 a 7,3 3. ese intervalo es mayor del presupuestado 	<p>DIFERENCIA: diferencia es lo que tu puedes tener distinto de otra. La diferencia es la resta entre dos o más números, es lo que le falta a uno para alcanzar al otro</p>  <p>RAZÓN: relación que puede existir entre dos números y que sirve para calcular otros números</p> <p>INTERVALO: es lo que existe dentro de 2 puntos marcados ya sea en una recta o en cualquier otra cosa.</p>

9	F	<p>DIFERENCIA: comparación entre dos cosas, sustracción</p> <p>RAZÓN: concepto matemático, acto que realiza el ser humano, razonar</p> <p>INTERVALO: muestra limitada valores, sección sacada de una muestra amplia</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. encuentra la diferencia en los valores 2. diferencie ambos objetos 3. diferencia corporal <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. cual es tu razón de ser 2. la razón es: 2/3 3. cual es la razón por la que ... <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. se encuentra en el intervalo 2 2. busca el intervalo 3. cuanto datos contiene el intervalo 	<p>DIFERENCIA: podemos obtener la diferencia de dos objetos cualquiera identificando aquellas cosas en las que no coinciden. Podemos hablar de diferencia matemática cuando hacemos una sustracción el resto lo llamamos también diferencia</p> <p>RAZÓN:</p> <p>INTERVALO: un dato limitado entre dos acciones números</p>
10	F	<p>DIFERENCIA: una comparación con algo</p> <p>RAZÓN: motivos</p> <p>INTERVALO: lapsos</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. la diferencia entre cantidad y calidad 2. la diferencia de un producto con otro 3. la diferencia que existe entre el bien y el mal <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. la razón que tiene para actuar es esta 2. la razón de la sin razón 3. ¿cuál es la razón de tu proceder? <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. eso sucede en un intervalo de tiempo 2. 3. 	<p>DIFERENCIA: en lenguaje matemático se le denomina diferencia a la resta entre dos números. Entonces cuando escuchas hablar (en matemáticas) de diferencia debes asociarlo inmediatamente con una resta.</p> <p>RAZÓN: en lenguaje matemático se le denomina razón al resultado de una división Las razones son muy útiles porque, generalmente, son un valor constante que nos permite comparar dos fracciones para hacer con ellas proporciones</p> <p>INTERVALO: en lenguaje matemático intervalo es como un “pedazo” de algo, sea de números reales, de tiempo, de espacio. Es como un pedacito de algo que se encuentra acotado y en donde suceden algunas cosas (y otras no)</p>
11	F	<p>DIFERENCIA: algo distinto o un signo igual o lo que queda.</p> <p>RAZÓN: un porqué, una proporción</p> <p>INTERVALO: un espacio, me imagino un [] o una recta con intervalos</p> 	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. la diferencia entre a y b es c 2. la diferencia entre un curso u otro 3. sumo por su diferencia <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. la razón es 5 2. te doy una razón 3. la razón o proporción <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. el intervalo de tiempo para que ocurra 2. el intervalo puede ser positivo o negativo 3. los intervalos son espacios entre números, pueden ser abiertos o cerrados 	<p>DIFERENCIA: la diferencia es una palabra que sirve para denotar o destacar cosas distintas que puede tener un objeto o una cosa, o sea es lo que no esta en A pero si esta en B. La diferencia es lo que no se ve en un objeto</p> <p>RAZÓN: una razón es una relación entre una variable y otra, si a entonces b o a es a · b, y razón puede ser también un porque o una justificación ante una situación determinada</p> <p>INTERVALO: intervalo es un espacio determinado por “2” números que nos muestra una situación que allí ocurre; el intervalo es un trazo de recta y se usa para encerrar números u objetos similares.</p>

12	M	<p>DIFERENCIA: Las cosas que le han pasado a mis amigos y a mí.</p> <p>RAZÓN: Lo que tiene coherencia con lo que he vivido.</p> <p>INTERVALO: Cada cuanto tiempo se repiten algunas cosas, alegres o tristes.</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La diferencia entre una casa y un edificio es notoria. 2. Me gusta las diferencias que tienen la Jeannette con la de la Nicole. 3. La diferencia entre 10 y 7 es 3. <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Mucha gente me ha dado la razón. 2. A veces pierdo la razón por alguien. 3. La razón de cambio es importante en cálculo. <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Recorre la ciudad por ese intervalo. 2. En las inecuaciones se ven intervalos en su solución. 3. 	<p>DIFERENCIA: Es la comparación que hace al ver dos objetos, pero en matemáticas la diferencia sobre todo es la resta, es cuánto falta para llegar al número esperado.</p> <p>RAZÓN: En el ámbito cotidiano es el sentido común que tienen las personas. En matemáticas es cómo se va moviendo un objeto.</p> <p>INTERVALO: Son como fronteras que tiene un objeto (ciudad, números, etc) en donde tienen un comienzo y un fin, pero en matemáticas tienen un comienzo pero no un final.</p>
13	F	<p>DIFERENCIA: siempre una resta, como para comparar algo.</p> <p>RAZÓN: cuando una persona acierta a alguna cosa.</p> <p>INTERVALO: algo que está entre dos o más cosas.</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Juanito y María tienen una diferencia de tres años. 2. Entre Pipo y Pepa hay una diferencia de 15 cms. 3. Juana tuvo a su hijo menor en diferencia del mayor en 4 años y 3 meses. <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Cuando dijiste lo de la prueba tenías razón. 2. Estoy a punto de perder la razón. 3. Mi mamá tenía razón, para variar llegaré tarde. <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. En aquel intervalo debes ubicarte. 2. Para variar nos quedará 1 intervalo. 3. En el intervalo de las 1 hay que almorzar. 	<p>DIFERENCIA: La diferencia nos sirve para comparar 2 cosas o personas, para esto debemos restar el mayor menos el menor, nuestro resultado es lo que se llama diferencia.</p> <p>Ej. → Juan tiene 13 años y Felipe 5 ¿cuál es la diferencia?</p>  <p>RAZÓN: No sé como explicarlo → lo siento.</p> <p>INTERVALO: El intervalo se utiliza para poder hacer referencia a un espacio.</p> <p>Ej. → La hora de almuerzo es de 13⁰⁰ a 14⁰⁰, entonces el intervalo de almuerzo es de 1 a 2.</p>

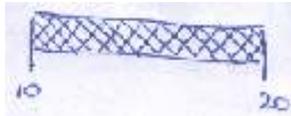
14	M	<p>DIFERENCIA: Es el resultado de una comparación entre dos cantidades (resta)</p> <p>RAZÓN: Es una división</p> <p>INTERVALO: Fragmento de</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Diferencia de un cubo. 2. Suma por su diferencia. 3. 2 números cuya diferencia es 4. <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Las edades de 2 personas están en la razón. 2. 3. <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Analice la gráfica en el intervalo -00 a 3. 2. entre que intervalos L_1 es mayor a L_2. 3. 	<p>DIFERENCIA: Es el resultado de una comparación entre 2 cantidades o más bien el resultado de una sustracción.</p> <p>ES: la diferencia que</p>  <p>RAZÓN: Es una relación entre 2 cantidades ligadas a una división del total de la suma de esas cantidades.</p> <p>INTERVALO: Es un sector determinado por numerales dentro de un plano cartesiano o una tabla de valores.</p> 
15	F	<p>DIFERENCIA: Cuando lo escucho pienso en lo que puede ser distinto, cuando lo leo, puede ser que piense en una resta pero, depende del contexto en donde se utilice.</p> <p>RAZÓN: (motivo); a diario uno lo relaciona con lo que motiva a hacer algo, pero también lo relaciono con una división o cuando alguien está en lo cierto.</p> <p>INTERVALO: uno piensa que cada cuanto se toma algo en consideración; pero también lo relaciono con los límites de algo.</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. ¿cuáles son las diferencias entre un perro y un gato? 2. La diferencia entre dos n^o es 7 3. Lo que nos diferencia es el sexo. <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. ¿Cuál es la razón por lo que me retas? 2. Dos triángulos están en la razón 3 : 5 3. ¡Sabes, tienes toda la razón! <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Nuestras edades están dentro de los sig. intervalos 2. Las notas están dentro del intervalo $[1,7]$ 3. El desarrollo humano está dentro de los sig. intervalos 	<p>DIFERENCIA: Le explicaría utilizando objetos que son similares u otros que sean distintos. Les diría luego de hacer una actividad con los objetos antes mencionados que cuando vea cosas distintas eso lo llamaremos diferencia.</p> <p>RAZÓN: Le diría al niño, que cuando alguien está diciendo algo que está correcto, esa persona tiene razón.</p> <p>INTERVALO:</p>

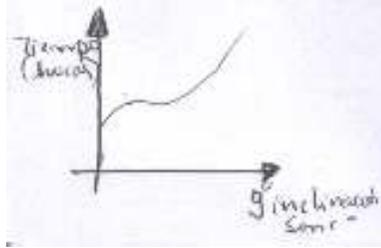
16	F	<p>DIFERENCIA: Es lo que falta para, en el contexto de comprar algo</p> <p>RAZÓN: Es como división</p> <p>INTERVALO: es como un espacio entre dos cosas, en el cual se encuentran variables</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La diferencia de un pantalón en comparación con otro es 3.000 2. La diferencia entre 9 y 5 3. La diferencia entre dos personas en cuanto a su personalidad <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La razón entre 15 y 3 2. Una fiesta de cumpleaños se reparte una torta en razón a los invitados 3. En una prueba cada pregunta se realiza en razón 3 min por c/ una <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Debe guardar reposo en un intervalo de 5 a 10 días. 2. La calle Bandera queda en el intervalo entre Moneda y Teatinos. 3. La prueba se debe realizar en un intervalo de tiempo determinado. 	<p>DIFERENCIA: Comenzaría preguntando qué entiende por diferencia, luego recogería lo que me diga y posterior a ello le diría que la diferencia es como quitar algo, restar. Además le diría que es lo que falta para llegar a un todo. Ejemplos:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Tengo 100 monedas y necesito 30 ¿cuántas monedas quedan? Entonces $100 - 30 = 70$. 2) En una tienda hay un pantalón a 15.000 y yo tengo 12.000 ¿cuánto dinero me falta? (Este es cuando me pregunto ¿cuánto falta para llegar a todo?) <p>RAZÓN: Sinceramente no sé cómo explicarlo.</p> <p>INTERVALO: Un intervalo es cuando doy límites de referencia, es decir, es como decir entre esto y lo otro.</p>
17	F	<p>DIFERENCIA: Son las características que hacen especial o único algún elemento cosa.</p> <p>RAZÓN: Es cuando alguien está en lo correcto de acuerdo a un acontecimiento o situación.</p> <p>INTERVALO: es como un periodo, como algo limitado, un como de aquí hasta aquí y todo lo otro no se ocupa.</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La diferencia de los cuadrados está determinada por el color y no por su tamaño. 2. este libro es diferente a este otro porque el 1° está en inglés y el segundo en italiano. 3. Hay diferencia en los resultados, porque varían en dos números. <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Juan la razón de los resultados obtenidos. 2. Se encuentra en razón 2:3 3. La razón de cambio de la función es ... <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El intervalo de tiempo es de 2 a 4 hrs. 2. Buscar el intervalo exacto, si en el cual hay o se encuentra los siguientes números... 3. El intervalo es menor que el anterior y mayor que el próximo 	<p>DIFERENCIA: Es algo que tiene características distintas a otra cosa con la cual se le compare ; como por ejemplo al comparar una zapatilla con un zapato, la diferencia es que uno es de cuero y el otro es sintético, uno es negro y el otro azul, son los elementos que los caracterizan; y los hacen únicos.</p> <p>RAZÓN: Es cuando alguien está en lo correcto, y por lo tanto tiene razón en su propuesta.</p> <p>INTERVALO: Es un grupo de números o elementos que están limitados, es decir tienen un principio y un fin.</p>

18	F	<p>DIFERENCIA: alguien distinto a otra persona, diversas opiniones, resta.</p> <p>RAZÓN: cuando estoy en lo correcto.</p> <p>INTERVALO: espacio o período de tiempo.</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. “La diferencia entre 150 y 30 es ...” 2. “ ... debemos organizarnos porque hay una gran diferencia de opiniones” 3. “¿ porqué tienes que hacer una diferencia entre las clases sociales” <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Obviamente yo tengo la razón sobre el tema. 2. Debes razonar antes de actuar. 3. Cómo saber si ella tiene la razón. <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. En un intervalo de 2 semanas comenzamos las pruebas. 2. 3. 	<p>DIFERENCIA: Cuando yo discrimino a otra persona, ya sea como se viste, como habla, o simplemente por ser inferior a mi, estoy haciendo una diferencia entre esa persona y yo. O cuando no estoy de acuerdo con lo que otra persona opina de un cierto tema, existe una diferencia de opiniones entre nosotros.</p> <p>RAZÓN: Cuando una persona me explica algo de un determinado tema, y yo creo que está en lo correcto le encuentro razón o lo que dice cuando una persona actúa por impulsos, lo primero que se le viene a la mente lo hace, no está pensando, no está razonando de lo que está haciendo.</p> <p>INTERVALO: Cuando existe un espacio determinado, de tiempo, en una situación X, una puede hablar de un intervalo de tiempo, donde no hay grandes interacciones, sobre la situación X.</p>
19	F	<p>DIFERENCIA: distancia de un número a otro número, distinción entre una cosa u otra.</p> <p>RAZÓN: es lo que cambia en una situación, o lo que se mantiene de una situación</p> <p>INTERVALO: situación que describe donde comienza y termina una función, también una solución</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. tú tienes una diferencia conmigo en mi forma de pensar 2. ¿cuál es la diferencia entre 1 y 2? 3. <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Pienso que tienes razón en lo que dices 2. La velocidad del vehículo cambia a razón de un kilómetro por minuto. 3. <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 2. 3. 	<p>DIFERENCIA: Si tenemos por ejemplo dos números cualquiera, la diferencia sería la distancia que existe entre ambos, o cuánto le falta al primer número para llegar a ser igual que el segundo número.</p> <p>RAZÓN:</p> <p>INTERVALO: el intervalo es una forma de describir una situación, así como los gráficos, las funciones, etc.</p>
20	M	<p>DIFERENCIA: cantidad que separa a un elemento de otro, elementos en general</p> <p>RAZÓN: unión entre dos elementos de una forma determinada</p> <p>INTERVALO: delimitación dentro de una escala determinada (% , tiempo, mts)</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. “La diferencia entre 3 y 5 es 2” 2. “a diferencia de otras universidades, esta no salva a nadie” 3. “La carrera de matemáticas a diferencia de otras es que no se explota la creatividad” <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. “el profesor no tenía la razón” 2. “la razón entre 2 elementos es constante” 3. “ estoy sacando la carrera a razón de 4 ramos por semestre” <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. “el intervalo de tiempo entre un ramo y otro es gigante” 2.”el intervalo de la solución, es indeterminado” 3.”en un intervalo de tiempo determinado, mi existencia se indefine” 	<p>DIFERENCIA: “Si tengo 5 manzanas y me como 3, ¿cuántas me quedan?” (implícito el concepto; hasta el día de hoy me ha resultado infalible)</p> <p>RAZÓN: Preparar arroz: 1 taza de arroz y 2 tazas de agua, así se debe hacer, sino queda malo. Así se introduce el concepto implícitamente al niño, pero de ahí a formalizarlo no sabría cómo.</p> <p>INTERVALO: “Si salí de mi casa a las 5 de la tarde y llegué a la tuya a las 6 ¿cuánto tiempo me tardé?, pero a las 5:30 me comí una manzana, me alcanza el tiempo para algo más, si vivo a 25 mts de tu casa”. (me resultó una vez)</p>

21	M	<p>DIFERENCIA: Resta entre dos magnitudes.</p> <p>RAZÓN: división entre dos magnitudes o raciocinio de un concepto.</p> <p>INTERVALO: parámetro de variación de una magnitud.</p>	<p>DIFERENCIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La diferencia entre precios es ... 2. La diferencia entre dos números es ... 3. La diferencia entre un hombre y una mujer es grande <p>RAZÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Todos los hombres tienen la razón 2. Es muy difícil tener siempre la razón en todo 3. La razón entre dos números es <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La velocidad varió en un intervalo de 60 km/hr 2. La función es discontinua en el intervalo abierto 3. El intervalo de tiempo es muy amplio 	<p>DIFERENCIA: Diferencia es lo que le falta a la menor cantidad para llegar a la mayor cantidad.</p> <p>RAZÓN: Es el cociente entre una magnitud con respecto a la otra. Tener el pensamiento adecuado sobre un concepto pasando por los estados del pensamiento.</p> <p>INTERVALO: Es la partición entre un número menor y otro mayor.</p>
22	M	<p>MAGNITUD: medición, tamaño</p> <p>VARIABLE: algo que no está fijo</p> <p>INTERVALO: Un subsector de algo</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El terremoto fue de una magnitud increíble. 2. ¿qué magnitud crees que tendrán tus acciones? 3. <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. En la ecuación X es la variable y K la constante 2. En el partido nos jugó en contra la variable "clima" 3. El IPC es variable <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Descansarás en un intervalo de una hora 2. La ecuación existe en un intervalo determinado 3. 	<p>MAGNITUD:</p> <p>VARIABLE: Lo explicaría con ejemplo de lo cotidiano, como el clima, el tiempo, le diría que es algo que no siempre es lo mismo.}</p> <p>INTERVALO: Lo ejemplificaría seccionando un sin fin de cosas que existen en la vida diaria como una calle larga la separaría en varios "intervalos" etc.</p>
23	F	<p>MAGNITUD: Lo relaciono por ejemplo con un temblor o terremoto</p> <p>VARIABLE: algo que cambia</p> <p>INTERVALO: es como un lapso</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. el terremoto fue de gran magnitud 2. 3. <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La temperatura es variable 2. 3. <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 2. 3. 	<p>MAGNITUD: La magnitud es una cantidad</p> <p>VARIABLE: Es algo que cambia, ej. A las 13:00 hrs hay 30°C a las 14:00 hrs hay 28°C a las 14:30 hrs hay 27°C la temperatura varía a medida que pasa el tiempo, está cambiando</p> <p>INTERVALO: es como un lapso de algo por ejemplo de tiempo es como un momento en el que sucede algo</p>

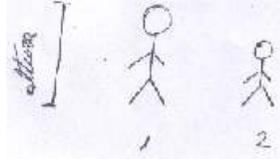
24	F	<p>MAGNITUD: masa, cuerpo, se puede medir</p> <p>VARIABLE: es algo que se puede medir, es un factor.</p> <p>INTERVALO: Es en donde se dice que va desde aquí hasta acá.</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. ¿cuánto es la magnitud de esa pelota? 2. Tenemos una magnitud muy amplia en el territorio chileno 3. Comparamos las distintas magnitudes de las masas. <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. A nosotros nos afectó la variable clima. 2. ¿Por qué crees que esa variable no fue efectiva para ti? 3. No podemos combatir frente a las variables que nos pone la vida. <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Sólo tienen que tomar del intervalo (3, - 8) 2. Estos son los intervalos en el cual tú puedes recorrer 3. Considero que los intervalos que me has dado no pertenecen a la recta. 	<p>MAGNITUD: Una magnitud es aquello que se considera medible, que podemos tomar fácilmente una guincha y calcularlo, e incluso mediante una fórmula estipulada.</p> <p>VARIABLE: Esto también es un factor que se puede medir, pero no mediante una regla o fórmula son que podemos constatar cuánto es y cómo es. Como por ejemplo el factor político o también la variable política, en el cual nosotros sabemos las consecuencias o beneficios que nos produce ésta.</p> <p>INTERVALO: Es en el cual tú dices que sólo podemos recorrer un espacio, o sea, tú vas desde aquí hasta acá y tienes que cumplir eso. Como por ejemplo, muchas veces en matemáticas uno tiene que comprobar si ese recorrido fue efectivo, o sino, nosotros decimos que no pertenece a ese intervalo.</p>
25	F	<p>MAGNITUD: medida</p> <p>VARIABLE: objeto</p> <p>INTERVALO: rango</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La magnitud del problema fue inesperada 2. La magnitud del marco de la ventana es 1 mt 3. La magnitud de una hora es 60 min aunque veces que parece ser menos <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La variable considerada fue el tiempo. 2. El tiempo de duración de la prueba es variable según los conocimientos 3. Las variables deben ser tomadas adecuadamente <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La temperatura promedio de verano está en el intervalo de 28°C a 34°C 2. El intervalo de tiempo fue corto 3. en el intervalo 100 km y 300 km fuera de Stgo. es posible transitar a 120 km/h. 	<p>MAGNITUD: es la medida o la forma de expresar la palabra medida</p> <p>VARIABLE: objeto que cambia para ser estudiado</p> <p>INTERVALO: es el rango existente entre medidas estudiadas</p>

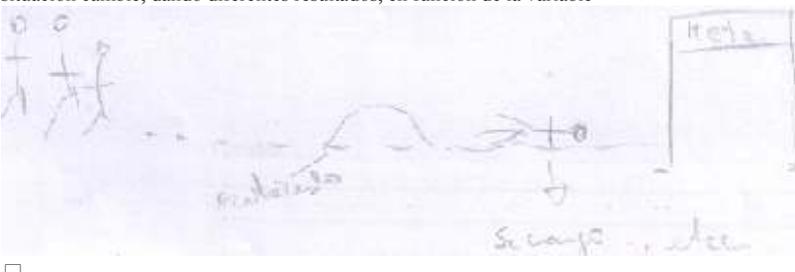
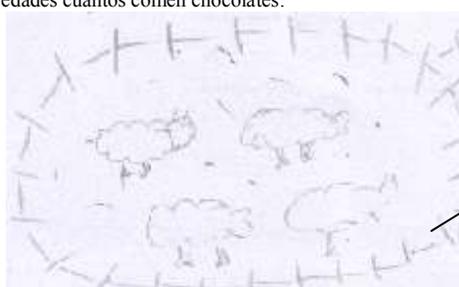
26	M	<p>MAGNITUD: Una medida, algo que representa a ...</p> <p>VARIABLE: es un modelo, una representación, de algo, algo que condiciona el comportamiento de otro.</p> <p>INTERVALO: Un lapso. Un período determinado.</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Un impacto de tal magnitud que dejó muchos heridos. 2. La magnitud de este suceso es ... 3. te das cuenta de la magnitud de tus palabras <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Es una opinión muy variable 2. La variable entrega el comportamiento de la función 3. Eso es variable de acuerdo a ... <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. En este intervalo la función actúa así 2. Un intervalo de tiempo entre 3 a 6 de la tarde 3. Nos dividimos el trabajo por intervalos de tiempo 	<p>MAGNITUD: Es un concepto que te dice que es como la causante de algo, es lo que te lleva a otra cosa. Por ejemplo la velocidad es una magnitud que te lleva a el tiempo y la distancia.</p> <p>VARIABLE: Es un modelo de algo, es como un concepto que va a variar de acuerdo a lo que tú apliques, es una condición que representa a otras cosas.</p> <p>INTERVALO: es un lapso, un período. Por ejemplo, de las 2 a las 3 de la tarde hay un intervalo de tiempo de una hora.</p>
27	F	<p>MAGNITUD: Algo muy grande. Adjetivo calificativo de algo muy grande.</p> <p>VARIABLE: que no mantiene un valor fijo.</p> <p>INTERVALO: que se encuentra entre, tomando o no en consideración el principio y el final</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El terremoto tuvo una gran magnitud 2. Este evento tuvo una gran magnitud 3. La magnitud del edificio es de <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La variable dependiente es Y porque va a depender de la variable X (indep). 2. La variable independiente es la X ya que se puede dar cualquier valor 3. El sexo es considerado una variable nominal. <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Las edades se encuentran en intervalos de 12 a 15 años, 15 a 18 y 18 a 21. 2. El horario tiene intervalos de tiempo que cada uno dura 45 min 3. En invierno la temperatura varía como lo demuestra el sgte intervalo 10 a 28 grados 	<p>MAGNITUD: Magnitud es un adj calificativo, esto es calificar algo como lo es ser chico, feo, lindo, etc pero este se refiere al porte, tamaño de algo o alguien, pero no un tamaño cualquiera más bien es para referirse a algo grande como puede ser la tierra, el universo, etc.</p> <p>VARIABLE: Es algo que varía, que no se mantiene tranquilo, como que está en constante movimiento</p> <p>INTERVALO: Vendría siendo las paredes que sujetan y lo que se mantienen dentro de estas paredes Ej: las edades están en un intervalo de 10 a 20 incluyendo el 10 y el 20</p> 
28		<p>MAGNITUD: gran medida o sólo "medida"</p> <p>VARIABLE: algo que cambia constantemente.</p> <p>INTERVALO: Un principio y un fin.</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La explosión fue de una magnitud increíble. 2. 3. <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El clima durante el día es variable 2. X e Y son variables en una ecuación 3. el sentido del humor es variable <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Un valor se encuentra dentro del 2° intervalo 2. Existe un intervalo que va de 10 a 20 3. El intervalo adolescente va desde los 15 a los 20 	<p>MAGNITUD: Sólo sabría decir que es sinónimo de medida; el espacio o lugar que abarca el objeto del que se habla. Ej: la magnitud de un fideo es de 20 cm No sabría expresarlo bien.</p> <p>VARIABLE: Se le llama así al objeto que posee un valor que nunca es fijo, cambia constantemente. Como por ejemplo la temperatura. Al comenzar el día hay 10°, al medio día hay 20° y en la tarde 18°. Entre esos valores existen muchos más cambios (valores)</p> <p>INTERVALO: Es cuando se establece un valor de inicio y otro de fin. Pueden existir muchos intervalos al mismo tiempo. Por ejemplo, en un curso hay edades que están entre los 10 y 15 años; del 10 al 15 es el intervalo.</p>

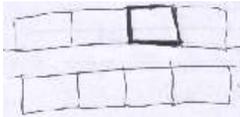
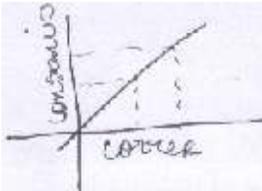
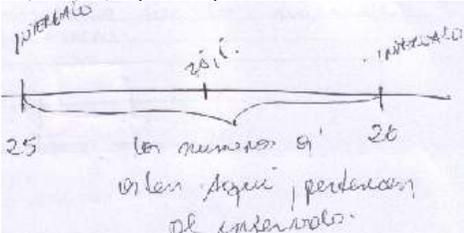
29	F	<p>MAGNITUD: Que se trata de una cantidad grande o amplia según el contexto en el que se encuentre inserta.</p> <p>VARIABLE: de distintos aspectos que se interrelacionan entre sí. Una variable afecta, incide sobre otra.</p> <p>INTERVALO: Una cota cuantificable, obviamente numérica.</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Hubo una colisión de gran magnitud 2. La magnitud del problema en estadística se debe al desconocimiento de las integrales dobles. 3. <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. En el proceso de enseñanza-aprendizaje inciden muchas variables como por ejemplo las preconcepciones de los alumnos. 2. La didáctica matemática constituye la variable independiente en el proceso enseñanza-aprendizaje 3. Las actitudes de los alumnos son variables que deben ser atendidas por docentes reflexivos <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Las edades de adolescentes con problemas de drogadicción fluctúan en el intervalo entre 15 y 20 años. 2. El intervalo de deserción escolar se ha ampliado 3. Las puntuaciones del examen serán establecidas en una serie de intervalos enteros positivos. 	<p>MAGNITUD: La magnitud mide cantidad de algún fenómeno o de alguna cosa, usualmente se relaciona a medidas métricas, o en grados de temperatura, pero dicha utilización está errada.</p> <p>VARIABLE: En la vida diaria nos vemos enfrentados a una serie de fenómenos que están en función de otros. Las variables pueden ser la edad, sexo, opinión sobre algún tema; en general la mayoría de sucesos que pueden ser graficados y analizados. Se reconocen variables dependientes y variables independientes. Por ejemplo en un parque el grado de inclinación de la sombra de un árbol dependerá de la rotación de la tierra en torno al sol lo que genera el tiempo, a medida que las horas pasan la inclinación de la sombra va cambiando.</p>  <p>INTERVALO: El intervalo es una cota de magnitudes que establece un límite inferior y otro superior en el que se puede encontrar un punto medio, sirve para el análisis de magnitudes o números por algún suceso, por ejemplo en límites se analiza el intervalo comprendido por la vecindad generada por los Epsilons.</p>
30	F	<p>MAGNITUD: Se puede dar a entender como un cierto punto en el cual se une con otro, una magnitud de un objeto.</p> <p>VARIABLE: Datos asignados para un propósito en común</p> <p>INTERVALO: Estructuras de similitudes</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Observa la magnitud que tiene este objeto. 2. Si te fijas en estas tres montañas su magnitud es diferenciada 3. La magnitud que se encuentra o se ve en esta casa. <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Muestra de datos con distintas variables 2. Las distintas variables al momento de cambiar operaciones 3. Las variables son cambios continuos <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El intervalo de edades entre 18 y 30 años 2. El costo de un cierto producto está en un siguiente intervalo 3. (ilegible) 	<p>MAGNITUD: Una magnitud se puede dar a entender como cierta cantidad de alguna cosa u objeto, por ejemplo toda figura que tu tienes, sea un cubo por ejemplo tiene magnitudes. Esto quiere decir, lo que tocar en el objeto, ves, podría decirse esto.</p> <p>VARIABLE: Las variables las podría dar a conocer, cuando existen datos o números por decirlo. Así, diferenciados. Esto se puede entender que cuando tú realizas un ejercicio tienes variables y que cambian constantemente.</p> <p>INTERVALO: Cuando se reúnen por ejemplo una cierta cantidad de jóvenes, de ciertas edades se pueden hacer grupos el cual, al momento de ver un orden, uno ya sabe como está distribuido.</p>

31	F	<p>MAGNITUD: Es algo que se puede medir según el objeto de estudio, puede ser escalar como la distancia en metros</p> <p>VARIABLE: algo que no es constante, que está dispuesto a cambios en función de una constante.</p> <p>INTERVALO: Es el lapso entre una situación a otra, es el intertanto entre una cosa a otra.</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. En física nos pasaron la magnitud escalar. 2. La magnitud del cinturón es de 2 metros de largo 3. La magnitud entre dos cuerpos es 5 metros. <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Se debe despejar la variable X. 2. Hay que considerar todas las variables en nuestra investigación 3. Cuando la variable X es 2, Y va a ser 8 <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El intervalo de 4 – 6 existen 6 personas enfermas 2. La razón entre un intervalo a otro es 2 3. El intervalo de tiempo en que estuve en el taco fue largo 	<p>MAGNITUD: Es lo que se puede medir según su unidad de medida. Por ejemplo si vamos a calcular el tiempo debemos realizarlo en horas, minutos, segundos; pero no en metros, centímetros.</p> <p>VARIABLE: Es algo que cambia constantemente, que es dinámico. Por ejemplo el tiempo varía desde que tú entras al colegio y sales. Este puede estar relacionado con una constante como en las funciones cuando te enseñaron que $y = ax$</p> <p>INTERVALO: El intervalo es el intertanto entre una cosa a otra. Por ejemplo en el intervalo de 2 a 6 transcurrieron 4 horas</p>
32	M	<p>MAGNITUD: A una cantidad respecto de una escala o impresión</p> <p>VARIABLE: A un valor que puede ser distinto respecto de las características de una situación</p> <p>INTERVALO: A parámetros dentro de los cuales se puede mover una variable, previamente establecida</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La magnitud del terremoto fue de 8 en la escala de Mercalli 2. La magnitud de los atentados causó daños millonarios 3. La magnitud varía de acuerdo a las variables analizadas <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La variable de la función es de tipo cuadrática 2. La variable socio-económica es importante en el rendimiento escolar 3. La variable del tiempo estará condicionada por la velocidad que llevamos <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. tienes un intervalo de 20 minutos para llegar o sino te dejaremos 2. El valor numérico que buscamos está en este intervalo 3. 	<p>MAGNITUD: Como el significado o cantidad que se le atribuye a un suceso determinado, respecto de parámetros predeterminados</p> <p>VARIABLE: Como aquel valor que se le atribuye a algo dependiendo de las circunstancias o características propias del suceso</p> <p>INTERVALO: Como un conjunto determinado, al cual se le da un significado y que es usado de referencia</p>

33	F	<p>MAGNITUD: Es el espacio que ocupa, según lo que se está hablando</p> <p>VARIABLE: algo que va cambiando, ya sean números, nombres, etc.</p> <p>INTERVALO: alguna cosa que se encuentre entre algo, con inicio y fin además lo tiendo a encerrar en corchetes</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La magnitud del mar es inmensa 2. 3. <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La talla del pantalón puede ser variable, depende del modelo 2. El tiempo de cocción de pan depende del horno y temperatura que tenga 3. Hacer un tutifrutí con diferentes frutas con pera, manzana, etc <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La talla de la blusa está entre S y L, según el tipo que elijas 2. Para hacer un queque ocupo entre 6 a 8 huevos dependiendo del molde 3. Los grupos de trabajo tienen que ser entre 3 y 5 no más, ni menos. 	<p>MAGNITUD:</p> <p>VARIABLE: Es algo que cambia, por ejemplo si te pido que me des nombres de tu familia, mevas a nombrar diferentes personas, para lo cual a esa pregunta hay variables respuestas, depende de la familia. Para eso casi siempre se le asigna una letra, la cual va a ir tomando diferentes valores o en este caso nombres tanto de hombres como de mujeres</p> <p>INTERVALO: Es un rango, algo que se encuentre entre 2 extremos inicio y fin, por ejemplo nombra los integrantes de tu familia que tengan entre 10 y 20 años, estos 2 valores son los extremos y todos los nombres que nombres son lo que están dentro, por lo tanto cumple con la condición.</p>
34	F	<p>MAGNITUD: El grado de alguna cosa</p> <p>VARIABLE: funciones, - gráficos</p> <p>INTERVALO: es un conjunto de números, limitado</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. calcular la magnitud de un terremoto 2. 3. <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Dentro del ejercicio "X" determine la variable dependiente 2. Dentro de una función cual corresponde a la variable dependiente 3. <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El número de trabajadores que gana más de \$100.000 se encuentra en el intervalo $[5, 10]$ 2. Las soluciones de esa inecuación se encuentran en el intervalo $[2, 00]$ 3. 	<p>MAGNITUD: La magnitud es ... No lo puedo explicar si realmente no me queda muy claro</p> <p>VARIABLE: Las variables son la incógnita de una función.- existe una función dependiente y una independiente.</p> <p>INTERVALO: El intervalo es el conjunto de números que representan una solución.- En el intervalo se escribe el primer y el último número de nuestro conjunto.- Cuando la solución es 00 el intervalo queda abierto, pero cuando el extremo es un n° no 00 es cerrado</p> <p>Ej.-</p> <p>$[5, 8] \rightarrow$ cerrado $[3, 00[\rightarrow$ abierto</p>

35	M	<p>MAGNITUD: medida de una cosa</p> <p>VARIABLE: algo cambiante al transcurrir el tiempo</p> <p>INTERVALO: un espacio</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El ciclista recorrió una gran magnitud 2. La magnitud del insecto era pequeña 3. <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La estatura de una persona varía (ilegible) en su niñez y adolescencia 2. El clima por estos días está muy variable 3. La textura de la piel varía a través de los años <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Los jugadores de fútbol descansan en un intervalo de 15 min. 2. En una jornada de trabajo existe un intervalo de tiempo exclusivamente para almorzar. 3.- 	<p>MAGNITUD: Existen 2 dibujos los cuales tienen distinta altura. Se puede decir que la altura es una magnitud. En ese sentido la magnitud altura del dibujo 1 es mayor que la del dibujo 2</p>  <p>VARIABLE: Una característica del hombre es su edad. Con el paso de los años la edad varía, cambia aumentando. Se dice entonces que la edad es una variable que está en función del tiempo. Lo importante de este concepto es que se encuentra en constante cambio. Pediría a mis alumnos que dijeren más características del hombre que varían en función del tiempo.</p> <p>INTERVALO:</p>
----	---	---	---	--

36	F	<p>MAGNITUD: Tramo, grado</p> <p>VARIABLE: distintos valores, que todo depende de algo, varios</p> <p>INTERVALO: tiene límites, vecindad [_ _ _ _] tiempo determinado</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Grado de magnitud es _____ 2. Del norte al sur hay una magnitud de _____ 3. _____ <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La temperatura hoy varía entre (intervalo) 10° a 16° 2. ¿qué es una variable?, yo profe 3. toda situación del aula tiene muchas variables <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Las mujeres mayores de 20 que juegan naipes están en el intervalo [,] 2. _____ 3. _____ 	<p>MAGNITUD:</p> <p>¿cuánto demoran? ¿cuánto corrieron para alcanzar la meta?</p>  <p>VARIABLE: Pueden suceder distintas cosas en la vida. Pues entonces las variables hacen que la situación cambie, dando diferentes resultados, en función de la variable</p>  <p>INTERVALO: estoy dentro de un margen o tomamos una muestra y queremos saber según sus edades cuántos comen chocolates:</p> <table border="1" data-bbox="1657 798 1792 877"> <tr> <td>[1 - 4]</td> <td> </td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>[4 - 7]</td> <td> </td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>[7 - 10]</td> <td> </td> <td>4</td> </tr> </table> <p>Por lo tanto, 2 son las personas que comen chocolates entre 1 y 4 años o 9 son las personas que comen chocolate de 1 a 10 años.</p>  <p>Las ovejas están dentro de un rebaño, tienen límites para no salir</p>	[1 - 4]		2	[4 - 7]		3	[7 - 10]		4
[1 - 4]		2											
[4 - 7]		3											
[7 - 10]		4											

37	F	<p>MAGNITUD: A cantidad, es decir, gran magnitud (bastante) y poca magnitud (de algo más pequeño)</p> <p>VARIABLE: elementos de cambio, es decir que es susceptible algo de que cambie.</p> <p>INTERVALO: La idea de aquí hasta aquí, como una parte de donde empieza y hasta donde termina.</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El accidente automovilístico fue de gran magnitud 2. El cubo A es de mayor magnitud que el B 3. El 3 es de mayor magnitud que el 1 <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El tiempo de hoy en Santiago será variable. 2. Mi papá es de un genio bastante variable. 3. Mis talla de zapato es bastante variable, pues a veces es 37 y otras 36 <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Entre el intervalo 6 y 7 qué número se encuentra 2. El conjunto A posee un mayor intervalo que el B 3. 	<p>MAGNITUD: La magnitud se refiere a cantidad, es decir puede ser grande o pequeño, o que tienen un valor. Les daría un ejemplo entre diferencias de magnitudes.</p> <p>VARIABLE: Variable quiere decir que puede tener cambios un ejemplo que les daría sería el tiempo, es decir El tiempo es variable, porque hoy puede hacer calor pero mañana frío, por lo que no siempre permanece en un mismo estado.</p> <p>INTERVALO: Le explicaría que es como un indicador que nos dice o indica una zona o parte, es decir les explicaría que es como decir entre que números se encuentra el número 6, entonces les diría que entre el 5 y el siete, y esto son intervalos</p>
38	F	<p>MAGNITUD: es el tamaño de algo</p> <p>VARIABLE: algo que va cambiando</p> <p>INTERVALO: algo que está entre dos puntos</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. la magnitud de Chile es 3.000 km² (+ o -) 2. la universidad tiene una magnitud de 400 m² (+ o -) 3. la magnitud del mar es ... (eso no lo sé) <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. las variables que influyen al caminar son el tipo de piernas y el cansancio corporal 2. a medida que da calor sube la temperatura 3. la variable del dólar es como sube y como baja <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. el número 28 está ubicado en el intervalo 20 y 30 2. los intervalos de un número de tamaño de muestra son 5. 3. 	<p>MAGNITUD: La magnitud es un espacio que ocupa algo , ese algo puede ser un colegio, una casa. Por ejemplo, hay una cuadra llena de cosas (ver el plano desde arriba) la magnitud de tu casa sería lo que está en negrito.</p>  <p>VARIABLE: las variables van cambiando, pueden subir o bajar, me explico, a medida que la temperatura sube, el calor corporal también sube, otro ejemplo es mientras más corro más me canso.</p>  <p>INTERVALO: el intervalo es algo donde se puede poner un número, o sea si tengo el 25 y 26 (estos son los intervalos) los números que están entre el 25 y el 26 pertenecen a ese intervalo como por ejemplo el 25,4 25,6 , se puede explicar con la recta numérica</p> 

39	M	<p>MAGNITUD: Se puede decir que es el tamaño de algo o una característica de algo en virtud de otra.</p> <p>VARIABLE: es una incógnita que puede tomar más de un valor.</p> <p>INTERVALO: es un espacio o conjunto delimitado por dos extremos tanto finito como infinito.</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Un terremoto cuya magnitud fue de 10 ptos. En la escala de Richter 2. ... en un evento de tal magnitud ... 3. hay que estudiar la magnitud del caso. <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Hay muchas variables que influyen en este caso 2. es una ecuación cuyas variables son potencias 3. es que él tiene una personalidad muy variable <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. deberá hacerlo en un intervalo de 6 a 8 días 2. el intervalo de esta función es muy grande 3. ocurrió en el intervalo entre la mañana y la tarde. 	<p>MAGNITUD: La magnitud es el hecho de que algo sea muy grande o muy chico. Por ejemplo: si hay un terremoto chico significa que su magnitud no fue grande porque no hizo tanto daño.</p> <p>VARIABLE: Es algo que puede tener o ser varias cosas o valores. Por ejemplo: si tienes una caja cerrada y blanca ¿qué puede tener adentro?; un fósforo, una manzana, etc? puede tener cualquier cosa, entonces el contenido de la caja es variable, porque puede ser cualquier cosa.</p> <p>INTERVALO: Es un espacio acotado de tiempo. Por ejemplo: digamos que tienes todo el tiempo para hacer algo, pero tú te organizas y dices que harás las tareas de las 12:00 hasta las 13:00. y después jugarás, significa que harás las tareas en el intervalo desde 12:00 hasta las 13:00.</p>
40	M	<p>MAGNITUD: cantidad</p> <p>VARIABLE: cambio, algo que va teniendo un proceso de evolución o devolución</p> <p>INTERVALO: trozo, es una acción de tomar una cantidad de algo</p>	<p>MAGNITUD:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. la magnitud del sismo fue de 4,2 2. la magnitud de accidentes fue enorme el fin de semana 3. <p>VARIABLE:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El viento fue una variable en el tamaño de las olas 2. el valor del petróleo varía con respecto a la demanda de éste 3. la variable que hoy nos afecta en la vida es el tiempo <p>INTERVALO:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. nos vemos mañana como a las 13⁰⁰ o 13³⁰ en la plaza 2. el cambio del dólar es 12 entre los 630 y 640 pesos 3. 	<p>MAGNITUD: es una cantidad de algo, por ejemplo las bolitas su magnitud es el número de éstas o la cantidad de espacio dentro de una botella</p> <p>VARIABLE: es cuando algo cambia, o sea es por ejemplo el tiempo es una variable, el clima, o sea variable, o sea el cambio de una magnitud</p> <p>INTERVALO: es un trozo de una cosa o sea por ejemplo si tengo una escalera y estoy entre el 4 y 5 peldaño mi intervalo o trozo de la escalera es [4 , 5]</p>