INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA
Unidad Legaria.

El concepto de función matemática entre los docentes a través de representaciones sociales.

Tesis que para obtener el grado de

Doctorado en Matemática Educativa.

Presenta

Bertha Ivonne Sánchez Luján

Director de tesis

Dr. Alberto Camacho Ríos

México, D.F. Enero de 2009

El concepto de función matemática entre los docentes a través de representaciones sociales.

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 11 del mes de diciembre del 2008 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"El concepto de función matemática entre los docentes a través de representaciones sociales"

Presentada por la alumna:

Sánchez	Luján	Bertha Ivonne
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	5	0	4	1	5

aspirante al grado de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Alberto Camacho Rios

Dra. Cecilia Rita Crespo Crespo

Dr. Apolo Castañeda Alonso

CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Gustavo Martínez Sierra

Dra. Gabriela Buendía Ábalos

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D. F., el día 5 del mes de Enero del año 2009, el (la) que suscribe Bertha Ivonne Sánchez Luján alumna del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A050415, adscrita al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autora intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Alberto Camacho Ríos y cede los derechos del trabajo intitulado “EL CONCEPTO DE FUNCIÓN MATEMÁTICA ENTRE LOS DOCENTES A TRAVÉS DE REPRESENTACIONES SOCIALES”, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección isanchez@teacher.com . Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

B. Ivonne Sánchez L.

Bertha Ivonne Sánchez Luján

A Javier
Por su invaluable apoyo todos estos años.

A Javi, Iván Alejandro y Sergio Yael
Por su amor y comprensión.

A mi Director de Tesis, compañero y amigo
Alberto Camacho Ríos por sus enseñanzas,
por ser el mejor guía y ejemplo.

Índice

Glosario iii

Resumen 1
Abstract 2

Capítulo 1. Introducción General 3

Capítulo 2. Estado del arte 13

2.1 Estado del arte.. 13

2.2 Preguntas de investigación.. 16

2.2.1 El punto de partida de nuestra reflexión: Los profesores..................... 17

2.2.2 ¿Para qué aplicar un cuestionario a estudiantes ?................................. 17

Capítulo 3. La teoría de las representaciones sociales:.. 18

3.1 La Teoría de las Representaciones Sociales (TRS).. 18

- ¿Cómo se forma una representación social?
- Las funciones de las representaciones sociales.

3.2 Estructura de las representaciones: nodo central y elementos periféricos......... 20

- Definición del nodo central de una representación social.
- Los elementos periféricos.
- La representación como doble sistema.

Capítulo 4: Análisis preliminar.. 26
4.1 Análisis Didáctico 26

- Consideraciones didácticas
- ¿Cuál es el lugar del concepto de función en la enseñanza en el nivel de ingeniería?
- Tratamiento del concepto de función

4.2 Análisis Cognitivo 33
Sección 1. La elección del método de recopilación.

4.2.1 Panorama de los métodos.. 33

- Métodos de recolección de contenido.
- Métodos de identificación de la organización y estructura de la

representación.
4.2.2 La elección del método del cuestionario.. 34
• Estudio del concepto de función desde el punto de vista de las (RS)
• Presentación del tipo de preguntas elegidas.

Sección 2. Construcción del cuestionario y tratamiento de los datos

4.2.3 El método de tratamiento de los datos... 42
• El programa Nvivo7.

Sección 3. Modalidades de la encuesta y población estudiada.

4.2.4 Análisis de la población.. 44
4.2.5 Análisis de las respuestas... 46
4.2.6 Resultados de la aplicación del cuestionario.. 49

Sección 4. Cuestionario a estudiantes.. 53

4.2.7 El por qué del cuestionario 53
4.2.8 Presentación del tipo de preguntas elegidas 53
4.2.9 Resultados de la aplicación del cuestionario a estudiantes 59

4.3 Análisis Epistemológico.. 62
4.3.1 Etapas de desarrollo del concepto de función. 62

4.3.2 La constitución de la práctica social. La noción de variabilidad.............. 68

4.3.2.1 Los métodos de compensación de errores 68

4.3.2.2 La variabilidad en las prácticas procedimentales 74

4.3.2.3 La variabilidad en el aula 78

4.4 Conclusiones al Análisis Preliminar.. 81
4.4.1 Discusión... 81
4.4.2 Conclusiones.. 84

Capítulo 5. Diseño y aplicación de la situación de aprendizaje 86
5.1 Introducción.. 86
5.2 Descripción de la situación de aprendizaje.. 89
5.3 Aplicación de la secuencia 98
5.4 Resultados de la aplicación.. 99

Capítulo 6. Conclusiones finales 107

Referencias 110

Glosario

Conceptos

Concepción: Información estructurada que posee un sujeto sobre un tema, constituye la huella de la actividad anterior, y es reutilizada en situaciones nuevas. Se constituyen en estrategias cognitivas que decodifican las informaciones para afrontar y comprender una situación.

Descontextualización: Se refiere a cuando los conceptos son estudiados o aplicados en otras situaciones diferentes de que habitan.

Deconstrucción: Se aplica a las interacciones que genera un conflicto sociocognitivo que lleva a reorganizar las concepciones anteriores integrando nuevos elementos surgidos de la propia confrontación.

Elementos periféricos: En la teoría de las Representaciones Sociales (TRS) son el vínculo entre el "nodo central" y la situación concreta donde se elabora o trabaja la representación. Protegen al núcleo de la representación. Llamado también *sistema periférico*.

Núcleo central: Es el elemento que da significación a la representación, en la (TRS), es determinado tanto por la naturaleza del objeto representado, como por la relación que el grupo (o sujeto) mantiene con el objeto, y además con un sistema de valores y normas sociales. Llamado también *nodo central* o *sistema central.*

Operacionalización: Es la aplicación de la nueva representación en un caso o ejemplo diferente.

Prácticas sociales: Son sistemas de acción socialmente estructurados que generan conocimiento.

Prácticas procedimentales: Prácticas de la ingeniería en las que se ve la matemática involucrada, como fuente de resignificación del conocimiento.

Reconstrucción: Cuando se construye una concepción alternativa a un objeto.

Recontextualización: Cuando una concepción vuelve al marco familiar del alumno.

Representación: Modelo personal de organizar los conocimientos.

Representación social: Entendemos una RS como una construcción personal que integra elementos de un objeto, y que se ha generado en la práctica (social) del profesor.

Saber para la enseñanza: Lo entendemos como el conocimiento que se sugiere en los planes de estudio y es enfatizado en los libros de texto.

Situación de aprendizaje: Es aquella que involucra un concepto que no está en la enseñanza actual, pero que estuvo presente en prácticas sociales y es rescatado para lograr vincular los elementos en juego y una mejor comprensión del concepto.

Siglas

CME: Conocimiento Matemático Escolar.

DME: Discurso Matemático Escolar.

DGEST: Dirección General De Educación Superior Tecnológica.

ME: Matemática Educativa.

I. T. : Institutos Tecnológicos.

RCME: Reconstrucción Del Conocimiento Matemático Escolar

RS: Representaciones Sociales.

TRS: Teoría de las Representaciones Sociales.

TTD: Teoría de la Transposición Didáctica.

SNEST: Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica.

Resumen

La investigación reporta los resultados de un análisis preliminar que nos sirvió de base para diseñar una secuencia de aprendizaje, con la que se intentó mejorar la enseñanza del concepto de función a partir de argumentos de carácter variacional. El estudio se llevó a cabo sujetándolo a la teoría francesa de las Representaciones Sociales, la cual tiene como eje central a las prácticas y las representaciones sociales. El análisis epistemológico muestra el surgimiento de la noción de "variabilidad", como un conocimiento asociado y poco conocido del concepto de función, a lo largo del Siglo XIX, etapa de la historia caracterizada por el trabajo de ingeniería, mejor denotado como procedimental. De la componente cognitiva destacan las concepciones de los profesores sobre el concepto, que se estiman sujetas a una definición institucionalizada, ampliamente influenciados por los libros de texto y planes de estudio. Por su parte, los estudiantes reflejan las concepciones de los profesores, y muestran una desvinculación entre las diversas formas de representación. La dimensión didáctica muestra la influencia bourbakista, así como las diferentes formas en que los autores de libros de texto en uso estructuran los conocimientos asociados alrededor del propio concepto de función. Por último presentamos el diseño y aplicación de una secuencia de aprendizaje para la construcción de una representación alternativa que permite a los estudiantes la adquisición del concepto de función mediante los significados asociados de variable, variación y variabilidad, así como la creación de un vínculo entre los distintos modos de representación de una función, con el fin de que puedan coordinarlos durante la resolución de problemas.

Abstract

This investigation reports the results of a preliminary analysis that us used as base to design a sequence of learning, with which there was tried to improve the education of the concept of function from arguments of variational character. The study was realized under the French theory of the Social Representations, which has as backbone to the practices and the social representations. The epistemological analysis shows the emergence of the notion of "variability", as an associate knowledge and few acquaintance of the concept of function, throughout the XIX Century, stage of the history characterized by the work of engineering, best denoted like procedural. Of cognitive component the conceptions of the teachers stand out on the concept, which is estimated fastened to an institutionalized definition, widely influenced by the books of text and plans of study. On his part, the students reflect the conceptions of the teachers, and show a breaking among the diverse forms of representation. The didactic dimension shows the influence of Bourbaki movement, as well as the different forms in which the authors of text books in use construct the knowledges associated about the proper concept of function. Finally we present the design and application of a sequence of learning for the construction of an alternative representation that allows the students the acquisition of the concept of function by means of the associate meanings of variable, variation and variability, as well as the creation of a link among the different manners of representation of a function, in order which they can coordinate them during the problems resolution.

Capítulo 1.

Introducción

Un constante problema de entendimiento del concepto de función, como una relación entre variables, ha suscitado desde el siglo pasado diversas investigaciones a su alrededor (p. e, Sierpinska, 1992; Ruiz, L, 1998; Guzmán, 1998). En este marco es que nos interesamos en las concepciones de los profesores y estudiantes del nivel superior de ingeniería. El proyecto se inició esencialmente a partir de un análisis cognitivo del concepto, para el que hicimos uso de la aproximación teórica francesa llamada "Teoría de las Representaciones Sociales" (TRS). Los resultados nos condujeron al establecimiento de "cadenas de significados", cuyos efectos se plantean en la sección 2 de este documento. Por otro lado, realizamos un análisis epistemológico y un estudio del currículo escolar, análisis didáctico, que se presentan en capítulos posteriores, junto con una reconstrucción didáctica del concepto, que dieron pie al diseño de una situación desde la perspectiva variacional del propio concepto.

Según Johsua y Dupin (1993) la didáctica de las matemáticas ha incorporado diversas aportaciones de la psicología cognitiva, de la psicología genética y de los estudios de interacciones sociales, con lo que se han desarrollado conceptos y postulados sobre el aprendizaje. Sus puntos de vista parten de los siguientes supuestos:

a) El sujeto construye su conocimiento por una interacción activa con su medio ambiente físico y social.

b) Las estrategias observables del sujeto frente a una situación-problema científica son determinadas por el tipo de conocimientos del sujeto en este dominio y por su estructuración.

c) El tipo de situación-problema influye en el comportamiento que se da.

d) Los objetos conceptuales referidos por la didáctica de las matemáticas son complejos y no pueden ser reducidos a estructuras de base. (Johsua y Dupin, 1993, p.115)

Estos autores conciben el conocimiento matemático como una construcción social determinada por los procesos necesarios que llevan a transformar el propio conocimiento de los individuos en un saber socialmente aceptado. De esta forma, parten de la hipótesis que los alumnos puedan adoptar, modificar o enriquecer sus conocimientos.

Otros investigadores asumen que los alumnos ya tienen ideas implícitas (Pozo, et al., 2006), directa o indirectamente sobre los conocimientos que se les enseñan. Es a través de éstas ideas que intentan influir sobre las observaciones del profesor o que interpretan las situaciones propuestas por los documentos proporcionados. Estas “concepciones” tienen una determinada estabilidad, de la cual el aprendizaje de un conocimiento y la adquisición de un planteamiento, dependen completamente. Si no se tienen en cuenta, estas se mantienen y el conocimiento propuesto no es aprendido (o bien aceptado) por los alumnos (Giordan, 1995).

Durante este proceso, el pensamiento de un alumno no se comporta como un sistema de grabación pasiva. Es evidente que antes de cualquier enseñanza quienes aprenden poseen una cantidad de preguntas, ideas, referencias y prácticas. En otros términos, se puede decir que quien aprende manipula un modo explicativo específico al que nosotros llamamos “concepciones”. Siendo estas últimas quienes orientan la forma en que el educando (niño o adulto) decodifica las informaciones. De esta manera, todo conocimiento que se suponga para el aprendizaje, depende de la movilización que el sujeto haga de sus concepciones. Es a través de ellas que quien aprende interpreta la información y produce eventualmente un nuevo conocimiento. Cada vez que hay comprensión de un modelo o movilización de un concepto, su estructura mental se reorganiza completamente.

La apropiación de un conocimiento resulta de un proceso de transformación de concepciones donde el principal actor es el educando y sólo él. La adquisición de conocimientos procede de una "actividad de elaboración", dentro de la cual el alumno debe confrontar las informaciones nuevas y sus conocimientos movilizados, y donde él debe producir nuevas significaciones más aptas para responder a sus cuestionamientos.

- **Representaciones o concepciones**

En lo general, una "representación**"** se define como:

1. Una imagen, un símbolo o una imitación de algo: "Su rostro angelical era la representación misma de la belleza"; "las señales de tráfico son representaciones de las distintas normas circulatorias".

2. Idea o imagen mental de la realidad: "Gracias a su vívido relato, pudo hacerse una representación de lo que fue su viaje".

En tanto una concepción es un concepto o representación mental de algo: "Tiene una concepción bastante original de las relaciones entre hombres y mujeres". 2. Idea o creación mental de algo: "La concepción del proyecto fue cosa de todos".

Las nociones de representación y concepción, han sido ampliamente estudiadas en la disciplina de Matemática Educativa (ME). Estas mismas fueron analizadas en el contexto de la psicología social por los investigadores De Vecchi y Giordan (1988). En principio, estos autores presentaron la noción de "concepción" como: "un elemento motor que entra en el entendimiento de un conocimiento y permite al mismo tiempo hacer transformaciones del mismo". En diversas investigaciones de la (ME), es sabido que los estudiantes "construyen" las concepciones, toda vez que a estas se les relaciona a un saber o conocimiento. No obstante, pocos estudios relacionan el saber con las concepciones de los profesores. En este sentido, consideramos que los profesores desarrollan concepciones personales de frente al propio conocimiento. Si bien Castañeda (2002) usó la frase: "bases de significados" para dar a conocer las diferentes etapas del surgimiento del "punto de inflexión", la propia denominación de la frase fue utilizada en Durand (1996), para explicar cómo los profesores construyen este tipo de bases, en tanto las extienden, diversifican y estructuran notablemente en las asignaturas que ellos enseñan. Fortín (1992, c.p. Fil, Amade-Escot, Genet-Volet, s.f.) mostró, a través de un estudio de casos, cómo las influencias de la experiencia y de los conocimientos adquiridos a lo largo de una carrera son determinantes en la elección de los contenidos a enseñar. Las representaciones de los profesores revelan, luego, procesos complejos que combinan conocimientos, creencias y experiencias que influyen sobre la manera en que son organizados y llevados a la práctica de la enseñanza (Mingüer, 2004).

En el sentido de sus concepciones, los profesores analizan, administran, organizan y dan orientación a sus informaciones. Los contenidos de enseñanza no escapan a estos procesos, quienes dan certeza a una aproximación individual (Fil, Amade-Escot, Genet-Volet, s.f.). Visto así, el conocimiento de los profesores sugiere ser un movimiento constante entre planos cognitivos aislados de modelos previamente creados por informaciones anteriores, así como el tomar en cuenta informaciones del momento (Tochon, 1989).

Por su lado, las metodologías inherentes a la Teoría de las Representaciones Sociales (TRS), permiten indagar las concepciones que poseen los individuos alrededor de diferentes conceptos. Particularmente, y en la etapa del análisis cognitivo, hicimos uso de la (TRS) para verificar el estado de las concepciones que guardan tanto los profesores como los estudiantes sobre el concepto de función matemática. Estamos convencidos que tales representaciones pueden favorecer u obstaculizar la asimilación del concepto en los estudiantes, ya que todo proceso educativo se desarrolla mediante una serie de prácticas que relacionan tanto a docentes y estudiantes como a sus experiencias vividas.

Para nuestra investigación, es importante establecer el concepto teórico de "representación" puesto que posee diferentes acepciones. Nos centraremos en la definición de la psicología social de este concepto. Según Jodelet (1984, p. 473) una (RS) es:

"(…) una forma de conocimiento socialmente elaborado (…)"

El concepto aparece como una construcción e interpretación de la realidad.

En el ámbito escolar, la representación no es un reflejo de la realidad escolar o de sus funciones sociales efectivas, sino una construcción original. Es decir, es un proceso de construcción de un saber basado en experiencias sociales.

¿Por qué y cómo tomar en cuenta las representaciones sociales en la enseñanza de la matemática?

El tomar en cuenta las representaciones sociales permite comprender ciertos errores de los profesores.

La revisión de las (RS) respecto a cualquier objeto muestra una realidad común que designa una forma de pensamiento social y es a la vez la comprensión y el dominio del entorno.

Algunos estudios, como el de Hutmacher (1993), muestran que la forma de impartir la clase y las estrategias utilizadas por los profesores, dependen en gran medida de sus (RS), fruto de compromisos contradictorios bajo la doble presión de factores ideológicos y de coacciones vinculadas al funcionamiento efectivo del sistema escolar.

En ese sentido, deseamos tener control de las representaciones de ese conocimiento ya que, en tanto concepciones, permiten comprender los comportamientos de los profesores en el salón de clase.

Adoptando ese punto de vista, hemos usado el término "representación" de manera análoga al de "concepción" a partir de la diversidad de estudios comparativos que al respecto se han realizado. Astolfi (1997) fue de los primeros en tratar de integrar ambas nociones concibiendo la primera como "un modelo personal de organización de conocimientos", (citado en Dollo, 2005), en tanto la segunda es de carácter "científico". Estudios recientes articulan ambas nociones en una sola, sujetándoles en marcos teóricos como el de la Teoría de la Transposición Didáctica (TTD) de Chevallard (Dollo, Ch y Johsua S, 2002). No obstante, ha sido Abric (1996) quien asume la noción de representación como un argumento teórico y alternativo al de concepción para el análisis cognitivo, disociándole del carácter social e ingenuo de “noción”, “idea”, “opinión”, etc. Las representaciones integran los siguientes componentes:

1. Una componente cognitiva, que viene del hecho de que toda persona o grupo tiene un papel activo en la apropiación y re-estructuración de la realidad (esto es lo que Moscovici llamó “textura psicológica” de la representación).
2. Una componente sociocultural relacionada con el hecho que las representaciones sociales son colectivamente producidas y generadas por interacciones sociales y ellas participan para “la elaboración de la realidad que es común a un grupo social” (Jodelet, 1989)

Abric concibe las representaciones sociales como una modalidad particular, específica: no solamente los elementos de la representación son jerarquizados, sino incluso toda la representación es organizada alrededor de un “nodo central”, constituido por uno o varios elementos que dan a la representación su significación, de aquí el carácter científico de la (TRS).

> “Este nodo central es el elemento fundamental de la representación porque es quien determina a la vez la significación y la organización de la representación” (Abric, 1996, 21)

Al hacer uso de la metodología propuesta en la (TRS), para el análisis cognitivo, se diseñó un cuestionario con el objetivo de determinar los componentes de los sistemas central y periférico que, en torno al concepto de función, cuentan los profesores del nivel de ingeniería del Sistema Tecnológico (SNEST). Los resultados muestran que las concepciones de los profesores entrevistados se encuentran ampliamente influenciadas por los objetos matemáticos dedicados a la enseñanza (Chevallard, 1985), contenidos en los libros de texto, y en el caso que nos ocupa, el concepto de función como una relación entre variables, en tanto nodo central de la representación. Resultando además que el concepto de “variación”, en su sentido dinámico, es ajeno a los libros de texto.

A partir del análisis histórico, recuperamos la noción de “variabilidad”, reconocida en el dominio de prácticas sociales: procedimentales o de ingeniería y de observación, que ocurrieron a lo largo de los siglos XVIII y XIX, y que nos permitió caracterizar de mejor forma el concepto de función. La noción de variabilidad fue ampliamente utilizada a lo largo de esos siglos y en la actualidad no se encuentra de manera explícita en los libros de texto, ni en el discurso matemático escolar, siendo precisamente el eje central de nuestro trabajo en la definición que hacemos de una situación de aprendizaje para la enseñanza del concepto de función.

Como es sabido, las componentes de estudio en el análisis preliminar se conocen como:

Componente Cognitiva.- Con esta se pretende analizar las representaciones o concepciones con que cuentan los sujetos en estudio respecto de las nociones y conceptos de la matemática escolar.

Componente Didáctica.- Es asociada con las características de trabajo del sistema educativo; por ejemplo, el análisis de los libros de texto utilizados por los profesores para impartir los conocimientos, el estudio de los planes de estudio, etc.

Componente Epistemológica.- El análisis de esta componente se realiza con el fin de reconstruir el discurso del conocimiento matemático, atendiendo a su evolución y transformaciones en la historia, así como a las posibles definiciones de conocimiento a partir de prácticas sociales.

Componente Sociocultural.- Está imbricada con las componentes cognitiva, didáctica y epistemológica, partiendo del supuesto de que el conocimiento es un ente social determinado por prácticas sociales.

El análisis epistemológico, en el Capítulo 4, fue dividido en dos partes, en la primera de estas observamos tres etapas por las que transita el concepto de función, en los tres casos se hace énfasis en el desarrollo histórico del concepto, a través de observarle en su relación con la variación. En este sentido, inevitablemente, iniciamos el estudio a partir de Oresme, quien asumió una dependencia entre las “cualidades” de las magnitudes, llamando incluso “extensio” a una línea horizontal, de manera semejante al eje x actual. Si bien la noción de extensio corresponde al pensamiento griego, esta idea sería ampliamente explotada por

Descartes, para dar sentido a la "extensión geométrica" cuyas cualidades en los cuerpos, fueron concebidas inamovibles en el espacio, razón por la cual éste construyó una matemática estática, en la cual la noción de función no paso de concebirse como una mera ecuación, cuyo argumento central es la incógnita.

Serían Newton y Euler, quienes asumirían a los cuerpos la cualidad dinámica del movimiento en el espacio extenso, y su divisibilidad al infinito. Postura filosófica que les llevó a establecer definiciones de índole variacional para las nociones de cantidad, o variable, y función, a partir de unificar los conceptos de cero e infinito matemáticos.

Finalmente, las propuestas de Cauchy (1827), Dirichlet (1837), Riemann (1858), etc., dejarían de lado la gran cantidad de unificaciones infinitesimalistas contempladas en el espacio matemático newtoniano, involucrando en las definiciones objetos con cierto grado de formalización que culminarían con la definición del concepto elaborada por la escuela bourbakista, como:

> "(…) definida por un conjunto de partida E y un conjunto de llegada F, así como una relación de E hacia F, en la cual cada elemento de E posee al menos una imagen. El conjunto de los elementos de E que poseen una imagen es luego llamada dominio de definición de la función".

De estas últimas definiciones, Freudenthal (1983, citado en Ruiz, 1998, p. 135) ha comentado que:

> "(…) aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, se ha oscurecido su esencial significado como acción de designación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático".

Punto de vista que será definitivo para el diseño de la situación de enseñanza, que presentaremos al final del estudio.

En la segunda parte, observamos la "variabilidad" como una noción o significado cercano al concepto de función. Este conocimiento fue ampliamente utilizado en Europa y México a lo largo de los siglos XVIII y XIX en diversas disciplinas procedimentales, como fue el caso de la geografía, topografía, astronomía, navegación y la óptica. En esta última, en los anteojos de enfoque de los llamados equialtímetros (aparatos que permiten medir, en topografía, los desniveles del terreno) la posición de la cruz filar en el eje de colimación, concebida plana por los diseñadores de dichos instrumentos, era colocada sobre la lente curva del enfoque. Dicho proceso, cruz filar plana y lente curva, alteraba las observaciones para el cálculo de los desniveles del terreno. Estas alteraciones o errores, eran conocidas como la "variabilidad" producida por las mismas alteraciones. El tratar de evitar la variabilidad producida por los distintos instrumentos de medición, como fueron: equialtímetros, altímetros, barómetros, etc., durante esos siglos, delimitó una práctica social generadora de conocimiento matemático que culminaría a finales del siglo XVIII con la escritura del "Méthode des Moindres Carrés" (1795) por Ch. F. Gauss. Sin embargo, antes que éste, en 1750, el geómetra alemán T. Mayer, propondría un "método de combinación" semejante para compensar los errores en los cálculos de las mediciones astronómicas y aquellos de naturaleza procedimental. De ello trataremos en el análisis epistemológico.

No obstante que el Método de los Mínimos Cuadrados es de gran utilidad en la actualidad, para 1873, el Ingeniero mexicano Francisco Díaz Covarrubias hizo uso de la noción de variabilidad para, tomando esta como eje central, escribir un texto de Cálculo Diferencial para estudiantes del nivel de preparatoria, en el cual los argumentos principales de función, derivada, etc., fueron definidos a partir de esa noción. Díaz Covarrubias asumió la variabilidad desde dos puntos de vista: El primero es que puede concebirse en un estado de "constancia" del todo rectilíneo y, el segundo, más complejo, cual es la continuidad de la curva. En otras palabras, el estado de constancia "atrapa", formando parte de, la variabilidad o movimiento de los fenómenos en estudio.

Sobre el diseño de la situación de aprendizaje

En la práctica educativa, los profesores utilizan diversas estrategias didácticas para la enseñanza de conceptos, estamos convencidos que un análisis de las (RS) que poseen los profesores sobre el concepto en estudio, nos permitirá una evaluación sobre los elementos que están presentes en el momento de la práctica escolar y, sobre todo, aquello que se enseña. Por su parte, los estudiantes no aprenden conceptos en forma aislada, sino que adaptan experiencias significativas anteriores a situaciones actuales y acceden así al nuevo conocimiento, considerándose que el conocimiento anterior coexiste temporalmente con el nuevo conocimiento, por lo que se consideró necesario el conocer las (RS) que poseen los estudiantes sobre el propio concepto. En esta "reconstrucción de significados" el análisis, tanto de las concepciones asociadas, como el ámbito en que se desarrollan, son indispensables para el diseño de la situación de aprendizaje.

En el diseño de la secuencia aplicamos la propuesta de Beitone (citado en Dollo y Parayre, 2005) que toma en cuenta la representación social inicial que el alumno posee sobre un objeto en particular, y mediante un proceso (que se explica en los capítulos 3 y 5) que incluye las fases de descontextualización, deconstrucción, recontextualización, reconstrucción, y operacionalización, nos fue posible incorporar elementos al sistema periférico, ya que no deseamos romper con la representación con que cuentan los sujetos en estudio, sino ampliarla con elementos de carácter variacional para que den a los sujetos una mejor comprensión y aplicación del concepto de función.

Capítulo 2

Estado del Arte

2.1 Estado del arte

El concepto de función ha sido estudiado en numerosas ocasiones y con diferentes enfoques en (ME), lo que nos sugiere su importancia. Sin hacer un análisis exhaustivo, dentro de estas investigaciones, podemos citar a Sierpinska (1992), quien en su análisis sobre la noción de función, determinó 19 categorías para la comprensión de la misma. En su estudio se aprecian los análisis de las componentes cognitiva y epistemológica, incluyendo, además, fenómenos como el de la motivación, conocimientos previos y formas de exposición.

En el plano didáctico-epistemológico, Ruiz (1998) analizó las concepciones que presentan los alumnos sobre la noción de función. Estudió el fenómeno de transposición didáctica, e identificó los obstáculos didácticos y cognitivos alrededor del concepto. Con ello confirmó que las concepciones de los alumnos coinciden con la evolución histórica, además de que el tratamiento que se da al concepto de función como "objeto de estudio" le resta importancia como herramienta matemática.

Desde el punto de vista de la matemática formal, Kolmogorov (1975) estimó para el concepto de función un sinnúmero de posibilidades con diferente grado de generalidad, su punto de vista fue este:

> "(. . .) A veces se consideran funciones continuas, en otras es preciso suponer que se trata de funciones diferenciables, una o varias veces, etc. Sin embargo, el concepto clásico de función resulta insuficiente, aun cuando sea interpretado en el sentido más general, esto es, como una regla

cualquiera que a todo valor de x del campo de definición de esta función pone en correspondencia un número $y = f(x)$". (Kolmogorov, 1975, 216-217)

Guzmán (1998) hizo una presentación sobre el aprendizaje por parte de los estudiantes de nociones relativas a funciones y el sentido que cobran en ellos, utilizó un enfoque cognitivo sustentado en registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de las propiedades de las funciones. Por medio de un análisis de respuestas, puso en evidencia el hecho de que no se ha dado la suficiente importancia a la relación existente entre las diversas formas en que es posible representar una función. En general, los estudiantes son "monoregistros", es decir, sus respuestas están dadas en el registro en que es formulada la pregunta, algunas veces recurren al algebraico, pero en la mayoría de los casos no coordinan dos o más. Concluye que esta deficiencia es una cuestión de aprendizaje y debe ser tomada en cuanta sobre lo que se está enseñando. También detectó la dificultad para relacionar, ya que los estudiantes no logran coordinar la lectura de un hecho expresado en un registro determinado y la expresión o formulación en lenguaje natural y, a la inversa, expresar un enunciado dado en lenguaje natural en términos de otro registro, y por supuesto los traslados del registro gráfico al algebraico.

García y Serrano (2000) presentaron un estudio sobre el conocimiento profesional del concepto de función por parte de los docentes en matemáticas en Educación Básica con reciente actualización en el tema. Los resultados indican una compleja y estrecha relación entre el significado que cada uno de los docentes concede al concepto y el significado institucional desarrollado por el programa de actualización, y el cómo estas variables deben ser tomadas en cuenta para explicar los errores e inconsistencias de profesores y estudiantes. Las autoras concluyeron que, aun con la experiencia profesional de los profesores encuestados, no existe una aproximación a la comprensión racional, sino de tipo instrumental. No establecieron traslaciones entre las diferentes formas de representar una función, al dejar de lado la funcionalidad de este tránsito, ello les llevó a una dificultad al tratar de identificar o construir funciones de la vida cotidiana. Nula coherencia entre las definiciones formal e informal propuestas por ellas mismas, lo que conduce a que el significado personal, junto con las prácticas institucionales, no provea de sentido al concepto ni a sus prácticas en el aula.

Un análisis de tipo sistémico acerca del discurso del profesor en el aula, en que se considera la variación como tema principal, centrado en las nociones de función y derivada, fue planteado por Cantoral y Reséndiz (2003). Los autores analizaron las formas o prácticas que se realizan cuando se desea explicar una idea matemática. El estudio concluye que, dependiendo de las situaciones de interacción, profesor y estudiantes, los segundos “construyen” sus propias explicaciones, las cuales son compartidas o negociadas como acuerdos sociales con la intención de validar el discurso sobre la clase. Identificaron, además, la participación de los alumnos en clase como una variable que puede hacer que el docente tenga que cambiar su discurso para lograr el acuerdo sobre ciertas convenciones utilizadas.

Acerca de los cambios conceptuales que pueden presentarse, en Valero (2003) se examinó la estabilidad y cambio de las concepciones alternativas de los estudiantes sobre la noción de función. Mediante diseños instruccionales se analizaron gráficas de funciones elementales para favorecer el cambio conceptual. La conclusión fue que, desde el punto de vista didáctico, las concepciones alternativas sufren transformaciones debido a que no pueden permanecer indefinidamente en los estudiantes, aún cuando algunas son resistentes al cambio.

Un estudio socio-epistemológico sobre la función trigonométrica fue presentado por Montiel (2005). La autora estudió diversas investigaciones sobre el concepto para llegar a establecer la definición en la construcción social de la función trigonométrica. El proyecto fue centrado en el fenómeno didáctico, y aporta elementos de carácter social para explicar el tratamiento escolar de este tipo de funciones, incorporando, además, importantes reflexiones sobre la propia aproximación teórica.

Por su lado, Pluvinage y Cuevas (2006), vieron el considerar las competencias que deseaban que los estudiantes adquieran, así como reconocer los objetos matemáticos en juego. Estos últimos presentaron el concepto de función desde cuatro registros semióticos, como fueron: tablas numéricas, representaciones gráficas, teclas de calculadora y fórmulas explícitas. En esta última investigación, los significados asociados al concepto aparecen como "nociones relacionadas" ya conocidas, cuya interacción en el aula deriva en acercamientos didácticos más completos que, es de suponer, llevan al entendimiento de la definición del concepto, enunciando éste a través de la dependencia entre variables, e involucrando elementos de la teoría de conjuntos. Es decir, los autores asumen el conocimiento que debe ser llevado a la enseñanza, tal como aparece en lo libros de texto de cálculo diferencial.

Estos y otros trabajos de investigación han reportado diversos acercamientos al concepto, encontramos estudios de tipo didáctico, cognitivo, epistemológico, de la matemática formal, y recientemente investigaciones que involucran lo social para explicar los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Incluir lo social no es nuevo, lo novedoso es el enfoque que se da al incluir esta componente para observar el objeto matemático y su relación con los fenómenos que se presentan en el aula y el medio que les rodea. Es en este sentido que emerge nuestra investigación, pues consideramos que las concepciones y comportamientos de estudiantes y profesores surgen como respuesta a factores que involucran el discurso matemático escolar (DME) y su relación con el medio en que se realizan.

2.2 Preguntas de investigación

¿Cuáles son las concepciones de los profesores en torno al concepto de función?

¿En esas concepciones, está presente el aspecto variacional y dinámico del concepto?

¿Cuáles son las concepciones de los estudiantes respecto al concepto de función?

¿Cómo son las concepciones de los estudiantes respecto a las concepciones de los profesores?

¿Existe vinculación o un eje rector entre esas concepciones?

¿Cuáles son los factores socioculturales que intervienen en la formación de esas concepciones?

¿Cómo las concepciones de los profesores y estudiantes, pueden ayudar para el diseño de la situación de enseñanza que pretendemos?

2.2.1 El punto de partida de nuestra reflexión es la siguiente: ¿Por qué los profesores y no los estudiantes?

Pudiera pensarse que sería suficiente con realizar un examen a los estudiantes o revisar sus apuntes sobre el tema, para conocer lo que los profesores transmiten en el salón de clase. Sin embargo, se hace necesario dirigir nuestro estudio a otros aspectos que muestren no sólo el "qué se enseña", sino "cómo se enseña". Al analizar las respuestas de los profesores buscamos aquellos significados asociados al concepto de función, en tanto que pudieran apoyar a los estudiantes en la comprensión del mismo.

2.2.2 ¿Para que aplicar un cuestionario a los estudiantes, si ya tenemos los resultados de los profesores?

Durante los años de experiencia docente nos hemos percatado de que los estudiantes "aprenden" diferentes modos de representar una función; pueden ser capaces de graficar a partir de una tabla de valores, de describir verbalmente lo que sucede en un evento y dada una función obtener datos. Sin embargo el paso de un sistema de representación a otro causa conflicto. Por ejemplo, se les dificulta explicar verbalmente un fenómeno a partir de su gráfica; o dada una tabla de valores, interpretarla para predecir el comportamiento de la función. Por esta razón, para contar con un panorama completo que nos permitiera diseñar una secuencia de aprendizaje, en la que tomaran en cuenta la mayor cantidad de circunstancias que pudieran afectar el desarrollo de la secuencia, se aplicó un cuestionario a los estudiantes para verificar sus concepciones en torno al concepto aludido.

Capítulo 3

La teoría de las Representaciones Sociales

3.1 La teoría de las Representaciones Sociales (TRS)

El concepto de (RS) fue introducido en 1961 a partir de la teoría psicoanalítica de Freud, por Serge Moscovici en su libro "La psychanalyse, son image et son publique", en tanto que la teoría se ha desarrollado a lo largo de este tiempo. Una (RS) es aquella construida por las interacciones de un grupo social y está formada por ideas, creencias, opiniones e incluso actitudes sobre algún concepto o noción en particular. La función principal de las (RS) es interpretar la realidad, manteniendo relaciones de simbolización y atribuyéndole significaciones (Guimelli, 2004).

Toda (RS) posee dos componentes:

1. "La cognitiva", pues supone un sujeto activo, y
2. "La social", pues las prácticas sociales están determinadas por las condiciones socioculturales en que la representación se realiza y se transmite (Abric, 1994).

Las (RS) son formas de interpretar nuestra vida diaria, estilos de modelos del conocimiento social. Toda actividad mental individual está determinada a través del contexto grupal en que se desarrolla el individuo, por tanto la noción de (RS) nos sitúa en un punto en que aprehendemos diariamente de nuestro medio ambiente la información que se vierte sobre el de las demás personas. El conocimiento es, entonces, "espontáneo", socialmente elaborado y compartido.

> "El concepto de (RS) designa una forma de conocimiento específico, el saber del sentido común, cuyos contenidos manifiestan la operación de procesos generativos y funcionales socialmente caracterizados" (Jodelet, 1984, p. 474).

Se define, entonces, por informaciones, imágenes, opiniones, actitudes de un sujeto, hacia otro sujeto. Es un fenómeno característico de la interacción del sujeto y del objeto, que se enfrentan modificándose mutuamente sin cesar (Piaget, 1968). Lo anterior implica que exista una actividad constructiva y reconstructiva en cada representación.

Las (RS) se conforman a partir de la información, la experiencia, el conocimiento y los modelos de pensamiento y se construyen mediante imágenes, sistemas y categorías sobre un elemento en particular:

> "La representación social es una modalidad particular del conocimiento, cuya función es la elaboración de los comportamientos y la comunicación entre los individuos. (...) es un corpus organizado de conocimientos y una de las actividades psíquicas gracias a las cuales los hombres hacen inteligible la realidad física y social, se integran en un grupo o en una relación cotidiana de intercambios." (Farr, 1984, p. 496)

En su obra, Moscovici señala que el concepto de (RS) tiene dos aspectos básicos para su definición. Por un lado, son una forma de conocimiento y, por otro, son una forma de reconstrucción mental de la realidad, de tal suerte que sólo se dan en el intercambio de información con otras personas. Por lo que una (RS) no es una respuesta a un estímulo u objeto exterior sino la reconstrucción de ese estímulo del objeto real. En tal sentido las (RS) no son estáticas, sino que se encuentran en continua variación o movimiento.

- **¿Cómo se forma una representación social?**

Las (RS) se estructuran a partir de la información, la experiencia, el conocimiento y los modelos de pensamiento y se construyen mediante imágenes, sistemas y categorías sobre un elemento en particular.

En resumen, toda (RS) posee las siguientes características:

- Siempre son la representación de un objeto,
- Tienen carácter de imagen y es posible realizar pequeños cambios en la idea, la percepción y el concepto.
- Poseen un carácter simbólico y significante.
- Poseen un carácter constructivo.
- Poseen carácter autónomo y creativo.

- **Las funciones de las representaciones sociales**

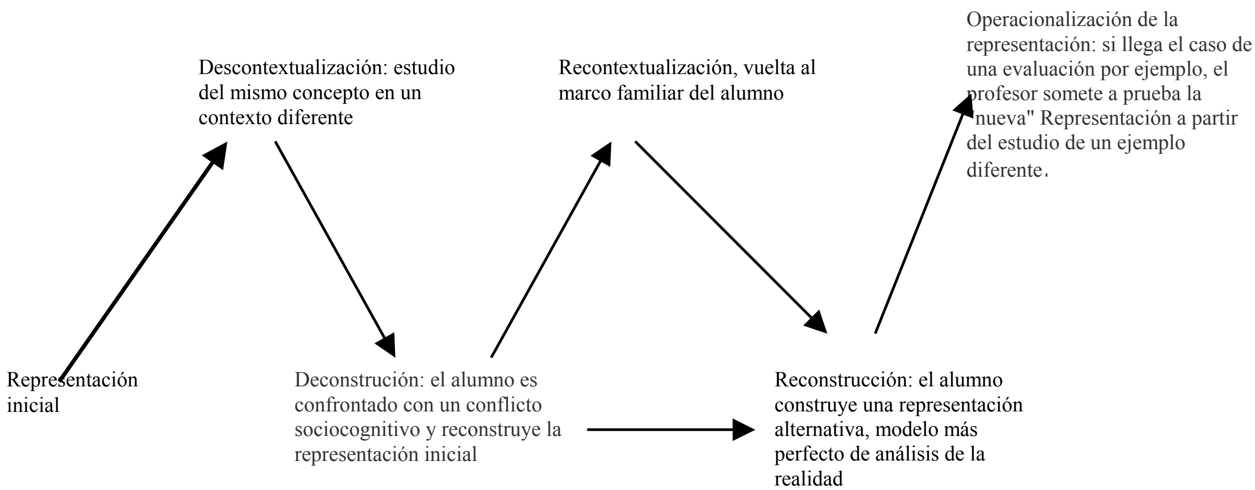
Según Abric, ya citado, las (RS) poseen cuatro funciones esenciales:

1. La función principal de las (RS) es la interpretación de la realidad que nos rodea ya que facilitan la comunicación al contar con un marco de referencia en un contexto específico lo que permite el intercambio y la difusión de saberes.
2. Definen la identidad y permiten salvaguardar la especificidad de los grupos, ejerce un control en los procesos de socialización.
3. Guían los comportamientos y prácticas. Reflejan la naturaleza de reglas y vínculos sociales, lo que conlleva a comportamientos o prácticas obligados.
4. Función justificadora. Permite justificar la definición y comportamiento de los grupos.

3.2 Estructura de las representaciones: núcleo central y elementos periféricos

- **Definición del nodo central de una representación social**

El “nodo central” es el elemento que sostiene a la representación. Toda representación está construida alrededor del núcleo o sistema central, formado por uno o varios elementos que dan significación a dicha representación. El núcleo central es el elemento más resistente al cambio y es determinado tanto por la naturaleza del objeto representado, como por la relación que el grupo (o sujeto) mantiene con el objeto, y además con un sistema de valores y normas sociales. La identificación del núcleo central es determinante para conocer el objeto propio de la representación. Está vinculado a la memoria colectiva, a la historia del grupo, y a la propia historia del individuo; es estable, coherente y rígido, resistente al cambio y poco sensible al contexto inmediato.



Estrategias didácticas del profesor y el proceso de aprendizaje de los alumnos. Según Beitone et al. (2004). Tomado de Dollo y Parayre (2005)

Las representaciones sociales surgen en el contexto de lo familiar que opera como base para comparar y ayuda a entender lo que ocurre, y lo desconocido, que nos descontrola y nos hace representar nuevos objetos. Ese nuevo objeto se traslada entre ambos espacios y se reconstruye hasta llegar a ser familiar de nuevo. Así, en el contexto de la enseñanza:

a) El alumno posee una representación inicial del objeto.

b) Descontextualización: el concepto es estudiado o aplicado en otra situación diferente a la anterior.

c) Deconstrucción: Cuando el alumno realiza interacciones se genera un conflicto sociocognitivo que lo lleva a reorganizar sus concepciones anteriores integrando nuevos elementos surgidos de la propia confrontación.

d) Recontextualización: puede provenir de interacciones interindividuales o intraindividuales, y es en este momento que discute de nuevo sus propias representaciones.

e) Reconstrucción: Construye una nueva representación que involucra una reorganización debida a las interacciones.

f) Operacionalización: es la aplicación de la nueva representación en un caso o ejemplo diferente.

- **Los elementos periféricos**

Alrededor del núcleo central se tienen los “elementos periféricos” o “sistema periférico”. Como elementos jerarquizados desempeñan un papel esencial en la representación, puesto quo son la interfase entre el núcleo central y el objeto mismo. Los elementos periféricos permiten la integración de las experiencias individuales, lo que soporta la heterogeneidad del grupo es, además, evolutivo y sensible al contexto inmediato. Asegura la protección del nodo central.

Los elementos periféricos son el vínculo entre el nodo central y la situación concreta donde se elabora o trabaja la representación. Tienen como funciones, (Abric 2006):

- Concreción: Viene del anclaje de la representación en el contexto.
- Regulación: Es el proceso de adaptar las evoluciones del contexto.
- La defensa: Favorece un sistema capaz de resistir los cambios.

- **La representación como doble sistema**

Toda representación está construida alrededor del núcleo central, formado por uno o varios elementos que dan significación a dicha representación. El núcleo central es el elemento más resistente al cambio y es determinado tanto por la naturaleza del objeto representado, como por la relación que el grupo (o sujeto) mantiene con el objeto, y además con un sistema de valores y normas sociales. La identificación del núcleo central es determinante para conocer el objeto propio de la representación. Está vinculado a la memoria colectiva y a la historia del grupo, es estable, coherente y rígido, resistente al cambio y poco sensible al contexto inmediato. Así, en Valero (2003), en el estudio sobre la estabilidad y cambio de las concepciones alternativas de los estudiantes sobre el concepto de función, se menciona que existen concepciones que se encuentran más arraigadas en los estudiantes, que son más difíciles de modificar. Desde el punto de vista de las RS, esto ocurre cuando aquellas concepciones que se quieren modificar en el sujeto, se encuentran en el sistema central de dicha representación. Las concepciones alternativas que se remueven con mayor facilidad serán, entonces, las que se encuentren en el sistema periférico de la representación social. En el mismo estudio se menciona que estas concepciones alternativas sufren transformaciones, pues no pueden permanecer indefinidamente en los estudiantes, aunque sean resistentes al cambio. Nosotros agregamos que no pueden permanecer indefinidamente en los estudiantes, puesto que son vinculadas a prácticas que van a modificar la (RS) que de ellas se tiene. Esta modificación puede darse, incluso, tanto en el núcleo central como en los elementos periféricos.

La representación posee, entonces, un doble sistema:

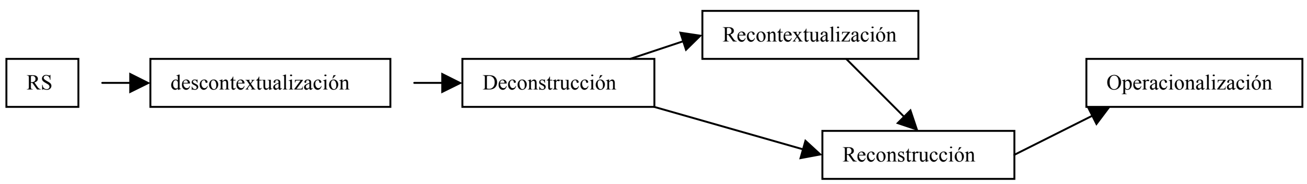
- "Un sistema central", esencialmente social, que relaciona las condiciones históricas, sociológicas e ideológicas. Su papel es esencial en la estabilidad y coherencia de la representación
- "Un sistema periférico", asociado a las características individuales, permite, de esta forma, una adaptación en función de las experiencias personales en torno al núcleo central. El sistema periférico no se considera menor que el central, es fundamental para la preservación o transformación de la RS.

Características de los sistemas central y periférico

SISTEMA CENTRAL	**SISTEMA PERIFÉRICO**
Vinculado a la memoria colectiva y a la historia de grupo	Permite la integración de las experiencias e historias individuales
Consensual, define la homogeneidad del grupo	Soporta la heterogeneidad el grupo
Estable, coherente y rígido	Flexible: soporta las contradicciones
Resiste al cambio	Evolutivo
Poco sensible al contexto inmediato	Sensible al contexto inmediato

(Según Abric, 1994) Tomado de El pensamiento social. Guimelli p. 85

Para cambiar una (RS) es necesario romper con la representación anterior, lo que algunas veces resulta difícil por la coexistencia que se da entre la concepción anterior y la nueva que se proponga. En la enseñanza de la matemática, esto será posible en la medida en que se diseñen situaciones que involucren a los alumnos en procesos de cambio:



La noción de construcción social de la realidad implica la conceptualización de las (RS). De acuerdo a Ibáñez (1988), las representaciones no sólo reflejan la realidad, sino que intervienen en su elaboración. Una (RS) es al mismo tiempo pensamiento *constituido* y pensamiento *constituyente*. Constitutivo ya que es transformado en productos de la vida social a partir de los cuales se interpreta la realidad, y reflejan el seno en el cual se formaron. Y pensamiento constituyente, ya que intervienen en la formación de la representación del objeto del cual son parte.

> *"(...) el conocimiento matemático aparece pues como una construcción social, por el hecho de que la base del conocimiento matemático (el conocimiento lingüístico con sus convenios y sus reglas) es una construcción social y el hecho de que los procesos sociales interpersonales de diálogo y de crítica son necesarios para convertir el conocimiento matemático subjetivo de un individuo en un conocimiento objetivo socialmente aceptado(...)" (Dubois, 2000, s. p.).*

El proceso ya citado será fundamental para el diseño de la situación de aprendizaje que presentamos en el capítulo 5, en tanto no deseamos romper con la (RS) que los estudiantes poseen sobre en concepto de función, sino más bien, incorporar a ésta la noción de variación en la forma que se discute más adelante.

Luego, y para nuestro propósito, entendemos las (RS) como una construcción personal que integra elementos y que se ha generado en la práctica del profesor. Estas (RS) transforman e impactan las concepciones de los estudiantes al momento de impartir su clase mediante procedimientos y actividades en el aula.

Capítulo 4

Análisis Preliminar

4.1 Análisis Didáctico

Consideraciones didácticas

En el ámbito escolar, el concepto de función matemática es abordado en los cursos de cálculo de nivel superior en primer semestre. En el Sistema de Institutos Tecnológicos (DGEST), el tema se ubica en la segunda unidad del programa de Matemáticas I, Cálculo Diferencial, para todas las carreras de ingeniería impartidas en el mismo. La importancia de este concepto es tal, que de ahí se desprenden una serie de razonamientos y aplicaciones propias de la materia y de otras asignaturas consecuentes a esta, lo que hace suponer necesaria su correcta comprensión por parte de los estudiantes.

Estamos en posición, entonces, de analizar las concepciones que poseen los profesores acerca del concepto de función. De aquí la pregunta:

¿Cuál es el lugar del concepto de función en la enseñanza en el nivel de ingeniería?

De acuerdo al programa oficial vigente, la asignatura Matemáticas I (Cálculo Diferencial, clave ACM-0403) contempla como aportación al perfil del egresado, que este:

a) Desarrolle un pensamiento lógico matemático formativo que le permita analizar fenómenos reales que involucra razones de cambio y modelarlos.
b) Desarrolle su creatividad para la solución de problemas de optimización asociados a funciones reales de una sola variable.

El objetivo general del curso es centrado en el concepto, esto es:

"El estudiante dominará el concepto de función y desarrollará la habilidad numérica y geométrica para representar las funciones, aplicara la derivada como una herramienta para la solución de problemas prácticos del área de ingeniería en que se imparte esta materia".

El programa consta de seis unidades, estas son:

Unidad 1. Números reales.

Unidad 2. Funciones.

Unidad 3. Límites y Continuidad.

Unidad 4. Derivadas.

Unidad 5. Aplicaciones de las derivadas.

Unidad 6. Diferenciales.

Temario:

Unidad 1. Números reales	1.1 Clasificación de los números reales. 1.2 Propiedades. 1.3 Interpretación geométrica de los números reales. 1.4 Desigualdades lineales y cuadráticas y sus propiedades. 1.5 Valor absoluto y sus propiedades.
Unidad 2. Funciones <u>Objetivo educacional:</u> Identificará los diferentes tipos de funciones y sus propiedades. Realizará operaciones con funciones e interpretará su representación gráfica.	2.1 Definición de función. 2.2 Representaciones de funciones (tablas, gráficas, fórmulas y palabras). 2.3 Clasificación de las funciones por su naturaleza; algebraicas y trascendentes. 2.3.1 Función polinomial. 2.3.2 Función racional. 2.3.3 Función raíz. 2.3.4 Función trigonométrica. 2.3.5 Función exponencial. 2.3.6 Función logarítmica. 2.3.7 Función definida parte por parte. 2.3.8 Función inversa.

Al analizar el programa encontramos que no se menciona explícitamente la forma variacional del concepto de función.

Con relación a la bibliografía recomendada en el programa, y la utilizada por los profesores, encontramos lo siguiente:

Existen numerosos libros de texto de Cálculo Diferencial, los seleccionados para su revisión obedecen a las sugerencias de uso que aparecen en el propio programa oficial vigente y en un sondeo realizado a docentes sobre aquellos libros que son utilizados comúnmente por ellos, además de que estos últimos se encuentran en la mayoría de los centros de información de los I.T. (en la bibliografía se encuentra la referencia completa).

TEXTO	CONCEPTOS PRECEDENTES	CONTENIDOS RELATIVOS AL CONCEPTO DE FUNCIÓN
W. Granville (2005) (La publicación original es de 1901)	• Variables y constantes • Intervalo de una variable • Variación continua	• Funciones • Variables independientes y dependientes • Notación de funciones • La división por cero, excluida • Gráfica de una función: continuidad
E. Swokowski (1989)	• Los números reales • Sistemas de coordenadas en dos dimensiones • La recta	• La definición de función • Operaciones con funciones
Larson/Edwards (2006)	• Gráficas y modelos • Modelos lineales y ritmos o velocidades de cambio	• Uso de las notación de función para representar y evaluar funciones • Dominio y recorrido o rango de la función • Gráfica de una función • Tipos de transformaciones de las funciones. • Clasificaciones y combinaciones de funciones
Purcell (2000)	• Sistema de números reales. • Desigualdades. • Sistema de coordenadas rectangulares. • La línea recta. • Gráficas y ecuaciones.	• Funciones y sus gráficas (notación, definición, dominio y rango). • Operaciones con funciones. • Funciones trigonométricas.
Stewart (2001)	• Presentación preliminar en que plantea algunas ideas del cálculo, principalmente como surgen los límites cuando se intentan resolver problemas	• Cuatro maneras de representar una función. • Modelos matemáticos. • Nuevas funciones a partir de las ya conocidas. • Calculadoras graficadoras y computadoras.

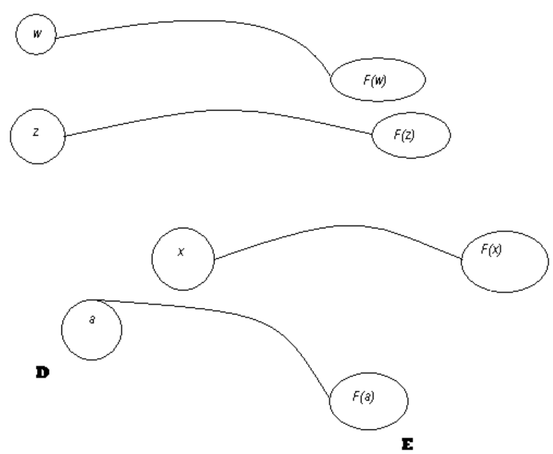
Tratamiento del concepto de función

Planteamos enseguida el análisis que se hizo de los textos antes mencionados. Para ello, centramos la atención en el concepto de función estimándole como una dependencia entre variables, viendo este último como el “saber que debe ser llevado a la enseñanza” en el sentido como le concibe Chevallard (1985). El concepto de función, en ese contexto, es descrito en los libros de texto de cálculo del nivel licenciatura, de manera semejante y alterna a la definición dada por Dirichlet en 1837, como:

> "Si una variable *y* está relacionada con otra variable *x,* de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a *x*, hay una regla según la cual queda determinado un único valor de *y*, entonces se dice que *y* es una función de la variable independiente *x*". (Citado en Boyer, 1986, 687)

Para el análisis de los textos escolares, Camacho (2007) propuso hacer un encadenamiento entre los distintos significados asociados al saber para la enseñanza, considerando este último con el símbolo E_n, en tanto los significados asociados se estiman con los símbolos $E_0, E_1, E_2, E_3,...$ dependiendo de su posición en los libros. Usaremos este punto de vista y nomenclatura en el análisis. En este sentido, nos interesa reconocer la posición donde los autores colocan en el texto al saber para la enseñanza, lo cual será un indicativo del encadenamiento de los conocimientos que muestra su propia coherencia.

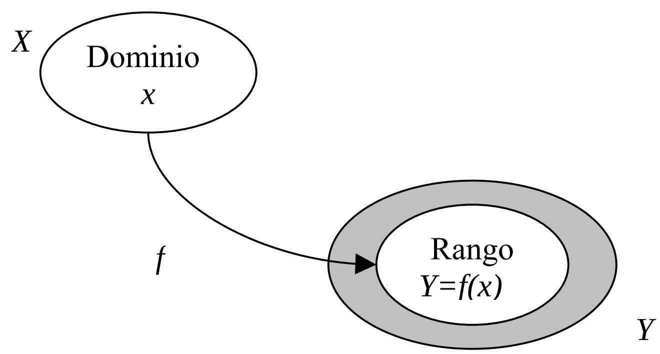
Granville (2005) define función como una relación entre dos variables, de modo que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, de forma que la primera viene a ser función de la segunda.



Existen autores que se refieren a la relación entre valores del dominio y contradominio como un "mapeo" o bien como una "aplicación" entre elementos de un conjunto a otro (Lipschutz, 1992).

El concepto de función es definido Larson y Edwards (2006, p. 39) como una relación entre dos conjuntos, en donde destacan una variable *x* independiente y una variable *y* dependiente de aquella:

> “Sean *X* y *Y* conjuntos de números reales. Una **función real *f* de una variable real *x*** de *X* a *Y* es una correspondencia que asigna a cada número *x* de *X* exactamente un número *y* de *Y*.
>
> El **dominio** de *f* es el conjunto *X*. El número *y* es la **imagen** de *x* por *f* y se denota mediante *f(x)*, a lo cual se le llama el **valor de *f* en *x***. El **recorrido o rango** de *f* se define como el subconjunto de *Y* formado por todas las imágenes de los números *X*.”



El texto se centra en funciones dadas por ecuaciones que contienen variables dependientes e independientes.

En Swokowski (1989, p. 30), se utiliza la noción de correspondencia para explicar el concepto de función como:

> “Una función *f* de un conjunto *D* a un conjunto *E* es una correspondencia que asigna a cada elemento *x* de *D* un elemento único *y* de *E*”.
>
> “El elemento *y* de *E* es el valor (*funcional*) de *f* en *y* se denota por *f(x)*. El conjunto *D* se llama dominio de la función. El contradominio de *f* es el subconjunto de *E* que consta de todos los valores posibles *f(x)* para *x* en *D*. (Se llama también *ámbito* de la función)”.

En esta dirección, en los textos aparece dominante la definición del concepto en términos de una correspondencia entre variables. Véase por ejemplo la siguiente definición:

> «Una función *f* es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto *x* en un conjunto, denominado dominio, un solo valor $f(x)$ de un solo conjunto. El conjunto de todos los valores así obtenidos se denomina rango de la función.» (Purcell, 2000, 37)

En este caso, podemos decir que el saber para la enseñanza, que llamaremos E_n está por encima de los conocimientos asociados $E_0, E_1, E_2, E_3, \ldots$. Purcell sugiere iniciar la enseñanza con esa definición para con ello continuar e intentar dar significado al propio concepto, haciendo uso de los registros conocidos de fórmula, variable y tabla de valores. Es decir plantea un discurso que no necesariamente lleva el siguiente orden:

$$\underbrace{E_n}_{\text{Saber para la enseñanza}} \rightarrow \underbrace{E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow \ldots}_{\text{Conocimientos asociados}}$$

Por su parte, Stewart (2001), inicia el tema de funciones con la presentación de un conocimiento asociado E_0 : cuatro maneras de representar una función, sin embargo, antes de terminar la sección define:

> "Una función *f* es una regla que asigna a cada elemento *x* de un conjunto *A* exactamente un elemento, llamado *f(x)*, de un conjunto *B*". (op. cit. p. 12)

Muestra significados asociados al concepto, como los siguientes:

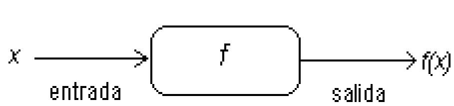


Diagrama como máquinas para una función

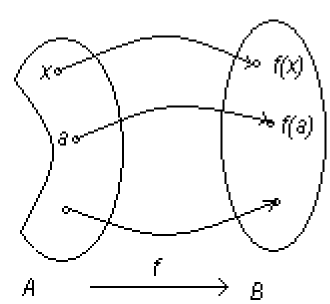


Diagrama de flechas para *f*

Para luego introducir los términos de “dominio”, “variable independiente” y “variable dependiente”.

De acuerdo al análisis propuesto por Camacho (2007), obtenemos los siguientes encadenamientos de los libros revisados:

Autor	**Base de significados utilizada**
W. Granville	$E_1 \to E_n \to E_2 \to \ldots \to E_k$
E. Swokowski	$E_n \to E_0 \to E_1 \to E_2 \to \ldots \to E_k$
Larson / Edwards	$E_0 \to E_n \to E_1 \to E_2 \to \ldots \to E_k$
Purcell	$E_n \to E_0 \to E_1 \to E_2 \to \ldots \to E_k$
Stewart	$E_0 \to E_1 \to E_n \to E_2 \to \ldots \to E_k$

Desde un punto de vista por demás elemental, el conocimiento para la enseñanza E_n debiera colocarse al final de la cadena de los conocimientos asociados. En los textos analizados encontramos que este se encuentra antes o entre los propios conocimientos $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k \ldots$, asumidos como los diversos significados que adquiere el conocimiento inicial E_0, lo cual, en principio, resta coherencia a los mismos, y aún al propio discurso establecido para el concepto, impidiendo en la práctica escolar la comprensión real y su posterior utilización del concepto.

4.2 Análisis Cognitivo

Sección 1. La elección del método de recopilación

4.2.1 Panorama de los métodos

Existen diversos métodos de recolección de datos que llevan a determinar una (RS). Según Abric (1994) la pertinencia y calidad proporcionan la validez del análisis y sus resultados. De ahí la importancia de elegir la herramienta adecuada para obtener la (RS) en estudio, pues recordemos que estas son definidas por dos factores: su contenido y su organización, por lo que ambos deben estudiarse como uno solo, puesto que se integran dentro de un grupo en un contexto social e ideológico del cual dependen. El grupo social construye y representa la realidad, de ahí que el análisis de las representaciones sociales conlleve estudiar los componentes cognitivos y los componentes sociales. En este sentido:

> "Una representación siempre es una representación de algo para alguien" (Flores, J., prólogo en Doise, 2005)

El estudio de las (RS) supone la utilización de métodos de recolección que nos permitan:

a) Identificar y hacer emerger los factores que la componen,

b) Conocer la organización de sus componentes y,

c) La identificación y verificación del sistema central.

Métodos de recolección de contenido

a) Los métodos interrogativos (verbales o esquemáticos) determinan una expresión que afecta al objeto estudiado: entrevista, cuestionario, tablas inductoras, dibujos y soportes gráficos, aproximación monográfica.

b) Los métodos asociativos tiene una base más espontánea y menos controlada: asociación libre, carta asociativa.

Métodos de identificación de la organización y estructura de la representación:

a) Métodos de identificación de lazos: construcción de pares de palabras, grupos de términos.

b) Métodos de jerarquización: los tris jerarquizados sucesivos, elecciones sucesivas por bloques.

c) Métodos de control de la centralidad: técnica de cuestionamiento del núcleo central, método de inducción por guión, método de esquemas cognitivos base.

4.2.2 La elección del método del cuestionario.

- **Estudio del concepto de función desde el punto de vista de las (RS)**

Para la verificación de las concepciones de los profesores, utilizamos un acercamiento plurimetodológico, pues no encontramos un método que por si solo cumpliera con las tres condiciones para la recolección. En la primera parte de la encuesta sobre el concepto de función, se inicia con una presentación sobre la intención del cuestionario y algunas recomendaciones para su respuesta, seguido de una parte de datos generales de los encuestados que consideramos importantes para nuestro estudio, véase la siguiente tabla.

- **Presentación del tipo de preguntas elegidas**

Datos Generales

Profesión	Escuela de Egreso Año de egreso
Postgrado	Escuela de Egreso Año de egreso
Institución donde labora	Años como docente
Nombre de los cursos de Matemáticas que ha impartido	
Sexo Masculino Femenino	Año de Nacimiento
Estudió el concepto de función en: Primaria Secundaria Bachillerato Profesional	Grado:
Otros_____________________________	

Primera Etapa: Recolección del contenido

En las preguntas 1 y 2 se utiliza el método de asociación libre mediante el cual los docentes escriben las palabras que evocan al pensar en la palabra función. Sus respuestas proporcionan una manera de sondear el nodo estructural latente de las RS.

Pregunta 1:

¿Cuáles son las palabras o expresiones que vienen a su mente al pensar en (el concepto) la palabra Función? (Función, ¿qué es?)

Escriba al menos cuatro y máximo diez.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Pregunta 2:

¿Cuáles son las palabras o expresiones que vienen a su mente al pensar en la definición de Función que usted enseña? (Función, ¿por qué?)

Escriba al menos cuatro y máximo diez.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Segunda Etapa: Búsqueda del contenido y del sistema central

Es un método para jerarquizar la información, de una lista de 20 proposiciones se piden las cinco más importantes, luego las cinco más alejadas del concepto. Pone en evidencia los elementos centrales de la representación.

La lista de palabras se eligió de los libros de texto que los profesores utilizan de forma regular para la preparación de sus clases. En el caso de la palabra “variabilidad”, aún cuando no se menciona en los libros de texto, se incluyó, pues consideramos importante su relación con otros significados asociados, como son:

“variable” – “variación” – “variabilidad”, para la comprensión del concepto en estudio (Camacho, 2007).

Pregunta 3:

Lea atentamente las siguientes expresiones:

1. Ley de Causa - efecto	11. Fórmula
2. Modelo matemático	12. Dependencia de variables
3. Variabilidad	13. Gráfica
4. Ley	14. Variable independiente
5. Dependencia entre cantidades	15. Dominio
6. Ecuación	16. Inferencia
7. Regla de correspondencia	17. Expresión analítica
8. Contradominio	18. Variable dependiente
9. Tabla de valores	19. Variación
10. Predicción	20. Otras ________________________

a) Desde su punto de vista, ¿Cuáles son las 5 expresiones que más se ajustan al concepto de función? Escríbalas en orden de importancia.

+importante ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ -importante

b) Desde su punto de vista, ¿Cuáles son aquellas expresiones que no tienen nada que ver con el concepto de función?

+alejada ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ -alejada

Para verificar la información del sistema de representación

El análisis nos llevará a conocer el grado en que los conocimientos están arraigados.

Proposición 4:

De la lista de proposiciones dada, marque la casilla que corresponda a las siguientes oraciones:

1. Totalmente de acuerdo
2. Parcialmente de acuerdo
3. Ni de acuerdo ni en desacuerdo
4. Parcialmente en desacuerdo
5. Totalmente en desacuerdo

Proposiciones	**Totalmente de acuerdo**	**Parcialmente de acuerdo**	**Ni de acuerdo ni en desacuerdo**	**Parcialmente en desacuerdo**	**Totalmente en desacuerdo**
Una recta vertical interseca la gráfica de una función más de una vez					
Una función es un modelo matemático					
Si $f(s) = f(t)$, entonces $s = t$					
Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra					
Un símbolo x que representa un número en el dominio de f se llama variable independiente.					
Existen únicamente tres formas de representar una función: gráfica, numérica, fórmula					
La función de una cantidad variable es una expresión analítica					
Una función es una regla de correspondencia					
Una variable continua es aquella que toma todos los valores reales en su recorrido					
En una función se da una relación de causa – efecto entre sus variables					
El conjunto de valores correspondientes a la variable dependiente se le llama el *contradominio o rango de la función*.					
Una variación es el cambio de posición o estado de una cantidad					
Las funciones expresan leyes que generalizan cualquier expresión algebraica					
En el contradominio se mueven los valores de y a partir del movimiento de las x					
Las variables pueden representar entidades físicas reales					
Las variables son asignadas generalmente por las primeras literales del alfabeto					

Identificación de lazos y puesta en evidencia de los elementos centrales

Nos lleva a la organización interna y ensamble de los elementos de la representación. Muestra, además, un método de asociación libre.

Proposición 5: Lea atentamente la siguiente lista:

1. Inferencia
2. Algebraico
3. Fórmula
4. Aproximación
5. Variabilidad
6. Ecuación
7. Modelo
8. Patrón
9. Idealización
10. Predicción
11. Dependencia
12. Interpretar
13. Representación
14. Tabla de valores
15. Ley de causa efecto
16. Modelo matemático
17. Gráfica
18. Regla de correspondencia
19. Predicción
20. Conclusiones
21. Otras ________________________

Después de haber leído atentamente, construya diez cadenas asociativas acerca del término función.

Cada cadena inicia con el término función y debe tener cuatro términos incluyendo el de función. Cada término puede ser utilizado en varias cadenas.

1. Función→_________________→__________________→____________________
2. Función→_________________→__________________→____________________
3. Función→_________________→__________________→____________________
4. Función→_________________→__________________→____________________
5. Función→_________________→__________________→____________________
6. Función→_________________→__________________→____________________
7. Función→_________________→__________________→____________________
8. Función→_________________→__________________→____________________
9. Función→_________________→__________________→____________________
10. Función→_________________→__________________→____________________

Tercera Etapa: Verificación de la centralidad

Es un método indirecto para encontrar una relación de similitud entre sus partes.

Proposición 6:

Lea la siguiente lista de palabras y responda los incisos de abajo.

1. Algebraico
2. Cantidad
3. Numérica
4. Aproximación
5. Variabilidad
6. Ecuación
7. Modelo
8. Variable independiente
9. Idealización
10. Predicción
11. Ordenada
12. Interpretar
13. Representación
14. Algebraica
15. Números reales
16. Dependencia entre variables
17. Gráfica
18. Dependencia
19. Curva
20. Imagen
21. Fórmula
22. Variación
23. Verbal
24. Origen
25. Variable dependiente
26. Conclusiones
27. Patrón
28. Correspondencia
29. Movimiento
30. Dominio
31. Otras _________________________

a) En la lista anterior, subraye (marque) las palabras que no comprenda.

b) Haga grupos con palabras que según usted posean algo en común (que se relacionen). Incluya entre dos y seis por categoría.

Una palabra puede ser utilizada al mismo tiempo en diferentes grupos.

c) A cada categoría escríbale un título (de dos o tres palabras máximo por título)

Primer grupo		**Segundo grupo**	
Número	Palabra	Número	Palabra
______	______________________	______	______________________
______	______________________	______	______________________
______	______________________	______	______________________
______	______________________	______	______________________
______	______________________	______	______________________
______	______________________	______	______________________
Título:	______________________	Título:	______________________
	______________________		______________________
Tercer grupo		**Cuarto grupo**	
Número	Palabra	Número	Palabra
______	______________________	______	______________________
______	______________________	______	______________________
______	______________________	______	______________________
______	______________________	______	______________________
______	______________________	______	______________________
______	______________________	______	______________________
Título:	______________________	Título:	______________________
	______________________		______________________

La proposición 6, permite mostrar la organización del contenido de una representación en un sistema de categorías mediante grupos de palabras. Es un método indirecto para encontrar una relación de similitud entre sus partes.

Las proposiciones 5 y 6 proporcionan los procesos de esquematización de la red y una relación de similitud.

Las proposiciones3, 5 y 6 conducen a la identificación del nodo central y los elementos periféricos.

Sección 2. Construcción del cuestionario y tratamiento de datos

Para la primera parte, nuestra intención fue conocer las concepciones que los docentes del área de matemáticas presentan sobre el concepto de función, por lo que consideramos conveniente permitir que ellos escribieran "espontáneamente" las palabras que evocan al pensar en este concepto, para contar así con una serie de ideas del "sentido común" (Dollo, 2001).

Al requerir una jeraquización de proposiciones relativas al concepto, elegimos aquellas que son presentadas en diversos libros de texto como relacionadas con el tema, y tomando en cuenta que nos llevarán explícitamente a reconocerlas en el esquema de las (RS).

Con el fin de verificar la información que se posee sobre el concepto, se obtuvieron una serie de proposiciones básicas sobre el tema, a las cuales los docentes deberán responder de acuerdo o en desacuerdo, algunas de ellas mostraban palabras cambiadas e intercaladas con las demás, lo que nos permitirá conocer el grado en que el conocimiento está presente.

Para llegar a un nivel de esquematización, se crearon las cadenas asociativas y los grupos de palabras, esperando encontrar en ellas regularidad y obtener el nodo central y sus elementos periféricos.

4.2.3 El método de tratamiento de datos

Existen diversos programas como son: Atlas.ti 5, Nud Ist 6 y MAXqda 2, Aquad 5, Etnograph 5, Win max pro. Para el estudio utilizamos el Software QSR Nvivo 7 *[1] por ser una herramienta cuyo objetivo es facilitar el análisis cualitativo de datos textuales en proyectos de investigación, mediante un programa altamente avanzado y de los más utilizados a nivel mundial.

[1] QSR International Pty. Ltd, provee este y otros programas para análisis de datos. Nvivo 7 es la última versión del programa NUD*IST (Non-numerical Unstructured Data * Indexing Searching and Theorizing: Datos No estructurados y no numéricos * Indexar, registrar y teorizar).

Esta última, es una herramienta cuyo objetivo es facilitar el análisis cualitativo de datos textuales, mediante un programa altamente avanzado. Posee una interfase simple y fácil de usar.

Mediante este programa es posible gestionar tanto datos como texto enriquecido, usando negrita, cursiva, colores y otros formatos; con amplia habilidad para editar, visualizar códigos y vincular documentos tal y como son creados, codificados, filtrados, manejados y registrados, con unidades de análisis no fijas. Incluye:

- Manejo de documentos y codificación.
- Manejo de datos.
- Modelado (representación gráfica).
- Resúmenes, informes y exportación de los mismos.

Con Nvivo 7 es posible:

- ➢ Editar texto del documento sin desorganizar la decodificación.
- ➢ Utilizar diversos documentos (entrevistas, cuestionarios, video, audio, fotos) para un mismo proyecto.
- ➢ Relacionar anotaciones, archivos externos y páginas web.
- ➢ Relacionar "memos" editables y codificables.
- ➢ Establecer vínculos a otros documentos, fotos, audio o video y hacer anotaciones a estos (esta información debe ser codificada para poder introducirla al sistema.
- ➢ Visualizar la codificación mediante nodos para depurarla con acceso al contexto.
- ➢ Organizar y describir documentos y nodos automáticamente.
- ➢ Buscar datos o palabras clave auto codificados.
- ➢ Cruzar algunos nodos, atributos y esquemas textuales.
- ➢ Representar gráficamente las ideas y enlazar los datos.
- ➢ Realizar búsqueda avanzada por atributos (edad, sexo, materia, etc.).
- ➢ Además de "fusionar" varios proyectos que contengan la misma estructura, los conjuntos de documentos de cada proyecto se

combinan en un solo grupo, y los sistemas de indización se combinan en uno solo.

Los documentos son escritos en un procesador de texto (Word) e importados a Nvivo 7, dentro del cual se modifican y/o codifican de acuerdo al criterio del investigador.

Todos los datos y búsquedas pueden ser guardados, editados o codificados en nuevos nodos o carpetas.

Con el Nvivo 7 se puede dividir la información textual recopilada en la investigación, asignar categorías estableciendo relaciones, realizar búsquedas textuales, construir matrices y tablas de frecuencias con la información necesaria.

Sección 3. Modalidades de la encuesta y población estudiada:

4.2.4 Análisis de la población

Se aplicó el cuestionario a cinco docentes del Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez y a ocho docentes del Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Chihuahua II.

Característica	Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez	Instituto Tecnológico de Chihuahua II
Años laborando en docencia	0-1 2 pers 11-15 2 pers 16-20 1 pers	16-20 3 21+ 5
Sexo	Masculino 3 Femenino 2	Masculino 7 Femenino 1
Cursos de matemáticas que ha impartido	Mate I 4 Mate II 3 Mate III 4 Mate VI 1 Mate para L.C. 3	Mate I 4 Mate II 2 MateIII 5 Mate IV 2 MateV 1 Análisis Numérico 2 Mate para L.I. 3 Mate Arquitect. 3 Métodos Numéricos 1
Estudió el concepto de función en :	Secundaria 2 Bachillerato 3 Profesional 3	Secundaria Bachillerato 5 Profesional 5

Grado Académico	Ingeniería 4 Maestría Admón. 1 Doctorado	Ingeniería 5 Maestría 2 Doctorado M.E. 1
Edad del profesor en años	25-30 1 31-35 1 36-40 2 41-45 1 46+	25-30 31-35 36-40 41-45 3 46+ 5

4.2.5 Análisis de las respuestas:

Ejemplos de respuestas. R1 significa respuesta a la pregunta 1, R2 respuesta a la pregunta 2, y así sucesivamente.

Pregunta	Respuesta
P1: ¿Cuáles son las palabras o expresiones que vienen a su mente al pensar en (el concepto) la palabra Función? (Función, ¿qué es?)	**R1.** - Circo, teatro, fiesta (palabras que no se relacionan con función matemática*)*. - De teatro, de box, de cine, (aún cuando en la presentación del cuestionario se menciona función matemática). - Correspondencia - Conjuntos - Dependencia - Dominio y rango - Ejes coordenados - Expresión - Gráfica - Regla de asignación - Relación - Representación trabajo - Valor - Variables dependientes - Variables independientes En general se obtuvieron entre cinco y siete palabras por docente a P1.
P2: ¿Cuáles son las palabras o expresiones que vienen a su mente al pensar en la definición de Función que usted enseña? (Función, ¿por qué?)	**R2:** - Acción - Conjuntos - Contradominio - Correspondencia - Dependencia - Dominio - Gráfica - Línea vertical - Números reales - Rango - Regla de asignación - Relación - Variable dependiente - Variable independiente Respondieron entre 3 y 7 palabras de las 10 posibles.
P3: De una lista de expresiones: a) Las expresiones que más se	**R3:** a) Dependencia de variables, regla de correspondencia, variable independiente, contradominio,

ajusten al concepto de función. b) Las expresiones más alejadas del concepto de función.	dominio, gráfica, predicción, variable dependiente, ley de causa – efecto, tabla de valores, variabilidad. b) Ley, inferencia, fórmula, dominio, expresión analítica, ley de causa – efecto, variación, variabilidad, tabla de valores, modelo matemático, expresión analítica, dominio, dependencia entre cantidades. El 10 % menciona que todas poseen algo en común

R4: Los porcentajes se muestran en la siguiente tabla. Los números en **negritas** representan el porcentaje de respuesta correcto a cada pregunta

Proposiciones	Totalmente de acuerdo	Parcialmente de acuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	Parcialmente en desacuerdo	Totalmente en desacuerdo
Una recta vertical interseca la gráfica de una función más de una vez		20	20		**60%**
Una función es un modelo matemático	**40%**		40		
Si *f(s)* = *f(t)*, entonces *s* = *t*	40	**20%**	20		
Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra	**60%**	20	20		
Un símbolo *x* que representa un número en el dominio de *f* se llama variable independiente.	**80%**			20	
Existen únicamente tres formas de representar una función: gráfica, numérica, fórmula		**20%**		20	60
La función de una cantidad variable es una expresión analítica	**0%**		80		
Una función es una regla de correspondencia	**80%**				20
Una variable continua es aquella que toma todos los valores reales en su recorrido	**40%**	20	40		
En una función se da una relación de causa – efecto entre sus variables	40	20	20	**20%**	
El conjunto de valores correspondientes a la variable dependiente se le llama el *contradominio o rango de la función*.	**80%**	20			
Una variación es el cambio de posición o estado de una cantidad	**40%**	20	20	20	
Las funciones expresan leyes que generalizan cualquier expresión algebraica	**20%**		40	40	
En el contradominio se mueven los valores de *y* a partir del movimiento de las *x*	**60%**			20	
Las variables pueden representar entidades físicas reales	**60%**	40			
Las variables son asignadas generalmente por las primeras literales del alfabeto		16.7	16.7	16.6	**50%**

Pregunta	Respuesta
P5: Construir cadenas asociativas con las expresiones dadas.	**R5:** La expresión más utilizada fue Tabla de valores seguida por modelo y dependencia, luego: - gráfica - representación - predicción - ley causa – efecto - variabilidad - modelo matemático - interpretar - ecuación - aproximación - algebraico - patrón - regla de correspondencia - fórmula - conclusiones - inferencia Número de palabras utilizadas (de 21 totales) fue entre 13 y 18 por docente. El 90% realizaron las 10 cadenas asociativas.
P6: Formar grupos y nombrarlos.	**R6:** Expresiones utilizadas: entre 14 y 20. Palabras que no comprende: - idealización y verbal - algebraico, numérica, modelo, idealización, ordenada, interpretar, curva, imagen, verbal, origen. - Idealización Se observó dificultad en nombrar los grupos formados.

4.2.6 Resultados de la aplicación del cuestionario a docentes

Primera etapa: recolección del contenido

Para las dos primeras preguntas, los docentes respondieron mediante asociación libre a partir de un término inductor: función. Dando entre tres y siete palabras del total de diez que era posible escribir. Las más utilizadas fueron: dominio, contradominio, dependencia, correspondencia, expresión y conjuntos.

Segunda Etapa: Búsqueda del contenido y del sistema central

Comprueba la existencia de una jerarquización colectiva. Pone en evidencia los elementos centrales de la representación.

Cinco más importantes o cercanas del concepto	**Cinco más alejadas del concepto de función**
Ley de causa-efecto, gráfica, interpretar, fórmula, modelo, modelo matemático, ley, idealización.	Numérica, números reales, ordenada, origen. El 10% respondió que todas las palabras tienen que ver con el concepto.

Para verificar la información del sistema de representación:

Proposición 4: Fundamentada en conceptos matemáticos teóricos, los resultados muestran un dominio del tema entre un 45% y 60%.

Identificación de lazos y puesta en evidencia de los elementos centrales

Proposición 5: mediante asociación libre deben construirse diez cadenas de cuatro términos cada una iniciando con el de función. La mayoría de los encuestados construyó las diez cadenas completas, de un total de 21 palabras mostradas, el promedio de utilización es de 13 a 18 palabras. Las más utilizadas fueron “Tabla de valores” con frecuencia de 26 por todos los sujetos encuestados, seguido por modelo, dependencia, representación y gráfica.

Ejemplos:

Todas las cadenas inician con el término función.

Idealización →	Fórmula→	Predicción
Tabla de valores →	Gráfica →	Representación
Dependencia →	Regla de correspondencia →	Tabla de valores
Dependencia→	Predicción→	Inferencia
Variable→	Variación→	Variabilidad
Representación→	Gráfica→	Tabla de valores
Modelo matemático→	Predicción→	Variabilidad
Variabilidad→	Algebraica→	Ecuación
Regla de correspondencia→	Modelo matemático→	Gráfica
Inferencia→	Interpretar→	Predicción
Variabilidad→	Aproximación→	Representación
Representación→	Tabla de valores	
Gráfica →	Variabilidad→	Ley causa - efecto
Modelo matemático→	Variabilidad→	Predicción
Tabla de valores→	Gráfica→	Predicción
Modelo matemático→	Dependencia→	Variables
Regla de correspondencia→	Dependencia→	Variabilidad

Tercera Etapa: Verificación de la centralidad

La proposición 6, permite mostrar la organización del contenido de una representación en un sistema de categorías mediante grupos de palabras:

Número promedio de palabras utilizadas 14 a 20.

El 76% completaron el número total de cadenas con los términos sugeridos.

El 61% nombró los grupos, el resto no lo hizo.

Palabras que no comprende: Sujeto 1: “idealización” y “verbal”. Sujeto 2: Subrayó “algebraico”, “numérica”, “modelo”, “idealización”,”ordenada”,” interpretar”, “curva”, “imagen”, “verbal”, “origen” (sin embargo, tres de ellas las utilizó en la respuesta cinco para construir cadenas). Sujeto 3: “idealización”.

Se percibe dificultad para nombrar los grupos y/o seguir las instrucciones.

Ejemplos de categorías:

Título: <u>Derivando</u> Curva Aproximación Movimiento	**Título: <u>Representación gráfica de una función</u>** Interpretar Representación Gráfica Ordenada Origen Curva	**Título: <u>Relación</u>** Representación – idealización Imagen – dominio Movimiento - curva
Título: <u>Pronósticos</u> Aproximación Variabilidad Idealización Predicción Variación Conclusiones	**Título: (sin título)** Modelo Patrón Ecuación	**Título: <u>Control</u>** Dominio – imagen Verbal – imagen Cantidad – conclusiones

Título: Ecuación Gráfica Curva Origen dependencia	**Título: <u>Solución gráfica</u>** Algebraico Algebraica Gráfica Curva Imagen dominio	**Título: <u>Recta numérica</u>** Números reales Origen
Título: <u>Predicción</u> Modelo Patrón Tabla	**Título: <u>Variación</u>** Variable Variación Variabilidad	**Título: <u>Una función simple</u>** Fórmula Dependencia Imagen Variable dependiente Variable independiente Dominio

Las conclusiones sobre los resultados obtenidos se pueden ver al final del Análisis Preliminar, en este mismo capítulo.

Sección 4. Cuestionario a estudiantes

4.2.7 El por qué del cuestionario

De acuerdo a Borello (2007), el maestro ha forjado sus concepciones en un determinado contexto que se caracteriza por una multiplicidad de elementos entre los cuales el ámbito social (sistema escolar, familia y otras agrupaciones) que contribuye en la formación de sus concepciones y en general de su postura frente de la realidad que lo rodea de la que hacen parte la escuela, los alumnos y los conocimientos que quiere transmitir, por ello, al tomar decisiones en el aula, se observa como las concepciones del profesor actúan no sólo en la actividad, sino que influyen de gran manera sobre las concepciones de sus estudiantes. Por su parte, Farfán (1990, p. 4), menciona: "*Las relaciones que él (el alumno) tiene con los objetos matemáticos están condicionadas por las representaciones que se forja más globalmente de la actividad matemática, de una u otra de las maneras de aprender las matemáticas, de su posición en relación a las matemáticas y más globalmente, incluso de su status de alumno. La forma en la que vive una situación de enseñanza y sus producciones matemáticas en ese contexto son condicionadas por las características de la costumbre didáctica*". Es de esperar, entonces, que sus representaciones estén influenciadas por el medio en que se desenvuelve (no puramente escolar). Por esta razón, en nuestro estudio, se consideró necesario el estudiar las concepciones de los estudiantes respecto al concepto de función, y complementar nuestro análisis cognitivo del mismo.

4.2.8 Presentación del tipo de preguntas elegidas

Al inicio del cuestionario se preguntan datos generales de los estudiantes, como son: escuela donde estudió el bachillerato, año de egreso, carrera y semestre actual, edad en años cumplidos, sexo, nombre de los cursos de matemáticas que ha tomado, y si recuerda haber estudiado el concepto de función matemática con anterioridad.

Primera Etapa: Recolección del contenido

Para la pregunta 1 se usa un método de asociación libre, mediante el cual los estudiantes escriben las palabras que evocan al pensar en la palabra función. Esta pregunta es idéntica a la presenta en el cuestionario de los docentes.

Pregunta 1: ¿Cuáles son las palabras o expresiones que vienen a su mente al pensar en (el concepto) la palabra Función? (Función, ¿qué es?)

Escriba al menos cuatro y máximo diez.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Segunda Etapa: Búsqueda del contenido y del sistema central

Es un método para jerarquizar la información, de una lista de 20 proposiciones se piden las cinco más importantes, luego las cinco más alejadas del concepto. La lista de palabras se eligió de los libros de texto que los profesores utilizan de forma regular para la preparación de sus clases. Se incluyó "variabilidad", pues es parte de la cadena asociativa y eje central de nuestro estudio: *"variable" – "variación" – "variabilidad"*.

A diferencia del cuestionario aplicado a los profesores, en esta pregunta se incluyó lo siguiente: *En la lista anterior, ¿existe alguna o algunas palabras que no comprenda?, ¿Cuáles?* Pues consideramos que es importante el saber si todas las palabras utilizadas en la encuesta son entendidas por los encuestados, ya que esto nos permitirá obtener información acerca de ello.

Pregunta 2: Lea atentamente las siguientes expresiones:

1. Ley de Causa - efecto	11. Fórmula
2. Modelo matemático	12. Dependencia de variables
3. Variabilidad	13. Gráfica
4. Ley	14. Variable independiente
5. Dependencia entre cantidades	15. Dominio
6. Ecuación	16. Inferencia
7. Regla de correspondencia	17. Expresión analítica
8. Contradominio	18. Variable dependiente
9. Tabla de valores	19. Variación
10. Predicción	20. Otras ________________________

a) En la lista anterior, ¿existe alguna o algunas palabras que no comprenda?, ¿Cuáles? ____

b) Desde su punto de vista, ¿Cuáles son las 5 que más se ajustan al concepto de función? Escríbalas en orden de importancia.

+importante ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ -importante

b) Desde su punto de vista, ¿Cuáles son aquellas que no tienen nada que ver con el concepto de función?

+alejada ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ -alejada

Para verificar la información del sistema de representación

Identificación de lazos y puesta en evidencia de los elementos centrales

Nos lleva a la organización interna y ensamble de los elementos de la representación. Muestra, además, un método de asociación libre. Similar a la pregunta hecha a los profesores, la única diferencia es el número de cadenas pedidas.

Proposición 3: Lea atentamente la siguiente lista:

1. Inferencia	12. Interpretar
2. Algebraico	13. Representación
3. Fórmula	14. Tabla de valores
4. Aproximación	15. Ley de causa efecto
5. Variabilidad	16. Modelo matemático
6. Ecuación	17. Gráfica
7. Modelo	18. Regla de correspondencia
8. Patrón	19. Predicción
9. Idealización	20. Conclusiones
10. Predicción	21. Otras ______________________
11. Dependencia	

Después de haber leído atentamente, construya cinco cadenas asociativas acerca del término función.

Cada cadena inicia con el término función y debe tener cuatro términos incluyendo el de función. Cada término puede ser utilizado en varias cadenas.

Función→_________________→__________________→_____________

Función→_________________→__________________→_____________

Función→_________________→__________________→_____________

Función→_________________→__________________→_____________

Función→________________→_________________→____________

Tercera Etapa: Análisis de las correspondencias entre los diversos tipos de representaciones.

En algunas ocasiones la enseñanza no presenta los resultados esperados, algunas ideas erróneas son observadas en el transcurso de la clase y resulta difícil erradicarlas. Las causas pueden ser muy variadas: lo extenso de los programas, lo numeroso de los grupos, falta de interés por los conceptos enseñados, poca motivación por parte del profesor, las concepciones que poseen los alumnos. Estas “concepciones” poseen cierta estabilidad y es necesario tenerlas en cuenta, pues de lo contrario se mantienen y el saber propuesto se desliza y no “impregna” a los estudiantes (Giordan, 1988).

Como se menciona en el capítulo anterior, una de las funciones de las (RS) es la de guiar los comportamientos y las prácticas, pues reflejan la naturaleza de las reglas y los vínculos sociales en los grupos. El conocer esas concepciones nos permite adaptar la enseñanza, es decir, proponer alternativas dependiendo del grupo a que esté dirigida la clase, no es suficiente con presentar los conceptos y esperar que sean aceptados e integrados por todos. Un estudiante se apoya sobre “ideas” que están disponibles para él, esto es, sus concepciones, originadas por experiencias anteriores, su interpretación e interacción con el medio que le rodea. El aprender, entonces, no es un proceso de transmisión, ni de acumular concepciones, sino de transformación y evolución de estas con el fin de estructurarlas de modo que presenten algún significado o aplicación.

Dado que se ha observado que los estudiantes poseen diversas concepciones o modos de representación de un objeto matemático y, presentan serias dificultades en conectar esos contextos, e incluso, los perciben como modos separados (Font, 2000). En esta etapa se presentan dos ejercicios en los cuales se pide a los estudiantes que describan un evento en particular, y luego, que lo grafiquen, como una forma de verificar la existencia de alguna conexión entre ellos.

Proposición 4: Usted pone algunos cubos de hielo en un vaso, lo llena con agua fría y lo deja sobre la mesa.

a) Describa con palabras cómo cambia la temperatura del agua a medida que pasa el tiempo.

b) A continuación, trace una gráfica aproximada de la temperatura del agua como función del tiempo transcurrido.

Pregunta 5

En un círculo el radio es variable, es decir, el radio aumenta y disminuye. ¿Qué otras cantidades cambian?

Describa gráficamente la variación del problema anterior, de tal forma que sea posible identificar las variables y las constantes. (Es necesario definir las literales *x, y*, o bien *a, b*, etc.)

Verificación de la centralidad

En este caso se utilizó una pregunta directa que nos permitiese indagar si los conceptos descritos en las primeras preguntas pertenecían al sistema central o al periférico.

Pregunta 6.

¿Cuál es la definición del concepto de función matemática?

4.2.9 Resultados de la aplicación del cuestionario a estudiantes.

Pregunta 1: Las palabras más utilizadas fueron: dependencia, ecuación, derivada, gráfica, ecuación, matemática, variables, *dy/dx=*, *f(x)=* , integral.

Respuestas a Pregunta 2:

Palabras que no comprende	Cinco más importantes o cercanas del concepto	Cinco más alejadas del concepto de función
Inferencia, regla de correspondencia , ley de causa – efecto, variabilidad	Modelo matemático, Ecuación, Dependencia de variables, Variable dependiente, Variable independiente.	Ley de causa efecto, Ley, Regla de correspondencia, Predicción, Inferencia.

Respuestas a Pregunta 3:

En la elaboración de cadenas, las palabras más utilizadas fueron: ecuación, gráfica, modelo, representación, dependencia, modelo matemático, tabla de valores.

Algunos ejemplos de cadenas asociativas:

ecuación→	Variación →	Predicción
Fórmula →	Dependencia →	Interpretar
Modelo	Variabilidad →	Tabla de valores
Modelo matemático→	Ecuación →	Dependencia
Representación →	Patrón →	Ecuación
Representación →	Gráfica →	dependiente
Modelo →	Patrón →	Gráfica
Modelo →	Fórmula →	Ecuación
Gráfica →	Representa →	Tabla valor
Variabilidad →	Inferencia →	Conclusiones
Modelo matemático →	Aproximación →	Ecuación
Modelo →	Variabilidad →	Aproximación

Respuestas a Pregunta 4:

Se observa muy poca conexión entre la respuesta con palabras y la respuesta gráfica, en general no explican en forma correcta el fenómeno, y en la mayoría de los casos la gráfica no corresponde a la explicación (aún cuando esta no sea correcta). Existe una desvinculación entre ambas representaciones.

Ejemplos de respuestas:

Respuesta	**Gráfica**
Se pondrá más fría, luego llega a tal punto en el cual empezará a descender.	Cruzó la línea de cero grados
Se va enfriando llegando a un límite donde empieza el proceso inverso hasta estabilizarse con el ambiente.	Frío – tiempo
Disminuye hasta que alcanzan los dos la misma temperatura.	No incluye gráfica
El agua tiene su punto de congelación a cero grados centígrados (menos de cero grados permanece en congelación), al poner los cubos de hielo, estos tienen una Temp., de 0°C y el agua mayor de 0°o aunque está fría, por lo cual hay una transferencia de energía (calor) y este se va del al agua fría al hielo (caliente a frío) hasta que permanezcan en equilibrio (los dos objetos tengan la misma Temp.). Hay que recordar que para un cambio de fase (hielo-agua) se utiliza una constante diferente.	No supo representarlo, presenta una línea descendente respecto al tiempo y temp.
Conforme el tiempo pasa, el agua llega al equilibrio térmico con el hielo, después empieza a calentar por la temperatura del ambiente.	No incluye gráfica
La temperatura de ambos cuerpos(agua – hielo) tienden a un equilibrio térmico, lo cual implica que para que esto suceda el hielo debe aumentar de temp. Mientras que el agua baja su temp. A medida que transcurre el tiempo, el agua tiende a decrecer en su temp.	Presenta recta descendente respecto del tiempo y la temp. No supo representarlo.
El agua se encuentra a temp. Ambiente y los hielos a – C, cuando se coloca el hielo en el agua, comenzará a producirse el equilibrio térmico entre ambas temp. El hielo gana calor (energía entre sus moléculas, y el agua pierde, así hasta que se encuentren en equilibrio.	Presenta una línea descendente respecto a la Temp.. y conforme avanza el tiempo.
d f(T) / dt	La Temp., aumenta conforme aumenta el tiempo. De manera exponencial. (No inicia en cero)

Respuestas a Pregunta 5.

La mayoría respondió con área, perímetro, diámetro. Al igual que en el caso anterior las gráficas están desconectadas de las respuestas, cerca del 20% de los encuestados no realizó la gráfica.

Respuesta	**Gráfica**
Área, perímetro.	círculos
La circunferencia	Sobre los ejes coordenados dos círculos
El área, volumen.	Definió x como área e y como radio trazando una línea recta
Área, perímetro	Dos círculos marca x = radio, y = área
Área, circunferencia, componentes del radio.	Círculo en ejes coordenado x, y. Incluye fórmula del área e intenta sustituir el radio en componentes x, y en senos y cosenos.
Diámetro, perímetro, área.	Marca tres gráficas, una para cada variable, todas respecto del radio.
Cambia el área, el	Marca tres gráficas, una para cada variable, todas respecto del radio

perímetro y diámetro.	
Área, perímetro, diámetro.	Recta de 45º en ejes coordenados x= radio, y= área.
El área y su perímetro.	Gráfica 1: área aumenta respecto al radio. (curva) Gráfica 2: Recta ascendente para perímetro.
Área y diámetro.	Sin gráfica.
Área, diámetro y perímetro.	Dos círculos separados y muestra la fórmula del –área, iguala con y *y* deriva *dy/dx*.

Pregunta 6. ¿Cuál es la definición del concepto de función matemática?

Ejemplos de respuestas:

Representación mediante variables del comportamiento de un cuerpo.
Una variable y, depende de la variable x.
Es una ecuación que actúa sobre el tiempo y se aplica en un problema cotidiano o no cotidiano.
Es una expresión en la cual se plantea una situación ya sea real o imaginaria para llegar a un resultado óptimo el cual resuelve una o más incógnitas.
Es la dependencia de variables, cuando una variable está en función de otra variable.
Cambio o variación de algún fenómeno dependiente a alguna constante independiente. Es la dependencia de una variable a otra.
Es el comportamiento de una función con respecto de una variable determinada.
Tenemos dos conjuntos, x e y; una función asigna exactamente un valor del conjunto x al conjunto y.
Es un modelo matemático que trata de aproximarse a la representación de un fenómeno de forma idealizada. Una función y (variable dependiente), está en función de x, z, etc. (variables independientes).
Es la relación entre ciertas variables y constantes, puede variar con respecto al tiempo, etc.
Una función, la cual de forma matemática, por medio de una ecuación, expresa gráficamente la relación entre variables.
Es la ecuación en la que un término depende del otro.
Igualdad, relación entre variables que cumple la ley de correspondencia, se establece mediante un modelo que describe la variación de un fenómeno.
Una función es una expresión matemática que representa una dependencia entre variables o bien una relación entre las mismas.
Es un modelo matemático con variables dependientes e independientes que por medio de la representación de una gráfica y su interpretación, predice el comportamiento de cierto suceso.
Función: es la representación de la variación de un valor, de manera que para cada valor de una variable le corresponda uno o más valores de la variable (variables) dependiente

Observamos que definen la función como una correspondencia de variables que, de acuerdo a (Ruiz, 1998), se encuentra en la categoría CE6 *“Correspondencia arbitraria: aplicación”,* la cual nace en el Siglo XVIII con los trabajos de Euler sobre funciones “arbitrarias” y el Siglo XIX con los trabajos de Fourier, Cauchy, etc., la cual es expresada como *f(x)* o *y*, noción que perdura hasta nuestros días.

4.3 Análisis Epistemológico

4.3.1 Etapas de desarrollo del concepto de función.

El análisis epistemológico del concepto ha sido ampliamente tratado por diversos historiadores e investigadores dedicados a la enseñanza de la matemática, desde la propia perspectiva de su desarrollo histórico. De entre los historiadores, se reconocen los trabajos de: Brunschvicg (1922), Bachelard (1971), Boyer (1959, 1986), Youschevitch (1976), Crombie (1987), Grattan-Guinness (1984), D´hombres (1987), Diudonné (1989), etc. En cuanto a las aportaciones que han documentado investigadores en Matemática Educativa se tienen los de Sierpinska (1989a, 1989b, 1992), Ruiz (1998), Montiel (2005), Farfán y García (2005), entre otras.

La siguiente tabla condensa el análisis epistemológico que sobre el concepto de función realizó Ruiz (1998), en el cual se describen siete concepciones asociadas a su desarrollo histórico, tomando en cuenta los invariantes del grupo y las diversas representaciones simbólicas usadas para ello. Estas etapas son adoptadas para nuestro proyecto, a partir de que el análisis epistemológico que planteamos enseguida es sujeto a las mismas.

CE Concepción Epistemológica

Concepción	Situaciones	Invariantes	Representaciones	Momento histórico
CE1 Relación entre cantidades de magnitudes variables	Fenómenos naturales donde intervienen magnitudes físicas variables.	Relación causa – efecto.	Medidas en cantidades. Tablas	Matemática babilónica, griega.
CE2 Razón o proporción.	Magnitudes físicas en especial la Geometría y la Astronomía	Relación de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas.	En principio relaciones “retóricas”como el teorema de Thales, posteriormente expresiones de la forma a:b::c:d	Desde la matemática helénica hasta Oresme y Galileo.
CE3	Magnitudes físicas:	Proporcionalidad entre magnitudes.	Uso de términos como: formas, latitud,	Inició en las escuelas de

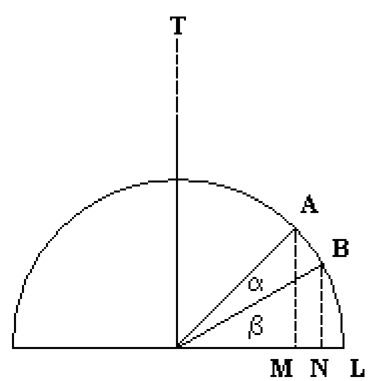
Gráfica (Versión sintética)	movimiento, luz, calor, etc., en un intento por representar en forma gráfica la variación y la dependencia entre magnitudes.	Relación de dependencia cualitativa.	longitud. Los gráficos adquirían su significado en forma global.	Oxford y París en el siglo XIV. Máximo representante Oresme.
CE4 Curva (Analítico – geométrica)	Al buscar un método de expresión de las relaciones numéricas entre determinadas propiedades de objetos geométricos, basados en el método de las coordenadas.	*Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva* (Descartes).	Ejes cartesianos, coordenadas, representación algebraica.	Surge de los trabajos de Descartes y Fermat siglos XVI y XVII. Y permanece en la matemática.
CE5 Expresión analítica.	Intra y extramatemáticas. Problemas de la Astronomía y la Física.	Identificación de las cantidades variables con las expresiones analíticas.	Aparición de los términos fluentes y fluxiones. Leibniz (1673) introduce el término función *f x*. Euler generaliza la serie: $f\,x = a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots a_nz^n+\ldots$	Comienza con los trabajos de Descartes y Fermat, seguido de los trabajos mecanicistas y geométricos de Newton y Leibniz (siglo XVII), y continua con Bernoulli, Lagrange y Euler (XVII – XVIII). Nace el Análisis Matemático.
CE6 Correspondencia arbitraria: Aplicación.	Conexiones entre física y matemáticas: cuerda vibrante). Se crea una noción más general de función.	Nace la noción de correspondencia arbitraria (que perdura hasta nuestros días)	Es expresada como *f(x)*, o *y*. A partir de la teoría de conjuntos y postura bourbakista como: f: X→Y, o bien *x*→*f(x)*. Continúan los gráficos cartesianos y aparecen los gráficos de Venn (con fines didácticos).	Siglo XVIII con los trabajos de Euler sobre funciones “arbitrarias” y siglo XIX con las series trigonométricas de Fourier, y trabajos de Cauchy, Dedekind, Lobachevsky, Riemman y Dirichlet.
CE7 Función como terna	Todas las de variación en cualquier dominio	F=(A,B,G) es una función ⇔G⊂AxB, x∈A,	Las anteriores en cuanto a notación y, en cuanto a gráficas	A partir de la estructuración sistémica y lógica

terna f=(F,X,Y)	científico, susceptibles de ser modelizadas funcionalmente.	y∈B tal que (x.y)∈G. R es una función ⇔x,y,z, (x,y) ∈R y (x,z) ∈R⇒y=z	los ejes cartesianos.	de la teoría de conjuntos (finales siglo XIX e inicio del XX)

La noción de función, como una correspondencia entre dos tipos de objetos es relativamente antigua. Para nuestro propósito, el concepto fue concebido en términos de la noción de variación, por N. Oresme, y utilizado en fenómenos físicos analizados en su época que involucraban movimiento, como son el calor, la distancia, la velocidad, etc. Para designar estas últimas, utilizó la palabra "cualidad" en tanto portadora de la propia noción de variación. Oresme representó a través de figuras que simulan estar en correspondencia las cualidades de las magnitudes involucradas, por ejemplo, tiempo contra velocidad, etc. En este sentido, las figuras contenían las propiedades intrínsecas de las cualidades, es decir, cumplen con la función de describir el cambio y la variación (Suárez, 2006). Oresme se encuentra entre las etapas CE2 y CE3, planteadas por Ruíz (1998).

Por su lado Galileo, haciendo estudios sobre la caída de los cuerpos, buscó relacionar los diferentes conceptos involucrados con la ayuda de leyes y fórmulas determinadas por sus observaciones. El caso de la expresión para la caída libre en la que el espacio se describe como: $\frac{1}{2}pt^2$ siendo *p* la fuerza inicial y *t* el tiempo, debió ser planteada por Galileo como una proporción homogénea entre las cantidades, como: $d_1 : t_1, d_2 : t_2,...$

En cuanto a la forma geométrica de describir la dependencia entre magnitudes, en Galileo (1613) se plantea la determinación del "seno verso" de un ángulo α, $senv\alpha = 1-(\cos\alpha)$ para ubicar la distancia aparente entre dos manchas del Sol, *A* y *B*.



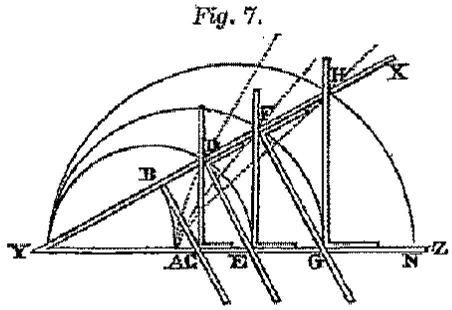
Desde la Tierra *T,* la distancia aparente entre las manchas es la correspondiente a $senv\alpha - senv\beta$, que en términos de las magnitudes horizontal y vertical, son ML–NL=MN.

Lo interesante de la figura de Galileo es la relación de dependencia que describe entre las magnitudes involucradas.

La concepción en la utilidad de la razón o proporción, en Oresme y Galileo, privilegió un “prototipo” entre magnitudes en variación (Ruiz, 1998)

No obstante, es en Descartes y Fermat donde aparece con más detalle una relación de dependencia entre magnitudes en variación. En el caso de Descartes, este realizó construcciones geométricas muy detalladas haciendo uso de instrumentos o regletas como el mostrado en la siguiente figura. En este caso las posiciones horizontales de las magnitudes AC, AE, AG corresponden con las posiciones BC, DE, FG. Esta posibilidad muestra además una relación de dependencia entre las magnitudes AC con CD, AE con EF, AG con GH, etc., las cuales conciernen, a su vez, con las curvas a las que pertenecen.

Fig. 7.



(Tomado de Le Geometrie, livre second, p.17).

Descartes hizo uso de un sinnúmero de ecuaciones para describir las curvas que estudió. Por ejemplo la ecuación de la parábola:

$$q = 3z - z^3,$$

que se describe en las páginas 75 y 76 de la obra citada.

Sin embargo, para Descartes, durante el siglo XVII, la naturaleza de los cuerpos consistía solamente en considerarlos a través de su extensión geométrica, es decir, en cuanto sus características de largo, ancho y profundo, sin concebirles la posibilidad de movimiento en el espacio geométrico cartesiano, lo cual, en sí mismo, fue una limitación que no permitió a los geómetras de esta época valorar el aspecto variacional de las magnitudes.

No obstante el vocablo "función" aparecería asociado a las curvas geométricas hacia 1694 en los trabajos de Leibniz:

> "(…) la abscisa, la ordenada, o el radio de curvatura de una curva en un punto M, es una función del punto M". (cit. por Youskevitech, 1976, p.129)

En Newton las funciones son ecuaciones asociadas a las fluxiones y las fluentes, en tanto semejantes a las expresadas por Descartes, Newton manipulaba la geometría cartesiana a partir de nociones más cercanas a las que actualmente se utilizan, como son las de: ordenada, abscisa, proporción entre cantidades, "relación entre cantidades fluentes", "relación entre fluxiones"; expresiones que se hacen infinitas (ver figuras). No obstante, sus concepciones de variable y variación son intrínsecas a las cantidades fluentes o en movimiento y las fluxiones, en la forma simbólica $x \to \dot{x}$, lo cual tiene que ver con su manera de concebir el espacio.

Etant donnée la Relation des Quantités Fluentes, trouver la Relation de leurs Fluxions.

SOLUTION.

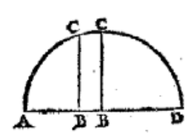
I. DISPOSEZ l'Equation par laquelle la Relation donnée eſt exprimée ſuivant les Dimenſions de l'une de ſes Quantités Flueutes x par exemple, & multipliez ſes Termes par une Progreſſion Arithmetique quelconque, & enſuite par $\frac{\dot{x}}{x}$ faites cette Opération ſéparément pour chacune des Quantités Fluentes; après quoi égalez à zero la ſomme de tous les produits, & vous aurez l'Equation cherchée.

II. EXEMPLE I. Si la Relation des Quantités Fluentes x & y eſt $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, diſpoſez d'abord les Termes ſuivant x, & enſuite ſuivant y, & multipliez-les comme vous voyez.

Multipliez	x^3	$-ax^2$	$+axy$	$-y^3$	$-y^3$	$+axy$	$\begin{matrix}-ax^2\\+x^3\end{matrix}$	
par	$\frac{3\dot{x}}{x}$	$\frac{2\dot{x}}{x}$	$\frac{\dot{x}}{x}$	0	$\frac{3\dot{y}}{y}$	$\frac{\dot{y}}{y}$	0	
Vous aurez	$3\dot{x}x^2$	$-2ax\dot{x}$	$+a\dot{x}y$	*	$-3\dot{y}y^2$	$+a\dot{y}x$	*	

la ſomme des produits eſt $3\dot{x}x^2 - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x$, qui étant égalée à zero, donne la Relation des Fluxions $\dot{x}$ & $\dot{y}$; car ſi vous donnez à volonté une valeur à x, l'Equation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, donnera la valeur de y; ce qui étant déterminé, l'on aura $\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$.

LIV. Pour mieux encore éclaircir ceci ſoit ACD un demi Cercle décrit ſur le Diametre AD & BC l'ordonnée. Faites $AB = x$, $BC = y$, $AD = a$, vous aurez $y = \sqrt{ax - xx} = \sqrt{ax} - \frac{x}{2a}\sqrt{ax} - \frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax} - \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$, &c. par la maniere donnée ci-deſſus. Donc BC ou l'ordonnée y deviendra la plus grande, lorſque $\sqrt{ax}$ ſurpaſſera le plus tous les Termes $\frac{x}{2a}\sqrt{ax} + \frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax} + \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$, &c. c'eſt-à-dire, lorſque $x = \frac{1}{2}a$, mais elle finira, lorſque $x = a$; car ſi vous faites x plus grand que a, la ſomme de tous les Termes $-\frac{x}{2a}\sqrt{ax} - \frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax} - \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$, &c. ſera infinie. Il y a de plus une autre limite, lorſque $x = 0$, à cauſe de l'impoſſibilité



Tomado de: La methode des fluxions, et des suites infinites.

En Euler, y Newton, se asume a la extensión cartesiana de los cuerpos geométricos la cualidad del movimiento, fijando el espacio como inmóvil e incorporando la noción de fuerza, así como la divisibilidad de los cuerpos al infinito. A partir de estas concepciones se comprenden mejor las definiciones de variable y función analítica planteadas por Euler en su obra "Introductio in analysi infinitorum", escrita en 1748. Euler propuso la notación *f x*. (Véase las definiciones en los siguientes párrafos tomados de la obra traducida al francés, p. 2):

> 2. *Une quantité variable eſt une quantité indéterminée, ou, ſi l'on veut, une quantité univerſelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*
>
> 3. *Une quantité variable devient déterminée, lorſqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*
>
> 4. *Une fonction de quantité variable eſt une expreſſion analytique compoſée, de quelque maniere que ce ſoit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités conſtantes.*

Si bien, Youschevitch (1976), identificó tres aspectos fundamentales en la definición del concepto de función euleriana, como son: "1. El crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos, 2. La creación del álgebra simbólico-literal, y 3. La extensión del concepto de número", este autor, dejó de lado la concepción del movimiento de los cuerpos en el espacio inmóvil, contemplado por Newton y Euler a los largo del siglo XVII que, como vimos, da significado a las propias definiciones de variable y variación expuestas por estos últimos.

Con las definiciones del concepto de función establecidas por Lagrange, en su caso, del todo algebraica, y como una "expresión de cálculo", en Cauchy (1827), estas se establecieron bajo una concepción de rigor, como:

> "Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre sí que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresamos ordinariamente estas diversas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma el nombre de *variable independiente:* y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable". (citado por Youschkevitch, 1976, p. 143)

Se abandona en estas definiciones la idea del análisis del movimiento de los cuerpos en el espacio extenso, lo cual tiene como consecuencia dejar de lado las nociones de variable y variación que, como eje central, organizaban al Cálculo Infinitesimal, el cual a su vez servía de herramienta en la solución de los problemas de observación física y astronómica.

Las definiciones posteriores a la de Cauchy, dadas por Dirichlet en 1837[2], Riemmann (1858), etc., fueron presentadas bajo un mismo intento de formalización del concepto, el cual tendría por límite la proposición de la escuela Bourbakista, es decir:

> "(…) definida por un conjunto de partida E y un conjunto de llegada F, así como una relación de E hacia F, en la cual cada elemento de E posee al menos una imagen. El conjunto de los elementos de E que poseen una imagen es luego llamada dominio de definición de la función"

4.3.2 La constitución de la práctica social. La noción de variabilidad.

4.3.2.1 Los métodos de compensación de errores

La noción de "variable" era reconocida en la práctica de la navegación y en la geografía de mediados del siglo XVII, como el "error" que cometía la aguja de la brújula al desviarse hacia el norte magnético, respecto del norte verdadero (Juleu,1732). La desviación de ese ángulo se conocía, se conoce aún en nuestros días, como "declinación magnética". Dicha desviación o error, se podía determinar a través de comparar la posición del observador respecto a la estrella polar, que en esa época se consideraba orientada hacia al norte verdadero, respecto a la orientación que arrojaba para el mismo caso la brújula, en tanto determinante para definir el rumbo que tomarían los barcos. La asociación que en esa época se daba a la nominación de variable para dar significado a la declinación magnética, concibiéndole como "error", sería fundamental en la transición que seguiría el concepto de "variabilidad" en la definición de una "teoría de errores", por un lado, y el concepto de derivada, por otro. De ello comentamos en lo que sigue.

---

[2] "Si una variable y está relacionada con otra variable *x,* de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a *x*, hay una regla según la cual queda determinado un único valor de *y*, entonces se dice que *y* es una función de la variable independiente *x*". (citado en Boyer, 1986, p.687)

En 1760, Euler describía pequeñas irregularidades que había observado en el movimiento de los planetas conocidos en su época y que eran causadas por atracción mutua, contrario a la idea que tenían los astrónomos a partir de concebir las irregularidades como causadas sólo por la atracción del Sol hacia los propios planetas (Euler, 1760, pp. 98-100). En el mismo sentido, se preocupaba por dar una explicación completa de las perturbaciones lunares y planetarias y ejemplificaba con los eclipses lunares, los cuales eran predecidos colocando a los planetas hasta con una hora de diferencia respecto al propio fenómeno, consecuentemente, deseaba precisar en la posición de los planetas, centrando su atención inicialmente en la Luna. Esas pequeñas fuerzas con las que los planetas actúan unos sobre otros, fueron por él llamadas “perturbaciones”. Tales irregularidades no permitían determinar con precisión la posición de los planetas, ante eventos como los eclipses. Antes de esta descripción, Euler había planteado el problema de las “perturbaciones lunares” a T. Mayer (1723–1762), astrónomo y geómetra alemán de la Universidad de Gotinga.

Mayer en 1750, por su lado, había definido un método con el cual era posible combinar diversas “ecuaciones de condición” a las que se llegaba a partir de la observación o experimentación en las prácticas procedimentales y de observación y con el cual pudo resolver el problema de de las perturbaciones participado por Euler. El método, el cual nos interesa analizar, partía del principio de hacer un buen número de repeticiones de los experimentos, de manera que en cada etapa fuera factible establecer una “ecuación de condición” para cada uno de estos. Las ecuaciones de condición las presentaba de la siguiente manera:

Ecuaciones de condición

$$\left.\begin{array}{c} a_1x+b_1y+c_1z+\ldots+m_1=v_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+\ldots+m_2=v_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z+\ldots+m_3=v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx+b_ny+c_nz+\ldots+m_n=v_n \end{array}\right\}$$

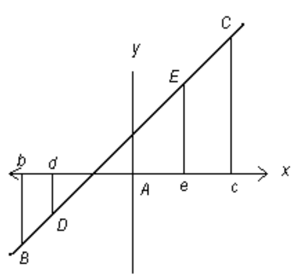
Errores instrumentales

$$\left.\begin{array}{c} a_1x+b_1y+c_1z+\ldots+m_1-v_1=e_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+\ldots+m_2-v_2=e_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z+\ldots+m_3-v_3=e_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx+b_ny+c_nz+\ldots+m_n-v_n=e_n \end{array}\right\}$$

El segundo sistema muestra los errores instrumentales, que son la diferencia entre las observaciones de cada experimentación expuestas a partir de las variables *x, y, z, …m*, con respecto a la variable dependiente *v*, de modo es que, si no existieran errores de este tipo, debieran concebirse nulos, lo cual en la práctica resulta falso.

Como se puede observar, el número *n* de observaciones es mayor que el de incógnitas. El sistema de valores que resulta de la combinación de todas las ecuaciones era considerado como el más “plausible”, es decir, el más independiente del efecto de los pequeños “errores instrumentales”. El planteamiento de Mayer, para resolver el sistema, consistía en cambiar los signos de las ecuaciones de tal manera que resultasen positivos todos los términos que contienen a *x*, y en sumar después todas las ecuaciones. La misma operación de sumar se debía repetir enseguida respecto de cada una de las otras incógnitas, obteniéndose de esa manera tantas ecuaciones finales como incógnitas hubiera. Para mejor entender el método de combinación de Mayer, consideramos necesario plantear el siguiente ejemplo:

Supongamos que se tiene la recta definida por BC en la figura, y se desea determinar “experimentalmente” los valores de las constantes a y b de su ecuación $y = ax + b$.



Si se divide el eje de las abscisas en un número cualquiera de partes Ad, db,...,Ae, ec, y medimos con una regla graduada arbitraria estas abscisas y sus correspondientes ordenadas, tendremos, las ecuaciones de condición siguientes:

$$
\begin{array}{ll}
x = +3 & y = -3.75 \\
x = +2 & y = -2.35 \\
x = +1 & y = -0.90 \\
x = 0 & y = +0.55 \\
x = -1 & y = +1.95 \\
x = -2 & y = +3.45
\end{array}
$$

Sustituyéndolos en la fórmula:

$$
\begin{aligned}
3a + b &= -3.75 \\
2a + b &= -2.35 \\
a + b &= -0.90 \\
+ b &= +0.55 \\
-a + b &= +1.95 \\
-2a + b &= +3.45
\end{aligned}
$$

Puesto que *b* es positiva en todas las ecuaciones, no es necesario cambiar ningún signo, se realiza la suma y se obtiene: $3a + 6b = -1.05$.

Enseguida cambiamos los signos de algunas ecuaciones, de tal forma que todas las *a* sean positivas, y sumando: $9a + 2b = -11.85$

Obtenemos de esta forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que al ser resuelto, resulta: *a*=-1.43750*, b*= +0.54375. El valor de *a* es considerado la dirección *u* de la línea, que corresponde a $u = 124^o 49' 28''$ o a $u = 304^o 49' 28''$.

Al sustituir los valores, en las ecuaciones de condición, existen pequeñas diferencias llamadas residuos, debidos al error en las mediciones:

-0.0187	+0.0063	+0.0312
+0.0188	-0.0062	-0.0313

Al comparar la ecuación $y = ax + b$ con las ecuaciones de condición observamos que:

$$ax + b = y$$
$$ax + b - y = e$$
$$a_1 x + m_1 - v_1 = e_1$$

Los residuos $e_1, e_2, ...e_n$, son errores en lo analítico, propiciados por las irregularidades o errores instrumentales, en la práctica. Los errores fueron concebidos por Mayer como una "variación" que se sucede para cada experimentación; así: e_1 : es la primera variación, e_2 : la segunda variación, etc. De modo que el total de las variaciones o residuos: $e_1, e_2, ...e_n$ se reconocieron como la "variabilidad" del total de las observaciones experimentales. Es aquí donde la noción de variabilidad toma un primer significado analítico.

En su caso, Gauss, en 1795, formularía el método de los "mínimos cuadrados" haciendo modificaciones a la propuesta del modelo de combinación de Mayer, sobre todo en el sistema de ecuaciones de condición. Los errores obtenidos, para cada observación, de circunstancias variables e independientes del resultado (como los producidos por causas externas irregulares como el efecto del aire que produce una visión menos nítida, o aquellos debido a los instrumentos de medición), fueron llamados "irregulares" o "fortuitos", y susceptibles de someterse a cálculo. Existen, por el contrario, errores "constantes" o "regulares", que en observaciones de la misma naturaleza, producen un error idéntico, o dependiente de circunstancias debido a la observación, los cuales, quedan excluidos de las investigaciones realizadas por Gauss y la aplicación del método.

Al presentar su "Theoria Motus Corporum" ante la Real Sociedad de Gotinga, mostró la aplicación del método de los mínimos cuadrados a la corrección de seis elementos (errores) en la órbita del planeta Pallas, partiendo de doce ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
0 = -183'',93 &+ 0{,}79363\,dL + 143{,}66\,d\iota + 0{,}39493\,d\pi \\
&+ 0{,}95920\,d\varphi - 0{,}18856\,d\Omega + 0{,}17387\,di; \\
0 = -\ \ 6'',81 &- 0{,}02658\,dL + 46{,}71\,d\iota + 0{,}02658\,d\pi \\
&- 0{,}20858\,d\varphi + 0{,}15946\,d\Omega + 1{,}25782\,di; \\
0 = -\ \ 0'',06 &+ 0{,}58880\,dL + 358{,}12\,d\iota + 0{,}26208\,d\pi \\
&- 0{,}85234\,d\varphi + 0{,}14912\,d\Omega + 0{,}17775\,di; \\
0 = -\ \ 3'',09 &+ 0{,}01318\,dL + 28{,}39\,d\iota - 0{,}01318\,d\pi \\
&- 0{,}07861\,d\varphi + 0{,}91704\,d\Omega + 0{,}54365\,di; \\
0 = -\ \ 0'',02 &+ 1{,}73436\,dL + 1846{,}17\,d\iota - 0{,}54603\,d\pi \\
&- 2{,}05662\,d\varphi - 0{,}18833\,d\Omega - 0{,}17445\,di; \\
0 = -\ \ 8'',98 &- 0{,}12606\,dL - 227{,}42\,d\iota + 0{,}12606\,d\pi \\
&- 0{,}38939\,d\varphi + 0{,}17176\,d\Omega - 1{,}35441\,di; \\
0 = -\ \ 2'',31 &+ 0{,}99584\,dL + 1579{,}03\,d\iota + 0{,}06456\,d\pi \\
&+ 1{,}99545\,d\varphi - 0{,}06040\,d\Omega - 0{,}33750\,di; \\
0 = +\ \ 2'',47 &- 0{,}08089\,dL - 67{,}22\,d\iota + 0{,}08089\,d\pi \\
&- 0{,}09970\,d\varphi - 0{,}46359\,d\Omega + 1{,}22803\,di; \\
0 = +\ \ 0'',01 &+ 0{,}65311\,dL + 1329{,}09\,d\iota + 0{,}38994\,d\pi \\
&- 0{,}08439\,d\varphi - 0{,}04305\,d\Omega + 0{,}34268\,di; \\
0 = +\ 38'',12 &- 0{,}00218\,dL + 38{,}47\,d\iota + 0{,}00218\,d\pi \\
&- 0{,}18710\,d\varphi + 0{,}47301\,d\Omega - 1{,}14371\,di; \\
0 = -317'',73 &+ 0{,}69957\,dL + 1719{,}32\,d\iota + 0{,}12913\,d\pi \\
&- 1{,}38787\,d\varphi + 0{,}17130\,d\Omega - 0{,}08360\,di; \\
0 = +117'',97 &- 0{,}01315\,dL - 43{,}84\,d\iota + 0{,}01315\,d\pi \\
&+ 0{,}02929\,d\varphi + 1{,}02138\,d\Omega - 0{,}27187\,di.
\end{aligned}
$$

Las variaciones o correcciones fueron designadas por los diferenciales:

$dL, d\iota, d\pi, d\varphi, d\Omega, di,$

Ante la imposibilidad de satisfacer todas las ecuaciones, se busca una forma de reducirlas lo más posible, de acuerdo al mismo principio expresado por Mayer.

Si se consideran las funciones lineales:

$$
\begin{aligned}
n + ap + bq + cr + ds + \ldots &= w, \\
n' + a'p + b'q + c'r + d's + \ldots &= w', \\
n'' + a''p + b''q + c''r + d''s + \ldots &= w'', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Según el principio fundamental de los mínimos cuadrados, debe determinarse cada incógnita de modo que resulte mínima la suma de los cuadrados de los "errores"

$$\Omega = w^2 + w'^2 + w''^2 \ldots$$

Retomando la notación del modelo de combinaciones de Mayer, y ajustándole al método de los mínimos cuadrados de Gauss, se obtiene:

$$
\left.
\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + m_1 - v_1 &= e_1 \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + m_2 - v_2 &= e_2 \\
a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + m_3 - v_3 &= e_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + m_n - v_n &= e_n
\end{aligned}
\right\}
$$

La suma de los cuadrados de los errores está dada por : $e_1^{\ 2} + e_2^{\ 2} + ... + e_n^{\ 2} = [ee]$, para determinar cada incógnita, la auxiliar $[ee]$ debe ser nula respecto a cada una de estas. Por ejemplo, respecto a *x*:

$$e_1 \frac{de_1}{dx} + e_2 \frac{de_2}{dx} + ... e_n \frac{de_n}{dx} = 0 \ldots (1)$$

Como: $\frac{de_1}{dx} = a_1$ $\frac{de_2}{dx} = a_2$ $... \frac{de_n}{dx} = a_{n1}$

Sustituyendo en (1), queda:

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... a_n e_n = 0$$

Llamada ecuación normal de *x*.

Si usamos el mismo procedimiento para cada incógnita, tendremos:

$$b_1 e_1 + b_2 e_2 + ... b_n e_n = 0$$

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... c_n e_n = 0$$

Aplicando la siguiente regla para cada una de las incógnitas, en las ecuaciones de condición, obtendremos las ecuaciones normales que son necesariamente el mismo número que el de incógnitas: "(…) multiplíquese cada ecuación de condición por el coeficiente que en ella tenga una de las incógnitas, tomado con su propio signo e iguálese a cero la suma algebraica de los productos".

$$m_1 - v_1 = q_1 \qquad m_2 - v_2 = q_2 \quad \ldots$$

$$\left.\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + ... + [aq] = 0 \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + ... + [bq] = 0 \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + ... + [cq] = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Ecuaciones normales}$$

Ello muestra la caracterización que hizo Gauss del método de combinación de Mayer.

Legendre (1805) publicó "Nouvelles Methodes pour la determination des orbites des cometes", y años después aplicó su método de los Mínimos Cuadrados en la resolución de la atracción de elipsoides homogéneas de las cuales resolvió varios casos, en donde obtuvo un sistema de ecuaciones de la forma: $E = a + bx + cy + fz + etc.$ donde *a, b, c, f, etc.* son los coeficientes desconocidos que varían de una ecuación a otra, y *x, y, z, etc.* son determinados para cada ecuación, por la condición del valor de E (errores), que es una cantidad nula o muy pequeña.

Utilizó la suma del cuadrado de los errores $E^2 + E'^2 + E''^2 + etc.$ para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered}(a + bx + cy + fz + etc.)^2 \\ + (a' + b'x + c'y + f'z + etc.)^2 \\ + (a'' + b''x + c''y + f''z + etc.)^2 \\ + etc.\end{gathered}$$

Para una cierta cantidad *x*, la suma de los cuadrados de los errores será: $(a' - x)^2 + (a'' - x)^2 + (a''' - x)^2 + etc.$ si igualamos a cero y despejamos: $x = \dfrac{a + a' + a'' + etc.}{n}$. Donde *n* es el número de observaciones, paralelamente, siendo *x, y, z,* las variables comunes al punto, la suma del cuadrado de las distancias es igual a un mínimo $(a' - x)^2 + (b' - y)^2 + (c' - z)^2$.

Formules pour la solution générale du problème.

1. Soient f, g, h, les trois coordonnées du point attiré **S**, soient x, y, z, celles d'une molécule quelconque dM du corps attirant, et r sa distance au point **S**, en sorte qu'on ait

$$r^2 = (f - x)^2 + (g - y)^2 + (h - z)^2.$$

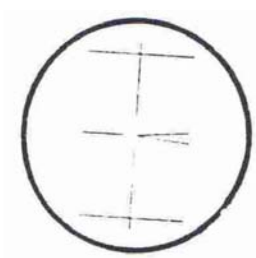
L'attraction que la molécule dM exerce sur le point **S** est exprimée par $\frac{dM}{r^2}$; elle se décompose en trois forces parallèles aux axes des coordonnées, lesquelles sont

$$\frac{(f - x)\,dM}{r^3},\quad \frac{(g - y)\,dM}{r^3},\quad \frac{(h - z)\,dM}{r^3};$$

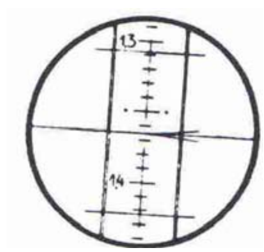
4.3.2.2 La variabilidad en las prácticas procedimentales

Como se vio en el apartado anterior, en las prácticas procedimentales la variabilidad representaba la totalidad de los errores instrumentales cometidos en las observaciones experimentales. No obstante, este tipo de errores, por sí mismos, tuvieron en la búsqueda de ser compensados, un tratamiento cercano a los propios instrumentos, lo cual no fue planteado por Mayer.

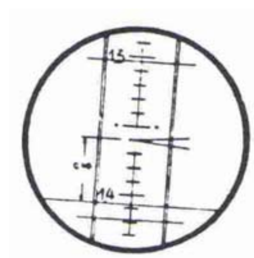
A lo largo del siglo XIX, las prácticas procedimentales se caracterizaron por el uso de instrumentos de observación como fueron: telescopios, teodolitos, niveles o equialtímetros, barómetros, altímetros, etc., los cuales por la falta de una tecnología como la actual, adolecían de precisión en la toma de datos. Así, en los niveles o equialtímetros (niveles montados sobre un tripie, con los cuales es posible determinar las irregularidades verticales del terreno), en el enfoque, la posición del eje de colimación (la cruz filar grabada en la lente), era considerada invariable. Sin embargo, puesto que la cruz filar, concebida plana, era grabada sobre una lente curva, las irregularidades en la lente de enfoque, producían un sinnúmero de desviaciones en la forma rectilínea del eje de colimación. Tales irregularidades eran conocidas como la "variabilidad del eje de colimación" (Jordan, 1876).



Disposición de los hilos



Lectura aproximada 1.36



Lectura final 1.3648

Para la misma época, los barómetros aneroides, barómetros mecánicos de bolsillo, tenían el inconveniente de la variación de las lecturas, al ser comparadas con las un barómetro patrón de mercurio, lo cual falseaba la altura correspondiente sobre el nivel del mar. Las sacudidas inevitables en los trabajos de campo y en los viajes, transportes, etc., producían variaciones en la presión señalada por el aneroide, que podían determinarse al compararles con un barómetro de mercurio.

En la siguiente tabla se da un ejemplo de la variabilidad en las correcciones de presión que resultaron de las diversas comparaciones sucesivas de aneroides, que empleó W. Jordan en 1873 en una expedición a Libia, con respecto al barómetro de mercurio:

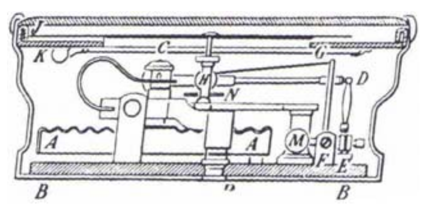
Lugar y fecha	**Naudet 39305**	**Goldschmid 600**	**Casella 1640**	**Casella 1641**	**Chevallier**
Cairo 5 de Dic 1873	+2.8 mm	+14.0 mm	+5.0 mm	+1.3 mm	…
Siut 12 de Dic 1873	+2.5	+13.3	…	…	…
Marac 20 de Dic	+2.8	+13.1	…	…	…
Fárfara 1 de Ene 1874	+4.5	+13.8	+5.0	+0.7	+8.5
Dachel 10 de Ene1874	+5.0	+13.2	+7.2	+1.6	+9.6
Dachel 16 de Marzo 1874	+1.4	+11.0	+9.2	+0.9	+10.7
Charge 25 de Marzo 1874	-0.3	+9.4	+9.6	+1.0	+10.2
Esneh 1 de Abril 1874	+0.8	+8.1	+9.4	+0.4	…
Cairo 16 de Abril 1874	+0.6	…	+8.7	…	…
Variación mínima	-5.3 mm	-5.9 mm	+4.6 mm	-1.2 mm	+1.7 mm

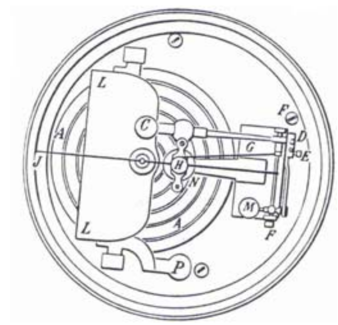
El aneroide Cassella No. 1641, que presentó las variaciones mínimas, era un instrumento pequeño, del tamaño de un reloj de bolsillo, y durante todo el tiempo lo llevó en su bolsillo del pantalón un colega de Jordan; este último, dedujo que este modo de transportar los aneroides pequeños los resguarda de las variaciones anormales. Los aneroides grandes y pesados, que había que transportar en los camellos, sufrieron grandes e inevitables sacudidas por el movimiento de estos.

El fenómeno de la variabilidad en los aneriodes fue estudiado por Reinhertz (1887). La propia variabildad fue nombrada por él, "elasticidad remanente", y se refería a cuando un cuerpo elástico, por ejemplo, una hoja de muelle sujeta por un extremo, se dobla por el otro, no vuelve instantáneamente a su posición primitiva al cesar la fuerza que produjo la deformación, sino que la alcanza después de varios movimientos cada vez menores. Esta propiedad de los cuerpos elásticos es la que este último llamó "elasticidad remanente".

Reinhertz, comprobó, también, que la mayor o menor variabilidad está en relación con la magnitud y la velocidad del cambio de presión; Lo anterior se puede juzgar con la relación: $\frac{dV}{dt} = k\frac{dp}{dt}$.

Por ejemplo, para dos aneroides iguales como los que aparecen en las figuras, se observó la siguiente desviación (errores), producida por la elasticidad remanente, a las dos horas de cesar los siguientes cambios de presión, que tuvieron lugar a una velocidad de 2.0 mm/min.





Barómetro de Vidi

Cambio de presión	20 mm	40 mm	70 mm	100 mm
Desviación o variabilidad remanante	0.28	0.45	0.72	1.01

Para los mismos instrumentos, a un cambio de presión de 100 mm a diversas velocidades, produjeron las siguientes desviaciones remanentes:

Velocidad de cambio	0.2 mm	0.5 mm	1.0 mm	2.0 mm
Desviación remanante	0.38	0.60	0.74	1.01

De aquí se deduce que al comprobar las escalas deben producirse los cambios de presión a la misma velocidad a que se producen, es decir, muy lentamente, a razón de 1 mm., por cuatro o cinco minutos aproximadamente. La prueba de la escala para un aneroide cuya graduación sea de 100 mm., requerirá, por lo tanto, un día entero.

Por otro lado, un sinnúmero de trabajos experimentales se habían llevado a cabo en la búsqueda de precisión en las nivelaciones barométricas. La ley teórica de los errores de una nivelación de este tipo, se habían deducido de la expresión fundamental definida por Laplace: $h = K(\log B - \log b)(1 - \alpha t)$, donde *h* es la altura de una posición sobre el nivel del mar, *B y b* dos presiones consecutivas, *t* la temperatura, y α y *K* constantes. Al diferenciar en cada una de las variables involucradas, se tienen los tres "errores" parciales correspondientes, como:

$$dh_B = \frac{\mu}{K} dB(1 + \alpha t),\ dh_b = \frac{\mu K}{B} db(1 + \alpha t) \text{ y } dh_t = h\alpha dt.$$

4.3.2.3 La variabilidad en el aula

El ingeniero mexicano Francisco Díaz Covarrubias, cita en diversos apartados de su libro de "Cálculo Infinitesimal", escrito en el año de 1873, al método de combinación de Tobías Meyer, del cual hizo uso indistinto en dicha obra y en sus textos alternos de "Topografía", "Astronomía", etc., lo cual habla del amplio conocimiento que del método de éste geómetra tenía, y del cual, seguramente, tomó la definición de variabilidad que involucró en su libro de cálculo.

En Camacho (2007), se cita la utilidad de la noción de variabilidad en la forma en que Díaz Covarrubias le incorporó a las definiciones elementales de "curva" y "curvatura", las cuales servirían de apoyo a la propia definición que daría del concepto de derivada. Camacho hace la descripción de las definiciones planteadas por Díaz Covarrubias, de la siguiente manera:

> "Toda curva puede verse originada por el movimiento de un punto (…)"
> Al punto que describe la curva (Díaz Covarrubias) dio el nombre de "generador". Esto último le permitió inferir que los diferentes cambios de dirección del punto generador son diversos entre las curvas, teniéndose todas ellas por propiedad común la "variabilidad". En esa reflexión, Díaz Covarrubias estableció la curvatura de las curvas en un modelo del todo geométrico tomándole como la: "(…) representación de la variabilidad de las direcciones" (Díaz Covarrubias, 1873, 21)

O bien los diferentes "cambios" del punto generador sobre la curva. Destacando que esos cambios se producen al imaginar la curvatura como un proceso que se produce al pasar de un estado rectilíneo a otro curvilíneo, o bien de la constante a la variable.
En tal sentido la variabilidad asume dos posibilidades: la primera es que puede concebirse en un estado de "constancia" del todo rectilíneo y, la segunda, más compleja, cual es la continuidad de la curva. En otras palabras, el estado de constancia "atrapa", formando parte de, la variabilidad o movimiento de los fenómenos en estudio.

El planteamiento de la variabilidad en Díaz Covarrubias, es semejante respecto al que se destaca en el problema que atendió W. Jordan para la lente del equialtímetro a partir de los objetos en juego, es decir, la línea y su transición hacia la configuración de la curva. De hecho en ambos casos la variabilidad es contemplada partiendo del mismo principio: "cruz filar, concebida plana, grabada sobre una lente curva", mientras que para Díaz Covarrubias, la variabilidad es sujeta a los "quiebres" o diferentes cambios que sufren las líneas rectas que, a su vez, conforman la curva $y = f(x)$.

El error lineal que se produce por la distorsión del enfoque, es una variación en el contexto de Jordan; mientras que en Díaz Covarrubias, el error o variación se encuentra en la aproximación que se hace de la poligonal de rectas que tienden hacia la curva, consecuentemente, la ocurrencia de la variabilidad. No obstante, y de manera alterna a Díaz Covarrubias, los errores o variaciones asumieron un significado variacional en Gauss y Legendre en la forma de la derivada $\frac{de_1}{dx} = a_1$, como se vio anteriormente.

En resumen, los modelos de combinación para la compensación de la variabiliadad, condensada en los errores determinados por dichos métodos, se perfiló inicialmente como una práctica social surgida en el intento por resolver problemas prácticos de la astronomía de posición, y llevó posteriormente a Gauss a reformular el método de los mínimos cuadrados para establecer así una "teoría de los errores", que cuenta con amplia vigencia en la actualidad. El mismo Gauss dio al método de los mínimos cuadrados un sesgo hacia la teoría de las probabilidades, del que se tomaría la función de distribución normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)(x-\mu/\sigma)^2} \quad -\infty < x < \infty \,,$$

conocida como “campana de Gauss, para el estudio en las pruebas de hipótesis estadística, de mucha utilidad en los métodos de investigación cuantitativa hoy en día. Como se puede apreciar, la variabilidad fue colocada inicialmente en los métodos experimentales con alto grado de empirismo, más, paulatinamente, fue dando lugar a conceptos que, por hoy, son una referencia en la matemática y su enseñanza.

4.4 Conclusiones al análisis preliminar

4.4.1 Discusión.

Esta investigación se organizó en torno a dos ejes principales:

1. Tener un mejor conocimiento de las concepciones que los docentes del área de matemáticas presentan sobre el concepto de función, y
2. Determinar los factores socioculturales que intervienen en la formación de dichas concepciones.

La intención de aplicar los cuestionarios fue para cumplir con el primer punto: las concepciones que los docentes del área de matemáticas presentan sobre el concepto de función matemática, por lo que se consideró conveniente permitir que ellos escribieran "espontáneamente" las palabras que evocan al pensar en este concepto, para contar con una serie de ideas del "sentido común" (Dollo, 2001). Al requerir una jeraquización de proposiciones relativas al concepto, se eligieron aquellas que son presentadas en diversos libros de texto como relacionadas con el tema, ya que consideramos que nos llevarán explícitamente a reconocerlas en el esquema de la (RS). De ello, obtuvimos que el núcleo central está formado por los significados asociados al concepto de función: dependencia de variables, regla de correspondencia, grafica, tabla de valores, modelo y dependencia; los elementos periféricos: variable independiente, relación, dominio y rango. De acuerdo a la teoría de las (RS) son estos últimos los que permiten una adaptación de las experiencias personales al concepto y son fundamentales para el mejor entendimiento del sistema central que le presta estabilidad y coherencia.

Un resultado desconcertante es el que refiere los conocimientos teóricos de los encuestados, ya que oscilan de 45% a 60%. No previmos que pudiera ser así, sin embargo, refuerza nuestra idea inicial de que las concepciones y en este caso los conocimientos teóricos de los docentes, apoyan o detienen la correcta comprensión del concepto por parte de los estudiantes. Recordemos la investigación de García & Serrano (2000) sobre el conocimiento profesional del concepto de función en docentes de nivel básico que recientemente habían recibido actualización docente, concluyeron que, a pesar de la experiencia, los profesores no presentaban coherencia alguna entre las definiciones proporcionadas por ellos mismos, y tampoco eran capaces de establecer traslaciones entre las formas de representar una función, afectando directamente la comprensión en los estudiantes.

Dentro del mismo análisis cognitivo en la parte de los estudiantes, los resultados muestran que las palabras más utilizadas fueron: dependencia, ecuación, modelo, gráfica, ecuación, tabla de valores, variables, que no distan mucho de las utilizadas por los profesores. En lo que respecta a la coordinación entre los modos de representación, se observa muy poca conexión entre la respuesta con palabras y la respuesta gráfica, la mayoría no explican en forma correcta el fenómeno, y en general la gráfica no corresponde a la explicación (aún cuando esta no sea correcta). Existe una desvinculación entre ambas representaciones. En cuanto a la definición de función, se muestra como una correspondencia de variables (CE6).

Por su lado, los resultados en el análisis didáctico muestran serios contrastes entre la secuenciación que los autores hacen de los conocimientos asociados al concepto de función. En todos los casos los modelos propuestos privilegian la enseñanza del saber para la enseñanza jerarquizado por la función vista a través de una dependencia entre variables. En la mayoría de los casos se parte del saber para la enseñanza, que luego se integra a través de los significados asociados. Esta forma del discurso se adhiere plenamente con las sugerencias que en los planes de estudio se hacen al respecto, puesto que en ambos casos se sugiere la enseñanza a partir de definir inicialmente el concepto a partir de la definición ya mencionada. En este sentido, nos parece que estos modelos truncan posibilidades de encadenar los conocimientos, de manera que la enseñanza iniciara con los conocimientos asociados elementales que tuvieran por límite al saber para la enseñanza.

Para el segundo eje encontramos que las prácticas desarrolladas en torno a una (RS) no pueden manejarse alejadas del sistema de normas y valores sociales. La influencia del medio en que se realicen es indiscutible. En nuestro caso, encontramos que estas prácticas están fuertemente influenciadas por conocimientos institucionalizados, que de cierta forma controlan y regulan el conocimiento que se encuentra alrededor del concepto de función, tanto en los libros de texto como en los programas oficiales. Por lo que esta institucionalización norma las prácticas escolares en torno al tema.

En consecuencia consideramos que:

a) Las definiciones dadas para el concepto de “función” son mostradas formalmente como una dependencia de variables.

b) Los profesores están influenciados por los libros de texto.

c) En consecuencia, los estudiantes están influenciados por los profesores.

d) La noción de variación no aparece en el discurso actual.

e) Hasta el momento los estudiantes no han logrado una vinculación entre los diversos modos de representación de una función.

En el análisis epistemológico, la noción de “variabilidad”surge como un conocimiento asociado al concepto de función, mediante prácticas de ingeniería desarrolladas en Alemania y México en el siglo XIX, a través del método de compensación de errores. Este proceso nos permitió visualizar la importancia de las prácticas sociales como generadoras de conocimiento.

Ante ello:
¿Qué enseñar del concepto de función?
¿En que orden elegir los significados para su enseñanza?
El conocimiento de referencia ¿Es el de los libros de texto?
¿En qué orden conviene incorporar los conocimientos?
Variabilidad → cambio, y el cambio es cálculo diferencial.
Variaciones de la variable.
Conjunto de variaciones es la variabilidad.

¿Qué tipo de ejercicios incluir, o cómo mostrar los modos de representación para que el estudiante logre transitar libremente por ellos?

4.4.2 Conclusiones

Los autores que han estudiado las (RS) insisten en su carácter construido y estructurado. Según Johsua y Dupin (1993), podemos nombrar a la representación como el contenido estructurado del pensamiento de un sujeto (citado en Dollo, 2001, p. 74), las RS no sólo son visiones del mundo, también son verdaderas reconstrucciones mentales.

Consideramos, que es de especial importancia la forma de conocer un contenido matemático (entendido como las concepciones que el profesor tiene del mismo), en el capítulo 3 se mencionó que una de las características de las (RS) es que tienen un carácter de imagen, y es posible realizar pequeños cambios en las idea, la percepción y el concepto. Desde este punto de vista, los profesores poseen una imagen del concepto de función que deriva en lo que se considera fundamental aprender, esto es, en las prácticas sociales que el profesor provoca en el aula. Una (RS) no es exclusiva del plano cognitivo, por lo que deben analizarse las relaciones con el plano sociocultural, las prácticas desarrolladas son afectadas o moduladas en función de su ideología; las normas y valores influyen en la construcción de una (RS), dado que reflejan la naturaleza de reglas y vínculos sociales El entender las relaciones entre representaciones y prácticas sociales implica un doble trabajo de análisis y conocimiento de cada uno de los términos involucrados. Las representaciones y las prácticas sociales se generan mutuamente. “No se puede disociar la representación, el discurso y la práctica, forman un todo. . . es un sistema ...” (Autes, 1985, citado en Abric, 1994, p. 207).

En la construcción del conocimiento debe tenerse en cuenta que los estudiantes poseen representaciones previas y es la evolución progresiva de estas lo que las lleva a un nivel operativo cercano a la realidad y proporciona herramientas para resolver problemas. Las concepciones en proceso de estructuración cognitiva evolucionan y apoyan el pensamiento que se está construyendo (Giordan y De Vecchi, 1988). Es el profesor, quien a través del discurso y las prácticas, apoya a la formación del nuevo concepto. De aquí la importancia de las prácticas que se realizan en el aula y fuera de ella.

Tal como lo predice la TRS los elementos periféricos tienen una función de defensa, mas pueden ser agregados (removidos, cambiados, modificados, aumentados) bajo el efecto de una modificación de las prácticas sociales, lo cual, de acuerdo a Flament (1994), tiene como consecuencia un cambio gradual de la representación, su desintegración o transformación total. En nuestro caso, la intención será la de incluir elementos de carácter variacional en la noción de función, para lo cual contemplamos las condiciones para la transformación de una (RS) propuestas por (Guimelli, 1993), a saber:

1. Que sea un evento característico con alto grado de implicación en el grupo.
2. Que contemple las circunstancias externas a la representación, entendidas como las características físicas, económicas o el ambiente social, en relación con el objeto de representación, como consecuencia del evento anterior, lo que cambia las prácticas tradicionales y su pertinencia.
3. Que el cambio de las prácticas sea percibido por el grupo como irreversible, lo que los lleve a reorganizar el campo de la representación.

Estamos convencidos, que la aplicación de una secuencia de trabajo, que cumpla con tales condiciones, permitirá que el grupo reorganice el marco de la representación bajo la influencia de las prácticas escolares correspondientes, y de esta forma eliminar el obstáculo que se presenta al concebir una función solamente como una dependencia entre variables. Y al mismo tiempo, proporcionar una alternativa para la resolución de problemas que involucren el concepto.

Los resultados del análisis cognitivo, junto con los resultados del análisis epistemológico y del análisis didáctico, nos permiten responder las preguntas formuladas párrafos arriba y aún mas, proponer una situación de aprendizaje, en la que integraremos en el diseño la noción de "variabilidad", que hemos reconocido en el dominio de prácticas sociales: procedimentales y de observación, que ocurrieron a lo largo de los siglos XVIII y XIX, y que nos permitirá re-significar de mejor forma el concepto de función. Con este significado asociado al propio concepto, intentaremos influir en los elementos periféricos de la cognición de los estudiantes, al colocarlos en un proceso de deconstrucción y recontextualización del concepto, tal como se muestra en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Diseño y aplicación de la secuencia

5.1 Introducción

Al tratar las concepciones de una forma "inductiva", bastaría con desestabilizar las concepciones iniciales de los alumnos, presentando experiencias o hechos contrarios a estas ideas. Sin embargo, esto no es suficiente para inducir la necesidad de un cambio conceptual (Johsua y Dupin, 1993). El tomar en consideración las (RS) que los estudiantes poseen sobre "función matemática" es de gran importancia en la aplicación de la secuencia de trabajo que planteamos en este capítulo para el desarrollo del tema. El término (RS) hace referencia a los productos y a los procesos que caracterizan el pensamiento práctico, elaborado a través de la interacción social entre los miembros de un grupo; durante esta interacción, al tener en cuenta las concepciones de los alumnos, es posible no sólo favorecer la emergencia de un conflicto sociocognitivo, sino también la construcción de una representación alternativa, más cercana a nuestra realidad (para nosotros, se presentará tomando en cuenta la cadena de significados variable – variación – variabilidad). De esta forma, al terminar la reconstrucción hay que operacionalizarla, es decir, hacerla funcionar en la solución de nuevos problemas. La secuencia de aprendizaje propuesta, se rige bajo estas bases, e ilustra las estrategias didácticas del profesor, además, toma en cuenta los procesos de aprendizaje de los estudiantes, con el fin de lograr un verdadero cambio conceptual.

El debate: permite la construcción colectiva del saber.

Dollo (2001), propone un proceso de discusión de opiniones, donde el profesor debe diseñar una situación que simule las condiciones de un debate “científico” vía la construcción de un saber. Johsua y Dupin (1993), señalan que no se puede imponer, o hacer construir “naturalmente” un modelo “correcto”. El diseño de la situación debe ser tal, que permita a los estudiantes formular hipótesis explicativas (aún contradictorias), bajo un proceso de conjetura-refutación, que emergen en la fase de sensibilización y se apoyan sobre sus propias concepciones. Algunas de estas hipótesis verbalizadas pueden ser eliminadas por los propios alumnos en su discusión que, guiados por el profesor, les permitirá llegar a la fase de reconstrucción.

El concepto de función a través de las nociones de variable – variación – variabilidad.

El diseño de esta situación de aprendizaje tiene como eje central la noción de variabilidad. Como se vio, la noción surge de una práctica social ejercida en las prácticas de ingeniería. De esta manera, incorporamos un registro ausente en la enseñanza actual del propio concepto de función, con el objetivo de hacer patente la variación en el discurso desde esta etapa.

Los conceptos de variable, variación y variabilidad están involucrados en el concepto de función, mas, en la actualidad se dejan de lado para la adquisición del concepto por parte de los estudiantes, creándose así un “hueco” en su entendimiento (Camacho, 2006).

La situación presenta estas tres nociones que permiten el estudio del movimiento de los fenómenos desde diversos modos de representación: geométrico, algebraico y variacional.

Objetivo: Permitir a los estudiantes la adquisición del concepto de función mediante los significados asociados como son: variable, variación y variabilidad, así como la creación de un vínculo entre los distintos modos de representación de una función, con el fin de que puedan coordinarlos durante la resolución de problemas. Como registros alternativos utilizaremos gráficas, fórmulas, ecuaciones.

La situación consta de cinco fases, divididas en actividades: la primera *Fase de Sensibilización*, cuyo objetivo es hacer emerger las concepciones de los estudiantes y ponerlos en discusión para formular cierto número de hipótesis relativas a los criterios necesarios para la definición de variable y variación; incluye la Actividad 1 donde el profesor inicia con la descripción de magnitudes para luego dar una definición de variable en los siguientes términos: *una variable es una cantidad que aumenta o disminuye*; y la Actividad 2, donde se presentan como cambian las variables al mover uno de los lados de un triángulo. En la *Fase de Descontextualización* (aquella en la que el concepto es estudiado o aplicado en otra situación diferente a la anterior), se realiza un debate y desestabilización de las representaciones, el profesor pide mediante lluvia de ideas grupales se discuta la relación entre las variables a través de aumentar o disminuir la altura en un trapecio.

En la *Fase 3: Deconstrucción* (cuando el alumno es confrontado con un conflicto sociocognitivo y reconstruye la representación inicial), se pide una expresión analítica que muestre el fenómeno, además es aquí donde se enuncia el concepto de función como una dependencia de cantidades variables, incluye además una segunda actividad por equipos de 3 o 4 personas para coordinar los distintos modos de representación de funciones. La cuarta *Fase de Reconstrucción* (El alumno construye una representación alternativa, modelo más perfecto de análisis de la realidad), presenta dos actividades de vinculación entre los diversos modos de representación de una función, siendo esta, la etapa donde el alumno debe construir una representación alternativa, que involucre los elementos mostrados. Para terminar, la quinta *Fase Operacionalización* (el profesor pone a prueba la "nueva" representación, por ejemplo en una evaluación), se compone de dos actividades de exploración y verificación en las que los estudiantes deberán aplicar las nociones vistas y responder preguntas encaminadas a lograr una conexión entre los modos de representación en los casos presentados, para, finalmente, proporcionar una definición del concepto de función que involucre los significados asociados incorporados en la situación.

Las fases de deconstrucción y construcción de una concepción alternativa, en este diseño son presentadas sobre la base del debate en equipo y luego grupal. Durante las actividades de trabajo en equipo, el profesor debe circular entre los mismos y pedir a los alumnos precisión en sus respuestas y justificación de estas.

Existen fenómenos de decontextualización y recontextualización sucesivos en cada etapa de reorganización de la información. Las prácticas sociales sucesivas como son la selección de los contenidos de enseñanza, o el diseño de situaciones por el profesor, incluyen reconstrucciones de un objeto nuevo, y en estas, debe tomarse en cuenta que los estudiantes no llegar a las aulas como libro en blanco, sino que poseen todo un conjunto de representaciones sobre los objetos a tratar (Giordan y De Vecchi, 1988).

Una representación puede considerarse como un modelo personal de organización de los conocimientos con relación a un problema particular en un contexto definido. No podemos hablar de la representación como de la noción en sí. La diferencia entre representación y concepto científico no es una diferencia de grado, sino constituyen dos modos distintos de conocimiento (…). Mientras que éste es un conjunto de relaciones definidas en términos operatorios, la representación es un modo de conocimiento.

5.2 Descripción de la situación de aprendizaje

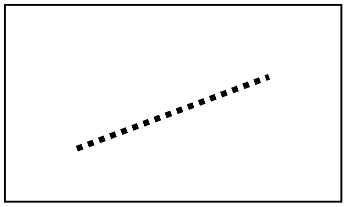
FASE 1. SENSIBILIZACIÓN.

Objetivo: Emergencia de las representaciones de los alumnos.

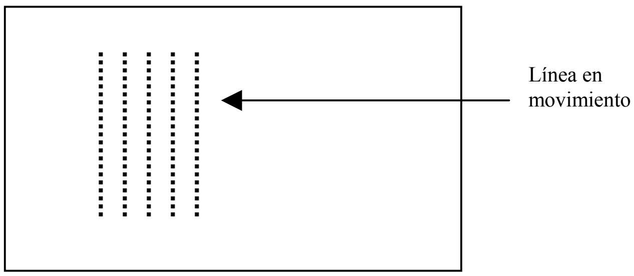
Actividad 1. Introducción

Objetivo: Descripción de magnitudes a través de un movimiento

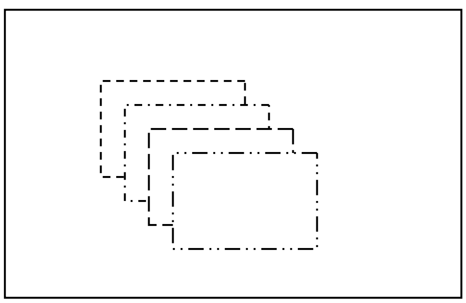
- El profesor pide a los alumnos que imaginen el movimiento de ciertas magnitudes como el punto, la recta, la superficie. Tal como se ejemplifica enseguida:
- En el pizarrón de muestra como una línea recta es creada por el movimiento de un punto.



- La línea recta, al moverse describe una superficie.



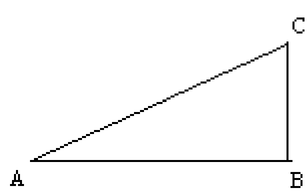
- La superficie al moverse describe un sólido.



La cualidad principal de las variables es que representan el movimiento de los fenómenos físicos y geométricos que se estudian a través del cálculo diferencial.
"Una variable *x* es una cantidad medible que aumenta o disminuye"

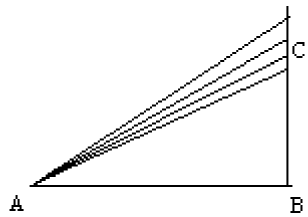
Actividad 2. Variación de la variable.

- El triángulo ABC se encuentra en estado de constancia o reposo:

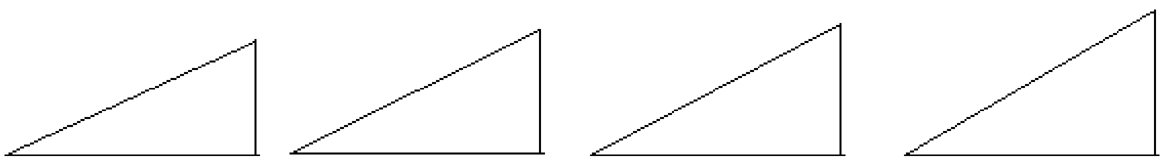


En el siguiente ejercicio se muestra la variación de uno de los lados del triángulo ABC.

Si damos la oportunidad al lado BC de moverse hacia arriba, el mismo se convierte en una variable.



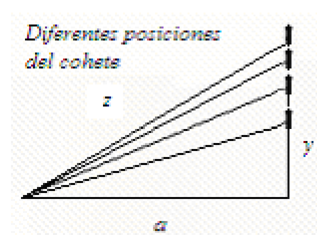
Cada uno de estos movimientos son llamados instantáneas y tienen variación. Algunos de ellos se muestran enseguida.



El lado AB se dice que está fijo o en "estado de constancia".
*Todo lo constante se dice que está fijo".

Al dejar de moverse posee de nuevo un valor de constante o reposo.
"Una variación es el cambio de posición o estado de una cantidad".

En el siguiente ejemplo, la imagen representa el movimiento de un cohete lanzado al espacio, el cual es observado por una persona colocada a una distancia *a* del lanzamiento. El primer cambio que sufre la figura con el movimiento del cohete, es una *variación* o instantánea del propio movimiento. Una instantánea es como una fotografía tomada en determinado momento de una de las *variaciones* del suceso.



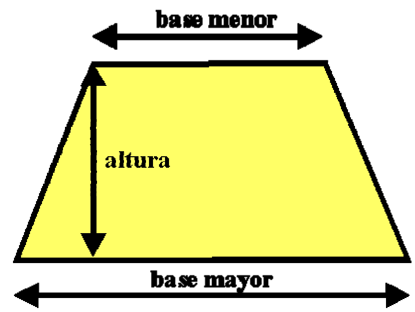
Preguntas:
Para cada una de las instantáneas ¿Cómo es el área?, ¿Es la misma?, ¿Es diferente?

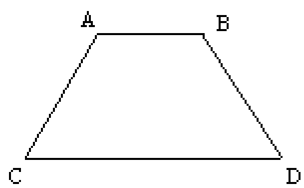
FASE 2. DESCONTEXTUALIZACIÓN

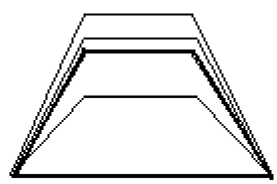
Actividad 1: Reafirmar la Relación entre variables

En esta fase se presentan otros ejemplos que apoyen la fase anterior.

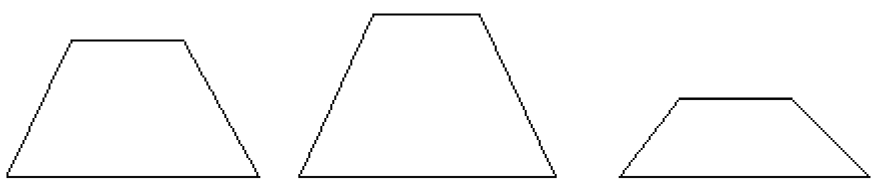
Consideremos que tenemos un trapecio ABCD, donde AB es la base menor y CD es la base mayor, ambas constantes, si hacemos que la altura aumente o disminuya:







Cada uno de los movimientos es una instantánea:



De manera grupal y con lluvia de ideas, responden las siguientes preguntas:

Para cada una de las instantáneas ¿Cómo es el área?

¿Es la misma?, ¿Es diferente?

¿De qué depende que cambie el área?

A partir de lo anterior, se define la noción de variación de manera semejante a los argumentos de los libros de texto de cálculo, como: *el cambio de magnitud de una cantidad.* Lo cierto es que en el ejemplo cambiaron de magnitud las variables en movimiento: las longitudes *BC y AC*, el área $A = \frac{a}{2}y$ del triángulo, los lados AC y BD, el área $A = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$ del trapecio, etc.

FASE 3: DECONSTRUCCIÓN

Actividad 1:

Dado que se han presentado los elementos para identificar las variables (que aumentan o disminuyen), se pide a los estudiantes que proporcionen una expresión analítica que muestre ese cambio tanto para el caso del triángulo como para el trapecio. El profesor debe guiar la discusión en torno a las dos ecuaciones de área y concluir al respecto.

Conclusión: a partir de las respuestas dadas por los estudiantes y de los argumentos mencionados a lo largo de las actividades anteriores, el profesor deberá enunciar el concepto de función como una dependencia de cantidades variables.

El realizar este tipo de reconocimiento geométrico de las variaciones, es que más adelante nos permitirán el *estudio analítico* del propio movimiento; es decir, no consentiremos solamente en *ver* su expresión variacional. A la cantidad de variaciones que se pueden establecer a partir de las expresiones $A(y) = \frac{a}{2}y$ y $A(h) = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$ se le llama *variabilidad,* la cual representa el total de las variaciones producidas por el fenómeno. En el caso de las fórmulas o ecuaciones $A = \frac{a}{2}y$, $A = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$ estas significan el caso particular de una de las variaciones originadas por el fenómeno, y dejan ver al movimiento en un estado estacionario o de *constancia,* en el cual es factible su análisis.

Coordinación De los distintos modos de representación

Se tienen cuatro maneras de representar una función:

1. Verbal.
2. Tabla de valores.

3. Gráfica
4. Algebraica.

El método más común para visualizar una función es su gráfica. Iniciamos con una descripción verbal de la función enseguida, de contar con datos sobre las lecturas podemos construir una tabla de valores, en caso contrario podemos realizar una gráfica aproximada del comportamiento del fenómeno, y finalmente escribir una expresión que lo represente. Uno de los problemas que hemos observado es la falta de vinculación que existe entre los diversos tipos de representación de funciones. En algunos casos los estudiantes pueden describir correctamente lo que sucede en un evento, otras construir una gráfica a partir de los datos observados, o resolver un problema dada su función analítica. Sin embargo el paso de un sistema de representación a otro causa conflictos en clase. Cuando a un estudiante se le pide que resuelva un problema el cual involucra la interpretación de datos para responder ciertas preguntas, o el obtener conclusiones a partir de una gráfica cuando no se da la expresión analítica, causa serios problemas, pues la mayoría de las veces consideran cada uno de los contextos por separado. De ahí la importancia de incluir elementos operacionales que nos ayuden a lograr esa vinculación.

Actividad 2:

Se divide el grupo en equipos de 3 o 4 personas. El profesor comenta la siguiente situación:

Usted tiene un vaso con agua fría y coloca dentro de él unos cubos de hielo luego lo deja sobre la mesa, en un día caluroso del mes de julio.

Pide a los estudiantes que respondan a lo siguiente:

a) Describan con palabras cómo cambia la temperatura del agua a medida que pasa el tiempo.
b) A continuación tracen una gráfica aproximada de la temperatura del agua como función del tiempo transcurrido.

Después de esto un representante de cada grupo pasa a exponer la solución del problema. El profesor apoya al grupo para la conclusión del problema.

FASE 4: RECONSTRUCCIÓN

Actividad 1

Con los mismos equipos se les proporciona el siguiente ejercicio:

La siguiente tabla muestra el registro de temperatura medido cada dos horas, desde la media noche hasta las 12 del mediodía, un día de otoño. El tiempo *t* se midió en horas a partir de la media noche. La temperatura T es en grados centígrados.

t	0	2	4	6	8	10	12
T	15	14	12	10	11	14	16

a) Trace una gráfica de T en función de *t*.
b) Describa con palabras lo que ocurre en la gráfica.
c) Utilice la gráfica para estimar la temperatura a las 5 a.m. y a las 11 a.m.

Actividad 2.

En equipos de 3 o 4 personas. Se presenta el siguiente ejercicio para que llenen la tabla y respondan las preguntas:

Se tiene un globo de volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, el cual, al ser llenado con aire, su radio varía.

r	*V*
0.5	
0.9	
1.0	
2.5	
3.0	
3.8	

Después de llenar la tabla responde las siguientes preguntas:

¿Cómo se comporta el volumen del globo conforme se llena de aire?

¿De qué depende ese cambio?

Muestra gráficamente el cambio del volumen respecto al radio.

Escribe una expresión analítica que represente la totalidad de los cambios del radio.

Al final de la fase, un representante de cada grupo pasa a exponer los resultados de las dos actividades.

El profesor apoya al grupo para la conclusión del problema.

FASE 5: OPERACIONALIZACIÓN

Actividad 1: Exploración

Es de suma importancia verificar que las diversas representaciones estén presentes en la resolución de problemas, e identificar si el estudiante las vincula adecuadamente.

Un avión vuela horizontalmente tomando contacto en tierra con una torre de control en diversos momentos de tiempo antes de pasar por encima de ella, la cual se encuentra verticalmente a 10,000 metros del avión.

a) Describe con palabras lo que ocurre con la distancia entre el avión y la torre conforme pasa el tiempo.
b) Desarrolla una gráfica que muestre la simulación del movimiento del avión con respecto a la torre para diferentes momentos de contacto.
c) Toma una de las instantáneas de la simulación y dibújala al lado. Puesto que es un triángulo rectángulo, nombra los lados variables con las letras *z* y *x*, asigna la magnitud al lado constante (10,000).
d) Dado que el avión está en movimiento horizontal hacia la torre, la distancia entre estos también cambia. Establece una relación que involucre ambas variables, incluyendo la constante (Sugerimos utilizar el Teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$).
e) Con la expresión obtenida llenar la siguiente tabla:

Distancia horizontal entre el avión y el punto por encima de la torre de control. ( )	Distintas posiciones de la distancia del avión a la torre de control en tierra. ( ). Expresión:
20,000	
18,000	
12,000	
7,000	
5,000	
1,000	

f) Escribe una expresión analítica que represente la totalidad de los cambios.

Actividad 2.

A partir de los ejemplos anteriores, expresa con tus propias palabras el concepto de función

5.3 Aplicación de la secuencia

La secuencia de aprendizaje se aplicó por el mismo profesor a dos grupos de estudiantes de la materia de Cálculo Diferencial del Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez:

Carrera	Turno	Número de participantes	Hora de incio	Hora de terminación	Receso
Ingeniería Industrial	Matutino	20	11:00 a.m.	1:55 p.m.	no
Ingeniería Electromecánica	Vespertino	20	4:00 p.m.	6:35 p.m.	6:00 a 6:15

Ambos grupos se formaron en seis equipos de trabajo: dos equipos de cuatro integrantes y cuatro equipos de tres integrantes cada uno. El primer grupo en que se aplicó la secuencia fue el de la carrera de Ing. Industrial en una sola sesión de 2 horas y 55 minutos, y se pidió como evidencia que cada equipo escribiera en hoja de rotafolio el resultado de cada actividad y pasara al frente a exponerla ante sus compañeros y la escribían de nuevo en el pizarrón; considerando que el tiempo de aplicación se alargó por esta razón, al aplicarla en el grupo de Ing. Electromecánica se les pidió que al explicarla utilizaran la misma gráfica realizada en hoja de rotafolio, y de esta manera el tiempo se redujo a 2 horas 20 minutos. Recomendamos que para futuras aplicaciones de ser posible se realice en tres sesiones, ya que, aun cuando se desarrollaron de manera fluida, al final de la sesión los alumnos se mostraron inquietos por la duración de la misma.

Fase	Actividad	Tiempo aproximado (en minutos)	Comentarios
1. Sensibilización	1. Introducción 2. Variación de la variable	5 min. 10 min.	El profesor expone ante el grupo y los estudiantes participaron activamente en la lluvia de ideas
2. Descontextualización	1. Reafirmar la relación entre variables.	10 min.	Se define la noción de variación como: el cambio de magnitud de una cantidad.
3. Deconstrucción	1. Modos de representación 2. Resolución de un problema en equipo	5 min. 30 min.	Aquí finaliza la exposición por parte del profesor. Por ser el primer ejercicio tardaron más tiempo.

4. Reconstrucción	1. Actividad de reconstrucción 2. Ejercicio por equipo	25 min. 20 min.	En esta fase tardaron menos tiempo en realizar las actividades.
5.Operacionalización	1. Exploración 2. Concepto	25min. 5 min.	Se notó un poco de dificultad con los "números grandes" al realizar las operaciones. En la definición incluyen significados alternativos como: "instantáneas", "cambios", "movimientos".

5.4 Resultados de aplicación

Fases de Sensibilización y Decontextualización:

Al preguntar ¿qué cambia? respondieron:

Triángulo	Trapecio
• El ángulo. • El área. • BC. • Hipotenusa AC. • La forma	• Altura. • Los ángulos. • El área. • Los lados.

Fase de Deconstrucción:

Usted tiene un vaso con agua fría y coloca dentro de él unos cubos de hielo, luego lo deja sobre la mesa en un día caluroso del mes de julio.

Pide a los estudiantes que respondan a lo siguiente:

a) Describan con palabras cómo cambia la temperatura del agua a medida que pasa el tiempo.

b) A continuación tracen una gráfica aproximada de la temperatura del agua como función del tiempo transcurrido.

Equipo	Grupo 1	Gráfica
1	El agua en el vaso sigue igual cuando introducen los hielos pero sigue pasando el tiempo aumenta la temperatura del agua y los hielos se derriten.	Triángulo donde uno de los catetos es temperatura del agua y tiempo en la hipotenusa, la cual "varía".
2	El agua pierde calor mientras que el hielo gana calor, la temperatura va descendiendo cada vez más lento en el agua hasta llegar a un punto cero y comienza a ganarle el calor el frío y después el agua toma la temperatura ambiente.	En las abscisas la temperatura ambiente, la curva inicia en cero y desciende.
3	Al momento de colocar los hielos en el agua al	La temperatura inicia en –5 grados, desciende

	momento de que se derriten la temperatura del agua aumenta en si se vuelve más fría y su volumen aumenta cuando se derriten los hielos y al transcurso de cierto tiempo con el calor del medio ambiente la temperatura del agua cambia se vuelve más caliente.	hasta –20 y luego sube hasta 35. Nombra el eje de temperatura más no el de tiempo.
4	Llega un momento en que el agua se pone fría luego empieza a ponerse caliente el agua conforme pasa el tiempo.	La temperatura inicia en 8, disminuye sin llegar a cero para luego subir. No nombra los ejes.
5	La temperatura de el agua va disminuyendo conforme el hielo se fusiona (pasa de sólido a líquido) a temperatura ambiente. Pero cuando se derrite el hielo en el agua, tiende a ir aumentando la temperatura.	Muestra una curva suave que inicia en 30º baja y sube de nuevo. Nombra eje de tiempo.
6	Si el agua está fría y se le pone hielo el agua se pone más fría, conforme que el tiempo pasa los hielos se van derritiendo poco a poco y el agua se va calentando hasta llegar a temperatura ambiente.	Inicia con una curva que desciende y luego sube hasta llegar a una línea constante.

Los tres primeros equipos grafican por debajo de la línea de cero, los dos siguientes grafican sin considerar que al final la temperatura deberá permanecer constante. Notamos que los alumnos no están acostumbrados a describir verbalmente un evento.

Equipo	Grupo 2	Gráfica
1	La temperatura va a decrecer de manera constante con respecto a la temperatura inicial debido al intercambio de calor, al derretirse el hielo por completo, el agua tendrá una temperatura más baja, después de este cambio la temperatura ascenderá hasta igualar la temperatura ambiente.	Nombra los dos ejes correctamente, y muestra una curva suave que concuerda con la explicación textual.
2	Primero llegará a una temperatura fría máxima. Después empezará a derretir el hielo y empezará poco a poco a aumentar la temperatura del agua hasta llegar al punto en que el hielo se convierta en agua completamente y si se sigue así empezará a evaporar el agua por la temperatura.	Nombra los ejes como “grados“y “minutos”, inicia la gráfica en el origen la cual sube de forma casi lineal hasta los 30º y luego permanece constante.
3	La temperatura baja cuando se le colocan los hielos después va tomando la temperatura del medio ambiente hasta que llega a la temperatura del medio y empieza a evaporarse en poca proporción.	No nombra los ejes. Inicia en 10º desciende y luego sube hasta llegar a una constante.
4	La temperatura del agua fría con hielos empieza a cambiar a medida que empieza a adquirir la temperatura del medio ambiente que lógicamente es más caliente que la del agua, conforme transcurre el día comienzan a tener un equilibrio térmico. En pocas palabras el líquido llega a	Intercambia los ejes. Inicia en el origen y va aumentando la temperatura para luego descender.

	tomar la temperatura ambiente.	
5	La temperatura del agua es más alta y la del hielo es más baja, cuando estas se mezclan llegan a un punto igual.	No sabe como graficarlo.
6	El agua a temperatura ambiente, al momento que se le echa el hilos empieza a bajar la temperatura, llega a su menor temp. Conforme avanza el tiempo luego el agua llega a un momento en que la temperatura empieza a subir hasta que llega un momento que la temperatura del agua se pone a temperatura ambiente.	Grafica correctamente de acuerdo a lo descrito.

* En la trascripción se respetaron las palabras originales, corrigiéndose solamente la ortografía.

Se observa dificultad para expresar el evento, en cuanto a las gráficas se percibe la influencia numérica, es decir, la mayoría intenta colocar números a pesar de que en el ejemplo no se especifican.

Fase de Reconstrucción:

Actividad 1

Con los mismos equipos se les proporciona el siguiente ejercicio:

La siguiente tabla muestra el registro de temperatura medido cada dos horas, desde la media noche hasta las 12 del mediodía, un día de otoño. El tiempo *t* se midió en horas a partir de la media noche. La temperatura T es en grados centígrados.

t	0	2	4	6	8	10	12
T	15	14	12	10	11	14	16

d) Trace una gráfica de T en función de *t*.
e) Describa con palabras lo que ocurre en la gráfica.
f) Utilice la gráfica para estimar la temperatura a las 5 a.m. y a las 11 a.m.

En esta actividad encontramos que todos los equipos de ambos grupos realizaron correctamente la gráfica, describieron acertadamente el evento y los valores obtenidos para la temperatura a las 5 a.m., fue de 11º y para las 11 a.m., de 15º. Concluimos que, por ser un ejemplo del todo numérico (a lo cual los alumnos están habituados) no presentó mayor dificultad.

Ejemplos de descripciones:

El las 12 de la media noche es más alta y en la madrugada como 5 y 6 de la mañana desciende. Conforme avanzan las horas vuelve a aumentar	La temperatura disminuye de la 0:00 hrs. A las 6 a.m. hasta 5º y posteriormente incrementa de las 6:00 a.m. a las 12:00-	La temperatura disminuye al paso de las primeras 2 horas en un grado, a las 2 horas disminuido 2 grados mas, para las otras dos horas disminuido otros dos grados, en las siguientes 2 horas aumentó 1 grado, en las otras 2 horas aumentó 3 grados y en las últimas dos horas aumentó 2 grados.

Actividad 2

Se tiene un globo de volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, el cual, al ser llenado con aire, su radio varía.

r	V
0.5	0.53
0.9	3.053
1.0	4.188
2.5	65.449
3.0	113.097
3.8	229.847

Después de llenar la tabla responde las siguientes preguntas:

¿Cómo se comporta el volumen del globo conforme se llena de aire?

¿De qué depende ese cambio?

Muestra gráficamente el cambio del volumen respecto al radio.

Escribe una expresión analítica que represente la totalidad de los cambios del radio.

En esta etapa los resultados de la tabla son correctos en todos los equipos en ambos grupos, y las respuestas a las preguntas. En cuanto a la expresión analítica, la mayoría la escribió de forma correcta.

¿Cómo se comporta el volumen del globo conforme se llena de aire?	**¿De qué depende ese cambio?**	**Expresión analítica**
Grupo 1		
• Va aumentando el volumen.	• Aire	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$
• El volumen va aumentando.	• De la cantidad de aire	$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$
• Conforme el radio aumenta.	• Del radio.	$V=n\pi(r)^n$
• Va creciendo respecto al radio.	• El radio.	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$
• El volumen va aumentando.	• Porque el radio cambia conforme se va llenando de aire.	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$
• El volumen del globo se va expandiendo.	• Depende del radio del globo.	$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$
Grupo 2		
• El volumen aumenta considerablemente con respecto al radio.	• Del radio (incremento).	$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$
• Va aumentando el volumen cúbico.	• Debido a la presión del aire introducido.	$V(R)=\frac{4}{3}\pi r^3$
• Va aumentando conforme se llena.	• De la cantidad de aire que entra y lógicamente aumenta su diámetro y su volumen.	$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$
• Aumenta.	• Del aumento del radio.	$V(r)=4.1887r^3$
• Incrementa.	• Del aumento del radio	$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$
• Que el volumen va aumentando.	• Depende del radio del globo	$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$

Fase Operacionalización:

Actividad 1: Exploración

Un avión vuela horizontalmente tomando contacto en tierra con una torre de control en diversos momentos de tiempo antes de pasar por encima de ella, la cual se encuentra verticalmente a 10,000 metros del avión.

a) Describe con palabras lo que ocurre con la distancia entre el avión y la torre conforme pasa el tiempo.

b) Desarrolla una gráfica que muestre la simulación del movimiento del avión con respecto a la torre para diferentes momentos de contacto.

c) Toma una de las instantáneas de la simulación y dibújala al lado. Puesto que es un triángulo rectángulo, nombra los lados variables con las letras z y x, asigna la magnitud al lado constante (10,000).

d) Dado que el avión está en movimiento horizontal hacia la torre, la distancia entre estos también cambia. Establece una relación que involucre ambas variables, incluyendo la constante (Sugerimos utilizar el Teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$).

e) Con la expresión obtenida llenar la siguiente tabla:

Distancia horizontal entre el avión y el punto por encima de la torre de control. ( )	Distintas posiciones de la distancia del avión a la torre de control en tierra. ( ). Expresión:
20,000	22,360.67 km.
18,000	20,591.26,
12,000	15,620.44
7,000	12,206.55
5,000	11,180.33
1,000	10,049.87

f) Escribe una expresión analítica que represente la totalidad de los cambios.

Resultados:

a) Descripción	b) Gráfica	c)Triángulo	d) Relación	e) Tabla	f) Expresión
Grupo 1					
1. Varía, ya que antes de pasar por la torre las distancias x, z disminuyen, y al pasar la torre las distancias aumentan.	Bien	Bien	z, x	Bien. Sin unidades.	$c^2(b) = a^2 + b^2$ $x^2(z) = a^2 + z^2$
2. Disminuye	Bien	Bien	x, z	Bien. Km.	$z(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. Aumenta la hipotenusa entre la torre y el avión	Bien	Bien	z, x	Bien. Sin embargo nombra b,c a los lados.	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
4. Aumenta horizontalmente.	Bien	Bien	x, z	Bien	$z = \sqrt{a^2 + x^2}$
5. Disminuye.	Bien	Bien	x. z	Bien	$c^2(a) = a^2 + b^2$
6. La distancia del avión va disminuyendo en el eje x llega un momento que la distancia en el eje x del avión y de la torre de control es de cero. Pero la distancia entre el avión y la torre de control en el eje x vuelve a aumentar.	Bien	Bien	x, z	Bien. Km.	$z(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$
Grupo 2	**Gráfica**	**Triángulo**	**Relación**	**Tabla**	**Expresión**
1. Constante	Bien	Bien	x, z	Incorrecto	$x = \sqrt{z^2 + c^2}$
2. La distancia vertical no cambia sólo la distancia horizontal la cual se va reduciendo conforme avanza el avión.	Bien	Bien	z, x	Bien	$x(z) = \sqrt{10000^2 + z^2}$
3. Va a ir disminuyendo.	Bien	Bien	z, x	Incorrecto.	$c^2(x) = a^2 + b^2$
4. El avión se va acercando.	Bien	Bien	z, x	Incorrecto	$A(x) = \sqrt{a^2 + b^2}$
5. La distancia horizontal se hace más corta mientras que la vertical queda igual.	Bien	Bien	x, z	Bien	$c(z) = \sqrt{a^2 + b^2}$ $z = \sqrt{x^2 + 10000^2}$
6. La distancia del avión y la torre se van acortando conforme pasa el tiempo y después de determinado tiempo la distancia vuelve a crecer.	Bien	Bien	x, z	Bien	$z(x) = \sqrt{10000^2 + z^2}$

En la solución de este problema los puntos a), b), c) y d) fueron resueltos en forma correcta por la mayoría de los grupos, la única diferencia son las literales asignadas a cada uno de los lados del triángulo. En lo que se refiere al llenado de la tabla de valores, el 83.34 % lo hizo acertadamente. El 16.66% de las expresiones están dadas con las letras a, b, c, aun cuando en la gráfica y el triángulo dibujado si utilizan las literales x, y, z. De la misma forma, el 16.66% mezclan las literales propias del teorema de Pitágoras, con las indicadas en el ejercicio.

Actividad 2.

A partir de los ejemplos anteriores, expresa con tus propias palabras el concepto de función

EQUIPO	GRUPO 1
1	Una función es una expresión analítica que se utiliza para resolver las variaciones (dependencias) de un problema tomando como base una ecuación.
2	Sirve para darle resultado a una variable
3	Se refiere a cuando se tienen diversas fig. del mismo tipo pero diferentes dimensiones se escribe área de un lado para decir que va a aumentar esa cifra.
4	Una función sirve para calcular los cambios de un ejercicio, con una misma ecuación, agregándole lo que varía.
5	No respondieron.
6	Una función sirve para calcular puntos instantáneos de objetos en movimiento.
	GRUPO 2
1	Es algo que nos ayuda a sacar el total de todos los movimientos.
2	Una función (x) y se representa con ciertas variables y llegar a la resolución de un problema.
3	Es una forma de representar la totalidad de los cambios. Forma de representar una ecuación que incluya todo.
4	Es algo que nos sirve para resolver algo mediante procesos. Es como se representa ciertas variables para llegar a una solución de un problema.
5	Es cuando una variable depende de otra variable. Una incógnita que se tiene que buscar en base a una expresión.
6	La función es la totalidad de un fenómeno, se toma en cuenta diferentes instantes del fenómeno lo cual describe los cambios que ocurren conforme pasa el tiempo del fenómeno. Es como una fórmula que sirve para cualquier situación que se presente, sirve para diferentes instantes.

En esta última parte notamos un cambio en la (RS) por parte de los estudiantes del concepto de función, entendidas como las concepciones que poseen del propio concepto, ya que las respuestas son dadas en términos de "algo que cambia", tal como se manejó durante la aplicación de la secuencia.

Capítulo 6

Conclusiones finales

Para el diseño de la secuencia de aprendizaje, es necesario recuperar las (RS) que un individuo posee sobre cierto concepto para, a partir de ello, y a través del diseño, guiar al sujeto en una práctica que permita reconstruir (según el proceso de aprendizaje presentado anteriormente) la representación que tiene del concepto. Durante la aplicación del diseño, no fue nuestra intención romper con la (RS) que los estudiantes poseen sobre el concepto de función, sino incorporar a ésta la noción de variación. Puesto que las (RS) son definidas a través del núcleo central, que como planteamos posee una gran resistencia al cambio, entonces los elementos periféricos tienen un papel fundamental en el análisis de los procesos que originan la dinámica de una (RS), estos son considerados esquemas definidos como secuencias de información, las cuales son adquiridas por los sujetos durante su vida personal y social. Flament (1994) considera los elementos periféricos como la parte que refleja directamente las prácticas sociales conectadas con el objeto de representación, mientras que es el sistema central quien los hace válidos, en otras palabras, son los periféricos quienes determinan las diferentes conductas (prácticas) de acuerdo a la situación en que se encuentre el sujeto. De acuerdo a Guimelli (1993) el proceso de transformación se sujeta las tres condiciones (mencionadas en el capítulo anterior) que al lograrse, permiten que el grupo se adapte a las nuevas circunstancias gracias a las nuevas prácticas, las cuales no están en contradicción con la representación anterior puesto que los esquemas serán pertinentes en el campo de la representación en tanto se implementen y aparezcan de manera frecuente en las prácticas, con lo que el número de relaciones con otros elementos de la (RS) será mucho mayor. Esta actividad combina esquemas en un sólo concepto, el cual proporciona al núcleo central la coherencia con la estructura total. Este proceso de fusión es activado por las prácticas correspondientes, reorganizando y simplificando el campo de la representación.

La elección del método de recolección nos permitió diferenciar el núcleo central de los elementos periféricos.

En el análisis del contenido, encontramos escasa diferencia entre las representaciones de los profesores y las representaciones de los estudiantes sobre el concepto de función matemática. En estas condiciones, la integración de nuevos elementos es más difícil, y los elementos periféricos cumplen su función de protección del núcleo central.

La aplicación de la secuencia de trabajo, produjo un fenómeno de evolución progresiva de los elementos periféricos al integrar las nociones de variable, variación y variabilidad. En lo que respecta al núcleo central, se mantuvo, lo que no asombra dada su estabilidad y su resistencia al cambio.

El sistema periférico integró nuevos elementos sobre los anteriores, particularmente bajo la influencia del cambio de las prácticas en el aula.

En este sentido, consideramos que en la RS en torno al concepto de función, los estudiantes integraron en su sistema periférico la noción de variablilidad, ya que en la práctica, al pedirles que resolviesen un problema, encontramos procedimientos que dan muestra de ello, al aplicar los "nuevos" contenidos de estas representaciones. En particular en el problema del avión que sobrevuela una torre de control, ellos utilizan en la gráfica varias "instantáneas" y en la mayoría de los casos representan acertadamente el dibujo que los lleva a la resolución del problema, lo que confirma los elementos de la representación. Al comparar las respuestas que sobre el concepto de función dan los estudiantes en el análisis preliminar (capítulo 4) y las vertidas por quienes se les aplicó la secuencia (capítulo 5) notamos serias diferencias: las primeras se muestran en un sentido de dependencia de variables, influenciadas por profesores, los propios libros de texto y la corriente ideológica; en cambio, las respuestas del último punto indican como "algo que muestra la totalidad de los cambios", "lo que varía", " diferentes instantes", en cuyo discurso está presente la noción de variación.

Estos resultados demuestran y confirman el impacto que las prácticas sociales ejercen sobre las concepciones que se poseen de un objeto en particular.

El aplicar la (TRS) representó un reto importante para nuestra propuesta, ya que las investigaciones hasta ahora realizadas no incorporan su manejo a objetos matemáticos en sí, sino a ideologías acerca de ellos, o a la aplicación de alguna metodología en clase de matemáticas (Dubois, 1999); o al impacto que una (RS) sobre un proceso matemático tiene en un aula de matemáticas con alumnos de diferentes nacionalidades (Abreu, G. y Gorgorió N., 2007); o como las (RS) que posee el profesor sobre sus alumnos en un aula multicultural de matemáticas incluyen dimensiones individuales como son necesidades, motivación, intereses, lugar de aprendizaje y capacidades, e influyen en la manera de impartir la clase (Santesteban, 2006). En nuestra investigación, demostramos que es posible la aplicación de esta teoría para el rescate de las concepciones que se tienen de un concepto matemático y que es posible aplicar el modelo que la propia (TRS) proporciona para la transformación de una representación, adaptándolo al diseño de una situación de aprendizaje en la que se toman en cuenta tanto las (RS), como los resultados del análisis preliminar al rescatar un concepto que se ha perdido en la propia evolución de la enseñanza o que no es tomado como eje principal para la construcción de la noción de un concepto.

REFERENCIAS

Abreu, G. y Gorgorió N. (2007). *Social representations and multicultural mathematics teaching and learning.* Working group 10: Mathematics education in multicultural settings. CERME 5, 1559 - 1566

Abric, J. C. (1994). *Pratiques sociales et représentations*. Paris: PUF

Abric. J.C. (1996). Specific processes on social representations. [Versión electrónica] *Papers on social representations*. 5, 77-80.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

Astolfi, J.P. (1991). Représentations et transposition didactique : deux concepts à articuler, in *Les didactiques, similitudes et spécificités*, Actes du colloque organisé pour le 150ème anniversaire de l'Ecole Normale Libre de Braine-le-Comte, Ph. Jonnaert Editeur.

Bachelard, G. (1971). *Épistémologie*. Paris: Presses Universitaires de France.

Banchs, M. (1996). *Concepto de representaciones sociales: análisis comparativo.* Revista Costarricense de Psicología 8-9, 27-40.

Banchs, M (1994). Desconstruyendo una descontrucción, lectura de Ian Parker (1989) a la luz de criterios de Parker i Shoter (1990). [Versión electrónica] Papers on social representations – Textes sur les représentations sociales. 3, 52-131.

Borello, M. (2007). *Relación ente las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos el caso de las desigualdades. Un estado del Arte.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Guimelli, Ch. (1993) Concerning the structure of social representations. Papers on Social Representations – Testes sur les Représentations Sociales. Vol. 2 (2), 85-92, 1993.

Boyer, C. (1986). *Historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad.

Brunschvicg, L. 1922 (1986). *Les étapes de la philosophie mathématique*. París: De la edición de A. Blanchard.

Camacho, A. (2006). Revisión de las prácticas sociales y la socioepistemología. México: *Educación Matemática* 18(1), 133 a 160.

Camacho, A. (2007). Las nociones de variable, variación y variabilidad en la enseñanza del concepto de función. *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Querétaro, México.

Camacho, A. & Sánchez, B.I. (2006) The transference of the mathematical language to different semantic fields. *International Journal of Materials and Product Technology, Vol.27*(1,2), 1-12. Inderscience Publishers.

Cantoral, R. & Farfán, R. M (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes des nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. La Pensée Sauvage, France. Vol. 24, Núm. 2.3, 137.

Cantoral, R. & Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6*(2), 133-154.

Castañeda, A. (2002). Estudio didáctico del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 5(1), 27-44.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

Cauchy, A-L (1827) Curso de Análisis. Facultad de ciencias de la UNAM, colección mathema. 1994 1ª ed., p. 77

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

De Gortari, E. (2000). Diccionario de la lógica. México. Plaza Valdéz S.A. de C.V.

Descartes, R. (1886). *La Géométrie*. 9ª edition, Paris, A. Hermann.

Díaz Covarrubias, F. (1873). *Elementos de análisis trascendente o cálculo infinitesimal*. 1ª edición, México: F. R Castañeda y L. G Rodríguez, Impresores.

Doise, W., Clémence, A. & Lorenzi-Cioldi, F. (2005). Representaciones sociales y análisis de datos. Versión en español. México: Instituto Mora.

Dollo, Ch. (2001). *Quels déterminants pour l'évolution des savoirs scolaires en Sciences Economiques et Sociales?" (l'exemple du chômage)*. Tesis de doctorado. U. de Provence, Francia.

Dollo, Ch. & Parayre, S. (2005). Et l'amour dans tout ça ? Des conceptions des élèves à la construction de savoirs scientifiques sur la familla. *Numéro spécial de la revue Skholê IUFM de l`academie d`Aix-Marseille*. 41-63.

Dollo, Ch et Joshua S. (2002) Conceptions d´élèves et diversité des paradigmes en sciences économiques et sociales (l´exemple du chômage) Article paru dans L'Année de la Recherche en Sciences de l'Education. En http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/ses/didactique/obst.html

Dubois, L. & Dagau, P-Ch. (1999). *Le travail de groupe dans les nouveaux moyens de math 1P: attitudes d'enseignants*. Tesis de Licenciatura en Ciencias de la Educación. Université de Genève. Obtenido de http://tecfa.unige.ch/~laurent/didact/memoire.htm el 1 de febrero de 2007.

Dubois, L. (2000). Les modèles de l'apprentissage et les mathématiques. Obtenido de http://tecfa.unige.ch/~laurent/didact/theories.htm el 4 de febrero de 2007.

Durand. (1996). *L'enseignement en milieu scolaire*. París: PUF L'éducateur.

Durkheim, É. (1894). *Las reglas del método sociológico*. México (edición en español, 2004): Ediciones Coyoacán.

Durkheim, É. (1912). *Formas elementales de la vida religiosa*: México (edición en español, 2004): Ediciones Coyoacán.

Euler, L. (1760). *Reflexiones sobre el espacio, la fuerza y la materia*. México (edición 1988): Alianza Editorial, SEP.

Farfán, R. M. y García, M- (2005). El concepto de función. Un breve recorrido epistemológico. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 18, 489-493). México.

Farfán, R. M. (1990). *La noción de concepción en didáctica*. Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV. IPN.

Farr, R. (1984). Psicología social II. Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales. En S. Moscovici (Ed.). *Las representaciones sociales*. (pp.495-506). Barcelona, España: Paidós.

Fil, Ch., Amade-Escot, Ch., Genet-Volet, Y. (S.F.) Mise en oeuvre des programmes par les enseignants: le cas du badminton au quebec et en france. Disponible en línea http://www.unice.fr/ufrstaps/colloque_antibes/Fil/Fil2.htm

Flament, C. (1994). Pratiques et représentations sociales. En J. Abric (Ed.): Représentations sociales et pratiques. París. PUF.

Font, V. (2000). *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas.* Representation in mathematics education.

Galileo, G. (1613). Historia y demostraciones en torno a las manchas solares. Editado en Roma por Giacomo Mascardi.

García, G. & Serrano, C. (2000). Variables institucionales en el conocimiento profesional del docente: el caso de la función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(3), 357-370.

Gauss, Ch. F.(1855). *Méthode des moindres carrés. Mémoires sur la combinaison des observations.* París: Mallet Bachelier.

Guimelli, Ch. (1993) Concerning the structure of social representations. Papers on Social Representations – Testes sur les Représentations Sociales. Vol. 2 (2), 85-92, 1993.

Giordan, A. (1996). Les conceptions de l´apprenant comme tremplin pour l´apprentissage. *Articles de recherche*. Obtenido de http://www.ldes.unige.ch/publi/vulg/concApp/concep.htm el 30 de enero de 2007.

Giordan, A. & De Vecchi, G. (1988). *Los orígenes del saber. De las concepciones personales a los conocimientos científicos*. España: Diana Editora.

Giordan, A. & De Vecchi, G. (1995). Los nuevos modelos de aprendizaje ¿más allá del constructivismo? *Perspectivas 25*(1), 65-72.

Guimelli, Ch. (2004). *El pensamiento social*. México: Ediciones Coyoacán.

Granville, W. (2005). Cálculo Diferencial e Integral. *Cap.* 2*: Variables, funciones y límites* (pp. 11-24). México. Limusa Editores.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1*(1), 5-21.

Hutmacher, W. (1993). Quand la réalité résiste á la lutte contre l'échec scolaire. Cahier # 36. Géneve: Service de la Recherche Sociologique.

Ibañez, T. (1988). *Ideologías de la vida cotidiana*. Barcelona, España: Sendai.

Jodelet, D. (2003). *Conferencia sobre representaciones sociales*. Primeras jornadas sobre representaciones sociales. CBC-UBA, Argentina.

Jodelet, D. (1984). Psicología social II. Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales. En S. Moscovici (Ed.). *La representación social: fenómenos conceptos y teoría*. (pp.469-494). Barcelona, España: Paidós.

Jordan, W. (1876). Tratado general de topografía. Ediciones G. Gili S.A. México 1981Joshua, S. & Dupin (1993). Introduction á la didactique des sciences et des mathématiques. París. PUF.

Juleu, M. (1732) Diccionario Universitario. París

Kolmogorov, A.N. (1975). Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. Moscú: Editorial MIR.

Larson, R. & Edwards, B. (2006). Cálculo con Geometría Analítica. *Cap.* 1 *: Preparación para el cálculo (pp.* 2-40*).* 8a. Ed. México: Mc Graw Hill.

Legendre, M. (1811). Mémoires sur la méthode des moindres quarrés, et sur l´attraction des ellipsoides homogènes. Francia.

Lipschutz, S. (1992). Matemáticas para computación. Serie Schaum. México: Mc. Graw Hill.

Mingüer, L. (2006). *Entorno Sociocultural y cultura matemática en profesores de nivel superior de educación. Estudio de caso: el Instituto Tecnológico de Oaxaca: Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

Moscovici, S. (1985). *Psicología Social I y II*. Barcelona España. Paidós.

Newton, I. (1740). *La methode des fluxions, et des suites infinies.* París: De Bure.

Piaget, (1959). *Dialectique.* Éditions du Griffon, Neuchátel, No 13.

Pluvinage y Cuevas (2006).U acercamiento didáctico al concepto de función. En E. Filloy (autor y compilador). Matemática Educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual. Aula XXI Santillana Editores, Cinvestav – IPN. México

Purcell, E. J. & Varberg, D. (2000). Calculus with Analytic Geometry. *Cap.* 2*: Functions and limits*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Pozo, J. I, Scheuer, N, Del Puy, M, Mateos, M, Martin, E, De la Cruz, M (2006). *Nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje. Las concepciones de profesores y alumnos. Crítica y Fundamentos*. Barcelona: Editorial Grao.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Sánchez, B. I, Camacho, A, (2007). El concepto de función matemática en los docentes a través de las representaciones sociales. *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* . CIEM. México.

Santesteban, M. (2996): Representaciones sociales del profesor de matemáticas acerca de los alumnos inmigrantes: un primer Master Thesis, Programa de Doctorat en Didàctica de les Ciències i les matemàtiques . UAB.Barcelona.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds). *The concept of function: Aspects of epistemolofy and pedagogy* (pp. 25-28) Washimgton, DC, USA: Mathematical Association of America.

Stewart, J. (2001). Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. *Cap.* 1: *Funciones y modelos* (pp. 10-77). Bogotá, Colombia: Thompson Editores. 2ª. Ed.

Swokowski, E. (1989). Cálculo con Geometría Analítica. *Cap*. 1*: Las funciones y sus gráficas.* (pp. 1-50). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Tochon F. (1989). A quoi pensent les enseignants quand ils planifient leurs cours? *Revue Française de Pédagogie,* 86, 23-33.

Valero, M. (2003). *Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca de funciones en situación escolar*. Tesis de maestría no publicada. CICATA – IPN. México.

Youschkevitech, A.P. (1976). *The concept of function up to the middle of the 19th century*. (Traducción: Rosa Ma. Farfán) Serie Antologías 1 (99-145) Cinvestav IPN. México