Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en
Ciencia Aplicada y Tecnología
Avanzada. Unidad Legaria.

Tesis para obtener el grado de Doctor en Matemática Educativa

Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial.

PRESENTADA POR **Marcela Parraguez González**

DIRIGIDA POR **Dra. Asuman Oktaç**

México, D.F., Febrero de 2009

La directora de tesis Dra. Asuman Oktaç es investigadora titular del Cinvestav-IPN.

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 23 del mes de enero de 2009 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial"

Presentada por el(la) alumno(a):

Parraguez	González	Marcela Cecilia
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 6 | 0 | 5 | 3 | 9 |

aspirante al grado de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Asuman Oktaç

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dra. Gabriela Buendía Abalos

Dra. María Trigueros Gaisman

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 04 del mes Febrero del año 2009, la que suscribe Marcela Cecilia Parraguez González alumna del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A060539, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autora intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dra. Asuman Oktaç y cede los derechos del trabajo intitulado "Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección marcela.parraguez@ucv.cl. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Marcela Parraguez González

Agradecimientos

A mi Directora de tesis, *por estar presente cada vez que requerí de su apoyo. Aprendí de exigencias, observando su trabajo. Aprendí de su mirada, el respeto por lo humano. Su compromiso político, es mi aprendizaje ciudadano. Es su vida la que me ha enseñado más valores, que todos los artículos revisados. Gracias Asuman Oktaç por todo el tiempo que me has dedicado y todo lo que me has enseñado.*

Especialmente a mi Esposo, *Gracias José Pantoja me tendiste siempre tu mano. En tu simpleza de paciencia y presencia, no permitiste que me alejara de tu lado. Por tu ejemplo académico, una vara alta que me dio fuerzas para caminar hacia el monte más alto.*

A mi hija: *Danae, es el cimiento escondido de este trabajo, que refleja la renuncia de miradas y abrazos en momentos que se necesitaron.*

A mis Padres, *por darme siempre ánimo envuelto de generosidad y esmero*

Al Director del Instituto de Matemáticas-PUCV, *Gracias Jaime Mena, tú sabiduría y filosofía, tejió en mí, estos mil vocablos y los impregnó por esta pasión que he heredado…*

A mi Caso de Estudio, "Construcción de Conocimiento", *¡Son tantos textos de vida regalada! Apertura de almas, trabajo y aulas… La palabra confiada, en cada mirada y manos estrechadas permitieron que este trabajo se realizara.*

A mis Maestros y Amigos, *están todos en las palmas de mis manos. Gracias por sus generosidades…Me alentaron en el último tramo.*

A mi historia, *¡Gracias vida por darme tanto! Ayúdame tú ahora… ¡A dar más de lo que ya me has dado!*

Índice General

Capítulo 3

Capítulo 4

Resumen

En esta tesis doctoral se pretende estudiar la evolución cognitiva del concepto de espacio vectorial en los estudiantes de álgebra lineal, cuando van integrándose al conocimiento de los estudiantes nociones tales como independencia-dependencia lineal y base. Se toma como marco teórico de la investigación a la teoría APOE (Acción – Proceso – Objeto – Esquema), porque ella brinda los elementos teóricos y analíticos, útiles y rigurosos, que permiten describir e interpretar razonamientos exhibidos por los estudiantes con relación a la evolución cognitiva del concepto de espacio vectorial y la introducción de conceptos fundamentales del álgebra lineal, que permiten dar cuenta de la manera en que los estudiantes universitarios entienden y son capaces de hacer evolucionar un concepto de las matemáticas en un nivel superior.

PALABRAS CLAVES: teoría APOE, esquema, álgebra lineal, espacio vectorial.

Abstract

In this doctoral dissertation our objective is to study the cognitive evolution of the concept of vector space in the students of linear algebra, as notions such as linear independence/dependence and basis get integrated into their knowledge. We use the theoretical framework of APOS (Action-Process-Object-Schema) theory in our research, since it offers useful and rigorous theoretical and analytical tools that allow us to describe and interpret reasonings that students show in relationship with the cognitive evolution of the concept of vector space. At the same time it helps us to model the way with which university students understand the fundamental concepts of linear algebra and how they make evolve an advanced mathematical concept.

KEYS WORDS: APOS theory, schema, linear algebra, vector space.

Glosario

Abstracción Reflexiva – Mecanismo que nos sirve para extraer o separar una característica de un objeto, a partir no exactamente de los objetos, sino de las acciones que realizamos sobre ellos. La palabra Reflexiva tiene doble connotación: una es reflexionar sobre nuestras acciones, otra es proyectar nuestra acción sobre el plano de las operaciones.

Construcción mental – Existen variadas definiciones, pero en general se refiere a la organización de las ideas para intentar comprender algo.

Construcción Acción – Resulta de una operación mental o física repetible que transforma de alguna manera un objeto físico o mental. Es, de manera general, algorítmica y con estímulos externos.

Construcción Proceso – Resulta de la interiorización una Acción. Esta construcción no se deja conducir por los estímulos externos, sino por los internos.

Construcción Objeto – Resulta de la reflexión sobre las operaciones aplicadas en el proceso, que es dinámico inicialmente, y quien que la posee puede actuar sobre el proceso, puede realizar transformaciones y pensarlo como algo estático, como algo involucrado en sí mismo, es decir encapsulado.

Construcción Esquema – Formar un nuevo esquema resulta de la organización de las construcciones acción, proceso, objeto y también otros esquemas previamente construidos.

Coordinación – Un tipo de abstracción reflexiva. Un acto cognitivo de hacer coincidir dos o más procesos para construir un nuevo proceso; esta coincidencia de procesos puede realizarse por simple concatenación.

Encapsulación – Un tipo de abstracción reflexiva en la cual uno puede pasar de una concepción[1] proceso a una concepción objeto. Tal abstracción permite al individuo mirar un proceso como algo cerrado en sí mismo con "existencia propia" lo que permite mirarlo como un objeto.

Interiorización – Un tipo de abstracción reflexiva. Una construcción de procesos internos como una manera de atribuir sentido a fenómenos observados. Piaget se refiere a esa construcción como "traducción de una sucesión de acciones materiales en un sistema de operaciones interiorizadas". (Dubinsky 1991a)

ISETL – Lenguaje de programación utilizada en la educación con una sintaxis muy parecida con la notación matemática.

Nivel Intra – Nivel de esquema que es caracterizado por una observación individual en los ítems, aislado de acciones, procesos y objetos de naturaleza similar. Uno no consigue hacer interrelaciones entre los ítems, entre las características del concepto.

Nivel Inter – Nivel de esquema que es caracterizado por la posibilidad de construcción de interrelaciones entre acciones, procesos y objetos de otros conceptos o de lo mismo. Uno es capaz de percibir y utilizar, si es necesario, ítems de naturaleza similar.

Nivel Trans – Nivel de esquema que corresponde a una estructura fundamental que el individuo construye o empieza a construir a través de las interrelaciones obtenidas en otro nivel y ella es entendida como algo que le da armonía, relación lógica o coherencia al esquema.

[1] Comprender, encontrar justificación a los actos. Formar idea, hacer concepto de algo.

Teoría APOE – Estructura teórica, basada en las ideas de Piaget, que busca describir cognitivamente la comprensión matemática de un individuo. Es compuesta de 4 elementos: Acción, Proceso, Objeto y Esquema.

Tríada Piagetiana- Niveles de desarrollo de los esquemas: Intra, Inter y Trans.

Introducción

El estudio de la enseñanza del álgebra lineal en algunos programas universitarios y el fracaso de una buena parte de estudiantes al abordar los conceptos básicos de esta área ha motivado la creación de grupos de investigación en países como Canadá, Estados Unidos, Francia y México, entre otros. Algunos de estos investigadores han diseñado teorías que apuntan a determinar las causas de las dificultades de los estudiantes con esta área, a la vez que presentan propuestas didácticas y metodológicas buscando ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades al tratar con los conceptos de espacio vectorial, base, conjunto generador y transformaciones lineales entre otros.

Con este trabajo de investigación buscamos aportar con base en la teoría APOE desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores (Asiala et al., 1996), una descripción de las construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) que pueden realizar los estudiantes para comprender el concepto espacio vectorial. Esta descripción sistemática es presentada mediante una Descomposición Genética que representa un modelo cognitivo, donde señalamos un camino mediante el cual los estudiantes pueden construir dicho concepto.

La descomposición genética que presentamos en este trabajo es el resultado de la aplicación del ciclo investigación planteado por esta teoría. Este ciclo está compuesto por tres componentes: Análisis teórico, Diseño y Aplicación de Instrumentos y, Análisis y verificación de datos. Como resultado de nuestro análisis teórico diseñamos una descomposición genética preliminar que señala el camino por el cual los estudiantes pueden construir el concepto espacio vectorial; con base en dicho análisis teórico diseñamos dos instrumentos: un cuestionario diagnóstico y una entrevista buscando detectar las construcciones que habíamos considerado en la descomposición genética preliminar, eligiendo las preguntas de tal manera que permitirían obtener información profunda respecto a la manera de pensar de los estudiantes. Estos instrumentos fueron aplicados a los estudiantes matriculados en el programa de Licenciatura en Matemáticas en el Instituto de Matemáticas (IMA) de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV- Chile). El análisis de los resultados obtenidos con estos datos empíricos nos permitieron refinar nuestro análisis teórico y presentar una descomposición genética mejorada. Este análisis teórico además de ser un modelo de aprendizaje representa una herramienta didáctica que señala estrategias de enseñanza del concepto espacio vectorial.

La presentación de nuestro trabajo la hemos organizado en cinco capítulos que describimos a continuación:

Capítulo 1 *Problemática, objetivos de investigación y antecedentes*. En este capítulo presentamos una mirada general de los trabajos que se han desarrollado los últimos años sobre el aprendizaje y la enseñanza de los conceptos del álgebra lineal. De allí nace nuestro problema de investigación relacionado específicamente con el estudio de los espacios vectoriales desde su definición formal. En este capítulo hacemos una reflexión sobre la naturaleza abstracta del álgebra lineal y su importancia en la formación del conocimiento matemático.

Capítulo 2 *Marco teórico*. Con base en los antecedentes decidimos tomar como referencia teórica la teoría APOE ya que desde esta perspectiva es posible abordar los conceptos desde su naturaleza matemática. En la descripción de dicha teoría hacemos énfasis sobre la definición de las diferentes construcciones, los mecanismos mentales para la construcción y los niveles intra, inter y trans de un concepto en general, a la vez que presentamos un desglose del ciclo de investigación de esta teoría mediante la explicación y relación de cada una de sus componentes.

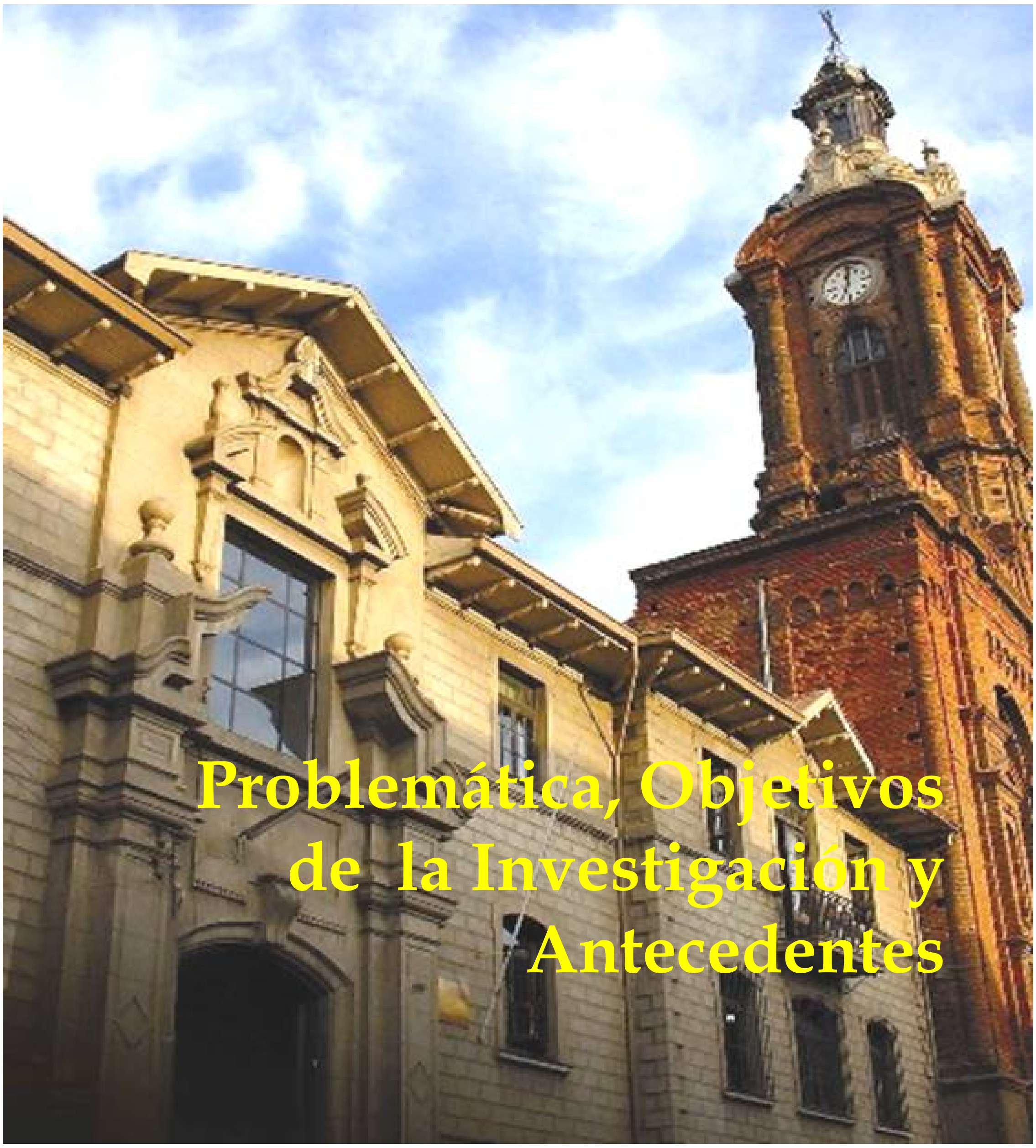
Capítulo 3 *Análisis teórico*, *intención de los instrumentos y análisis hipotético sobre las construcciones*. Este capítulo representa una parte fundamental de nuestra investigación, allí iniciamos nuestra metodología guiada por las componentes del ciclo de investigación brindado por la teoría

APOE. Como resultado del análisis teórico, primera componente de dicho ciclo, presentamos una descomposición genética preliminar del concepto espacio vectorial. Esta representa nuestra guía para el diseño de los instrumentos (cuestionario diagnóstico y entrevista) y fundamenta su análisis a priori.

Capítulo 4 *Análisis y verificación de datos: Evidencia de la evolución cognitiva realizada por los estudiantes*. En este capítulo presentamos los resultados empíricos obtenidos de la aplicación de los instrumentos. Allí mostramos evidencias de las construcciones y de la evolución cognitiva que los estudiantes han realizado sobre el concepto espacio vectorial y las conexiones que han logrado establecer con otros conceptos. Estos representan la base para argumentar los resultados de nuestra investigación.

Capítulo 5 *Conclusiones*. En este capítulo presentamos la descomposición genética refinada, resultado de nuestro análisis de los datos empíricos obtenidos. También hacemos algunas recomendaciones de tipo didáctico y pedagógico; y planteamos finalmente algunas preguntas de investigación que pueden guiar futuros trabajos sobre este concepto. Esperamos que este trabajo represente un aporte significativo a la problemática planteada sobre las dificultades de los estudiantes para construir los conceptos básicos del álgebra lineal. Como ya mencionamos los resultados que presentamos representan una herramienta didáctica para que maestros e investigadores diseñen e implementen instrumentos en su quehacer cotidiano que promueva la construcción adecuada del concepto espacio vectorial.

Capítulo 1


Problemática, Objetivos
de la Investigación y
Antecedentes

Capítulo 1

Problemática, Objetivos de la Investigación y Antecedentes

1.1 Problema de Investigación

La explicación del concepto[2] de espacio vectorial que puede verse en los textos universitarios[3] hoy en día, es la culminación de un largo y accidentado proceso de evolución histórica, durante el cual este concepto y otros conectados con él (independencia y dependencia lineal, base, dimensión, transformación lineal, etc…) se encontraban implícitos en diferentes contextos de la matemática o la física. El interés por estudiar sus antecedentes y el contexto en que se gestó es tan reciente que los trabajos específicos al respecto son prácticamente inexistentes antes de que Gray (1980) planteara el problema de investigar los orígenes del concepto de espacio vectorial y bosquejara las fuentes que podrían conducir a reconstruir su historia.

Actualmente, parece indiscutible la importancia del concepto de espacio vectorial como tópico central en el estudio del álgebra lineal, el cual normalmente aparece como uno de los primeros temas, de un curso inicial de la materia. Un ejemplo de ello, es un primer curso de álgebra lineal para Licenciatura en Matemática, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile (PUCV), donde el concepto de espacio vectorial suele introducirse mediante explicaciones relacionadas con la definición de espacio

[2] En esta investigación, consideramos que "*concepto"* es una idea que concibe o forma el intelecto.

[3] Álgebra Lineal de la OEA-monografía nº5, 1976; Álgebra Lineal de Hoffman y Kunze, 1973; Álgebra Lineal de Greub, 1981; Introducción al Álgebra Lineal de Howard Antón, 1998; Algebra Lineal una introducción Moderna de David Poole, 2004; Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana de Juan de Burgos, 2006; Álgebra Lineal con aplicaciones de Nakos y Joyner; entre otros,1999.

vectorial *V* sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Dicho procedimiento de explicación consiste en aclarar qué significa que $(V,+)$ tenga estructura de grupo[4]:

> *Sea G un conjunto no vacío y $*$ una operación en G. Diremos que G es un grupo bajo la operación $*$ si las tres afirmaciones son ciertas:*
>
> *i. Asociatividad:*
> *Para todo x,y,z en G, se cumple $(x*y)*z = x*(y*z)$*
>
> *ii. Existencia de elemento neutro:*
> *Existe e, elemento neutro en G, tal que para todo x en G, se tiene $x*e = e*x = x$*
>
> *iii. Existencias de elementos inversos:*
> *Para todo x en G, existe x' en G tal que $x*x' = x'*x = e$*
>
> *Esto se denota resumidamente; $(G,*)$ es grupo.*
>
> *Si además se verifica:*
>
> *iv. Conmutatividad*
> *Para todo x,y* en G, se cumple $x*y = y*x$
>
> *Entonces $(G,*)$ es un grupo Abeliano o simplemente G es un grupo Abeliano, subentendiendo que hay una operación $(*)$.*

que $\mathbb{K}$ tenga estructura de cuerpo:

> *Se dice que $(\mathbb{K},+,\bullet)$ es un cuerpo si y sólo si se cumple:*
>
> *i.* $(\mathbb{K},+)$ *es un grupo abeliano, con e neutro aditivo.*
>
> *ii.* $(\mathbb{K}-\{e\},\bullet)$ *es un grupo abeliano.*
>
> *iii.* *Distributividad:* $(\forall x,y,z \in \mathbb{K})\big(x\bullet(y+z) = x\bullet y + x\bullet z\big)$

y que *V* va a ser un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, si:

> *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, se dice que $(V,+,\bullet)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ o un $\mathbb{K}$-espacio vectorial si y sólo si cumple con:*
>
> *1.* $(V,+)$ *es un grupo abeliano.*
>
> *2.* $\bullet : \mathbb{K}\times V \to V$ *, es una función que cumple:*

[4] Definiciones extraídas del texto: ALGEBRA LINEAL de los Autores: L. Aburto, D. Jiménez, R. Johnson. Tercera Edición (2003), Instituto de Matemáticas-PUCV.

(a) $(\forall a \in \mathbb{K})(\forall x, y \in V)(a \bullet (x+y) = a \bullet x + a \bullet y)$

(b) $(\forall a, b \in \mathbb{K})(\forall x \in V)((a+b) \bullet x = a \bullet x + b \bullet x)$

(c) $(\forall a, b \in \mathbb{K})(\forall x \in V)((a\,b) \bullet x = a \bullet (b \bullet x))$

(d) $(\forall x \in V)(1 \bullet x = x)$

Si bien el procedimiento utilizado pudiera parecer simple, la introducción por primera vez de una matemática tan abstracta, a opinión de los profesores lo hace lento y el estudiante muchas veces no tiene clara en su mente la serie de requisitos que debe tener V para ser un espacio vectorial sobre K. Cabe preguntarse también, hasta qué punto los alumnos comprenden la definición de espacio vectorial, y ¿cuáles son las razones que hacen que este concepto sea difuso para los estudiantes?, o bien, ¿estarán los estudiantes en condiciones de hacer evolucionar cognitivamente un conocimiento tan abstracto (el de espacio vectorial), y dar a éste una estructura de objeto matemático con un nuevo significado a medida que van integrándose al conocimiento del estudiante nuevos conceptos tales como: independencia-dependencia lineal y base.

Ahora bien, las interrogantes descritas anteriormente se extienden hacia la educación superior, nivel en que situamos nuestro problema de investigación: *"estudiar la evolución cognitiva del concepto de espacio vectorial y su relación con otras nociones fundamentales del álgebra lineal".* Se sabe que las dificultades que muestran los estudiantes para alcanzar una adecuada comprensión de los conceptos del álgebra lineal, en particular el de espacio vectorial tienen orígenes diversos; uno de ellos es el epistemológico: el concepto de espacio vectorial no fue creado para resolver problemas, sino para unificar y generalizar métodos y conceptos ya existentes (Dorier 1990, 1995a, 1995b).

En nuestra opinión, para el entendimiento de espacio vectorial, se requiere además del dominio de las definiciones y de ciertas técnicas específicas, de la comprensión de las propiedades y teoremas que hacen evolucionar la teoría matemática del álgebra lineal, así como de un manejo equilibrado entre el desarrollo conceptual con el tratamiento algorítmico.

Investigaciones han reportado que el discurso matemático escolar del álgebra lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en deterioro de la comprensión de nociones básicas (Dorier y Sierpinska, 2001; Sierpinska et al., 2002).

Una primera tentativa en revelar las fuentes de las dificultades de los estudiantes en álgebra lineal, a través de un análisis histórico y epistemológico se puede encontrar en Robinet (1986). El trabajo en esta dirección fue seguido por Dorier (1995a; 1996; 1997 y 2000). Estas investigaciones no solamente sirvieron como referencia para una mejoría de los errores y las dificultades de los estudiantes, sino también se han utilizado como inspiración para diseñar actividades para los estudiantes. Particularmente un resultado de estas investigaciones es el referido con la fase pasada de la génesis de la teoría de espacios vectoriales. Las raíces de este paso final se pueden encontrar a fines del siglo diecinueve, pero realmente comenzó solamente después de 1930. Esto es la axiomatización del álgebra lineal, es decir una reconstrucción teórica de los métodos de resolución de problemas lineales, usando los conceptos y herramientas de una nueva teoría axiomática. Es importante recalcar que la axiomatización en sí misma no permitió a los matemáticos solucionar nuevos problemas, pero permitió un acercamiento y un lenguaje más universal que fue utilizado en una variedad de contextos (análisis funcional, formas cuadráticas, aritmética, geometría, etc.) Este acercamiento marcó un nuevo nivel en la abstracción, el concepto de espacio vectorial que es una abstracción de un dominio de objetos abstractos: vectores geométricos, n-uplas, polinomios, series o funciones. Esto representa un cambio de perspectiva que induce un cambio sofisticado a nivel de las operaciones mentales. De hecho, uno puede distinguir dos fases en la construcción de un concepto: unificación (poner juntos varios saberes para crear un todo) y generalización (Dorier y Sierpinska, 2001).

Los investigadores franceses (por ejemplo ver Dorier, 1998) nos hablan del obstáculo del formalismo. Este obstáculo se manifiesta en los estudiantes que manipulan varios objetos como vectores, ecuaciones, coordenadas, etc. “sumergiéndose en una avalancha de términos nuevos, de símbolos nuevos, de definiciones nuevas, y de teoremas nuevos”. Estos autores concluyen que "para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal es sólo un catálogo de nociones muy abstractas que ellos no manejan". Por otro lado, ellos nos advierten de la dificultad para encontrar las situaciones al nivel de los estudiantes donde los conceptos del álgebra lineal jugarían el papel de herramienta para resolver problemas. Este hecho está unido con la naturaleza generalizadora y unificadora del Álgebra Lineal.

Nuestra investigación pretende estudiar la evolución cognitiva del concepto de espacio vectorial en un estudiante de álgebra lineal, cuando van integrándose al conocimiento del estudiante nociones como independencia-dependencia lineal y base. Nuestra principal pregunta de investigación es:

¿Cómo construyen los estudiantes el concepto de espacio vectorial?

Particularmente una pregunta que servirá de guía en este trabajo de tesis doctoral es:

¿Qué papel juegan algunas otras nociones del álgebra lineal específicas para que los estudiantes logren una comprensión profunda del concepto de espacio vectorial?

En la pregunta inmediatamente anterior, cuando decimos *"comprensión profunda", e*stamos pensando que las siguientes construcciones estarían involucradas:

Interiorizar acciones para llegar a una concepción proceso.
Coordinar dos o más procesos, de modo que los estudiantes respondan a situaciones en las que se necesita construir la composición de esos procesos.
Encapsular varios procesos para construir nuevos objetos.

Con esta investigación buscamos aportar desde nuestra perspectiva, un análisis cognitivo de la evolución de uno de los conceptos básicos del álgebra lineal: el concepto de espacio vectorial. Nuestra posición en esta investigación será abordar el concepto de espacio vectorial desde su definición matemática formal como una estructura formada por un conjunto con una operación binaria, que satisface axiomas, junto a otro conjunto llamado cuerpo que tiene otras dos operaciones binarias, que agregado con el conjunto anterior definen una operación entre ellos y satisfacen otros axiomas. Cabe aclarar que las descripciones que hacemos de la construcción de conceptos involucrados son en términos cognitivos.

1.2 Objetivos de la Investigación

En este trabajo esperamos dar cuenta de las construcciones mentales que un estudiante puede hacer sobre el concepto espacio vectorial. Para ello presentamos una descomposición genética viable que describa un modelo cognitivo que fundamente el posible diseño de material docente y apoye la reflexión sobre el aprendizaje de este concepto. Con esto en mente esperamos dar respuesta a la siguiente pregunta principal:

¿Cómo se construye el concepto de espacio vectorial?

Para dar respuesta a esta pregunta de investigación nos hemos propuesto los siguientes objetivos:

Objetivos Generales

1. Identificar y analizar las construcciones mentales que hacen los estudiantes de álgebra lineal al construir el concepto de espacio vectorial, mediante la metodología de investigación planteado por la teoría APOE.

2. Describir la evolución del concepto de espacio vectorial en el proceso de integración de los nuevos conceptos: independencia/dependencia lineal y base, en los estudiantes de álgebra lineal.

3. Ofrecer un conjunto de sugerencias didácticas basado en nuestra investigación para la enseñanza del concepto de espacio vectorial en el aprendizaje del álgebra lineal.

Objetivos Específicos

1. Conocer las concepciones e identificar las dificultades de los alumnos en relación al concepto de espacio vectorial y su evolución.

2. Contribuir al entendimiento de la noción de esquema dentro del marco teórico APOE.

3. Coadyuvar al entendimiento de los conceptos teóricos utilizados en el marco teórico APOE.

1.3 Antecedentes

Los problemas relacionados con el aprendizaje y enseñanza del Álgebra Lineal han recibido mucha atención de la comunidad matemática en los últimos años; Jean-Luc Dorier y Anna Sierpinska así lo señalan en su reporte de investigación (Dorier y Sierpinska, 2001). El Álgebra Lineal, cognitivamente hablando, es un tema difícil que requiere del manejo de muchos conceptos abstractos, que para construirlos y generalizarlos es necesario reconocer semejanzas entre los objetos, las herramientas, los métodos y reorganizar viejas capacidades para relacionarlas con elementos del nuevo conocimiento. Por ello, Dorier y Sierpinska (2001) señalan que un punto crucial para el aprendizaje del Álgebra Lineal es entender su naturaleza de unificadora y de generalizadora de conceptos bajo varios aspectos; como así también, interpretar un resultado en diversos contextos, a través de diversos puntos de vista y de registros de representación (como formal, n-uplas o coordenadas, o geométrico). Por otro lado, el formalismo también es un componente de la naturaleza del Álgebra Lineal; la cantidad aplastante de nuevas definiciones y la falta de conexión con los conocimientos preexistentes (Geometría, Grupos y Grupos de movimientos) en el estudiante, terminan formando un obstáculo en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal.

Tradicionalmente desde los años 70, el Álgebra Lineal se ha enseñado en Chile de modo tal que el alumno pierde la intuición geométrica para resolver problemas básicos y ocupa el álgebra lineal como un catálogo de nociones muy abstractas, que ellos no manejan, para intentar dar soluciones a problemas como el siguiente: *demostrar que* $\left\{\vec{0},\vec{v},\vec{w}\right\}$ *es linealmente dependiente si* $\left\{\vec{0},\vec{v},\vec{w}\right\}$ *es un conjunto de vectores de un espacio vectorial V*; donde se requiere uso de propiedades estructurales de la teoría. Por lo tanto las ampliaciones de unificación y de generalización tienen que ser entendidos por los estudiantes, si queremos que acepten el formalismo y utilicen la teoría correctamente. Las dificultades evidenciadas anteriormente no mejorarán, a menos que se construyan secuencias de enseñanza, en las cuales esta idea se pueda entender referida a una actividad matemática, de modo que se convierta en una reflexión personal de los estudiantes. Los estudiantes deben poder ver la relación entre su conocimiento e intuición en contextos concretos y en el lenguaje formal del Álgebra Lineal. Ello hace tremendamente difícil preparar situaciones didácticas (en el sentido de la escuela francesa) donde los conceptos pueden surgir como herramientas para resolver problemas.

Quienquiera que haya enseñado un curso básico de Álgebra Lineal, sabe cuan difícil puede ser para un estudiante entender la definición formal de independencia lineal y sobre todo ejemplificarla en varios contextos. Es más, una vez que los estudiantes han demostrado su habilidad de verificar si un conjunto de n-uplas, ecuaciones, polinomios o funciones son linealmente independientes, ellos todavía no pueden utilizar el concepto de independencia lineal en contextos donde tienen que hacer uso del concepto en cuestión.

Podemos dar el siguiente ejemplo: *Demostrar que* $\left\{\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}\right\}$ *es linealmente independiente, sabiendo que* $\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\right\}$ *es linealmente independiente en un espacio vectorial de dimensión tres*. De hecho en muchos casos los estudiantes inventan "teoremas en acción" (noción introducida por Gérard Vergnaud; ver Dorier, 1998) es decir, reglas o teoremas de acción que son válidos en algunas situaciones restringidas, pero crean errores cuando se generalizan; por ejemplo:

"algunos estudiantes pueden asociar linealmente independiente con vectores no colineales, esto puede suceder cuando el estudiante tiene experiencia con dos vectores en el plano y hace una generalización equivocada" (Saldanha, 1995).

Dorier (1998) afirma que es necesario que el profesor conozca el tipo de teoremas en acción que los estudiantes pueden construir, para poder ayudarles a superar sus errores y a corregirlos de manera eficaz.

La enseñanza del álgebra lineal, y sobre todo las dificultades de los estudiantes para enfrentarse a conceptos abstractos de dominio matemático, recibió la atención de varios investigadores. Muchos trabajos de investigación concernientes a diferentes aspectos de su enseñanza y aprendizaje han sido publicados. Sierpinska y sus colaboradores se centraron en los modos de pensamiento sintético y analítico, como aquellos pensamientos teórico y práctico y nos explicaron cómo los objetos del álgebra lineal cambian de sentido según el modo de pensamiento que se usa para resolver problemas. Las diferentes interpretaciones que se requieren para un mismo objeto constituyen una fuente de dificultades para principiantes que tienen poca experiencia en álgebra lineal (Sierpinska, 2000; Sierpinska et al., 2002).

1.3.1 Estudios Relacionados con el Concepto de Espacio Vectorial

Entre las investigaciones relacionadas con tema de la presente investigación, sobresalen aquéllas cuyo interés está centrado en el concepto abstracto de vector como elemento de un espacio vectorial. Estas investigaciones están interesadas principalmente en los problemas de la enseñanza y el aprendizaje del concepto de espacio vectorial como estructura algebraica.

Un análisis epistemológico cuidadoso lleva a Dorier (1990, 1995a y 1995b) a la conclusión de que el concepto de espacio vectorial pertenece a una clase de conceptos que él llama “unificador y generalizador” porque no fueron creados para resolver problemas, sino para unificar y generalizar métodos y conceptos ya existentes. Basado en este análisis propone un ambiente para que los estudiantes lleguen a establecer por sí mismos los axiomas que definen un espacio vectorial.

Otro acercamiento a la enseñanza del concepto de espacio vectorial ha sido desarrollado por Harel (1987, 1989a, 1989b, 1990). Harel identifica la introducción repentina de los conceptos abstractos del álgebra lineal y su concretización en modelos principalmente algebraicos, como la causa principal de las dificultades que los estudiantes enfrentan en su curso de álgebra lineal. Al momento de entrar en contacto por primera vez con estos conceptos, los estudiantes no cuentan con una mínima base intuitiva y visual sobre ellos y están muy poco familiarizados con los modelos algebraicos utilizados. Harel aplica el “principio de representación múltiple” para diseñar una secuencia de enseñanza con base en concretizaciones geométricas y algebraicas que a su juicio resultan más familiares a los estudiantes. En esta propuesta se contemplan tres fases; en la primera se discuten algunos conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales, usando modelos geométricos sin coordenadas, en la segunda se introducen los mismos conceptos de la fase anterior usando como modelos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ para llegar a establecerlos en $\mathbb{R}^n$ y en la última se discuten los espacios vectoriales de dimensión menor igual a tres pero con elementos indefinidos. Se pretende en esta última fase que los estudiantes puedan usar las representaciones gráficas aprendidas en la primera fase, para visualizar conceptos y resolver problemas.

Una tercera aproximación, desarrollada muy recientemente, está basada en la teoría denominada Acción-Proceso-Objeto-Esquema (conocida como APOE). A partir de esta teoría un grupo de investigadores interesados en la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática del nivel universitario (cuyo nombre Research in Undergraduate Mathematics Education Community es más conocido por sus siglas como RUMEC), ha desarrollado algunos materiales de enseñanza en materias como precálculo, cálculo, matemáticas discretas y álgebra abstracta.

La teoría APOE ha sido creada por Ed Dubinsky, fundador y uno de los miembros más conocidos de RUMEC. Después de las críticas publicadas por Dubinsky (1997) a las recomendaciones del grupo LACSG (Linear Algebra Curriculum Study Group), véase (Carlson et al, 1997), sobre la enseñanza del álgebra lineal, RUMEC ha puesto más atención a la problemática del aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal y ha preparado materiales de enseñanza donde materializan sus concepciones didácticas (Weller et al., 2002). En este texto se propone una aproximación a la enseñanza del concepto de espacio vectorial a partir del estudio de espacios vectoriales finitos. En este acercamiento el estudiante se introduce al estudio de espacios vectoriales elaborando programas de computadora con los cuales explora sus propiedades. Una exposición de su fundamentación teórica enmarcada en la teoría APOE, está publicada en Trigueros y Oktaç (2005). Esta investigación tiene una relación directa con nuestro proyecto de investigación tanto en su tema como en su marco teórico. Las autoras utilizan la teoría APOE para explicar las construcciones mentales que los estudiantes pueden hacer mientras están aprendiendo el concepto de espacio vectorial.

También existen otros trabajos de investigación más particulares, como los desarrollados por Sierpinska, Hillel y Dreyfus (1999) sobre transformaciones lineales y valores y vectores propios, los de Pavlopoulou (1993, 1994) sobre coordinación de registros de representación en situaciones relacionadas con los vectores y los de Maracci (2005, 2006) sobre las dificultades y errores de los estudiantes graduados y no graduados al resolver problemas de álgebra lineal, en los cuales muestra algunas dificultades de los estudiantes relacionadas con nociones básicas de la teoría de espacio vectorial, analizadas en términos de la dualidad proceso objeto de Sfard. Maracci (2008) da cuenta del trabajo de la investigación de su doctorado, cuyos objetivos generales del proyecto de investigación describimos a continuación:

1. Documentar en estudiantes graduados y no graduados posibles dificultades y errores con respecto a las nociones de combinación lineal, conjunto generador, dependencia/independencia lineal, base y dimensión de un espacio vectorial.

2. Identificar "*concepciones*"[5], referidas a esas nociones, las cuales pueden describir las dificultades y evidentemente documentarlas.

En particular, Maracci intentó llevar a cabo su investigación brindando atención principalmente en la noción de la combinación lineal, ya que según el investigador esta noción es central en el enfoque axiomático, generalmente seguido en la enseñanza del álgebra lineal.

La hipótesis de su trabajo tiene que ver con las dificultades de los estudiantes en articular las concepciones de las nociones de la teoría de los espacios vectoriales, operacional y estructural, ya que parecen ser consistentes

[5] El uso del término "concepción" indica el autor, merece algunos comentarios. En un principio lo utiliza consistentemente con el masivo uso de términos en matemática educativa: eso es para referirse a los posibles puntos de vista de un solo objeto matemático y de su representación relacionada (Artigue, 1999). Después especifica el término introduciendo en el capítulo 3 de su tesis, el modelo *ck¢* (Balacheff, 1995), a través del cual da una definición precisa del término *"concepción": es una cuádruple formada por cuatro componentes (P(problemas), R(operatoria), L(representaciones), Σ (estructura de control)) y de relaciones entre ellas.*

con los resultados de los análisis de los libros de textos, pero a decir verdad la necesidad de operar con tales articulaciones no está claro en los libros de textos, al contrario pueden ser ocultados por la disponibilidad de algoritmos para resolver diferentes problemas. Después de una descripción breve de su estudio centra el análisis de las dificultades de acuerdo a dos marcos teóricos diferentes: la teoría de los modelos tácitos de Fischbein y la teoría de la dualidad proceso-objeto de Sfard. También propone una reflexión retrospectiva con respecto a las razones por qué decidió llevar su análisis de acuerdo con más de un marco teórico y por qué escogió esas bases teóricas (Maracci, 2008, p.269):

> *Ni las opciones de llevar a cabo el análisis de acuerdo a diferentes marcos teóricos, ni la opción de un marco teórico específico fueron completamente hechas a priori, sino que tomamos esa decisión como nuestro estudio y del avance en la recolección de la toma de datos. Esto está parcialmente relacionado al objetivo general de la comprensión de las dificultades de los estudiantes relacionados a nociones específicas de la teoría de los espacios vectoriales, el cual motivó nuestro trabajo y para su estudio natural. De hecho fue principalmente a través de la recolección de datos desarrollados y de su análisis que conseguimos una más profunda idea del entendimiento de los errores de los estudiantes y posibles dificultades en lo que los marcos teóricos podrían contribuir a organizar y explicar tales dificultades.*

Maracci eligió desarrollar su análisis de acuerdo a las teorías de Fischbein y Sfard por diferentes razones. Por un lado, comparte el punto de vista de Fischbein que existe una dimensión implícita de conocimientos, más allá de nuestro conciente y de nuestro control, el cual influencia nuestros procesos de pensamientos, y que un análisis explícito de tal dimensión es posible y necesario. Por otro lado, la enseñanza de la teoría de los espacios vectoriales en las universidades italianas siguen una aproximación axiomática la cual fuertemente estresa la “naturaleza algebraica” de su noción básica de la teoría de los espacios vectoriales; consecuentemente el estudio de las dificultades de los estudiantes en la teoría de los espacios vectoriales puede beneficiarse desde la adopción de una perspectiva consistente con la teoría de

Sfard, la cual reveló eficiencia para analizar las dificultades de los estudiantes en álgebra.

Finalmente propone una breve comparación entre los resultados de los dos análisis, donde uno de los aspectos más distinguidos tiene que ver con la manera en la cual la "linealidad" es tomada en cuenta desde el punto de vista cognitivo.

En efecto, el análisis en términos de la dualidad proceso-objeto está centrado sobre y directamente en la conceptualización de la noción combinación lineal. De alguna manera la idea de cómo la "linealidad" emergió de ese análisis se refiere directamente a la posibilidad y al significado de realizar combinaciones lineales. La estructura lineal global de espacio vectorial se mantiene detrás de la escena, nunca es cuestionada. De cierta manera el marco teórico dualidad proceso-objeto ha dado un lente para investigar dentro de la estructura espacio vectorial en vez de la estructura en sí misma.

Por el contrario el análisis en términos del modelo tácito tiene que ver directamente con la idea de estructura: espacio vectorial y subespacio están tomados en consideración como objetos de investigación y no solamente como "ambientes" donde ocurre el evento lineal. Efectivamente el modelo tácito sugerido en la hipótesis puede esconder (en vez de revelar) la estructura vectorial: en un sentido en $\mathbb{R}^n$ –el supuesto paradigma de espacio vectorial– un fenómeno lineal relevante puede resultar trivializado a causa de $\mathbb{R}^n$ estructura lineal "natural". En particular, la "linealidad" –representada como la posibilidad de realizar combinaciones lineales– está condensado y ocultado si es que las combinaciones lineales son directamente percibidas como n-uplas.

Finalmente Maracci concluye destacando que, no ha dejando de lado las (profundas) diferencias de los dos análisis, ambas hipótesis declaradas en su tesis permiten dar cuenta para una variedad de dificultades en estudiantes: más aún, diferentes comportamientos de los estudiantes que enfrentan diferentes tareas para reorganizar y marcar en "sistemas consistentes".

1.3.2 La Naturaleza del Concepto Espacio Vectorial

En el largo y accidentado proceso de evolución histórica, durante el cual el concepto de espacio vectorial y otros conectados con él (independencia y dependencia lineal, base, dimensión, transformación lineal, etc…) se encontraban implícitos en diferentes contextos de la matemática o la física, pueden distinguirse, como lo ha documentado Dorier (1995a), dos períodos de unificación: El primero de ellos alrededor del concepto de determinante, se inicia con la publicación de los trabajos de Cramer[6] sobre el tema, a mediados del siglo XVIII, y culmina a principios del siglo XX con el desplazamiento de los determinantes por la formulación axiomática de la teoría de espacios vectoriales. Durante este período surgen, en el contexto del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, algunos conceptos fundamentales como dependencia, rango y dualidad; aplicándose a dimensiones finitas. De hecho hasta principios del siglo XX, los determinantes eran prácticamente la única noción común entre los problemas lineales y se habían vuelto una herramienta imprescindible para abordar cualquier problema de naturaleza lineal. Otros trabajos como el de Euler que mantenían otro punto de vista sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, no tuvieron una influencia inmediata y el enfoque de Cramer terminó por imponerse. La geometría ha jugado aquí un papel importante, no sólo aportando el marco intuitivo de los descubrimientos algebraicos y que desembocaron en lo que hoy se conoce como análisis vectorial, sino que además la búsqueda de un cálculo geométrico intrínseco condujo al estudio de las propiedades de los segmentos de recta dirigidos, que sirvió como antecedente a los primeros trabajos axiomáticos. Todavía a principios del siglo XX, conceptos tan importantes como el de rango de una matriz permanecían estrechamente ligados al de determinante. El breve artículo de Miller (1910) titulado “On the solution of a system of linear equations”, resulta ilustrativo al respecto; Miller demuestra un teorema sobre sistemas consistentes de ecuaciones lineales utilizando la definición de rango

[6] Los trabajos de Leibniz sobre determinantes, escritos más de cincuenta años antes que los de Cramer, fueron conocidos hasta mediados del Siglo XIX, razón por la cual no se les menciona como referencia inicial en este período, véase Smith D.E.(1959, pp.267-270).

de una matriz como “el orden del determinante distinto de cero más grande formado por elementos de la matriz tomados en orden” (ibid, p. 137) que atribuye a Frobenius.

El segundo período, se extiende según Moore (1995, p. 263) desde la publicación del primer conjunto de axiomas para n-uplas dado por Darboux en 1875, aunque la primera definición axiomática de espacio lineal fue dada por Giuseppe Peano hasta 1888, y concluye con la publicación del texto de Birkhoff y MacLane en 1941, cuya axiomática se ha trascrito antes. Durante este lapso se da un proceso de refinamiento y aceptación del acercamiento axiomático a la teoría de espacios vectoriales, enmarcado en un movimiento general de la matemática en esa dirección, que toma impulso en la necesidad de unificar el gran número de nuevas teorías que se expandían rápidamente. Los determinantes van perdiendo el papel preponderante que tenían, al grado tal que en la tercera edición de “A Survey of Modern Algebra” aparecen hasta el Capítulo X y su utilidad prácticamente se ha reducido al cálculo de polinomios característicos, como los autores mismos lo aclaran (Birkhoff and MacLane, 1965, p. 280):

> *“Cada matriz cuadrada tiene un determinante, aunque el determinante puede usarse en el estudio elemental del rango de una matriz y en la solución de ecuaciones lineales simultáneas, su aplicación más esencial en teoría de matrices es la definición del polinomio característico de una matriz.”*

Al final de este período se han logrado unificar bajo un conjunto de axiomas, los espacios vectoriales de dimensión finita e infinita, dando un paso importante hacia la creación del álgebra lineal como un campo de estudio independiente, que agrupa muchos fenómenos lineales de diferentes partes de la matemática (véase, Moore, p. 264). Es debido a estas particularidades de su gestación y su evolución que Dorier lo ha incluido (1995a), junto al de Grupo y otros en una categoría de conceptos que ha llamado unificador y generalizador (unifying and generalizing concepts). A diferencia de otros como el de derivada o el de la integral de Riemann, que se construyeron porque se requerían como herramienta para resolver problemas, esta categoría de conceptos y en particular el de espacio vectorial responden a otras motivaciones. Al respecto Dorier (idem, p 176) precisa:

> *"Por lo tanto, puede sugerirse que el éxito de la axiomatización [del concepto de espacio vectorial] no provino de la posibilidad de llegar a resolver problemas matemáticos no resueltos, sino de su poder de generalización y unificación y, consecuentemente, de la simplificación en la búsqueda de métodos para resolver problemas en matemáticas. Como una consecuencia, este acercamiento marcó un nuevo nivel en la abstracción, el concepto de espacio vectorial es una abstracción de objetos ya abstractos, como los vectores geométricos, n-uplas, polinomios, series o funciones."*

Los conceptos que pertenecen a esta categoría jugaron el papel de unificar y generalizar diferentes métodos, herramientas y objetos que se encontraban dispersos en diferentes contextos como la geometría, los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones diferenciales. En resumen, se conjuntan en ellos las tres características siguientes:

- No fueron creados para resolver nuevos problemas.
- Unifican conceptos y métodos ya existentes.
- Reorganizan en una nueva teoría los resultados dispersos.

1.3.3 Teoría de los Espacios Vectoriales en libros de textos

En la mayor parte de los libros de texto[7] se presenta la definición axiomática de espacio vectorial[8]. Esto desde luego no resuelve el problema planteado

[7] Álgebra Lineal de la OEA-monografía nº5, 1976; Álgebra Lineal de Hoffman y Kunze, 1973; Álgebra Lineal de Greub, 1981; Introducción al Álgebra Lineal de Howard Antón, 1998; Álgebra Lineal una introducción Moderna de David Poole, 2004; Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana de Juan de Burgos, 2006; Álgebra Lineal con aplicaciones de Nakos y Joyner 1999; entre otros.

sobre el nivel de generalidad, porque la formulación explícita de la definición dice con frecuencia poco sobre el nivel al que alude el concepto en el texto. Harel (1987) ha encontrado, al analizar los contenidos de 32 libros de texto de álgebra lineal, que pueden distinguirse en ellos cuatro niveles de generalidad (ídem, p. 30).

- **Nivel 1.** Un espacio vectorial cuya dimensión es un número explícito (usualmente 1, 2, o 3) y con elementos definidos (por ejemplo segmentos dirigidos o polinomios).
- **Nivel 2.** Un espacio vectorial cuya dimensión es un número específico y con elementos indefinidos (por ejemplo: el espacio $W = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) / A + A^t = 0 \right\}$).
- **Nivel 3.** Un espacio vectorial cuya dimensión es un parámetro (es decir n) y cuyos elementos están definidos (por ejemplo: $\mathbb{R}^n$ como el espacio de *n*-uplas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, donde los x_i son números reales.
- **Nivel 4.** Un espacio vectorial cuya dimensión es un parámetro y cuyos elementos no están definidos (por ejemplo: el espacio vectorial $\ker(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / Ax = 0 \right\}$, donde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$).

Esta diferenciación de niveles es muy útil cuando se desea comparar las definiciones que aparecen en los textos de espacio vectorial.

1.3.4 Perspectivas de Enseñanza del concepto Espacio Vectorial

A continuación se describen y comentan tres perspectivas distintas en la enseñanza del concepto de espacio vectorial.

[8] Excepto aquellos textos como el Álgebra Lineal y sus aplicaciones de Hilbert Strang, donde la definición axiomática no aparece explícitamente como parte de la "teoría", sino apenas mencionada en un ejercicio (Strang, 1982, p.62).

1.3.4.1 La perspectiva de Guershon Harel

Después de analizar una gran cantidad de libros de texto de álgebra lineal, Harel (1987) ha detectado que existen en ellos dos supuestos implícitos con respecto al aprendizaje del material que presentan y que la docencia ha evidenciado como falsos:

1º) Los estudiantes son capaces de tratar con estructuras abstractas sin una preparación considerable y

2º) Pueden apreciar la economía de razonamiento cuando los conceptos particulares y sistemas se tratan a través de una representación abstracta.

Harel considera que principalmente las dificultades enfrentadas por los estudiantes en el curso de álgebra lineal se deben a que los conceptos abstractos se introducen abruptamente sin contar con una base intuitiva y visual y se concretizan en modelos principalmente algebraicos que son poco familiares a los estudiantes. Utiliza el principio de representación múltiple para diseñar una secuencia de enseñanza a base de concretizaciones geométricas y algebraicas con las que los estudiantes están más familiarizados. Esta perspectiva consta de tres fases que pueden resumirse de la manera siguiente:

Fase 1. Se discuten aquí algunos de los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales (combinación lineal, dependencia e independencia lineal, base y dimensión), usando modelos (llamados por el autor espacios de vectores) geométricos sin coordenadas (la recta, el plano y el espacio).

Fase 2. Se introducen los mismos conceptos de la fase anterior usando como modelos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ para llegar a establecerlos en $\mathbb{R}^n$. El concepto de dimensión se establece a través del estudio de los conjuntos de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales y se usan transformaciones lineales específicas para motivar las operaciones matriciales.

Fase 3. Se discuten aquí los espacios vectoriales de dimensión menor igual a tres pero con elementos indefinidos. Se pretende en esta fase que los estudiantes puedan usar las representaciones gráficas aprendidas en la fase 1, para visualizar conceptos y problemas.

La experimentación de esta perspectiva ha sido reportada como exitosa (Harel, 1989a) y una exposición más detallada sobre la experiencia del trabajo en el aula fue publicada por el autor al año siguiente (Harel, 1990).

1.3.4.2 La perspectiva de Jean Luc Dorier

La perspectiva didáctica de Dorier (1995b) se ubica dentro del marco general constructivista, tomando elementos de varios trabajos de investigación realizados en esta línea. Su punto de partida es que el concepto de espacio vectorial pertenece a una categoría que ha denominado conceptos unificador y generalizador. Una dificultad para la enseñanza de los conceptos unificador y generalizador, es el papel de su preexistencia, que exige identificar las características comunes de los objetos a ser abstraídos y desechar aquellas que no interesan (por ejemplo el producto cruz entre vectores o la multiplicación de matrices pueden desecharse cuando se construye el concepto de espacio vectorial). Este proceso de abstracción requiere apartarse un poco, para ver el conocimiento previo desde un nuevo punto de vista.

Este trabajo de Dorier también está relacionado con los trabajos de Dubinsky, puesto que en el proceso de construcción de los conceptos unificador y generalizador, una componente esencial es el análisis reflexivo sobre los objetos a ser unificados. Dubinsky introduce el término "descomposición genética"[9] de un concepto para referirse a la descripción de sus diferentes aspectos y relaciones con otros conceptos en términos de esquemas, siempre enfocándose en las construcciones mentales que hacen los estudiantes, mientras que Dorier habla del nivel meta como la etapa en la cual los conocimientos y competencias a ser unificados requieren verse a otro nivel.

1.3.4.3 La perspectiva de Ed Dubinsky

Un tercer acercamiento, desarrollado recientemente, está basado en la teoría denominada Acción-Proceso-Objeto-Esquema (conocida como APOE). Con base en esta teoría un grupo de investigadores interesados en la educación matemática a nivel universitario (conocido como RUMEC) ha desarrollado un programa de investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática en este nivel y ha propuesto algunos materiales de enseñanza en materias como precálculo, cálculo, matemáticas discretas y álgebra abstracta.

La teoría APOE establece que cada tópico matemático requiere de una descomposición genética, esto es de la descripción de un modelo para construir un conocimiento matemático y luego aplicarla para describir las construcciones específicas que pueden hacerse para entender un tópico matemático particular.
Para descomponer genéticamente un concepto se requiere identificar cuál es el objeto de inicio y cuáles son las acciones y los procesos que se requieren para transformarlo. Aunque no siempre es fácil distinguir en la teoría una acción de un proceso, porque la distinción depende más bien de la relación que estas transformaciones guardan entre sí.

[9] Una descomposición genética permite la interpretación del aprendizaje de una manera dinámica y enfatiza el aspecto conceptual del conocimiento sobre su aspecto algorítmico. Por ejemplo la "encapsulación" de los conceptos de función, polinomio, serie, vector, etc. (propuesta por Dubinsky) es necesaria pero no suficiente para entender el concepto de vector, se requiere además reflexionar sobre las relaciones entre estos diferentes objetos.

Según Dubinsky (1997, p. 93) las dificultades de los estudiantes con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales provienen de tres fuentes:

Primera: El papel pasivo, imitador, asignado al estudiante en los cursos de álgebra lineal. Debido a este papel "los estudiantes no entienden estos conceptos debido a que nunca tienen la oportunidad de construir sus propias ideas acerca de ellos" (ibid, p. 93).

Segunda: La falta de comprensión de algunos conceptos que resultan un antecedente indispensable para entender las nociones básicas referidas, como es el caso del concepto de función. La comprensión de estas nociones básicas exige también contar con ciertas habilidades para usar algunas herramientas como los cuantificadores.

Tercera: Esta última fuente está muy relacionada con la primera y tiene que ver con la ausencia de estrategias didácticas que den a los estudiantes la oportunidad de construir sus propios conceptos. La elaboración de estas estrategias se debiera iniciar por analizar las construcciones mentales específicas que pueden usarse para entender un determinado concepto.

Dubinsky (1997, pp. 94-95) propone una metodología de investigación que conduzca a la formulación de las estrategias mencionadas en este último punto. Dicha estrategia contempla tres fases:

Fase 1: El análisis teórico mediante el cual se debe dilucidar cuáles son las construcciones mentales que el estudiante necesita hacer para aprender un tópico matemático en particular.
Fase 2: El diseño de estrategias de enseñanza que favorezca la creación de estas construcciones mentales.
Fase 3. La observación y evaluación de la enseñanza, cuya finalidad es determinar si estas construcciones pudieron hacerse, qué es lo que el

estudiante ha aprendido y la reconsideración sobre el análisis teórico y las estrategias didácticas.

En su esfuerzo por formular una propuesta didáctica específica para el álgebra lineal, RUMEC ha preparado materiales de enseñanza en el que se muestra su filosofía acerca de qué contenidos debiera incluir y cómo debiera organizarse un primer curso universitario de álgebra lineal (Weller et al, 2002). En este texto se propone una aproximación a la enseñanza que inicia con el concepto de espacio vectorial a partir del estudio de espacios vectoriales finitos. En este acercamiento el estudiante se introduce al estudio de espacios vectoriales elaborando programas de computadora con los cuales explora sus propiedades. Una exposición de su fundamentación teórica enmarcada en la teoría de APOE, está publicada en Trigueros y Oktaç (2005).

1.4 Influencia de los antecedentes en la Investigación.

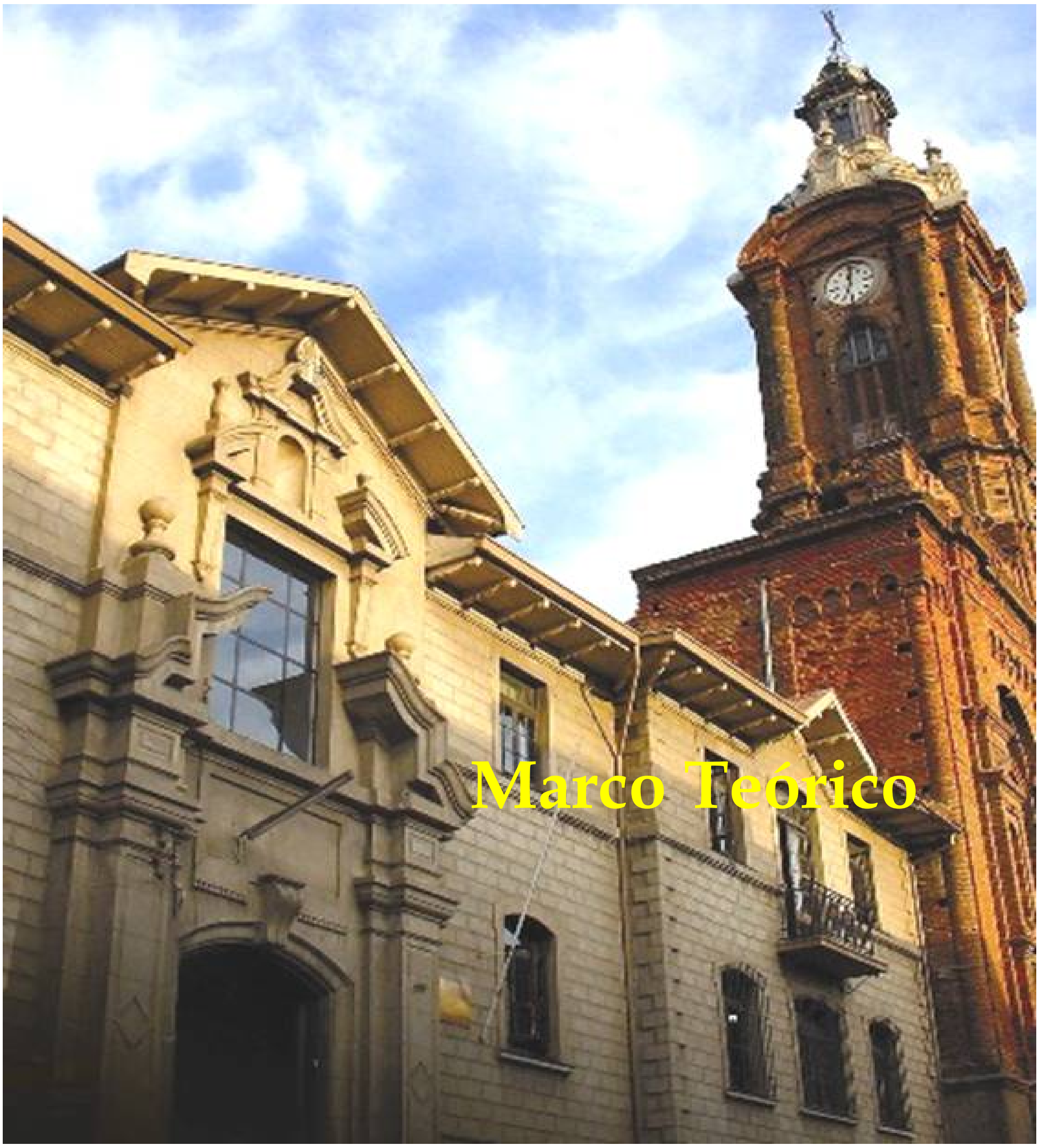
Los antecedentes acá presentados nos indican la importancia de estudiar la manera con que se construye el concepto espacio vectorial, ya que los estudiantes muestran varios tipos de dificultades con esta noción. Por otro lado, muestran que un aspecto crucial para la enseñaza y aprendizaje del concepto de espacio vectorial es su naturaleza de concepto unificador y generalizador. Esa naturaleza, aunque no se puede explicar completamente en terminología que utiliza la teoría APOE, se relaciona con los siguientes aspectos:

La naturaleza de concepto unificador: se puede asociar con la concepción objeto de espacio vectorial, ya que es aquí en esta concepción donde un individuo toma conciencia del concepto de espacio vectorial como un todo.

La naturaleza de concepto generalizador: se puede relacionar con la concepción esquema de espacio vectorial, ya que un esquema es una colección de acciones, procesos, objetos y aún, otros esquemas que le permiten al individuo enfrentar una situación problemática.

De esta manera reiteramos la importancia de las construcciones objetos y esquemas en el transcurso de construcción y evolución del concepto de espacio vectorial.

Capítulo 2



Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo haremos una reflexión del referente teórico que hemos elegido para la realización de nuestra investigación.

2.1 La Teoría APOE

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es una teoría de la matemática educativa elaborada en sus inicios por el doctor Ed Dubinsky y desarrollada a partir de la epistemología de Piaget (Dubinsky, 1996; Clark et al., 1997) acerca de la manera como se pasa de un estado de conocimiento a otro, en particular los que corresponden a la matemática que se introduce en la educación superior.

Desde el punto de vista de la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas:

Acción: "*Una acción es una transformación de un objeto, el cual es percibido por el individuo, hasta cierto punto, como algo externo*" (Asiala, et al., 1996); es decir, cuando es una reacción a estímulos,"*los cuales pueden ser físicos o mentales. Una acción puede consistir en una simple respuesta o en una secuencia de respuestas. En cada caso el efecto es transformar en forma física o mental uno o varios objetos" (Dubinsky, 1997, pág. 96).*

El concepto de acción dentro de la teoría APOE quizá sea más claro citando un ejemplo sobre el concepto predominante en nuestra investigación (espacio vectorial); este ejemplo es tomado de Trigueros y Oktaç (2005). Ellas mencionan que *"Un ejemplo de acción en la condición de cerradura sobre un conjunto dado de vectores consiste en tomar 2 vectores explícitamente del conjunto, realizar la adición y verificar si el resultado es un elemento del conjunto". "Aunque la concepción de acción es muy limitada, las acciones marcan el principio crucial del entendimiento de un concepto. Por lo tanto, el acercamiento pedagógico de la teoría APOE basada en una teoría de aprendizaje comienza con actividades diseñadas para ayudar a los estudiantes a construir acciones"* (Dubinsky, 1996, pág. 34).

Proceso: *"Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo... En contraste con una acción, el individuo percibe el proceso como algo interno, y bajo su control, en lugar de algo que se hace como respuesta a señales externas"* (Dubinsky, 1996). *"Nos referimos a la construcción de un proceso desde una acción como una interiorización. Una vez que un individuo tiene construido un proceso, varias cosas son posibles. Por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados para obtener un nuevo proceso"* (*Dubinsky, 1997, pág. 96*).

Un ejemplo de proceso relacionado con el concepto de espacio vectorial se encuentra en Trigueros y Oktaç (2005): "un ejemplo de proceso se encuentra cuando un estudiante es capaz de expresar las etapas necesarias para determinar, sin necesidad de verificación, que la adición de dos elementos de un conjunto de vectores dado es o no es un elemento del conjunto. Se puede decir que el sujeto ha interiorizado las acciones en proceso. De la misma manera, cuando es capaz de explicar cómo cada axioma se verifica (sin tener la necesidad de realizar cálculos) para que un conjunto dado sea un espacio vectorial".

Objeto: *"Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que*

> *pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. En el curso de la realización de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario desencapsular y regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo con el fin de usar sus propiedades al manipularlo*" (Dubinsky, 1996). En Asiala, et. al. (1996) se menciona que *"en general, se considera que la encapsulación de procesos para obtener objetos es extremadamente difícil"*, es decir, tomar conciencia sobre las operaciones aplicadas a un proceso y reflexionar sobre ellas resulta una dificultad para los estudiantes.

Trigueros y Oktaç (2005) mencionan un ejemplo de objeto relacionado con el concepto de espacio vectorial: *"Un estudiante que es capaz de demostrar que el conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto de vectores es un subespacio de un espacio vectorial está muy probablemente en el paso de manifestar una concepción de objeto del concepto de combinación lineal. En el caso del concepto de subespacio, esta evidencia puede incluir la posibilidad de determinar si dos conjuntos de vectores diferentes forman dos subespacios equivalentes"* (Trigueros y Oktaç, 2005).

El paso por estas tres construcciones: Acción, Proceso, Objeto no es necesariamente secuencial. Un estudiante puede pasar mucho tiempo en etapas intermedias e incluso estar en una etapa de construcción para ciertos aspectos de un concepto y en otra para otros (Trigueros y Oktaç, 2005).

El mecanismo para pasar de un estado de construcción de conocimiento matemático a otro, en esta teoría, es la abstracción reflexiva, es decir es una herramienta mental, un dispositivo del que se hace uso en los procesos de construcción del conocimiento, que permite al estudiante, a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos de un mismo nivel de pensamiento, lo que implica, entre otras cosas, la organización de la información en un marco intelectual organizado a nivel superior (Dubinsky, 1991a, 1991b). De este modo, la construcción del conocimiento matemático se realiza a través de distintas abstracciones sucesivas hasta llegar a construir de manera coherente un esquema asociado a un objeto matemático.

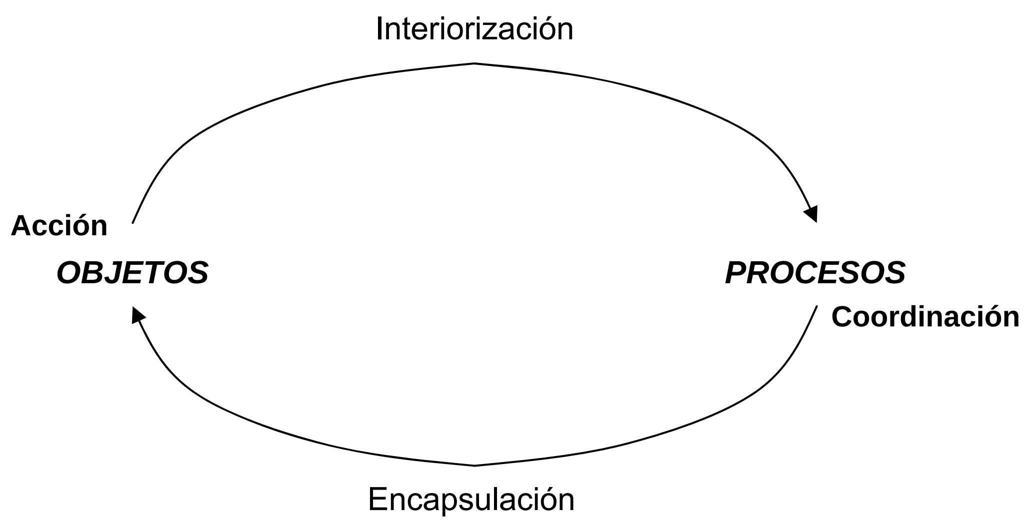
La noción de esquema también proviene de las ideas de Piaget (Piaget, 1971, 1972). Muchos autores han tomado de Piaget la noción de esquema (véase por ejemplo, Vergnaud, 1990). Sin embargo, la definición de esquema dentro de la teoría APOE tiene un significado preciso diseñado específicamente para dar una explicación a la manera en que se desarrollan los conceptos matemáticos a través de los procesos de enseñanza.

Esquema: "*un esquema para una parte específica de las matemáticas se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas. Cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos. Ante una misma situación diferentes estudiantes utilizan los mismos conceptos y diferentes relaciones entre ellos. El tipo de relaciones que cada sujeto establece entre los conceptos que utiliza, así como el tipo de construcción del concepto que muestra, dependen de su conocimiento matemático. Se espera que a mayor conocimiento, se hayan construido más relaciones entre conceptos y que estas relaciones formen estructuras cognitivas coherentes en el sentido de que el individuo distinga claramente aquellas situaciones que pueden tratarse poniendo en juego un esquema específico y aquéllas para las que no es adecuado"* (Trigueros, 2005).

Así pues, las construcciones mentales (acciones, procesos, objetos) se organizan en un esquema estableciendo nuevas relaciones. El esquema puede llegar a ser considerado como un nuevo objeto, en tal caso se dirá que el esquema se ha tematizado. De este modo se tienen dos formas de construir los objetos, a través de la encapsulación de procesos y a través de la tematización de un esquema.

A través de las acciones, procesos, objetos y esquemas la construcción del conocimiento matemático se lleva a cabo. "Las acciones son transformaciones de objetos que se efectúan como respuesta a un estímulo que es percibido por el individuo como algo hasta cierto punto externo. Una acción es interiorizada en un proceso en el cual la transformación es controlada de forma conciente por el individuo… El proceso es encapsulado en un objeto a través de acciones repetitivas y una reflexión sobre él" (Dubinsky., 1997, pág. 98). En resumen "las acciones son construidas por respuestas repetitivas a un estímulo; los procesos son construidos ya sea al interiorizar acciones o al transformar procesos existentes; los objetos son construidos al encapsular los procesos; y, en la desencapsulación de un objeto, los únicos procesos que un individuo puede obtener son los procesos que fueron encapsulados para construir este objeto" (Dubinsky, 1997).

Todo lo anterior se encuentra ilustrado en la siguiente figura:



Construcciones y Mecanismos (Asiala et al., 1996)

2.2 La Evolución de los Esquemas en APOE

De ninguna manera hay que considerar que el esquema se mantiene fijo, sino al contrario, éste se encuentra en constante evolución y se reestructura dependiendo de las nuevas situaciones problemáticas a las que se enfrenta el individuo. Logrando establecer relaciones con otros esquemas involucrados con el concepto que se ha construido, la noción de esquema y los mecanismos de su evolución "*permiten dar cuenta de las relaciones que se establecen entre los distintos conceptos, y la forma en la que estas relaciones evolucionan cuando un individuo se enfrenta a conceptos complejos, y a situaciones en las que requiere utilizar conjuntamente conceptos que provienen de distintas ramas de la matemática o distintos conceptos que antes no se consideraban relacionados unos con otros. De esta manera permite incluir otros objetos matemáticos de la misma rama de las matemáticas, que para un individuo no tenían que ver unos con otros, antes de encontrar dicha relación*" (Trigueros, 2005, ampliado de acuerdo a una comunicación personal).

En el mismo artículo citado, Trigueros menciona que al hablar de esquemas dentro de la teoría APOE no basta con especificar las acciones y los procesos y los objetos que intervienen en la solución de un problema o de un conjunto de problemas, sino que es necesario tomar en cuenta que estos elementos están interconectados unos con otros. Tal como ella menciona se deben tomar en cuenta las relaciones que puede hacer el individuo al resolver un problema, ya que con ello se pueden identificar en las acciones del individuo distintos grados de formación o de estructuración de los esquemas en estudio, dependiendo de las relaciones que se pueden identificar como construidas.

Esta evolución ha sido tratada en diversas investigaciones que dan cuenta de la construcción del esquema de distintos conceptos por parte de los alumnos como por ejemplo la regla de la cadena para la derivación en cálculo (Clark et al., 1997), la regla de la cadena y su relación con la composición de funciones (Cottrill, 1999), series y sucesiones (McDonald et al., 2000), las relaciones entre la gráfica de una función y las propiedades de su primera y segunda derivadas (Baker et al., 2000 y Cooley et al., 2007) y, sistemas de ecuaciones diferenciales (Trigueros, 2000).

2.3 Rol de la Tematización en la construcción de los Esquemas

Cuando un estudiante reflexiona sobre su comprensión del esquema de un concepto, visto como “un todo”, y es capaz de realizar nuevas acciones sobre el esquema, entonces se dice que el esquema ha sido *tematizado* en un objeto. Es decir, se llega a una nueva estructura mental, que son los esquemas, en esta instancia pueden ser tratados como objetos e incluirse en organizaciones de esquemas de “más alto nivel”. (Asiala, et al., 1996).

Por ejemplo los espacios vectoriales pueden ser concebidos dentro de las transformaciones lineales, se pueden introducir operaciones sobre estas transformaciones, y se pueden examinar propiedades de las operaciones. Finalmente es posible organizar todo lo anterior construyendo un esquema de espacio de funciones, el que puede ser aplicado a conceptos como: espacios duales (este ejemplo también se menciona en Dubinsky, 1997).

2.4 Niveles de Evolución de un Esquema

Según Piaget y García (1989) se pueden considerar distintos niveles de evolución de un esquema: los niveles intra-, inter- y trans-, que a continuación definimos. Más adelante en el capítulo 3, apartado 3.1.3, esta definición será la base para caracterizar los comportamientos de los estudiantes, que servirán como indicadores de que ellos trabajan en uno u otro nivel.

El nivel de esquema Intra- se asocia con la construcción de acciones, procesos y objetos relacionados con un mismo concepto de manera aislada. En este nivel no hay conexiones entre las diferentes componentes que conforman el esquema; cuando decimos que no hay conexiones, nos referimos a que las componentes de ese esquema forman estructuras ligadas entre sí por relaciones débiles, y no se han identificado transformaciones que permitan establecer una relación estable entre los componentes del esquema.

El nivel de esquema Inter- se asocia con la existencia de relaciones entre diferentes acciones, procesos y objetos relacionados con un concepto, es decir, en este nivel se identifica algún tipo de transformación que permite relacionar de manera más fuerte los elementos constitutivos del esquema.

El nivel de esquema Trans- Se identifica alguna conservación que permite darle coherencia al esquema en el sentido de que el estudiante puede determinar en qué situaciones el esquema se puede utilizar como un todo y en cuáles no. En las etapas previas, aun cuando el individuo puede evocar las componentes del esquema e incluso establecer relaciones entre ellas, no lo utiliza de manera coherente, como un todo. Esto no implica que el esquema se haya tematizado pues para tematizarlo el individuo requiere poder hacer acciones sobre el esquema como objeto. También conviene aclarar ya que esto tampoco está totalmente claro en la teoría APOE: el esquema como un todo o sea en el nivel trans es lo que en la descomposición genética se establece como la estructura objetivo a construir y en un momento dado a tematizar, si es necesario.

2.5 Una Descomposición Genética del concepto Espacio Vectorial

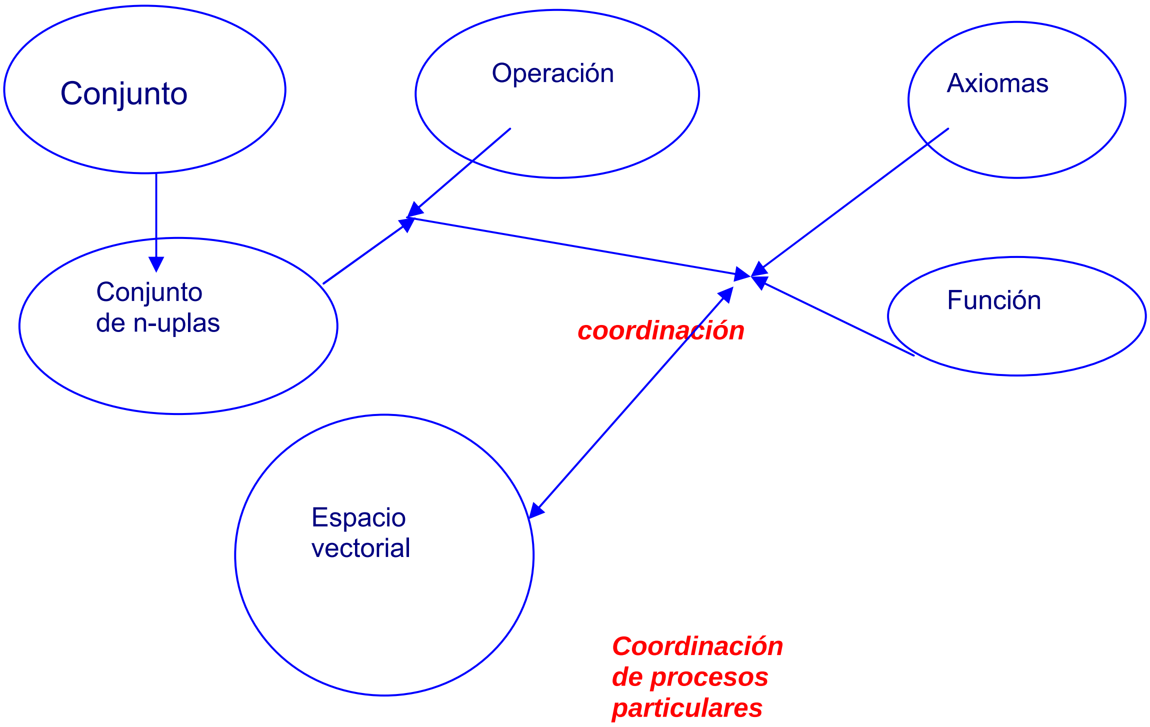
El proceso de investigación en la teoría APOE conlleva el tener en cuenta una descomposición genética del concepto con el que se trabaja (en este caso el de espacio vectorial) que consiste en plasmar las construcciones que se consideran necesarias para aprender un concepto, en otras palabras “una descomposición genética… es una primera aproximación para modelar el aprendizaje del concepto matemático en cuestión” (Trigueros y Oktaç, 2005).

Esta descomposición genética "está basada en un marco teórico de aprendizaje general, la totalidad de nuestras observaciones y experiencias, y nuestra propia comprensión de las matemáticas implicadas" (Glosario de la teoría APOE, RUMEC).

Trigueros y Oktaç (2005) presentan de una manera breve la teoría APOE (**A**cción – **P**roceso – **O**bjeto - **E**squema) y explican su uso en el caso de proyectos de investigación que envuelven construcciones mentales que los estudiantes hacen cuando aprenden álgebra lineal. Ellas presentan una descomposición genética del concepto de espacio vectorial mencionando que la construcción del concepto de espacio vectorial se da a través de comenzar con la verificación de los axiomas que satisface un conjunto para ser llamado espacio vectorial. Una vez que estas verificaciones se han hecho, se tiene la construcción del esquema de espacio vectorial. Para que este esquema sea consistente el sujeto debe trabajar con espacios vectoriales particulares, con el fin de que cada caso específico ayude al sujeto a descubrir una estructura general llamada espacio vectorial. En términos generales las autoras más que describir la descomposición genética del concepto de espacio vectorial como objeto (sin tomar en consideración las relaciones que se establecen con otros conceptos), hablan de la construcción de un esquema para espacio vectorial que incluye todas las propiedades y características que dichos espacios tienen: bases que los generan, dimensión, la construcción de combinaciones lineales o la idea de independencia lineal, etc. Así, podemos intuir que además de los axiomas hay otros elementos que entran en la estructura de espacio vectorial como esquema, que se está considerando aquí.

En Trigueros y Oktaç (2005) las autoras exponen que:

"*para construir el concepto de espacio vectorial, un sujeto debe hacer acciones sobre los elementos de un conjunto utilizando la definición de una operación binaria. El sujeto debe partir entonces de los esquemas de conjunto y de operación binaria. El estudiante realiza acciones para verificar si cada uno de los diez axiomas que definen un espacio vectorial se verifica… Los diez procesos individuales son coordinados en un solo proceso de verificación de todos los axiomas, esto quiere decir que la construcción de un esquema de* *espacio vectorial implica la coordinación de cuatro esquemas: axioma, operación binaria, función y conjunto. En el momento de proceso de construcción del esquema de espacio vectorial, el sujeto trabaja sobre una colección de espacios vectoriales particulares. Cada caso específico ayuda al sujeto a darse cuenta de las diferentes propiedades que la estructura posee, que corresponde a la interiorización de acciones de verificación en procesos. Después el sujeto puede encapsular estos procesos en un objeto y darse cuenta de la existencia de una estructura general. El sujeto puede percibir entonces las propiedades invariantes de un espacio particular para construir un nuevo objeto llamado espacio vectorial".*



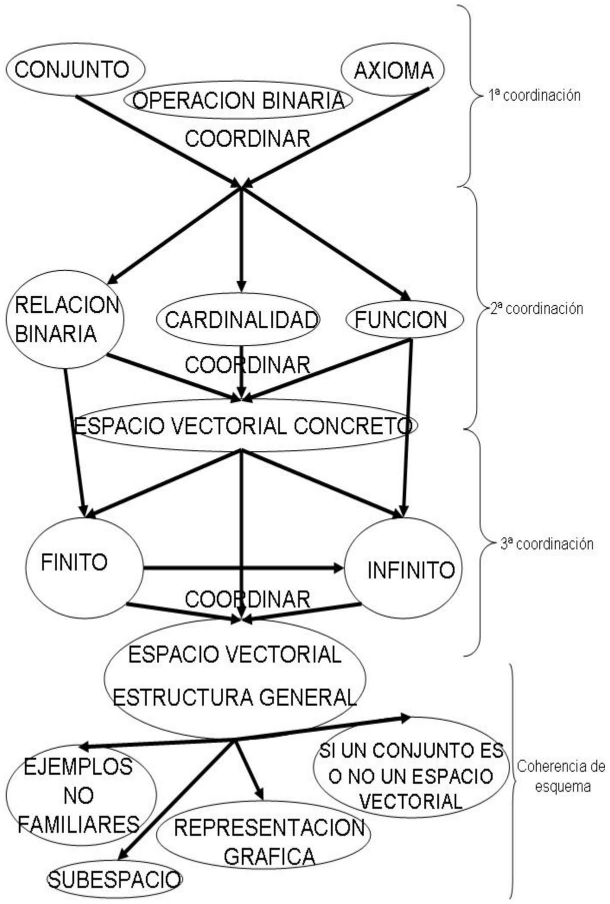
Descomposición genética del concepto de Espacio Vectorial
(Trigueros y Oktaç, 2005)

Cabe aclarar que el concepto de función forma parte de esta descomposición genética, debido a que según el acercamiento de RUMEC, el estudiante debe construir una función en términos de un programa (ISETL) que arroja verdadero en caso de que el conjunto en consideración sea un espacio vectorial y falso si no lo es.

Tal como se presenta en los párrafos anteriores, se observa que la construcción del concepto de espacio vectorial comienza con la verificación de los axiomas que satisface un conjunto para ser llamado espacio vectorial. La acción de estas verificaciones tiene que interiorizarse y luego coordinarse en un proceso de verificación. El sujeto debe trabajar con espacios vectoriales particulares con el fin de que cada caso específico ayude al sujeto a encapsular este proceso en un objeto, o sea, descubrir una estructura general llamada espacio vectorial.

Es importante aclarar que no puede hablarse dentro de esta teoría de, sólo una descomposición genética de un concepto, pues ésta depende de la formulación que ha hecho el investigador. Pueden coexistir varias descomposiciones genéticas de un mismo concepto. Lo que es importante es que cualquier descomposición genética de un concepto sea un instrumento que dé cuenta del comportamiento observable del sujeto (Trigueros y Oktaç, 2005). La descomposición genética presentada en Trigueros y Oktaç (2005) hace hincapié en la construcción del concepto de espacio vectorial como un objeto, aunque se dan algunos elementos de la construcción de un esquema.

Vargas (2007) explicitó algunos elementos de la descomposición genética de espacio vectorial presentada en Trigueros y Oktaç (2005), haciendo hincapié en la construcción de este concepto como proceso y objeto.



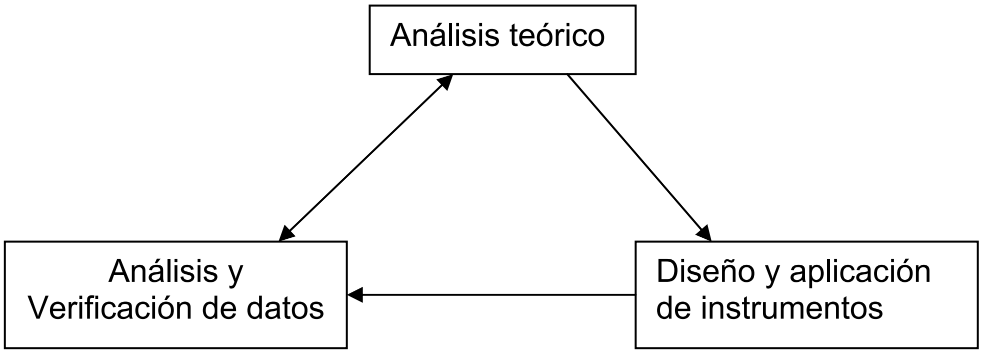
Descomposición genética del concepto de Espacio Vectorial
Vargas (2007)

Los resultados obtenidos en Vargas (2007) dan cuenta que los alumnos presentan dificultades con la coordinación de los esquemas de: cuerpo, operaciones binarias, conjunto y axioma que son indispensables para construir el esquema de espacio vectorial.

En nuestra investigación planteamos una descomposición genética, enfocándonos en el concepto en cuestión como un esquema. También ponemos especial énfasis en algunos aspectos como la coordinación de los procesos asociados a las dos operaciones binarias involucradas y el papel que juega el cuerpo de escalares.

2.6 Ciclo de Investigación

La teoría APOE proporciona un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: el análisis teórico, el diseño y aplicación de instrumentos y el análisis y verificación de datos.



Ciclo de Investigación (Asiala et al., 1996)

Este ciclo de investigación determinado por las tres componentes permite obtener una descripción más detallada, de las acciones que realizan los estudiantes sobre los objetos, que permiten hacer nuevas construcciones mentales, mediante su repetición. Así tanto el análisis teórico como los instrumentos se refinan y mejoran como resultado del análisis de los datos empíricos obtenidos en el desarrollo de la tercera componente. Veamos qué se busca lograr en cada una de estas componentes y la manera como están relacionadas.

- *Análisis teórico:* Este ciclo de investigación parte de un análisis teórico sobre el concepto matemático donde se tiene en cuenta el análisis de libros de texto y la experiencia de los investigadores para determinar un camino viable para la construcción de un concepto. Este análisis permite mediante la descripción de las construcciones mentales, modelar la epistemología y cognición del concepto matemático estudiado.

Asiala et al. (1996) plantean dos preguntas que deben guiar el trabajo en esta componente: ¿Qué significa comprender un concepto matemático? y ¿Cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un individuo? Este planteamiento promueve la reflexión sobre qué es comprender un concepto determinado y las implicaciones que dicha reflexión tiene en la forma como un estudiante lo concibe. Esto va mucho más allá de la representación mecánica de algoritmos o de la supuesta construcción de un concepto aislado. Desde esta perspectiva el objetivo principal del análisis teórico es definir una descomposición genética viable para que los estudiantes construyan un concepto determinado, mediante la descripción explícita de las construcciones mentales por las cuales puede acceder a la construcción adecuada de un concepto. Cabe mencionar que no existe una única descomposición genética de un concepto, ya que éstas dependen de los caminos de construcción del concepto y las estructuras definidas en los estudiantes. Cada descomposición genética debe ser el resultado de la aplicación completa de las tres componentes de este ciclo de investigación lo que permite documentarla con los datos empíricos. Si una descomposición genética pasa por este ciclo en varias ocasiones tal vez tendremos una mucho más elaborada que pueda abordar con más detalle y profundidad la construcción de un concepto determinado.

- *Diseño y aplicación de instrumentos:* Una vez definida la descomposición genética preliminar es necesario documentarla, es decir, tener alguna certeza de la viabilidad del camino señalado en ella. Para esto es necesario diseñar y aplicar instrumentos que permitan identificar las construcciones mencionadas en la descomposición genética. Estos diseños construidos con base en la descomposición genética deben reflejar las construcciones expuestas en ella mediante los cuales los estudiantes pueden construir dichos conceptos.

- *Análisis y verificación de datos*: Esta componente lleva al análisis de los datos empíricos obtenidos en la componente anterior. Los resultados obtenidos con la aplicación de los instrumentos deben ser analizados desde la descomposición genética preliminar detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se perciben. Esto lleva a una reformulación de la descomposición genética y a la determinación de una versión refinada de la descomposición genética para este ciclo.

Como resultado de la aplicación de este ciclo de investigación determinaremos una descomposición genética refinada para esta etapa de investigación que sin duda aún podrá ser mejorada mediante la repetición de este ciclo.

Capítulo 3


Análisis teórico, intención de los instrumentos y análisis hipotético sobre las construcciones

Capítulo 3

Análisis teórico, intención de los instrumentos y análisis hipotético sobre las construcciones

La metodología que usaremos en esta investigación está fundamentada en el ciclo de investigación dado por la teoría APOE (Asiala et al., 1996). Considerando las tres componentes de dicho ciclo (análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos, e implementación y recolección de datos) diseñamos una descomposición genética hipotética, como resultado del análisis teórico; ésta a su vez fundamentó el diseño de los instrumentos (cuestionario diagnóstico y entrevista).

Para cada instrumento presentamos un análisis *a priori* basado en el análisis teórico donde presentamos una reflexión sobre las posibles soluciones que los estudiantes pueden dar y la manera como éstas se relacionan con las construcciones mentales descritas en la descomposición genética preliminar.

3.1 Análisis Teórico

Como ya mencionamos en los antecedentes, existen diferentes investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal. Algunos investigadores como Duval, Hillel y Sierspinska se han centrado en el análisis de los registros de representación, la diversidad de lenguajes y los modos de pensamiento a través de los cuales los objetos del álgebra lineal pueden ser representados (Duval, 1995; Hillel, 2000; Sierpinska, 2000; citados en Dorier y Sierpinska, 2001). Ellos han detectado que esta diversidad de representación de los objetos causa grandes dificultades en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, ya que deben distinguir entre los diferentes caminos de representación de los objetos y el tránsito entre un registro y otro (Dorier, 2002). Partiendo de este hecho y teniendo en cuenta que sobre la evolución cognitiva del concepto espacio vectorial no existen estudios previos con base en la teoría APOE, hemos decidido centrar nuestra investigación en la construcción formal del concepto.

Veamos la definición que algunos textos dan de este concepto:

I. Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) consta de lo siguiente:

1. un cuerpo F de escalares
2. un conjunto V de objetos llamados vectores;
3. una regla (u operación) llamada adición que asocia a cada par de vectores α, β de V un vector $\alpha + \beta$ de V, que se llama suma de α y β, de tal modo que:
   (a) la adición es conmutativa, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
   (b) la adición es asociativa, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;
   (c) existe un único 0 de V, llamado vector nulo, tal que $\alpha + 0 = \alpha$, para todo α de V;
   (d) para cada vector α de V, existe un único vector $-\alpha$ de V, tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$;
4. una regla (u operación), llamada multiplicación escalar, que asocia a cada escalar c de F y a cada vector α de V un vector $c\alpha$ en V, llamado producto de c y α de tal modo que:
   (a) $1\alpha = \alpha$ para todo α de V;
   (b) $(c_1 c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$;
   (c) $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$
   (d) $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$

(Hoffman & Kunze, 1973)

II. Un **espacio vectorial *V* sobre el campo *K*** (los elementos se *K* se llamarán números) es un conjunto de objetos que se pueden sumar y que se pueden multiplicar por elementos de *K*, de tal manera que la suma de dos elementos de *V* es, de nuevo, un elemento de V, el producto de un elemento de *V* por un elemento de *K* es un elemento de *V* y, además se satisfacen las siguientes propiedades:

EV 1. *Dados los elementos u,v,w de V, se tiene:*

(u + v) + w = u + (v + w).

EV 2. *Existe un elemento de V, denotado por O, tal que:*

O + u = u + O = u

Para todos los elementos u de V.

EV 3. *Dado un elemento u de V, el elemento* $-u$ *en V es tal que:*

u + ($-u$*) = O.*

EV 4. *Para todos los elementos u,v de V se tiene que:*

U + v = v + u

EV 5. *Si c es un número, entonces c(u+v) = cu + cv.*

EV 6. *Si a y b son números, entonces (a+b)v = av + bv.*

EV 7. *Si a y b son números, entonces (ab)v = a(bv).*

EV 8. *Para todos los elementos u de V se tiene que 1 · u = u (en donde 1 es el número uno).*

(Lang, 1970)

III. Un **espacio vectorial real** *V* ***es*** un conjunto de objetos, llamados **vectores,** junto con dos operaciones llamadas **suma y multiplicación por un escalar** que satisfacen los diez axiomas enumerados a continuación:

i. Si $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y \in V$ **(cerradura bajo la suma).**

ii. Para todo x, y y z en $V, \left(x+y\right)+z = x+\left(y+z\right)$

(ley asociativa de la suma de vectores).

iii. Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $x \in V, x+0=0+x=x$

(el **0** se llama **vector cero o idéntico aditivo).**

iv. Si $x \in V$, existe un vector $-x$ en V tal que $x+(-x)=0$

(**$-x$ se llama inverso aditivo de x**).

v. Si x y y están en V, entonces $x+y=y+x$

(**ley conmutativa de la suma de vectores**).

vi. Si $x \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha x \in V$

(**cerradura bajo la multiplicación por un escalar**)

vii. Si x y y están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ (**primera ley distributiva**).

viii. Si $x \in V$ están en V y α y β son escalares, entonces $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ (**segunda ley distributiva**).

ix. Si $x \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

(**ley asociativa de la multiplicación por escalares**)

x. Para cada vector $x \in V, 1x = x$.

(Grossman, 1992)

IV. Un conjunto *V* de objetos llamados vectores, junto con las operaciones binarias suma de vectores y multiplicación por escalar se dice que va a ser un *espacio vectorial* sobre el cuerpo de escalares *K*, si para todo u, v, w en *V* y para todo k, j en *K* se cumplen los siguientes axiomas:

Axioma 1: $u+v \in V$ (cerrado para la suma de vectores)

Axioma 2: $u+v=v+u$ (conmutatividad para la suma de vectores)

Axioma 3: $(u+v)+w=u+(v+w)$ (asociatividad)

Axioma 4: Existe un vector $0 \in V$ tal que $v+0=v$ (vector cero)

Axioma 5: Para cada $v \in V$ hay un único elemento $(-v) \in V$ tal que $v+(-v)=0$ (vector inverso)

Axioma 6: $kv \in V$ (cerrado para la multiplicación escalar)

Axioma 7: $(kj)v=k(jv)$ (asociatividad de la multiplicación por escalar)

Axioma 8: $k(u+v)=ku+kv$ (primera ley distributiva)

Axioma 9: $(k+j)v = kv + jv$ (segunda ley distributiva)

Axioma 10: Existe un elemento $1 \in K$ tal que para todo v en V, $1v = v$ (identidad escalar)

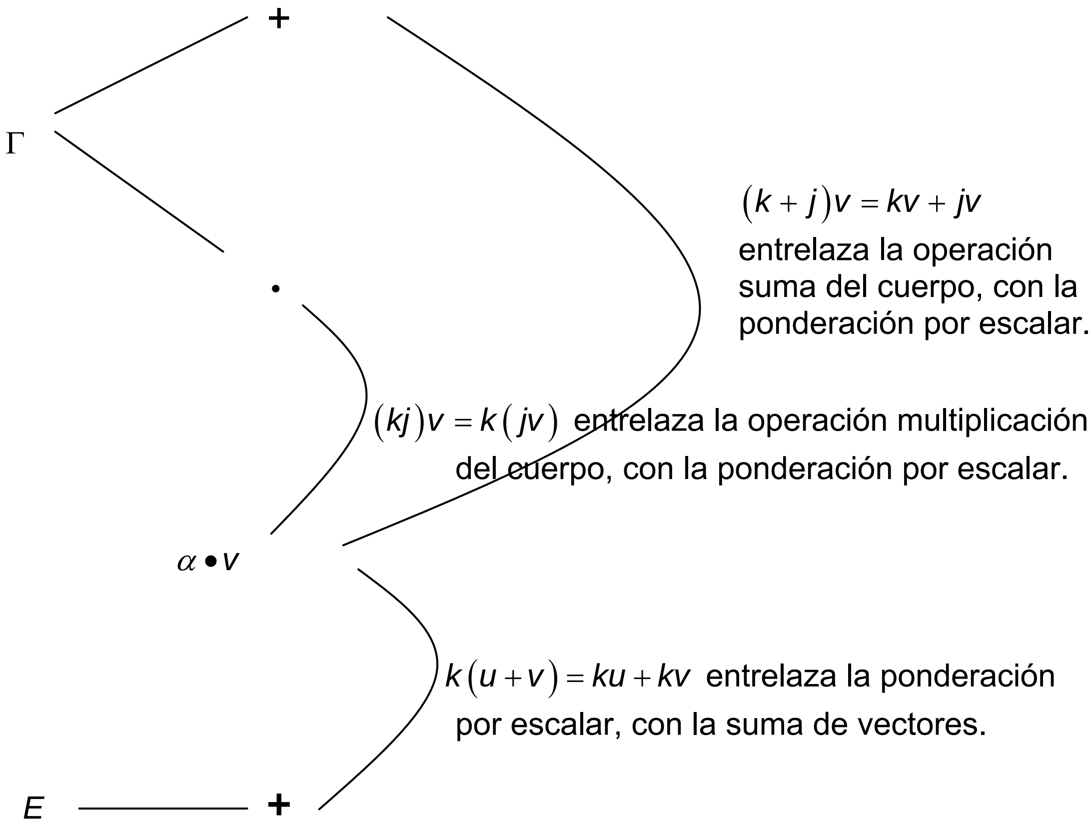
(Weller et al., 2002)

Decidimos considerar las definiciones presentadas en estos textos, ya que las tres primeras corresponden a la bibliografía utilizada por los estudiantes que serán parte de esta investigación, en sus cursos de álgebra lineal (ver anexo 1 y 2). La cuarta definición, la hemos considerado por ser la que presenta RUMEC.

Como podemos apreciar todas las definiciones presentan a un espacio vectorial, digamos *E* sobre un cuerpo, digamos Γ, como un conjunto con la siguiente estructura algebraica:

- Hay una función fija de $E \times E \to E$, anotada por $(x,y) \to x+y$ y que satisface axiomas.
- Hay una función fija de $\Gamma \times E \to E$ anotada por $(\lambda, x) \to \lambda x$ y que también satisface axiomas, pero axiomas diferentes a los del punto anterior.

Sin embargo ninguno de los libros de textos anteriores se detiene a analizar, el porqué de la exigencia o la necesidad de esos axiomas y no de otros. Al respecto podemos señalar, por ejemplo: que los axiomas 8 y 9 dados en la definición de espacio vectorial por RUMEC son absolutamente necesarios en la estructura algebraica de *E* para poder operar y entrelazar algebraicamente la operación suma definida de $E \times E \to E$ con la operación multiplicación por escalar definida de $\Gamma \times E \to E$. De forma similar el axioma 7, dado en la misma definición por RUMEC entrelaza la operación multiplicación del cuerpo Γ, con la operación multiplicación por escalar.



En nuestra opinión, detenerse a realizar esta reflexión, contribuye a mirar la estructura de $(E,\Gamma,+,\bullet)$ como un todo integrado, donde la necesidad de algunos axiomas contribuye a un entrelazamiento algebraico en las operaciones que participan en esta definición, llamada espacio vectorial.

Otros axiomas en cambio, obedecen a otra naturaleza, como por ejemplo: *Existe un elemento* $1 \in \Gamma$ *tal que para todo* v *en E,* $1v = v$ *(identidad escalar)*, es parte del requerimiento para que el grupo $\Gamma - \{0\}$ realice una acción[10] sobre el conjunto *E*.

---

[10] Una **acción** de un grupo $(G,*)$ sobre un conjunto X es una aplicación $\phi: G \times X \to X$ que cumple:

a) $\forall x \in X, \phi(e,x) = x$, donde e es el elemento neutro del grupo.
b) $\forall x \in X; \forall g,h \in G, \phi(g * h,x) = \phi(g,\phi(h,x))$.

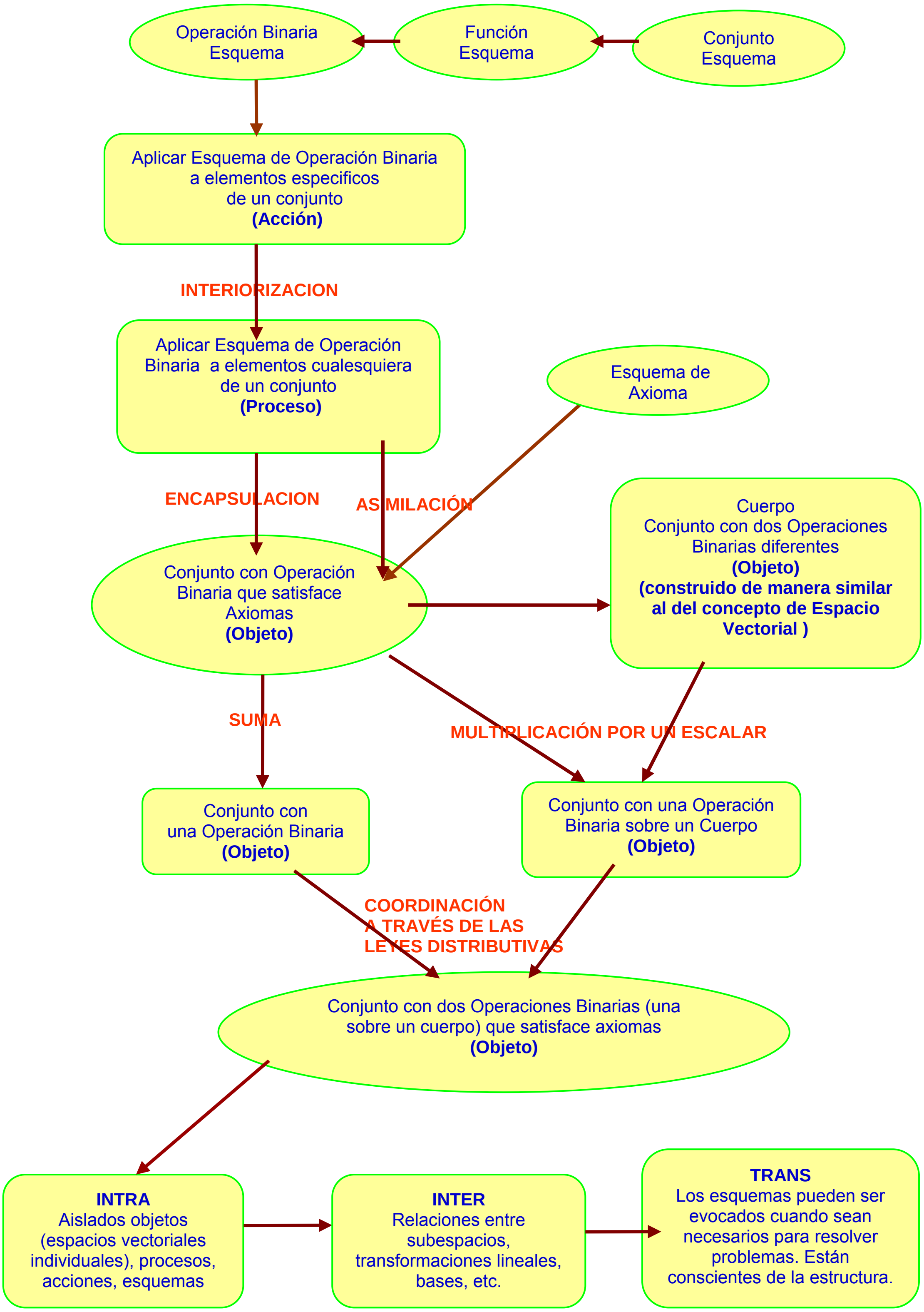
3.1.1 Construcciones previas necesarias para la construcción del concepto Espacio Vectorial

Trigueros y Oktaç (2005) presentan una descomposición genética de espacio vectorial donde mencionan que para construir dicho concepto un estudiante debe realizar acciones sobre los elementos de dicho conjunto utilizando la definición de operación binaria; y por lo tanto un estudiante debe poseer como elementos previos el esquema de conjunto y el esquema de operación binaria.

3.1.2 Una Descomposición Genética hipotética del concepto espacio vectorial

Presentamos, en base a nuestra experiencia en el aula una descomposición genética "*hipotética*" del concepto matemático espacio vectorial y de otros conceptos fundamentales del álgebra lineal, que son de interés para nuestra investigación. La llamamos "*hipotética*" porque a través de la propia investigación, dicha descomposición genética se refinará de manera que dé cuenta de mejor forma cómo evoluciona cognitivamente el concepto de espacio vectorial en la mente de un estudiante, desde su presentación inicial como un cuerpo-conjunto[11] con dos operaciones que satisface axiomas de relaciones entre escalares (elementos del cuerpo) y vectores (elementos del conjunto), para espacios vectoriales de dimensión específica y con elementos definidos, hasta espacios vectoriales cuya dimensión es un parámetro con elementos indefinidos, pasando por: espacios vectoriales cuya dimensión es un número específico y con elementos indefinidos y espacios vectoriales cuya dimensión es un parámetro y con elementos definidos. Usaremos las nociones del Álgebra Lineal conjuntos linealmente independiente/dependiente y base, para darnos cuenta del tipo de relaciones que establece el estudiante en el desarrollo de su esquema de espacio vectorial, con otros conceptos importantes y que forman parte del esquema de espacio vectorial.

[11] Estamos mirando un espacio vectorial sobre un cuerpo, como una estructura formada por UN CUERPO-UN CONJUNTO Y DOS OPERACIONES: SUMA Y MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR.



DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA HIPOTÉTICA DEL CONCEPTO ESPACIO VECTORIAL Y SU EVOLUCIÓN

Según esta descomposición genética para construir el concepto de espacio vectorial y reconocerlo como una estructura general, un estudiante empieza activando sus construcciones hechas alrededor de los esquemas de los conceptos de conjunto y de operación binaria[12] (este último esquema se relaciona con el esquema de función). Esta activación implica que el estudiante aplica una operación binaria específica a pares específicos de elementos de un conjunto, como acción. Es decir, dados dos elementos de un conjunto específico y una operación binaria específica, puede encontrar un elemento resultante. Dicha acción será interiorizada en un proceso, al considerar la operación binaria aplicada a todo un conjunto de manera general. Es decir, el estudiante puede pensar en la manera con que se están dando los elementos, resultante de aplicar una operación binaria a cualesquiera elementos de un conjunto. Cuando este proceso se encapsula en un objeto el individuo se da cuenta que el esquema de axiomas puede generalizarse para incluir este objeto, es decir, el objeto "conjunto con operación binaria" se asimila por el esquema de axiomas (que contiene cuantificadores), para dar lugar a un nuevo objeto que es un conjunto con una operación binaria que satisface axiomas. Así el estudiante puede decidir si todos los axiomas se cumplen o hay algunos que no se cumplen. Aquí el cuerpo juega un rol importante y es posible definir una operación en el conjunto sobre un cuerpo (esto es posible porque el estudiante ha construido un conjunto como un objeto, entonces puede definir nuevas operaciones). Los objetos que son conjuntos con dos tipos de operaciones (Suma y multiplicación por un escalar, en las cuales el estudiante es capaz de realizar acciones y chequear propiedades en cada una de las operaciones por separado) pueden ser coordinados a través de los procesos que le relacionan y los axiomas de espacio vectorial que involucran ambas operaciones, para que emerja un nuevo objeto que puede ser llamado un espacio vectorial. La coordinación entre ambas operaciones toma lugar a través de las leyes distributivas entre la suma y producto por escalar.

[12] Nosotros estamos usando la expresión "operación binaria" en un sentido general. Estamos concientes que en una multiplicación por un escalar los elementos operados no provienen del mismo conjunto.

Examinar los axiomas de espacio vectorial permite que un estudiante pueda realizar acciones sobre los elementos de un conjunto encaminados a satisfacer los axiomas del espacio vectorial, a través de la coordinación de las operaciones provenientes de ambos conjuntos: el conjunto junto a su operación binaria y un cuerpo ($\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ con p un número primo, u otro) por medio de las leyes distributivas. Así hasta este momento un estudiante tiene que tener presente tres esquemas: Conjunto, axioma y operación binaria. De esta manera el estudiante coordina cada uno de los axiomas que satisface un espacio vectorial con el proceso mismo que dicta tal axioma, es decir, aquello que debe satisfacer un conjunto para ser llamado espacio vectorial (estamos pensando en un espacio vectorial cuya dimensión es 1, 2 o 3 y con elementos definidos). Una vez que el estudiante tiene conocimiento de cada uno de los diez axiomas, éste los coordina como un solo proceso de verificación que debe satisfacer un conjunto con las características antes mencionadas para ser llamado espacio vectorial, a un nivel de esquema intra. En el nivel de esquema intra el estudiante conoce varios ejemplos de espacios vectoriales que le son más familiares, como los $\mathbb{R}^n$ y $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ con n,m específicos. Sin embargo todavía no existen relaciones entre los diferentes espacios vectoriales, subespacios vectoriales, ni tampoco, reconocen que el cero vector de un espacio pueda ser un elemento que esté constituido sin ningún cero. Además, para decidir si una estructura Cuerpo-Conjunto con operaciones suma y ponderación por escalar es o no un espacio vectorial, necesitan ir chequeando los axiomas.

Una construcción de esta naturaleza se encuentra en una etapa de esquema intra- de la construcción del esquema de espacio vectorial; es decir, “se construyen relaciones internas al objeto o fenómeno” (Trigueros, 2005). Hasta este momento el estudiante posee una construcción sobre el concepto de espacio vectorial, sin embargo debe trabajar sobre espacios vectoriales concretos (ejemplos de espacios vectoriales cuya dimensión sea un número específico y con elementos indefinidos) y todavía no reconoce una estructura general subyacente a cada uno de ellos.

Para trabajar con espacios vectoriales concretos el estudiante tiene que poner en juego sus construcciones previas alrededor de esquemas de los conceptos de: operaciones binarias (que cumplen propiedades) y función, coordinadas por la ley distributiva correspondiente. Las relaciones de coherencia que establezca un estudiante entre: espacios vectoriales, conjuntos linealmente independiente/dependiente y base para cada uno de los casos: espacios vectoriales cuya dimensión es un número específico y con elementos indefinidos, espacios vectoriales cuya dimensión es un parámetro y con elementos definidos, espacios vectoriales cuya dimensión es un parámetro y con elementos indefinidos mostrarán la evolución que el estudiante logra del concepto de espacio vectorial y su coherencia con conjuntos linealmente independiente/dependiente y base de ese mismo espacio, a través de los niveles inter y trans.

En el nivel de esquema inter empieza a haber relaciones entre diferentes espacios vectoriales, como un espacio vectorial y sus subespacios, o dos espacios vectoriales, mediante isomorfismos, transformaciones lineales y dimensión. Además reconocen: que el cero vector de un espacio pueda ser un elemento que esté constituido sin ningún cero y para decidir si una estructura Cuerpo-Conjunto con operaciones suma y ponderación por escalar es o no un espacio vectorial, no necesitan ir chequeando los axiomas, sino que utilizan propiedades de los espacios vectoriales.

El nivel Trans- se asocia con el hecho de que el estudiante dé muestra, a lo largo de su trabajo, de utilizar una estructura coherente de relaciones entre los conceptos y de ser capaz de determinar cuándo dicha estructura es aplicable y cuándo no. Asimismo en este nivel el individuo se ha dado cuenta de la existencia de la estructura abstracta llamada espacio vectorial, y la puede considerar como una totalidad que incluye la comprensión de la estructura de cualquier espacio vectorial. Además puede suponer los ejemplos particulares como casos específicos de la estructura de espacio vectorial y puede trabajar con ejemplos desconocidos y más complicados de espacios vectoriales, como el espacio de funciones.

Una vez que el estudiante logra estructurar las diferentes construcciones mediante conexiones, ha logrado reconocer la existencia de espacios vectoriales familiares y no familiares, y conceptos que se derivan de él como: linealmente independiente/dependiente y base se relacionan con el mismo concepto mediante teoremas y resultados matemáticos, el estudiante se da cuenta a través de estas construcciones de la existencia de una estructura general llamada espacio vectorial.

En este proceso se pasa de la etapa inter- de evolución del esquema a la etapa trans- de la misma evolución, en la cual las relaciones adquieren mayor fuerza y se estructuran las relaciones del nivel inter- (ver apartado 3.1.3.1, 3.1.3.2 y 3.1.3.3). En este nivel el estudiante puede trabajar con el esquema de una manera mucho más estructurada y consciente que cuando el esquema se encuentra en otras fases constitutivas, lo cual no quiere decir que el esquema ya permanece inmóvil, pues los esquemas siguen construyéndose y enriqueciéndose mediante la construcción de nuevas relaciones con otros objetos u otros esquemas.

La coherencia del esquema del concepto de espacio vectorial es una herramienta mental para determinar si una situación matemática se puede manejar con dicho esquema o no. Para explicarla pensemos en alguna situación específica que evoque el esquema de espacio vectorial.

> ***Situación:*** Dado un espacio vectorial real V, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in V$, demuestre que: $\alpha v = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad \vee \quad v = 0$.
>
> La demostración consiste en considerar dos casos: si $\alpha = 0$ estamos listos, pero si $\alpha \neq 0$, entonces $\exists \alpha^{-1}$ en el cuerpo de los números reales, para el cual tenemos que, $\alpha^{-1}\alpha v = 0$, lo cual nos permite decir, por propiedades de inverso multiplicativo y axiomas de espacio vectorial que $v = 0$.

Puesto que, la coherencia tiene que ver con la decisión que toma un estudiante, para utilizar o no utilizar el concepto de espacio vectorial y sus componentes, y si lo utiliza cómo lo utiliza; en esta situación específica la coherencia ésta dada por las relaciones entre las operaciones del espacio vectorial: suma de vectores, producto en el cuerpo y producto por escalar.

Así también la coherencia se verá reflejada cuando el alumno sea capaz de ponerla en juego de manera satisfactoria en ejercicios que no le son familiares, en aplicaciones para las soluciones de un problema, en la construcción de subespacios de un espacio dado y en la graficación de sus nociones sobre espacios vectoriales concretos susceptibles de ser graficados.

Así pues, a manera de resumen, la construcción del esquema de espacio vectorial precisa de tener construidos previamente los esquemas de: conjunto, axioma, operación binaria (con propiedades) y función. Es decir, que si en alguno de los esquemas requeridos el estudiante posee una deficiencia, ésta podría ser una causa para no poder construir de manera coherente el esquema del concepto de espacio vectorial, que evoluciona pasando por las etapas ya mencionadas: intra-, inter- y trans-.

3.1.3 Evolución del Esquema Espacio Vectorial y su relación con algunas otras nociones fundamentales del álgebra lineal

Dentro del esquema de espacio vectorial subyacen dos nociones de álgebra lineal (independencia-dependencia lineal y base) que consideramos importantes porque enriquecen el esquema de espacio vectorial, a causa de los siguientes puntos:

1. Las nociones de independencia-dependencia lineal y base ofrecen un acercamiento a la consistencia y unificación del concepto espacio

vectorial[13], necesario para construir la teoría del álgebra lineal, fundamentado principalmente en la idea que una base nos permite "*coordenizar*" el espacio vectorial, es decir, obtener un sistema de coordenadas para el espacio vectorial. Así distintas bases para un mismo espacio vectorial, arrojarán diferentes sistemas de coordenadas para él.

2. Una base para un espacio vectorial, ya sea definida como: un conjunto maximal linealmente independiente o como un conjunto linealmente independiente y que genera al espacio, permite determinar cualquier vector del espacio, a través de una combinación lineal de ella. En este sentido la base es un conjunto que representa a todo el espacio vectorial.

3. Empezar a comprender la función de cada noción de la teoría del álgebra lineal ayudará a ver la estructura del álgebra lineal como un todo cohesivo, es decir, es el comienzo de una construcción esquema del álgebra lineal, o bien como dijimos en el apartado de los antecedentes, "la generalización de los conceptos".

4. La cantidad de elementos de una base para un espacio vectorial es invariante, característica que por un lado nos ayuda a diferenciar espacios vectoriales, y por otro, permite hablar de la etapa trans del esquema de espacio vectorial, pues es justamente un invariante el que permite establecer las propiedades que cumple el esquema espacio vectorial como una totalidad.

Las nociones de base e independencia lineal nos ayudarán a caracterizar los tipos de conexiones que se establecen entre los componentes del esquema de espacio vectorial, y también a observar cómo la noción de espacio vectorial se interpreta en la presencia de estos dos conceptos.

[13] Interpretando en términos de la teoría APOE, diríamos, que estas dos nociones ofrecen un acercamiento a las construcciones objetos y esquemas del concepto espacio vectorial.

En el inicio de la descripción de nuestra descomposición genética hipotética, presentamos un camino para la construcción del concepto espacio vectorial. Ahora vamos a concentrarnos en dar una caracterización a cada uno de los niveles de la tríada: intra, inter y trans, a través de las nociones independencia-dependencia lineal y base para ir estudiando la evolución de esquema de espacio vectorial.
A continuación mostramos procedimientos, que nos ayudarán a caracterizar cada uno de los niveles de esquema de espacio vectorial.

3.1.3.1 Nivel de esquema INTRA del concepto Espacio Vectorial

Consideramos que un estudiante se encuentra en un nivel de esquema INTRA del concepto espacio vectorial, cuando en sus argumentaciones muestra algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:

- Para n y m números naturales específicos $\mathbb{R}^n$ *y* $M_{m\times n}$ son espacios vectoriales conocidos.
- No existen relaciones entre los diferentes espacios vectoriales, ni subespacios vectoriales.
- Para chequear que una estructura $(\mathbb{K},\mathbb{V},+,\bullet)$ no es un espacio vectorial recurren a averiguar uno por uno los axiomas que definen un espacio vectorial.
- La averiguación de vectores linealmente independiente/dependiente se realiza mediante una combinación lineal igual al cero vector de $\mathbb{R}^n$.
- La base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores que no tiene relación con el espacio vectorial.
- La operación suma y multiplicación por escalar son consideradas como las usuales en la estructura CuerpoConjunto: $+$ y $\bullet$. No hay conciencia que una misma estructura CuerpoConjunto puede tener asociada un sin número de operaciones Suma y Ponderación.

Como podemos apreciar en este nivel no existe una clara conexión entre las nociones espacio vectorial, independencia/dependencia lineal y base, hecho que se detecta en las aplicaciones concretas cuando estudiantes utilizan las nociones de independencia/dependencia lineal y base. Además, en este nivel el estudiante puede necesitar expresiones algebraicas (puede ser la definición o una idea aproximadamente similar) para trabajar con situaciones que involucran los conceptos de espacio vectorial, independencia/dependencia lineal y base.

3.1.3.2 Nivel de esquema INTER del concepto Espacio Vectorial

Consideramos que un estudiante se encuentra en un nivel de esquema INTER del concepto espacio vectorial, cuando sus argumentaciones muestran algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:

- Reconoce algunas relaciones entre espacios vectoriales mediante isomorfismos, trasformaciones lineales y dimensión.
- Reconoce que todos los espacios vectoriales tienen un cero vector, tienen bases, tienen dimensión, entre otros.
- Existen relaciones estructurales entre el espacio vectorial y sus subespacios vectoriales.
- Reconoce que el cero vector no siempre es un objeto con ceros y acepta la posibilidad que el cero vector de algún espacio vectorial sea un elemento del espacio que no tenga ceros.
- Para chequear que una estructura $(\mathbb{K}, \mathbb{V}, +, \bullet)$ no es un espacio vectorial, además de los axiomas recurren generalmente a los teoremas y propiedades que tienen los espacios vectoriales, en sentido contrapositivo, es decir: $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

- La averiguación de vectores linealmente independiente/dependiente se realiza mediante una combinación lineal igual al elemento neutro, para la operación suma. Particularmente se chequea que cuando uno es múltiplo del otro, dos vectores son linealmente dependientes.
- La base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores que tiene relación con el espacio vectorial, reconociendo que todo vector se puede escribir como combinación lineal de la base del espacio vectorial.
- Hay aceptación que una estructura CuerpoConjunto pueda tener definidas operaciones Suma y Ponderación diferentes a las usuales: $\oplus, \odot$.

En este nivel los estudiantes, dependiendo del contexto del problema, relacionan los objetos: independencia/dependencia lineal y base, como elementos interconectados aunque todavía pueden existir algunas dificultades.

3.1.3.3 Nivel de esquema TRANS del concepto espacio vectorial

Consideramos que un estudiante se encuentra en un nivel de esquema TRANS del concepto espacio vectorial, cuando en sus argumentaciones se muestran algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:

- Reconoce adecuadamente todas las relaciones entre espacios vectoriales.
- Reconoce adecuadamente todas las relaciones entre el espacio vectorial y las nociones del álgebra lineal.
- Trabaja con ejemplos desconocidos y más complicados de espacios vectoriales.
- Trabaja con espacios vectoriales no estándar, por ejemplo el espacio de funciones.
- Hay pleno reconocimiento de las operaciones Suma y Ponderación para una estructura CuerpoConjunto.

En este nivel los estudiantes, independientemente del contexto del problema, coordinan las nociones de independencia-dependencia lineal y base, e igualmente manejan y comprenden todas las técnicas directas e indirectas que se relacionan con esas mismas nociones.

3.2 Diseño y análisis a priori de los instrumentos

En las siguientes dos secciones nos centraremos en describir el camino seguido para el diseño y aplicación del cuestionario diagnóstico y la entrevista que determinaron esta componente. Para cada instrumento presentamos una descripción general de los estudiantes que participaron y la intención con la que cada uno de los problemas planteados fue diseñado.

3.3 Cuestionario Diagnóstico

El carácter cualitativo y descriptivo de nuestra investigación, donde las concepciones de los estudiantes son de primordial importancia y de lo que se trata es de hacerlas lo más explícitas posibles, consideramos que un cuestionario inicial y posteriormente una entrevista semi-estructurada es la técnica que nos permitirá obtener información significativa.

Con la intención de obtener información sobre tópicos que consideramos como prerrequisitos básicos, dados en nuestra descomposición genética para iniciar la construcción del concepto espacio vectorial, es que aplicamos un cuestionario a estudiantes que asisten regularmente al curso de Álgebra Lineal II (ver programa del curso en el anexo), para Licenciatura en Matemáticas de la PUCV-Chile.

3.3.1 Aplicación del Cuestionario Inicial

Esta investigación se desarrolló en el Instituto de Matemáticas (IMA) de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso PUCV (Chile), durante el segundo semestre académico del año 2007.

El cuestionario inicial ha sido aplicado a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la PUCV-Chile y está centrado en temas considerados prerrequisitos básicos para construir el concepto de espacio vectorial: conjunto, función, operación binaria y axiomas de espacio vectorial. El objetivo principal del cuestionario es verificar si el estudiante cuenta con las construcciones necesarias previas, al de espacio vectorial. Sin embargo también incluimos algunas preguntas que indagan sobre el concepto de espacio vectorial y conceptos relacionados como el de subespacio, con el fin de tener una idea del desempeño general de los estudiantes y para tener elementos para la elaboración de la entrevista.

El estudio exploratorio inicial ha consistido en la aplicación de un cuestionario a 6 estudiantes del área de Licenciatura en Matemáticas de la PUCV-Chile. El cuestionario ha sido aplicado sin ningún reforzamiento previo sobre los temas y los estudiantes han invertido entre 80 y 90 minutos para contestarlo; se han dejado espacios en blanco entre una pregunta y otra, indicándose por escrito que los cálculos y consideraciones se escriban en estos espacios. Se presenta a continuación el cuestionario aplicado, así como un resumen de las bases sobre las que se han diseñado los problemas, las respuestas esperadas de los estudiantes y los resultados encontrados.

3.3.2 Intención del diseño y análisis a priori sobre la construcción del concepto

A continuación presentamos la intención de cada una de las doce preguntas planteadas en el cuestionario diagnóstico, así como un análisis a priori de las posibles respuestas y planteamientos que los estudiantes pueden presentar ante ellas. Las preguntas [4,5,6,7,8,9,10,11,12] fueron reportadas en Vargas (2007).

Pregunta 1

a) Sea $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x,y,z>0\right\}$ un conjunto con las operaciones:

SUMA: $u\oplus v=\left(xa,yb,zc\right)$ con $u=\left(x,y,z\right)$, $v=(a,b,c)$ en V

PONDERACIÓN: $\lambda\odot u=\left(x^{\lambda},y^{\lambda},z^{\lambda}\right)$ con $u=\left(x,y,z\right)\in V$ y $\lambda\in\mathbb{R}$.

Calcular:

i) $(2,5,1)\oplus(7,9,3)$=--

ii) $-2\odot(3,6,4)$ = ---

iii) $-2\odot(3,6,4)\oplus(2,5,1)$ =---

b) Sea W el subconjunto de todos los puntos de V situados sobre el plano $z=1$.

Escriba dos elementos de W.

Análisis:

Con el inciso a) de la pregunta se quiere indagar la concepción que posee un estudiante con respecto a las operaciones binarias definidas en un espacio vectorial, ya que en la descomposición genética se exige el concepto de operación binaria en una construcción de esquema para llegar a construir el concepto de espacio vectorial. Por ello, se le presentan al estudiante distintos pares de vectores y escalares para que realice operaciones de suma, ponderación y ponderación-suma entre ellos. El estudiante puede resolver este ejercicio siempre y cuando tenga construido el concepto de operaciones binarias en el sentido general, ya que en este caso la suma y la ponderación definidas sobre el espacio vectorial no son las operaciones usuales. Tal como se le indica, el alumno procederá a realizar las operaciones entre los vectores y escalares, el caso interesante se tendrá en los argumentos del inciso a iii), ya que en él tendrá que dar prioridad a las operaciones o justificar el porqué de su cuenta.

Con el inciso b) de la pregunta se quiere indagar la concepción que posee un estudiante con respecto a la escritura por extensión del espacio vectorial, dado que el subespacio se le presentó en una escritura por comprensión.

Pregunta 2

Se han definido sobre $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones:

SUMA
$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$((x,y),(a,b)) \to (x,y) + (a,b) = (2y + 2b, -x - a)$$

PONDERACIÓN
$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(\alpha,(x,y)) \to \alpha \odot (x,y) = (\alpha x, -\alpha y)$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ con las operaciones anteriormente definidas un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

____ ¿Por qué?
____
____
____
____
____
____

Análisis:

En esta pregunta se le presenta al alumno un conjunto de pares ordenados de números reales en el cual se han definido operaciones binarias de suma y multiplicación por escalares. Se le cuestiona si el conjunto dado forma un espacio vectorial bajo las operaciones indicadas. Se quieren observar las estrategias de solución que utiliza el alumno en la respuesta a esta pregunta. El alumno se enfrenta a ciertas dificultades tales como: la definición de las operaciones, dado que no son las usuales.

Pregunta 3

¿ $\mathbb{Z}_5^3$ es un sub-espacio de $\mathbb{R}^3$?

____ ¿Por qué?
____
____

Análisis:

En esta pregunta se le cuestiona al alumno sobre si $\mathbb{Z}_5^3$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, donde $\mathbb{Z}_5$ es el cuerpo de los enteros módulo 5 y $\mathbb{R}^3$ es el espacio de números reales de dimensión 3. Aquí se quiere observar la relación que el alumno se ha formado sobre un espacio vectorial y sus subespacios. Un alumno podría pensar que en efecto $\mathbb{Z}_5^3$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, puesto que los dos están indexados por el 3.

Pregunta 4

Si $K = \mathbb{Z}_3$ y $V = \{(x, x, x) \mid x \in K\}$ con la suma y el producto mod 3, ¿Es V un espacio vectorial?

______________________________ ¿Por qué?

Análisis:

En esta pregunta se le presenta al alumno un conjunto V con la suma y producto mod 3 definida sobre él y se le cuestiona si tal conjunto forma un espacio vectorial sobre el campo $K = \mathbb{Z}_3$. Se quiere observar el tipo de construcción que tiene el alumno en relación al concepto de espacio vectorial. El alumno se enfrenta a distintas dificultades tales como: desconocer la definición de la operación binaria mod 3, desconocer la definición de $K = \mathbb{Z}_3$, no tener presentes algunos axiomas.

Pregunta 5

¿Es $V = \{p = (2,3,-1) + t(1,4,5) \mid t \in \mathbb{R}\}$ un espacio vectorial?

____ ¿Por qué?

Análisis:

En esta pregunta se le presenta al alumno un conjunto V haciendo uso de un parámetro y se le cuestiona si tal conjunto es un espacio vectorial. Se quiere observar el tipo de construcción que tiene el alumno en relación al esquema del concepto de espacio vectorial y al concepto de axioma. El alumno se enfrenta a distintas dificultades tales como: ausencia explícita del campo, ausencia explícita de las operaciones binarias, no tener presentes algunos axiomas, la representación en notación de conjuntos y dificultades relacionadas con parámetros.

Pregunta 6

¿Es posible que exista un espacio vectorial que tenga un solo elemento?

____ ¿Por qué?

Análisis

Esta pregunta es un caso extremo en el cual se le cuestiona al alumno sobre la existencia de un espacio vectorial con un solo elemento; esto puede causar dificultades. Algún alumno puede pensar que de acuerdo a las operaciones binarias al menos se necesitan dos elementos para poderlos operar, o quizás tres, en el caso de la asociatividad. De igual manera en esta pregunta se quiere observar cuáles de los axiomas de “inclusión del cero vector en el espacio vectorial” y la “cerradura con respecto a la adición y a la multiplicación por escalar” han sido interiorizadas y se encuentran presentes en el discurso del alumno cuando responde a esta pregunta. Asimismo se quiere observar e identificar las estrategias que utiliza el alumno al tratar con este tipo de problemas y observar aquel alumno cuya respuesta es “sí”, para ver si tiene claro que la propiedad de unicidad se satisface.

Pregunta 7

¿Es posible que exista un espacio vectorial que tenga sólo dos elementos?

____ ¿Por qué?
____
____
____
____
____
____

Análisis:

Esta pregunta está relacionada con la anterior, aquí se le cuestiona al alumno sobre la existencia de un espacio vectorial con dos elementos, se quieren observar las argumentaciones que da el alumno cuando se enfrenta a este tipo de preguntas. Tal como en el caso anterior puede pensar que no es posible puesto que necesita al menos tres elementos para poder verificar el axioma de la asociatividad, o más aún el axioma de distributividad o que alguno de los axiomas de los que satisface un espacio vectorial no se cumple. Asimismo se quiere observar en el caso de aquel alumno cuya respuesta es sí, si tiene claro que el espacio vectorial que ha dado no es único.

Pregunta 8

¿ $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$? (con las operaciones usuales). $\mathbb{Q}$ representa al conjunto de los números racionales.

____ ¿Por qué?
____
____
____
____
____
____

Análisis

Con esta pregunta se espera tener un panorama general acerca de las construcciones mentales de los alumnos respecto al papel que juegan el espacio vectorial y el cuerpo de los escalares, cuando hay una relación de inclusión entre estos dos conjuntos.

Pregunta 9

¿ $\mathbb{Q}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$? (con las operaciones usuales)

____ ¿Por qué?
____
____
____
____
____
____

Análisis:

Con esta pregunta se espera tener un panorama general acerca de las construcciones mentales de los alumnos respecto al papel que juegan el espacio vectorial y el cuerpo de los escalares, cuando hay una relación de inclusión entre estos dos conjuntos.

Pregunta 10

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $U \subset V$. ¿Es U un espacio vectorial?

____ ¿Por qué?
____
____
____
____
____
____

Análisis:

En esta pregunta se le cuestiona al alumno si cualquier subconjunto de un espacio vectorial sobre un cuerpo K forma un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo. Se quieren observar las dificultades que pueden causar las propiedades de un subconjunto de un espacio vectorial en el alumno. El alumno puede pensar que un subconjunto de un espacio vectorial es también un espacio vectorial o dar un contraejemplo para mostrar que este no necesariamente es el caso.

Pregunta 11

¿ $\mathbb{Z}_5$ es un subespacio de $\mathbb{R}^5$?

____ ¿Por qué?
____
____
____
____
____
____

Análisis:

En esta pregunta se le cuestiona al alumno sobre si $\mathbb{Z}_5$ es un subespacio de $\mathbb{R}^5$, donde $\mathbb{Z}_5$ es el conjunto de los enteros módulo 5 y $\mathbb{R}^5$ es el espacio de números reales de dimensión 5. Tal como en las preguntas anteriores aquí se quiere observar la relación que el estudiante se ha formado sobre un espacio vectorial y sus subespacios. Un alumno podría pensar que en efecto $\mathbb{Z}_5$ es un subespacio de $\mathbb{R}^5$, puesto que los dos están indexados por el 5, o bien que es una consecuencia de que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

Pregunta 12

¿Puedes graficar un subespacio de $\mathbb{R}^2$ que contenga los puntos indicados en la figura 2?

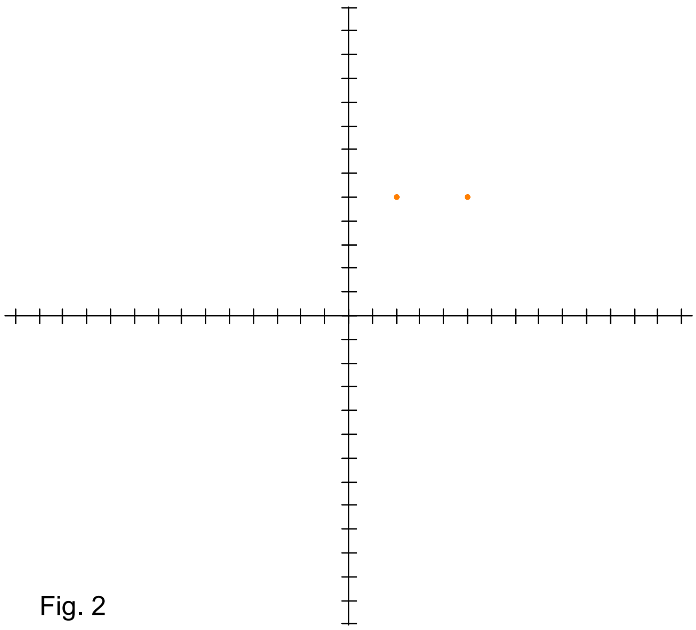


Fig. 2

____ ¿Por qué?

Análisis:

En esta pregunta se le cuestiona al alumno si puede graficar un subespacio de $\mathbb{R}^2$ que contenga los puntos indicados en la figura 2; cabe resaltar que se le pide al alumno un subespacio diferente de $\mathbb{R}^2$. Se quiere observar si el alumno es capaz de visualizar de forma gráfica un subespacio vectorial que satisfaga una condición. Asimismo se desean observar las visualizaciones que tiene el alumno acerca de los axiomas que debe satisfacer un subespacio vectorial. Quizá un alumno piense que no es posible graficar un subespacio vectorial propio de $\mathbb{R}^2$ que contenga los puntos indicados o más aún puede dar una gráfica que satisfaga la condición pedida pero que no sea un subespacio vectorial.

3.4 Entrevista Semiestructurada

Teniendo en cuenta el carácter cualitativo y descriptivo de nuestro estudio, donde las concepciones de los estudiantes son de primordial importancia y de lo que se trata es de hacerlas lo más explícitas posibles, consideramos que la entrevista es la técnica que nos permitirá obtener información significativa. Concretamente utilizamos la técnica de la entrevista semiestructurada, como instrumento de recogida de información. Se elaboraron 10 guiones de entrevistas correspondientes a cada una de las construcciones mencionadas en la descomposición genética, tomando en cuenta los datos obtenidos de la aplicación del cuestionario. El cuestionario fue diseñado y aplicado a estudiantes antes de la construcción de la entrevista, ya que con él se pretendía indagar sobre sus ideas con respecto al concepto de espacio vectorial. Los problemas planteados en el cuestionario se referían a situaciones con: conjunto de vectores, operación suma, operación ponderación y una noción relacionada, el "subespacio". El objetivo principal del cuestionario era el de verificar si el estudiante contaba con algunas nociones relacionadas con el tema de espacio vectorial, como son las nociones que inician nuestra descomposición genética: Conjunto, Función, Operación binaria y Axiomas en general.

Las entrevistas tuvieron una duración de entre 90 minutos a 140 minutos, dependiendo de cada estudiante. En total se realizaron 10 entrevistas, equivalente a una por cada estudiante que participó en la investigación. Los 10 estudiantes entrevistados pertenecen a la carrera de Licenciatura en Matemáticas de la PUCV; sólo a 6 de estos estudiantes que se encontraban en una etapa más inicial de su carrera, IV semestre, se les había aplicado el cuestionario. Ellos se hallaban en octubre del año 2007 cursando entre otras asignaturas, la de Álgebra lineal II (Álgebra Multilineal), cuando se les aplicó el cuestionario. Sin embargo, a los otros 4 estudiantes, que estaban en una etapa más avanzada de su carera, VIII semestre, cursando entre otras asignaturas, la de Teoría Algebraica de Números, no se les aplicó el cuestionario. Estos cuatro estudiantes se consideraron como fuentes que pueden proporcionar datos empíricos adicionales a lo que habíamos considerado al principio.

Se presenta a continuación el guión de las entrevistas aplicadas, así cómo también un resumen de las bases sobre las que se han diseñado los problemas de acuerdo a nuestra descomposición genética, junto con las respuestas esperadas de los estudiantes. Cabe aclarar que es la totalidad de la entrevista la que nos da una idea de las dificultades que tiene el estudiante y las concepciones que muestra; es difícil afirmar algo acerca de las construcciones mentales de cada estudiante mediante una sola pregunta.

Guión para la Entrevista

Pregunta 1

Se han definido sobre $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones:

SUMA

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\big((x,y),(a,b)\big) \to (x,y) + (a,b) = (2y + 2b, -x - a)$$

PONDERACIÓN

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\big(\alpha,(x,y)\big) \to \alpha \odot (x,y) = (\alpha x, -\alpha y)$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ con las operaciones anteriormente definidas un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

Análisis

En esta pregunta se le presentan al estudiante un conjunto de pares ordenados de números reales en el cual se han definido operaciones binarias de suma y ponderación por escalar. Se enfrenta así el estudiante a un cuestionamiento -el conjunto dado, forma o no un espacio vectorial bajo las operaciones indicadas-. Con esta pregunta se quieren observar las estrategias de solución que utiliza el estudiante en el intento de dar una respuesta, así como también prestar atención como se enfrenta a ciertas dificultades tales como: la definición de las operaciones SUMA y PONDERACIÓN dado que no son las usuales.

Esta pregunta tiene el propósito de observar algunos elementos de las construcciones mentales que tiene el estudiante hasta el punto del objeto de espacio vectorial. Mediante esta pregunta podremos observar si el estudiante puede aplicar una operación binaria dada explícitamente a un conjunto dado como proceso, si se ha encapsulado este proceso en un objeto para poder averiguar axiomas, si el esquema de axiomas se ha generalizado para poder aplicarlo a un conjunto con operaciones binarias, y si ambas operaciones se coordinan mediante las leyes distributivas. Si el estudiante falla en contestarla, sus errores y estrategias nos darán información respecto a la concepción que todavía no se ha construido en su mente o que está en camino a construirse.

También nos puede dar información respecto al uso de cuantificadores, ya que el estudiante tiene que darse cuenta que si hay algún axioma que falla, el conjunto junto con las operaciones no constituye un espacio vectorial.

Pregunta 2

Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales y $F(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f \text{ es función}\}$. Se definen las siguientes operaciones:

SUMA
$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a,b) &\to a+b \end{aligned}$$

PONDERACIÓN
$$\begin{aligned} \odot : F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (f,x) &\to f \odot x = f(x) \end{aligned}$$

Si sabemos que $(\mathbb{R},+)$ es un Grupo abeliano, ¿Qué axiomas faltan para que $\mathbb{R}$ sea un espacio vectorial sobre $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$? , ¿Se cumplen dichos axiomas?

Análisis:

En esta pregunta se le presentan al estudiante el conjunto de los números reales y el conjunto de las funciones definidas sobre él, en el cual se han definido operaciones binarias de suma y ponderación por escalar. Se enfrenta así el estudiante al mismo cuestionamiento de la pregunta anterior pero acotando el número de axiomas que debe chequear a la mitad. Con esta pregunta se quieren observar las estrategias de solución que utiliza el estudiante en el intento de dar una respuesta, pero sobre todo prestar atención como se enfrenta a las dos propiedades distributivas entre escalares y vectores: Ponderación con respecto a la suma de vectores y Suma de escalares con respecto a la ponderación, así como también no perder de vista que la definición de espacio vectorial exige que los escalares estén definidos sobre un cuerpo y no sobre un anillo.

Esta pregunta, igual que la anterior, tiene el propósito de observar algunos elementos de las construcciones mentales que tiene el estudiante hasta el punto del objeto de espacio vectorial. Sin embargo en esta pregunta juega un papel importante el cuerpo en el esquema de espacio vectorial. Así podremos observar si el estudiante tiene las construcciones necesarias respecto al cuerpo y el papel que juega en la definición del espacio vectorial, como se ha previsto en nuestra descomposición genética. En relación con esto, una dificultad que puede presentarse es que no le cause ningún conflicto al estudiante que la ponderación está definida sobre un anillo.

Por el otro lado, como una de las leyes distributivas se satisface y la otra no, esperamos obtener más información respecto a la coordinación de la suma y la ponderación en la mente del estudiante, si es que utiliza este hecho para dar respuesta a la pregunta:

a) Ponderación con respecto a la suma de vectores
$f \odot (x+y) = f(x+y) = f(x)+f(y)$ ssi f es homomorfismo.
Y como f sólo es una función. Luego esta propiedad distributiva NO SE CUMPLE.

b) Suma de escalares con respecto a la ponderación.
$(f+g) \odot x = (f+g)(x) = f(x)+g(x)$, por propiedad de la suma de dos funciones. Luego esta propiedad distributiva SI SE CUMPLE.

Pregunta 3

¿Es posible que exista un espacio vectorial que tenga sólo dos elementos?

Análisis:

Esta pregunta, igual que las anteriores, tiene el propósito de observar algunos elementos de las construcciones mentales que tiene el estudiante hasta el punto de esquema a un nivel inter de espacio vectorial. Sin embargo en esta pregunta se subyace una conexión importante cuando el cuerpo y espacio vectorial pueden ser el mismo cuerpo, en el esquema de espacio vectorial. Así podremos observar si el estudiante tiene las construcciones necesarias respecto al cuerpo y el papel que juega en la definición del espacio vectorial, cuando el espacio vectorial está definido como el cuerpo mismo. Cuando el estudiante reflexiona sobre los axiomas para construir un ejemplo, esto significa que el alumno percibe al conjunto de axiomas como una totalidad y se da cuenta de las propiedades de una estructura llamada espacio vectorial. Esto indica que para contestar esta pregunta el alumno por un lado necesita una concepción proceso para construir ejemplos concretos de espacios vectoriales, y por otro lado necesita haber encapsulado dicho proceso para poder pensar en el cumplimiento de propiedades para considerar aquellos ejemplos que satisfacen dichas propiedades, ya que éstas pueden considerarse como preguntas que uno hace sobre el espacio vectorial. También, si el estudiante es capaz de argumentar que el espacio vectorial con dos elementos no es único[14] al compararlo con diferentes espacios vectoriales, es decir, se da cuenta que puede haber más de un espacio vectorial con dos elementos y puede dar ejemplos concretos de sus afirmaciones, se considerará estar en una construcción de objeto, ya que ha encapsulado el proceso de averiguar si un conjunto forma un espacio vectorial. Aunque no está incluido en la pregunta explícitamente, esta pregunta podría resultar útil en mostrar los niveles

[14] Otros espacios vectoriales con dos elementos serían por ejemplo:

(i) $V=\{-1,1\}$ sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones:

Suma: $v_1+v_2=v_1\,v_2$,para todo $v_1,v_2\in V$

Ponderación: $\alpha\bullet v=1$,para todo $v\in V$ y para todo $\alpha\in\mathbb{R}$

(ii) $V=\{-1,1\}$ sobre $\mathbb{Z}_2$ con las operaciones:

Suma: $v_1+v_2=v_1\,v_2$,para todo $v_1,v_2\in V$

Ponderación: $0\bullet 1=1,\quad 0\bullet(-1)=1,\quad 1\bullet 1=1,\quad 1\bullet(-1)=-1$

de esquema, por ejemplo el estudiante estará en un nivel de inter respecto del esquema de espacio vectorial, si establece relaciones entre la estructura algebraica de un cuerpo y la estructura algebraica de un espacio vectorial, llegando a concluir que: "todo cuerpo es un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo".

Pregunta 4

$W = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \,/\, \int_0^1 p(t)dt = 0 \right\}$ con las operaciones usuales, ¿es un Espacio Vectorial real?. ¿Por qué? (JUSTIFICA).

Análisis:

Esta pregunta tiene el propósito de observar algunos elementos de las construcciones mentales que tiene el estudiante hasta el punto de esquema a un nivel trans, siendo el conjunto dado un subconjunto de polinomios y constituyendo así un ejemplo no estándar para los estudiantes. La resolución a este problema puede darse de dos maneras: el estudiante puede pensar que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_n[x]$, o bien puede chequear cada uno de los diez axiomas para que W sea un espacio vectorial sobre los números reales.

Además, mediante esta pregunta podremos observar si el estudiante puede aplicar una operación binaria dada implícitamente a un conjunto dado como proceso, si se ha encapsulado este proceso en un objeto para poder averiguar axiomas, si el esquema de axiomas se ha generalizado para poder aplicarlo a un conjunto con operaciones binarias, y si ambas operaciones se coordinan mediante las leyes distributivas. Si el estudiante falla en contestarla, sus errores y estrategias nos darán información respecto a la concepción que todavía no se ha construido en su mente o que está en camino a construirse. El estudiante estará en un nivel de inter respecto del esquema de espacio vectorial, si establece relaciones entre el conjunto dado y la noción de subespacio vectorial. Si observamos que estas relaciones muestran una estructura subyacente de los espacios vectoriales que se extiende a ejemplos menos familiares como una generalización, el estudiante puede estar en un *nivel trans* respecto al esquema de espacio vectorial.

Pregunta 5

Averigua si la siguiente afirmación es correcta o no, en ambos casos justifica tu respuesta:

"Sean V,W y Z espacios vectoriales sobre un cuerpo K y supongamos que:

$$V + W = V + Z$$

Entonces: W = Z".

Análisis:

Esta pregunta permite observar si el estudiante posee una concepción objeto del concepto espacio vectorial, lo cual puede ser visto a través de la manera que un estudiante concibe un espacio vectorial: como una estructura que satisface axiomas, a través de sus elementos (vectores, un segmento de línea dirigida) o una ene-ada de números reales, o también a través de sus subespacios (rectas, planos u otros). Asimismo se tiene la intención de poder tener una idea de la concepción del estudiante acerca de la operatoria algebraica con espacios vectoriales. Quizá él repita la definición formal que se le ha enseñado de suma de espacios vectoriales sin mostrar relación alguna con la suma directa de espacios vectoriales o tal vez con la operatoria en el cuerpo, ya que en un cuerpo sí existe la ley cancelativa para la suma.

Para poder considerar la aplicación de operaciones sobre espacios vectoriales, el estudiante necesita una concepción objeto de este concepto. Sin embargo para poder construir un contraejemplo, se requiere la desencapsulación y pensar en el proceso que dio origen al objeto.

Cabe también la posibilidad que un estudiante considere la suma directa de espacios vectoriales, argumentando que se trata de una suma específica y construya a partir de ella contraejemplos, considerando por ejemplo a sumandos directos los subespacios vectoriales: "rectas por el origen", ya que son los únicos subespacios vectoriales propios de $\mathbb{R}^2$. Así $\langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle = \mathbb{R}^2$ cuando v_1 y v_2 sean vectores linealmente independientes. En este caso se considerará que el estudiante está en una construcción de esquema a nivel trans de los espacios vectoriales, ya que reconoce la operación suma directa como un caso especial de suma y la interrelaciona con las nociones de subespacio y vectores linealmente independientes, del álgebra lineal.

Un estudiante se considerará estar en una construcción de proceso en cuanto al concepto de espacio vectorial, cuando intente justificar sus elecciones de los subespacios U,V y W a través de sus elementos, para así construir los subespacios: $V+W$ y $V+Z$, vale decir: $(v+u) \in V+W$ cuando $v \in V$ y $u \in W$ (análogo para $V+Z$).

Pregunta 6

a. ¿Es $\mathbb{Q}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$? (JUSTIFICA).

b. ¿Es $\mathbb{R}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$? (JUSTIFICA).

Análisis: a. ¿Es $\mathbb{R}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$?

Esta pregunta muestra el caso en el cual el cuerpo es un subconjunto del conjunto propuesto al estudiante, para averiguar si forma o no un espacio vectorial sobre el cuerpo dado. En esta pregunta se quiere observar y analizar el papel que juega el cuerpo de los escalares cuando el estudiante piensa en el espacio vectorial. El hecho de que $\mathbb{Q}$ sea un subconjunto (subcuerpo) de $\mathbb{R}$ puede causar dificultades a los alumnos. Alguno de ellos puede pensar que por esta razón no es necesario verificar los axiomas que satisface un espacio vectorial. Asimismo con esta pregunta se quiere observar si los alumnos pueden determinar el papel que juega el cuerpo de los escalares observando si confunden los elementos de ambos conjuntos.

Cuando un estudiante argumenta que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ verificando paso por paso cada uno de los axiomas, percibiéndolos como separados; en este caso se considerará que el alumno se encuentra en una construcción de acción respecto al concepto de axioma. Es posible que este estudiante no se dé cuenta del papel que juega el cuerpo en la definición de espacio vectorial y se considerará que se encuentra en una construcción de acción respecto al concepto de espacio vectorial.

Si el estudiante argumenta de manera correcta que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, mostrando que ha interiorizado las acciones de averiguar si un conjunto forma un espacio vectorial, es decir, el alumno es capaz de percibir a los axiomas como un solo proceso de verificación que debe de satisfacer un conjunto para ser llamado espacio vectorial, en este caso se dirá que el alumno se encuentra en una construcción de proceso en relación al concepto de espacio vectorial.

Mostrar que los procesos anteriores se han encapsulado en un objeto y establecer relaciones con otros conceptos; es decir, el alumno reflexiona sobre los axiomas en un primer momento, al darse cuenta que no falla ninguno entonces procede a verificarlos, de igual manera muestra que los axiomas pueden dar diferentes estructuras a un conjunto dependiendo de las propiedades definidas sobre él a través de las operaciones binarias. Asimismo se da cuenta que la relación de inclusión dados en los conjuntos puede influir sobre si es, o no es, un espacio vectorial, y es capaz de explicar de qué manera. Por otro lado el alumno es capaz de establecer relaciones entre los conceptos de espacio vectorial, conjuntos, axiomas, operaciones binarias, en cuyo caso se considerará que el alumno se encuentra en un nivel Intra en cuanto al concepto de espacio vectorial.

Análisis: b. ¿Es $\mathbb{Q}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

Tal como en el inciso anterior, aquí se quiere observar el papel que juega el cuerpo de los escalares cuando el alumno piensa en un espacio vectorial. En este caso el conjunto que se le pide verificar al alumno si es o no un espacio vectorial es subconjunto del cuerpo. Se quieren observar los mismos fenómenos que se detallaron en el inciso anterior.

Ahora, un estudiante puede mencionar que $\mathbb{Q}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o que $\mathbb{Q}$ no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, tomando sólo en cuenta que $\mathbb{Q}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$, sin dar justificaciones a cada una de sus afirmaciones. En este caso diremos que el estudiante todavía no se encuentra en una concepción acción respecto al concepto espacio vectorial y axiomas. Por el contrario, si el estudiante verifica los axiomas paso por paso hasta llegar a aquél que falla para entonces decidir que $\mathbb{Q}$ no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, se considerará que el alumno posee por lo menos una concepción de acción en cuanto al concepto de axioma y de espacio vectorial.

Las acciones anteriores se han interiorizado en un proceso, cuando el estudiante es capaz de considerar a todos los axiomas como un solo proceso de verificación considerándolos como una totalidad, por lo cual antes de verificar cada uno de los axiomas se detiene a pensar sobre el posible axioma que podría fallar y sólo entonces procede a verificarlo. Asimismo el estudiante se da cuenta de la existencia de una estructura llamada espacio vectorial.

Si los procesos anteriores se han encapsulado en un objeto y más aún se establecen relaciones con otros conceptos (subconjunto); es decir, el alumno reflexiona sobre los axiomas en un primer momento, al darse cuenta cuál es el que falla entonces procede a verificarlo, de igual manera muestra que los axiomas pueden dar diferentes estructuras a un conjunto dependiendo de las propiedades definidas sobre él a través de las operaciones binarias. Asimismo se da cuenta que la relación de inclusión dados en los conjuntos puede influir sobre si es o no es un espacio vectorial, y es capaz de explicar de qué manera. Por otro lado el alumno es capaz de establecer relaciones entre los conceptos de espacio vectorial, conjuntos, axiomas, operaciones binarias, en cuyo caso se considerará que el alumno se encuentra en una etapa inicial de construcción de esquema en cuanto al concepto de espacio vectorial.

Pregunta 7

$\mathbb{R}-\{0\}$ es un grupo abeliano con la operación SUMA definida como sigue:

SUMA: $x+y =: x\cdot y$, donde $x,y\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Definir la otra operación, MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR sobre un cuerpo K para que $\mathbb{R}-\{0\}$ sea espacio vectorial sobre K, con esas dos operaciones.

Análisis:

Esta pregunta permite que el estudiante reflexione para llegar a determinar la otra operación “multiplicación por escalar” de tal manera que se cumplan los axiomas que faltan, para que la estructura $\left(\mathbb{R}-\{0\},\mathbb{K},+,\text{producto por escalar}\right)$ sea un espacio vectorial. Aunque pensar en operaciones requiere una concepción proceso, una vez definida es necesario que el estudiante posea una concepción objeto de las operaciones y averiguación de axiomas que le permita manipularlas y determinar si la estructura resultante con esa operación es un espacio vectorial. Un estudiante podría pensar en operaciones conocidas y empezar a chequear los axiomas, así mediante ensayo y error posiblemente podría encontrar operaciones que cumplan los axiomas que se necesitan.

Por otra parte, este problema permite observar las conexiones que los estudiantes pueden estar estableciendo con los conceptos: conjunto, cuantificadores, función, operación, averiguación de axiomas. En este caso diremos que tal estudiante puede encontrarse en un nivel de esquema inter de espacio vectorial, si la operación por escalar que esta considerando es la trivial (suma y multiplicación usuales), ahora si por el contrario el estudiante considera como operación por escalar una no trivial como por ejemplo: potencia, diremos que el estudiante puede encontrarse en un nivel más alto de evolución de su esquema de espacio vectorial (trans). A continuación mostramos algunas de las posibles respuestas que un estudiante podría dar frente a esta situación:

- Un estudiante podría pensar en las operaciones usuales y como la suma esta definida como un producto, intentar definir el producto como suma:

  $$\begin{aligned} &\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\} \\ &(x,y)\to x+y \end{aligned}$$ pero no cumple los axiomas de distributividad.

- Por otro lado un estudiante podría pensar en operaciones poco usuales y definir, por ejemplo:

  $\alpha\cdot x = x^{\alpha}$, donde $\alpha\in\mathbb{R} \quad \wedge \quad x\in\mathbb{R}-\{0\}$ y chequear que se cumplen los 5 axiomas siguientes:

  (a) $\alpha\cdot x = x^{\alpha}\in\mathbb{R}-\{0\}$

  (b) $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x+\beta\cdot x$

  (c) $\alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x+\alpha\cdot y$

  (d) $(\alpha\beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x)$

  (e) $1\cdot x = x$

Esta pregunta especialmente será útil en observar si las dos operaciones están coordinadas en la mente del estudiante, para definir la estructura de un espacio vectorial.

Pregunta 8

Sea $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x,y,z > 0 \right\}$ un espacio vectorial con las operaciones:

SUMA: $u \oplus v = (xa, yb, zc)$ con $u = (x,y,z)$, $v = (a,b,c)$ en V

PONDERACIÓN: $\lambda \odot u = \left(x^{\lambda}, y^{\lambda}, z^{\lambda}\right)$ con $u = (x,y,z) \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sea W el subespacio de todos los puntos de V situados sobre el plano $z = 1$.

1. Escriba dos vectores de W.
2. ¿Cuál es el vector nulo de W?.
3. Si $v = (3,2,1) \in W$, ¿Quién es $-v$?.
4. ¿Los vectores $(2,2,1)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ de W son linealmente independientes?
5. ¿El conjunto $\left\{ (3,3,1), \left(\frac{1}{3}, 3, 1\right) \right\}$ es una base para W?

Análisis:

En general con este problema buscamos observar cómo un estudiante concibe la estructura de espacio vectorial y a su vez de cómo ésta se relaciona con algunas otras nociones del álgebra lineal (subespacio vectorial, vectores linealmente independientes y base), para así poder dar cuenta de la evolución de su esquema.

Consideramos que un estudiante en nivel inter de esquema de un espacio vectorial podrá determinar los vectores solicitados en los incisos 8.1, 8.2 y 8.3, ya que es capaz de establecer relaciones entre un espacio vectorial y un subespacio. Si por el contrario un estudiante no puede dar respuesta a esos incisos, consideraremos que sus construcciones sólo le permiten actuar de manera mecánica ante situaciones desconocidas. Por otro lado el inciso 8.2. puede crear conflicto en el estudiante si él considera que el cero vector de W es la 3-upla cero.

En los incisos 8.4 y 8.5, consideramos que un estudiante con una concepción de esquema a nivel trans, podrá realizar las conexiones adecuadas entre: espacio vectorial, conjuntos linealmente independientes y base para así dar respuesta que el conjunto del inciso 8.4. no es linealmente independiente y que el conjunto del inciso 8.5 efectivamente es una base para W. Sin embargo, el inciso 8.4 puede crear conflicto en el estudiante al realizar una combinación lineal igualada a un vector nulo que no está constituido de ceros.

Pregunta 9

Sean *U, W, V* tres subespacios de $\mathbb{R}^3$, definidos como sigue:

$$U = \langle (1,2,3),(1,0,1),(0,1,1) \rangle$$
$$W = \langle (-1,1,0),(1,0,1) \rangle$$
$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$$

Se pregunta: ¿$U = W = V$?

Análisis:

Esta pregunta permite que el estudiante reflexione sobre la manera de enfrentar la igualdad de tres espacios vectoriales y la forma de cómo elaborar una argumentación para responder. En este caso debe establecer, que una igualdad de espacios vectoriales está determinada por la conexión que existe entre: combinaciones lineales, vectores linealmente independientes, conjunto generador y base. Como se puede ver, pensar sólo sobre el cumplimiento de una de las opciones anteriores de manera aislada no ofrece las herramientas suficientes para enfrentar el problema. Con esta idea, consideramos que es necesario que el estudiante posea un esquema de espacio vectorial al menos al *nivel inter* ya que se requieren conexiones entre el concepto de transformación lineal y los conceptos de combinaciones lineales, vectores linealmente independientes, conjunto generador y base.

Un estudiante con un esquema de espacio vectorial suficientemente desarrollado puede determinar una base de cada uno o tal vez sólo de uno de los subespacios vectoriales U, W y después chequear si esos vectores son también elementos de V, en efecto:

$U = \langle (1,2,3),(1,0,1),(0,1,1) \rangle = \langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle$ pues $(1,2,3) = (1,0,1) + 2(0,1,1)$

y $(1,0,1),(0,1,1) \notin$ V, pues 1+1$\neq$0.

Luego: $U \neq V$.

Pregunta 10

$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / \begin{matrix} x+2y-z=0 \\ x-2z+t=0 \end{matrix} \right\} \leq M_2(\mathbb{R})$. Determine una base para V.

Análisis:

Esta situación busca que los estudiantes determinen un conjunto que cumpla ciertas condiciones: que sea linealmente independiente y que genere a *V*. Para esto es necesario que el estudiante establezca conexiones entre conceptos del álgebra lineal: conjuntos linealmente independiente, conjunto generador, espacio generado, sistemas de ecuaciones lineales, espacio de solución de un sistema de ecuaciones lineales y espacio vectorial. Realizar esas conexiones exige que el estudiante se encuentre en un nivel alto de evolución de esquema de espacio vectorial, a lo menos nivel *esquema inter* de espacio vectorial. A continuación mostramos algunos posibles caminos que podría seguir un estudiante frente a esta situación.

- Despejar *y* de la primera ecuación y *t* de la segunda ecuación y sustituir dichos despejes en la matriz, es decir: $V=\left\{\begin{pmatrix} x & \frac{1}{2}(z-x) \\ z & 2z-x \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})/\,x,z\in\mathbb{R}\right\}$.Así tendrá que reescribir V como un espacio generado por dos vectores $V=\left\langle\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\rangle$ y además, el estudiante tiene que asegurarse que esos dos vectores sean linealmente independientes, para llegar a concluir que el conjunto $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ es una base para *V.*

- Otra posibilidad sería buscar el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales, a través de la matriz asociada al sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_{21}(-1)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en la cual el estudiante tendrá que determinar los pivotes, para indicar que hay dos parámetros, digamos: $y=k\in\mathbb{R}$ y $z=h\in\mathbb{R}$, de donde se concluye que: $x=h-2k$ y $t=2k-h$. Ahora reescribiendo V en términos de la solución del sistema, el estudiante llegará a la expresión: $V=\left\{\begin{pmatrix} h-2k & k \\ h & 2k-h \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})/\,k,h\in\mathbb{R}\right\}$ que equivale al espacio generado $V=\left\langle\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\rangle$. Ahora el estudiante al igual que en la resolución anterior debe asegurarse que estos vectores son linealmente independiente, para llegar a concluir que $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ es una base para *V.*

Pregunta 11

Sea $V = \left\{(a,b) / a,b \in \mathbb{R}^{+}\right\}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, con las operaciones:

SUMA: $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1a_2,b_1b_2) \qquad (a_1,b_1),(a_2,b_2)\in V$

PONDERACIÓN: $k(a,b)=\left(a^k,b^k\right), \qquad k\in\mathbb{R},\ (a,b)\in V$

Estudiar la dependencia lineal de los subconjuntos de V, dados por:

$S_1=\{(2,1),(3,2)\} \qquad S_2=\{(1,1),(2,1)\}$

Análisis:

Esta pregunta busca que el estudiante determine el cero vector, que es el vector *(1,1)* y con ello forme una combinación lineal, con los vectores de S_1, como así también separadamente con los vectores de S_2. Dicha combinación lineal deberá ser operada algebraicamente con las operaciones no triviales definidas como SUMA y PONDERACIÓN. Esto conducirá al estudiante a resolver en ambos casos un sistema de ecuaciones, donde tiene solución nula aquel sistema derivado de la combinación de S_1 y solución no nula aquel derivado de S_2. Llegando así, a concluir que S_1 es un conjunto linealmente independiente y S_2 es un conjunto linealmente dependiente. Con este problema esperamos hacer evidente la evolución de esquema de espacio vectorial a un *nivel trans*, ya que como se puede apreciar la resolución requiere de un análisis que establezca relaciones con los conceptos: elemento neutro (cero vector), espacio vectorial, operaciones Suma y Ponderación, combinaciones lineales, conjuntos linealmente independientes y linealmente dependientes. Sin embargo detectar la forma como éstos se relacionan para dar solución al problema requiere que el estudiante posea un esquema a un *nivel trans* que le permita estar consciente de toda la información que esta situación le proporciona.

Capítulo 4


Análisis y verificación de datos:
Evidencias de la evolución
cognitiva

Capítulo 4

Análisis y verificación de datos: Evidencias de la evolución cognitiva

En este capítulo haremos un análisis general de los datos obtenidos del cuestionario diagnóstico y la entrevista. Mediante la descripción de las construcciones y el nivel de esquema adquirido que evidenciaron poseer los estudiantes, determinaremos la viabilidad de nuestra descomposición genética hipotética y suministraremos evidencias empíricas para las construcciones mentales específicas que los estudiantes hacen cuando están aprendiendo el concepto de espacio vectorial.

4.1 Obtención y Análisis de datos del cuestionario inicial

En la construcción del cuestionario[15] se tomó en cuenta la primera parte de la descomposición genética del concepto de espacio vectorial, presentada en el apartado correspondiente. Asimismo, se han tenido en cuenta los esquemas relacionados al concepto de espacio vectorial: conjunto, axioma, operación binaria y función. Se diseñaron distintas preguntas para tener una idea de las construcciones mentales plasmadas por los alumnos en relación al concepto de espacio vectorial; asimismo se propusieron a los alumnos distintos ejercicios con los cuales se podría observar la conexión de los esquemas antes aludidos para el concepto de espacio vectorial.

[15] En el anexo 1 se pueden ver las trascripciones literales del cuestionario.

Efectuando un análisis de los resultados del cuestionario con base a la teoría APOE, podemos señalar lo siguiente:

- En la pregunta 1), parte aiii) donde el estudiante debía realizar el siguiente cálculo $-2\odot(3,6,4)\oplus(2,5,1)$, el 66,6% de los estudiantes mostró dificultades en dar prioridad a las operaciones: ponderación sobre la suma; aludiendo falta de paréntesis en la escritura de la operatoria, algo así como: $\left(-2\odot(3,6,4)\right)\oplus(2,5,1)$ o $-2\odot\left((3,6,4)\oplus(2,5,1)\right)$. Ello nos da una evidencia de que dichos estudiantes no tienen construido el objeto de operación binaria. El otro 33,3% de los estudiantes dio como respuesta: $-2\odot(3,6,4)\oplus(2,5,1)=\left(\frac{1}{36},\frac{1}{900},\frac{1}{16}\right)$.

- En la pregunta 2), 4 de los 6 estudiantes responden que $\mathbb{R}^2$ con las operaciones definidas, no conforma un espacio vectorial. Su justificación se basa principalmente en el chequeo de axiomas tales como:
  - $1\bullet v=v$,
  - $(x,y)+(*)=(x,y)\quad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$
  - $\alpha\otimes\left((a,b)+(x,y)\right)=\alpha\otimes(a,b)+\alpha\otimes(x,y)$.

  Los otros dos estudiantes, afirman que $\mathbb{R}^2$ con las operaciones definidas, es un espacio vectorial porque:
  - Es un grupo abeliano, porque: para $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ se tiene que $(x_1,y_1)+\alpha(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ por teorema (no indica cual es ese teorema).
  - Cumple que es grupo abeliano.

- En la pregunta 3, es interesante la variedad de argumentación que utilizan los estudiantes para decir que $\mathbb{Z}_5^3$ no es subespacio de $\mathbb{R}^3$, las cuales van desde: la ponderación por escalar no es una operación cerrada, no existe un único elemento inverso para cada vector, no se cumple la clausura para la suma y $\mathbb{Z}_5^3 \not\subset \mathbb{R}^3$.

- En la pregunta 4, sólo 3 de los 6 estudiantes responden que sí es un espacio vectorial. En cambio el resto no contesta explícitamente o da argumentaciones poco precisas.
- En la pregunta 5, sólo 1 de los 6 estudiantes responde que sí es un espacio vectorial. En cambio el resto responde que V no es un espacio vectorial, utilizando mayoritariamente la argumentación que el cero vector no está en V.
- En la pregunta 6, 4 estudiantes responden explícitamente y con un sólido argumento que es posible que exista dicho espacio vectorial y es el espacio nulo (conformado sólo por el vector nulo). El resto da argumentaciones como la siguiente: el conjunto vacío, es dicho espacio, y el neutro debe estar en el espacio vectorial, sin llegar a respuesta alguna.
- En la pregunta 7, 4 de los estudiantes citan que $\mathbb{Z}_2$ es el espacio que existe con dos elementos. En cambio los otros estudiantes responden:
  - Sí, porque si existen espacios vectoriales con infinitos elementos, con finitos elementos y con un elementos, entonces porque no va a existir uno con dos elementos.
  - Si existiera un espacio *V*, tendría que contener al elemento neutro y a otro vector diferente del nulo. Supongamos que sea "*a*" ese tal vector diferente del nulo: Si $\alpha \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ cuerpo, entonces $\alpha a \notin V$. Por lo tanto *V* no tiene estructura de espacio vectorial.

Las preguntas 8 y 9 producen en los estudiantes el cuestionamiento siguiente: ¿cuál es el cuerpo y cuál es el espacio?.

- En efecto, en la pregunta 8, 4 de los 6 estudiantes respondieron que $\mathbb{R}$ sí es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, dando argumentaciones como las siguientes:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$ y $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$ se tiene que: $x + \alpha y \in \mathbb{R}$.
- $(\mathbb{R}, +)$ cumple todo y con la ponderación también ya que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Sin embargo los otros dos estudiantes que respondieron negativamente a la pregunta, dieron argumentaciones como las siguientes:

- $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2}$ no se podría escribir como combinación lineal de finitos elementos de $\mathbb{Q}$.

- En la pregunta 9, 5 de los seis estudiantes responden que $\mathbb{Q}$ no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, dando la argumentación que ponderación por escalar no cumple la clausura. Acá solamente un estudiante respondió afirmativamente a la pregunta, argumentando que se debía a que: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- En la pregunta 10, cinco de los 6 estudiantes responden que no es espacio vectorial, basándose en argumentaciones que van desde los contraejemplos hasta la utilización de teoría, como la combinación lineal entre vectores. En cambio la otra estudiante afirma que *U* es un espacio vectorial, porque, *U* esta contenido en *V*, entonces cumple las mismas condiciones que *V*, pero con elementos reducidos.
- En la pregunta 11, 5 de los 6 estudiantes responden que $\mathbb{Z}_5$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^5$, basándose en argumentaciones que aluden a que las operaciones Suma y Ponderación no son las mismas para ambos conjuntos, depende del cuerpo de escalares que se considere ($\mathbb{Z}_5$ o $\mathbb{R}$) y que $\mathbb{Z}_5$ no es un subconjunto de $\mathbb{R}^5$. En cambio el otro estudiante afirma que sí, pues $\mathbb{Z}_5$ subespacio de $\mathbb{R}$, se puede escribir como: $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5 \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^5$.
- En la pregunta 12, tres de los 6 estudiantes manifiestan claramente que es imposible que exista dicho espacio, basándose en

argumentación algebraica y geométrica. En cambio los otros estudiantes afirman que existe dicho subespacio y entre sus respuestas encontramos:

- "El subespacio $\mathbb{Z}_5^2$ como un $\mathbb{Z}_5$ espacio vectorial, ya que: $\{(2,5),(5,5)\} \in \mathbb{Z}_5^2$".
- "Las rectas que están generadas por estos puntos que forman planos sobre este plano cartesiano".
- "$V = \{(x,5) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^2$"

Con respecto a nuestras expectativas respecto a las respuestas de los estudiantes, los problemas del cuestionario pueden agruparse en 4 categorías de acuerdo a la concepción. La siguiente tabla muestra el tipo de construcciones que se espera observar con cada pregunta:

	Conjunto	Función	Operación Binaria	Axiomas en General
Acción	Presente en las respuestas esperadas de la pregunta: 1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10,11 y 12	Presente en las respuestas esperadas de la pregunta: 1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10,11 y 12	Presente en las respuestas esperadas de la pregunta: 1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10,11 y 12	Presente en las respuestas esperadas de la pregunta: 1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10,11 y 12
Proceso	Presentes en las respuestas esperadas de la pregunta: 2,3,4,5,6,7,8,9,10 ,11 y 12	Presentes en las respuestas esperadas de la pregunta: 2,3,4,5,6,7,8,9,10 ,11 y 12	Presentes en las respuestas esperadas de la pregunta: 2,3,4,5,6,7,8,9,10 ,11 y 12	Presentes en las respuestas esperadas de la pregunta: 2,3,4,5,6,7,8,9,10 ,11 y 12
Objeto	Presentes en las respuestas esperadas de la pregunta: 2,3,4,5,6,7,8,9,10 ,11 y 12	Presentes en las respuestas esperadas de la pregunta: 2,3,4,5,6,7,8,9,10 ,11 y 12	Presentes en las respuestas esperadas de la pregunta: 2,3,4,5,6,7,8,9,10 ,11 y 12	Presentes en las respuestas esperadas de la pregunta: 2,3,4,5,6,7,8,9,10 ,11 y 12
Esquema	Presentes en las respuestas esperadas de la pregunta: 2,3,4,5,6,7,8,9,10 ,11 y 12	Presentes en las respuestas esperadas de la pregunta: 2,3,4,5,6,7,8,9,10 ,11 y 12	Presentes en las respuestas esperadas de la pregunta: 2,3,4,5,6,7,8,9,10 ,11 y 12	Presentes en las respuestas esperadas de la pregunta: 2,3,4,5,6,7,8,9,10 ,11 y 12

A continuación presentaremos el análisis de nuestros resultados considerando los tipos de construcciones realizadas por los estudiantes. Para cada una de ellas agregamos apartados de la trascripción del cuestionario inicial que fundamentan nuestras observaciones (los trabajos de los estudiantes pueden verse completo en los anexos).

4.1.1 Concepción Esquema de Conjunto

Los estudiantes que participaron en este cuestionario inicial dieron evidencias de poseer la *concepción esquema de conjunto* al considerar los conjuntos como un todo que se interconectaba con operaciones binarias y con producto por escalar, es decir, para ellos un conjunto no es una estructura aislada en sus mentes. Por ejemplo el estudiante 5 en la pregunta 4 (ES5P4), identifica plenamente dos elementos cualesquiera del conjunto V y uno cualquiera del conjunto $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$ al concluir a través de una combinación lineal que $V \leq \mathbb{Z}_3^3$.

(ES5P4)

$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

Sea $(x,x,x),(y,y,y) \in V$ y $\alpha \in \mathbb{Z}_3$

1) $(x,x,x) + \alpha(y,y,y) = (x+\alpha y, x+\alpha y, x+\alpha y) \in V$

2) Además $(0,0,0) \in V$, $\therefore V \neq \varnothing$

$\therefore V \leq \mathbb{Z}_3^3$

El estudiante 6, al trabajar en la pregunta 10, muestra que considera a los conjuntos involucrados como objetos relacionados por la inclusión, es decir, muestra que posee un esquema al elaborar un contraejemplo.

(ES5P4)

No porque si consideramos $V = M_{n\times n}(K)$ y $W = \{A \in M_{n\times n}(K) / \det(A) \neq 0\}$, es claro que $W \subseteq V$, pero $W \not\leq V$, ya que si tomamos:

$I \in W$, $-I \in W$, $\det(I) = 1$, $\det(-I) = -1$, pero $\det(I - I) = 0$, (I matriz identidad de orden n), vale decir $I - I \notin W$.

Si bien es cierto que con la pregunta 1b) se quiere indagar la concepción que posee un estudiante con respecto a la escritura por extensión del espacio vectorial, dando el subespacio en una escritura por comprensión, implícitamente también se está midiendo si el estudiante tiene una concepción acción del concepto de conjunto.

(ES1P1.b)

$\left(\pi,\pi^2,1\right),(2,1,1)\in W$.

Estos estudiantes muestran a través de las respuestas dadas al cuestionario inicial (ver anexo) poseer una concepción esquema de conjunto, lo cual es un prerrequisito para abordar los problemas planteados en el cuestionario.

Desde nuestra perspectiva, es claro que un estudiante que no posee las construcciones adecuadas de conjunto y función, no podrá evolucionar sus estructuras respecto al concepto operación binaria. Claramente, su concepción de función les permite determinar por ejemplo: $\otimes\big(2,(3,4)\big)$ como imagen de $\big(2,(3,4)\big)$ bajo la función $\begin{array}{l}\otimes:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ \big(\alpha,(x,y)\big)\to\alpha\otimes(x,y)=(\alpha x,\alpha y)\end{array}$. Esto se puede ver en la siguiente respuesta:

(ES5P2)

"Habría que ver si cumple con todas las condiciones para ser llamado espacio vectorial"

$2\otimes\big((3,4)+(5,7)\big)=2\otimes(8+14,-3-5)=2\otimes(22,-8)=(44,16)$ no es lo mismo que:

$\big[2\otimes(3,4)\big]+\big[2\otimes(5,7)\big]=(6,-8)+(10,-14)=(-16+-28,-6-10)=(-44,-16)$

$\therefore$ No es un espacio vectorial"

Estos estudiantes pueden empezar a abordar las preguntas que tienen que ver con las operaciones binarias ya que poseen las estructuras previas de función como esquema y conjunto lo que les permite pensar en elementos específicos de un conjunto y aplicar la definición de una operación binaria en particular a dichos pares de elementos. Un aspecto que sobresale en estos estudiantes es que dan muestra de una comprensión más allá de una concepción acción de operación binaria, la que se percibe a través de la integración con su concepción de conjunto y función. Esto se puede ver en la respuesta de:

(ES3P2)

"NO, no se cumple el axioma 10, si $\overline{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^2$, entonces $1 \bullet \overline{v} = \overline{v}$. Claramente $1 \otimes (x,y) \neq (x,y)$, a saber, $1 \otimes (x,y) = (x,-y)$" (sic)

4.1.2 Concepción Proceso de Operación Binaria

Los estudiantes que tienen una *concepción proceso* consideran la operación binaria aplicada a todo un conjunto de manera general, es decir, ellos pueden pensar en la manera con que se están dando los elementos, resultante de aplicar una operación binaria a cualesquiera elementos de un conjunto. Por ejemplo:

(ES1P2)

"Si (sic.) es un espacio vectorial.
Sea $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$:
$(x_1,y_1) + \alpha(x_2,y_2) = (x_1,y_1) + (\alpha x_2,-\alpha y_2) = (2y_1 - 2\alpha y_2,-x_1 - \alpha x_2) \in \mathbb{R}^2$
(Teorema)"

(ES2P2)

"No es espacio vectorial con las operaciones definidas ya que no existe un elemento neutro para la suma talque (sic.)
$(x,y) + (*,*^i) = (x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ "

Por otro lado, veamos el trabajo del siguiente estudiante.

(ES4P2)

"SI
porque cumple que es Grupo Abeliano y las propiedades de producto escalar.
O vista de otra forma es un espacio donde se alojan algunos elementos que cumplen con ciertas reglas y en este (sic.) se puede trabajar porque las mismas normas (reglas) lo permiten"

Este último estudiante maneja algunas expresiones que son correctas para espacios vectoriales, pero no suficientes en el contexto de esta pregunta porque no especifica qué conjunto está considerando como grupo abeliano, ni cuál es la operación binaria involucrada. Este tipo de respuestas puede presentarse en estudiantes que tienen dificultad con interrelacionar con los conceptos: conjunto, función y operación binaria. Por eso desde nuestro punto de vista el estudiante recurre a nociones de la matemática, sin tener en cuenta el entrelazamiento de los conceptos involucrados.

4.1.3 Concepción Objeto de Operación Binaria

Los estudiantes que tienen una *concepción objeto* consideran la operación binaria como una componente de la estructura del espacio vectorial. Consideremos las respuestas que presenta el estudiante 5:

(ES5P11)

"No pues en $\mathbb{Z}_5$ no están definidas las mismas operaciones que en $\mathbb{R}^5$, lo mismo que en el ejercicio 3". (sic)

(ES5P3)

"$\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$

$(4,4,4)+(1,2,2)=(5,6,6)\notin \mathbb{Z}_5^3$

No se cumple la clausura de la suma. Por lo tanto no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$".

* No me había dado cuenta, pero $\mathbb{Z}_5^3$ están definidas otras operaciones (con respecto a $\mathbb{R}^3$) por lo tanto no es muy apropiado hablar de subespacio"

En estos resultados podemos ver la importancia de hacer énfasis sobre las operaciones suma y producto por escalar involucradas en la definición de espacio vectorial, haciendo a su vez conexiones con los conceptos previos, por ejemplo: conjunto y función.

En la pregunta 9 el estudiante para dar una argumentación a la respuesta debe desencapsular el objeto operación binaria y mostrar el proceso que lo generó, mostrando que comprende el proceso como la clausura.

(ES5P9)

"No porque si tomamos $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, tomamos $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, donde $\frac{1}{2}$ es el vector y $\sqrt{2}$ el escalar, entonces: $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$".

4.1.4 Concepción Esquema de Averiguación de Axiomas en General

Los estudiantes que tienen una *concepción esquema* de averiguación de axiomas coordinan cada uno de los axiomas que satisface alguna estructura con el proceso mismo que dicta tal axioma, es decir, aquello que debe satisfacer un conjunto para ser llamado estructura tanto. Una vez que el estudiante tiene conocimiento de cada uno de los axiomas, éste los coordina como un solo proceso de verificación que debe satisfacer un conjunto con las características de la estructura en estudio. Por ejemplo:

(ES3P3)

"No

Primero veámoslo como cuerpo, $\mathbb{Z}_5$ no es un subcuerpo de $\mathbb{R}$ ya que $\mathbb{R}$ es de característica cero y $\mathbb{Z}_5$ es de característica 5.

Veámoslo ahora con espacios vectoriales. En la existencia del único elemento inverso, por ejemplo $(4,4,4)$ tiene como inverso a $(1,1,1)$ en $\mathbb{Z}_5^3$ y a $(-4,-4,-4)$ en $\mathbb{R}^3$, no pueden haber dos inversos, de todas maneras, este hecho se desprende de la característica de los cuerpos". (sic)

.

4.2 Datos obtenidos de la entrevista

Los datos que obtuvimos en la entrevista los analizaremos teniendo en cuenta las construcciones y el nivel de construcción de esquema que los estudiantes mostraban haber alcanzado sobre el concepto espacio vectorial. A continuación haremos una descripción de las construcciones y el nivel de construcción de esquema que identificamos, mostrando extractos de la trascripción de la entrevista.

Comenzaremos nuestro análisis con la concepción objeto de espacio vectorial, por dos motivos: primero porque la concepción esquema de un concepto matemático se comienza a formar en la mente de un estudiante a partir de la concepción objeto[16] y segundo, porque nuestra descomposición genética se refiere a la construcción del espacio vectorial, paso a paso, como un esquema.

4.2.1 Concepción Objeto de Espacio Vectorial

La *concepción objeto* de espacio vectorial, se evidenció a través de la manera que un estudiante concibe un espacio vectorial: como una estructura que satisface axiomas, a través de sus elementos (vectores, un segmento de línea dirigida) o una ene-ada de números reales, o también a través de sus subespacios (rectas, planos u otros), a la cual se pueden aplicar acciones. Durante el desarrollo de la entrevista del estudiante 5, es interesante la manera como éste aborda los problemas. Siempre inicia con una lectura del problema y antes de empezar a realizar algún tipo de procedimiento escrito sobre las condiciones dadas, reflexiona sobre la pertinencia de los datos, es decir siempre verifica si el problema bajo las condiciones dadas tiene solución. Esto nos permitió en la pregunta 5 observar si el estudiante posee una concepción objeto del concepto espacio vectorial. Consideremos el siguiente diálogo:

[167ES5] : Averigua si la siguiente afirmación es correcta o no en ambos casos justifica tu respuesta, sean V, W, Z espacios vectoriales sobre un cuerpo IK y supongamos que V, W es igual a d es igual a d+Z, ¿Qué suma es eso? La suma de espacio del conjunto de todos los vectores que son uno de acá más uno de allá.

[16] Este es un punto conflictivo dentro de la teoría APOE, ya que hay investigadores que consideran que no necesariamente es así, se puede tener un esquema del concepto cuando se establecen relaciones entre construcciones acción y proceso. Pero nosotras consideramos la postura que tiene Ed Dubinsky frente a este punto.

[168E] : Suma de espacios, porque son espacios ¿cierto?
[168ES5] : Claro, o son de conjuntos también se puede.

[169E] : Pero son espacios, suma de espacios.
[169ES5] : Entonces hay que demostrar que W es igual a cero, si es que es verdadero no, no, no, yo creo que no.

[170E] : ¿Por qué?
[170ES5] : Porque estoy pensando en lo más fácil, IR estoy pensando, pero perdón acá son todos los vectores que son de la forma V+W donde V pertenece a IK y W IK esa es la definición de suma de espacio ¿cierto?

Para poder considerar la aplicación de operaciones sobre espacios vectoriales, el estudiante necesita una concepción objeto de este concepto.

[171E] : Claro.
[171ES5] : Entonces, pensemos en V igual a IR ahí todo esto falso, pensé mas en V igual a IR entonces pensemos IR más un conjunto igual a IR más otro conjunto por ejemplo si yo ,aquí yo pongo el espacio nulo eso me da IR ¿cierto?

[172E] : Sí.
[172ES5] : De hecho si yo pongo cualquier cosa acá me va a dar IR.

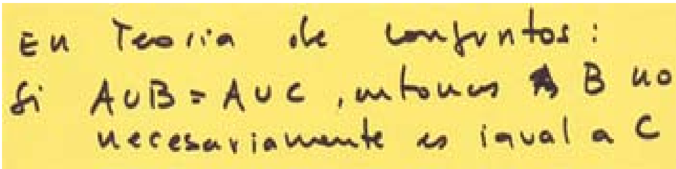
[173E] : ¿Cómo cualquier cosa?

Sin embargo para poder construir un contraejemplo, se requiere la desencapsulación y pensar en el proceso que dio origen al objeto.

[173ES5] : Cualquier subespacio de IR, si yo pongo cualquier, por ejemplo…pongo el generado por el (1,1) el por ejemplo no el generado por el 1 esta en IR, IR más IR eso me da IR e ir no es igual a y ese y ese son distintos, por lo tanto, es falso.

Hacemos hincapié en la importancia de desencapsular el objeto y pensar en el proceso que dio origen al objeto, para así construir un contraejemplo. Este es el caso del estudiante 6, en la pregunta 5:

[122ES6] **:** Ya se me vino a la cabeza una... algo de teoría de conjuntos, por ejemplo, si yo tengo que A unión B es igual a A unión C no necesariamente *B* = *C,* hay contra ejemplos para eso. Pero estaba tratando de pensar en un contra ejemplo para eso y yo creo que es análogo, creo que es análogo.

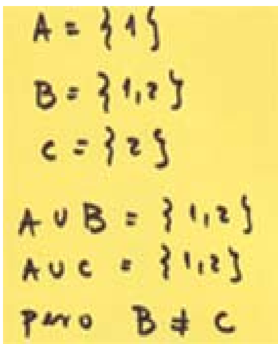


[125E] **:** Entonces ponga ahí lo que esta pensando usted .Estoy pensando que esta es la relación que hace.

[123ES6] **:** En teoría de conjuntos, tengo que si A unión B es igual a A unión C entonces D no necesariamente es igual a C. Escribo un contra ejemplo.

[126E] **:** Si usted quiere .No es necesario por que usted ya lo ve, pero si quiere lo escribe, si a usted lo va a ayudar a responder, escribir eso, bienvenido, pero ver esto es muy bueno.

[124ES6] **:** Por ejemplo, si tomo A como, claro, uno: a B uno coma dos; y a C como dos no más, entonces A unión B, esto es uno coma dos; y A unión C también es uno coma dos…



[127E] **:** Pero…

[125ES6] **:** Pero B es distinto de C.

[128E] **:** Perfecto.

Este estudiante al desencapsular el objeto espacio vectorial, mira el proceso que dio origen a él, y resulta jugar un papel importante el esquema de conjuntos.

[132E] **:** Porque un espacio vectorial, si bien tiene estructura de espacio, ante todo ¿qué es lo que es?

[130ES6] **:** Un conjunto.

Y es aquí en este esquema de conjuntos en el cual procesa y construye tres conjuntos a partir de los cuales fabrica espacios vectoriales como el generado de esos conjuntos, los que le permitirán elaborar el contraejemplo para la pregunta 5 de la entrevista.

[133ES6] **:** Puede, a ver, déjeme un poquito. Es que a lo mejor podría tomar, generadores.

[136E] **:** Sí.

[134ES6] **:** Puede ser, espéreme un poco.

[137E] **:** Te pueden servir, por supuesto, porque los generadores ¿Qué son?

[135ES6] **:** Son espacios vectoriales.

[138E] **:** Pero no son así, ¿no es cierto?, son ¿de qué categoría? ¿Cómo es un espacio generado?, mi pregunta es ¿es finitos o infinitos?

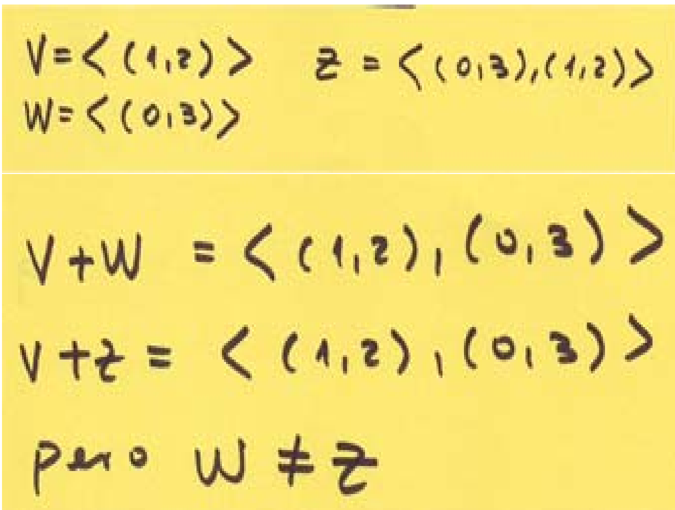
[136ES6] **:** Infinito.

[139E] **:** Infinito, así que estaría concordando con las ideas que usted tiene.

[137ES6] **:** Claro, porque por ejemplo si yo tengo, no me acuerdo como era la… o sea como, a ver… ah, si yo tengo que V por ejemplo, es el generado por *a* y W es el generado por *b*, entonces V + W es el generado por *a* unión *b*, entonces ahí tengo algo como parecido. Ya ahora voy a tomar V como el uno coma dos y dos coma uno… no yo creo que ese no.

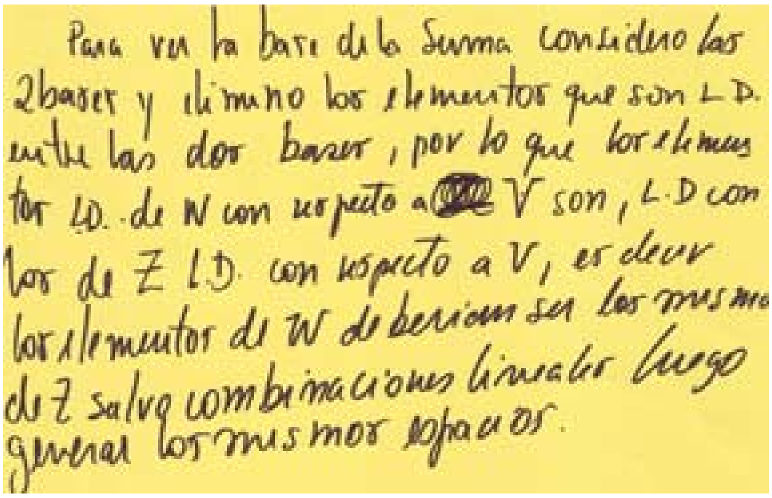
[140E] **:** Le pone "no" entonces.

[138ES6] **:** Voy a tomar V como el uno coma dos no más, voy a tomar W como cero coma tres y Z cero coma tres y uno coma dos, entonces en este caso V + W, esto es uno coma dos y cero coma tres y V + Z también es lo mismo.


$V=\langle(1,2)\rangle \quad Z=\langle(0,3),(1,2)\rangle$
$W=\langle(0,3)\rangle$

$V+W=\langle(1,2),(0,3)\rangle$
$V+Z=\langle(1,2),(0,3)\rangle$
pero $W\neq Z$

Contrario a esto podemos ver cómo, la estudiante 10 está en una construcción de proceso en cuanto al concepto de espacio vectorial, ya que en esta misma pregunta 5, intenta justificar sus elecciones de los subespacios U, V y W a través de sus bases de la siguiente manera:


Para ver la base de la Suma considero las 2bases y elimino los elementos que son L.D. entre las dos bases, por lo que los elementos L.D. de W con respecto a V son, L.D con los de Z L.D. con respecto a V, es decir los elementos de W deberían ser los mismos de Z salvo combinaciones lineales luego general los mismos espacios.

Eliminando los vectores que son linealmente dependiente, que según la estudiante son los vectores de la base para V, que aparecen a ambos lados de la igualdad: $V+W=V+Z$, la estudiante argumenta que realmente $W=Z$.

La concepción objeto de espacio vectorial se evidenció en siete de los estudiantes entrevistados, aunque de alguna manera en diferentes grados de complejidad; con esto hacemos referencia al tipo de argumentos presentados por cada estudiante. Ellos en general dieron evidencias de haber encapsulado el proceso de conservación de operatoria con conjuntos, con vectores, con espacios vectoriales y esto les permite desencapsular el objeto y relacionarlo con otros en la medida en que las situaciones lo requerían. Este hecho señala la importancia de relacionar la preservación de operaciones como un único proceso que permita su encapsulación en un objeto. Es importante mencionar que hablar en términos de combinaciones lineales de vectores cualesquiera y determinar ejemplos de ellos no es una condición suficiente para garantizar que un estudiante posee una concepción objeto de este concepto. Esto se evidenció en el grupo de estudiantes entrevistados. Por ejemplo el mismo estudiante 6, que describimos más arriba, considera que una estructura $(\mathbb{K}, V, +, \odot)$ es un espacio vectorial, cuando la combinación lineal $\alpha v + w \in V$, donde $\alpha \in \mathbb{K}$ y $v, w \in V$, argumento que utilizó para responder la pregunta 1 de la entrevista.

(x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (\alpha x_1, -\alpha x_2) + (y_1, y_2)$$

$$(2(-\alpha x_2) + 2y_2, -\alpha x_1 - y_1) \in \mathbb{R}^2$$

$\therefore$ con las operaciones definidas anteriormente
$(\mathbb{R}, +, \odot)$ es un E.V. sobre $\mathbb{R}$.

Este estudiante muestra su capacidad para pensar en los espacios vectoriales y caracterizarlos a través de combinaciones lineales a partir de las condiciones dadas sobre la operación $+$ y $\odot$. Esto es una evidencia que el estudiante muestra una concepción del concepto espacio vectorial centrado sólo sobre la preservación de la suma y producto por escalar para vectores de un espacio vectorial determinado. No existe una coordinación de los procesos de las dos operaciones ni tampoco entre los axiomas que determinan un espacio vectorial.

Como se ha provisto en nuestra descomposición genética, es importante observar si el estudiante tiene las construcciones necesarias respecto al cuerpo y el papel que juega en la definición del espacio vectorial. Al respecto podemos señalar que en la pregunta 2 de nuestra entrevista, sólo uno de los diez estudiantes entrevistados reflexionó sobre el conjunto donde se definen los escalares. Fue el estudiante 5, que al respecto señaló:

[127ES5] : O sea por lo que yo conozco en este conjunto de las funciones esta la multiplicación es la composición, o sea por lo general, no se si habrá otra creo que hay otras cosas como algo de convolución creo que me han dicho unos profesores, nunca he visto eso pero bueno… me guío según lo básico, la suma de funciones que siempre esta definida y la multiplicación no es que sería la composición de hecho hay otras cosas por ejemplo: está la, una función se multiplicar con un escalar real.

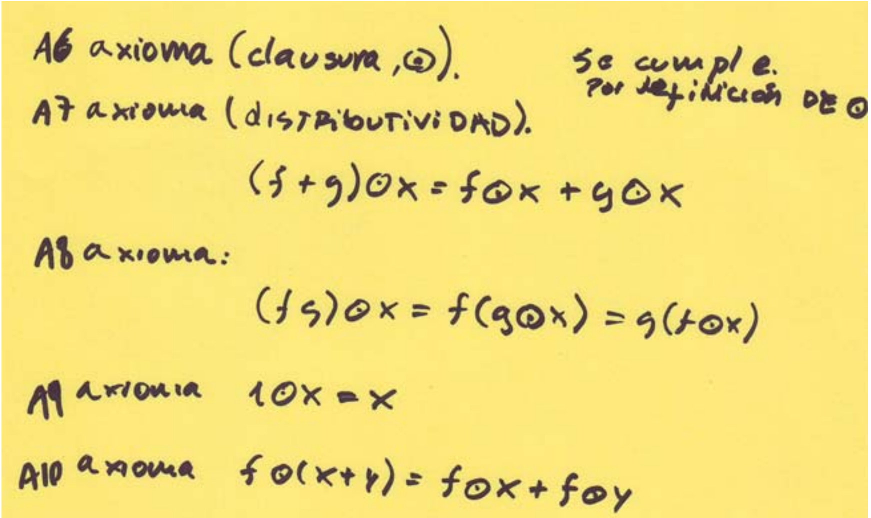
[128E] : También ¿no es cierto?
[128ES5] : Sí.

[129E] : Multiplicación por escalar.
[129ES5] : Claro, pero ahí entonces debería ser esto debería ser un cuerpo de F(R, R) con la operación suma de funciones y la composición de funciones ese es el cuerpo.

[130E] : Claro.
[130ES5] : Ese es el cuerpo.

[131E] : ¿Tú lo consideraste así?
[131ES5] : Claro.

Con respecto a esta misma pregunta 2 de la entrevista, el resto de los estudiantes se limitó a enlistar los axiomas, sin reflexionar a caso $F\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ es un cuerpo, como fue el caso del estudiante 3:



A6 axioma (clausura, $\odot$). se cumple. Por definición de $\odot$

A7 axioma (DISTRIBUTIVIDAD).

$$(f+g)\odot x = f\odot x + g\odot x$$

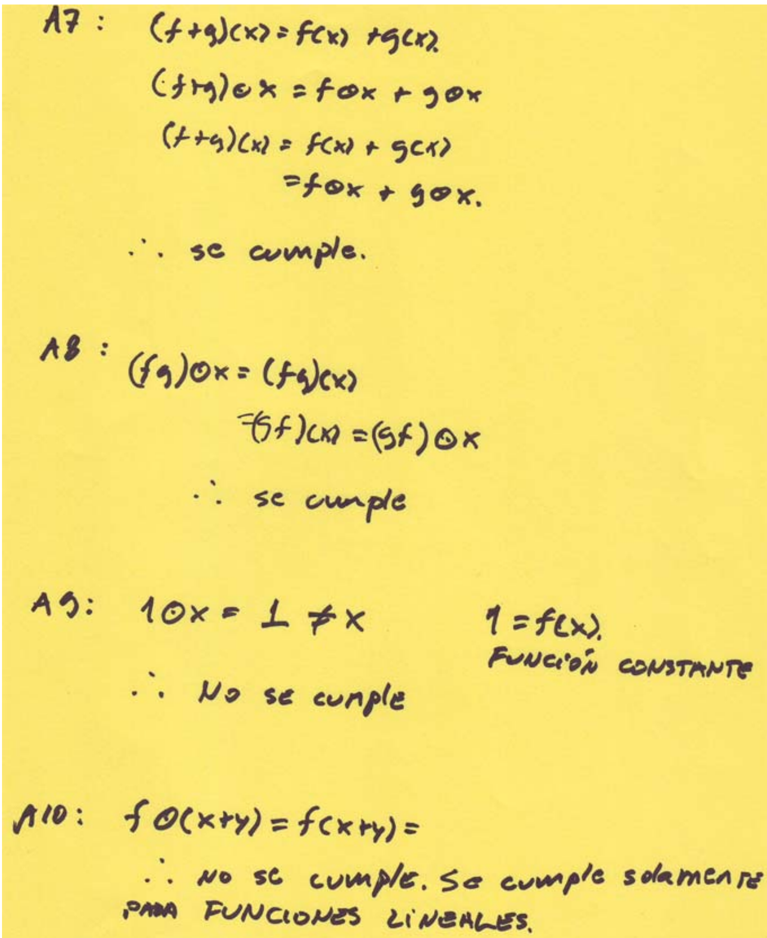
A8 axioma:

$$(fg)\odot x = f(g\odot x) = g(f\odot x)$$

A9 axioma $1\odot x = x$

A10 axioma $f\odot(x+y) = f\odot x + f\odot y$

Y posteriormente procedió a averiguar si dichos axiomas se cumplían o no.



A7 : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f+g)\odot x = f\odot x + g\odot x$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$= f\odot x + g\odot x.$

$\therefore$ se cumple.

A8 : $(fg)\odot x = (fg)(x)$

$= (gf)(x) = (gf)\odot x$

$\therefore$ se cumple

A9: $1\odot x = 1 \neq x$ $\quad 1 = f(x)$. FUNCIÓN CONSTANTE

$\therefore$ No se cumple

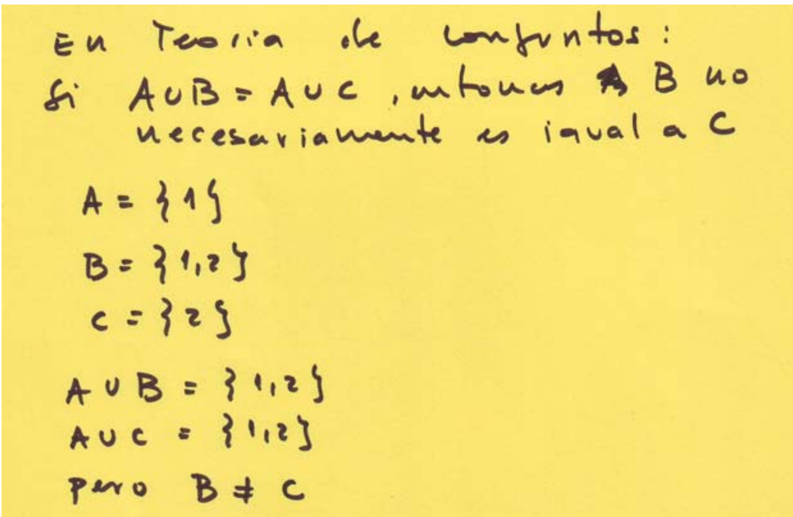
A10: $f\odot(x+y) = f(x+y) =$

$\therefore$ no se cumple. Se cumple solamente para FUNCIONES LINEALES.

De esta manera los estudiantes están dando evidencias que pueden coordinar ambas operaciones: suma de vectores y multiplicación por escalar, a través de las operaciones distributivas de escalares sobre vectores y de vectores sobre escalares, pero sin reflexionar sobre los procesos operatorios permitidos y no permitidos por la estructura algebraica del conjunto de los escalares.

4.2.2 Nivel de Esquema Intra Espacio Vectorial

Algunos de los estudiantes entrevistados dieron evidencias, a la luz de nuestra descomposición genética, de haber logrado construcciones acciones, procesos, objetos y esquemas pero, de manera aislada, no logrando darse cuenta de las relaciones que puedan existir entre esas construcciones. Por ejemplo el estudiante 6 (ES6), nos mostró a través de su argumentación en la respuesta 5 de la entrevista, que posee una Construcción Objeto del concepto espacio vectorial, cuando escribe aludiendo a la teoría de conjuntos que:

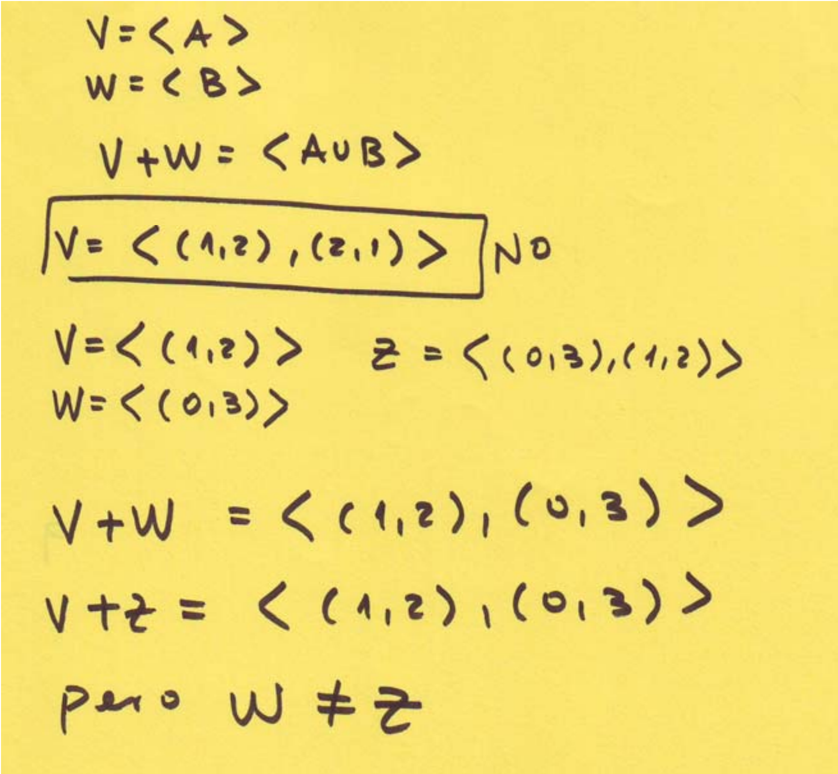


En Teoría de conjuntos:
Si $A \cup B = A \cup C$, entonces ~~A~~ B no necesariamente es igual a C

$A = \{1\}$
$B = \{1,2\}$
$C = \{2\}$

$A \cup B = \{1,2\}$
$A \cup C = \{1,2\}$
pero $B \neq C$

Y, es a través de esta noción de conjuntos, en la que ES6 se basa para elaborar el siguiente contraejemplo:



$V = \langle A \rangle$
$W = \langle B \rangle$
$V + W = \langle A \cup B \rangle$

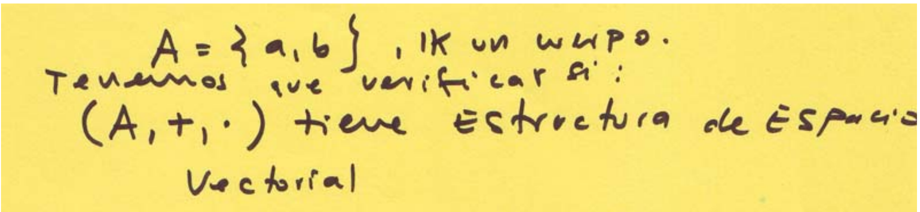
$\boxed{V = \langle (1,2), (2,1) \rangle}$ NO

$V = \langle (1,2) \rangle$ $\quad Z = \langle (0,3), (1,2) \rangle$
$W = \langle (0,3) \rangle$

$V + W = \langle (1,2), (0,3) \rangle$
$V + Z = \langle (1,2), (0,3) \rangle$
pero $W \neq Z$

Sin embargo, ES6 no logra relacionar esta construcción objeto del concepto espacio vectorial, con sus construcciones de los conceptos: conjunto finito, cuerpo finito, operaciones suma y ponderación por escalar definida en conjuntos finitos; analicemos para ello la argumentación que realizó en la pregunta 3 de la entrevista.

ES6P3 tiene perfectamente claro en su mente el objetivo de la pregunta, desea obtener:



$A = \{a, b\}$, $\mathbb{K}$ un cuerpo.
Tenemos que verificar si:
$(A, +, \cdot)$ tiene estructura de Espacio Vectorial

Inmediatamente después, ES6 presenta dos casos particulares: $A = \{a, b\}$ con $a, b \neq \vec{0}$ y $A = \{a, b\}$ con $a = \vec{0},\ b \neq \vec{0}$; veamos su entrevista:

[51ES6] **:** Entonces por ejemplo puedo tomar el conjunto *a,b* , más general, entonces tengo que verificar si *A* con la suma y con el producto por escalar, suponiendo con la suma, habría que decir que tipo de elementos son los que, los elementos de *A.*

[53E] **:** Depende… (problemas de audio)… depende de lo que usted este pensando para argumentar.

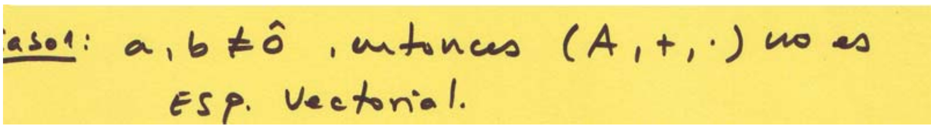
[52ES6] **:** A puede ser cualquier conjunto.

[54E] **:** Como lo tenemos ahí.

[53ES6] **:** Y, no sé, pueden ser: funciones, polinomios, no se cualquier cosa.

[55E] **:** Lo que venga.

[54ES6] **:** Y tengo que verificar que el *A* con la suma usual donde yo esté trabajando y con el producto por escalar tiene estructura de espacio… entonces voy a poner: tenemos que verificar si se cumple eso. Primero, por ejemplo si *a,b* son distintos del elemento nulo entonces ya no es un espacio… y por otra parte si…


aso1: $a, b \neq \hat{0}$, entonces $(A, +, \cdot)$ no es Esp. Vectorial.

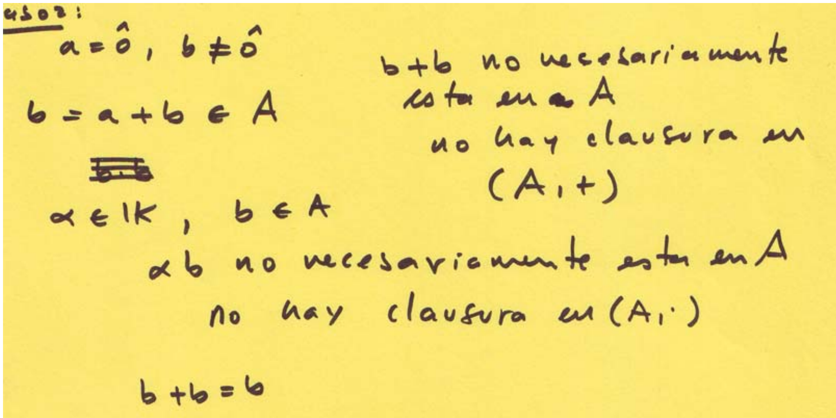
[56E] **:** ¿Qué otro caso habría que considerar ahí? Si los dos son distintos del nulo estas poniendo ahí.

[55ES6] **:** Si *a* y *b* son distintos del elemento nulo, el elemento neutro, entonces *A* con la suma y la multiplicación no es espacio vectorial. Ahora si uno de ellos es cero y otro distinto, o sea no cero del neutro.

[57E] **:** Ya del neutro.

[56ES6] **:** Para dar mas generalidad, esto sería como el caso uno, sería como el caso dos… entonces, por ejemplo: *a* + *b* siempre va a estar en *A*, ¿cierto?

[58E] **:** Ya … (problemas de audio)



[57ES6] **:** Pero si tomo un… a ver puedo hacer la operaciones *b* con *b*, un especie de producto entre elementos de acá, no eso no lo puedo hacer. Voy a poner IK un cuerpo, ahí si, entonces esa suma siempre va a estar en *A* porque este elemento neutro y este va a ser un elemento distinto de cero entonces si lo sumo siempre me va a dar *b*, eso va a ser *b*; ahora si yo considero un escalar en el cuerpo y tomo *b* en *A*, entonces alfa por *b* no necesariamente esta en *A.*

[59E] **:** Volviendo a la cuenta de arriba, donde dice que *b* + *a* es *b*, pero ¿Quién podría sumar también? ¿Qué elementos tiene *A*?, tiene el *b* y tiene el cero.

[58ES6] **:** ¿Cómo?

[60E] **:** ¿Qué elementos tiene *A* aquí?, ese *A* ¿Qué elementos tiene?

[59ES6] **:** Cero y *b*

[61E] **:** Entonces yo podría sumar *a* + *b*, ¿Puedo sumar otro?

[60ES6] **:** *b* + *a*

[62E] **:** Y… ¿Qué mas?

[61ES6] **:** Y *b* + *b*

[63E] **:** ¿Quién es *b* + *b*?

[62ES6] **:** ¿Quién es *b* + *b*?

[64E] **:** Me va a decir 2*b*, pero eso también tiene que considerarlo… (problemas de audio)… o no necesariamente lo tiene que considerar.

[63ES6] **:** Sí, si lo puedo considerar.

[65E] **:** No, que usted vea, no que yo, usted, ¿Ve que es necesario considerar eso? ¿O no?

[64ES6] **:** Yo creo que sí, por que *b* + *b* se puede que se salga del conjunto.

[66E] **:** Pero esto está como argumento también, ¿Qué dice aquí?

[65ES6] **:** Que alfa por *b* no necesariamente está en *A.*

[67E] **:** Entonces qué quiere decir con eso.

[66ES6] **:** Que no hay clausura.

[68E] **:** No hay clausura ¿Dónde?

[67ES6] **:** En… ahí…

[69E] **:** Volvamos aquí entonces.

[68ES6] **:** Entonces, por ejemplo *b* + *b*, no necesariamente está en *A.*

[70E] **:** ¿Qué significa eso?

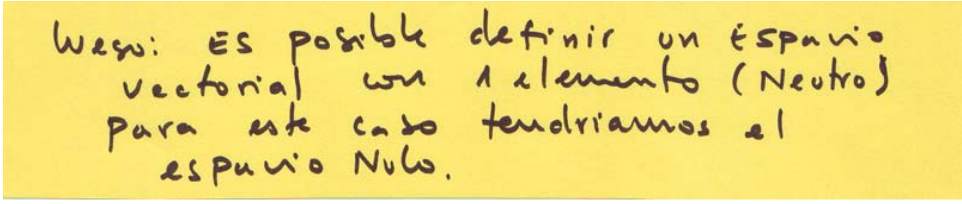
[69ES6] **:** Que tampoco hay clausura.

[71E] **:** ¿Dónde? Tiene que decir dónde.

[70ES6] **:** En *A* con la suma, por que si hubiera clausura tendría que cumplirse que *b*+*b* seria igual a *b*, y eso pasa cuando *b* es el elemento neutro.

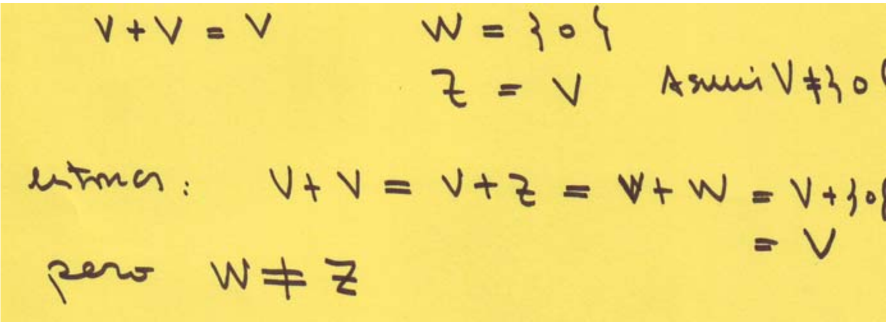
En estos argumentos que ha utilizado ES6, podemos apreciar que él no tiene presente o no relaciona la estructura de espacio vectorial cuando trabaja con un conjunto finito de dos elementos, por eso no puede aceptar que b+b pueda ser elemento neutro, si b no es neutro.

Finalmente ES6 termina concluyendo, en esta parte de la entrevista que no es posible determinar el espacio vectorial pedido, sin embargo, escribe que:



Luego: Es posible definir un espacio vectorial con 1 elemento (Neutro) para este caso tendríamos el espacio Nulo.

Otro estudiante ES9, también a través de su argumentación en la respuesta 5 de la entrevista, nos mostró que posee una Construcción Objeto del concepto espacio vectorial, al escribir:



$V + V = V \qquad W = \{0\}$

$Z = V \qquad$ Asumimos $V \neq \{0\}$

entonces: $V + V = V + Z = V + W = V + \{0\} = V$

pero $W \neq Z$

Sin embargo, ES9 no logra relacionar esta estructura construcción objeto del concepto espacio vectorial, con sus construcciones de los conceptos: operación binaria definida en un conjunto finito, conjunto finito, cuerpo finito, operaciones suma y ponderación por escalar definida en conjuntos finitos; analicemos para ello la argumentación que realizó en la pregunta 3 de la entrevista.

[58ES9] : Voy a decir las tres cosas que siguen y le voy a explicar por que le digo así, un espacio de vectores, un cuerpo de escalares, bueno entre comillas es cuerpo porque podría ser…

[59E] : Entre paréntesis como podríamos mirarlo también como dijo usted.

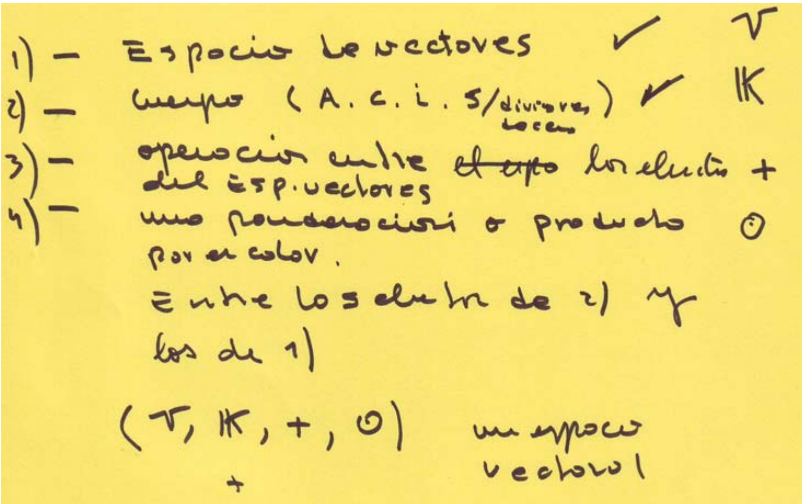
[59ES9] : Anillos conmutativos con identidad y sin divisores de 0, por ejemplo, el cuerpo o los conjuntos anteriores que habíamos definido tiene divisores de 0, entonces podría ser algo más general que esto, en realidad debe ser un espacio de un conjunto de elementos que cumplan los axiomas con las dos operaciones que debe tener un espacio vectorial, entonces, una operación entre el espacio de vectores, o sea los elementos y una ponderación.

[60E] **:** Esa ponderación se refiere a la operación ¿Entre quién?

[60ES9] **:** Una ponderación o producto por escalar esto es entre los elementos de este conjunto, entre los elementos, vamos a llamarle D2 y los de uno, ahora ahí he quedado con algo pendiente el porque le llame espacio de…

[61E] **:** Me llama la atención, espacio vectorial y espacio de vectores, no es nada especial que valga la pena decir, sino seguimos.

[61ES9] **:** Espacio de vectores, lo que pasa es que aquí tienen que haber dos operaciones. una entre este espacio de escalares y el conjunto de vectores, que es lo que conocemos como ponderación.



[62E] **:** Para diferenciar.

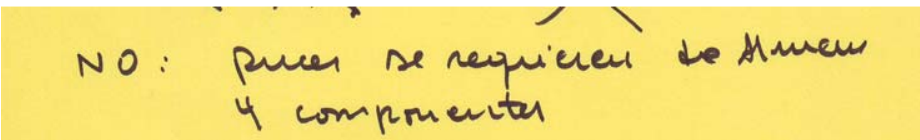
[62ES9] **:** Claro y la otra es la operación entre los elementos del espacio de vectores, sería la operación entre estos elementos y una operación entre estos elementos y estos, que es la ponderación, entonces si uno considera los elementos, bueno este es un espacio de vectores no, a ver… el espacio vectorial pero este no es un espacio de vectores, el espacio vectorial yo lo considero como, por ejemplo el espacio de vectores yo lo llamo V, al cuerpo de escalares o conjunto de escalares lo llamo K y la operación, nuestras operaciones puedo llamarles: suma y éste un producto escalar, al par (V, K) con esta operación suma entre los vectores y la ponderación entre los elementos de este conjunto y los vectores cumpliendo los axiomas correspondientes le llamamos un espacio vectorial, entonces yo respondo que no es posible que tenga solo dos elementos porque a ver, el peor de los casos es que, no, bueno si, lo voy a poner, deben haber cuatro para que esto sea un espacio vectorial, por supuesto más los axiomas, ahora puede ocurrir que el espacio de vectores coincida con el cuerpo escalar y la suma de esto coincida con la ponderación, entonces voy a tener a fin de cuentas un par, por ejemplo. a ver, por ejemplo: IR, si ponemos IR como el espacio de vectores, también IR como el espacio de escalares, la respuesta definitiva es no, no me voy a hacer mas problemas.

ES9 al considerar el conjunto de los números reales, como el conjunto de los vectores, nos muestra que él no relaciona el conjunto de vectores, con el esquema de conjuntos finitos, ni tampoco el conjunto de los escalares con este último, ya que los números reales no es un conjunto que posea cardinalidad 2.

En este punto la entrevistadora trata de que es estudiante le dé una respuesta a la pregunta en cuestión:

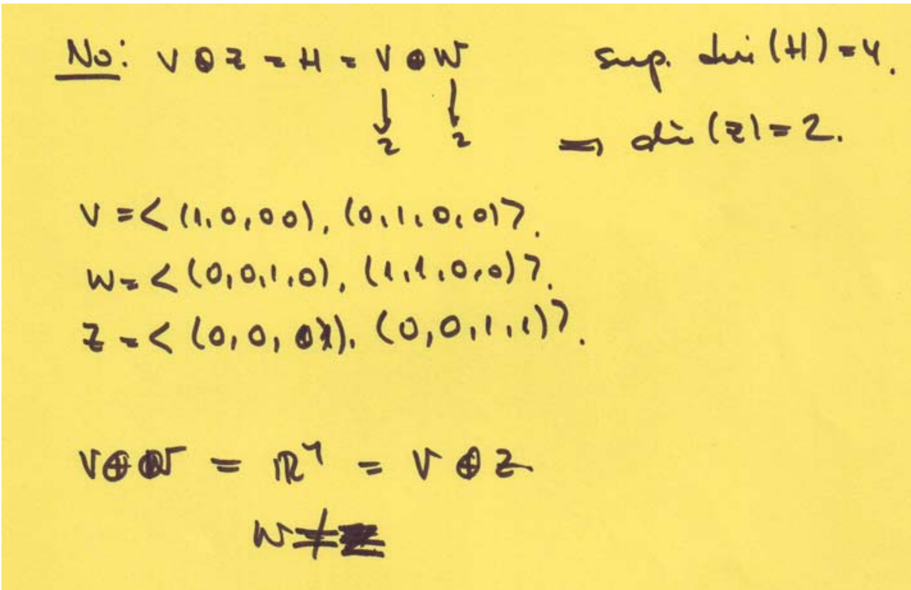
[63E] **:** Claro, entonces usted me tiene que dar algo, un argumento, que me diga ¿Cómo sostiene, como avala que es no?, entonces yo le pregunto trate de decirme ¿Por qué no? Vamos, a partir de que no, según lo que me dice.

[63ES9] **:** Bueno, yo creo que no, ya que un espacio vectorial debe tener estas cuatro componentes más los axiomas, entonces por lo menos requerimos de cuatro elementos, entonces no, pues se requieren de al menos cuatro componentes, eso, ahora.



Como resultado ES9 no logra conectar de manera adecuada diferentes elementos de un espacio vectorial, por lo que decimos que no hay relación entre sus construcciones realizadas de los conceptos: objeto del concepto espacio vectorial y esquema de operación binaria definida en conjuntos finitos, ya que este estudiante al considerar el conjunto de vectores igual al cuerpo e igual al conjunto de los números reales, necesita para sumar dos vectores (digamos los vectores v_1, v_2) y para multiplicar por escalar requiere, un escalar y un vector (digamos el vector v_3 y el escalar α); por lo tanto necesita 4 elementos en el conjunto como mínimo (v_1, v_2, v_3, α); bajo esta argumentación podemos inferir que él no ha considerado que la operación suma y multiplicación por escalar se puede llevar a cabo entre elementos iguales ($v_1 = v_2 = v_3 = \alpha$), cuando el conjunto de vectores es igual al cuerpo, es decir hace falta una conexión entre el objeto espacio vectorial, conjunto y operación binaria.

Otro estudiante ES7 también tiene una construcción objeto del concepto espacio vectorial, evidencia recogida de la respuesta que realizó para la pregunta 5:



No: $V \oplus Z = H = V \oplus W$ sup. $\dim(H) = 4$.

$\underset{2}{\downarrow}$ $\underset{2}{\downarrow}$ $\Rightarrow \dim(Z) = 2$.

$V = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$.

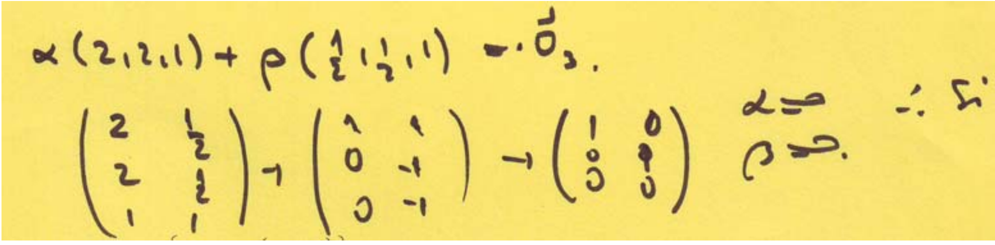
$W = \langle (0,0,1,0), (1,1,0,0) \rangle$.

$Z = \langle (0,0,0,1), (0,0,1,1) \rangle$.

$V \oplus W = \mathbb{R}^4 = V \oplus Z$

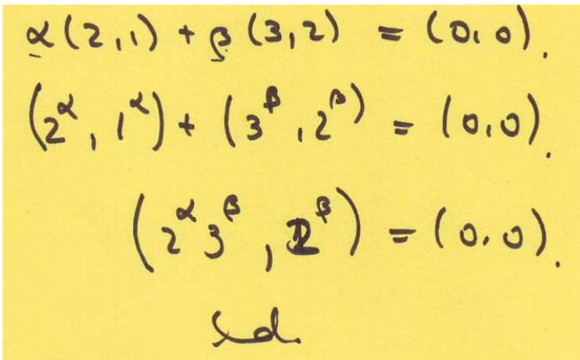
$W \neq Z$

ES7 trabaja los problemas como si las operaciones suma y multiplicación por escalar fueran las usuales y/o el vector nulo fuera la n-upla (0,0,…,0), analicemos para ello la argumentación que realizó en la pregunta 8, inciso 4 de la entrevista.



La argumentación de ES7P8.4, nos da evidencias que el espacio vectorial no se ha desarrollado en su mente más que a un nivel Intra, entonces es difícil para ES7 hacer las conexiones necesarias, entre el objeto del concepto espacio vectorial, las operaciones binarias no usuales y los elementos de la estructura algebraica propiamente tal definida en un espacio vectorial (elemento neutro) y el concepto de dependencia lineal.

También ES7, en la pregunta 11 consideró el cero vector como (0,0)



Y tal vez como producto de esta misma entrevista, consideró las operaciones que tenía el problema y no las operaciones suma y producto que usualmente se definen en $\mathbb{R}^2$.

Otro aspecto importante que encontramos en este nivel, fue que estudiantes que tienen una concepción objeto del concepto espacio vectorial, para chequear que una estructura no es espacio vectorial recurren a los axiomas que lo definen en lugar de usar estrategias más económicas. Es el caso del ES2; él da evidencias al responder la pregunta 5, que posee una construcción objeto del concepto espacio vectorial, veamos su escrito:

SEA $V, W, Z \in \mathbb{R}^2$ tq

$V = \langle(1,0)\rangle$ $\quad V \oplus W = \mathbb{R}^2$

$W = \langle(0,1)\rangle$

$Z = \langle(1,1)\rangle$ $\quad V + Z = \mathbb{R}^2$

$\wedge \quad Z \neq W$

Sin embargo en la pregunta 1 de la entrevista, enlista los axiomas que debería tener la estructura

$(\mathbb{R}^2, +)$ TIENE QUE SER GRUPO ABELIANO

- DISTRIBUTIVIDAD CON RESPECTO A LOS ESCALARES
- DISTRIBUTIVIDAD CON RESPECTO A LOS VECTORES DE $\mathbb{R}^2$
- TIENE QUE EXISTIR ELEMENTO NEUTRO EN EL CUERPO
-

Y como prueba que el axioma $1 \bullet v = v$ no se cumple para cualquier vector v del espacio:

SEA $1 \in \mathbb{R}$ EL ELEMENTO NEUTRO PARA LA PONDERACIÓN

$1 \odot (x,y) = (x,-y)$

CLARAMENTE $(x,y) \neq (x,-y)$

Responde que:

$\therefore$ $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ NO ES EST. VECTORIAL

También es importante resaltar que en este nivel Intra, estudiantes que poseen una construcción objeto de espacio vectorial, no son capaces de coordinar a través de las leyes distributivas las operaciones suma y ponderación por escalar, cuando las operaciones son diferentes de las usuales. Es el caso del ES5 al enfrentar la pregunta 7. ES5P7 primero trata de usar la multiplicación usual como la operación que necesita definir. Por lo tanto se da cuenta que (x+y)z (que es igual a xyz) no da el mismo resultado como xz+yz (xzyz) de la manera las dos operaciones están definidas. En este punto él comienza a pensar que a lo mejor no es posible definir tal operación, a pesar de que el continúa considerando otras operaciones. Después él trata de tomar αx como α+x pero lo descarta rápidamente, como 1x no da x. Después de pasar algo más de tiempo en esta pregunta, él tiene la siguiente reflexión sobre la relación entre la suma y multiplicación:

[194ES5] **:** Estoy tratando de pensar, o sea, análogamente, si yo tenía dos operaciones, ¿cierto?, la suma normal y la multiplicación por escalar entonces yo había pensado que cuando uno suma dos números reales es la suma normal y cuando uno multiplica, a no, cuando uno multiplica es otra cosa, no es sumar varias veces, que en un momento dije ahí multiplicar es como sumar varias veces, o sea a uno le enseñan eso cuando chico, que 2X2 es 2+2 una cosa así.

Entonces yo había dicho entonces si la multiplicación acá, entonces ¿Qué es multiplicar hartas veces?, elevar a potencia, pero no se puede porque los números negativos no los voy a poder elevar a números racionales. Por ejemplo, no puedo poner el -2 no lo voy a poder juntar con el ½ por ejemplo.

El entrevistador trata de convencer al S5 que la multiplicación no es una adición repetida, y viéndolo S5 acepta, pero no se ve muy convencido, y da su opinión acerca de la pregunta:

[202ES5] : Sí es que nunca había visto un ejercicio de ese tipo o sea como que no es un ejercicio es como relacionar conceptos y cosas así, porque es como, o sea, tiene que ver más o sea con las estructuras mismas de los espacios vectoriales así como hablar de, del cuerpo, de la base de los espacios vectoriales.

[202E] : A eso apuntan las preguntas.

[203ES5] : Por ejemplo, yo no conozco ningún teorema que hable de esto no conozco ningún teorema que diga no sé un espacio vectorial con tal cuerpo que relación tiene con el mismo espacio vectorial del mismo cuerpo de escalares pero con otro cuerpo de escalares, no conozco yo un teorema de ese tipo, no sé si…, yo creo que si hay pero no sé…

[203E]	: Pero como tú con lo que sabes podrías elaborar un argumento que te sirva para dar respuesta a eso.
[204ES5]	: Sí, pero como siempre hay dos cosas, que no existan pero que ahí tendría que dar así un argumento como un teorema o algo así, así como que llegue a una contradicción pero no tengo ninguno, tengo pocas herramientas y lo otro es encontrarlo pero igual encontrarlo me parece que es un poco complicado.

Este estudiante termina diciendo que no es posible definir tal operación. ES5 muestra algunos elementos relacionados entre dos operaciones, aunque la coordinación total no está ahí aún. Sus esfuerzos se mantienen al nivel de pruebas y errores, sin mucho éxito.

Como podemos apreciar, el nivel Intra se caracteriza por la falta de conexiones entre los diferentes conceptos que se relacionan con espacios vectoriales, aunque teniendo la concepción objeto, los estudiantes pueden realizar acciones sobre un espacio vectorial y recurrir a axiomas para determinar si alguna estructura dada cumple con los requisitos de ser espacio vectorial.

4.2.3 Nivel de Esquema Inter Espacio Vectorial

En el nivel Inter el objeto de espacio vectorial comienza a tener relaciones con otros conceptos tales como subespacios, combinaciones lineales, conjuntos linealmente independientes/dependientes, bases, etc. También observamos que en este nivel los estudiantes pueden poner en juego la coordinación entre dos operaciones binarias no usuales.

Empecemos observando cómo un estudiante comienza a establecer relaciones a través de la coordinación de dos procesos relacionados a las dos operaciones de un espacio vectorial, a través de los axiomas de distributividad.

En el siguiente extracto vemos que el ES8P7 reflexiona sobre la relación que existe entre las dos operaciones.

[106ES8] : Sí, haber…. Tomo la suma, es el producto, la suma, si, necesito una operación multiplicación por un escalar, que cumpla las siguientes condiciones, haber, necesito lo mínimo que necesito pedirle a la operación, necesito una operación multiplicación por escalar que cumpla lo siguiente, necesito que, para que tenga sentido… si yo tengo alfa y beta en K, si, porque los escalares son de K ; entonces se tiene que cumplir, alfa x+y=alfa x+ alfa y; con x,y en R sin el cero, porque eso es lo que me están pidiendo y después alfa +beta, x sea alfa x +beta x ,si ,y el alfa y beta están en K . Haber para que se cumpla esa condición, la primera, como se definía ese alfa x+y …es alfa por, y “x+y” esta definido como “x por y” , y eso necesito – lo voy a anotar como pregunta ahí, que sea igual a alfa x + alfa y como quedaría: alfa x, claro, me tengo que definir la operación, tengo un problema aquí…

[106E] : ¿Cuál es el problema?

[107ES8] : El problema es el sentido que le estoy dando a esa operación, todavía no la he encontrado…

[107E] : Es que ese es el problema.

[108ES8] : Claro, tengo que separar una operación que todavía no sé cómo se define, o sea, de partida tendría que saber, bueno eso es lo que me están pidiendo, qué operación es esa para que eso tenga sentido.

[108E] : Efectivamente.

[109ES8] : Haber se me ocurre una forma, haber esas son las condiciones que tiene que cumplir.

En este punto la entrevistadora pregunta si es que hay otras condiciones que también tienen que cumplirse, y el ES8 agrega $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ a su lista de axiomas que tiene que ver con la multiplicación por escalar. Él continúa pensando sobre la condición anterior y habla acerca de separar la suma y que tiene que encontrar una manera para que se cumpla con la segunda operación.

En algún momento, piensa sobre la posibilidad de definirlo como un número fijo, y él reflexiona:

[120ES8] : Tiene que ser un real? No, tiene que cumplir eso, entonces tiene que pasar, tiene que ser un real, cierto? Eeee si yo lo dejo como un real fijo, que es lo que podía haber estado pensando yo, un real fijo, entonces aquí me va a dar ese mismo real mas ese mismo real, los dos porque los dos valen lo mismo, entonces no se va a cumplir, entonces tendría que ser variado el producto, o sea la función debería ser como variada, o sea lo que voy es que….

[120E] : No tan usual…..

[121ES8] : No tan usual, o sea, a por x, no va a poder ser r, con r perteneciente a R-{0}, fijo; no puede ser eso porque la suma no………..

[121E] : No va a dar, ya. Por lo menos eso está descartado.

[122ES8] : Entonces ya no puede ser un real fijo, entonces ya estoy pensando en condicionar el y es complicado ahora porque yo no conozco el cuerpo K, entonces como para definir una…

ES8 no puede concluir el problema, pero sus reflexiones muestran que la coordinación ha empezado a tomar lugar (probablemente como un resultado de esta entrevista). Él puede mostrar la condición que tiene que ser cumplida, puede descartar algunas operaciones sabiendo las razones de esto, y comienza a tener una idea de las características de la operación que está buscando.

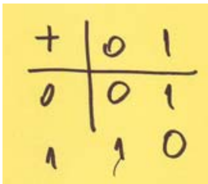
Durante el desarrollo de la entrevista del ES5 es interesante la manera como éste aborda los problemas. Siempre inicia con una lectura del problema y antes de empezar a realizar algún tipo de procedimiento escrito sobre las condiciones dadas, reflexiona sobre la pertinencia de los datos, es decir, siempre verifica si el problema bajo las condiciones dadas tiene solución. Esto nos permitió en la pregunta 3 observar la firmeza con la que interpreta la información del problema y la manera como establece conexiones con los conceptos de conjunto con operaciones y cuerpo. Consideremos el siguiente diálogo:

[138ES5] : Leemos, es posible que exista un espacio vectorial que tenga sólo 2 elementos si a ver consideremos el conjunto (0,1) tiene dos elementos y a ver tengo que definir la suma.

[139E] : Sí.

[139ES5] : Y la suma la defino como se define la suma 0+0, 0+1 uno 0+1 uno cero. Y tienen que cumplirse las propiedades para que eso esté bien a ver, grupo abeliano con la suma ¿cerrado? Si, se nota claramente si en todas las imágenes están en el (0,1), o sea no se como se llaman cosas.

[140E] : Todas las cuentas final se pueden sacar entre 0 y 1.



[140ES5] : Claro los resultados digamos, sí.

[141E : Los resultados.

[141ES5] : ¿Es cerrado? Sí ¿es? A tendría que ver si es asociativa a pero este es un cuerpo ¿o no?

[142E] : Sí.

[142ES5] : Es un cuerpo o sea ya me acuerdo que es el cuerpo más pequeño de todos ¿o no?

Este estudiante está mostrando la coherencia de su esquema y decide qué elementos y relaciones establece el enunciado del problema y concluye después de reflexionar que sí es posible determinar espacios vectoriales con la condición dada argumentando:

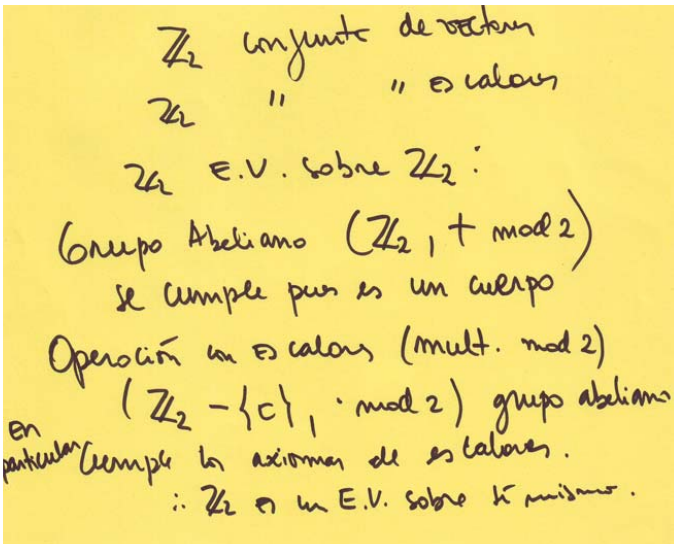
[152ES5] : El conjunto de vectores tiene que tener, tiene que ser grupo abeliano, tiene que tener suma, nada más.

[153E] : Nada más ahí estamos.

[153ES5] **:** Claro la suma y como es un cuerpo con esas dos propiedades, entonces es grupo abeliano con la primera, a hora me falta la multiplicación por escalar y ¿Cuál es el conjunto que voy a considerar conjunto de los escalares? Tiene que ser un cuerpo también, el cuerpo de escalares va a ser el mismo y la multiplicación por escalar va a serla multiplicación módulo 2.

[154E] : Módulo 2.

[154ES5] : O sea, claro. No si de hecho todos los cuerpos son espacios vectoriales sobre sí mismos.



[155E] : Entonces ¿Por qué de dónde sabes eso? ¿Cómo argumentarías lo que acabas de decir?

[155ES5] :¿Por qué? Porque la suma de vectores es un grupo abeliano por que es un cuerpo y después la multiplicaron por escalar la miro como multiplicación detectores que es equivalente en este caso, porque el conjunto de vectores y el conjunto de escalares es estoy considerando el mismo entonces yo sé que en vez de ver sí se cumplen las propiedades de vectores por escalares los miro como vectores con vectores y yo sé que esto con la multiplicación es un... ¿Cómo se llama? Un grupo…un grupo abeliano, pero ahí tengo que quitarle el cero ¿o no?

[156E] : Claro.

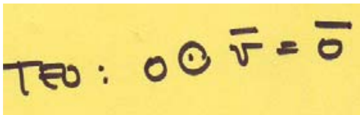
[156ES5] : Para que tenga inverso.

[157E] : Y tiene inverso específicamente.

[157ES5] : Pero eso, eso no influye en espacios vectoriales porque en espacios vectoriales nunca se habla de inverso.

Es evidente que su esquema de espacio vectorial es mucho más maduro que el de otros entrevistados: ES7 o ES4. Conoce bien la estructura algebraica involucrada en los espacios vectoriales y cuerpos lo que le permite establecer que la existencia o no de tal espacio vectorial. En este tipo de construcciones es clara la necesidad de poseer un esquema de conjunto y de operación binaria, ya que sin dificultad el estudiante puede recurrir a conjuntos finitos, considerando operaciones binarias definidas en él. Este estudiante analizó y organizó la información, lo que le permitió determinar con seguridad el espacio vectorial solicitado en el problema.

También estudiantes que ya se encuentran en este nivel se dan cuenta, que existe un cero vector para la operación suma de vectores, y un escalar cero del cuerpo, los cuales poseen roles distintos en la estructura espacio vectorial, lo que les permite establecer relaciones entre la estructura de espacio vectorial y teoremas que de él se derivan. Es por ello, que para chequear que una estructura no es espacio vectorial pueden utilizar teoremas en sentido contrapositivo. Es el caso del estudiante 5, en la pregunta 1, donde escribe con alguna imprecisión, el teorema:



Se da cuenta que el negar la proposición:

> *"V es espacio vectorial, entonces* $0 \bullet v = 0$*"* le ayuda a dar respuesta a la pregunta.

Veamos su entrevista:

[86ES5] : ¿Para qué? Porque por ejemplo a ver esa proposición de que por ejemplo el teorema que dice que…¿Cómo se llama? El elemento…neutro del cuerpo multiplicado por un vector es el vector nulo.

[87E] : A eso sí.

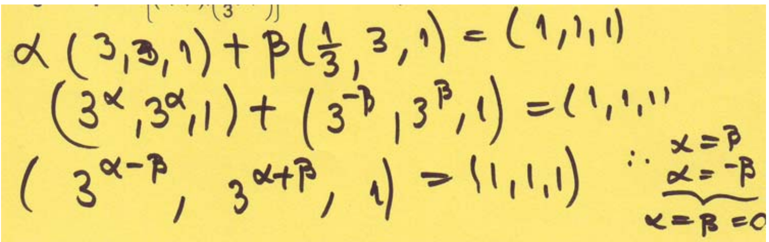
[87ES5] : ¿Cierto? Entonces eso lo ponen como teorema y es importante porque sirve para verificar que sea por ejemplo espacio vectorial o cosas así, entonces a veces lo ponen todo junto y ahí uno no sabe, hay unas cosas que son importantes pero son axiomas o cosas así.

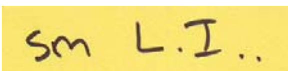
[88E] : Cuando dices que sirve para verificar que un espacio ¿Cómo fue eso? Sirve para…

[88ES5] : Claro para verificar si es que es un espacio vectorial por ejemplo si acá yo pongo el cero y no me entrega el cero entonces no puede ser con esa operación no puede estar definido un espacio vectorial.

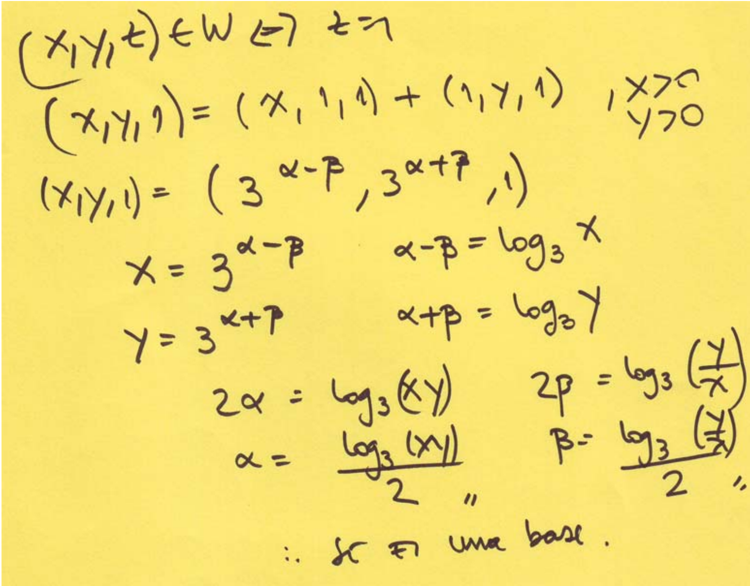
Sin embargo, ES5 luego desecha esta argumentación y prueba que la estructura definida en la pregunta 1 de la entrevista no es espacio vectorial, porque $1 \odot (x,y) \neq (x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; citando para ello el siguiente contraejemplo: $1 \odot (1,2) = (1,-2) \neq (1,2)$.

También en este nivel los estudiantes establecen relaciones entre el objeto espacio vectorial, conjuntos linealmente independiente y base, con operaciones suma y ponderación diferentes de las usuales. Veamos las relaciones que estableció el ES5 al enfrentar la pregunta 8, en particular queremos resaltar el punto 8.5, en la cual aplica adecuadamente las definiciones de: las operaciones suma y ponderación, de combinación lineal, de linealmente independiente/dependiente y base, al demostrar que el conjunto $\left\{(3,3,1),\left(\frac{1}{3},3,1\right)\right\}$ es una base para W. El ES5 primero prueba que el conjunto es linealmente independiente:





Y después chequea que el conjunto $\left\{(3,3,1),\left(\frac{1}{3},3,1\right)\right\}$ genera a *W*:



$(x,y,t)\in W \Rightarrow t=1$

$(x,y,1)=(x,1,1)+(1,y,1)\ ,\ x>0,\ y>0$

$(x,y,1)=(3^{\alpha-\beta},3^{\alpha+\beta},1)$

$x=3^{\alpha-\beta} \qquad \alpha-\beta=\log_3 x$

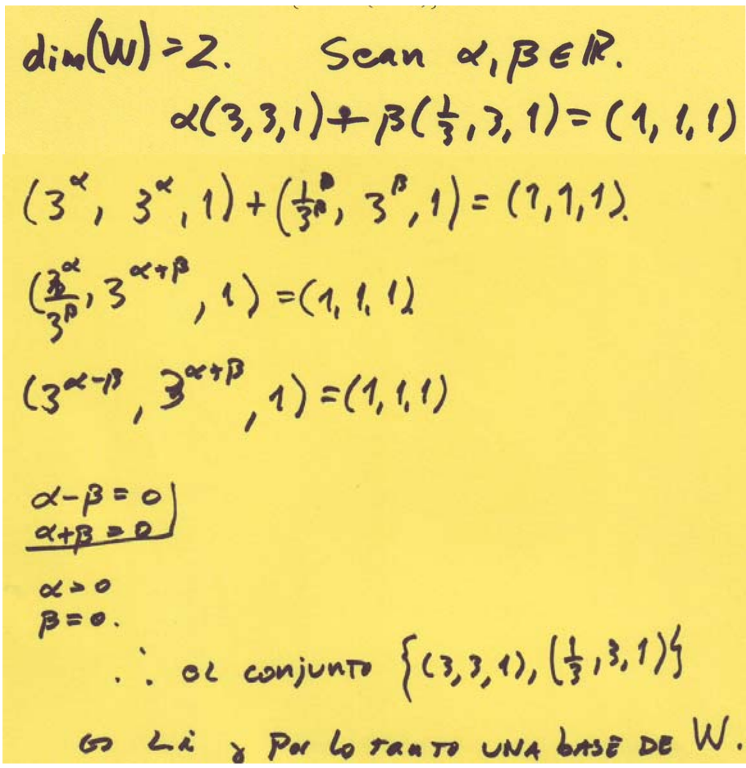
$y=3^{\alpha+\beta} \qquad \alpha+\beta=\log_3 y$

$2\alpha=\log_3(xy) \qquad 2\beta=\log_3\left(\frac{y}{x}\right)$

$\alpha=\frac{\log_3(xy)}{2}\ " \qquad \beta=\frac{\log_3\left(\frac{y}{x}\right)}{2}\ "$

$\therefore$ SG es una base.

En tal caso, ES8 y ES5 no fueron los únicos estudiantes que mostraron estar en este nivel de esquema, también encontramos al estudiante 3, que también mostró evidencias de relaciones entre sus construcciones: objeto de espacio vectorial y base, al resolver la pregunta 8.5 de la entrevista. ES3 comienza diciendo que la $\dim(W)=2$, por lo que sólo le resta probar que el conjunto $\left\{(3,3,1),\left(\frac{1}{3},3,1\right)\right\}$ sea linealmente independiente, en efecto:



$\dim(W)=2.$ Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

$\alpha(3,3,1)+\beta(\frac{1}{3},3,1)=(1,1,1)$

$(3^\alpha,3^\alpha,1)+(\frac{1}{3^\beta},3^\beta,1)=(1,1,1)$

$(\frac{3^\alpha}{3^\beta},3^{\alpha+\beta},1)=(1,1,1)$

$(3^{\alpha-\beta},3^{\alpha+\beta},1)=(1,1,1)$

$\alpha-\beta=0$
$\alpha+\beta=0$

$\alpha=0$
$\beta=0.$

$\therefore$ el conjunto $\{(3,3,1),(\frac{1}{3},3,1)\}$ es LI y por lo tanto una base de W.

Por otro lado, en las argumentaciones de nuestros entrevistados pudimos apreciar que para decir que una estructura es espacio vectorial, no necesariamente recurren a la axiomática que lo define, sino que utilizan conexiones con otros conceptos como el de subespacio vectorial, cuando les resulta más eficiente. Éste es el caso del estudiante 8, en la pregunta 4 de la entrevista. Él considera que:

Como $\mathbb{R}_n[x]$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $W \subset \mathbb{R}_n[x]$, Basta ver que W sea un subespacio.

En efecto:

i) $W \neq \phi$. En efecto $0 \in W$.

ii) Sean $p(x), q(x) \in W$ entonces hay que demostrar que $p(x)+q(x) \in W$

Pues $\int_0^1 (p(t)+q(t))\,dt = \int_0^1 p(t)\,dt + \int_0^1 q(t)\,dt = 0$

• $1^2 = (\sqrt{-1})^2 = \underbrace{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}}$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $p(x) \in W$.

$\Rightarrow \int_0^1 \alpha\, p(x) = \alpha \int_0^1 p(x) = \alpha \cdot 0 = 0$

$\therefore W < \mathbb{R}_n[x]$.

Otras relaciones que manifestaron los estudiantes en este nivel de esquema fue, la capacidad de relacionar más de dos espacios vectoriales a la vez. Por ejemplo el estudiante 6 en la pregunta 9, argumenta algebraicamente por qué tres espacios representados algebraicamente de formas diferentes no pueden ser iguales. Este estudiante empieza argumentando por qué $U \neq V$ y $W \neq V$:

$U \neq V$, ya que $(1,2,3) \notin V$, $1+2+3 \neq 0$
$W \neq V$, ya que $(1,0,1) \notin V$, $1+0+1 \neq 0$

Y termina argumentando por qué $W = U$:

$W \subseteq U$
$(-1,1,0) = 0(1,2,3)+(-1)(1,0,1)+(1)(0,1,1$
$(1,0,1) = 0(1,2,3)+(1)(1,0,1)+0(0,1,1)$

$U \subseteq W$
$(1,2,3) = (2)(-1,1,0)+3(1,0,1)$
$(1,0,1) = 0(-1,1,0)+(1)(1,0,1)$
$(0,1,1) = 1(-1,1,0)+1(1,0,1)$
$\therefore \ W = U$

Para finalmente concluir que los espacios no son iguales dos a dos:

$\therefore \ W = U, \ U \neq V, \ W \neq V$
"no son iguales dos a dos."

También encontramos relaciones del espacio con su base, relación que se evidencia en las argumentaciones de las respuestas de las pregunta 10 de la entrevista. Veamos el escrito del estudiante 9:

1) $x+2y-z=0$
2) $x-2z+t=0$
(

Reemplazando x
2) en 1)
$2z-t+2y-z=0$
$z-t+2y=0$
$z+2y=t$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+z & y \\ z & z+2y \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ z & z \end{pmatrix}$$
$$= y \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En el que podemos apreciar que cualquier matriz cuadrada de orden 2, se escribe como combinación lineal de dos matrices, las cuales se asegura que sean linealmente independientes, mostrando que una no es múltiplo de la otra:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix}$$
$$\nexists \lambda \in \mathbb{R} \ \pi \ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

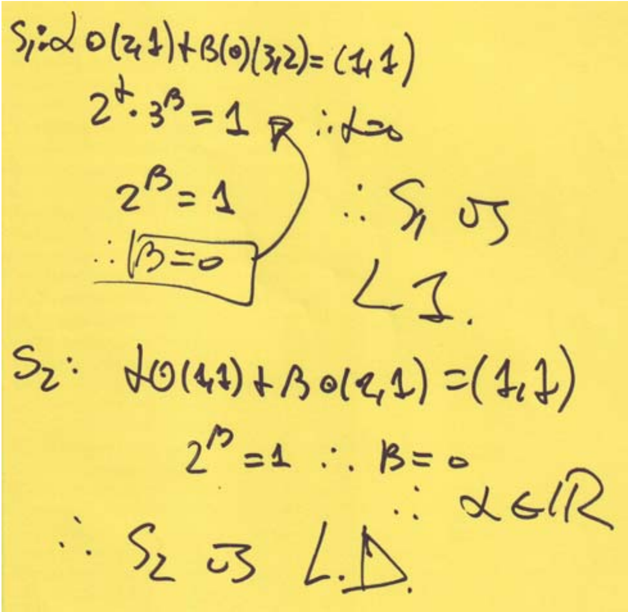
Para llegar a concluir que el conjunto

$$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
es una base de V.

Así también, estudiante 1, aborda la pregunta 11 de la entrevista con mucho éxito, al realizar las conexiones entre el objeto espacio vectorial y conjunto linealmente independiente. ES1P11 inicia la resolución precisando que el cero vector de V, es $(1,1)$

$$0 \odot (a,b) = (a^0, b^0) = (1,1)^{*\text{neutro}}$$

Para resolver el problema aplica adecuadamente las definiciones y conceptos involucrados, veamos su escrito:



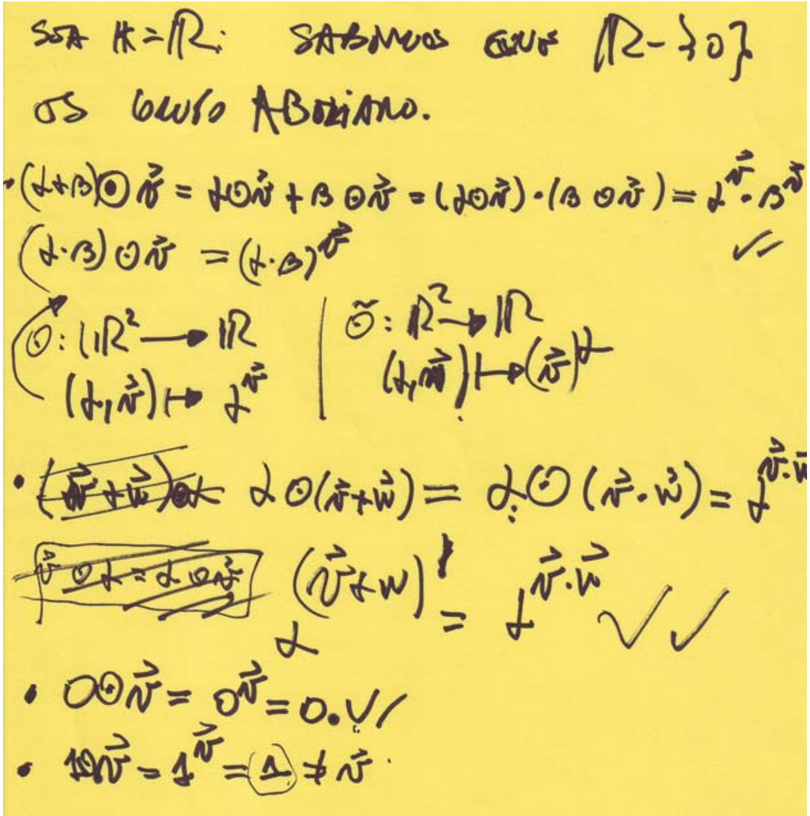
Para finalizar este apartado, queremos manifestar, que los estudiantes que se encuentran en este nivel empiezan a reconocer las operaciones involucradas en el concepto espacio vectorial y el cero vector como parte de una estructura.

4.2.4 Nivel de Esquema Trans Espacio Vectorial

En el nivel Trans el estudiante puede reconocer y trabajar con ejemplos de espacios vectoriales no-estándar y puede invocar su esquema cuando sea necesario.

Observemos cómo el ES1P7 invoca su esquema de espacio vectorial para coordinar los procesos relacionados a las dos operaciones de un espacio vectorial, a través de los axiomas de distributividad.

S1, después de leer la pregunta, inmediatamente trata de definir la operación como $\alpha v = \alpha^{v}$ donde α y v son números reales. Cuando él se da cuenta que para que α^{1} sea igual a 1 α tiene que ser uno y entonces uno de los axiomas no se cumple, él continúa pensando sobre otras operaciones posibles. Él trata $\alpha v = v^{\alpha}$ y verificando las propiedades muestra que lo que tiene es un espacio vectorial. Este estudiante desde el principio muestra una buena comprensión del tipo de operación que él está buscando. Aunque tiene que hacer una prueba y cometer errores, la coordinación de los procesos involucrados en las dos operaciones lo llevó a descubrir una operación correcta. Veamos sus escritos:


SEA $K=\mathbb{R}$: SABEMOS QUE $\mathbb{R}-\{0\}$ ES GRUPO ABELIANO.

• $(\alpha+\beta)\odot\vec{v} = \alpha\odot\vec{v}+\beta\odot\vec{v} = (\alpha\odot\vec{v})\cdot(\beta\odot\vec{v}) = \alpha^{\vec{v}}\cdot\beta^{\vec{v}}$ ✓

$(\alpha\cdot\beta)\odot\vec{v} = (\alpha\cdot\beta)^{\vec{v}}$

$\odot: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(\alpha,\vec{v})\mapsto\alpha^{\vec{v}}$ | $\tilde{\odot}: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(\alpha,\vec{v})\mapsto(\vec{v})^{\alpha}$

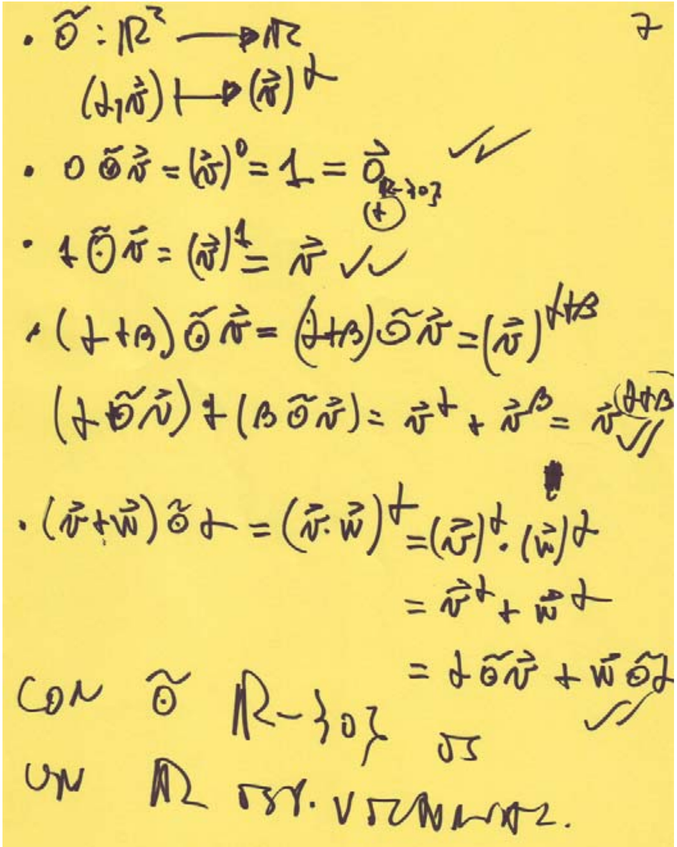
• ~~$(\vec{v}+\vec{w})\alpha$~~ $\alpha\odot(\vec{v}+\vec{w}) = \alpha\odot(\vec{v}\cdot\vec{w}) = \alpha^{\vec{v}\cdot\vec{w}}$

~~$\vec{v}\odot\alpha=\alpha\odot\vec{v}$~~ $\alpha^{(\vec{v}+w)} = \alpha^{\vec{v}\cdot\vec{v}}$ ✓✓

• $0\odot\vec{v} = 0^{\vec{v}} = 0$ ✓

• $1\odot\vec{v} = 1^{\vec{v}} = 1 \neq \vec{v}$

ES1 se da cuenta que la operación multiplicación por escalar solicitada la puede definir como: $\begin{array}{l}\odot:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(\alpha,\vec{v})\to(\vec{v})^{\alpha}\end{array}$, en la cual sólo le falto precisar que $v\in\mathbb{R}-\{0\}$, ya que exitosamente probó que el resto de los axiomas se verificaba:



7

- $\tilde{\odot} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

  $(\alpha, \vec{v}) \longmapsto (\vec{v})^{\alpha}$
- $0 \,\tilde{\odot}\, \vec{v} = (\vec{v})^0 = 1 = \vec{0}_{\mathbb{R}-\{0\}}$ $(+)$
- $1 \,\tilde{\odot}\, \vec{v} = (\vec{v})^1 = \vec{v}$
- $(\alpha+\beta)\,\tilde{\odot}\,\vec{v} = (\alpha+\beta)\,\tilde{\odot}\,\vec{v} = (\vec{v})^{\alpha+\beta}$

  $(\alpha \,\tilde{\odot}\, \vec{v}) + (\beta \,\tilde{\odot}\, \vec{v}) = \vec{v}^{\alpha} + \vec{v}^{\beta} = \vec{v}^{(\alpha+\beta)}$
- $(\vec{v}+\vec{w})\,\tilde{\odot}\,\alpha = (\vec{v}\cdot\vec{w})^{\alpha} = (\vec{v})^{\alpha}\cdot(\vec{w})^{\alpha}$

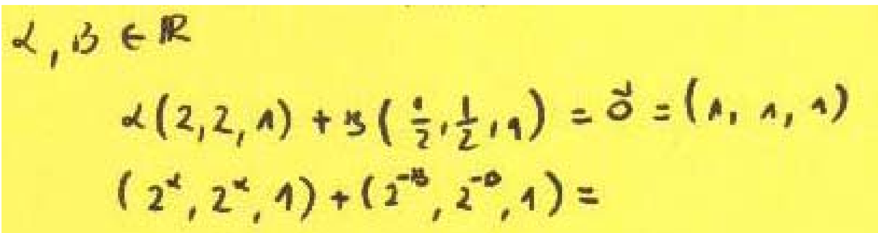
  $= \vec{v}^{\alpha} + \vec{w}^{\alpha}$

  $= \alpha \,\tilde{\odot}\, \vec{v} + \vec{w}\,\tilde{\odot}\,\alpha$

CON $\tilde{\odot}$ $\mathbb{R}-\{0\}$ ES

UN $\mathbb{R}$ ESP. VECTORIAL.

Además, los estudiantes que se encuentran en este nivel tienen pleno reconocimiento de las operaciones involucradas en el concepto espacio vectorial y de la estructura que le subyace, lo que les permite establecer con claridad relaciones entre conjuntos linealmente independientes y el cero vector. Es el caso del ES2P8.4, él usa correctamente las operaciones suma y ponderación por escalar y el vector cero para chequear la independencia lineal:



$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha(2,2,1) + \beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right) = \vec{0} = (1,1,1)$

$(2^{\alpha}, 2^{\alpha}, 1) + (2^{-\beta}, 2^{-\beta}, 1) =$

$$= (2^{\alpha-\beta}, 2^{\alpha-\beta}, 1) = (1,1,1)$$

$$\alpha - \beta = 0$$

$$\alpha = \beta$$

$\therefore$ No son L.i.

Por otro lado ES3, para responder la pregunta 8.4 usa la siguiente estrategia:

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$(-1) \odot (2,2,1) = (2^{-1}, 2^{-1}, 1^{-1}) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\right)$$

$\therefore$ Los vectores son L.D.

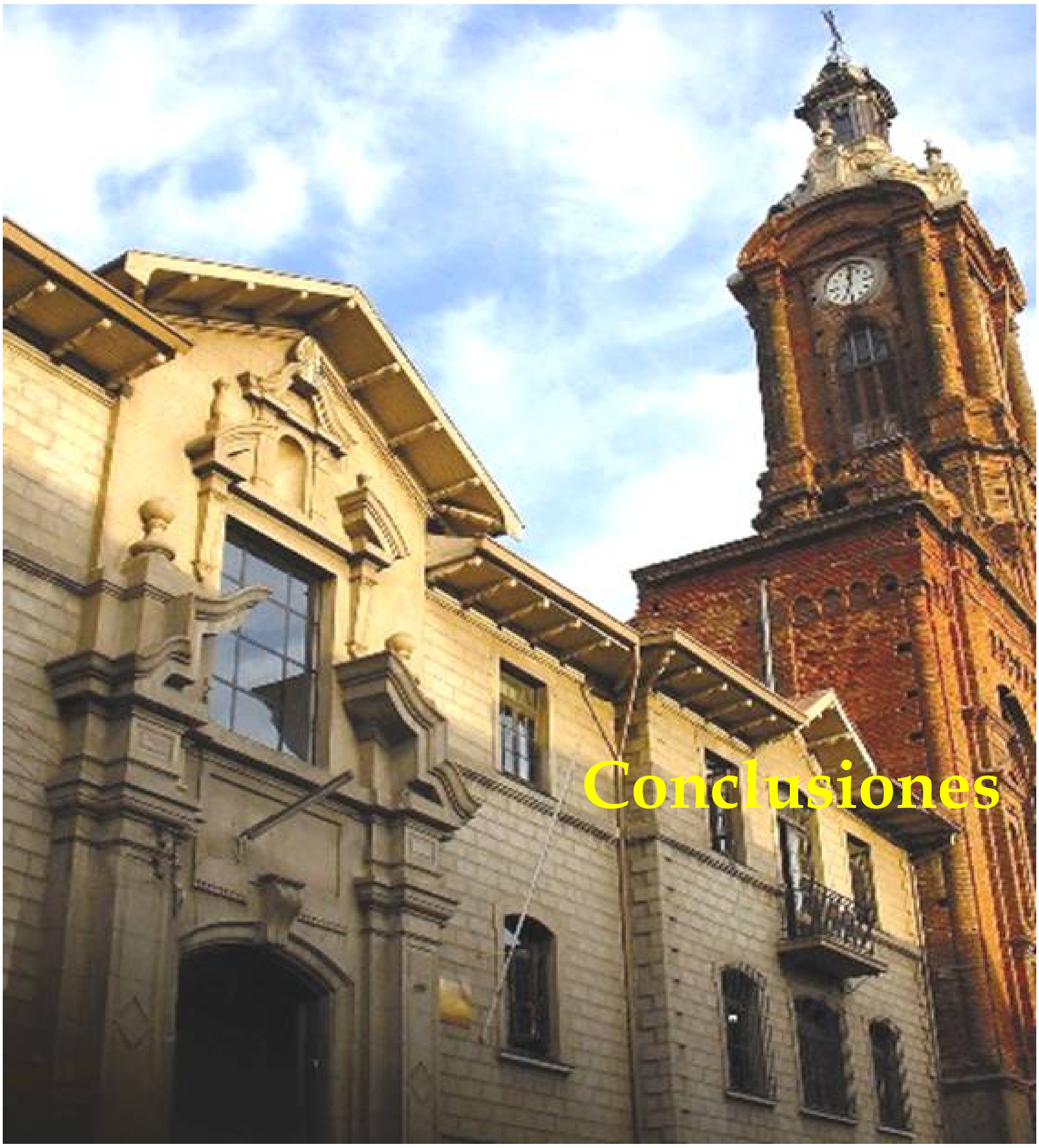
En cambio, otros estudiantes trabajan este problema como si las operaciones fueran las usuales y/o el vector nulo sería (0,0,0). Ya que su esquema de espacio vectorial no se ha desarrollado más que a un nivel Intra, entonces es difícil para ellos hacer las conexiones necesarias e invocar adecuadamente el esquema de espacio vectorial.

Para finalizar queremos mencionar que, a través de las preguntas que diseñamos y aplicamos en forma de cuestionario y de entrevista, pudimos observar las construcciones mentales anunciadas en nuestra descomposición genética. También observamos que cuando los estudiantes no tienen las construcciones prerrequeridas, es muy difícil para ellos desarrollar un esquema del concepto espacio vectorial suficientemente fuerte, es decir, que se relacione con otras construcciones. Además, las preguntas que aplicamos y las respuestas que obtuvimos de los estudiantes pueden ser usadas para diseñar estrategias de instrucción para favorecer las conexiones necesarias que forman parte de nuestra descomposición genética.

Asimismo es conveniente mencionar, además de lo que ya se dice, que el hecho de haber encontrado al menos un estudiante que muestra un esquema de espacio vectorial a nivel trans, es evidencia de que ello es posible y que la clasificación de los estudiantes por niveles no es tanto por clasificarlos en sí mismo (aunque eso puede ser de utilidad también) sino para mostrar con claridad las diferencias entre los distintos niveles, que muestran cuáles son las construcciones que parecen ser indispensables para transitar de un nivel a otro.

Igualmente se hace importante en este instante, ligar estos resultados encontrados, con lo que se refiere a los resultados reportados en la parte de revisión de la literatura. Al respecto podemos afirmar la potencia de la naturaleza del concepto espacio vectorial, en cuanto a su naturaleza unificadora y generalizadora, las que se pueden asociar con la concepción objeto y esquema respectivamente, del concepto espacio vectorial.

Capítulo 5



Capítulo 5

Conclusiones

5.1 Conclusiones teóricas

El proceso de análisis realizado en el capítulo anterior, no sólo ha permitido ampliar los criterios de caracterización de cada uno de los niveles Intra, Inter y Trans y por ende del desarrollo del esquema del concepto espacio vectorial, sino también dar cuenta de la evolución de dicho esquema y de la no linealidad del aprendizaje de este concepto, este último a modo de discusión.

El paso de un nivel a otro lo hemos caracterizado a través de las relaciones entre diferentes tipos de construcciones que los estudiantes establecen y de los elementos matemáticos del álgebra lineal que ellos utilizan. Entre estos elementos destacamos que:

- Elemento neutro,
- Combinaciones lineales,
- Conjuntos linealmente independiente/dependiente,
- Base,
- Conjunto generador,
- Dimensión.

son algunas nociones del álgebra lineal que los estudiantes han utilizado en esta investigación, para manifestar la fortaleza de su esquema de espacio vectorial, es decir, para justificar, una comprensión profunda de este último.

Hemos descubierto, como resultado de nuestra investigación que un criterio a tomar en cuenta para ampliar la caracterización de los niveles sería lo relacionado con el cero vector. En efecto:

La evolución que un estudiante va realizando de un espacio vectorial, va a la par con la evolución que va realizando del cero vector y de las operaciones suma y ponderación por escalar. Por ello hemos realizado una modificación a nuestros niveles de esquemas (ver tabla siguiente) considerando que un estudiante que se encuentra en un nivel de esquema INTRA del concepto espacio vectorial, piensa que el cero vector de un espacio vectorial es la n-upla (0,0,…,0), elemento constituido sólo por el número cero de $\mathbb{R}$; y que un estudiante se encuentra en un nivel de esquema INTER del concepto espacio vectorial, cuando reconoce que el cero vector de un espacio vectorial no siempre es (0,0,…,0), aceptando que el cero vector es un elemento no necesariamente constituido por ceros.

Nivel de Esquema Intra	Nivel de Esquema Inter	Nivel de Esquema Trans
▪ Para *n,m* número naturales especificos $\mathbb{R}^n$ *y* $M_{m\times n}$ son espacios vectoriales conocidos. ▪ No existen relaciones entre los diferentes espacios vectoriales, ni subespacios vectoriales. ▪ Reconocen que el cero vector de un espacio vectorial es la n-upla (0,0,…,0), elemento que esta constituido por ceros. ▪ Para chequear que una estructura $(\mathbb{K},\mathbb{V},+,\bullet)$ no es un espacio vectorial recurren a los axiomas de espacio vectorial. ▪ La averiguación de vectores linealmente independiente/dependiente se realiza mediante una combinación lineal igual al cero vector de $\mathbb{R}^n$. ▪ La base de un espacio vectorial, es un conjunto de vectores, que no tiene relación con el espacio vectorial. ▪ La operación suma y multiplicación por escalar son consideradas como las	▪ Reconocen algunas relaciones entre espacios vectoriales, mediante, isomorfismos, trasformaciones lineales y dimensión. ▪ Reconocen que todos los espacios vectoriales tienen un cero vector, tienen bases, tienen dimensión, entre otros. ▪ Existen relaciones entre el espacio vectorial y sus subespacios vectoriales, por ejemplo: reconocen que el cero vector de uno lo hereda el otro y también reconocen que cuando un conjunto es subconjunto de un espacio vectorial, basta chequear que es subespacio para que sea espacio vectorial. ▪ Reconocen que el cero vector no siempre es la n-upla (0,0,…,0) y aceptan la posibilidad que el cero vector de algún espacio vectorial sea un elemento del espacio que no tenga ceros. ▪ Para chequear que una estructura $(\mathbb{K},\mathbb{V},+,\bullet)$ no es	▪ Reconocen adecuadamente todas las relaciones entre espacios vectoriales. ▪ Reconocen adecuadamente todas las relaciones entre el espacio vectorial y las nociones del álgebra lineal. ▪ Trabajan con ejemplos desconocidos y más complicados de espacios vectoriales. ▪ Trabajan con espacios vectoriales no estándar, por ejemplo el espacio de funciones. ▪ Hay pleno reconocimiento de las operaciones Suma y Ponderación para una estructura CuerpoConjunto.

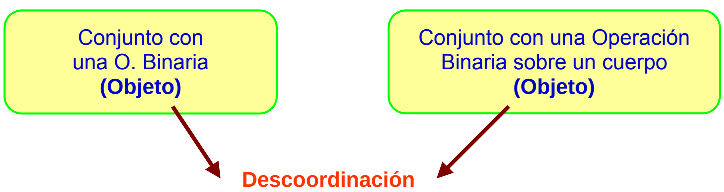
usuales en la estructura CuerpoConjunto: + y •. No hay conciencia que una misma estructura CuerpoConjunto puede tener asociada un sin número de operaciones Suma y Ponderación	un espacio vectorial, además de los axiomas recurren generalmente a los teoremas y propiedades que tienen los espacios vectoriales, en sentido contrapositivo, es decir: $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. ▪ La averiguación de vectores linealmente independiente/dependiente se realiza mediante una combinación lineal igual al elemento neutro, para la operación suma. Particularmente se chequea que cuando uno es múltiplo del otro dos vectores son linealmente dependientes. ▪ La base de un espacio vectorial, es un conjunto de vectores, que tiene relación con el espacio vectorial, reconociendo que todo vector se puede escribir como combinación lineal de la base del espacio vectorial. ▪ Hay aceptación que una estructura CuerpoConjunto pueda tener definidas operaciones Suma y Ponderación diferentes a las usuales: $\oplus$, $\odot$	

Así, como fruto de nuestra investigación podemos proporcionar no sólo características fundamentales de las diferentes construcciones que participan en la construcción esquema del concepto espacio vectorial, sino también de los diferentes niveles del esquema del concepto espacio vectorial. En particular, la caracterización de estos niveles permite materializar la forma en la que el esquema del concepto espacio vectorial se construye y la forma en la que evoluciona, a través del estudio de los estudiantes que participaron en nuestra investigación.

Los resultados de nuestra investigación también nos permiten hacer una reflexión respecto a nuestro marco teórico en el sentido de que una vez más la no linealidad del aprendizaje se aprecia. Como Trigueros y Oktaç (2005) también lo mencionan, los estudiantes pueden mostrar una concepción específica para algunos aspectos de un concepto y elementos de otra concepción para algún otro aspecto del mismo concepto. También pueden ir y venir entre diferentes concepciones, hasta que logren una comprensión adecuada. En nuestra investigación podemos constatar que puede también haber otras desviaciones. Por ejemplo, al análisis de la pregunta 3 junto con la 5, muestra que en los estudiantes se pueden encontrar elementos de la construcción objeto (se puede llamar así porque muestran que hay una comprensión del concepto como una construcción objeto) sin lograr algunas construcciones previas, como las propiedades del espacio vectorial como procesos y coordinación entre los axiomas. A raíz de esto último, convendría que en la descomposición genética aparezca una coordinación entre los procesos de los axiomas explícitamente, tal vez debido a que "espacio vectorial" es una estructura bastante compleja y son muchos los axiomas que tienen que cumplirse, en otras palabras: decir que el objeto "conjunto con operación binaria" se asimila por el esquema de axiomas (que contiene cuantificadores), puede no ser suficiente.

5.2 Conclusiones Didácticas y sugerencias para futuras investigaciones

El proceso de investigación que hemos seguido de entrevistar a unos estudiantes, con cuestionarios y entrevistas detallados, para estudiar sus esquemas, con relación al concepto de espacio vectorial, nos ha permitido llegar a la conclusión de que hay una descoordinación entre los objetos que definen las operaciones suma y multiplicación por escalar:



Esto puede ser debido a que en la enseñanza no se les da importancia explícitamente a las leyes distributivas que definen la estructura de espacio vectorial y las relaciones que guardan en la estructura de un espacio vectorial, y que los estudiantes no toman conciencia de cuál es el rol que juegan esas dos operaciones en la definición axiomática misma de espacio vectorial.

Una pregunta que podemos plantearnos es ¿Cómo podemos ayudar a que los estudiantes logren esa coordinación?

Consideramos que cada etapa de la descomposición genética, presentada en esta investigación requiere atención, para que se puedan hacer las construcciones necesarias que requiere la construcción esquema del concepto espacio vectorial. Además hay que enfrentar a los estudiantes a situaciones problemáticas que consideren operaciones suma y multiplicación por escalar diferentes a las usuales, para que ellos puedan reflexionar y analizar del porqué una estructura $(\mathbb{K},V,\oplus,\odot)$ requiere de los axiomas:

$\alpha \odot (v_1 \oplus v_2) = (\alpha \odot v_1) \oplus (\alpha \odot v_2)$, donde $\alpha \in \mathbb{K} \quad \wedge \quad v_1, v_2 \in V$

$(\alpha + \beta) \otimes V = (\alpha \otimes V) \oplus (\beta \otimes V)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \wedge \quad v \in V$

para que sus componentes:

no queden como estructuras aisladas, cuando construye el esquema del concepto de espacio vectorial.

Ahora, los argumentos que presentamos sobre la evolución del esquema de espacio vectorial representan un primer paso hacia la construcción del concepto transformación lineal que fundamenta en un determinado momento el desarrollo del álgebra lineal. Sin duda abordar esta problemática desde su misma naturaleza abstracta ofrece un campo de posibilidades para desarrollar en los estudiantes verdaderos procesos de abstracción que promuevan el desarrollo de su pensamiento matemático.

Un modelo de enseñanza que se base en este camino puede considerar el análisis del cero vector y de las operaciones suma y ponderación por escalar diferentes de las triviales, lo que implica un análisis específico sobre la naturaleza del cuerpo donde están definidos los escalares. Por ejemplo considerar que el conjunto de soluciones de determinadas ecuaciones diferenciales ordinarias, forma un espacio vectorial. Este tipo de ejemplos promueve un tipo de pensamiento distinto que desde nuestra opinión puede generar el desarrollo de razonamientos de tipo abstracto donde el estudiante siente la necesidad de reflexionar sobre los contenidos más allá de desarrollar habilidades para repetirlos, por concebirlos como algo concluido.

De la misma manera cuando se están construyendo por separado la operación suma vectorial y el producto por un escalar es posible que no haya coordinación entre estas dos operaciones. Considerar que estas operaciones no son independientes una de la otra y analizar la razón de ser de cada uno de los axiomas que comprende la definición de espacio vectorial, puede generar la reflexión de este concepto más allá de la mecanización. En este camino es importante mencionar los materiales propuestos por Weller, et al. (2002) donde el trabajo con espacios vectoriales se inicia con acciones sobre vectores específicos de espacios vectoriales de dimensión finita como $\mathbb{Z}_3^3$, sobre un cuerpo finito como $\mathbb{Z}_3$.

Con este tipo de alternativas buscamos que los profesores motiven el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes mediante una reflexión profunda de los conceptos. Sin duda el camino que describimos en nuestra descomposición genética refinada puede ser la base que motive esta reflexión que va más allá de la considerada por los libros de texto. Tal vez ésta puede convertirse en una alternativa que motive el razonamiento sobre éste y otros conceptos del álgebra lineal sin evadir su carácter abstracto que es en definitiva una de las características por las cuales nos interesa incluirla en los programas de formación profesional.

Sin duda los resultados de nuestra investigación pueden ser refinados mediante una nueva aplicación del ciclo de investigación que hemos desarrollado. Sin embargo consideramos que para obtener datos más significativos sobre las construcciones que los estudiantes realizan alrededor del concepto espacio vectorial sería muy interesante diseñar un modelo de enseñanza que con base en nuestra descomposición genética refinada, busque seguir el camino descrito para la construcción del concepto, teniendo en cuenta las consideraciones didácticas que hemos planteado. Esto tal vez pueda brindar más luces sobre la manera como evoluciona el esquema de espacio vectorial y permita describir de manera específica sus niveles de evolución.

Así, si a partir de lo que hemos investigado hasta ahora, tuviéramos que diseñar una estrategia de enseñanza utilizando el ciclo ACE, incluiríamos aquellas actividades que marcan la transición entre los elementos de la descomposición genética. Por ejemplo las que se relacionan con el cero vector y con operaciones + y * que no sean las triviales, ya que estos tres elementos según el resultado de la tesis, son los que van marcando la evolución del concepto espacio vectorial. Asimismo diseñaríamos actividades donde el papel que juega el cuerpo se destacaría. Para así aportar en la construcción de los pasos que hay que realizar para la enseñanza del concepto espacio vectorial.

Consideramos importante estudiar los registros involucrados directamente en los espacios vectoriales, así como también en las nociones que se relacionan con él, esto nos lleva a preguntarnos ¿De qué manera puede relacionarse los registros con las concepciones descritas en la descomposición genética? , ¿Qué hace que algunos estudiantes acudan a un tipo de registros? y mejor aún ¿Qué tipo de construcciones y qué niveles de abstracción permiten estos registros?. Estas preguntas pueden guiar trabajos relacionados con este concepto matemático y su notación y contribuir a la construcción adecuada del mismo.

De la misma manera podemos considerar que las nociones geométricas indudablemente están presentes en la mente de algunos estudiantes cuando piensan en el concepto espacio vectorial. Si consideramos en detalle las entrevistas podremos ver que la estudiante 7, el problema 8 intenta acudir a representaciones de tipo geométrico. Sin embargo abandonan sus intenciones rápidamente cuando al parecer este tipo de representación no les permite decir algo más acerca de los conceptos involucrados o tal vez, cuando éstas ya han aclarado las ideas en su mente. Por lo anterior consideramos de gran importancia abordar esta problemática más allá de los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$; es decir, podemos pensar en cómo estas representaciones geométricas de vectores particulares pueden contribuir con la generalización de argumentos sobre otros espacios o cómo el uso de estas representaciones limita la construcción adecuada del concepto.

Referencias Bibliográficas

Anton, H. (2003). "Introducción al Álgebra Lineal". Tercera Edición. Editorial Limusa Wiley.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Ed.s) *Research in Collegiate Mathematics Education*. Vol. 2. Providence, RI: American Mathematical Society. p. 1-32.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema, *Journal for Research in Mathematics Education*, **31**(5), 557-578.

Birkhoff, G. y Mac Lane, S. (1941). A Survey of Modern Algebra. New York: Macmillan Company.

Birkhoff, G. y Mac Lane, S. (1965). A Survey of Modern Algebra (third edition). New York: Macmillan Company.

Burgos, J. (2006). Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana. Tercera Edición. Mc Graw Hill.

Carlson, D.; Johnson, C. R.; Lay, D. C.; Porter, A. D.; Watkins, A. E. y Watkins, W. (Eds.). (1997). Resources for Teaching Linear Algebra. MAA Notes, 42.

Clark, J; Cordero, F; Cottrill, J; Czarnocha, B; DeVries; D. J; John, D. St., Tolias, G y Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule*, Journal of Mathematical Behavior*, **16**(4), 345-364.

Cooley, L., Trigueros, M. y Baker, B. (2007). Schema Thematization: A framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, **38**(4), 370-392.

Cottrill, J. (1999). Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions. Doctoral dissertation, Purdue University.

Dorier, J. L. (1990). Continuous analysis of one year of science students' work, in linear algebra, in first year of french university. *Proceedings of the 14th annual meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 35-42.

Dorier, J. L. (1995a). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, **22**(3), 227-261.

Dorier, J. L. (1995b). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **29**(2), 175-197.

Dorier, J. L. (1996). Basis and Dimension: From Grassmann to van der Waerden, G. Schibring (ed.), Hermann Günther Grassmann (1809-1877): *Visionnary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar – Papers from a Sesquicentinnial Conference, Boston Studies in the Philosophy of Science,* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 175-196.

Dorier, J. L. (1997) (ed.). L'enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question. Grenoble: La penséee Sauvage editions.

Dorier, J. L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear Algebra and its Aplications* (275), **1** (4), 141-160.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces, in Dorier (ed.): *On the Teaching of Linear Algebra*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 3-81.

Dorier, J. L. Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In Derek Holton (Ed.), The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study. Kluwer Academic Publisher. Printed in Netherlands. pp. 255-273.

Dubinsky, E (1991a). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 95-126.

Dubinsky, E. (1991b). The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics, in L. P. Steffe (ed.) *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*, New York: Springer-Verlag. pp. 160-220.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*. **8**(3), 25 – 41.

Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course, in D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, y W. Watkins, (Eds). *Resources For Teaching Linear Algebra*, MAA Notes, 42, pp. 85-106.

Dubinsky, E. y McDonald, M (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton et. (Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, 273-280.

Glosario de la Teoría RUMEC/APOS (2001). Este glosario está editado por David J. DeVries, compuesto conjuntamente por RUMEC. Traducción de José María Gavilán Izquierdo, Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla, España, gavilan@us.es. Disponible en http://www.Cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html Consultado en Septiembre de 2006

Gray, J, (1980). The history of the concept of a finite-dimensional vector space. *Historia Mathematica*, 7, 65-70.

Greub, W. (1975). Linear Algebra. Fourth Edition. Springer. Graduate Texts in Mathematics, No. 23. Springer-Verlag, New York-Berlin.

Harel, G. (1987). Variations and linear algebra contents presentations. *For the learning of mathematics*, 7, 29-32.

Harel, G. (1989a). Applying the principle of multiple embodiments in teaching linear algebra: aspects of familiarity and mode of representation. *School Science and Mathematics*, 89, 49-57.

Harel, G. (1989b). Teaching in learning linear algebra; difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, **11**(1-2), 139-148.

Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high-school students basic notions in linear algebra. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, **21**(3), 387-392.

Hoffman K. y Kunze R. (1993). Álgebra Lineal. Primera Edición. Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. México.

Joyner D. y Nakos G. (1999). "Álgebra Lineal con Aplicaciones". Editorial Thomson Internacional.

Maracci, M. (2005). On some difficulties in vector space theory. In European Research in Mathematics Education IV. *Proceedings of the fourth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1778–1787. Sant Feliu de Guixols, Spain.

Maracci, M. (2006). On students' conceptions in vector space theory. In Proceedings of the 30th PME conference, 4, 129 -136. Prague, Czech Republic.

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector spaces theory. *ZDM Mathematics Education*, 40, 265 - 276.

McDonald, M. A., Mathews, D., & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. In E. Dubinsky, J. J. Kaput, y A. H. Schoenfeld (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, 8, 77-102. Providence, R.I.: AMS and Washington D.C.: MAA.

Miller, G. A. (1910). On the solution of a system of linear equations. American Mathematical Monthly, 7, 137-139.

Moore, G. H. (1995). The axiomatization of linear algebra: 1875-1940. *Historia Mathematica*, 22, 262-303.

Pavlopoulou, K. (1993). Un problème décisif pour l´apprentissage de l´algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 5, 67-93.

Pavlopoulou, K. (1994). Propédeutique de l`algèbre linèaire: la coordination des registres de représentation sémiotique, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg 1); prépublication de l`Institut de Recherche Mathématique Avancée. France.

Piaget, J. (1971). *Psychology and epistemology* (A. Rosen, Trans.). New York: Grossman. (Original work published in 1970).

Piaget, J. (1972). *The principles of genetic epistemology* (W. Mays, Trans.). London: Routledge and Kegan Paul. (Original work published in 1970).

Poole, D. (2003). Álgebra Lineal. Una introducción Moderna. Editorial Thomson Internacional.

Piaget J. y García R. (1989). Psychogenesis and the history of science (H. Feider , Trans). New York: Columbia University Press. (Original work published 1983).

Robinet, J. (1986). Esquisse d'une Genèse des Concepts d'Algèbre Linèaire. *Cahier de Didactique des Mathèmatiques,* 29 IREM de Paris VII.

Saldanha, L. A. (1995): T*he Notions of Linear Independence/Dependence: A Conceptual Analysis and Students Difficulties*. Master's Thesis. Concordia University. Montréal, Québec, Canada.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. y Hillel, J. (1999). Evaluation of the teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 7-40.

Sierpinska, A., Nnadozie A. y Oktaç A. (2002). A Study of relationships between theorical thinking and high achievement in linear algebra. Concordia University: Montreal.

Sierpinska A. (2000). On some aspects of student's thinking in linear algebra. Dans J-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra.* Kluwer Academic Publishers, 209-246.

Smith, D. E. (1959). A source book in mathematics. New York: Dover Publications.

Strang, G. (1982). Álgebra Lineal y sus Aplicaciones. México: Fondo Educativo Interamericano.

Trigueros, M. (2000). Students' conceptions of solution curves and equilibrium in systems of differential equations. *Proceedings of the twenty second annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education I,* 93-97. Columbus, OH.

Trigueros, M. (2001). Analysis of students' strategies when solving systems of differential equations in a graphical context. *Proceedings of the twenty third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education I,* 529-537. Columbus, OH.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática,* volumen 17, 5-31.

Trigueros M. y Oktaç, A. (2005). La Thèorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* volume 10, 157-176.

Trigueros, M. y Ursini, S. (2003). Starting college students' difficulties in working with different uses of variable. 2003. *Research in Collegiate Mathematics Education*. CBMS Issues in Mathematics Education (Vol. 5, pp. 1-29). Providence, RI. American Mathematical Society.

Trigueros, M. y Ursini, S.(1997). Understanding of different uses of variable: A study with starting college students. *Proceedings of the XXI PME International Conference*, Finland.

Vargas, X. N. (2007) *El estudio de los espacios vectoriales desde el punto de vista de la teoría APOE*. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN.

Vergnaud, G. (1990). La theorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathematiques* 10, 133-170.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Arnon, I., Tigueros, M. y Dubinsky E. (2002). Learning Linear Algebra with ISETL, Preliminary Version. Disponible en http://pc75666.math.cwu.edu/montgomery/scholar/2002/0731-b-llawi.pdf

Programa Álgebra Lineal I
Mat 241

Anexo 1

I. <u>DATOS GENERALES</u>

HORAS SEMANALES DE TEORIA: 6
CREDITOS: 5
PRE-REQUISITOS : MAT 156

II.<u>UNIDADES TEMÁTICAS</u>

1.- Matrices:
a) Sistemas de ecuaciones lineales.
b) Matrices y operaciones elementales.
c) Matrices invertibles, rango y núcleo de una matriz.

2.- Espacios Vectoriales:
a) Subespacios, bases y dimensión.
b) Suma directa.
c) Espacio vectorial cuociente.

3.- Transformaciones Lineales:
a) Álgebra de las transformaciones lineales.
b) Relación entre Hom (V,W) y $M_{nm}(K)$.
c) Dual y bidual de un espacio vectorial.

4.- Determinantes:
a) Funciones determinantes.
b) Permutación y unicidad de los determinantes.

5.- Polinomios:
a) El álgebra de polinomios en una variable sobre un cuerpo.
b) Ideales del anillo de polinomios.
c) Divisibilidad de polinomios.

III. <u>BIBLIOGRAFÍA</u>

Du Boucheron, Luc Bramaud, *Álgebra Lineal Interactiva,* McGraw Hill, 1995.
Gerber, Harvey, *Álgebra Lineal,* Iberoamérica, 1992.
Grossman, Stanley, *Álgebra Lineal con Aplicaciones,* McGraw-Hill, 1992.
Hoffman K., Kunze R., *Álgebra Lineal,* Prentice Hall, Internacional S.A. 1973.
Lang, Serge, *Introduction to Linear Algebra,* Addison-Wesley, 1970.

Programa Álgebra Lineal II
Mat 251

Anexo 2

I. DATOS GENERALES

HORAS SEMANALES DE TEORIA: 6
CREDITOS: 5
PRE-REQUISITOS : MAT 241

II. UNIDADES TEMÁTICAS

1.- Formas canónicas elementales.
a) Valores y vectores propios. Polinomio característico y minimal.
b) Diagonalización y triangularización, (simultanea)
c) Teorema de descomposición prima.

2.- Formas racional y de Jordan.

3.-Espacios con producto interno.
a) Ortogonalidad, Cauchy-Schwarz, Gram-Schmidt, sistemas ortonormales.
b) Operador adjunto.

4.- Formas bilineales
a) Formas cuadráticas, formas sesquilineales.
b) Operadores simétricos, hermitianos, unitarios.
c) Teoría espectral.
d) Grupos que preservan las formas bilineales.

5.- Álgebra Multilineal.
a) Producto tensorial de espacios vectoriales.
b) Aplicaciones multilineales y producto tensorial.
c) Aplicaciones multilineales alternadas.
d) Álgebra exterior.

III. BIBLIOGRAFÍA

Greub, W., *Multilinear Algebra,* Springer Verlag, 1967.
Hoffman K., Kunze R., *Álgebra Lineal,* Prentice Hall, Internacional S.A. 1973.
Lang, Serge, *Introduction to Linear Algebra,* Addison-Wesley, 1970.

Trascripción Cuestionario

Anexo 3

Pregunta 1

a) Sea $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x,y,z > 0 \right\}$ **un conjunto con las operaciones:**

SUMA: $U \oplus V = (xa, yb, zc)$ **con** $U = (x,y,z)$**,** $V = (a,b,c)$ **en V**

PONDERACION: $\lambda \otimes u = \left(x^{\lambda}, y^{\lambda}, z^{\lambda}\right)$ **con** $u = (x,y,z) \in V$ **y** $\lambda \in \mathbb{R}$

Calcular:

I. $(2,5,1) \oplus (7,9,3) =$

II. $-2 \otimes (3,6,4) =$

III. $-2 \otimes (3,6,4) \oplus (2,5,1) =$

Respuestas

Estudiante 1:

I. $(2,5,1) \oplus (7,9,3) = \quad (14,45,3)$

II. $-2 \otimes (3,6,4) = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{36}, \frac{1}{16}\right)$

III. $-2 \otimes (3,6,4) \oplus (2,5,1) = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{36}, \frac{1}{16}\right) \oplus (2,5,1) = \left(\frac{2}{9}, \frac{5}{36}, \frac{1}{16}\right)$

Estudiante 2:

I. $(2,5,1) \oplus (7,9,3) = \ (2 \cdot 7, 5 \cdot 9, 1 \cdot 3) = (14,45,3)$

II. $-2 \otimes (3,6,4) = \ \left(3^{-2}, 6^{-2}, 4^{-2}\right) = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{36}, \frac{1}{36}\right)$

III. $-2 \otimes (3,6,4) \oplus (2,5,1) = \ -2 \otimes (6,30,4) = \left(\frac{1}{36}, \frac{1}{900}, \frac{1}{16}\right)$

Estudiante 3:

I. $(2,5,1) \oplus (7,9,3) = \ (14,45,3)$

II. $-2 \otimes (3,6,4) = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{36}, \frac{1}{16}\right)$

III. $-2\otimes(3,6,4)\oplus(2,5,1)=\left(\frac{2}{9},\frac{5}{36},\frac{1}{16}\right)$

"Claramente, no es $-2\otimes(3,6,4)\oplus(2,5,1)=-2\oplus(3,6,4)\oplus(2,5,1)$*, pero yo opté por responder de la primera forma por que lo ví como el producto de un escalar por un vector sumado con otro vector."*

Estudiante 4:

I. $(2,5,1)\oplus(7,9,3)=(2\cdot 7;5\cdot 9;1\cdot 3)=(14,45,3)$

II. $-2\otimes(3,6,4)=(3^{-2},6^{-2},4^{-2})$

III. $-2\otimes(3,6,4)\oplus(2,5,1)=-2\otimes(6,30,4)=(6^{-2},30^{-2},4^{-2})$

Estudiante 5:

I. $(2,5,1)\oplus(7,9,3)=(2\cdot 7,5\cdot 9,1\cdot 3)=(14,45,3)$

II. $-2\otimes(3,6,4)=(3^{-2},6^{-2},4^{-2})=\left(\frac{1}{9},\frac{1}{36},\frac{1}{16}\right)$

III. $-2\otimes(3,6,4)\oplus(2,5,1)=$ *"El ejercicio es ambiguo porque no se sabe si es* $(-2\otimes(3,6,4))\oplus(2,5,1)$ *ó* $-2\otimes((3,6,4)\oplus(2,5,1))$

$(-2\otimes(3,6,4))\oplus(2,5,1)=\left(\frac{1}{9},\frac{1}{36},\frac{1}{36}\right)\oplus(2,5,1)=\left(\frac{2}{9},\frac{5}{36},\frac{1}{16}\right)$*, por otro lado*

$-2\otimes((3,6,4)\oplus(2,5,1))=-2\otimes(6,30,4)=\left(\frac{1}{9},\frac{1}{36},\frac{1}{16}\right)$

no da el mismo resultado, por lo tanto la expresión esta mal redactada (no es un objeto matemático bien definido)"

Estudiante 6:

I. $(2,5,1)\oplus(7,9,3)=(14,45,3)$

II. $-2\otimes(3,6,4)=(3^{-2},6^{-2},4^{-2})$

III. $-2\otimes(3,6,4)\oplus(2,5,1)=(3^{-2},6^{-2},4^{-2})\oplus(2,5,1)$

$=(2\cdot 3^{-2},6^{-2}\cdot 5,4^{-2}\cdot 1)=(2\cdot 3^{-2},6^{-2}\cdot 5,4^{-2})$

b) Sea W el subconjunto de todos los puntos de V situados sobre el plano $Z=1$ Escriba dos elementos de W

Estudiante 1:

$(\pi,\pi^2,1)$ $(2,1,1)$

Estudiante 2:

$(2,5,1)$ $(3,2,1)$

Estudiante 3:

$(1,1,2)$ $\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$

Estudiante 4:
$(1,0,1)$ $(1,1,1)$

Estudiante 5:
$(2,3,1)$ $(8,2,1)$

Estudiante 6:
$(1,2,1)$ $(\pi,e,1)$

Pregunta 2

Se han definido sobre $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones:

SUMA

$$+:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$((x,y),(a,b))\to(x,y)+(a,b)=(2y+2b,-x-a)$$

PONDERACION

$$\otimes:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$(\alpha,(x,y))\to\alpha\otimes(x,y)=(\alpha x,-\alpha y)$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ con las operaciones anteriormente definidas un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

Respuestas

Estudiante 1:
“Si es un espacio vectorial.
Sea $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, $\alpha\in\mathbb{R}$ *:*
$(x_1,y_1)+\alpha(x_2,y_2)=(x_1,y_1)+(\alpha x_2,-\alpha y_2)=(2y_1-2\alpha y_2,-x_1-\alpha x_2)\in IR^2$
(Teorema)”

Estudiante 2:
“No es espacio vectorial con las operaciones definidas ya que no existe un elemento neutro para la suma talque
$(x,y)+(*,*^i)=(x,y)\quad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ”

Estudiante 3:

“NO

no cumple el axioma 10, si $\overline{V}$ *es un vector en* $\mathbb{R}^2$*, entonces* $1\cdot\overline{V}=\overline{V}$ *claramente* $1\otimes(x,y)\neq(x,y)$*, a saber,* $1\otimes(x,y)=(x,-y)$*”*

Estudiante 4:
“SI
porque cumple que es Grupo Abeliano y las propiedades de producto escalar.
O vista de otra forma es un espacio donde se alojan algunos elementos que cumplen con ciertas reglas y en este se puede trabajar porque las mismas normas (reglas) lo permiten”

Estudiante 5:
“Habría que ver si cumple con todas las condiciones para ser llamado espacio vectorial
$2\otimes((3,4)+(5,7))=2\otimes(8+14,-3-5)=2\otimes(22,-8)=(44,16)$ *no es*
$[2\otimes(3,4)]+[2\otimes(5,7)]=(6,-8)+(10,-14)=(-16+-28,-6-10)=(-44,-16)$ *lo mismo*

$\therefore$ *No es un espacio vectorial”*

Estudiante 6:
“No porque para que sea $\mathbb{R}^2$ *un espacio vectorial se tiene que cumplir lo siguiente:*
Por ejemplo: la suma tiene que ser conmutativa
vale decir $(x,y)+(a,b)=(a,b)+(x,y)$

Pero $\begin{array}{l}(x,y)+(a,b)=(2y+2b,-x-a)\\(a,b)+(x,y)=(2b+2y,-a-x)\end{array}$

También
Se tendría que cumplir que
$(x,y)+(0,0)=(x,y)$
Pero
$(x,y)+(0,0)=(2y+2\cdot 0,-x-0)=(2y,-x)(\rightarrow\leftarrow)$
$\therefore\left(\mathbb{R}^2,+,\otimes\right)$ *no es un espacio vectorial”*

Pregunta 3

¿ $\mathbb{Z}_5^3$ **es un sub-espacio de** $\mathbb{R}^3$ **?**

Respuestas

Estudiante 1:
"Si es un sub-espacio!!
$\mathbb{Z}_5^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ *y además* $x + \alpha y \in \mathbb{Z}_5^3$
$\forall x, y \in \mathbb{Z}_5^3, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

	0	*1*	*2*	*3*	*4*
0	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
1	*1*	*2*	*3*	*4*	*0*
2	*2*	*3*	*4*	*0*	*1*
3	*3*	*4*	*0*	*1*	*2*
4	*4*	*0*	*1*	*2*	*3*

"

Estudiante 2:
"No es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ *ya que la ponderación falla con respecto a la clausura, es decir, sea* $\alpha = \frac{1}{2} \ \wedge \ (1,1,1) \in \mathbb{Z}_5^3 \ \Rightarrow \frac{1}{2}(1,1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin \mathbb{Z}_5^3$

$\therefore \ \mathbb{Z}_5^3 \not\subset \mathbb{R}^3$ "

Estudiante 3:
"NO.
Primero veámoslo como cuerpo, $\mathbb{Z}_5$ *no es un subcuerpo de* $\mathbb{R}$ *ya que*
$\mathbb{R}$ *es de característica cero y* $\mathbb{Z}_5$ *es de característica 5.*
Veámoslo ahora con espacios vectoriales. En la existencia del único elemento Inverso, por ejemplo $(4,4,4)$ *tiene como inverso a* $(1,1,1)$ *en* $\mathbb{Z}_5^3$
y a $(-4,-4,-4)$ *en* $\mathbb{R}^3$*, no pueden haber dos inversos, de todas maneras, este hecho se desprende de la característica de los cuerpos "*

Estudiante 4:
"$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ *Si (por tincada)*
Porque los elementos de cada espacio se comportan similar $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$
$\in \mathbb{Z}_5^3$ *solo que los coeficientes de* $\mathbb{Z}_5^3$
están restringido a 5 elementos de $\mathbb{R}$
por lo tanto podríamos decir que es sub-espacio de $\mathbb{R}^3$ "

Estudiante 5:
"$\mathbb{Z}_5 = (0,1,2,3,4)$
$(4,4,4) + (1,2,2) = (5,6,6) \notin \mathbb{Z}_5^3$

no se cumple la clausura de la suma
$\therefore$ *no es un subespacio de* $\mathbb{R}^3$

** No me había dado cuenta, pero en* $\mathbb{Z}_5^3$ *están definidas otras operaciones (con respecto a* $\mathbb{R}^3$*)*
por lo tanto no es muy apropiado hablar de subespacio"

Estudiante 6:
" $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathbb{Z}_5^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x,y,z \in \mathbb{Z}_5\}$
Sean $(4,4,4),(1,1,1) \in \mathbb{Z}_5^3$
luego pero $(4,4,4)+(1,1,1)=(5,5,5) \notin \mathbb{Z}_5^3$
$\therefore \mathbb{Z}_5^3 \not\subset \mathbb{R}^3$ *"*

Pregunta 4

Si $K = \mathbb{Z}_3$ ***y*** $V = \{(x,x,x)/ x \in K\}$ ***con la suma y el producto*** $\bmod 3$***. ¿Es*** V ***un espacio vectorial?***

Respuestas

Estudiante 1:
"Sea $(x,x,x),(y,y,y) \in V$ *:* $(x+y, //, //) \in V$
$\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ *Sea* $a \equiv b \mod 3$ $\therefore 3/a-b$ $\therefore a-b=3c, \forall c$
$b = a - 3c$ *"*

Estudiante 2:
"Si es espacio vectorial
porque con la suma es grupo abeliano y además
cumple las propiedades de la ponderación"

Estudiante 3:
"Si
ya que (x,x,x) *depende solamente de* x *y* V *cumple todos los axiomas de espacio vectorial ya que* K *cumple todos los axiomas de cuerpo, miramos* V*, como miramos* K *como cuerpo"*

Estudiante 4:
"No
Porque falla con las propiedades
de ser grupo Abeliano"

Estudiante 5:
"$\mathbb{Z}_3 = \left\{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2} \right\}$
Sea $(x,x,x),(y,y,y) \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{Z}_3$
1) $(x,x,x) + \alpha(y,y,y) = (x+\alpha y, x+\alpha y, x+\alpha y) \in V$
2) Además $(0,0,0) \in V \quad \therefore V \neq \phi$
$\therefore V \leq \mathbb{Z}_3^3$
Si es un subespacio, es un subespacio de $\mathbb{Z}_3^3$

**Las condiciones 1) y 2) son suficientes para*
afirmar que V es un subespacio (Teorema)"

Estudiante 6:
"$V = \{(x,x,x) / x \in K\}$ *y* $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$
Si tomamos $(1,1,1) \in V$ *,* $(2,2,2) \in V$
$(1,1,1) + (2,2,2) = (3,3,3) \in V$ *"*

Pregunta 5

¿Es $V = \{ p = (2,3,-1) + t(1,4,5) / t \in \mathbb{R} \}$ **un espacio vectorial?**

Respuestas

Estudiante 1:
"No es espacio vectorial
Porque V es una recta en $\mathbb{R}^3$
Que no pasa por el origen"

Estudiante 2:
"No es espacio vectorial ya que no
cumple con la propiedad de elemento neutro para la
suma, esto es que $(0,0,0) \notin V$ *"*

Estudiante 3:
"No,
No cumple la clausura, por ejemplo, $t=0$ *y* $t=1$
Si $t=0 \Rightarrow (2,3,-1) \in V$ *, Si* $t=1 \Rightarrow (3,7,4)$*, luego* $(5,10,3) \notin V$*. (la suma de ambos) ya que* $(5,10,3) = (2,3,-1) + t(1,4,5) = (2,3,-1) + (3,7,4)$*, pero no existe* $t \in \mathbb{R}$ *que cumpla tal condición.*

$\therefore V$ *no es un espacio vectorial"*

Estudiante 4:
"No
porque falla con las propiedades de ser
Grupo abeliano"

Estudiante 5:
"no, pues $(0,0,0) \notin V$

$(0,0,0) = (2,3,-1) + t(1,4,5)$

$\therefore 0 = 2 + t, \quad t = -2$

$0 = 3 + 4t, \quad t = \dfrac{-3}{4}$ *No hay coincidencia*

$0 = -1 + t5, \quad t = \dfrac{1}{5}$

** Una de las condiciones mas simples de chequear es si* $\overline{0} \in V$ *, y si eso no se cumple entonces se descarta el hecho de que pueda ser un E.V."*

Estudiante 6:
"En primer lugar: V *es la recta vectorial que pasa por el punto* $(2,3,-1)$ *y tiene como vector director* $(1,4,5)$ *que es un subespacio de* $\mathbb{R}^2$

$\therefore$ *un espacio vectorial "*

Pregunta 6

¿Es posible que exista un espacio vectorial que tenga un solo elemento?

Respuestas

Estudiante 1:

“$V = \left\{ \vec{0} \right\}$ cumple las propiedades o la definición de espacio vectorial”

Estudiante 2:
“Si, sea $V = \{(x, y) / x = y = 0\}$ ”

Estudiante 3:
“No: ya que todo espacio vectorial “esta sobre” un cuerpo de escalares y no existe un cuerpo con un solo elemento. Se podría pensar que el conjunto que contiene solamente el elemento cero es un espacio vectorial pero ni si quiera cumple el axioma 10 ya que 1 debería estar en el cuerpo de escalares, implicaría que el conjunto no contiene solamente al cero, ya que al menos habría un vector que contiene una componente distinta de cero, a saber, 1, ya que 1 esta en el cuerpo de los escalares.”

Estudiante 4:
“Si por ejemplo el conjunto vacío”

Estudiante 5:
“Si, el “espacio nulo” $\left\{ \vec{0} \right\}$ donde $\vec{0}$ es el vector nulo

** Ejemplos:* $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ . & & & \\ 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} \right\} \leq M_{n \times n}(IR)$ *”*

Estudiante 6:
“Sabemos que si V es un Esp. Vect. y $U \leq V$, entonces
$U \leq V$ Si: ***1)*** *el elemento neutro esta en U*
2) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U$, $\alpha \in K$, K *cuerpo* $\alpha \vec{u} + \vec{v} \in U$
Supongamos existe un Espacio V Formado por un solo elemento “a” con las operaciones usuales:
Luego:
$a + a = 2a \notin V$
$3a \notin V$
$\therefore$ *no existe tal espacio.*

Además si ese elemento es distinto del nulo, vale decir si U no contiene el neutro, entonces U no puede ser espacio vectorial, de lo contrario contradice ***1)****”*

Pregunta 7

¿Es posible que exista un espacio vectorial que tenga solo dos elementos? Si existe da un ejemplo y si no existe argumenta tu respuesta.

Respuestas

Estudiante 1:
"$V = \mathbb{Z}_2$"

Estudiante 2:
"Si $\mathbb{Z}_2^2$ como $\mathbb{Z}_2$ espacio vectorial
Siempre va a ser posible encontrar Esp. Vectoriales con una determinada cantidad de elementos ya que existen los cuerpos finitos $\mathbb{Z}$ modulo los cuales pueden ser definidos sobre ellos mismos"

Estudiante 3:
"Si podríamos tomar un espacio vectorial de dimensión 1, el cuerpo de los escalares. Siendo el cuerpo de los escalares $\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2$ que contiene solamente al 0 y al 1"

Estudiante 4:
"Si, (no es muy buena la respuesta pero…) porque si existe espacios vectoriales con infinitos elementos, con finitos elementos y con 1 elemento porque no con 2"

Estudiante 5:
"Si
El conjunto $\{0{,}1\}$ con las operaciones

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Es un cuerpo y en particular un espacio vectorial sobre si mismo"

Estudiante 6:
"Por un lado si existe un espacio V tendría que contener al elemento neutro y a otro vector diferente del nulo
Supongamos Sea a ese tal vector diferente del nulo.
Luego: Si $\alpha \in K$, K cuerpo, entonces
$\alpha a \notin V$
$\therefore$ *V no tiene estructura de espacio"*

Pregunta 8

¿$\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$? (con las operaciones usuales, donde $\mathbb{Q}$ representa al conjunto de los números racionales).

Respuestas

Estudiante 1:
"Si lo es
$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \;\therefore \forall x, y \in \mathbb{R}\,,\; \forall \alpha \in \mathbb{Q}$
Si tomo $x + \alpha y \in \mathbb{R}$ *(*$\mathbb{R}$ *es tomado respecto* $+, \bullet$*)"*

Estudiante 2:
"Si por que $\mathbb{R}$ *con la suma obviamente cumple todo y con la ponderación también ya que* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *"*

Estudiante 3:
"A primera vista podríamos pensar que no ya que por ejemplo $\sqrt{2}$ *no se podría escribir como combinación lineal de elemento de* $\mathbb{Q}$ *(finitos elementos), pero podríamos extendernos a una base infinita y por medio de "sucesiones" aproximarnos a* $\sqrt{2}$*, y así a todo numero real, es decir, para que* $\mathbb{R}$ *sea un* $\mathbb{Q}$*-espacio vectorial debe tener una base infinita"*

Estudiante 4:
"No
$\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$ *"*

Estudiante 5:
"Si, pues: $(\mathbb{R}, +)$ *es un grupo abeliano*
y la multiplicación por escalar cumple todas las condiciones que se necesitan para ser un espacio vectorial

** usualmente se piensa en* $\mathbb{R}$ *como* $\mathbb{R}$ *espacio vectorial, donde* $\dim \mathbb{R} = 1$. *Si se piensa* $\mathbb{R}$ *como* $\mathbb{Q}$ *E.V. se tiene* $\dim \mathbb{R} = \infty$
(no es de dimensión finita) "

Estudiante 6:
"Es claro que $\mathbb{R} \neq \phi$
Ahora, si tomamos dos elementos de $\mathbb{R}$ *,* p, q *y un elemento de* $\mathbb{Q}$ s *, entonces:*
Si tomamos p, q *como vectores y* s *como escalar entonces*

$$s(p+q) \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ $\mathbb{R}$ *es un* $\mathbb{Q}$ *espacio vectorial"*

Pregunta 9

¿ $\mathbb{Q}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

Respuestas

Estudiante 1:
"NO!!
Sea $\alpha = \pi$ *,* $q \in \mathbb{Q}$*:*
$\alpha q = \pi q$ *(Irracional)*
$\therefore$ $\alpha q \notin \mathbb{Q}$ *"*

Estudiante 2:
"No falla la clausura en la ponderación
Sea $\alpha = \sqrt{2}$ *y* $\vec{v} = \frac{1}{2}$

$\alpha \vec{v} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ $\therefore$ $\mathbb{Q}$ *sobre* $\mathbb{R}$ *no es Esp. Vect."*

Estudiante 3:
"NO.
Por ejemplo la combinación lineal $a + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *Si* $a \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ *"*

Estudiante 4:
"Si
Porque $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ *y* $\mathbb{Q}$ *es un espacio vectorial*
porque cumple con todas las propiedades necesarias"

Estudiante 5:

“No, pues $1 \in Q$ *,* $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

pero $1 \cdot \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

no se cumple la clausura de la multiplicación por escalar”

Estudiante 6:

“No, porque si tomamos $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$*, tomamos*

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$*, donde* $\frac{1}{2}$ *es el vector y* $\sqrt{2}$ *el escalar*

entonces

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{R} \text{ ”}$$

Pregunta 10

10. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $U \subset V$. ¿Es U un espacio vectorial?

Respuestas

Estudiante 1:

“No necesariamente

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$

Tomar $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 1 \wedge x + y = -1\} \subseteq V$

Pero $(0,0,0) \notin U$ *”*

Estudiante 2:

“No es un subespacio

Que un conjunto sea subconjunto de un Esp. Vectorial es una condición mas débil que un conjunto sea subespacio de un Esp. Vectorial.

Como contraejemplo tenemos: Sea $V = \mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R} = K$ *Sea* $U = \{(1,2,1)\} \subset \mathbb{R}^2$

$U \not\subset \mathbb{R}$ *”*

Estudiante 3:

“NO (no necesariamente)

Porque no se define U *explícitamente, podríamos tomar* $U = \{(0,0,1),(0,1,0)\}$

un conjunto de dos elementos que no es un subespacio vectorial
$\therefore$ *depende de las propiedades de* U *"*

Estudiante 4:
"Si
Porque U *esta contenido en* V *entonces cumple*
las mismas condiciones que V *pero en con*
elementos reducidos (conjuntos)"

Estudiante 5:
"No necesariamente, para que sea
un subespacio es necesario y suficiente que
se cumpla: $\forall\, \overline{v}, \overline{w} \in U$, $\forall \alpha \in K$: $\overline{v} + \alpha\, \overline{w} \in U$
y esta condición no la cumple cualquier
subconjunto de V

** Ej: el ejercicio 12, la recta* L_3 *"*

Estudiante 6:
"no porque si consideramos $V = M_{n\times n}(K)$ *y*
$W = \{A \in M_{n\times n}(K) / \det(A) \neq 0\}$, *es claro que* $W \subseteq V$
pero
$W \not\subset V$ *ya que si tomamos*
$I \in W$, $-I \in W$, $\det(I) = 1$, $\det(-I) = 1$ *pero* $\det(I - I) = 0$
I *: matriz identidad de orden* n
vale decir $I - I \notin W$ *"*

Pregunta 11

11. ¿$\mathbb{Z}_5$ es un subespacio de $\mathbb{R}^5$?

Respuestas

Estudiante 1:
"Si es Sub-espacio
Sea $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5 \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \;\; \{0\} \subseteq \mathbb{R}^5$
$\mathbb{Z}_5$ *es un Sub-esp. De* $\mathbb{R}$ $\therefore$ $\mathbb{Z}_5$ *es un sub-esp. de* $\mathbb{R}^5$ *"*
poniendo así

Estudiante 2:
"Depende del cuerpo de los escalares
Si $\mathbb{R}^5$ *es un* $\mathbb{Z}_5$ *-esp. vectorial* $\Rightarrow \mathbb{Z}_5$ *si es un subespacio vectorial. Pero si* $\mathbb{R}^5$ *es un* $\mathbb{R}$ *-esp. vectorial* $\Rightarrow \mathbb{Z}_5$ *no es un subespacio vectorial"*

Estudiante 3:
"NO.
$\mathbb{Z}_5$ *es un cuerpo y* $\mathbb{R}^5$ *es un espacio vectorial con elementos de 5 coordenadas"*

Estudiante 4:
"No
porque los elementos de $\mathbb{Z}_5$ *no se comportan de la manera que se comportan los elementos de* $\mathbb{R}^5$ *"*

Estudiante 5:
"No, pues en $\mathbb{Z}_5$ *no están*
Definidas las mismas operaciones que en $\mathbb{R}^5$
**lo mismo que en el ejercicio 3"*

Estudiante 6:
" $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ *no es subespacio de* $\mathbb{R}^5$ *ya que para que* $\mathbb{Z}_5$ *sea subespacio de* $\mathbb{R}^5$*, tendrá que*
pasar que $\mathbb{Z}_5 \subseteq \mathbb{R}^5$
pero $\mathbb{Z}_5 \not\subset \mathbb{R}^5$ *"*

Pregunta 12

¿Puedes encontrar un subespacio propio de $\mathbb{R}^2$ que contenga los puntos $A(2,5)$ y $B(5,5)$ indicados en la figura 1?

Respuestas

Estudiante 1:

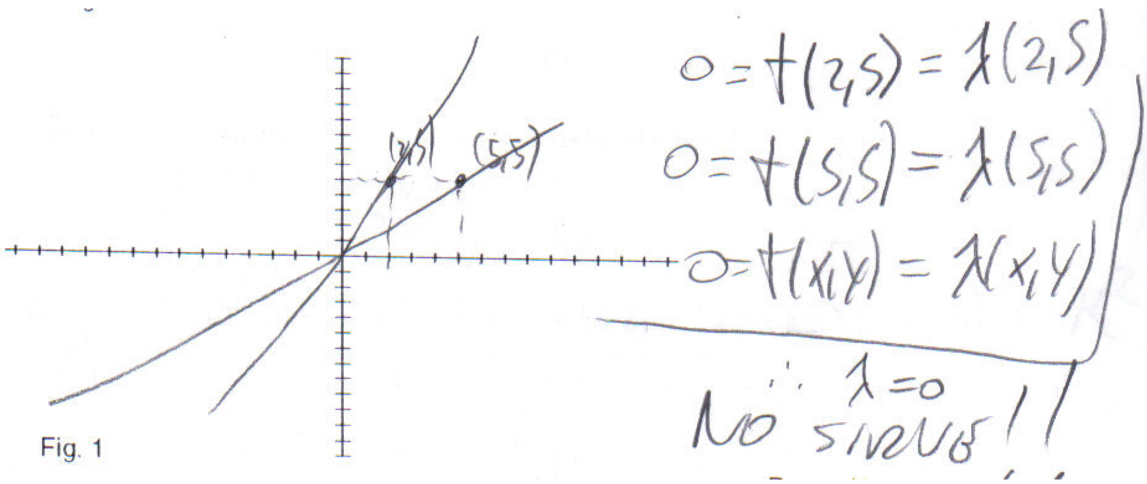


Fig. 1

“Sea $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *No sirve!!*

$(x, y) \to (0, y)$

Sup. Que existe tal espacio propio

$\partial(2,5) = \alpha(2,5)$, *para algún* α

$\partial(5,5) = \alpha(5,5)$ *No sirve!!*

Ahora si:

Los espacios propios de $(2,5), (5,5)$ *son rectas que pasan por el origen.*

es imposible que una recta pase por estos puntos y además por $(0,0)$

$\therefore$ *no existe un sub. propio que Contenga a ambos puntos“*

Estudiante 2:

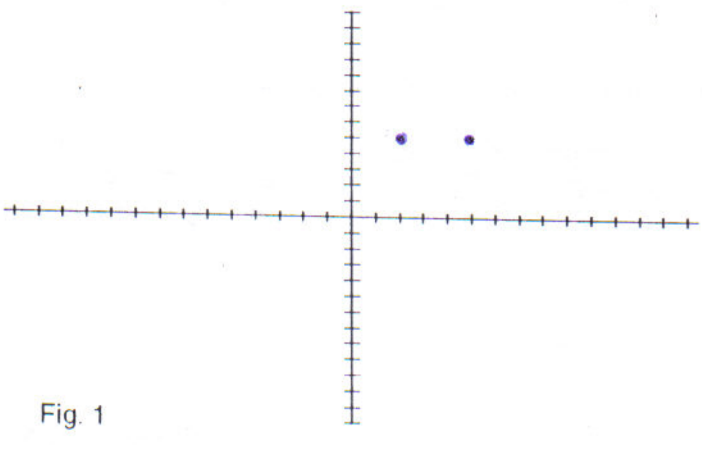


Fig. 1

“Si, el subespacio seria $\mathbb{Z}_5^2$ *como*

un $\mathbb{Z}_5$-esp. vectorial ya que $\{(2,5),(5,5)\} \in \mathbb{Z}_5^2$ *"*

Estudiante 3:

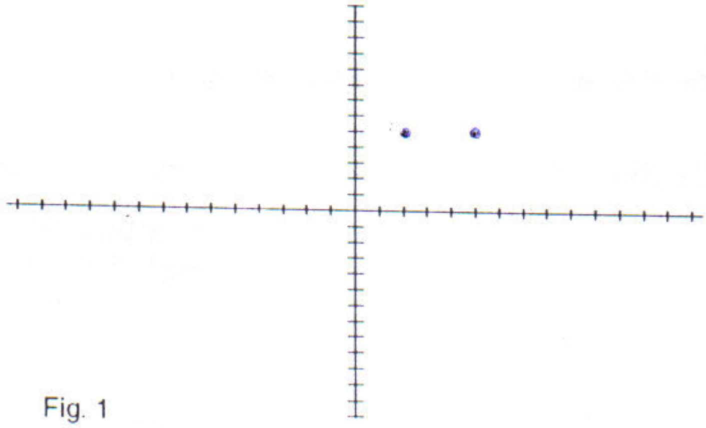


Fig. 1

"NO
Ya que los subespacios propios de $\mathbb{R}^2$ son de dimensión 1 (ó cero si es el subespacio nulo) pero cualquier subespacio propio de $\mathbb{R}^2$ es una recta vectorial generado por un solo elemento y ninguno de los dos puntos dados genera una recta que contenga al otro punto (y obviamente, ninguno de los dos pertenece al subespacio nulo)"

Estudiante 4:

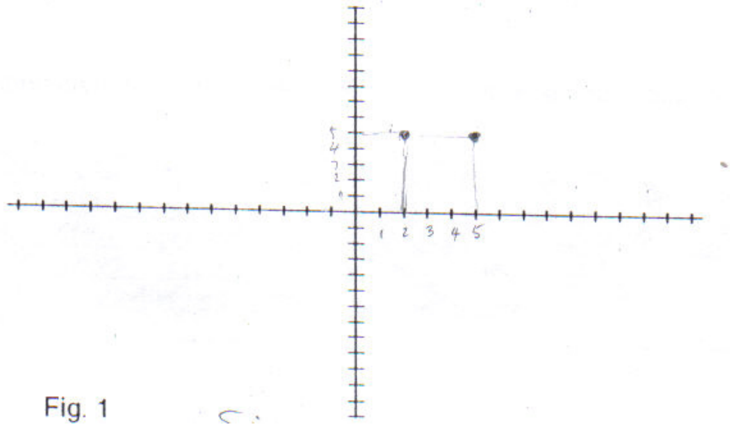


Fig. 1

"Si
las rectas que están generadas por estos puntos que forman planos sobre este plano cartesiano"

Estudiante 5:

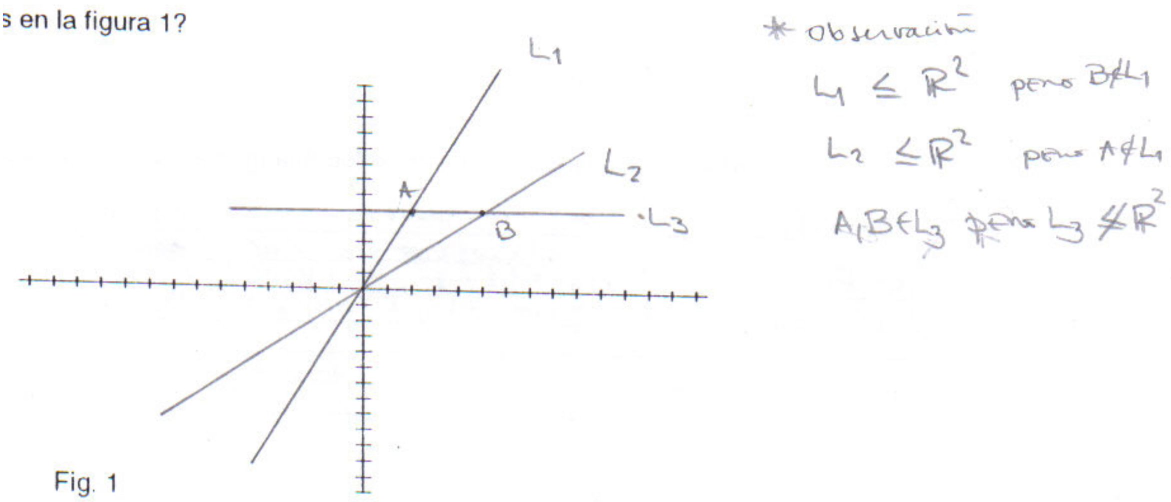


Fig. 1

"No
porque los subespacios propios de $\mathbb{R}^2$ *(no nulos) son rectas que pasan por el origen, y es claro que una recta que pase por el* $(0,0)$ *no puede pasar por ambos puntos* A *y* B *"*

Estudiante 6:

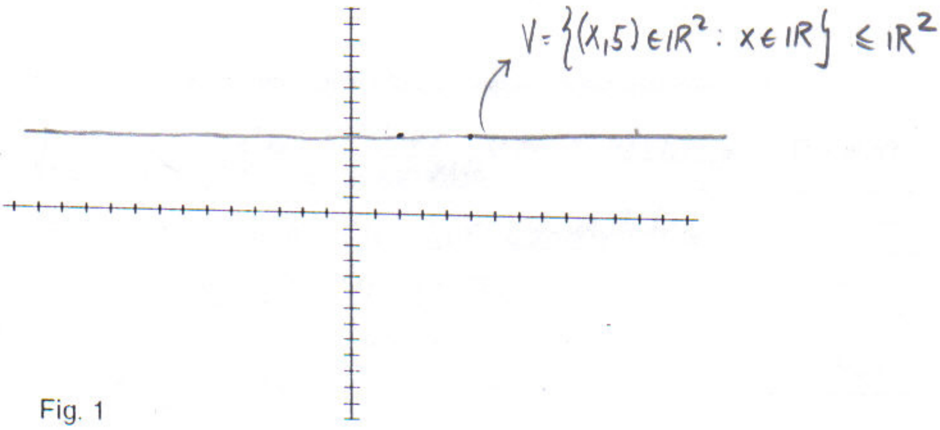


Fig. 1

Trascripción de las 10 Entrevistas

Anexo 4

Video Entrevista – Estudiante 1

Pregunta 1

[1ES1] : Esta es la primera pregunta.
[1E] : Claro.

[2ES1] : Sean definidos sobre IR2 las siguientes operaciones suma, ya estos dos vectores y la suma…ya ponderación.
[2E] : Es la multiplicación de un escalar no cierto, es un escalar por un vector.0
[3ES1] : Sí, es IR2 con las operaciones anteriormente definidas. Un espacio vectorial de IR, ya para que sea espacio vectorial con una operación o con las operaciones definidas tiene que cumplir que sea un grupo, un grupo abeliano.

[3E] : Grupo abeliano ¿Con cuál?
[4ES1] : Con la suma y que sea, y que esto sea un cuerpo, no, no, na' que ver espéreme, que éste tiene que ser grupo abeliano.

[4E] : ¿Y tiene que cumplir propiedades la otra no cierto?
[5ES1] : Y tiene que cumplir las propiedades.

[5E] : Ya anóteme, anótalo eso, ya tiene que ser con la suma, póngalo.
[6ES1] : Ya, con eso debe ser grupo abeliano, a y con la, aquí le puedo a ver puesto así mejor, y con eso, debe cumplir parece que son cuatro propiedades.

[6E] : ¿Se acuerda más o menos para que las pueda anotar?
[7ES1] : Cuatro propiedades, entonces creo que es con ésta en …, es uno, creo que por ejemplo alfa, por ejemplo, este IR cruz IR dos, cosa que este ésta en IR dos, este ésta en IR dos, tengo una consulta lo que pasa que aquí dice que la multiplicación de la ponderación va alfa multiplicada por x e y, x supuestamente esta en R e y en IR dos.

[7E] : No, este (x, y) esta en IR dos por que hay dos componentes.
[8ES1] : A éste es una coma.

[8E] **:** Claro coma.
[9ES1] **:** Ya muy bien.

[9E] **:** Ahí esta cierto, es un escalar por ese vector de IR dos
[10ES1] **:** Claro, entonces debe cumplir que algo, por ejemplo de v + w si no me equivoco tiene que ser alfa v más alfa w esto es para todo alfa supuestamente en este caso en IR y para todo v, w en IR dos en este caso.

[10E] **:** Estamos bien
[11ES1] **:** Ya, luego la segunda propiedad si no me equivoco es que beta mas alfa por v sea igual a beta por v mas alfa por v esto es para beta, alfa en R y para todo v si no me equivoco en IR dos, ya cuatro va tres, el cero multiplicado por algún vector tiene que ser igual al vector nulo para todo v, esa es otra propiedad que debe cumplir.

[11E] **:** ¿Cero?
[12ES1] **:** Ó sea, el escalar cero.

[12E] **:** A ver ¿Cuál es la otra?
[13ES1] **:** La otra, la cuatro.

[13E] **:** Vamos a volver sobre ésta.
[14ES1] **:** Ya, la cuatro es que, a ver por ejemplo que se me va a olvidar, tengo ésa tengo, ésa ya tiene que ser conmutativa y ya conmuta y todo el cuento… que uno sobre el vector que tenga, que tenga elemento absorbente.

[14E] **:** Neutro
[15ES1] **:** No, éste es neutro, para todo v en IR2, o sea, esto quiere decir, a ya me acorde, que… v mas menos v, tiene que ser igual a …

[15E] **:** Pero eso ¿Esta aquí o no?
[16ES1] **:** A sí

[16E] **:** Dijo que era grupo abeliano con la suma, entonces estamos repitiendo eso
[17ES1] **:** Muy bien

[17E] **:** Eso no importa, pero eso es parte de un grupo abeliano, estamos detallando un grupo abeliano, pero aquí estamos haciendo otras propiedades que no son parte de un grupo abeliano.
[18ES1] **:** Ya, aquí.

[18E] **:** ¿Por qué este cero ¿De dónde es este cero?
[19ES1] **:** Este cero viene de un uno más menos uno

[19E] **:** Ya, ¿pero viene de dónde?, es un elemento significativo ¿de qué parte?

[20ES1] **:** de IR

[20E] **:** Lo esta llamando como sólo de IR, no tiene que ver con el cero de grupo eso que pensó usted ahí.

[21ES1] **:** Este cero, este cero de aquí no, este cero de aquí sí.

[21E] **:** Ya, este es el cero de IR y este es el cero de…

[22ES1] **:** De IR dos en este caso, si, si no me equivoco … sea que tenga neutro, pero me falta algo aquí, que tenga inverso, pero este inverso viene de antes, viene del grupo abeliano

[22E] **:** Viene del grupo abeliano

[23ES1] **:** Ahí estamos con las cuatro propiedades, si no me equivoco, de los escalares.

[23E] **:** Entonces usted diría que para estas operaciones se cumple esto, o visualiza que no se cumple y podría decirme algo ¿Cuál es su tendencia al leer eso y al mirar esto?

[24ES1] **:** Al mirar esto, me tinca que si se cumple, me tinca, claro porque quizás podría buscar un contraejemplo en el que no se cumpla, pero para el cero se cumple para el uno, a ya, para éste si éste está bien, la propiedad está bien, para éste no se cumple, entonces por ejemplo me di cuenta que la operación cambia la segunda coordenada, le pone un menos adelante, entonces si yo digo por ejemplo.

[24E] **:** O sea, usted va a decir, se, está tratando de decir, esta propiedad no se cumple, ya anóteme eso.

[25ES1] **:** Entonces por ejemplo yo voy a decir sea alfa igual a 1 y me voy a dar un vector cualquiera (*x, y*) en IR dos, entonces voy a decir uno por x, y es igual a quien, a x según la propiedad de arriba, entonces esto debería ir así en rigor, menos y, y esto es distinto de quien x, y cuando y es distinto de cero.

[25E] **:** Entonces, ¿qué estamos tratando?, que le puede concluir a la pregunta

[26ES1] **:** Que no se cumple que es un espacio vectorial sobre IR, yo digo que no.

[26E] **:** Entonces, escribamos ahí lo que usted me esta diciendo

[27ES1] **:** Entonces con lo anterior, con lo anterior IR dos no es espacio vectorial, por lo anterior…

[27E] **:** Bien perfecto, etapa superada pasamos a la segunda.

Pregunta 2

[28ES1] **:** Sea IR dos el cuerpo de números reales y *f* de IR a IR definida como, la función de IR a IR tal que f, o sea, la f de IR a IR tal que f es una función, se define las siguientes operaciones suma, ya que es producto cruz de dos IR lo manda a la suma y la ponderación que va de las funciones, o sea, va de las funciones a f evaluada en un punto, ya si sabemos que r además es un grupo abeliano ¿Qué axiomas faltan para que r sea un espacio vectorial sobre f de IR a IR?

[28ES1] **:** Una pregunta (…) aquí fundamental ¿Cuál es la diferencia con la pregunta anterior? ¿Quiénes eran los escalares en la pregunta anterior?

[29ES1] **:** Los escalares, eran números reales.

[29E] **:** ¿Quiénes son los escalares en esta pregunta?

[30ES1] **:** Los escalares son las funciones.

[30E] **:** Eso lo ve, los escalares son las funciones, entonces, parecido a lo anterior, me dice que éste es un grupo abeliano.

[31ES1] **:** Claro, entonces aquí debe cumplirse lo anterior, las propiedades anteriores.

[31E] **:** Las propiedades anteriores, las que enumeró anteriormente, ya entonces, lo que le pide este problema es ver si esos axiomas que usted anotó antes, esas propiedades ¿Se cumplen aquí o no? ¿Cuántas eran?

[32ES1] **:** Cuatro, entonces voy a probar una a una si se cumplen… entonces, teníamos al principio, ah ya, una era que alfa por *v* + *w* era igual a alfa *v* mas alfa *w*, entonces ahí tengo la primera, para todo alfa y beta… ah ya, esto no se cumple, entonces esto no se cumple seguro, entonces voy a poner contraejemplo entonces voy a decir por ejemplo *f*… espéreme… no estoy mal enfocado… es que esto es una función, entonces una función, yo puedo decir sea *f*…

[32E] **:** No, pero miremos la definición.

[33ES1] **:** Claro, que toma la función y la evalúa en un punto, pero es que yo si quiero definir una función, tendría que definirla evaluada en un punto, si, por ejemplo, podría decir: sea una función de IR a IR tal que *f(x)* es igual a tanto.

[33E] **:** Bien.

[34ES1] **:** Ya. entonces sea una *f* de IR a IR tal que aquí tomo un x y lo envía a *x* cuadrado, entonces supuestamente aquí alfa son los escalares y tiene que cumplir eso, si, entonces yo voy a tomar, sea no sé, tomemos como estamos tomando un contraejemplo, tomo sea $v = 1$ y $w = 5$, entonces que debería cumplirse que $f(6)=f(1)+f(5)$ sí, pero esto cuánto es, esto es 36 y este de aquí, cuánto es esto es 1 y esto de aquí es 25 y esto me da 26, es distinto, por lo tanto no cumple.

[34E] **:** No, estamos en la primera propiedad.
[35ES1] **:** Ah ya, todas tienen que verificar.

[35E] **:** Claro la pregunta dice ¿se cumplen dichos axiomas?, entonces el primero no se cumple.
[36ES1] **:** Ah ya, el primero no se cumple, ahora el segundo y lo tengo, ah ya ese si se cumple ¿tengo que demostrarlo?

[36E] **:** No, un argumento para decirme ¿por qué si se cumple?
[37ES1] **:** Por algebra de funciones, entonces, ya por algebra de funciones

[37E] **:** Cuando dice algebra se refiere a…
[38ES1] **:** A propiedades de las funciones

[38E] **:** Ya, en particular ¿A cuál de todas las propiedades?
[39ES1] **:** Al algebra de la suma

[39ES1] **:** Eso, exactamente
[40ES1] **:** Algebra de funciones, le vamos a poner suma… en concreto suma de funciones, entonces, yo sé que si tengo dos funciones cualquiera, o sea *f* y *g* de IR a IR entonces yo sé que (*f* + *g*)(*x*) eso es igual a *f*(x) + *g*(*x*), con la condición eso sí, ¿tengo que poner la condición del dominio?

[40ES1] **:** Sí, si usted ve condición.
[41ES1] **:** Sí, tiene que haber condición, de que el dominio de *f* + *g* debe ser igual al dominio de *f* inter el dominio de *g*

[41E] **:** Ya, la tercera
[42ES1] **:** Cero *v* es igual a cero… ehh si…

[42E] **:** ¿Quién es el cero aquí? ¿Quién es el cero?
[43ES1] **:** El cero es la función nula

[43E] **:** El cero es la función nula, entonces que podemos decir aquí
[44ES1] **:** Que por ejemplo aquí en este caso *f*, ¡va! (risas), va a ser quien, la función nula, entonces esta función para todo *v* en IR, se tiene que *e*(*v*)=0… y la cuarta, la función 1, o sea *f* en este caso…

[44E] **:** ¿Qué quiere decir la función 1?
[45ES1] **:** La función constante

[45E] **:** Función constante 1
[46ES1] **:** Entonces aquí no se cumple ¿Por qué?, porque por ejemplo yo tomé la función constante y tomo un vector por ejemplo un vector en IR el 2, entonces yo voy a tener que *f* de 2 ¿Cuánto va a ser? 1, que es distinto de 2, por lo tanto no cumple.
[46E] **:** Entonces ¿Cuántos axiomas se cumplieron?
[47ES1] **:** Se cumplieron 1, 2 ¿Lo pongo aquí?

[47E] **:** Sí
[48ES1] **:** 2 axiomas se cumplieron, por lo tanto 2 axiomas se cumplen

[48E] **:** Etapa superada

Pregunta 3

[49ES1] **:** Es posible que exista un espacio vectorial que tenga sólo 2 elementos, a ver por ejemplo, que tenga el 0.

[49E] **:** Tiene que estar el 0, anotémoslo entonces.
[50ES1] **:** Debe que estar el 0

[50E] **:** ¿Qué cero?
[51ES1] **:** El cero vector

[51E] **:** Porque puede hablar el cero real, no cierto
[52ES1] **:** Sí y tiene que cumplir que sea grupo abeliano conmutativo y …, a pero a ver, porque cuando yo estoy hablando de espacios vectoriales los escalares ahí, o sea, como el caso anterior no necesariamente eran escalares sino como 0, pero así cuando lo vemos bien, los escalares tiene que estar dentro de un cuerpo, y por ejemplo los naturales no, los enteros son un cuerpo.

[52E] **:** No
[53ES1] **:** ¿O son un cuerpo?, es que se me olvidan las propiedades igual, cumple la suma, la resta, todo eso esta a dentro, la multiplicación también.

[53E] **:** ¿Qué tiene que tener la multiplicación?
[54ES1] **:** Tiene que ser conmutativa asociativa.

[54E] **:** ¿Qué más?
[55ES1] **:** Conmutativa, tiene que tener inverso, ahí no cumple, a por ejemplo.

[55E] **:** ¿Y Z tiene muchos elementos?
[56ES1] **:** Pero estaba viendo Z como posible espacio vectorial esos 2 elementos los multiplico por no sé, que tenga solo 2 elementos, o sea que sea finito, a pero quizás se me ocurre, por ejemplo, como usted lo redactó allá, se me ocurre por ejemplo esto que contenga al 0 y al 1 y defino no se operaciones, operaciones de tal forma que sean espacio vectorial, por ejemplo a ver es que yo he visto a mis compañeros de otro curso que hacen unas tablitas así y ahí por ejemplo ponen el 0 el 1 y aquí el 0 1, 00 0, 01 1, 01 1,1 con 1 0.

[56E] : Entonces usted dice que eso ayudado con esa tablita ¿Qué operación hay acá?

[57ES1] : Operación suma, yo digo, o sea, no estoy diciendo que esto sea, o sea yo no digo que es espacio vectorial, éste es quizás es un posible, este B es un posible espacio vectorial.

[57E] : Ya anotémoslo, B es…

[58ES1] : B es un posible espacio vectorial

[58E] : Entonces recopilando así tenemos que B con esta suma ¿Qué estructura tiene?

[59ES1] : Tiene grupo abeliano, cumple grupo abeliano, ya aquí le voy a poner B con + es grupo abeliano, la que me falta es los escalares, pero al parecer no se puede.

[59E] : Porque tengo una suma y para que sean espacios vectoriales ¿Qué operaciones tiene considera usted la suma?

[60ES1] : Sí, ¿Qué más?

[60E] : La suma de… ¿cómo la suma de vectores o escalares?

[61E] : No sé, usted cuente para qué sean espacios vectoriales o estructura tiene que tener operaciones

[61ES1] : Sí

[62E] : ¿Qué operaciones visualiza usted que deben ser esas? Cuénteme.

[62ES1] : La suma entre vectores y la multiplicación por ciertos escalares de esos vectores.

[63E] : ¿Esas son las básicas?

[63ES1] : Las que yo conozco por lo menos sí, las básicas, o sea claro operaciones con los vectores y con escalares y entre los vectores

[64E] : Perfecto ¿Entonces que estaría faltando a esto?

[64ES1] : Me faltaría los escalares, entonces estoy tratando de pensar

[65E] : Me tiene que decir algo ahora de los escalares

[65ES1] : Que tiene que cumplir con esta propiedad porque o sino me salgo del conjunto, entonces por eso yo pensaba en Z, pero Z no cumple que no tiene inverso, también Q puede ser pero no, tampoco es Q porque si multiplico Q por…

[66E] : Ya, anóteme lo que está pensando, que es muy importante, primero me dijo de Z.

[66ES1] : Claro primero pensaba en Z, pensaba en Z, pero Z no es cuerpo, luego pensaba en Q.

[67E] : Entonces esto lo descarta definitivamente, eso me está diciendo

[67ES1] **:** Sí, porque los escalares tiene que ser cuerpo, pertenecer a un cuerpo, ya en Q pero, para existe un elemento en Q tal que el a*B no, no esto no está en B, esto es para todo B en B

[68E] **:** ¿Entonces que esta fallando aquí?
[68ES1] **:** La multiplicación por escalar, porque si es IR, entonces al parecer

[69ES1] **:** Qué pasa si yo tomo un espacio, o sea si tomo un espacio vectorial que los elementos sean el cero y el mismo espacio

[69E] **:** El cero y el mismo espacio ¿Cómo que a ver? Anótelo, esta pensando en que…
[70ES1] **:** Por ejemplo un espacio V que contenga al cero y se contenga así mismo, entonces quizás si esto lo considero como elementos

[70E] **:** Tendría que definir para chequear.
[71ES1] **:** A no pero no puedo, no porque si son elementos no puedo sumar espacio vectorial, no estoy dando jugo, entonces al parecer no hay cuerpo que cumpla en V, o sobre V propiedades, propiedades con escalares.

[71E] **:** ¿De cuáles?
[72ES1] **:** Del cuerpo… pero, es posible que exista un espacio vectorial que tenga sólo dos elementos

[72E] **:** Entonces ¿su respuesta seria?
[73ES1] **:** Pero es que ¿sí hay?... es que quizás pueda haber y yo estoy puro dando jugo y usted no me está diciendo que estoy dando jugo, es posible que exista un espacio vectorial que tenga sólo dos elementos, no, no, no puede, yo no conozco otros cuerpos, yo los cuerpos que conozco son, eh Q, Q es cuerpo… IR, pero Q…

[73E] **:** ¿Qué cuerpos conoce usted?
[74ES1] **:** IR, Q… eeh, el vector cero

[74E] **:** Pero ¿el vector cero no es cuerpo?
[75ES1] **:** O sea, es que éste con el número 0 ¿o no?, no sé, ya

[75E] **:** Entonces usted se inclina…
[76ES1] **:** A que no, al parecer no, no si lo afirmo con certeza… ya, sin ningún problema.

[76E] **:** Vamos otro…

Pregunta 4

[77ES1] **:** *P* en IR*n*, o sea en los polinomios con coeficiente real de grado *n* tal que es 0, con las operaciones usuales, ¿es un espacio vectorial real? ¿Por qué? Justifica, entonces tenemos que ver si se cumplen las propiedades, ¿Qué propiedades? Las propiedades que hemos visto en la pregunta anterior, ya, entonces por ejemplo, pero me tinca que si, a ver espere… si con las operaciones usuales, ¿hace referencia que los escalares son reales?

[77E] **:** Claro, exacto

[78ES1] **:** Y p(x) esté en este espacio en este conjunto que si y sólo si se cumple eso, eso para atrás, entonces, ah sí...

[78E] **:** Vaya contándome su argumentación

[79ES1] **:** Sí, ya si es un R-espacio vectorial ya que trabajamos con un operador lineal

[79E] **:** ¿Cuál es este operador que está mirando ahí?

[80ES1] **:** Operador integral, ya, sobre el conjunto, entonces yo lo voy a decir sabiendo ya las propiedades de ese… las propiedades de la integral, le voy a poner, sé por ejemplo, sea *p*(*x*) y *q*(*x*) polinomios cualquiera y por ejemplo alfa y beta en IR, entonces la integral de 0 a 1… eeh, alfa por *q*(*x*) + beta por *p*(*x*)… ya *p*(*x*) va a ser quien, ah ya, en IRn pero, más que IRn le voy a poner en W, en W subconjunto de IRn

[80E] **:** ¿Por qué cambio de opinión?

[81ES1] **:** Porque yo quiero demostrar que W es espacio vectorial, ya entonces esto yo sé por la linealidad de la integral, yo sé que esto es alfa por 0 1 de q(x) mas beta por 0 1 de p(x) en dx, pero esto de aquí, como esto esta allá, esto es cero y esto es cero, en W, ya y esto yo sé que es cero, entonces en resumen con esto sé que se cumplen todas las propiedades

[81E] **:** ¿Por qué?

[82ES1] **:** Porque yo conozco un teoremita por ahí, que dice que, o sea yo sé que hay dos espacios, o sea dos subespacios que son los triviales, el mismo y el cero, entonces dice que un subespacio, un subconjunto es subespacio vectorial sí y sólo sí, cumple esto, es decir que el vector alfa q(x) en este caso, más beta p(x), se resume en que, en que, o sea, que este vector de aquí este dentro del conjunto, para cualquier q(x), p(x) y cualquier escalar en…

[82E] **:** Ya, anóteme eso que usted conoce

[83ES1] **:** Entonces, le anuncio el teorema

[83E] **:** Con lo que usted esta argumentando

[84ES1] **:** Esto resume que W es subespacio vectorial de IRn y esto por teorema, ¿Qué teorema?, por ejemplo tengo W subespacio de S, S es un K-espacio vectorial, entonces W es subespacio vectorial de S sí y sólo sí, 1 W es distinto de vacío, 2… espéreme, entonces… sí y sólo sí alfa por v más, o en realidad esto es w no más y esa…, pertenece a quien a W, para todo v, w en W y para todo alfa en K.

[84E] **:** Esta W, ¿es un w chico o es el mismo de acá?

[85ES1] **:** No, éste es un w chico, es que yo le pongo…, ya pero entonces aquí yo también no anoté quizás, pero se veía que el cero si está en este conjunto, entonces yo digo que este conjunto es distinto del vacío

[85E] **:** Ya póngale ahí, ¿Por qué es distinto de vacío?

[86ES1] **:** Porque el cero está en el conjunto, o sea yo sé que la integral de 0 a 1 de 0 es 0

[86E] **:** Perfecto, cumple la condición, ya estamos, etapa superada.

Pregunta 5

[87ES1] **:** Esta es la quinta. Averigua si la siguiente afirmación es correcta en ambos casos. Justifica tu respuesta, sean v, w y z sobre un cuerpo k y supongamos que v +w =z, a ver

[87E] **:** Eso lo conoce usted no es cierto, ¿dónde quedaron?

[88ES1] **:** Esto lo conozco yo

[88E] **:** O no lo conoces

[89ES1] **:** Expresiones como esta con suma, suma de espacios vectoriales, sí si lo conozco

[89E] **:** Sí, pero no, ¿no le suena en otra estructura esta propiedad?

[90ES1] **:** ¿Para los reales?

[90E] **:** Para los reales, la conoce con números, y se cumplen para números reales

[91ES1] **:** Sí

[91E] **:** Entonces ¿ahora lo estamos preguntando para quién?

[92ES1] **:** Para espacios vectoriales, pero al parecer, al parecer si se cumplen

[92E] **:** ¿Cuál sería el argumento que usted me podría dar? ¿Qué piensa usted de por qué se está cumpliendo?
[93ES1] **:** De porque se está cumpliendo

[93E] : Si usted piensa que sí
[94ES1] : Sí

[94E] **:** O sea usted ve que sí, si usted ve que no ¿Por qué no?
[95ES1] **:** Yo veo que sí, al parecer por que si tengo 2, aquí tengo 2 espacios vectoriales que son iguales, entonces tengo que, de esos 2 espacios vectoriales como que el generador de esos espacios tengo al mismo vector o sea tengo al mismo espacio

[95E] **:** ¿Cómo lo podría escribir?
[96ES1] **:** A pero aquí me dicen que no tienen dimensión finita

[96E] **:** Le dicen que no tiene dimensión finita necesariamente
[97ES1] **:** A pero eso igual lo podría haber ocupado, pero no lo puedo ocupar

[97E] **:** Pero no importa son espacios vectoriales cualquiera, pueden ser de dimensión finita o no de dimensión finita le deja libre
[98ES1] **:** Pero si yo quisiera afirmarlo para cualquier espacio vectorial tendría que dividirlo en 2

[98E] **:** ¿Cuáles son esos 2?
[99ES1] **:** Que los de finita y los de infinita

[99E] **:** Entonces muy bien anotemos eso, dijiste tú 2 categorías para responder la pregunta con dimensión finita y con dimensión infinita
[100ES1] **:** Ya, 2 categorías *1 v, w, y z* a lo anoté mal, que la dimensión de *v, w y z* sea finita, ésta es una categoría, entonces en esta categoría yo veo que al parecer sí se cumple ¿Por qué? Porque quizás, quizás ahora lo estoy viviendo, porque quizás no lo veo así tan bien, pero…

[100E] **:** Pero es como usted lo está abordando de un inicio
[101ES1] **:** Claro, entonces o sea uno está contenido en el otro. Entonces por ejemplo voy a decir sea v por ejemplo *v+w* entonces que quiere decir esto, a ya que voy a decir v de v igual a *b1* hasta *be* y la base de *w, w1* hasta *w j*

[101E] **:** Cuándo dice *v* de ¿Qué es esto?
[102ES1] **:** La base de *v,* y ésta es la base de *w,* y no sé entonces y de *z,* igual a no ser 1 hasta *i,* entonces ahí hay que llegar a *j*, algo así…

[102E] **:** Hay que llegar a que *i* igual a *j* ¿Por qué *i* igual a *j*?
[103ES1] **:** Porque estos son bases, esto es una base de *w* y ésta es una base de *z*

[103E] **:** A entonces está pensando acá.
[104ES1] **:** Claro, ya pero además el generado tiene que ser, ya puedo inventar algo un *v+w*

[104E] **:** Una consulta, ¿El generador puede ser el mismo o debe generar el mismo o a usted eso le da igual?
[105ES1] **:** Que el generado debe ser el mismo o debe generar lo mismo, lo mismo

[105E] **:** Continuemos entonces.
[106ES1] **:** Entonces ya aquí, yo sé que van a existir, porque e significa que e este en *w*, que existe no se un *v1* y un *v2* o sea que existe un *b1* en *v* y un *b2* en *w* tal que *v* lo puedo escribir *b1+b2*

[106E] **:** Hiciste la definición de suma.
[107ES1] **:** Sí, entonces yo sé que, quiero decir esto que esto lo voy a escribir como no sé, espéreme este *b2* está en *b1*, está en *v,* allá, espéreme, a que tengo por hipótesis esto, si entonces, entonces como esto está aquí esto también va estar en v+z entonces también van a existir, un c1 en v y un c2, a no tiene que ser *l* mismo *b1*, a no necesariamente, …, por que este cero si esta en Z y yo tengo por hipótesis que *v+w* = *v+z* y un vector cualquiera en *v+w*, entonces existe un vector en *v* y en *w* tal que tal que el *v* lo puedo escribir como la suma, pero esto igual a eso entonces existe un *c* un *c1* en *v*, …, tal que el *v* lo puede escribir como *c1+z,* ya entonces supongamos que asumo que son distintos entonces *b* sería igual a *c1+ c2*, si, ya

[107E] **:** ¿Qué rol están jugando las bases ahí?
[108ES1] **:** hasta ahora ninguno

[108E] **:** Hasta ahora ninguno…
[109ES1] **:** Espere, es que estoy viendo en que ocuparla… ya, entonces yo se que este esta en Z y este esta en *v2*, por lo tanto puedo decir *v2* va a ser igual a *v* menos *b1* y que *c2* va a ser igual a *v* menos *c1*, si, con *c1* en *V*… a ver… *c2*, porque debería llegar que… a no estoy confundido… ya *v2* donde esta, en W, entonces… las bases, entonces *v2* va a ser igual a la sumatoria de quien, de *v* = *1* hasta *n*, de alfa *i* menos la sumatoria, quien es *b1*, veámoslo en *v*, espéreme, ah este es *b1,* se supone, supongamos que este es *b1* ya y el *v* esta en *v* mas *w,* a ver espéreme, *c1* y *b1* ¿donde están?, están en *v,* si, entonces aquí si yo multiplico por menos y sumo tendría que *c1* menos *b1* es igual a *b2* menos *c2*, pero *b2* esta en *W* y *c2* en *Z* y *b1* y *c1* están donde en *V*, es decir el *b2* menos *c2* lo podría escribir como una combinación lineal de esta base

[109E] **:** ¿Solo de esa base?

[110ES1] **:** *B2* menos *c2* sí, porque el *c1* y el *b1* están en *V* entonces los podría sumar…

[110E] **:** Y éstos, está pensando en eliminarlos.
[111ES1] **:** Claro, es como multiplicar por menos y sumar hacia arriba entonces aquí me queda…
[111E] **:** Cuénteme que es lo que le quedaría, así haciendo esa cuenta que usted esta pensando en su mente.
[112ES1] **:** Ah ya, entonces aquí voy a multiplicar por menos 1, me estoy desordenando bastante, no, eso no se hace, entonces *b2 - c2* seria igual, multiplico por menos, menos, mas, *c1* menos *v*, ya ahora esto de aquí esta en Z y este de aquí en W, este de aquí esta… a ver estoy dando jugo no más, o sea lo estoy haciendo mal, o sea no sé si mal … porque yo al principio partí diciendo que tengo uno aquí en V+W y nada que ver, porque para eso … y yo quiero llegar a que *W = Z,* entonces debería darme un vector en … y ahí empezar a trabajar y llegar a que ese vector también está en Z y después devolverme, quizás por eso este camino en el fondo esta mal, ¿puedo usar otra hoja?

[112E] **:** Sí, anotemos 5 y si quiere puede empezar usted de nuevo.
[113ES1] **:** Entonces voy a decir sea v en W, con la hipótesis que…

[113E] **:** cuando dice hipótesis, esta pensando ¿en qué parte?
[114ES1] **:** en ésta de aquí… ya, V+W, porque explico toda la… ¿o no?

[114E] **:** … usted empezó con una muy buena idea para su problema que tenía dos categorías, de dimensión finita y estaba tratando de elaborar un argumento que se cumplía o no se cumplía, no me quedo claro el argumento que estaba tratando de elaborar, ¿para qué sí o para qué no?
[115ES1] **:** Para que sí, de que si se cumplía.

[115E] **:** Entonces lo que está tratando ahora es de recuperar el argumento que se le puso confuso.
[116ES1] **:** Sí, en realidad bastante

[116E] **:** Claro porque usted me dijo que tenía unas bases trató de elaborar elementos.
[117ES1] **:** Claro, pero nunca ocupe las bases, entonces…

[117E] **:** Entonces podría recuperar algún argumento.
[118ES1] **:** El argumento de acá…

[118E] **:** Es la hora de recuperar o crear uno nuevo, acá no sea dado cuenta como lo ha trabajado, un argumento nuevo o pensar en la otra categoría, porque tenía 2 categorías uno de dimensión finita, de dimensión infinita.
[119ES1] **:** Si tenía dos categorías, pero quizás igual se puede hacer pero quizás para cualquiera y dé una, entonces, yo me di un vector

ahí, que saco con darme un vector ahí, porque este vector va a existir, porque si *v* esta en W, entonces va a existir un vector en V+W y va a existir un vector en V tal que la suma de ellos sea igual a este vector.

[119E] **:** Ya anotemos, a lo mejor ahí lo ayuda para…
[120ES1] **:** … ya entonces existe aquí, un *a1* donde en V y existe un *a2* en *V+W*, tal que… *a2* sea igual a *a1* mas *v*, ya y tengo que llegar a que *v* esta en Z, entonces yo sé por hipótesis que esto es igual a V+Z, es decir también va a existir un *a3* en Z tal que, esto es *a2*, tal que, espéreme… tal que *a2* sea igual a quien, a *a1*, no, *a3*

[120E] **:** Debido a esto.
[121ES1] **:** Claro, debido a eso,

[121E] **:** Así lo fundamenta, debido a eso.
[122ES1] **:** Claro, por esto, entonces aquí va a existir… o sea, voy a multiplicar por menos uno aquí y voy a sumar hacia abajo, entonces me va a cancelar ese y me va a cancelar ese y me queda que el vector nulo es igual a *v – a3*, por lo tanto, *v = a3*, V esta en Z.

[122E] **:** ¿A dónde quería llegar usted? A que *v* estaba
[123ES1] **:** Ahí.

[123E] **:** Entonces, ¿qué puede decir de la información?
[124ES1] **:** Que es verdadera, o sea hasta aquí no puedo decir que es verdadera, o sea que al parecer es lo mismo de atrás para adelante que de adelante para atrás, o sea le puedo decir los pasos son reversibles, está bien lo que estoy diciendo, o sea no, o sea aquí demostramos que W esta contenido en Z, entonces para Z contenido en W los pasos son análogos, sí.

[124E] **:** Entonces, eso era válido para la primera categoría.
[125ES1] **:** No, para la… categoría.

[125E] **:** Entonces usted puede concluir acá.
[126ES1] **:** Sí, que no es necesario dividir o por concluir que Z=W.

[127E] **:** Puede concluir que Z=W ¿para qué?
[128ES1] **:** Pero es que ¿a eso va la pregunta?, le pregunto a usted ahora…

[129E] **:** No, porque aquí dice la pregunta ¿W=Z?
[130ES1] **:** Sí, entonces…

[130E] **:** Es que usted me dividió en dos categorías y llegó a que esto se cumplía para la primera categoría, entonces me tiene que decir algo para la otra categoría.

[131ES1] **:** Luego W=Z, sin embargo, no es necesario dividir en categorías, ya, el problema es, o sea no es problema, me quedó dando vuelta algo… ya aquí dice … existe un *v* y un *a2* en *V+W* que es igual a *V+Z,* tal que esto se cumple, mi pregunta va, o sea no se si es una pregunta, pero mi inquietud, que no me la aclaró todavía muy bien es que si necesariamente este vector ¿va a ser igual a ese?

[131E] **:** ¿Por qué duda?

[132ES1] **:** Porque pueden ser diferentes.

[132E] **:** Y ¿Por qué pueden ser diferentes? ¿Qué le hace pensar que pueden ser diferentes?

[133ES1] **:** Que… en realidad eso es mi inquietud, porque como que no estoy muy se seguro de si sea así, porque si fueran suma directa, ya ahí sí, porque van a ser únicos, ¿pero si es suma?, si es suma el *a2* esté en la suma, entonces no necesariamente estos vectores van a ser únicos.

[133E] **:** Y eso ¿le hecha a perder su argumento?

[134ES1] **:** De cierta forma sí, pero quizás yo me estoy dando vueltas en algo que no hay que darse vueltas.

[134E] **:** ¿Usted cree que lo que ha hecho, es una buena aproximación a la respuesta?

[135ES1] **:** ¿Una buena aproximación?, no sé si buena, pero una aproximación.

[135E] **:** A ver, y una consulta… ¿usted podría haber respondido o se le ocurre alguna forma sin tener que recurrir a elementos?, por aquí, usted recurrió a elementos del espacio, usted dijo V en W, ¿a usted se le ocurre en su mente algo sin tener que recurrir a elementos, sino que pensar en el espacio completo, en el puro espacio, para elaborar el argumento?

[136ES1] **:** Sí, al principio había pensado algo como que aquí puedo sacar que…

[136E] **:** O tiene que ir a los elementos, porque esa es una cosa importante para nosotros, entonces me podrías decir si se le ocurre o su mente piensa en algo…

[137ES1] **:** Sí, al principio había pensado, aparte de estos elementos, que quizás puedo sacar algo con los conjuntos, claro, decir que V+W intersectado con el complemento de V+Z tiene que ser igual al vector nulo y quizás empezar a trabajar con teoría de grupos

[137E] **:** Ya, entonces anotemos eso, porque eso también es una cosa importante, porque sería otro argumento.

[138ES1] **:** otra forma sería, por ejemplo, es que no sé a lo que voy a llegar, otra forma podría ser trabajando conjuntísticamente.

[138E] **:** Que parte en particular trabajaría conjuntísticamente, aunque no visualice bien, tenga nublado eso.
[139ES1] **:** O sea V+W=V+Z hay que trabajarlo.

[139E] **:** ¿Qué se le viene a la mente hacer ahí?
[140ES1] **:** Por ejemplo decir que esto, de esto puedo concluir que V+W intersectado con el complemento de V+Z tiene que ser igual al vector, o sea al vacío… pero ahí tampoco conozco otra forma de emplear la suma, porque la suma no necesariamente es la unión, no siempre es la unión.

[140E] **:** Entonces ahí las propiedades conjuntísticas habría que…
[141ES1] **:** Expandirla, o sea hacer como una expansión con la suma y todo ese asunto que no conozco, por que no sé si la suma, por ejemplo, de… la suma del complemento es el complemento de la suma.

[141E] **:** Claro, son detalles que habría que afirmar, si entramos por ese camino.
[142ES1] **:** Y quizás no se tampoco si aquí se puede distribuir

[142E] **:** Pero son caminos.
[143ES1] **:** Aunque si se podría sería… aunque si yo sabría de algebra así conjuntista con la suma y los complementos

[143E] **:** ¿Cree que sería un camino viable?
[144ES1] **:** Sí, porque no sé, aquí puedo suponer que el complemento pase para adentro entonces tengo V complemento mas Z complemento, entonces paso para allá y distribuyo entonces va a quedar V complemento inter V va a ser vacío, luego V complemento esto va a ser esto no más y luego como la intersección de eso sumado con V con Z complemento, V inter Z complemento y W inter V complemento, haber espere… claro ahí quizás podría armar algebra pero no conozco propiedades así…

[145ES1] **:** Pero estaba pensando ahora que quizás puedo encontrar un contra ejemplo para esto para que no se cumpla, por que estaba pensando que esto se cumple pero puedo afirmar que esto se cumple cuando es suma directa, cunado es se cumple así pero de una.

[144E] **:** Vamos a dejar anotado aquí, cuando es suma directa
[146ES1] **:** Si V es suma directa W es igual a V suma directa Z, entonces W=Z y se afirma esto con certeza, si porque aquí no voy a tener “existe” si no “existe único”.

[145E] **:** Su argumento tenemos que dejarlo aquí… 5.1 vamos a dejar aquí para que se vea la pregunta, entonces usted diría que sí es suma directa no habría problema.

[147ES1] **:** Claro. Porque se cumple inmediatamente, porque existe único, entonces porque la existencia de los vectores es única, es decir que tengo v en W, entonces que voy a tener, que existe un único *a1* en V y existe un único… es que estaba pensando que quizás no necesariamente el elemento de la suma va a ser único, pero si es único, entonces existe un *a2* perteneciente a *V+W=V+Z*, tal que el *a2* va a ser igual a *a1+v*, es decir existe un único *a3* en Z, tal que el *a2* sea igual a *a1+a3* entonces ahí suma directa y con esto se concluye que *v=a3* que esta en Z, por lo tanto, W esta contenido en Z, después los pasos análogos, por ahí certeramente lo podríamos decir.

[146E] **:** Entonces ahora que usted me dice certeramente si hay suma directa si, ¿Cuál seria su respuesta para esta pregunta?

[148ES1] **:** Claro que quizás podría encontrar un contraejemplo de esos espacios que no necesariamente sea igual, por ejemplo …, o sea por ejemplo, tengo IR3, ya, la afirmación no es verdadera, entonces voy a decir W+V=, o sea, esto por hipótesis tiene que ser igual a V+Z, entonces V= no sé, el generado por el (1, 0, 0).

[147E] **:** Lo que sea más fácil para usted.

[149ES1] **:** Por el (0, 0, 1) e inclusive yo diría por el… (0, 1, 0), lo vamos a hacer mas fácil todavía, entonces W = no sé, (1, 2, 1) y Z = al vector nulo, incluso si quiere Z el generado por el (1, 5, 4), (0, 8, 9), ya sabemos esto por hipótesis, pero Z es distinto de W

[148E] **:** ¿Y esto se cumple?

[150ES1] **:** Y eso se cumple, sí, porque aquí ya tengo al generado, por que eso ya sé que es IR3.

[149E] **:** Ah, le sumó el 0

[151ES1] **:** El W puede ser (1, 2, 1), el Z puede ser el 0, a no, a ver el 0 si es espacio vectorial, sí, si puede ser.

[150E] **:** Entonces, ¿cuál puede ser su respuesta final?

[152ES1] **:** Que esto que la afirmación no es verdadera, sólo para suma directa.

[151E] **:** Etapa superada, pasemos a la otra.

Pregunta 6

[153ES1] **:** ¿Es Q un espacio vectorial sobre IR?, no, o sea yo sé que las propiedades de espacio vectorial son las que habíamos mencionado anteriormente, con que una no se cumpla estamos listos entonces por ejemplo, eso quiere decir que los escalares que yo multiplico tiene que ser reales, entonces si alfa igual a *pi*, entonces para todo *q* en Q, yo sé que *pi* por *q* va a estar donde, en Q complemento, por lo tanto no, no es espacio vectorial sobre IR.

[152E] **:** El otro.
[154ES1] **:** ¿Es IR un espacio vectorial sobre Q? sí, si, claro es, es grupo abeliano

[153E] **:** ¿Quién?, ¿Por qué hay dos conjuntos?
[155ES1] **:** IR, con la suma, además, ya ahí tengo que tomar uno con suma, además se que Q es cuerpo.

[154E] **:** Para que sea cuerpo ¿Cuántas operaciones tiene que tener el conjunto?
[156ES1] **:** Dos, suma y producto… entonces Q es cuerpo, se que va a cumplir las propiedades, entonces yo sé por ejemplo que alfa + beta, es que no se si sea necesario anotarlas, yo se que éstos son racionales.

Pregunta 7

[155E] **:** Pero, ¿ese es una axioma que debe cumplirse la conmutatividad del producto?
[157ES1] **:** Donde lo escribimos antes, no, no estaba.

[156E] **:** O sea ¿usted esta agregando otro axioma?
[158ES1] **:** claro.

[157E] **:** ¿debe cumplir ese axioma para ser espacio vectorial o solo es abeliano el grupo con la suma?
[159ES1] **:** Ya, ese ya tiene que ser grupo abeliano, esto ¿tiene que ser así? Parece que no por que esto esta en el vector, no.

[158E] **:** Por qué me esta cambiando la axiomática de los espacios vectoriales.

[160ES1] **:** Ya, entonces borremos eso y pongámoslo así… entonces aquí debería ser igual esto, yo se que este es el producto, entonces en realidad esto es alfa v producto…

[159E] **:** Y ¿Qué es lo que es esto según su definición?
[161ES1] **:** Según la definición, seria, a no estoy… olvídese es que me confundí, el escalar elevado a los vectores, por eso que yo estoy aquí, me enrede con la conmutatividad, escalar elevado a los vectores, no el que esta a la derecha y a la izquierda, entonces esto seria, alfa elevado a v por w.

[160E] **:** Ya… y ¿Qué es lo que es eso?
[162ES1] **:** Parece que no me va a cumplir, entonces esto seria v+w, a no, cumple y todo esto elevado a alfa… entonces si cumple, si, el otro, que tiene que cumplir, el cero, entonces que debe cumplir, que el cero por v, ¿Qué v? el escalar elevado a… daría cero elevado a v y quien es esto, cero, o si cumple, ya.

[161E] **:** ¿Estaría faltando?
[163ES1] **:** El uno, ah ese no cumple… uno por v, ah no me va a cumplir, 1 por v seria 1 elevado a v, y esto es 1… y esto no necesariamente es…
[162E] **:** ¿Qué paso?
[164ES1] **:** no me cumplió ¿o no?...

[163E] **:** ¿Cuándo cumple?
[165ES1] **:** Cuando el v es 1.

[164E] **:** Cuando el v es 1 y ¿Qué otro caso?
[166ES1] **:** cuando el v no puede ser 0, por que el v supuestamente esta aquí, en ningún otro caso.

[165E] **:** En su multiplicación usted dijo alfa elevado a v, medite eso un poco.
[167ES1] **:** … alfa, que pasa si digo beta elevado a v.

[166E] **:** La otra posibilidad podría haber sido, anótela aquí
[168ES1] **:** Le voy a poner tongo… de IR2 a IR me queda (alfa, v) y lo envíe a… a v elevado a alfa, a ver veamos si cumple, tendría aquí alfa, ya yo se que esta la va a cumplir, sip por el 1, esta la cumple, esta… esta no la cumple.

[167E] **:** ¿Cuánto daría eso?
[169ES1] **:** Esto da 1…

[168E] **:** Y… ¿1 no es el vector nulo?
[170ES1] **:** Ah sí, tiene razón.

[169E] **:** Porque este es el vector nulo, o es un cero real

[171ES1] **:** no, es el vector nulo o sea, si es un cero real ¿esto de aquí?... a no, es el vector nulo, ¿es el vector nulo de quién? De este espacio y dijimos que el vector nulo de este espacio, a no, no, no, lo hemos visto.

[170E] **:** Si lo vimos hace rato pero usted se olvidó ¿Cuál es el vector nulo de ese espacio?

[172ES1] **:** El uno.

[171E] **:** El uno, así que anótelo para que no se le olvide cero vector ¿Qué es?

[173ES1] **:** El cero vector es el uno.

[172E] **:** Ahora recapacite toda la respuesta.

[174ES1] **:** Ya, a ver, aquí me debería dar el vector nulo y claro que me da el vector nulo, ¿si?, con esta operación… ya aquí me daría v elevado, pero aquí este v, entonces este v el neutro y ¿Cuál es el neutro de aquí?

[173E] **:** El neutro es el vector nulo.

[175ES1] **:** ¿el mismo vector?, o sea que el 0 igual al 1 ¿Cómo? No entiendo.

[174E] **:** No, porque ese 0, ¿Cuál cero es?

[176ES1] **:** Este cero en realidad es el vector nulo.

[175E] **:** Entonces el vector nulo es el uno.

[177ES1] **:** El vector nulo es el uno, si ya, entonces yo acabo de verificar que hay con este operación nueva este se cumple, pero ahora mi pregunta es: este entonces ¿quien es? Este es el neutro.

[176E] **:** Ese, ese uno ¿Qué uno es ese?, ese uno esta en el cuerpo o esta en el espacio.

[178ES1] **:** Esta en el cuerpo, entonces es el 1 y aquí si cumple también porque v elevado a uno es v, entonces si cumple, entonces bajo esa operación si cumple.

[177E] **:** Entonces cual es la operación indicada dice usted.

[179ES1] **:** espere, ¿Qué quizás con esto no cumpla?... entonces voy a definir una operación, seré un poco mas ordenado, de IR2 hasta IR, entonces de tal forma que tomo un alfa y un v y aquí lo envío a beta elevado a…, ya entonces yo ya se que el vector neutro, o sea que en realidad el cero de IR con la operación esta me va a dar v elevado a cero que es uno, pero uno es el elemento neutro del espacio… entonces, después, el uno con esta operación tongo de v, ¿Qué es eso?, seria el v elevado a 1, el uno de quien, el uno de IR, o sea esto es v, cumple, se cumple que alfa mas beta es igual, ya quien es alfa + v por esto, esto es, como esta definido, alfa por v… y esto quien es, esto es v… aquí no me cumple, aquí no me cumple, ¿Por qué no me cumple?, porque alfa tongo de v + beta tongo de v, ¿Quién es este?, este es v elevado a alfa, ¿Quién es este? Este es v elevado a beta, pero en realidad es un por, entonces por y me queda beta, alfa mas beta.

[178E] **:** ¿Quién es alfa + beta? ¿Ese es alfa + beta en el cuerpo o los vectores?
[180ES1] **:** Esto es… en el cuerpo.

[179E] **:** Y eso ¿Qué es lo qué era? ¿Estos están donde?
[181ES1] **:** En el cuerpo.

[180E] **:** Y por qué los escribe así si están en el cuerpo.
[182ES1] **:** No sé, entonces ahí se cumple…

[181E] **:** Entonces aquí ¿Qué es fácil aquí? ¿Qué le pasó ahí?
[183ES1] **:** Ahí no me concentre o no tome atención que estos están en el cuerpo entonces, la suma que esta ahí en cuerpo en realidad no es la suma que esta definida aquí del producto, sino que es una suma de reales.

[182E] **:** Entonces hay que estar atento si se esta donde.
[184ES1] **:** En IR o el espacio, entonces eso es importante, entonces aquí debería cumplirse que beta, o sea v + w alfa, alfa es el escalar, entonces esto ¿Quién es?, por definición…

[183E] **:** Usted tiene bien anotado todo, así que no debería pasar esas confusiones, si es que no se distrae.
[185ES1] **:** Entonces esto es ¿Quién va a ser esto?, yo se que esto esta en el espacio esto va a ser beta por w, pero esta echa por esta operación, todo eso, entonces eso va a ser todo esto elevado a alfa y esto ¿Quién es?, por propiedad de reales esto es v elevado a alfa por w elevado a alfa, pero esto en realidad ¿Quién es?, como esta definido, esto es v alfa + v alfa, pero esto en realidad es alfa… entonces con tongo IR-{0} es un R-espacio vectorial.

[184E] **:** Etapa superada… queda una de las últimas, las otras son de rutina, esta es reflexión, las otras son rutina que quedo de su curso.

Pregunta 8

[186ES1] **:** Cálculo y cosas… sea V subconjunto de IR3 tales que x, y, z son mayor que 0, un espacio vectorial con las operaciones suma… suma de vectores que… con (u, x, y) y v igual… o sea multiplica componente a componente en V y que supuestamente el escalar con la operación circulito con el u, es cada uno de los vectores elevado a ese escalar.

[185E] **:** O sea es parecido a lo que usted hizo en la otra pregunta, le copie la idea.

[187ES1] **:** Se W el sub-espacio de todos los puntos de V situados sobre el plano z=1, sea W el sub-espacio de todos… ya, ¿esto es mayor o mayor-igual?

[186E] **:** Mayor que 0, cada uno mayor que 0.

[188ES1] **:** Pero si es mayor que cero, el vector nulo no va a estar ahí…

[187E] **:** Entonces debería preguntarse usted…

[189ES1] **:** Ah, ya.

[188E] **:** Eso que pensó le hizo corto circuito en su cabeza, entonces habría que pensar y reflexionar cual será la respuesta para esa pregunta, pero primero dígame aquí para saber.

[190ES1] **:** Escriba dos vectores de W… (1, 2, 1) (4, 5, 2)…

[189E] **:** A ver, leamos de nuevo el W.

[191ES1] **:** Todos los vectores en IR3 tales que x y z son mayores que 0, o sea la suma de las coordenadas.

[190E] **:** Ya y… ¿Quién es W?, es un sub-espacio de este donde que requisito tiene.

[192ES1] **:** A ver, Z es el sub-espacio… eso es falta de concentración.

[191E] **:** Pasamos ahora a responder el 2.

[193ES1] **:** ¿Cuál es el vector nulo de W?, sea W el sub espacio de todos los puntos de V situados en el plano z =… o sea son todos los puntos de V tales que z = 1, espere lo voy a anotar, W es igual a los x, y, 1 tales que x, y mayores que 0, ya entonces, quien es el vector nulo de W, entonces que debe cumplirse para el vector nulo, que… espere es que me estoy acordando, debe cumplir la propiedad del vector nulo ¿Cuál es esa propiedad?, a por ejemplo que el escalar 0 con la operación en este caso circulito del vector, me tiene que dar el vector nulo, y alfa aquí… ya en IR, entonces voy a tomar el 0, voy a hacer la operación circulito con un vector cualquiera, con un vector no sé…

[192ES1] **:** Pero ese 0 es el cero del cuerpo que se esta tomando.
[194ES1] **:** Si, IR, (x, y, 1) y esto ¿Quién es?, esto es (1, 1, 1) y esto es el vector nulo de W.
[193E] **:** Entonces el vector nulo de W es (1, 1, 1), entonces anote eso
[195ES1] **:** Esto es… el vector nulo de W, ya ahora es el vector nulo de W, porque que otra propiedad debe cumplir… a si también por que se que al sumar con otro me va a dar el mismo.

[194E] **:** Entonces se le olvido chequear que…
[196ES1] **:** Ya ahora… ya que el (1, 1, 1) suma, entre comillas con (x, y, z) es igual a (x, y, z), ah pero este es uno.

[195E] **:** Entonces eso se cumple, ahora eso le da mas fuerza, ¿a qué?
[197ES1] **:** A que es el vector nulo, a afirmar eso.

[196E] **:** Ahora el punto 3.
[198ES1] **:** Si v es igual (3, 2, 1) en W ¿Quién es –v?, supuestamente –v es el escalar -1 con la operación circulito con el v, o sea me están diciendo quien es -1 con la operación circulito con el (3, 2, 1), eso es –v, no nada que ver eso no es –v, -v es que al yo tomar –v y hacer la operación suma entre comillas con el v, me tiene que dar el vector nulo, ese si, es decir…

[197E] **:** ¿Por qué ese lo desecho?
[199ES1] **:** Porque eso no me sirve, porque no puede comprobar nada por que ahí lo está haciendo operatoriamente, pero no como axiomáticamente, entonces ¿Qué debe cumplir –v?, que (3, 2, 1) con la suma… supongamos que este es –v, (x, y, z) tiene que ser igual a quien, al vector nulo, el vector nulo es el (1, 1, 1), ah ya, ¿Quién es –v? supuestamente se multiplica componente a componente y como son vectores se igualan coeficiente a coeficiente.

[198E] **:** ¿Qué daría mentalmente ese resultado?
[200ES1] **:** Ya, me da lo mismo, x = 1/3, y = ½, z =1… eso es menos v, pero que en realidad es lo mismo que yo estaba diciendo al principio, pero esto era como mas, siento yo que esto era como no tan axiomáticamente, sino como mas algorítmicamente.

[199E] **:** Algorítmicamente y esto era fundamentado en axioma.
[201ES1] **:** Eso creo yo… los vectores… son linealmente independientes, no, si, a ver… lo multiplico… por ½, ¿Son linealmente independientes?... ah ya… sí, si son linealmente independiente, porque si hago una combinación lineal de ellos, los escalares van a ser cero, pero también puede ser, quizás mas elaborado, por ejemplo que tengo el punto (2, 1, 1) en el espacio, 2, 2, 2 1 entonces tengo el ½, ½, ½, 1, entonces puedo decir que con esos

dos vectores puedo generar un plano, es lo mismo, decir lo uno que lo otro… entonces, a ver como era tengo dos vectores, hago el producto cruz… entonces el plano va a ser todos los vectores tales que son perpendiculares hasta…

[200E] **:** Ese argumento geométrico que esta usando es para decir que son LI, entonces escriba.
[202ES1] **:** O sea, es que puedo generar un plano, si pero que no se que me sale mas largo, porque quizás la comb…

[201E] **:** OLo que usted crea que es lo más claro, cual argumento para usted es…
[203ES1] **:** Pero yo voy a poner por una cosa de más rápido… alfa por (2, 2, 1) + beta por uno dos, uno dos y esto es igual al vector nulo, igual al vector nulo de W, entonces estos alfas son escalares, pero igual me deberían seguir dando cero…entonces alfa y beta me deberían seguir dando cero, 2,1/2,1 1, 1, 1, entonces este se hace 0, entonces puedo decir, ¿anoto las operaciones que hago?

[202E] **:** No, ahí ¿los puso en una matriz?
[204ES1] **:** Si, entonces a esta le voy a sumar menos 1… me quedaría 2, ½, 1 0 0 0, 1 1 1, entonces yo a eso…, al restarla perdón me va a quedar… o sea a esto le estoy restando -2, ½ me corro dos, esto es lo mismo que decir 2 – ½ que es 3/2 y luego le coloco menos, menos 3/2, -3/2 igual a – y esto es 0 0 0, 1 1 1, entonces aquí multiplico por menos 1, multiplico la primera por menos 1 me da mas, lo multiplico por 2/3 me va a quedar 2/3, este 1 entonces la sumo hacia abajo me va a quedar 0 1, no voy a anotar la columna… se la reste una vez esto me va a quedar 0 1 1/3 entonces a que llego que alfa es igual a 1/3 y beta es igual a 2/3.

[203E] **:** Conclusión.
[205ES1] **:** Por lo tanto son LD…

[204E] **:** ¿Qué le paso?
[206ES1] **:** Supuestamente, está bien lo que estoy argumentando, supuestamente igual al vector nulo del espacio que en este caso seria el 1, sin embargo da lo mismo cual sea ese vector nulo los alfa y los beta me deberían dar cero, de quien, del cuerpo.

[205E] **:** Y ¿le dieron 0?
[207ES1] **:** No, por lo tanto son LD.

[206E] **:** ¿Por qué no coincide con lo que usted estaba dando con su argumento geométrico?
[208ES1] **:** Porque aquí el vector nulo no es el 0.

[207E] **:** Entonces en su argumento geométrico el vector nulo era quien.
[209ES1] **:** Era el 0, ahí el vector, en el argumento geométrico era el (0, 0, 0).

[208E] **:** Y en realidad, ¿Quién era?

[210ES1] **:** Era el (1, 1, 1), entonces por axiomática creo que ahí tuve un curso que la diferencia de los vectores ya no era como el 0 0 sino como que era el vector nulo, entonces aquí igual lo podría haber hecho así, tomarlo como el 1 1 una cosa así, ya ahora la pregunta, el conjunto (3, 3, 1) 1 3 3 1, es una base para W… ¿es una base para W?, esta claro que genera W, o sea esta claro que genera, ¿lo puedo llamar B? entonces el generado por B… a no, no, no se si genera, espéreme… entonces me voy a dar un vector, por ejemplo (x, y, 1) en W, entonces este vector (x, y, 1) como lo puedo escribir, lo puedo escribir como… x por el (1, 0, 1) + y por el (0, 1, 1)… entonces aquí por ejemplo…no, no me sirve, a ver…

[209E] **:** Cuando usted estaba diciéndome hace poco rato, *si genera* ¿por que tan instantáneo y después se arrepintió?

[211ES1] **:** Porque tenían 3 coordenadas y el último era un uno, entonces esos estaban en W, pero no necesariamente iban a generar, por que no se si los pueda escribir como la suma de, que cualquier vector de W lo puedo escribir como la suma de ellos, entonces, es una base de W… el conjunto de estos tales que z = 1, la otra propiedad, entonces… ya, voy a ver si puedo encontrar escalares de tal forma que el (3, 3, 1), o sea que el (1, 0, 1), o no es lo mismo de que el (1, 0, 1) lo puedo escribir como combinación lineal de ellos y el (0, 1, 1) lo puedo escribir como combinación lineal de ellos o viceversa que este lo puedo escribir como combinación lineal de ellos y esto lo puedo escribir como combinación lineal de ellos.

[210E] **:** ¿Por qué eso si es una base?

[212ES1] **:** Claro esto si es una base, claro, porque son LI, o sea le puedo poner, quizás no es necesario demostrarle porque igual es como, se ve… 0, 1) esto es LI, ya…

[211E] **:** Ocho…

[213ES1] **:** … Entonces, que puedo decir, no se, voy a decir un vector cualquiera, entonces un vector cualquiera (3, 3, 1), va nada que ver, (3, 1/3,a) o mejor pongámosle el número el 1 0 1 y el 0 1 1 y aquí va el, ¡hay! lo borre, 3 3 y aquí va el 1 1, ya entonces eh por ejemplo.

[212E] **:** Puede hacer operaciones.

[214ES1] **:** Sí, aquí puedo multiplicar por 1/3, por 1/3 y se la sumo al de abajo.

[213E] **:** ¿O la resta o la suma?
[215ES1] **:** ¿Cómo?

[214E] **:** ¿O la resta o la suma?
[216ES1] **:** Va, la resto, entonces aquí 3 1/3 1 y 0, aquí multiplicamos por un tercio, 1 1 0 1/3, verdad, se le resta al de abajo, entonces me va a quedar 0 0 0 1 y esto 1/3, 1/3 menos 2/3, ya entonces que puedo concluir con esto.

[215E] **:** A ver, repacemos de nuevo, este era 1.
[217ES1] **:** Multiplique por 1/3.

[216E] **:** Y donde multiplico el -1 ¿aquí o acá?
[218ES1] **:** Allá arriba y se la sume al de abajo.

[217E] **:** Entonces -1+1 es 0, -1 por que tiene -1…
[219ES1] **:** El 0 0 1 y eso es 1/3 2/3, ya, pero con esto que puedo concluir hasta aquí, que… aquí, mire esta parte de aquí, que aquí, esa parte no… o sea esto con esto hasta aquí no mas, o sea para eso el sistema, o sea no existen escalares de forma que yo pueda escribir como combinación lineal el (1, 0, 1) a partir de los otros vectores.

[218E] **:** Y entonces ¿Qué pasa?
[220ES1] **:** Por lo tanto, puedo decir que no es base.

[219E] **:** Por quÉ seria una contradicción.
[221ES1] **:** Porque…

[220E] **:** Entonces póngale ahí, 0 = 1 contradicción.
[222ES1] **:** Claro, entonces de aquí obtengo que 0 = 1 y esto es una contradicción, por lo tanto no es base de W.

[221E] **:** ¿A lo mejor es base de otra parte?
[223ES1] **:** Claro, pero no de todo el espacio W.

[222E] **:** Esas eran las preguntas hasta ahí…
[224ES1] **:** …

[223E] **:** Entonces ahora las preguntas que vienen, que son tres: 9, 10 y 11 que son de rutina que miden los algoritmos y… como con algoritmos usted podría responder las preguntas… ¿Qué le pasó? ¿Le quedó dando vueltas algo aquí?
[225ES1] **:** No, es que estaba pensando si, porque si no son LI, si esto no es base, si estoy afirmando que no es base, entonces esto debería ser LD, ahh si LD, por que están W, entonces si es LD

debería poder escribirse como combinación lineal uno respecto al otro.

[224E] **:** ¿Y se puede?
[226ES1] **:** Al parecer no

[225E] **:** Eso que usted está diciendo, que los vectores de un espacio son LI o LD, no pueden ser vectores no mas, o sea la dimensión del espacio tiene vectores LI, LD y no tiene “vectores no mas”, entonces ahí estamos entrando en una discusión también.
[227ES1] **:** Claro.

[226E] **:** ¿Cómo son los vectores del espacio? Son LI, LD…
[228ES1] **:** No puede ninguna relación entre ellos, tiene que haber una relación.

[227E] **:** Entonces usted argumenta, cuando yo digo: los vectores de un espacio vectorial pueden ser LI o LD.
[229ES1] **:** Sí, si…

[228E] **:** Entonces usted esta diciendo que no son base entonces no son LI ¿Cómo son esos?
[230ES1] **:** Esos, deberían ser LD.

[229E] **:** Y ¿si son LD?
[231ES1] **:** Debería encontrar un escalar de tal forma que pueda escribirlo como…

[230E] **:** Y ¿existe alguno?
[232ES1] **:** No, pero es que… a ver, espere aquí y aquí también… ¿o no?, ah no sé, es que lo que pasa es, ya por ejemplo aquí esta multiplicación en realidad ¿Qué es? Es la operación circulito, y la operación circulito ¿Qué es lo que hace?

[231E] **:** Veamos allá.
[233ES1] **:** Eleva, o sea en realidad estoy resolviendo una ecuación, a ver por ejemplo voy a ver si a lo que llegué es cierto, 1/3 si… pero me queda raíz… me queda esto elevado a 1/3, esto elevado a 1/3, uno, mas esto elevado a 2/3, todo eso es ¼ y la suma esta definida como que multiplico escalar, escalar, o sea 1/3 o sea a ver 2 elevado a 1/3 por ½ elevado a 2/3 si esto es raíz cúbica de 2 por raíz cúbica de… esto es ½ perdón, por raíz cúbica de ¼ y esto es raíz cúbica de ½ y esto es distinto de 1.

[232E] **:** ¿Qué pasó?
[234ES1] **:** No se cumple… no se cumple que me da 1 me debería dar 1, por lo menos para la primera coordenada, entonces que le estoy diciendo yo, recopilando a la tercera parte, ¿que dije yo?

[233E] **:** ¿Volvimos a la tercera?
[235ES1] **:** Sí a la tercera, va, a la cuarta… ¿son linealmente independientes?, entonces yo llegué a que alfa era 1/3 y 2/3, o sea que quiere decir, que 1/3 con el circulito y el (2, 2, 1) con el mas supuestamente, mas el 2/3 con el circulito a que, a 1 a ½ ½ ½ 1 ¿debería ser quien?, el vector nulo. Ya, esto ¿Quién es?, esto es: raíz cúbica de 2, raíz cúbica de 2, 1 mas ¿Quién?, raíz cúbica ¼, raíz cúbica de ¼, 1, verdad, ya pero esto como esta definido multiplicación componente a componente, o sea esto va a ser raíz cúbica de ½, raíz cúbica de ½, 1 y este es distinto del vector nulo entonces no cumple tampoco, entonces hay que hacerlo de otra forma

[234E] **:** ¿Qué pasó?
[236ES1] **:** Que en realidad de nuevo me paso eso de que no tome en realidad como me estaban definiendo la operación.

[235E] **:** … La operación, sino que yo me imagine una operación…
[237ES1] **:** Claro, entonces otra vez, entonces en realidad tengo: alfa circulito (2, 2, 1) mas 2/3 circulito (½, ½, 1) igual al (1, 1, 1), entonces esto ¿Quién es? esto es…

DE AQUÍ EN ADELANTE, BAJA LA CALIDAD DEL AUDIO.

[236E] **:** Beta… elevado a beta, uno, perfecto (1, 1, 1).
[238ES1] **:** entonces, Como dos alfa por ½ elevado a dos alfa por ½ elevado a…

[237E] **:** … Vamos a tener dos hojas acá, para que la pantalla nos mire… pongámosle 8.2, 8.1…
[239ES1] **:** Entonces que me va a quedar, me va a quedar ese es ½ ¿cierto? entonces me quedaría… me quedaría 2 elevado a alfa… 2 elevado a alfa menos beta… 1, es igual (1, 1, 1)… entonces que debería pasar aquí, que 2 alfa menos beta sea igual a 1, por que la misma condición ahí… y esto es 2 elevado a 0, por lo tanto aplico logaritmo… y me queda alfa igual a beta…

[238E] **:** Alfa igual a beta.
[240ES1] **:** Pero esto no me dice que sea el 0.

[239E] **:** Entonces ¿Qué pasó?, el alfa tiene que ser igual al beta no más puede ser 0, puede ser 3… ¿Qué significa entonces?

[241ES1] **:** El 4, los vectores… ¿son linealmente independiente?, no.

[240E] **:** Respuesta, entonces, nueva respuesta, ¿a qué habíamos llegado?

[242ES1] **:** Anteriormente, a que eran LI o sea que eran LD.

[241E] **:** ¿Y a qué habíamos llegado ahora?

[243ES1] **:** A que también son LD, pero llegamos a que los alfa y los beta no necesariamente son esos…

[242E] **:** Sino que son éstos, pero no necesariamente son 0…

[244ES1] **:** Nueva respuesta, entonces efectivamente son LD.

[243E] **:** Pero con un argumento de acuerdo a que…

[245ES1] **:** A las operaciones… el conjunto W es una base… entonces tiene que generar y ser LI, entonces veamos si es LI primero, si no es LI inmediatamente lo descartamos… beta circulito (3, 3, 1) y ésta quién es, es 3 elevado a alfa por 1/3 elevado a beta…

[244E] **:** ¿entonces son?

[246ES1] **:** LI… ya, voy a demostrar también que W tiene dimensión 2, entonces, a ya, aquí demostré que W tiene dimensión 2… con esto la dimensión de W es 2.

[245E] **:** Y ¿Cómo lo relaciona con esto?

[247ES1] **:** Que éstos son LI, y pertenecen al conjunto, entonces generan al conjunto, lego son base, por lo tanto… como la dimensión de W es 2 y el conjunto V es LI, luego V genera a W…

[246E] **:** Etapa superada.

Pregunta 9

[248ES1] **:** Estos van a ser los x tales que los vectores en IR3… x – y…ya ese es el generado por ese vector, ya esos vectores son LI… entonces, si este por ejemplo tiene dimensión 1º mayor, entonces no debería o sea no se cumple ahí…tiene la misma dimensión y además, este vector por ejemplo lo puedo escribir como combinación lineal de estos vectores y este vector también.

[247E] **:** A ver… ¿Cómo?

[249ES1] **:** Como una vez el (-1, 1, 0) mas 0 veces…

[248E] **:** ¿Y el otro?

[250ES1] **:** (-1, 0, 1) lo puedo escribir como…

[249E] **:** ¿Qué significa entonces?
[251ES1] **:** Que no son el mismo conjunto… porque si fueran el mismo conjunto un v de aquí lo podría escribir como combinación lineal de ellos y como combinación lineal de ellos.

[250E] **:** ¿Quién despejo aquí? para yo saber.
[252ES1] **:** X… entonces al parecer no son el mismo conjunto.
[251E] **:** ¿Cuál es su argumento?
[253ES1] **:** Que ese vector de aquí no lo puedo escribir como combinación lineal de esos dos, entonces… (-1, 0, 1) no se puede escribir como combinación lineal de (-1, 1, 0) y (1, 0, 1), por lo tanto, el W es distinto de V… no…

Pregunta 10

[252E] **:** Vamos a llegar hasta la 11 solamente, debido a las respuestas que usted a dado… hizo bien los trabajos anteriores… hasta la 11… usted reconoce esas preguntas, se ha topado alguna vez con eso…
[254ES1] **:** Ya entonces aquí como tengo tres, o sea me dan tres y arriba tengo dos que se repiten y abajo tengo dos que se repiten, entonces despejo una… entonces aquí arriba por ejemplo voy a despejar "y" entonces va a ser z-x … y t va a ser igual a 2z – x.

[253E] **:** Entonces usted despejó, cuáles, las que…
[255ES1] **:** Despejé las que se repiten…

[254E] **:** ¿Por qué tiene que despejar las que se repiten?
[256ES1] **:** ¿Por qué tengo que despejar las que se repiten?, para que, para después reemplazarla aquí hacer el despeje aquí, hacer la descomposición en función de estos mismos o sea de z y de x y eso va a ser como la combinación lineal entonces eso va a representar el generado, entonces porque x e y van corriendo sobre IR…

[255E] **:** ¿Qué pasa si despejo las que no se repiten?
[257ES1] **:** Si despejo las que no se repiten, no me sirven de nada porque las voy a reemplazar, igual quizás voy a llegar a un generado pero no voy a llegar a una base y lo que quiero es una base, entonces me ahorro…

[256E] **:** ¿esas son técnicas que usted aprendió?
[258ES1] **:** Técnicas que uno aprende, para ahorrarse la pega, porque igual lo podría hacer pero…

[257E] **:** Es para reducir trabajo.

[259ES1] **:** Entonces, una vez que ya hice eso… va a ser las matrices de la forma x (z-x)/2 esto z, 2z-x, con x, z… entonces aquí hago el despeje y me va a quedar x multiplicado por el 1, -½, 0, ½ mas el z multiplicado por 0 ½ 1 2 con x, z en… entonces aquí tengo que va a ser el generado 1, -½, 0, ½ mas el 0 ½ 1 2.

[258E] **:** ¿Cuál es la base?
[260ES1] **:** Por lo tanto, la base de V…
[259E] **:** O.K, esa es la base.

Pregunta 11

[261ES1] **:** Yo tengo una… los reales positivos sin el 0.

[260E] **:** Positivos no más…
[262ES1] **:** Un R-espacio vectorial… estudiar la dependencia lineal de los subconjuntos de V dados por… alfa circulito… por que aquí tendría que cumplirse que el 0 con (a, b) cualquiera es el vector nulo pero como esta definido esto…. Entonces yo de aquí puedo llegar directo al despeje aplico logaritmo… logaritmo de 1 es 0, entonces, por lo tanto beta es 0…. Como beta es 0, me da 1 entonces aplico logaritmo… por lo tanto s1 es LI.

[261E] **:** Ya.. veamos S2.
[263ES1] **:** … Alfa…

VUELVE EL AUDIO NORMAL

[264ES1] **:** … Esto es igual más fácil, porque hay puros 1's, entonces me quedaría 1 elevado a 1, uno, 1 elevado a 1, igual 1, entonces quedaría 2 elevado a beta 1, 2 elevado a beta igual 1, por lo tanto beta igual 0, pero si beta igual 0, entonces… claro, alfa puede ser cualquier cosa, entonces alfa en IR.

[262E] **:** ¿Qué significa eso para nuestra pregunta?
[265ES1] **:** Por lo tanto, S2 es LD.

[263E] **:** Muy bien ha superado esto, etapa superada, muchas gracias.

VIDEO ENTREVISTA –ESTUDIANTE 2

Pregunta 1

[1E]	**:** De aquí vamos sacando una a una las preguntas, son como once para que sepa, entonces empezamos con la primera, hay que escribir con esos lápices.
[1ES2]	: Dice, se han definido sobre IR^2 las siguientes operaciones, suma IR^2 con IR^2 en IR^2 y toma dos pares ordenados y los lleva en, bueno se define así, ya y la ponderación, eh…
[2E]	: ¿Qué hace la ponderación?
[2ES2]	: Bueno eh… toma un escalar y un vector y lo lleva de esta forma, lo multiplica.
[3E]	: Perfecto, pregunta.
[3ES2]	: Entonces la pregunta es ¿Es IR^2 con las operaciones anteriormente definidas un espacio vectorial sobre IR? Ya entonces, bueno la pregunta induce a pensar en la definición de espacio vectorial y para comprobar hay que ir comprobando cada una de las propiedades que, que, como se define espacio vectorial.
[4E]	: ¿Cuáles son esas? ¿Usted podría decirme? ¿Si se acuerda?
[4ES2]	: Más o menos, eh…tiene que ser grupo abeliano con la suma.
[5E]	: Anotemos eso, importante.
[5ES2]	: IR^2, que sea no se anota.
[6E]	: Como usted lo anota, como usted lo anota.
[6ES2]	: Sí, en IR^2 si.
[7E]	: ¿Qué había? ¿Por qué había dudado?
[7ES2]	: Era porque pensé que iba el más primero pero no, así, eh tiene que ser…abeliano y el producto escalar son cuatro propiedades, entre eso tiene que distribuir eh por ejemplo los vectores tiene que la multiplicación sea distributiva y también con respecto a los escalares.

[8E] : Eran dos.
[8ES2] : ¿Cuál más?

[9E] : ¿Puedes anotar así unas palabras que identifique a las propiedades? Para saber qué me estas diciendo, ya tenemos distributividad…
[9ES2] : Haber…

[10E] : Así, para recordar yo este lo que está pensando.
[10ES2] : Bueno cuando yo dije por ejemplo con respecto a los escalares, me refiero a que tomo dos escalares ye eso se tiene que separar, no si está bien dicho, pero a eso me refiero.

[11E] : Pongámosle como usted me dijo, distributividad, usted me dice cuántas hay.
[11ES2] : ¿esa es V corta o B larga?

[12E] : ¿??¿?¿?¿?¿?¿
[12ES2] : Ese es un…a los vectores de IR^2.

[13E] : ¿Entonces tenemos dos?
[13ES2] : Sí, tiene que existir un escalar tal que multiplicado por un vector tiene que ser el mismo vector.

[14E] : Anotemos ese.
[14ES2] : Tiene…debe existir…eh bueno eso se llama elemento neutro, debe existir elemento neutro.

[15E] : Le voy a preguntar ¿Dónde? Yo le voy a hacer esa pregunta, elemento neutro ¿Dónde?
[15ES2] : En el cuerpo, ahí hay tres y ¿Cuál más? Eh…la otra…eh…

[16E] : Es que… ¿tiene alguna condición esa? Algo más me dijo usted.
[16ES2]: ¿Cuál?

[17E] : Ese, elemento neutro tal que y me dijo algo después.
[17ES2] : Que éste, que tenía que estar en el cuerpo.

[18E] : Sí, y… ¿Qué significaba eso? Que fuera neutro.
[18ES2] : Bueno, que al aplicar la ponderación el resultado fuera el mismo vector.

[19E] : Perfecto, ya eso es lo que quería saber, ya hay tres ahí.
[19ES2] : Sí, bueno, la otra no me acuerdo.

[20E] : Dejémosla ahí no importa.
[20ES2] : Yo empezaría con la ponderación, ¿si?, ya eh…bueno, el elemento neutro, si existe tiene que ser el uno, así que vamos a empezar por ahí porque yo pienso que debería fallar.

[21E] : Va a fallar, entonces si estaba pensando en que le va a fallar, es que falla…que ¿falla una de esas?
[21ES2] : Sí.

[22E] : Vamos viendo.
[22ES2] : Entonces eh…no decir.

[23E] : Puedes tomar bebida si quieres.
[23ES2] : Sí sea, uno perteneciente a IR el elemento neutro…para la…, para la ponderación entonces eh…tomamos el uno y un vector cualquiera o sea uno por equis eh ,no vamos de nuevo, lo voy a escribir de nuevo , uno ponderación x coma y , y eso es igual a eh nos vamos a la definición y eso sería (x,-y) ya entonces eh…claramente el uno no es elemento neutro porque toma el vector (x, y) y lo lleva en el vector (x, -y) que es distinto.

[24E] : Perfecto y.. ¿Qué sacamos con eso?
[24ES2] : Bueno, eso nos indica que como falla una de las propiedades de espacio vectorial, entonces no es espacio vectorial con.

[25E] : Entonces anotemos la conclusión, esa ¿sería la respuesta? La siguiente pregunta.
[25ES2] : Bueno…por lo tanto IR^2 no es y de eso, no es espacio vectorial.

[26E] : Perfecto, ya estamos consientes de que nos falta una ¿no es cierto? A lo mejor en el transcurso de, de la entrevista nos acordamos, si es que es necesario a lo mejor con las que te acuerdas adelante se puede dar respuesta muy bien seguimos entonces con la… ahí hay bebida si quieres.

Pregunta 2

[26ES2] : Ya, dice, sea IR el cuerpo de los números reales y F de, bueno eso es una notación nada más.

[27E] : Y, y ¿Qué significa esa notación ahí?
[27ES2] : Bueno dice que son, es un conjunto de las funciones que van de R en R tal que F, bueno de las funciones que van de R en R , ya entonces se definen las siguientes operaciones, la suma va a tomar dos funciones y lo lleva en la función suma.

[28E] : ¿Son funciones?
[28ES2] : Que sea… no.

[29E] : ¿Qué hace la suma?

[29ES2] : No, toma dos, que sea toma un par ordenado de números reales y llevan la suma normal y la ponderación, bueno va del conjunto de las funciones, eh bueno, toma un elemento en el conjunto de las funciones y otro en IR y lo lleva en la función multiplicado por el escalar y lo define como F de X, entonces dice, si sabemos que, bueno es IR coma más, bueno que IR con la suma es un grupo abeliano. ¿Qué axiomas faltan para que IR sea un espacio vectorial sobre F de R coma R.

[30E] : Y ¿qué dice la otra pregunta?

[30ES2] : ¿Se cumplen los dichos axiomas?

[31E] : ¿Está clara la pregunta, las dos preguntas?

[31ES2] : Eh, sí.

[32E] : ¿Qué pasa? ¿Por qué estas leyendo?

[32ES2] : Es que por ejemplo aquí dice, ¿Qué axiomas faltan para que IR sea un espacio vectorial sobre, sobre esto, sobre este conjunto? Y… me complica un poco que diga sobre este conjunto.

[33E] : ¿Por qué?

[33ES2] : Por ejemplo cuando uno, en la anterior por ejemplo decía sobre IR y eso significa que uno, si no me equivoco, que tomo los escalares en IR ¿o no?

[34E] : Y ahora… ¿Qué está tomando?

[34ES2] : Que sea, los escalares serían esto, funciones, ya ¿está bien interpretado entonces?

[35E] : Sí, los escalares son funciones.

[35ES2] : Entonces lo que habría que probar es que, bueno las propiedades que numeramos anteriormente, pero tomando como, las funciones como escalares, entonces.

[36E] : Vamos chequeando.

[36ES2] : Ya, habría que probar que primero que eh… bueno F, si F y G pertenecen a F coma R, R entonces y… no Y eh... y x pertenece a los reales, tiene que, entonces eh…ya si esto es que sea distributivo con respecto a los escalares ya entones vamos ¿lo pruebo o escribo?

[37E] : Sí, no, lo puedes probar inmediatamente si es más cómodo.
[37ES2] : Ya, entonces.

[38E] : Vamos numerando, pongámosle a éste, a éste por ponerle la uno.
[38ES2] : Entonces, ya si tomamos este lado F+G ya, entonces aquí nos vamos a la definición eso nos dice que sería , esto sería F+G evaluado en X , entones esto es F+G evaluado en X y esto, aquí nos vamos a la definición de suma de , de suma de las funciones y esto es F de X mas G de X ¿si?, ya y esto por la definición misma sabemos que esto es F ponderado con X más G ponderado con X, por lo tanto se cumple la condición.

[39E] : Pongámoslo al lado de aquí, lo que usted está diciendo, que se cumple.
[39ES2] : ¿Es así?

[40E] : Sí, la siguiente.
[40ES2] : La otra sería que tiene que ser distributivo con respecto a los escalares, en este caso, que sea los escalares, a los vectores.

[41E] : A los vectores.
[41ES2] : En este caso pertenece a IR, ya entonces decimos, sea X coma Y perteneciente a IR y F perteneciente a las funciones de R en R entonces se tiene que cumplir que F ponderado con X más Y tiene que ser igual a F ponderado con X más F ponderado con Y, ya, bueno esta, esta falla, esta si que falla.

[42E] : Y, ¿Cómo puedes decir que falla? ¿Por qué estás pensando cuando dices falla? ¿Qué piensas cuando dices falla?
[42ES2] : Porque, porque aquí la definición nos va a llevar a F evaluado en X más Y entonces para que se pueda separar tendría que ser lineal y no todas las funciones de R en R son lineal de hecho son yo creo que menos.

[43E] : Son mucho más chica ese conjunto.
[43ES2] : Sí, entonces.

[44E] : Entonces anotemos eso que me estas diciendo.
[44ES2] : Ya, bueno, pero ¿no lo hago entonces?

[45E] : Sí, sí por favor.
[45ES2] : Entonces lo vamos a hacer primero y después…

[46E] : Un detalle o sea así a grandes rasgos no tienes para que…

[46ES2] : Bueno si en todo caso, entonces F es igual a eh… F de x más Y, entonces aquí, bueno F de X más Y es eh…bueno lo correcto seria decir aquí que, existe en F R con R funciones tal que esto es distinto de F de X más F de Y entonces ya bueno , lo voy a escribir acá, existe…F perteneciente a …tal que se cumpla esto, ya que no todas las funciones de R, de R, R son lineales, lineales, bueno con la suma.

[47E] : Ya quedamos en eso, estas pensando en la operación también, con la suma, por lo tanto, hay cosas que no se cumple, entonces ¿Qué le vamos a poner después?

[47ES2] : Este por lo tanto Y dos no se cumple y por lo tanto eh el conjunto, bueno aquí el conjunto es IR.

[48E] : Con ese conjunto IR estás pensando en ¿Qué parte?

[48ES2] : En el conjunto de los vectores. IR más ponderación y el cuerpo, y el cuerpo porque hay que poner cuerpo porque al final eso es lo que hace que no funcione.

[49E] : ¿Es importante el cuerpo en la estructura de espacio vectorial?

[49ES2] : Sí, el cuerpo, no es espacio vectorial.

[50E] : OK, vamos a la siguiente etapa superada.

Pregunta 3

[50ES2] : ¿Es posible que exista un espacio vectorial?

[51E] : ¿Qué dice la pregunta?

[51ES2] : Dice, ¿es posible que exista un espacio vectorial que tenga sólo dos elementos? Ya entonces, bueno estaba pensando primero, lo primero que pensé es que, estaba pensando en el cuerpo, pero en realidad hay que pensar en los vectores en el conjunto de los vectores ese es el que pide que, o la pregunta se refiere a ese conjunto si puede existir ese conjunto que tenga sólo dos elementos, entonces…

[52E] : Cuéntame ¿Qué estás pensando para tratar de responder?

[52ES2] : Yo creo que sí, o sea estoy seguro que sí.

[53E] : ¿Qué te hace estar tan seguro?

[53ES2] : Porque estoy pensando en, nos podemos tomar, el cuerpo no es importante yo creo, que sea en este caso no es importante, lo importante es encontrar un conjunto que bueno que cumpla las propiedades ¿cierto?

[54E] : Sí, y ¿Qué más? Que cumpla las propiedades ¿y?
[54ES2] : Que tenga dos elementos.

[55E] : Que tenga dos elementos
[55ES2] : Entonces… bueno es…a no el cuerpo si es importante porque por ejemplo, si el cuerpo fuera cualquiera uno podría tomarse una combinación lineal y ahí serian infinitos, bueno el cuerpo tienen que ser finito yo creo por el hecho de, sino podríamos tomar una combinación lineal de esos dos vectores.

[56E] : Y ¿Qué gracia tiene tomarse esa combinación lineal?
[56ES2] : Que eso va a generar otro vector que va a ser un elemento del mismo conjunto entonces ya.

[57E] : Entonces ahí estas pensando que lo puede ir agrandando ¿no son ciertas? Cuando dices eso estas pensando que lo puede ir haciendo cada vez más, más grande ¿eso?
[57ES2] : Sí, entonces… bueno entonces yo creo que a veces nosotros definimos subespacios y los subespacios en sí son espacios vectoriales también, entonces podríamos tomarnos un espacio vectorial de dimensión uno y el cuerpo cero, uno entonces ahí las únicas, estaría el cero y estaría el mismo vector ¿si?

[58E] : Claro, ahí tendríamos dos.
[58ES2] : Sí, entonces no podría haber nada más y si multiplicamos, si usamos la ponderación normal o sea las usual es cero por el vector que, bueno cero por cero por el vector cero va a ser vector cero.

[59E] : Cando dices cero por cero ¿son los dos ceros los mismos?
[59ES2] : No, no uno es un escalar y el otro es el vector.

[60E] : Ah ya, entonces estas pensando en todos los vectores.
[60ES2] : Entonces, ya y cero escalar por el otro vector que es distinto de cero, va dar el vector cero entonces ahí sigue siendo el mismo elemento o sea ahí todavía no nos salimos de esos dos elementos que tenemos, ya y con el uno tendríamos uno por el cero daría el vector cero y uno por el vector daría el vector así que ahí con la ponderación estaría bien y con la suma habría que ver, bueno si va cumplir, hay que ver la clausura no más en realidad porque lo otro van a depender del conjunto o sea, si es espacio vectorial los va a cumplir.

[61E] : Entonces vamos anotando la respuesta que me estás dando o sea precisando si se puede o escribiendo lo que estas diciendo.

[61ES2] **:** Entonces si es no, si existe… ya si consideramos… como cuerpo el conjunto, le voy a poner IK conjunto cero, uno y como el conjunto de vectores tendría que ser bueno… eso es con, con la ponderación usual y la suma y la suma respectiva al subespacio porque va a depender del subespacio como sea la suma.

[62E] : Entonces pongamos la suma del subespacio y ahí nos entendemos.

[62ES2] : Entonces dijimos que con la ponderación no había problema y a y con la suma bueno eh tampoco porque como hay dos, tenemos dos elementos en el, en el conjunto si sumamos cero con el vector, el vector cero con el otro vector va a dar el vector suponiendo que por ejemplo los tomáramos en IR^2 y fuera no se, un vector distinto de cero y el vector nulo, si lo sumamos va a dar el mismo vector y el vector, que sea va a dar el vector distinto de cero y … bueno no hay más no hay otra suma posible y lo otro, existe el elemento neutro existe eh si existe el elemento neutro para la suma y seria el vector nulo .

[63E] : Ya, o sea tú aquí, el argumento ¿te estas apoyando en propiedades? Como las super importantes ¿me las puedes anotar esas? Porque dices porque cero por cero.

[63ES2] : Sí, no quizás me estoy apoyando en la definición de espacio vectorial.

[64E] : Sí, está bien es un argumento, quiero que eso no se pierda.

[64ES2] : Ya entonces, bueno y como conjunto… cumplen…ya cumple las propiedades que define espacio vectorial ¿las escribo?

[65E] : Sí, eso es importante porque ahí está la fuerza del argumento que tienes.

[65ES2] : Es decir, es decir le voy a llamar K para no, a ver ¿Cómo la puedo llamar? ¿Tiene un nombre ese conjunto o no?

[66E] : Sí. pero no es relevante ponle tú la notación no importa ¿si?

[66ES2] : Le voy a llamar un K prima no más.

[67E] : ¿K prima? Ya K prima.

[67ES2] : Entonces K prima, bueno diría subespacio…ya le voy a llamar W al subespacio entonces W con la suma y la ponderación y el cuerpo, el cuerpo K prima tiene que cumplir, que cumplir que tiene que cumplir que ser grupo abeliano con la suma y con la ponderación tiene que cumplir que si α y β pertenecen a K prima y V pertenece a W α+β por V es igual a αV+ βV eh…tiene que cumplir, sea α perteneciente a K prima y V coma W perteneciente a W. α debe ser igual αV + αW y la otra, bueno la otra es que tiene que existir el uno perteneciente, bueno el elemento neutro talque el elemento neutro perteneciente al cuerpo talque. talque uno, por V sea igual a, sea igual a V y la otra es la que no me acuerdo.

[68E] : Ya, no importa pero estas consiente que falta una eso es bueno.
[68ES2] : Ya ¿eso?

[69E] : Sí, perfecto, una consulta ¿Por qué tienes, le exiges que sea de dimensión uno? ¿Por qué no puede ser de dimensión dos o tres?
[69ES2] : Porque si es de dimensión dos ya sé, de hecho ahí ya no sería de dos elementos porque tendría el cero y los dos que forman la base en este caso y aun así con la suma ya se aumentaría un poco más porque existiría el vector suma entre ellos cada uno y el cero.

[70E] : Ya, es porque, para que cumpla la condición, ya sería el porque pusiste dimensiones, más espacios vectoriales.

Pregunta 4

[70ES2] : Dice: se define como eh los polinomios pertenecientes de grado menor o igual a N, ¿eso?

[71E] : Sí.
[71ES2] : Tal que la integral de entre cero un uno, el polinomio es igual a cero, con las operaciones usuales ¿es un espacio vectorial real? ¿Por qué? Ya entonces bueno lo único que hay que ver que en realidad hay que probar a ver si leo bien hay que probar que es subespacio no más en realidad porque los polinomios son con las operaciones usuales son un espacio vectorial entonces hay que ver que W sea un subespacio vectorial.

[72E] : Y ¿lo es o no lo es?
[72ES2] : Entonces para eso hay que probar la clausura con la suma.

[73E] : Ya vamos anotando entonces lo que hay que probar en realidad es todo lo que haz dicho.
[73ES2] : Bueno primero hay que probar que W es distinto de vacío, de vacío así es ¿cierto?

[74E] : Sí.
[74ES2] : Entonces uno eso lo hace probando que el cero está,ya entonces vamos a probar al tiro entonces, sea, sea p(x) igual a al

polinomio nulo. Bueno lo voy a anotar así porque es un vector ya entonces, tenemos que ver si este polinomio está en W, entonces para que esté en W tiene que cumplir que la integral de ese polinomio tiene que ser cero entre cero y uno, entonces vamos a calcular la integral entre cero y uno de, bueno lo vamos a anotar así mejor cero de X vector,cero de X para…

[75E] : ¿Para que tenga la pinta de polinomio? ¿Por eso?

[75ES2] : Cero de X de X es igual a… ¿Qué? Ya entonces este, bueno este polinomio es el polinomio nulo, o sea claramente es cero, ya, ya o sea ¿Cómo lo podría justificar mejor? Pero no se si se entiende.

[76E] : Sí, se entiende.

[76ES2] : Pero este es cero.

[77E] : Ya, es cero, ya eso garantiza entonces ¿fue bueno para?

[77ES2] : Entonces, por lo tanto, cero de X pertenece a W, por lo tanto es distinto de vacío, entonces ahora hay que probar que si tenemos dos elementos en el conjunto la suma también está en el conjunto, o sea la clausura con la suma.

[78E] : La clausura con la suma eh, sea p(x) coma q(x) perteneciente a W, entonces p+q a ver, que sea P de X más Q de X pertenece a W, entonces eso es lo que queremos probar ¿Qué hacemos? Vamos a ver quien es el vector suma primero entonces vemos, que sea vamos a calcular la integral del vector suma, si nos da que es cero es porque el vector suma está en W, a cero y uno de bueno esto se puede separar ¿Por qué? Por las propiedades de la integral entonces.

[79E] : ¿Qué sacamos con eso?

[78ES2] : Bueno al separarlo vamos a ver que si, porque cada una está, bueno, primero los separamos de la suma en realidad y eso es por propiedades de los polinomios, y eso es igual a cero y uno más Q de X, bueno aquí, que sea correspondería ponerlo entre paréntesis, que sea me complica un poco, debería haberlos separado al tiro mejor.

[80E] : Bueno si quieres hazlo de nuevo.

[79ES2] : Porque sería lo mismo porque como uno le pone el dx tiene que aplicárselo a todo y todo eso entonces de aquí vamos a pasar al tiro a cero y uno de P de X de X más entre cero y uno de Q de X, de X y eso se puede hacer porque, por las propiedades de la integral y eso, bueno esto es cero ¿Por qué? Porque P de X está en W entonces cumple esto y ah si está bien, entonces cero más cero y eso es igual a cero, por lo tanto la, el vector suma está en W, por lo tanto P de X más Q de X pertenece a W, y lo ultimo que hay que probar es cerrado con la ponderación, entonces nosotros decimos: sea α perteneciente a IK a un cuerpo y P de X perteneciente a W, entonces tengo que probar que α que sea que la integral.

[81E] : ¿Lo vas a hacer para un cuerpo en general?

[80ES2] : Sí, porque acá no dice nada del cuerpo a si P de X si no dice que es IR, bueno no da lo mismo pero, que sea da lo mismo en términos de que es más general no más pero no se si quiere lo hago en IR.

[82E] : No, como tú lo estimes, yo solamente quería saber en que estabas pensando solamente que estabas pensando era mi… nada más, nada más.

[81ES2] : Entonces este es α a hay que probar que α P de X la integral de eso es igual a cero, entonces vemos eh entre cero y uno de α P de X dx, veamos quien es ese vector, ya y por las propiedades de la integral el escalar puede salir de la integral entonces ese es α cero, uno de P de X pero la, esta integral es cero porque P de X está en W donde esto es igual a α por cero y eso es igual a cero, por lo tanto α P de X pertenece a W y W, bueno, es subespacio de IR ^{n}[X] y por lo, por lo tanto es un espacio vectorial.

[83E] : Ya, estamos pasamos a esta otra la siguiente, vas bien, bien.

Pregunta 5

[82ES2] : Dice: averigua si la siguiente afirmación es correcta o no en ambos casos justifica tu respuesta, sea V, W, Z espacios vectoriales sobre un cuerpo IK y supongamos que V más W es igual a ¿Qué significan esas comillas?

[84E] : Es que abre comillas ahí para la proposición.

[83ES2] : Ah ya…

[85E] : Esta es la proposición que te preguntan, abre comillas y…

[84ES2] : Ya entonces dice que si V +W es igual a V+ Z entonces W es igual a Z, entonces…

[86E] : Ahí me tienes que contar en que estas pensando.

[85ES2] : Bueno lo primero que pienso, que no yo pienso que no así sin pensar mucho.

[87E] : O sea sin darle vuelta a la pregunta y ¿Por qué así esa tendencia?
[86ES2] : Porque…

[88E] : Porque es una tendencia, no es cierto. la que me dices tú que no lo has pensado nada.
[87ES2] : A ver, bueno no sé.

[89E] : A ver ¿Por qué?
[88ES2] : No se porque, porque no se, es como bueno, las cosas.

[90E] : O no hay explicación.
[89ES2] : Porque es que por ejemplo esto con subconjuntos no es tan simple como con numero por ejemplo, o sea y yo pensaría que no que no se da entonces ahora lo que sigue es pensar en un ejemplo.

[91E] : Ya, dijiste muy bien, porque estos son conjuntos ¿no es cierto?
[90ES2] : Sí.

[92E] : Claro, no son números, son conjuntos.
[91ES2] : Por eso yo creo, yo tiendo a pensar de que no se cumplen, sin pensar mucho entonces ahora voy a ver, voy a dejar a ver que, si se puede encontrar algo porque yo pensé que no es muy difícil encontrar u ejemplo.

[93E] : Ya, entonces búscalo en tu mente.
[92ES2] : Ya entonces R^2…, bueno por ejemplo si, primero le voy a decir y después lo explico, no, no se cumple porque por ejemplo.

[94E] : Pensaste algo, pensaste algo ya en ¿Qué?
[93ES2] : Por ejemplo en IR^2 cuando nosotros tenemos, bueno IR^2 tiene base, tiene dos vectores en su base en cualquiera de sus bases, pero por ejemplo cuando nos tomamos su base canónica eh cada uno define un subespacio que a la vez es un subespacio vectorial, entonces podríamos tomar el espacio que define el uno cero y el espacio que, como a pero tiene que ser, bueno igual.

[95E] : Vamos anotando eso que esta súper bueno para que vamos en algún dial.
[94ES2] : Ya entonces es.

[96E] : O sea ¿te situaste en un espacio? Primero ¿Cuál es ese espacio?
[95ES2] : Sí, ya entonces, bueno en IR^2 ¿cierto?

[97E] : Vas a trabajar en IR^2
[96ES2] : Sí.

[98E] : Ya, búscate una base.

[97ES2] : Sea, sea V, W, Z perteneciente a IR^2 a IR^2 tal que entonces V lo vamos a definir como, como el generado por el uno cero ¿ya? Bueno eso es un espacio vectorial tiene dimensión uno y vamos a definir W.

[99E] : Y un vector bien especial ¿cierto? Un vector ¿de qué?
[98ES2] : ¿Cómo de que?

[100E] : Porque es uno cero ¿Por qué elegiste uno cero me habías dicho antes?
[99ES2] : A porque, bueno es de la base canónica.

[101E] : Eso, perfecto.
[100ES2] : Entonces vamos a tomar W como el generado por cero uno, ¿si?

[102E] : Sí.
[101ES2] : Bueno, este es linealmente independiente con, este vector es linealmente independiente con el de W.

[103E] : Y ¿Qué garantiza eso?
[102ES2] : Bueno que, que como este tiene el uno en él, la primera coordenada y bueno en realidad porque tiene un cero en la segunda coordenada es imposible generar el uno de acá así pensando no, para no hacer la definición obviamente si hacemos la definición va a dar que es linealmente independiente y entonces, tenemos que ver, sabemos que V con W es igual a IR^2 , ¿Por qué? Porque como son linealmente independientes son una base para IR^2 que tiene dimensión dos por lo tanto es.

[104E] : Pero ahí no haz anotado, haz anotado algo que son…
[103ES2] : Que son suma directa que ya porque la intersección entre ellos es el vector nulo solamente.

[105E] : A pero tú ¿estás viendo que aquí no se pide suma directa, no es cierto?
[104ES2] : Sí, ya pero bueno la suma también es IR^2 o sea sin ser suma directa, esto es en un caso especial no más y si definimos eh…eh ¿Cuál? Z, Z lo vamos a definir como el vector generado por el vector (1,1), este vector es independiente con ese y con ese ¿si? Entonces, ovinamente el generado por Z es distinto que el generado por W ¿Por qué? Porque , bueno acá todos van a ser, no , no todos. bueno la condición para que un vector este en Z es que las dos coordenadas sean iguales y acá en W no , por lo tanto W y Z son distintos, son distintos espacios vectoriales pero claramente si sumamos V con Z como son linealmente independientes, tiene que ser una base para IR^2 ya que IR^2 tiene dimensión dos y son dos vectores , por lo tanto Z más , ¿más qué? Más…que sea era V, V más Z también es igual a IR^2 y Z es distinto de W.

[106E] : Muy bien, o sea que esa afirmación es…
[105ES2] : Es falsa.

[107E] : Ya, perfecto, muy bien, muy bien buen argumento.

Pregunta 6

[108ES2] : Dice…

[108E] : Dos preguntas paralelas.
[109ES2] : dice: ¿es Q un espacio vectorial sobre IR? Justifica ¿es IR un espacio vectorial sobre Q? justifica ya eh…bueno uno va a fallar así que al tiro porque la clausura va a fallar.

[109E] : Ya, anotemos ¿Cuál es ese?
[110ES2] : Ya entonces, bueno hay que pensar ¿es Q espacio vectorial sobre IR? Ya este seguro, este va a fallar entonces.

[110E] : ¿Falla?
[111ES2] : Sí, bueno, es Q, Q no es espacio vectorial sobre IR, ya eso es pensando con la, con las operaciones usuales.

[111E] : Sí, con las operaciones usuales.
[112ES2] **:** ¿Por qué? Porque, por ejemplo si tomamos, sobre IR entonces los vectores están en Q, si tomamos un vector en Q que es un número y lo multiplicamos por un escalar en IR eh… nada no asegura que el resultado este en Q que es lo que se pide para que sea espacio vectorial.

[112E] : Entonces tú justificaron seria ¿Cuál? Para que me la anotes.
[113ES2] : Bueno, bueno, una…

[113E] : No, sin complicarse, si estaba bien.
[114ES2] : Ya, si ,bueno… Q ,Q con la ponderación tiene que…tiene que cumplir que, la clausura entonces tiene que cumplir si que tomamos , bueno como sabemos que no es tiene que cumplir eso y no lo cumple, cumple, entonces lo más fácil es darse un contra ejemplo, entonces vamos a decir: sea uno perteneciente a Q y raíz de 2 perteneciente a IR.

[114E] : Todos los que han venido han usado raíz de dos, yo no sé ¿Por qué dicen raíz de dos? Un comentario
[115ES2] : Entonces, raíz de dos ponderado con uno es igual a raíz de dos que no pertenece a Q por lo tanto, bueno lo que puse arriba, no se cumple y esto, esto si porque bueno Q es un cuerpo por lo tanto es grupo abeliano y que sea IR es un cuerpo, IR es un cuerpo ya, si porque IR es el conjunto ,IR es grupo abeliano con la

suma ya, y bueno IR con respecto a IR es un espacio vectorial ya si tomamos los escalares en IR es un espacio vectorial, entonces ahora si achicamos el conjunto de los escalares, sigue cumpliendo las condiciones ¿Por qué? Porque es un cuerpo más chico que es subconjunto de IR o sea no va a ver problemas.

[115E] : Le vamos a decir subcuerpo.
[116ES2] : Un subcuerpo.

[116E] : Perfecto, entonces anotemos ese argumento, tú estás diciendo que es…
[117ES2] : IR más, ya como Q es un subcuerpo de IR e ir es espacio vectorial sobre IR, entonces IR es espacio vectorial sobre…

[117E] : ¿Sobre quién?
[118ES2] : Sobre Q.

[118E] : Perfecto, etapa superada muy bien, el raíz de dos ha sido un argumento ahí, vamos viendo esa otra.

Pregunta 7

[119ES2] : IR menos el cero es un grupo abeliano con la suma, definida como sigue, suma…ya la suma se define como la multiplicación.

[119E] : La multiplicación, perfecto ¿Qué dice a continuación?
[120ES2] : Donde (x, y) pertenecen a IR menos el cero, ya definir la otra operación sobre el cuerpo IK para que IR menos el cero sea espacio vectorial sobre IK con esas dos operaciones…

[120E] : ¿Está clara la pregunta o hay que aclarar algo?
[121ES2] : Está claro

[121E] : ¿Está claro?
[122ES2] : Sí, entonces ya, tenemos que definir un, una ponderación.

[122E] : La ponderación o la multiplicación por escalar, como quieras.
[123ES2] : Sí, …tal que el conjunto IR menos el cero sea espacio vectorial con esas dos operaciones, ya entonces.

[123E] : Vamos entonces.
[124ES2] : x+y por x por y, entonces, bueno, yo lo que pensaría o lo que me ayudaría para eso, es escribir las propiedades de la ponderación porque tenemos que definir algo que cumpla todo eso.

[124E] : Que todas esas propiedades, ya escribámoslas entonces, empecemos por ahí.

[125ES2] : Ya, entonces, primero tiene que ser…α, α más, sea, sea α, β pertenecientes a, a…

[125E] : ¿Al cuerpo?

[126ES2] : Sí. acá, bueno no decía cuerpo acá ¿o si? No.

[126E] : Sobre IK.

[127ES2] : Sobre IK, dice un cuerpo en general, α, β perteneciente a IK y X perteneciente a IR menos el cero entonces tiene que cumplir que α+β… por X es igual a αX más βX, la otra es que, sea x, y perteneciente a los reales menos el cero, ya y α perteneciente al cuerpo tal que α por x+y sea igual a…

[127ES2] : ¿Esa son tres propiedades o son dos?

[128ES2] : Son tres, no eh a no esa era la misma, Si esta no.

[128E] : La tercera.

[129ES2] : Y eso que tiene que existir…tal que… por X…ya y la otra es la.

[129E] : La que no nos acordamos

[130ES2] : No me acuerdo ya pero acá yo estaba pensando, ya a lo mejor la ponderación usual sirve, pero no, no sirve.

[130E] : ¿Cuál es tu ponderación usual?

[131ES2] : Que sea que α por el vector sea…

[131E] : Multiplicar a multiplicar.

[132ES2] : Pero no sirve, porque.

[132E] : ¿Por qué? ¿Cuál falló?

[133ES2] : Bueno, no se si fallará la otra pero por lo menos está falla.

[133E] : A ya no, fallando una tu saber que ya no, entonces la usual tú ya la haz descartado porque no cumple el ¿número?

[134ES2] : La dos.

[134E] : La dos, ya…

[135ES2] : Entonces a ver…

[135E] : Si quieres hacer intentos acá puedes hacerlos y tener hojas paralelas ahí para que se vea.

[136ES2] : Bueno α+β por X…yo creo que la primera no es tanto problema o sea yo creo que hay que preocuparse más de esta, por que esto involucra la definición de, de la suma. Que está arriba.

[136E] : De la suma que está ahí, buen punto.

[137ES2] : Ya entonces… entonces, bueno al final lo que se pide que α por X+Y es igual a, a…a…a eso por X por Y ¿si?

[137E] : Claro, ocupando la definición suma.
[138ES2] : Entonces yo creo que a lo mejor podría ser que definir la…

[138E] : ¿La quién?
[139ES2] : A, no a ver

[139E] : ¿En quién habías pensado que no me alcancé a dar cuenta yo en que pensaste?
[140ES2] : No, es que estaba pensando, estaba pensando es definir la ponderación como la suma pero no, fue, que sea una coincidencia, ya a ver nosotros queremos que pase, bueno en realidad esto no dice nada esto es la definición no más, entonces queremos que esto sea igual a αx…α por x , lo voy a escribir así mejor: α ponderado con x por y sea igual a α ponderado con x más α ponderado con Y…

[140E] : Cuéntame en qué estas pensando para saber.
[141ES2] : Bueno, estaba pensando en alguna operación que nos permite igualar eso porque, lo de acá ya, es multiplicación esta ponderación de acá es multiplicación, si a lo mejor no se si estará bien escrito si porque esto, a no está bien porque al final esta multiplicación, esta es la multiplicación que.

[141E] **:** Esa es la suma que tú pusiste ahí.
[142ES2] : Sí, entonces…que esto sea igual a eso.

[142E] : A una operación que te haga eso, eso estas pensando en el fondo.
[143ES2] : Sí.

[143E] : Y ¿Qué encuentras?
[144ES2] : Ese es…x, y, igual…

[144E] : ¿En qué estás pensando?
[145ES2] : Bueno estoy tratando, no se me ocurre nada en realidad, una pregunta ¿esto es tiene que ser para cualquier cuerpo cierto?

[145E] : No, si quieres tú te das un cuerpo, un cuerpo IK, sobre un cuerpo IK.
[146ES2] : Ya, porque a lo mejor si me tomo un cuerpo en particular puede ser más fácil.

[146E] : Ya como… ¿cuál por ejemplo?
[147ES2] : Como el…como el cero uno porque tiene, ¿Por qué seria más fácil definirlo? Porque tiene pocos casos, o sea podría verlos, calcularlos.

[147E] : A ver ¿Cómo es eso?
[148ES2] : Entonces las posibilidades de α son uno y cero.

[148E] : Entonces veamos, entonces vamos a tomar IK, sea IK igual a... cero uno.
[149ES2] : Sí, entonces si IK es igual a cero uno, entonces tendríamos que ver que eh, cero por que sea no, ponderado con X por Y tiene que ser cero ponderado con X…más cero ponderado con Y, ya aquí esto tiene que dar, tiene que ser distinto de cero si porque sino no funciona, que sea tiene que ser distinto de cero para que esté en el conjunto, en este conjunto.

[149E] : Sí, efectivamente.
[150ES2] : Eh… eh…a ver, bueno con el cero, vamos a tomarnos el uno mejor, que a ver si lo puedo hacer con el uno, es igual a…

[150E] : Si tú quieres la dejamos un rato y pasamos a las otras para ganar tiempo.
[151ES2] **:** Ya, si por favor.

[151E] : Y después si hay tiempo volver.
[152ES2] : Ya.

[152E] : Porque uno puede estar todo el día en esto y más tal vez, ya.

Pregunta 8

[153ES2] : Ya a ver dice: eh se define V como los vectores en IR^3 tal que todos los vectores son mayores que 0 entonces que sean mayores que cero, entonces un espacio vectorial con las operaciones suma de U+V.

[153ES2] : Esa es la suma.
[154ES2] : Ya y la es ponderación bueno se define así.

[154E] : ¿Quieres galleta?
[155ES2] : Ya…

[155E] : Entonces que dice cuando se define una suma y una ponderación que dice a continuación.

[156ES2] : Dice: sea W el espacio de todos los puntos de V situados sobre el plano Z igual uno.

[156E] : Ya Z es ese.
[157ES2] : Escriba dos vectores de W, ya sobre el plano Z igual uno.

[157E] : ¿Estás imaginándotelo?
[158ES2] : Sí, estaba pensando.

[158E] : ¿Geométricamente o no?
[159ES2] **:** Sí, bueno que Z sea igual a uno es que el primer elemento de, que sea que el elemento Z es igual a uno entonces eso es fijo…

[159E] : Si quieres escribes dos elementos de W para saber como estas pensando en W.
[160ES2] : Entonces vamos, x, y, z,-1, 2,1 y 3, 2,1 perfecto esos serían dos elementos de Z ¿Cuál es el vector nulo de W?, el vector nulo de W.

[160E] : Si, ¿Cuál es el vector nulo? Come galletas no más si puedes ir comiendo y trabajando.
[161ES2] : Es el 1, 1,1.

[161E] : Yo te voy a preguntar ¿Por qué? Me tienes que argumentar ¿Por qué? Estás diciendo que es ese una breve argumentación ¿Por qué?
[162ES2] : Bueno, primero me fui a las operaciones o sea, tiene que ser que un vector ,que sea sabemos que el vector nulo con la suma tiene que al sumarlo con otro vector tiene que dar el mismo vector, entonces aquí cumple el 1,1,1 y acá pensé que ya si α cuando α vale cero, bueno eso me dio en realidad el vector y dije ya cuando α vale cero tiene que ser el vector nulo entonces α por y ahí X elevado cero, Y elevado a cero.

[162E] : P0erfecto, prefecto ¿o sea lo comparaste de dos manera?
[163ES2] : Sí es que sea primero en realidad lo primero que pensé fue que cuando α vale cero tiene que darme el vector nulo.

[163E] : ¿Puedes anotarme eso ahí? En chiquitito para yo saber que pensaste en eso.
[164ES2] **:** Ya y esto después lo probé acá y ahí funcionaba entonces.

[164E] : Y lo comprobé con…
[165ES2] : Ya, entonces si, bueno entre paréntesis ya aquí eso ya responde la pregunta anterior o sea yo creo que esa debería que ser la ponderación sin pensarlo mucho.

[165E] : Ya de ahí volvemos entonces se te ocurrió una.
[166ES2] : Que sea realmente no se me ocurrió, porque…

[166E] : Fue mirando esa, lo bueno es que hiciste relaciones, hiciste relaciones entre cosas.
[167ES2] : Pero nunca yo creo que se me hubiese ocurrido.

[167E] : No, no importa después volvemos, ya…
[168ES2] : Entonces ya dice: si V es igual a 3… bueno ese vector 3, 2,1 perteneciente a Z ¿Quién es?…

[168E] : W no Z.
[169ES2] : Que sea W, ¿Quién es el menos v o sea el inverso? Entonces… ¿Qué tenemos que ver? Que menos v va a ser un vector perteneciente a W que sumado este vector tiene que dar el neutro, o sea el uno coma a uno, (1, 1,1) en realidad entonces va a ser bueno voy a hacer el proceso como para encontrar.

[169E] : Bueno, tú argumentas.
[170ES2] : Entonces sabemos que (3, 2,1) más, así, lo voy a llamar x, y, z pero sabiendo que…

[170E] : Ese es buscando el que ando buscando cierto.
[171ES2] : Menos v es igual x, y, z entonces según las definición eso es eh… 3x coma 2y más z y como queremos que sea igual al 1, 1,1 llegamos a que, bueno entonces, entonces x es igual a 1/3 y es igual a ½ y Z es igual a 1 y este vector está en W porque son todos positivos.

[171E] : Son todos positivos ¿y el Z?
[172ES2] : Eh…

[172E] : Es uno.
[173ES2] : Es uno.

[173E] : Pasamos al cuatro.
[174ES2] : Los vectores 2, 2,1 ya estos dos vectores ¿son linealmente independientes? Ya a ver…

[174E] : Tal vez este lápiz tiene más punta porque veo que a ese se le había acabado, si este más, ocupa ese este se ha ido gastando por favor, si quieres volver al otro después pero intenta con ese creo que está bueno.
[175ES2] : Ya entonces bueno así no lo veo inmediatamente pero parece que no.

[175E] : Y… ¿Qué quieres hacer para verlos?
[176ES2] : Usar la definición de… que sea para ver si son linealmente independientes pero obviamente con las operaciones que se definen acá, entonces tenemos que ver , sea α y β perteneciente a IR entonces vamos a tomarnos la siguiente combinación lineal α por 2 coma uno más…y lo igualamos a cero entonces bueno para

que sean linealmente independientes α y β tienen que ser cero… bueno esto es cero el vector cero eh a pero bueno y ahí esto es 1,1,1 y entonces esto es 2 elevado a α , 2 elevado a α , eh uno, lo voy a escribir así, más eh voy a escribirlo como dos elevado a menos uno por para, para poder sumarlo y menos β, 2 elevado a – β , 1 ya y la suma.

[176E] : Te doy otra hoja, ponle ahí un numerito no más.
[177ES2] : Este es continuación de la pregunta 4 ya entonces ya y eso es igual a 2 elevado a α menos β, dos elevado a α- β, uno ya y nosotros queremos que esto sea igual a 1, 1,1 y por lo tanto para que eso pase tiene que ser α- β tiene que ser igual a cero entonces α tiene que ser igual a β por lo tanto no son linealmente, por lo tanto no son linealmente ya y ahí.

[177E] : 5 que dice la cinco.
[178ES2] : ¿El conjunto es una base para W? ¿Cuál es W?

[178E] : El W era este el subespacio.
[179ES2] : Eh…

[179E] : Lo mismo.
[180ES2] : Sí.

[180E] : Pero pasa para W.
[181ES2] : Sí, si va a ser una base para W.

[181E] : ¿Por qué?
[182ES2] : Porque a bueno decía realmente bueno lo único que hay que ver es que, que sea linealmente independiente porque, que lo genera eso si se ve y bueno porque W tiene dimensión dos por la definición de W y todo, cualquier operación que se aplique aquí va a quedar en W porque el uno elevado a lo que sea es uno y la suma que es multiplicación ahora también va a dar uno.

[182E] : Entonces respondamos eso.
[183ES2] : Entonces 5, bueno vamos a probar, no, a verificar si 3, 3,1 y 1/3,3,1 son linealmente independiente , ya eh…bueno entonces lo mismo nos tomamos una combinación lineal α, α por 3,3,1…más β por 1/3, eh no , que sea no son L.I.

[183E] : ¿Cómo lo puedes asegurar?
[184ES2] : Por lo que hicimos antes porque este va a dar por lo menos la primera coordenada va a dar que va a ser 3 elevado a α- β y nosotros vamos querer que sea igual a uno y eso me va a dar que α sea igual a β.

[184E] : Entonces argumenta ahora, viste algo que antes no veías ¿Cómo podrías decirlo ahora? No son L.I.

[185ES2] : Ya, no son L.I. ya que, ya que bueno, la condición que sean L.I determina una ecuación que no se cumple para α y β igual a cero solamente.

[185E] : Ya, perfecto.

[186ES2] : Para α igual β igual a cero.

[186E] : Por lo tanto, qué puedes decir de ese conjunto.

[187ES2] **:** Por lo tanto, el conjunto no es base de W.

[187E] : Etapa superada, ¿quieres más galletas?

[188ES2] : Ya.

[188E] : Nos quedan tres y estamos ya, éstas que vienen ahora son como rutinas que tú te haz enfrentado en los cursos, para ver como andan esas rutinas.

[189ES2] : Ya.

[189E] : Seguramente son preguntas que tú ya haz antes reflexionado, veamos, se dan.

Pregunta 9

[190ES2] : Dice: sea U, WyV tres subespacios de IR^3 definidos como siguen se pregunta ¿U es igual a V igual a W?

[190E] : Sí, no ¿Por qué? Si dices que si son iguales ¿Por qué? Si son distintos ¿Por qué? Algún argumento que me dé…

[191ES2] : Bueno para que, bueno así a simple vista no los veo no veo si son iguales o no entonces lo que haría yo, primero determinar la condición que determina a cada uno porque aquí esta listo.

[191E] : Ahí está la condición de la ecuación.

[192ES2] : Que X más Y más Z igual cero entonces aquí yo me, bueno vamos a ver vamos a decir: ya sea un v perteneciente a W, un vector cualquiera entonces ¿Cómo hacer un vector en W? va a ser α por -1, 1,0 más β por 1, 0,1 y eso es igual a – α, 1 no… - α, α, 0 más α coma, va α no, β eh coma 0 coma β ¿si?.

[192E] : Sí, perfecto.

[193ES2] : Y eso es igual a β- α, α, β ya entonces tenemos que ver si cumple esa condición que X más Y más Z sea igual a cero entonces… se ve que ahí si, a ver ¿o no? Eh no, no, no la cumple como entonces de β- α+ α+ β es igual a ¿lo hice bien cierto?

[193E] : Sí, si.
[194ES2] : Sí, es igual a dos β, por lo tanto, por lo tanto…W ya es distinto de V o sea porque bueno, ¿me entendió la idea?

[194E] : Sí, no hay problema está muy claro, muy claro.
[195ES2] : Y ahora bueno es necesario que vea lo otro por que eso implica, ¿dice algo o pruebo lo otro igual?

[195E] : No, ¿tú crees que con esto puedes responder esto?
[196ES2] : Yo creo que sí.

[196E] : Eso es lo que…
[197ES2] **:** Porque eso es una, está igualando las tres cosas y si no se cumple una ya no son…ya es falso eso.

[197E] : Entonces… ¿Qué puedes decir?
[198ES2] : Por lo tanto, ¿Cuál le pongo? U el primero bueno U igual W igual V no se cumple.

[198ES2] : Perfecto muy bien.

Pregunta 10

[199ES2] : Dice: V es (x, y, z, t) perteneciente a las matrices de orden 2 en IR talque x+2y-z igual cero y x-2z+t igual cero.

[199E] : Clara la pregunta.
[200ES2] : Y eso es subespacio

[200E] : Sí, es subespacio de matrices.
[201ES2] : De IR^2 .

[201E] : Sí, de las matrices no de IR^2
[202ES2] : Que sea de IR^2, de las matrices de…ya entonces bueno hay que determinar una base…

[202E] : Sí.
[203ES2] : Bueno yo… yo aquí tomo las ecuaciones y ahí que sea yo normalmente no escribo la matriz.

[203E] : Entonces ¿Cómo? Por qué tú tienes, estos son problemas que tú ya haz enfrentado que ya haz resuelto ¿Cuál es la resolución que tienes para eso?
[204ES2] : Entonces yo bueno estas dos condiciones.

[204E] : ¿Qué hacen esas dos condiciones?

[205ES2] : Nos determinan, nos van a determinar ciertas igualdades entre los coeficientes de la matriz de una matriz cualquiera, entonces x+2y-z igual cero entonces x es igual a z-2y ya, ahora si tomamos la otra ecuación eh eso lo vamos a dejar ahí por mientras x-2z+t igual cero entonces x es igual a 2z, 2z +t, que sea menos t, menos t. Ya…entonces igualamos las dos cosas y tenemos que z-2y es igual a 2z –t, eh entonces -2y vamos a pasar, vamos a despejar Z o sea eso voy a hacer +t es igual a Z, entonces, bueno ¿Qué logramos con esto? Que X.

[205E] : Hacer despejes, logramos hacer despejes veo yo.

[206ES2] : Sí, no pero X va estar en función de Y, y, de T bueno Z también va estar en función de Y, y, de T y, Y, y, T son parámetros no más por lo tanto ya se ve que va a tener dimensión 2 ya entonces vamos a encontrar la base, eh bueno Z va a ser igual a eso y X es igual a bueno eso lo reemplazamos aquí pero eso va a dar -4y+t y ¿Cuál era el otro? de acá ¿cierto?

[206E] : Y z que lo tienes ahí.

[207ES2] : Gracias, sí, sí, si, aquí reemplazamos Z y reemplazamos -2y+…

[207E] : ¿Qué pasó? Estás reemplazando.

[208ES2] : Sí, y no esto nada que ver hasta aquí no más, ya así bueno así vamos a ordenar un poco así x-4y+t, después Y, igual Y, Z es igual a… ¿Dónde tengo a Z?
Aquí -2y+t y T igual t entonces si x,y,z,t pertenecen a V eh…x,y,z,t es igual a -4y+t ,y, -2y+t y T y eso es igual a Y por -4,1-2,0 + T por 1,0,1,1 eh… ya por lo tanto, V igual a…base de , de V.

[208E] : Perfecto, integro, la última, vamos a llegar hasta aquí porque haz respondido todo bien entonces, los que tiene bien responden hasta ahí.

Pregunta 11

[209ES2] : Dice: sea a, b tal que a+b pertenecen a IR+, bueno eso también es como en el que definimos en den antes, un IR espacio vectorial con las operaciones suma a uno más uno…ya eso es lo mismo que sea es la misma que… sólo que en IR^2.

[209E] : En IR^2.

[210ES2] : Estudiar si la dependencia lineal del subconjunto de V dado por S1, a ya, entonces lo que tenemos que ver es si son.

[210E] : Si son ¿Qué?

[211ES2] : Linealmente independiente.

[211E] : Exactamente, o no.

[212ES2] : O no, a ya bueno entonces vamos a tomar α por 2,1 vamos a probar… por ver si S1 es L.I. entonces α (2,1)+ β por 3,2 y eso es igual a y la multiplicación por escalar es 2^{α} bueno en realidad se ve que no.

[212E] : Entonces que puedes decir, no necesitas hacer cálculos.

[213ES2] : No, porque.

[213E] : Entonces ¿Cómo me argumentas?

[214ES2] : Bueno, sería algo parecido a lo que dije en den antes de que la condición de, dependencia lineal determina condiciones que, que nos aseguran que α y β no son cero siempre.

[214E] : Perfecto entonces ponlo ahí.

[215ES2] : Ya, entonces…no dices que α y β, por lo tanto.

[215E] : ¿Cómo es S2 para ti? S1 perdón.

[216ES2] : S1 es L.D. ya y S2 también es L.D, por lo mismo, por lo mismo porque el dos, bueno el uno no hay problema pero el dos va a aquedar 2^{α} que sea a β y eso.

[216E] : Ya, entonces el S2 por lo mismo para que no escribas todo ¿si?

[217ES2] : Por lo, por lo mismo.

[217E] : Ya, fin, ya muy bien y muchas gracias.

[218ES2] : De nada.

[218E] : Gracias Jonathan, después los voy a llamar, cuidado, este otro semestre para que nos juntemos a ver esto ¿ya?.

[219ES2] : Ya.

[219E] : Gracias Jonathan, un millón de gracias por haber venido.

Video ENTREVISTA –ESTUDIANTE 3

Pregunta 1

[01E] **:** La idea mía no es saber si está bien o está mal, sino que como usted elabora un argumento en su mente para dar respuesta a eso.

[01ES3] **:** Ya, esta es la pregunta uno que dice: se han definido sobre IR2 las siguientes operaciones, IR2 cruz IR2 a IR2: la suma, ahí esta definida la suma; y ponderación.

[02E] **:** O multiplicación por escalar…

[02ES3] **:** Multiplicación por escalar…

[03E] **:** … (Problemas de sonido)

[03ES3] **:** Multiplicación por escalar, llamamos. ¿Es IR2 con la operación anteriormente definida un espacio vectorial sobre IR?…

[04E] **:** ¿Qué lo hace pensar que no? ¿Cómo dijo no?, tan seguro y tan rápido.

[04ES3] **:** Porque hay una propiedad de los espacios vectoriales, para ser espacio vectorial tiene que cumplir que uno por el vector tiene que ser el vector, entonces si vemos acá…

[05E] **:** Póngase cómodo, si quiere inclinar la hoja la pone así…

[05ES3] **:** Nos queda que uno por (*x, y*) es igual a (*x,-y*) y eso es distinto, o sea no cumple esta propiedad.

[06E] **:** ¿Y eso es distinto de quién? Dice usted.

[06ES3] **:** Distinto de (*x, y*).

[07E] **:** Y eso a usted le da la seguridad de que, ¿Cuál es la respuesta que se pregunta?

[07ES3] **:** Que no es espacio vectorial.

[08E] **:** Anotemos eso, para que nos quede registrada la respuesta suya.

[08ES3] **:** Entonces como no cumple esta propiedad, IR2 con esas operaciones no es un espacio vectorial

Pregunta 2

[09E] **:** Perfecto, pasemos a la segunda… sáquese la chaqueta si quiere.

[09ES3] **:** La segunda dice: sea IR el cuerpo de los números reales y *f* de IR cruz IR una función que va de IR en IR, se define las siguientes operaciones: (*a, b*) lo lleva a *a* + *b* suma, y ponderación… lo lleva a *f*(*x*), si sabemos que IR con + es un grupo abeliano, o sea con la suma es grupo abeliano que axiomas faltan para que IR sea un espacio vectorial sobre *f* de IR a IR , se cumplen dichos axiomas. Un espacio vectorial…

[10E] **:** Para ser un espacio vectorial ¿Qué tiene que cumplir? ¿Qué recuerda de eso?, lo que sabe.

[10ES3] **:** Tiene que cumplir ciertas propiedades, son diez propiedades…

[11E] **:** Diez axiomas o propiedades… (Problemas de audio)… entonces que le dice esa información que hay ahí.

[11ES3] **:** Bueno, que la suma es un grupo abeliano.

[12E] **:** Entonces lo que le estamos pidiendo que anote es: ¿Qué axiomas o que propiedades faltan para que sea espacio vectorial? Que las anote primero.

[12ES3] **:** ¿Las que falta?

[13E] **:** Las que faltan y después que sea un chequeo cuales se cumplen y cuales no y su argumento para la respuesta.

[13ES3] **:** Falta que… axioma, ¿voy a poner axioma?

[14E] **:** Ya.

[14ES3] **:** Axioma del clausura, vamos a poner clausura con el producto por escalar, lo vamos a anotar así y aquí la clausura con, con…

[15E] **:** Con ese “por”

[15ES3] **:** Faltaría la distribución del producto escalar sobre la suma de vectores.

[16E] **:** Y ¿Cómo se anotaba eso?
[16ES3] **:** Axioma distributividad, aquí… lo voy a hacer…

[17E] **:** La notación que a usted le acomode.
[17ES3] **:** $f + g$ voy a hacer, punto x, eso debería ser f punto x, mas g por x. falta el axioma que… de f por g punto x debe ser igual a *f, g* punto x es igual a g… otro axioma $g1$ por… (Problemas de audio)…

[18E] **:** El que dijimos en la pregunta anterior.
[18ES3] **:** Sí… y a ver…no esa no es la distributividad, falta este otro axioma, distributividad es así: $x + y$…

[19E] **:** ¿Falta otra distributividad?
[19ES3] **:** Sí, es que esta no es distributividad, es… no se si será, no se como llamarla.

[20E] **:** Para nosotros llamémosla que es una distributividad y esa es otra distributividad.
[20ES3] **:** Esa es la que faltaba.

[21E] **:** Ahí están los cinco que usted… ya ahora usted me podría decir ¿Cuáles se cumplen? Y dar un argumento, o cuáles no se cumplen y dar un argumento.
[21ES3] **:** Acá se supone que, ya son las funciones, tomo una función.

[22E] **:** ¿Quién es la función? ¿Qué papel juegan las funciones ahí?
[22ES3] **:** ¿Acá? ¿Un vector?

[23E] **:** ¿Un vector?
[23ES3] **:** Sí.

[24E] **:** Y arriba ¿la suma?
[24ES3] **:** a y b son elementos de IR.

[25E] **:** Entonces, mirando esas definiciones, ¿Qué podría decir para esta? Para la otra parte de la pregunta, ¿Qué axiomas se cumplen?
[25ES3] **:** ¿Qué axiomas se cumplen?, viendo solamente el producto, por que esta otras se cumplen.

[26E] **:** Le están diciendo, no es cierto, parece.
[26ES3] **:** Sí, es grupo abeliano.

[27E] **:** Claro, entonces usted tendría que chequear ¿Cuál de esas se cumplen? y ¿Cuáles no? o elaborar un argumento para la respuesta, para decirme: “mire estas es por esto, esta por esto…”
[27ES3] **:** La uno sola se cumple.

[28E] **:** Cómo podría decirme, asegurarme que se cumple por…

[28ES3] **:** Porque es el producto es evaluado en la función lineal, y la función va de IR en IR, por lo tanto esta bien definida…

[29E] **:** Entonces podría anotar ahí: “se cumple…(problemas de audio)… por que se cumple.

[29ES3] **:** Por la definición del… de la ponderación y por el conjunto IR.

[30E] **:** Perfecto.

[30ES3] **:** Definición de…

[31E] **:** Perfecto.

[31ES3] **:** Ya, está distributividad…

[32E] **:** Si quiere usar otra hoja puede hacerlo, no se complique.

[32ES3] **:** Sí.

[33E] **:** Póngala al lado por que las cámaras… mira las hojas.

[33ES3] **:** …A6, A7, A8, A9 y A10, entonces A6 se cumplía, ahora A7… bueno se cumple también por la definición y por… por la definición de ponderación y por la definición de sumas de funciones.

[34E] **:** Entonces ahí esta dando dos argumentos importantes, no es cierto.

[34ES3] **:** Sí, tenemos la suma de funciones de cualquier elemento aquí, es *f(x)+g(x)* y *f* + *g* puntito, vector *x* es igual a *f* puntito *x* mas *g*… o sea, eso es lo que tenemos que probar, que *g* punto *x* eso esto y es lo mismo que *f+g* evaluado en *x* y es lo mismo que *f(x)+g(x)* y esto es lo mismo que *f* puntito *x* + *g* puntito *x.*

[35E] **:** Tenemos entonces que el axioma siete… podríamos ponerle ahí entonces cuál es nuestra… o abajito… (Problemas de audio).

[35ES3] **:** Por lo tanto se cumple… el axioma ocho, *f* por *g*… *f* por *g* puntito *x* es igual a *f* por *g* de *x*, esto es propiedad de las funciones, se cumple la… el producto es distributivo, o sea, perdón es conmutativo, esto es lo mismo que *g* de *f* y eso es *g* de *f* puntito *x.*

[36E] **:** Entonces ¿Qué vamos a decir?, que se cumple, ¿Cuál va a ser el argumento?.

[36ES3] **:** Este es el axioma, se cumple por la propiedad de las funciones, de las funciones reales. Axioma nueve, este no se cumple, que es 1 punto *x* que seria la función constante uno evaluado en *x* va a ser siempre uno, que es distinto de *x.*

[37E] **:** ¿Qué es lo que era el uno?

[37ES3] **:** El uno es la función constante.

[38E] **:** Anótelo por aquí por favor.

[38ES3] **:** Uno es igual a *f* de *x.*

[39E] **:** (problemas de audio)
[39ES3] **:** Función constante.

[40E] **:** Entonces el axioma no…
[40ES3] **:** …No se cumple. A10, *f* de *x* mas *y*, tampoco se cumple por que eso es igual a f de *x* + *y*… que no necesariamente la suma, o sea la función evaluada en la suma y la suma de las funciones…

[41E] **:** Y ¿Por qué?
[41ES3] **:** No se cumple en general.

[42E] **:** ¿Para quiénes se cumple?
[42ES3] **:** Para las funciones lineales, las rectas.

[43E] **:** Perfecto, anotemos eso.
[43ES3] **:** No se cumple, se cumple solamente para funciones lineales…para funciones lineales.

[44E] **:** Etapa superada, nos vamos con la tres.

Pregunta 3

[44ES3] **:** Es posible que existe un espacio vectorial que tenga solo dos elementos.

[45E] **:** …Que tenga dos elementos, porque con un elemento ¿puede existir algún espacio que tenga un solo elemento?
[45ES3] **:** El espacio nulo.

[46E] **:** El espacio nulo, entonces ahora viene la pregunta ¿con dos elementos? ¿Qué puede decir usted? o ¿Cómo daría una respuesta para eso?
[46ES3] **:** Yo creo que si, podría haber…

[47E] **:** Está pensando en que, por ejemplo.
[47ES3] **:** Podría ser un cuerpo de dos elementos.

[48E] **:** Y ¿Cuál es ese que esta pensando?... anote eso.
[48ES3] **:** Un cuerpo… creo que se llama acá Z sub 2, no estoy seguro.

[49E] **:** (problemas de audio)
[49ES3] **:** Si, donde la suma es… hacemos cero y uno, estarían esos dos elementos: 0 sumado 0, es 0; 0 sumado 1 es 1: 1 sumado 0 es 1 y 1+1 seria 0… y el producto: 0 por 0 es 0, 0 por 1 es 0, 0 y 1, habría que probar, que ver que cumple los axiomas, los 10

axiomas de espacio vectorial. El axioma uno que es cerrado bajo la suma, o sea porque es cuerpo y cumple, de hecho cumple los primeros 5 axiomas.

[50E] **:** Y ¿Por qué?
[50ES3] **:** A4, A5, por que es un cuerpo, cumple la clausura, la conmutatividad, todo eso.

[51E] **:** Entonces no es necesario probarlos, ya entonces anóteme por que, lo que usted me esta contando.
[51ES3] **:** …No es necesario probar, ya que se heredan del cuerpo… solo faltarían las del producto… axioma 6 de la clausura del producto, también se hereda del cuerpo… de Z2; el axioma 7…

[52E] **:** … (Problemas de audio)…
[52ES3] **:** El axioma 7 también se hereda del cuerpo… el axioma 8, ¿puedo ver la hoja anterior?

[53E] **:** Sí, ningún problema.
[53ES3] **:** No me acuerdo como era el axioma ocho… el producto, el producto con un escalar también se hereda del cuerpo y el 9 se deduce de acá, y el 10 se hereda del cuerpo también.

[54E] **:** Entonces lo único que tendría que decir… (Problemas de audio)… distinto es el 9, si, eso es lo que me esta diciendo.
[54ES3] **:** Todos los axiomas del 1 al 10, sin contar el 9, se heredan del cuerpo y el 9 por la definición del producto.

[55E] **:** Entonces póngame que el 9 que es diferente y puede hacerle un ticket que es el mismo argumento.
[55ES3] **:** … Axioma 10 lo mismo y el 9 se cumple por la tabla, la tabla 1 2 pongámosle.

[56E] **:** Bien, muy bien, pasamos a la otra.

Pregunta 4

[56ES3] **:** W es igual al conjunto de los *p(x)* perteneciente a los R sub *n* de *x* tal que la integral de 0 a 1 de *p(x)* en *dx* es igual a cero, ¿es un espacio vectorial real? ¿Por qué? justifica… a simple vista, yo creo que es sí, por la linealidad de la integral.

[57E] **:** ya, ya…
[57ES3] **:** Y habría que probar los axiomas, todos los axiomas.

[58E] **:** Claro puede darme una justificación, la linealidad de la integral ayudará para todos lo axiomas o solo para algunos.
[58ES3] **:** Para todos.

[59E] **:** Entonces vamos mirando… el axioma 1.
[59ES3] **:** El axioma de clausura… si tomamos *p(x)*, *p* y *q* en R*n* de *x*, la suma es conmutativa, asociativa por estar en R*n* de *x* que es un espacio vectorial.

[60E] **:** Y ahí ¿entonces?
[60ES3] **:** El axioma 1 se cumple, el axioma 1 que llamaremos clausura, clausura con la suma.

[61E] **:** Usted va a decir con que operación es… (Problemas de audio)… con qué operación es.
[61ES3] **:** Asociatividad también… con la suma… en realidad lo que tenemos acá sería probar que W debiera ser un sub espacio de R*n* de *x*, entonces no habría que probar los diez axiomas.

[62E] **:** Muy bien, entonces eso le esta ahorrando trabajo, entonces anote lo que usted esta diciendo, ¿Cómo se dio cuenta que en realidad era eso y no este listado que iba a hacer?
[62ES3] **:** Porque estaba probando para R*n…* y dije si se hereda de R*n* de *x*, entonces se hereda, el axioma 2, de asociatividad, también se hereda de R*n* de *x*, entonces vi que al final W era un subconjunto de R*n,* había que probar ahora que era espacio vectorial.

[63E] **:** Entonces… (Problemas de audio)
[63ES3] **:** Claro, entonces, como W es un subconjunto de R sub *n* de *x,* entonces hay que probar W es un sub espacio de R*n* de *x.*

[64E] **:** Y ¿Cómo se prueba eso?
[64ES3] **:** Tomando dos elementos de W, sean *p(x)* y *q(x)* en R*n*, en R sub *n* de *x* y un alfa en IR entonces hay que probar que, como esto, hay que probar que alfa por *p(x)* + *q(x)* pertenece a R*n*, eso es uno y dos que el vector nulo esta en W, perdón acá es en W no en R*n.*

[65E] **:** Ya, si.
[65ES3] **:** Pertenece a W, y que el vector nulo, o sea la función constante nula también… el polinomio nulo, también esta en W.

[66E] **:** Probemos.
[66ES3] **:** Entonces se deduce por la linealidad de la integral, seria la integral de 0 a 1 de alfa de *p(x)*+*q(x)* en *dx* o en *dt,* seria alfa por cero uno de *p(x)* en *dx* + cero uno de *q(x)* en *dx*, como esto estaba, *p(x)* pertenecía... ahí es W.

[67E] **:** Sí, si no, no basta, no es cierto.
[67ES3] **:** Sí, perteneciente a W y como *p* pertenece a W, esto es 0 y alfa por 0 mas, como *q* también pertenece a W esto también es 0, entonces 0 + 0 y eso es 0 y ahí se prueba para la uno, y ahora la dos seria la integral de 0 a 1, del vector nulo, la función nula y eso es cero, por lo tanto también pertenece a W, por lo tanto W es un sub espacio de R*n* de *x.*

[68E] **:** Excelente esta entrevista. Ya vamos con la cuatro ¿Qué le parece las preguntas que ha respondido hasta el momento? ¿Son usuales para usted o no son tan usuales?
[68ES3] **:** La 2 no tanto, ¿Esta es la 3?

[69E] **:** Esta es la cuatro.
[69ES3] **:** Entonces la de sub espacio con dos elementos.

[70E] **:** El sub espacio con dos elementos…
[70ES3] **:** Averiguar si las siguientes afirmaciones son correctas, en ambos casos.

Pregunta 5

[71E] **:** … (Problemas de audio)… Entonces ahí ¿Qué dice la pregunta?
[71ES3] **:** Hay que determinar el valor de verdad de las afirmaciones.

[72E] **:** Entonces si es… que dice primero.
[72ES3] **:** Averigua si las afirmaciones son correctas o no, en ambos casos justifica tu respuesta, dice: sean V, W, y Z espacios vectoriales sobre un cuerpo K y supongamos que V + W = V + Z, entonces W = Z… yo creo que no, por, porque si vemos un…sobre un cuerpo K, son espacios vectoriales.

[73E] **:** si los tres son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo.
[73ES3] **:** Sí, podríamos ver V, W y Z como rectas vectoriales, podríamos hacer la suma cada una, por ejemplo en.

[74E] **:** Tiene que darse primero una situación concreta.
[74ES3] **:** Claro, en IR2 colocamos V una recta vectorial y, W y Z.

[75E] **:** O sea son las tres rectas ¿Cómo cuáles? ¿En qué esta pensando?
[75ES3] **:** V podría ser el generado por alfa1, alfa1 distinto de cero, W por un alfa2, alfa2 distinto de cero y distinto de alfa1 y Z el generado por un alfa3, con alfa3 distinto de cero, alfa3 distinto de alfa1 y alfa3 distinto de alfa2; ya entonces podemos ver que IR2 se

escribe como suma directa de V + W y IR2 se escribe como V + Z, sin embargo W y Z son distintos.

[76E] **:** Pero ahí eso es suma y usted puso suma directa.
[76ES3] **:** Bueno es lo mismo, eso es suma, solamente que la intersección va a ser el vector nulo y la… (Problemas de audio).

[77E] **:** Bueno, entonces póngame aquí: "es lo mismo…"
[77ES3] **:** Sería lo mismo que decir V + W y aquí V + Z.

[78E] **:** Pero tiene que relatarlo.
[78ES3] **:** Pero V inter W, es el vector nulo y V inter Z también es el vector nulo.

[79E] **:** Perfecto, entonces ¿Cuál es su respuesta?
[79ES3] **:** Que es falso y no siempre se cumple, por lo tanto la proposición es falsa.

[80E] **:** ¿Por qué fue falsa en este caso?
[80ES3] **:** Por el contraejemplo que vimos acá.

[81E] **:** Perfecto.

Pregunta 6

[81ES3] **:** La pregunta siguiente, ¿es Q un espacio vectorial sobre IR?

[82E] **:** Y tiene otra al ladito.
[82ES3] **:** ¿es IR un espacio vectorial sobre Q?... son los números reales.

[83E] **:** Y los otros ¿Quiénes son?, los…
[83ES3] **:** Conjunto Q, el de los racionales…

[84E] **:** Perfecto.
[84ES3] **:** Ya la primera es falsa.

[85E] **:** Y que lo hace pensar que es falsa, que esta pensando.
[85ES3] **:** La clausura del producto por un escalar, sería la clausura, anotémoslo así, producto por un escalar, va a ser, por ejemplo si tomamos un escalar elemento de IR, raíz de 2 por ejemplo, lo multiplicamos por un elemento de Q, eso no pertenece a Q, por lo tanto no cumple ese axioma.

[86E] **:** Entonces cual sería la respuesta para eso.
[86ES3] **:** Q no es un R-espacio vectorial.

[87E] **:** Entonces acá…

[87ES3] **:** Es IR un espacio vectorial sobre Q, acá si se cumplen todos los axiomas, Q es un sub cuerpo de IR y IR es un R-espacio vectorial, por lo tanto, se cumple.

[88E] **:** Entonces anotemos el argumento que esta dando.
[88ES3] **:** Como Q es un sub cuerpo de IR y IR es un R-espacio vectorial, entonces IR es un Q espacio vectorial, este parece que cumple los axiomas.

[89E] **:** Sí, de espacio vectorial, ¿usted cree que esta pregunta produce mucha confusión en los estudiantes?
[89ES3] **:** Sí, a mí primero me confundió quien era el cuerpo y cuál era el espacio vectorial, si era IR sobre Q o Q sobre IR.

[90E] **:** Cuesta situarse en cuál es cuál.
[90ES3] **:** Cuando son de la misma dimensión, bueno en este caso cuando ambos son cuerpo, cuesta ver cual es el espacio vectorial y cual es el cuerpo, el cuerpo de los escalares.

[91E] **:** Perfecto, era para ver si están bien situados, si reconocen las estructuras… las reconoció.

Pregunta 7

[91ES3] **:** IR menos el cero, es un grupo abeliano con la operación suma definida como sigue: suma de $x + y$ es igual a x por y donde x, y pertenecen a IR menos el 0, define la multiplicación por escalar sobre un cuerpo K para que IR menos el cero sea espacio vectorial sobre K, con esas dos operaciones.

[92E] **:** ¿Qué es lo que le pide la pregunta?
[92ES3] **:** Definir la otra operación, o sea, la operación de producto por escalar.

[93E] **:** Y tiene que definir…
[93ES3] **:** Ya, para que IR menos el cero sea espacio vectorial sobre K.

[94E] **:** Entonces aquí usted tiene que inventar o crear una multiplicación por escalar.
[94ES3] **:** Vamos a tomar alfa un elemento de K y x, y un elemento de IR menos el cero… ¿aquí habría que probar que IR menos es el cero es un espacio vectorial?

[95E] **:** Claro.
[95ES3] **:** Pero si no tiene el cero no sería un espacio vectorial.

[96E] **:** Pero el 0, ¿Por qué le importa el 0?
[96ES3] **:** Por el inverso de la suma.

[97E] **:** Pero si usted pone mas atención en la suma, ¿Cómo esta definida la suma?
[97ES3] **:** Como el producto… como el producto de los dos elementos.

[98E] **:** ¿Entonces para que quiere el cero?... ¿Por qué le provoca cortocircuito eso?
[98ES3] **:** Que estaba viendo que un *x* mas un *u* debe dar *x*, paro aquí esta definida así, entonces el *u* vendría siendo el 1 y no el 0.

[99E] **:** Entonces ¿Quién vendría siendo el 1?
[99ES3] **:** El uno es el elemento neutro para la suma.
[100E] **:** Y usted ¿Qué había pensado al principio?
[100ES3] **:** Que el cero era el elemento neutro para la suma.

[101E] **:** ¿Por qué pensó en el cero?
[101ES3] **:** Por… bueno, por la suma de inversos me tiene que dar cero.

[102E] **:** Porque la suma tiene siempre asociado el cero ¿algo así?, pero este caso no ¿no es cierto?, claro, entonces ¿Quién esta jugando como el neutro aquí? ¿Quién es el neutro?
[102ES3] **:** El uno vendría siendo el neutro para la suma.

[103E] **:** Entonces ¿es importante que este el cero? o ¿no?
[103ES3] **:** Ahora no.

[104E] **:** Entonces ahora que hemos comprendido nuestra suma, va a tener que definir usted un producto por escalar, usted intentarlo, no lo damos en este caso, si no que usted lo pueda inventar.
[104ES3] **:** Tiene que ser cerrado sobre la suma… ya eso podría ser.

[105E] **:** Puede darse un cuerpo en particular ¿si usted quiere?, o si quiere trabajar con uno en general, también.
[105ES3] **:** Esto debería dar… debe cumplir esto, esto que eso es lo mismo que alfa por *x* + *y* y eso es igual a alfa por *x* por *y*…

(Silencio de 1:30 minutos)

[106E] **:** ¿Quiénes son los vectores en este caso? ¿Quién son los vectores?
[106ES3] **:** *x* e *y*, esos son mis vectores y alfa es el elemento del cuerpo.

[107E] **:** pero ¿Qué objetos son el *x* y el *y*?
[107ES3] **:** Números reales distintos de cero… esto es lo mismo que alfa cuadrado por *x* por *y*… en realidad eso es lo que tiene que

cumplir y si lo vemos en este caso, estos son dos vectores por lo tanto la suma va a ser el producto de ellos entonces alfa cuadrado por *x* por *y*, pero no podemos definir el producto así, como alfa de *x* + *y* = alfa cuadrado de *x* por *y*… por que nos quedaría alfa por *x* por alfa por *y*, y eso es alfa *x* + alfa *y*, y ahí se cumpliría esa condición pero no se cumple la condición de que alfa + beta por *x*, debería ser… tiene que cumplir alfa *x* + beta *x* y eso debe ser alfa por beta *x* cuadrado.

[108E] **:** El producto es necesario definirlo en la suma, para definirlo o hay que definirlo en un objeto, en un vector.
[108ES3] **:** ¿el producto?, en un vector, pero tiene que cumplir…

[109E] **:** O sea usted esta chequeando automáticamente, eso es lo que usted esta haciendo, le esta haciendo un chequeo.
[109ES3] **:** Sí, se define en un vector y un elemento del cuerpo, un escalar, pero debe cumplir las propiedades de espacio vectorial.
[110E] **:** Usted esta haciendo las dos cosas a la vez.
[110ES3] **:** Claro, estoy tratando de buscar la multiplicación para, pero que cumpla las condiciones.

[111E] **:** Lo que esta tratando de hacer ahí… si quiere usar otra hoja ahí hay, no es necesario que la pida.
[111ES3] **:** Se tiene que cumplir… (Silencio 46 segundos)… tendríamos que 1 por *x* debería ser *x*… (Silencio 1 minuto).

[112E] **:** ¿Qué es lo que cuesta de esta pregunta, hacer?
[112ES3] **:** Chequear que cumpla las condiciones.

[113E] **:** Y también hay una parte creatividad de uno… ¿no se atreve a poner ninguna operación?... sin pensar tanto en los axiomas sino que en la operación primero.
[113ES3] **:** La operación, si, esa puede ser una…

[114E] **:** Pero dijo que le fallo.
[114ES3] **:** No cumple acá.

[115E] **:** Otra, no podemos seguir pensando en esa.
[115ES3] **:** Que alfa cuadrado *x* cuadrado, esa también podría ser… alfa por *x* lo lleve a alfa *x* cuadrado pero no cumple esta… (Silencio de 40 segundos)… la otra es que alfa por *x* lo lleve a alfa + *x.*

[116ES3] **:** Y nos quedaría… alfa *x* + *y*… a ver esa podría ser, alfa + *x,* la primera alfa de *x* + *y* debería ser alfa + *xy.*

[116E] **:** Ahora, tiene que poner la hoja ahí para que la podamos ver.
[117ES3] **:** Y eso es alfa *xy,* pero no cumple la condición.

[117E] **:** ¿Tampoco podría ser esa?, otra… ¿quiere una galleta?

[118ES3] **:** No, gracias… alfa por *x* lo llevo a alfa cuadrado por *x* ya y ahí cumple el axioma de alfa de *x* + *y* es igual a, alfa cuadrado + *x* + *y*, y esto es alfa cuadrado por *x* por *y*, y eso es alfa por *x* + alfa por *y*, se cumple una; alfa + beta por *x* + *y* es igual a alfa + beta + *x* e *y*…tengo un problema al definir esto, por que alfa es un escalar y *x* es un vector.

[118E] **:** Sí.
[119ES3] **:** Podríamos definir como alfa por *x* es igual a alfa cuadrado por el vector uno más, no se puede definir así.

[119E] **:** (problemas de audio)… La definición.
[120ES3] **:** No es que estoy usando el producto que aun no defino, estoy usando el producto que aun no defino.

[120E] **:** La condicional, ésta sea igual a esa.
[121ES3] **:** A ver, alfa de x igual a alfa por x + alfa por x… alfa por *x*+ *y*, y ese alfa… alfa por x + y, alfa por *xy* mas alfa *xy,* no nos queda todo al cuadrado.

Silencio de 2:15 minutos

[121E] **:** Porque hay muchas operaciones entre dos números, ¿no?
[122ES3] **:** Sí.

[122E] **:** Como una de esas operaciones no le va a servir.
[123ES3] **:** Alfa por *x*…

[123E] **:** ¿Qué esta pensando?
[124ES3] **:** En poder usar el inverso multiplicativo o el inverso aditivo acá, definir el producto a través de la suma, o sea usando la suma… hacer alfa + beta por *x* + *y*… a esto tenemos que llegar… (Silencio de 1:35 minutos) y si lo elevo al cuadrado.

[124E] **:** Tal vez lo adecuado seria pensar en operaciones no mas, primero.
[125ES3] **:** Que alfa por *x* lo lleve a…

[125E] **:** ¿Quieres dejarla y después volvemos?
[126ES3] **:** Ya mejor, para…

[126E] **:** Usted me dices un instante y abortamos la pregunta. No piense en esta por que si no…

Pregunta 8

[127ES3] **:** Dice: sea V el conjunto de los *x, y, z* pertenecientes a IR3 tal que *x, y, z* sea mayor que 0, un espacio vectorial con las operaciones suma y ponderación… sea W el espacio de todos los puntos de V situados sobre el plano *z* = 1, escriba dos vectores de W. ya como es sub espacio de V debe cumplir que las primeras coordenadas deben ser mayor que 0, puede ser 1 1 y como el *z* tiene que ser 1 es 1 y el otro el 2, el 5 y el 1.

[127E] **:** Perfecto, era mostrar si entiende bien el W.
[128ES3] **:** Cual es el vector nulo de W, ah de W puede ser el mismo de V.

[128E] **:** Sí, entonces la pregunta es cuál es el de V entonces.
[129ES3] **:** El 1 1 1.

[129E] **:** ¿Cómo sabe, como esta tan seguro de que es el 1 1 1?
[130ES3] **:** Por la definición de la suma podría ser…

[130E] **:** Anota cuál es primero.
[131ES3] **:** Llamaremos al vector *y*, no, el vector *e*, *e* igual a 1 1 1, entonces *u* + *e* debe ser igual a *u* y *u* es (*x, y, z*) + *e* que es 1, 1, 1 y eso es… *x* por 1 es *x* 1 por *y* es *y* y *z* por 1 *z.*

[131E] **:** Perfecto, y eso te garantiza a ti, que…
[132ES3] **:** Que (1, 1, 1) es el vector nulo… de W y de V.

[132E] **:** De V también ¿Por qué tiene que ser de los dos?
[133ES3] **:** Por la unicidad, porque si ésta en W también va a estar en V.

[133E] **:** Y ¿Quién lo garantiza eso? la… ¿Qué lo esta garantizando eso?
[134ES3] **:** la unicidad del vector nulo… si V es 3 2 1 perteneciente a V quien es menos V… aquí debe ser que V + menos V debe ser igual a (1, 1, 1) vector nulo, V vale (3, 2, 1) aquí podemos resolver, mas –V debería ser, puedo llamarlo (*x, y,* 1) porque esta en W, siempre va a ser 1, (1, 1, 1) y eso es 3*x,* 3 por *x*, 2*y*, 1 y eso es igual a (1, 1, 1), eso implica que *x* vale 1/3 , *y* vale ½ , por lo tanto el inverso o sea –V seria igual a (1/3, ½, 1).

[134E] **:** Perfecto
[135ES3] **:** ¿Son linealmente independientes?

[135E] **:** Esos dos vectores, ¿son linealmente independientes?
[136ES3] **:** …alfa y beta en IR… a ver, deben ser uno múltiplo escalar del otro, para ser dependientes…

[137ES3] **:** A claro, este es múltiplo escalar de este, si amplificamos por -1, por el vector (2, 2, 1) eso es 2 a la -1, 2 a la -1, 1 a la -1 y eso es ½ ½ 1.

[136E] **:** Por lo tanto, los vectores ¿Cómo serían?
[138ES3] **:** Linealmente dependientes.

[137E] **:** Perfecto, cinco.
[139ES3] **:** El conjunto ¿es una base para W?... bueno el sub espacio W es de dimensión 2.

[138E] **:** Anotemos eso entonces.
[140ES3] **:** La dimensión de W es igual a 2, entonces habría que probar solamente que es LI, que el conjunto es LI, sean alfa, beta en IR, entonces alfa por (3, 3, 1) + beta por (1/3, 3,1) debe ser igual al vector nulo, que es (1, 1, 1) y eso es 3 elevado a alfa, 3 elevado a alfa, 1, mas, 1/3 elevado a beta, 3 elevado a beta, 1 y esto es igual (1, 1, 1), ahora alfa, ya, la suma me da el producto, eso es 3 por 1/3 elevado a beta, eso es 1 elevado a beta, que es 1 y esto es 3 elevado a alfa + beta y el ultimo es 1… si.

[139E] **:** Sí
[141ES3] **:** Está bien, no acá es 3 elevado a alfa por 3 elevado a beta.

[140E] **:** Claro, porque no es el mismo alfa, lo había simplificado.
[142ES3] **:** Es igual a (1, 1, 1), entonces ahora tiene que cumplir que esto es igual a 3 elevado a alfa menos beta, 3 elevado a alfa + beta, 1 igual a (1, 1, 1) entonces tiene que cumplir que esto tiene que ser 0 para que la para que la potencia sea uno, alfa menos beta igual a 0 y alfa mas beta igual a 0, resolvemos este sistema y nos queda que alfa es igual a cero y beta es igual a cero, por lo tanto es LI, por lo tanto el conjunto (3, 3, 1) y (1/3,3,1) es LI y por lo tanto una base de W.

[141E] **:** ¿Por qué basta que sea LI para que sea base?
[143ES3] **:** Por la dimensión del espacio, tiene que haber dos elementos en la base.

Pregunta 9

[142E] **:** Muy bien, ahora son unas preguntas rutinarias que seguramente son de cuentas, a ver como las argumenta.
[144ES3] **:** Sean U, W, V tres sub espacios de IR3, definidos como sigue U es generado por (1, 2, 3) (1, 0, 1) y (0, 1, 1), W es el generado por (-1, 1, 0) (1, 0, 1) y V son los (*x, y, z*) en IR3 tal que la suma de sus componentes es 0 se pregunta U = W = V.

[143E] **:** (problemas de audio)… son iguales, ¿Qué esta pensando en responder?

[145ES3] **:** En que si este es LI o LD el conjunto del sub espacio U.

[144E] **:** ¿Por qué?... ¿Por qué pensaste en chequear eso primero?

[146ES3] **:** Para ver la dimensión de U y de V y de W.

[145E] **:** Ya, estaba viendo las dimensiones.

[147ES3] **:** Y el primer… se puede eliminar uno, un vector ya que se escribe como combinación lineal de estos dos, por ejemplo el primero se puede escribir como una vez el segundo mas dos veces el tercero.

[146E] **:** Entonces anotemos eso.

[148ES3] **:** Entonces, (1, 2, 3) se escribe como (1, 0, 1) + 2 veces (0, 1, 1), suponiendo que las operaciones son las usuales.

[147E] **:** Sí, bien, las usuales, buena observación.

[149ES3] **:** Entonces U es igual al generado por (1, 0, 1), y el (0, 1, 1)… si estamos bien, ya, ahora hay que ver que W es el generado por… menos 1… y (1,0,1) si, ya, entonces ahí estaríamos bien… ya U es igual a W por que cada vector de la base U se escribe como combinación lineal de los vectores de la base de W y los vectores de la base de W se escriben como combinación lineal de los de la base de U.

[148E] **:** Vamos a anotar eso entonces, el argumento para decir que son iguales.

[150ES3] **:** U es igual a W ya que cada vector de U se escribe como combinación lineal de los vectores de la base de W y viceversa, yo creo que se escribe así., ya y W no es igual a U, bueno W, no V es distinto de W, ya, si tomamos es vector (1, 0, 1) la suma de sus coordenadas es 2 que es distinto de 0, no cumple la condición por lo tanto no son iguales, bueno y lo mismo pasa con U, U es distinto de, de V, ya que el vector, este por ejemplo o cualquiera de los dos, da lo mismo, (0, 1, 1) es igual a 0, 0 + 1 + 1 y eso es igual a 2 que es distinto de 0 por lo tanto este vector no pertenece a la base de V… (Problemas de audio).

[149E] **:** … (Problemas de audio)

[151ES3] **:** … Que U y W son iguales pero V es distinto de U y V es distinto de W, bueno da lo mismo, con que ya sea distinto de uno es distinto del otro.

Pregunta 10

[152ES3] **:** V el conjunto de las matrices de orden 2 tal que sus coordenadas… determine una base para V.

[150E] **:** Claro es un sub espacio de las matrices, ¿no es cierto?, se pide una base para V.

[153ES3] **:** Ya, desarrollamos el sistema de ecuaciones…

[151E] **:** ¿Por qué hay que desarrollarlo? ¿Por qué?

[154ES3] **:** …x + 2y – z = 0 para determinar las soluciones del sistema que van a dar los componentes de las matrices… desarrollamos… multiplicamos por menos 1 abajo… lo vamos a hacer como matrices, mejor… a la fila 2 le sumamos la 1 con un menos 1, 1 2 -1 0… 0 -2 -1 1 (teléfono)… la fila dos…

[152E] **:** No te preocupes si quieres contesta.

[155ES3] **:** No, ya, las 2 le sumamos la 1 por menos 1, nos queda 0 -2 1 -1, ya tenemos eso, ya y ahora la fila 1 le sumamos la 2 por uno, nos queda 1 0 -2 y 1, 0 -2 -1 1 y a la fila dos la amplificamos por -½ y nos queda 1 0 -2 1 y 0 1 ½ -½, si ahora entonces el… desarrollamos acá y eso implica que *t* = *t* y *z* = *z*, por lo tanto *y* vale ½ de *t* mas ½ de, -½ de *z* y *x* vale 2*z* – *t*, entonces reemplazamos arriba y nos queda que *x* vale 2*z* – *t*, *y* vale ½*t* - ½*z, z* vale *z* y *t* vale *t* y eso se escribe como *z* veces 2 -½…

[153E] **:** Espérate un poquito, ¿Cómo sacaste el *y*?

[156ES3] **:** El *y*, dijimos que primero que *t* era *t* y que *z* era *z*, entonces aquí nos queda *y*, si…

[154E] **:** Sí, ya perfecto, o sea vamos, o sea usaste esto para sacar *x* y sacar *y.*

[157ES3] **:** Entonces *z* vale 1 y aquí hay cero *z* más *t* que vale -1 ½ 0 y 1 y esa seria una base, por lo tanto el conjunto 2 -½ 1 y 0, -1 ½ 0 1 es una base para V.

Pregunta 11

[155E] **:** Esta es la última pregunta que todo… (Problemas de audio)…

[158ES3] **:** Sea V = al conjunto de los (*a, b*) tal que *a, b* pertenece a IR+ un R-espacio vectorial con las operaciones suma *a*1 + 2, 1 + 2 y la ponderación, es parecido al anterior, estudiar la dependencia lineal de los sub espacios de los subconjuntos de V dados por, ya tenemos S1, S1 podríamos decir que es linealmente independiente.

[156E] : ¿Por qué?
[159ES3] : Porque si no uno fuese múltiplo escalar de otro y para ser múltiplo escalar debe ser, el único alfa que cumple seria el cero o *k* debería ser 0, pero tres elevado a cero es 1 también, por lo tanto uno no es combinación lineal del otro, por lo tanto es LI.

[157E] : Ese argumento ¿Cuál sería?, lo escribe ahí.
[160ES3] : La conclusión, por lo tanto, el conjunto es LI, ya que uno no es múltiplo escalar de otro.

[158E] : Perfecto, eso es para S1.
[161ES3] : El S2… si es, es linealmente dependiente.

[159E] : ¿Cómo te das cuenta tan rápido?
[162ES3] : Porque ese es combinación… ese es producto escalar, es alfa veces este tendría que ser 0 veces…

[160E] : Perfecto, escribe por favor.
[163ES3] : Pero… a ver es 0 veces… si, ya el S2 es LD ya que (1, 1) es igual a 0 por (2, 1) y eso es igual a 2 elevado a 0, 1 elevado a 0 y eso es (1, 1) o sea uno es múltiplo escalar del otro.

[161E] : Muy bien, pero muy bien; no se si quieres volver a la pregunta que dejaste para definir la…
[164ES3] : … El producto, ya.

[162E] : Era la… no te voy a pasar lo otro para que… (Problemas de audio)
[165ES3] : Sí, entonces tiene que cumplir que sea…

[163E] : … (Problemas de audio)
[166ES3] : Eso debe dar alfa cuadrado por *xy*, ahora *x* + *y* debe dar *x* cuadrado *y* cuadrado… (Silencio de 1:30 minutos).

[164E] : ¿Qué operación podría cumplir eso?... (Silencio de 1:24 minutos)… ¿Cuál es la idea que tiene? Para saber…
[167ES3] : La idea es tratar de usar el inverso multiplicativo… (Silencio de 52 segundos).

[165E] : ¿No hay otra idea que no sea esa? ¿Sin usar el inverso? otra…
[168ES3] : Es que era: una elevar al cuadrado pero en la suma me quedaban los términos… (Problemas de audio)…

[166E] : Claro, ahí esta el problema.

[169ES3] **:** Si elevamos al cuadrado se cumple esa ¿y se cumple ésta? Pero no se cumple ésta.

[167E] **:** Claro favorece unas, falla en otras.

[168E] **:** Si tú decides dejarla hasta aquí también esta bien, no te preocupes, si quieres seguir luchando contra la pregunta, también es valido (silencio de 1:33 minutos).
[170ES3] **:** La suma de sus cuadrados.

[169E] **:** Pensar en cuadrados ¿va a traer éxito a la pregunta?
[171ES3] **:** ¿Cómo?

[170E] **:** Pensar en esos cuadrados ¿a traído éxito a la pregunta?
[172ES3] **:** No, complicación… bueno eso tendría que ocurrir, ahora hay que buscar cual es la operación que lleva a eso.

[171E] **:** Hay que buscar una operación que lleva a eso, ¿cierto?... no te viene a la mente ninguna ¿Qué pueda cumplir eso? (silencio de 3:00 minutos).
[173ES3] **:** … (Murmullos)… podría ser *x* alfa *x*, una cosa así, alfa por *x*… tomando que el, pero este es un vector…

[172E] **:** Eso es lo mismo que alfa *x* cuadrado ¿no?
[174ES3] **:** Claro pero seria como… es que estoy viendo esto como un escalar, esto es un escalar, pero estos son vectores entonces la multiplicación de vectores no esta definida.

[173E] **:** No, eso es lo que tienes que definir tú, pero no multiplicación de vectores, sino de escalar por vectores eso es mucho lo que estas pidiendo, eso es muy exigente, claro multiplicación de vectores, porque uno sabe el producto punto entre vectores, ¿no es cierto?
[175ES3] **:** Pero ellos son elementos reales, o sea ahí no se complica mucho cuando son elementos reales pero hay que ver el caso, tomándolos como vectores eso no se puede, o sea yo creo que no se podría hacer, por que eso es un vector multiplicado por un escalar por un vector… porque lo.

[174E] **:** Dejémoslo hasta aquí.
[176ES3] **:** Creo que no existiría una, al menos que la lleve al vector nulo, porque si tenemos esto alfa + beta por *x* debe cumplir que ser alfa por *x* + beta por *x*, pero esto, la suma de los vectores es el producto entre ellos, por la definición de suma debe ser alfa por beta por *x* cuadrado, pero si tomamos beta = 0 para hacer al alfa por *x*, nos queda que es alfa por *x* + 0, o sea 0 por *x* y seria alfa por 0 por *x* cuadrado y como son números reales es 0, es lo único que podría, o sea justificar que no existe tal operación.

[175E] **:** Que sería una posibilidad, no es cierto, ya anotemos eso.

[177ES3] **:** No existe operación alguna, operación, digámoslo producto alguno tal que IR menos el 0 sea espacio vectorial, pero vamos a decir algo contradictorio porque el 0 no esta en el espacio, pero en el cuerpo si.

[176E] **:** ¿Quién estas pensando en el cuerpo? Cuando dices cuerpo, estas pensando ¿En qué cuerpo?
[178ES3] **:** No un cuerpo cualquiera.

[177E] **:** Entonces en el cuerpo si puede estar.
[179ES3] **:** Sí.

[178E] **:** ¿Está bien que llegue al cuerpo? ¿Está bien que vaya al 0 del cuerpo?
[180ES3] **:** No.

[179E] **:** ¿Qué me debiera dar?
[181ES3] **:** Un vector de IR menos el 0, de este espacio, entonces lo que pasa es que, aquí esta operación cuando beta es 0, ya no esta definida, por que va a quedar cero por el vector y eso no existe.

[180E] **:** No existe, no existe, efectivamente pasa eso.
[182ES3] **:** Entonces yo creo que lo más probable es que no exista una operación que haga de IR menos el 0 un espacio vectorial.

[181E] **:** ¿Por qué?
[183ES3] **:** por el motivo de que si existe un escalar 0.

[182E] **:** ¿Qué está haciendo? ¿Qué papel esta jugando ahí?, ese que estas diciendo tu, ese 0.
[184ES3] **:** El neutro en el cuerpo, ese es el neutro en el cuerpo, por lo tanto existe en el cuerpo pero no existe un vector nulo en el espacio, o sea un vector cero.

[183E] **:** Claro, el vector 0 si existe o ¿no existe?
[185ES3] **:** No el 0 no, el nulo si, al 0 me refiero al 0.

[184E] **:** El elemento cero… ya esa es la respuesta, Es más difícil cuando me dicen buscar que cuando me lo dan ¿Por qué? ¿Por qué se hace más difícil cuando me piden definir? Que uno la defina eso es más complicado, o sea se siente mas complicado.
[186ES3] **:** Porque tiene que cumplir todas las condiciones entonces eso es un poco mas, como que restringe, yo puedo decir cualquier función pero va a estar restringida a ciertos, a los axiomas que tiene que cumplir, entonces yo creo que es mas difícil, bueno si ocurre, puedo ser cualquier que definir un producto, uno lo puede definir como quiera pero que cumpla los axiomas.

[185E] **:** Muchas gracias por todo.

Video ENTREVISTA – ESTUDIANTE 4

Pregunta 1

[1E] **:** La idea es ver como piensas todo lo relacionado con espacio vectorial, esa es la idea, ver como esta la noción de espacio vectorial, entonces la idea es ver como los estudiantes con la idea que tienen de espacio vectorial son capaces de enfrentarse a todas las preguntas que están aquí. Estas preguntas tienen una finalidad, ver como esta la parte cognitiva del pensamiento acerca de esta problemática, eso es lo que no nos interesa si esta bueno o esta malo este resultado. Es saber como se va pensando, elaborando un argumento para cada respuesta, eso es lo que nos importa, como se va elaborando y yo ojala te pudiera sacar una fotocopia al cerebro ver como se elaboro el argumento, pero como no puedo tengo que, la parte hablada juega un papel importante, así que cualquiera duda me la consultas, menos la respuesta, pero aquí empezamos.

[1ES4] **:** Empiezo no mas, y escribo todo así como en prueba.

[2E] **:** Si me vas contando y vas escribiendo, ambas cosas tienen que ser.

[2ES4]: **:** Dice que, con las operaciones definidas un espacio vectorial sobre IR2, dice que verificar eso, en este caso yo lo que haría seria verificar las propiedades.

[3E]: **:** ¿Cuáles propiedades se te vienen a la mente?
[3ES4]: **:** La asociatividad.

[4E]: **:** ¿Para quién?
[4ES4]: **:** Para la suma, todo es para la suma.

[5E]: **:** Anda anotando las propiedades y las vas definiendo, suma, como hay dos operaciones, cuando me dice asociatividad, me va a tener que decir para quien, porque yo no se para cual estas pensando ¿para cuál?, a lo mejor tú tienes claro para cual, pero yo no… entonces que vas a hacer las va a anotar todas y después les va a echar un chequeo así rápido o las vas a…
[5ES4]: **:** Para la suma… asociatividad… tiene que ser cerrada.

[6E]: **:** Otra más.
[6ES4] **:** Nunca me queda claro si eso es conmutativo ¿no?

[7E]: **:** No, cerrado… pero, si los opero.
[7ES4] **:** Sigue estando en el mismo cuerpo, si eso me queda claro, pero ¿Cómo se define?

[8E] **:** sS ve como esta definido, si lo que esta ahí, si lo que esta ahí, mira como te define…
[8ES4] **:** A no, si, si, pero es que hay un nombre así como asociatividad…

[9E] **:** No, nómbralo con tus propias palabras, asociatividad…
[9ES4] **:** Que sea cerrado y no me acuerdo de todas pero son varias.

[10E] **:** Y puedes ir anotando al lado para la ponderación cuales serían, si te acuerdas de algunas para la ponderación… (Problemas de audio)
[10ES4] **:** serian… mmm… que… ah

[11E] **:** Las que se te vengan a la mente.
[11ES4] **:** No estudie para esto (risas).

[12E] **:** Es sin estudio… lo que ha quedado en tu mente del curso.
[12ES4] **:** …ah, la suma tiene que ser grupo ¿no?, pero en total.

[13E] **:** Ponlo en resumen: en total, como dices tu.

[14E] **:** ¿Ya te estás acordando?
[13ES4] **:** Que... es un grupo y en ese tiene que tener propiedades de multiplicación: multiplicación por escalar, seria…

[15E] **:** Las puedes anotar como tú quieras, como se te vengan a la mente que las recuerdas.
[14ES4] **:** No, no me acuerdo de eso… se me puso la mente en blanco.

[16E] **:** Tú te acuerdas de algunas, anota alguna… hay operaciones que relacionan escalares con vectores, o sea de aquí con acá ¿Cuáles seria esas?
[15ES4] **:** No, no me acuerdo (risa)

[17E] **:** Y ¿tiene que ser solamente grupo?
[16ES4] **:** ¿Grupo?, ah, tiene que tener… bueno, tiene que tener inverso, tiene que tener neutro, yo creo que esas son todas, y aquí también son como cuatro.

[18E] **:** Sí, son como cuatro.
[17ES4] **:** Pero no me acuerdo y son muy parecidas a estas.

[19E] **:** A ver, trata de anotar alguna.
[18ES4] **:** Heeemm.

[20E] **:** Hay una que toma un escalar y dos vectores, y otra que yo tomo dos escalares y un vector.
[19ES4] **:** Ya, que alfa por (x, y) mas un (a, b) tiene que ser igual a alfa de (x, y) mas alfa de (a, b).

[21E] **:** No ve que ya estamos recordando, bien. Hay, has tomado dos vectores, ¿no es cierto?, ya, hay otra que hay que toma dos escalares y un vector.
[20ES4] **:** Verdad, entonces eso seria… espere, espere, si ya me voy a acordar.

[22E] **:** Una galleta ayuda.
[21ES4] **:** No gracias si tome recién desayuno… dos escalares y un vector, a claro, al revés, tiene que ser alfa de (x, y) + beta (x, y) y que ¿con el cero también? ¿O no?, o no, eso se ve en este.

[23E] **:** El cero esta allá ¿Qué venía acá? No es el cero, ¿Qué es?
[22ES4] **:** El uno… que si alfa es igual a uno entonces el escalar, o sea los vectores sigue…

[24E] **:** Claro, o sea uno por quién, ¿te tiene que dar quien?
[23ES4] **:** Uno por el vector, alfa igual a 1, entonces alfa de (x, y) tiene que dar (x, y) y… no me acuerdo.

[25E] **:** Ya no importa, intentamos recordar un montón de propiedades, tú échale un vistazo, así, míralas y ve que de esas se van a cumplir para esa suma y esa multiplicación o no y te detienes en esas que te merece dudas, tu dices: *la asociatividad no se cumple*… por que tienes que decirme si esto es o no es, si no es, alguna de estas falla y si es se cumplen todas, estamos concientes que nos falta una, ¿no es cierto?

[24ES4] **:** si…, con la multiplicación o ponderación ¿es lo mismo cierto?, son formas de llamarlo.

[26E] **:** Se le llama ponderación o multiplicación por escalar, también puede ser.

[25ES4] **:** Claro, en la primera cumple, esa cumple… también cumple, porque alfa *x* menos alfa *y*, *bx* menos *by* si los sumo se asocia, también cumple y después de eso, en este no cumple.

[27E] **:** Entonces tu estarías respondiendo a esa pregunta.

[26ES4] **:** Por lo tanto, IR2 con las operaciones interiores no es un espacio vectorial.

[28E] **:** ¿Por qué?

[27ES4] **:** Porque por, esta mal escrito eso lo siento…

[29E] **:** No importa le pone una raya no más… entonces no cumple la…

[28ES4] **:** la tercera.

Pregunta 2

[30E] **:** Entonces ahora la pregunta 2… no se si necesita ver estas propiedades, las puedes ocupar también, da lo mismo… entonces aquí leamos esa pregunta.

[29ES4] **:** sea IR el cuerpo de los números reales y un *f* de IR en IR que es igual a… (Problemas de audio)… tal que *f* es una función, se definen las siguientes operaciones: IR cruz IR va en IR tal que un (*a, b*) lo lleva a un *a* + *b* y la ponderación, que *f* de coma *x* lo lleva a un *f* por *x* es *f* de *x*, si sabemos que IR con la suma es un grupo abeliano, ¡ah! tenia que ser un grupo abeliano (risas), ¿lo corrijo?

[31E] **:** No, no lo corrija, ya te diste cuenta que aquí le falto algo, ¿cierto?, no importa por que tu respuesta está bien y tu falla esta aquí, así que no importa, entonces de ahora en adelante tu ya sabes que esto tiene que ser grupo abeliano.

[30ES4] **:** … Faltan para que IR sea un espacio vectorial sobre *f*(IR, IR).

[32E] **:** *E*ntonces aquí esto es grupo abeliano, ¿Cuáles son los axiomas que faltan?

[31ES4] **:** Serian conmutatividad con la suma ¿o no?

[33E] **:** No, porque es grupo abeliano con la suma, entonces para que sea un espacio vectorial estarían faltando algunos axiomas o algunas propiedades.
[32ES4] **:** Las de la multiplicación, porque grupo abeliano va sobre la suma no sobre la multiplicación.

[34E] **:** Entonces estarían faltando las..., todos los axiomas que tienen que ver con la multiplicación, entonces te voy a pedir que lo anotes ahí y me digas si se cumplen los axiomas o no se cumplen, por que me vas a decir cuantos axiomas son.
[33ES4] **:** En todo caso, no entiendo muy bien hay que f por x el $f(x)$.

[35E] **:** ¿Quiénes son los escalares?
[34ES4] **:** Que si f es una función o ¿no es una función?

[36E] **:** Es una función de estas de acá, entonces ¿Quiénes son los escalares ahí?
[35ES4] **:** Los escalares serian… alfa, beta y los reales, los números reales, pero allá serian las funciones.

[37E] **:** ¿Quiénes son los escalares ahí? Te tienes que dar cuenta quienes son los escalares ahí, te están cambiando el panorama.
[36ES4] **:** Las funciones de IR en IR.

[38E] **:** Entonces lo primero que tienes que darte cuenta es que los escalares ahí son…
[37ES4] **:** Funciones.
[39E] **:** Entonces con esa perspectiva de que los escalares son funciones, tienes que chequear si cumplen esos axiomas que faltan o si fallan, ya vamos viendo.
[38ES4] **:** Ya, entonces…

[40E] **:** Ya no tendrías que probar que es grupo abeliano.
[39ES4] **:** No, ya esta probado.

[41E] **:** Entonces tienes que enfocarte en los axiomas que faltan y ver si se cumplen.
[40ES4] **:** Axiomas de la multiplicación… ¿este seria por una función, no por un escalar?

[42E] **:** Ya, pero ahí tú tienes que ingeniártelas como vas a procesar esa información.
[41ES4] **:** Entonces la primera va a ser f, f' para no confundirla con esa que vaya de $f(x) + g(x)$, no me equivoque (risas) y ¿Por qué con plumón?

[43E] **:** Porque la cámara no ve el lápiz grafito, no se nada, por eso tiene que ser plumón de ese grosor…
[42ES4] **:** … $x + y$, eso tiene que ser igual a $f(x)+f(y)$, o seas tendría que ser lineal.

[44E] **:** La segunda, si estamos bien.
[43ES4] **:** *f* + *g* de *x* esto tendría que ser *f(x)* + *g(x)*, si estoy bien, *f* es la función identidad, igual la identidad tiene que ser, ah tiene que llevar a todo… (Problemas de audio)… como función escalares así.

[45E] **:** Algo así.
[44ES4] **:** Entonces *f(x)* tiene que llevarlo a *x*, y la cuarta, que es la que esta molestando.

[46E] **:** No, no está molestando, no nos acordamos.
[45ES4] **:** Pero es que no se cual es.

[47E] **:** A lo mejor en el transcurso de otras preguntas te vas a acordar, entonces esta la vamos a guardar y tú me vas a decir con esas tres, échale un vistazo a si se cumplen con esa operación ¿o no?, tienes que responder si se cumplen esos axiomas.
[46ES4] **:** Yo tendría que verlo para esto.

[48E] **:** Tu usaste una notación muy buena para anotar ahí, entonces con esos axiomas que tu recuerdas ¿se cumplen o no se cumplen?, tienes que dar un breve argumento de que si ¿Por qué razón? Y si no, por cual.
[47ES4] **:** La primera si la cumple, porque…

[49E] **:** Tienes que anotarme ahí: *…y se cumple…*
[48ES4] **:** La verdad en estos momentos lo único que estoy pensando es que por que no se va a cumplir, porque no se cumpliría.

[50E] **:** O sea tienes dudas acaso se cumple.
[49ES4] **:** Es que no sabría como demostrarlo.

[51E] **:** No demostrarlo, mira tu cuando estabas anotando esto me dijiste: …*ah este tiene que ser tal cosa…*se te vino a la mente una idea, cuando la estabas anotando.
[50ES4] **:** Ah, tiene que ser lineal, o sea si cumple eso es por que es lineal, una función lineal.

[52E] **:** Y ¿Qué dicen los enunciados?
[51ES4] **:** Que es una función, no dice nada mas… el…

[53E] **:** No se trata que demuestre, sino que des un argumento chiquitito para ver como tu mente va diciendo que sí se cumple porque esta pensando en esto, no se cumple porque estoy pensando en esto, no demostración...
[52ES4] **:** A ver, si las, no pero es que la suma… y si pongo *f* es lineal, entonces por eso se cumple.

[54E] **:** Sí, si es un buen argumento.
[53ES4] **:** Ese cumple de que *f* es lineal.

[55E] **:** Segunda…
[54ES4] **:** …También se cumple.

[56E] **:** Y ¿Cuál seria la razón ahí?
[55ES4] **:** A lo mejor esta malo, por lo mismo…

[57E] **:** ¿Es lo mismo sumar $x + y$ que sumar $f + g$?
[56ES4] **:** No es lo mismo, pero… (Risas)

[58E] **:** A lo mejor tu razón es la misma, no sé, es lo que tú estas pensando.
[57ES4] **:** A ver cómo lo pienso, que se distribuye el elemento en cada uno, como se cumple, porque no hay ningún problema al parecer.

[59E] **:** Y va a hacer esa distribución que me estás diciendo, entonces anotemos eso, ese es tu argumento… ya y la 3, ¿Cómo leerías la tres?
[58ES4] **:** ¿En dónde? Ahí, que si *f* es igual a la identidad entonces $f(x)$ a todas las funciones, la función identidad de la *x* la lleva a la misma *x.*

[60E] **:** ¿Qué podrías decir de eso?
[59ES4] **:** Que, ¿Qué es cierto?

[61E] **:** Sí, pero... ¿Por qué?
[60ES4] **:** Porque aquí dice de que, si me tomo un elemento, o sea si *f* es la identidad entonces va a ser la identidad coma *x* y eso lo va a llevar a la identidad ponderación con la *x* y eso lo va a llevar a la identidad de *x* y eso ¿Qué va a ser? Va a ser *x*, entonces se cumple.

[62E] **:** Se cumple, pero ¿Por qué se está cumpliendo ahí?
[61ES4] **:** Por la función identidad.

[63E] **:** Ese es el argumento entonces para la respuesta.
[62ES4] **:** Voy a poner eso ahí, que la función identidad… (Risas)… y la 4 no me acuerdo como es.

[64E] **:** La 4 pongamos ahí, no nos acordamos todavía ¿estas conciente que falta una?, bien… ya la otra...

Pregunta 3

[63ES4] **:** Es posible que exista un espacio vectorial que tenga solo dos elementos, sí...

[65E] **:** ¿Cuál?
[64ES4] **:** Así como de memoria no me acuerdo.

[66E] **:** Sí, si tú dices sí, tienes que decir porque piensas que sí, si dices que sí... tú mente algo te esta diciendo y ¿Por qué sí?
[65ES4] **:** Porque entre ellos puedo hacer las operaciones.

[67E] **:** Pues, entonces arguméntame el sí, no importa que no sea, si no me puedes decir cuál, pero tú tienes una razón para decirme que sí, esa razón necesito conocerla.
[66ES4] **:** Porque entre ellos puedo hacer la operación, puedo emplear las operaciones necesarias para ser un espacio vectorial.

[68E] **:** Me tienes que nombrar que operaciones estas pensando sí,
[67ES4] **:** ¡Ah! porque por ejemplo si tomo el caso de IR2, dos elementos de IR2, alguno en especifico, entonces el cuerpo va a ser IR2 y puedo agarrar los elementos para multiplicar de IR.

[69E] **:** Entonces anota todo eso que me estas diciendo.
[68ES4] **:** Prefiero contárselo.

[70E] **:** Porque yo en la tesis necesito sacarle al argumento, necesito ponerlo ahí, el argumento, porque todos los estudiantes dan argumentos distintos… si por que puedo aplicar las operaciones…
[69ES4] **:** … Necesarias para… ah no creo… para…

[71E] **:** No te aventurarías para decir que elementos tendrían que estar más o menos.
[70ES4] **:** ¿Cuáles serían?, si plano, dos rectas que formen un plano.

[72E] **:** Ya, la otra.

Pregunta 4

[71ES4] **:** W y… (Problemas de audio)… que ver si es un espacio vectorial real, sí...

[73E] **:** Tú argumento ¿Por qué?
[72ES4] **:** El mismo de siempre, porque cumple la… todas, porque con la suma… la multiplicación funciona por que todo elemento multiplicado por 0 me da el 0 y con la suma…

[74E] **:** Entonces me tienes que ir anotando lo que vas diciendo, eso, si por esto.
[73ES4] **:** Es que no estoy tan segura, a lo mejor no cumple para una de la suma.

[75E] **:** Ahí tienes que ir diciendo… tú inseguridad… ¿Por qué quisiste empezar por esas primero?
[74ES4] **:** Es que estoy segura de que esas cumple.

[76E] **:** ¿Por qué las otras habías empezado por quién primero?
[75ES4] **:** Por la suma, porque estaba más segura de que se cumplían.

[77E] **:** Ah, por eso era el motivo de empezar por esa, ya, tu seguridad va por este lado…
[76ES4] **:** Hemm…

[78E] **:** Ahí estás ocupando propiedades ¿de quién para hacer eso?
[77ES4] **:** Multiplicación.

[79E] **:** Para que me vayas contando un poco, porque te veo escribir y no te escucho.

[80E] **:** ¿Por qué puedes decir que esto es 0?
[78ES4] **:** ¿Tengo que hacer eso?

[81E] **:** No, cuéntame no más.
[79ES4] **:** Porque ese se reparte en cada uno.

[82E] **:** Y ¿Dónde sacaste que ese era 0?
[80ES4] **:** De la definición.

[83ES4] **:** Póngale al lado que es 0 por la definición… ¿Cuál cero estas viendo que es por la definición?, márcalo y tira y tira la flecha para el lado o ahí… ¿de quién?
[81ES4] **:** De W… entonces, ¿Cuál era la otra?, la que si alfa era igual a 1.

[84E] **:**¿Por qué puedes decir que aquí alfa es 1?
[82ES4] **:** Porque estoy trabajando en los polinomios de grado *n* en los reales, entonces el uno va a estar en los reales.

[85E] **:** Recuérdate que el otro eran las funciones entonces por eso te estaba haciendo tomar conciencia de que…
[83ES4] **:** A no si, sí...

[86E] **:** Estamos bien, estamos ok.
[84ES4] **:** Sí.

[87E] **:** Te situaste bien aquí que era el…

[85ES4] **:** Sí… como era éste… (Murmullos)… es que me adelanté porque puse inmediatamente...

[88E] **:** No importa… y ese es por…
[86ES4] **:** ¿Y la cuatro?

[89E] **:** Esa es la que todavía anda, ¿no llega a la mente?, ya entonces pongamos: *…no me acuerdo…* Si tú crees que tienes un argumento que no necesites anotar todos los detalles, lo pones; pero si tú crees que necesitas ir anotando detalle a detalle, lo haces, o sea estas en libertad de...
[87ES4] **:** Sí, pero es que eso define el Kernel, me define un subespacio vectorial.

[90E] **:** Entonces anotémoslo… te lo digo porque si se te ocurre otra cosa que nos has ido anotando, un argumento que sea válido que englobe todo eso, eso es mejor… si te complica, no y lo sigues haciendo así...
[88ES4] **:** No, está bien, estaba pensando en otra cuestión.

[91E] **:** ¿En qué?
[89ES4] **:** Que uno generalmente define que el Kernel es un subespacio de un espacio, pero entonces ese por ende también tendría que ser un espacio.

[92E] **:** Claro, porque los subespacios son espacios lógicos de otros, están contenidos en otros, esa es la gracia… (Silencio de 1:03 minutos)…

[93E] **:** Me gustaría saber ¿Cómo asociaste el Kernel con eso? que te… (Problemas de audio)
[90ES4] **:** La definición del Kernel dice que todo elemento lo lleva con alguna operación al cero.

[94E] **:** Me puede anotar eso: *…que lo asocié con el Kernel porque…* eso es muy bueno… (Silencio de 58 segundos)
[91ES4] **:** … Al cero o al vector nulo… de la imagen… no es que se me ocurrió… (Murmullos)

[95E] **:** La otra…
[92ES4] **:** Por lo tanto, es espacio vectorial… no respondí nunca.

[96E] **:** No, no me había acordado, gracias… (Problemas de audio)

Pregunta 5

[93ES4] **:** Averigua si las siguientes afirmaciones es correcta o no, en ambos casos justifique su respuesta.

[94ES4] **:** Sea V, W y Z subespacios vectoriales sobre un cuerpo K y supongamos que V + W = V + Z, entonces ¿W = Z?

[97E] **:** ¿Tú conoces esa propiedad?, para otras cosas...
[95ES4] **:** … Sí.

[98E] **:** ¿Para quién?
[96ES4] **:** Para…

[99E] **:** O es una propiedad nueva, nunca la has visto.
[97ES4] **:** No, pero se parece a una...

[100E] **:** Se parece a una que has visto alguna vez en la vida… ¿Qué opinarías cuando en esta situación el V, W y el Z son quiénes?
[98ES4] **:** V, W y Z son espacios vectoriales.

[101E] **:** ¿Cuál sería tu respuesta a esa proposición?
[99ES4] **:** Que es verdadero.

[102E] **:** Entonces me tienes que decir por qué, que piensas tú, cómo me argumentas que es verdadero, ¿Qué te dice tu mente?
[100ES4] **:** Porque, por operaciones no mas.

[103E] **:** Si me dices operaciones, me dices qué operaciones estás pensando… ya, entonces ¿Cuál fue tu argumento? ¿Por?
[101ES4] **:** Por operaciones.

[104E] **:** Por operaciones, ya entonces escriba eso. Perfecto la siguiente.

Pregunta 6

[102ES4] **:** Hay no, esto es feo, esto nunca lo he entendido.

[105E] **:** A ver, tiene una posibilidad .
[103ES4] **:** ¿Es K un espacio vectorial, no Q, sobre IR?, justifique, ¿es Ir un espacio vectorial sobre Q?

[106E] **:** ¿Son la misma pregunta? ¿Cuál es la diferencia?
[104ES4] **:** No, que… uno es sobre el… o sea los elementos que contiene sobre el espacio vectorial es IR y el otro es Q.

[107E] **:** Y ¿Quién es Q y quién es IR?
[105ES4] **:** IR son los reales y Q son los racionales.

[108E] : Ya, ahora me tienes que tratar de dar una respuesta.
[106ES4] : Este sí, lo veo por conjuntos eso sí.

[109E] : No está malo, es un argumento totalmente válido.
[107ES4] : Porque Q esta introducido en IR.

[110E] : Anotemos… (Silencio de 30 segundos)… bien, entonces qué puedes decir de la otra pregunta que está al lado.
[108ES4] : Yo de repente creo que también puede ser porque, si IR, es como la misma razón entonces simplemente lo acota por Q, pero eso ¿está bien?

[111E] : ¿Qué quiere decir que lo acota por Q?
[109ES4] : De que solamente IR como espacio vectorial lo va a trabajar como los elementos de Q.

[112E] : Va a trabajar en un pedazo, si puede ser, puede trabajar en un pedazo, si Q es un pedazo de IR.
[110ES4] : Pero… y Q es un cuerpo, también funciona… entonces es posible, pero parece que, un ejemplo: yo sé que… los complejos y los reales no se pueden, o ¿sí?

[113E] : ¿Por qué?
[111ES4] : Es que hay uno que se me confunde, que no se puede.

[114E] : Pero aquí, aquí no estamos con los complejos, no nos pongamos en esa situación, es IR y Q solamente… me tienes que elaborar un argumento, ese mismo argumento o un argumento distinto que vas a utilizar para la respuesta.
[112ES4] : Ya.

[115E] : ¿Estamos con los argumentos? Ya perfecto, la siguiente.
[113ES4] : Espere voy a hacer un dibujito para que se entienda.

[116E] : Qué significan esas rayas.
[114ES4] : Que aquí no más se trabaja.

[117E] : Y ahí ¿En dónde?
[115ES4] : Aquí se trabaja en todo.

[118E] : Podrías ponerme eso: *… aquí se trabaja lo rayado…*
[116ES4] : Espere, no estoy tan segura… ya...

[119E] : Cuando dices aquí se trabaja, qué quieres decir que aquí se trabaja.
[117ES4] : Como espacio vectorial ¿Pongo acá?

[120E] : Sí, por favor… ya, y allá ¿Se trabaja dónde?
[118ES4] : Sobre IR.

[121E] **:** Estamos con la respuesta, el siete.

Pregunta 7

[119ES4] **:** IR-{0} es un grupo abeliano con la operación definida, la suma definida como sigue.

[122E] **:** ¿Cómo esta definida esa operación? A ver lea.
[120ES4] **:** la suma, que todos los elementos que se sumen, se multiplican donde (*x, y*) pertenece a IR-{0}.

[123E] **:** ¿Por qué razón se sacaría el 0?
[121ES4] **:** Porque si *x* o *y* es 0, se anula.

[124E] **:** Se anula, no ve otra cosa ¿Sólo esa?
[122ES4] **:** Porque sino no cumple de ser grupo abeliano.

[125E] **:** Es una razón más fuerte, cierto, es un grupo abeliano y el grupo abeliano ¿Qué es el cero? ¿Qué estaría pasando con el 0?
[123ES4] **:** O sea no cumpliría con algunas propiedades de grupo abeliano, pero cuál tendría que pensarlo.

[126E] **:** No cumple algunas propiedades, si por esa razón es que no está el cero, para que no impida que sea grupo abeliano, entonces ¿Qué se pide en la pregunta?
[124ES4] **:** Definir la otra operación, la multiplicación por un escalar sobre un cuerpo K para que IR-{0} sea un espacio vectorial sobre un cuerpo K, con esas dos operaciones.

[127E] **:** Entonces tú tienes que elegir un cuerpo, pero qué conoces para que esa operación que tú vas a definir sea un espacio vectorial con esa suma también, ¿Cómo definirías tú la operación producto por un escalar? ¿Qué idea se te ocurre?
[125ES4] **:** Yo tengo que definir una, sabiendo de que ésa es la suma.

[128E] **:** Definida así, tú te atreverías a definir como quieras la multiplicación por escalar o ponderación.
[126ES4] **:** ¿Cómo la suma? (Risas)

[129E] **:** Sí, ¿Tú crees?
[127ES4] **:** Ya me acordé de la otra propiedad.

[130E] **:** ¿Cuál otra propiedad falta?
[128ES4] **:** Que alfa por *b* por un *x*, tiene que ser igual a… ¿o no?

[131E] **:** Sí, si es algo así, bien… ¿Qué hizo que te acordaste?
[129ES4] **:** No sé.

[132E] **:** No lo podrías precisar eso… ¿Leyendo eso fue?... ya entonces, o sea más bien dicho buscando esa propiedad de multiplicación por escalar.

[130ES4] **:** Sí.

[133E] **:** Entonces tienes que definir la multiplicación aquí, entonces faltarían, con esa definición que tú me vas a decir "ésta" debe cumplir cuantos axiomas.

[131ES4] **:** Cuatro.

[134E] **:** Entonces, recordabas tres hasta este instante, ahora recordaste el cuarto así que vas a poder chequear las cuatro o poder decir sí esto es un argumento, ya pero para eso vas atener que definir una multiplicación por escalar que tú estimes.

[132ES4] **:** ¿Puede ser la común y corriente?

[135E] **:** Tú eliges, yo no puedo influenciar, tu eliges, no tiene ningún impedimento, no dice que no pueda ser la común y corriente, no dice ahí, ni tampoco tienes que pensar en cosas súper rebuscadas o difíciles, tampoco.

[133ES4] **:** Definí K como IR.

[136E] **:** Perfecto.

[134ES4] **:** Entonces, multiplicación por escalar… esto va de… ah, *x* pongo circulito…

[137E] **:** Para no confundirte con la otra mejor sale dar otra notación, circulito como estas pensando.

[135ES4] **:** una como operación y después como resultado… y ahí esta.

[138E] **:** Alfa circulito *x* va a ser alfa *x*, así lo defines, ahora yo te voy a preguntar, esa operación, para que junto con la suma sea espacio vectorial tiene que chequear algunas cosas para ciertos axiomas.

[136ES4] **:** Las verifico.

[139E] **:** Tienes que anotar lo que te acordaste.

[137ES4] **:** Ahí espere, no nada que ver lo que estoy haciendo…

[140E] **:** (problemas de audio)

[138ES4] **:** Y esto es igual a… a no, ahí… (Silencio de 1:00 minuto)

[141E] **:** Entonces ¿Cuál seria la respuesta? ¿Qué?

[139ES4] **:** ¿Cuál es la pregunta?, definir la operación…

[142E] **:** Descubriste la otra operación, acá está.

[140ES4] **:** … Las operaciones, ¿es un espacio vectorial?, si… ah, ya la respondí, ahí esta la definición de…

[143E] **:** ¿Se cumplen las propiedades?, entonces es, con esta multiplicación es…

[141ES4] **:** Con esta multipli… ya.

[144E] **:** Ya ésa es la respuesta… después de esa quedan dos más y terminamos.

Pregunta 8

[142ES4] **:** Sea V igual al conjunto de los (*x, y, z*) pertenecientes a IR3 tal que *x y z* es mayor que 0, un espacio vectorial con las operaciones, U con suma, ¿Ésa es la suma directa? No necesariamente...

[145E] **:** No, es una suma, no es directa o operación *b*, se lee operación… (problemas de audio)… porque la suma directa tiene que ser entre espacios vectoriales, y aquí son elementos, así que esta definido una suma extraña no mas, una suma fuera de lo usual.

[143ES4] **:** … Y la ponderación, *x y z…* (Murmullos leyendo la pregunta)…

[146E] **:** Entonces escribe dos vectores que estén en W.

[144ES4] **:** ¿Cuál es el vector nulo de W?

[147E] **:** Me puedes argumentar porque estás pensando o escribiendo porque ese es el vector nulo.

[145ES4] **:** Pero espere, dice: *sea W*… (Murmullos)… pero es que ese *b* me complica la vida…

[148E] **:** Para eso esta ahí, exactamente para complicar la vida.

[146ES4] **:** El subespacio de todos los puntos… o sea eso debe estar malo, pero…

[149E] **:** No, a lo mejor esta bien pero me tienes que decir era, o qué es (0, 0, 1), ¿Cuál es tu argumento para decir que ese es el vector nulo?

[147ES4] **:** Porque W es… claro, porque W es un espacio vectorial que es un plano en IR3.

[150E] **:** Entonces me puedes anotar eso, porque elegiste el vector nulo, esa es la razón.

[148ES4] **:** Ya, pero no estoy tan segura de que sea ése, debe ser otro, por que dice que V tienen que ser todos los elementos que tiene que ser mayor que 0.

[151E] **:** ¿Entonces?

[149ES4] : Bueno, pero me la juego por ese (risas).

[152E] : Pero estás viendo algo que ahí no está… mira, tú me acabas de leer algo, ¿Igual te la vas a jugar por ése? Es mi pregunta.
[150ES4] : Sí.

[153E] : Perfecto sigamos adelante… entonces 3, ahí dice si *v* es ese vector entonces ¿Quién es –*v*?
[151ES4] : (-3, -2, 1)

[154E] : ¿Ese va a ser quién?
[152ES4] : -*v* pero, a ver, ¿Puedo hacer un dibujo?

[155E] : Sí… ¿Qué pasó?
[153ES4] : Es que no sé si es (-3, -2, 1) ó (3, 2, -1)… ¿Por qué?

[156E] : Porque no sé, tienes que fijarte los datos que están… si, hay un conflicto de cuál de los dos es, tienes que decidir cuál y ¿Por qué?, porque los dos ¿pueden ser?
[154ES4] : No.

[157E] : Entonces tienes que jugártela por uno, igual como te la jugaste antes, tienes que jugártela por uno de ellos.
[155ES4] : Ya.

[158E] : Ese es tu elección, ¿Por qué?, tienes que decir algo.
[156ES4] : (Risas) Porque… a lo mejor está mal lo que estoy pensando pero, porque el espacio W esta situado en *z* y *z* es igual a 1, pero igual *z* corre por abajo, o sea eso sería la otra parte de *z*, pero, y son planos, a está bien entonces, si está bien, claro los planos positivos van a estar de *x* 0 0 hacia arriba y los planos negativos van a ser… es como la recta.

[159E] : Entonces cuál es tu argumento para decir que ese es –*v*, resumidamente.
[157ES4] : Ah, no sé resumidamente, a ver…

[160E] : Pon hartas palabras.
[158ES4] : Que depende del eje *z*.

[161E] : Ya, cuatro.
[159ES4] : Los vectores (2, 2, 1) y (½, ½ ,1) de W son linealmente independientes, cierto.

[162E] : ¿Por qué?
[160ES4] : Porque ninguna combinación posible uno puede llegar de uno al otro.

[163E] : Anotemos eso.
[161ES4] : Así con palabras.

[164E] **:** Sí, es tú argumento.
[162ES4] **:** El conjunto (3, 3, 1) y (1/3, 3, 1) es una base para W… si...

[165E] **:** ¿Cuál seria el argumento?
[163ES4] **:** Que generan y son linealmente independiente.

Pregunta 9

[164ES4] **:** Sea U, W y V subespacios de IR3 definidos como siguen: U igual a… a eso, W igual a eso y V igual a eso, pregunta…

[166E] **:** Éstas son de rutina, como rutinas del Algebra Lineal.
[165ES4] **:** Que si U = W = Z, ¿sacar base o no?

[167E] **:** ¿Por qué hay que sacar base?
[166ES4] **:** Para ver si son iguales, para ver si generan al mismo espacio… (Silencio de 1:27 minutos)…

[168E] **:** Respuesta a la pregunta.
[167ES4] **:** No, no son iguales.

[169E] **:** Por qué motivo u razón.
[168ES4] **:** Porque generan distintas cosas, de hecho, generan distintos planos con un punto en común.

[170E] **:** Anotemos eso.
[169ES4] **:** U es distinto de W y es distinto de V, ya que cada…

[171E] **:** Perfecto, ¿Cuál es el punto común?, ¿Cuál es el punto común que estas mirando?
[170ES4] **:** A bueno, son distintos porque éste es igual a ése y ése es igual a ése, entonces es como cruzado o una cosa así.

[172E] **:** Las otras no las vamos a responder porque has hecho la pregunta de que había que hacer el producto cruz, hasta la 11 vamos a llegar, las otras no, porque hiciste las pregunta relativa a eso, era para reforzar si no habías hecho lo otro, vamos a llegar hasta la 11, veamos…

Pregunta 10

[171ES4] **:** … Menos *x*…

[173E] **:** Cuéntame por qué esta eligiendo *x.*
[172ES4] **:** Es psicológico yo creo, como dice mi mamá (Risas)

[174E] **:** Motivos psicológicos, perfecto… entonces estas eligiendo tú ahí, elegiste la ecuación 1 y ¿Qué hiciste con ella?
[173ES4] **:** Despeje *x,* y después con esto, vamos a ponerle 1, lo reemplace acá.

[175E] **:** ¿Qué vas a hacer ahora?
[174ES4] **:** Espéreme un poquitito… (Silencio de 1:39 minutos)

[176E] **:** Esa es la base cierto, ya perfecto, esa otra la ultima, las otras son más cortitas pero no tiene sentido, es la rutina, vamos a llegar hasta ésta.

Pregunta 11

[175ES4] **:** Sea V igual a… (Murmullos leyendo pregunta)

[177E] **:** Sí, una suma y una ponderación.
[176ES4] **:** Hacer la dependencia lineal de los conjuntos dados por *S*1… ya, entre S1 y *S*2.

[178E] **:** No, *s*1 es LI o LD, *s*2 es LI o LD.
[177ES4] **: P**ero independiente cada uno, y no entre los dos.

[179E] **:** No, independiente cada uno, determinar la dependencia lineal de los subconjuntos de V, que puedes decir de *s*1, que puede decir de *s*2, ¿Por qué?
[178ES4] **:** Sí son o no linealmente independientes…

[180E] **:** ¿Cuál es el problema?
[179ES4] **:** Estaba pensando… es que la suma esta definida de otra manera…

[181E] **:** ¿Eso afecta a lo que te preguntan?
[180ES4] **:** Sí.

[182E] **:** ¿Cómo?
[181ES4] **:** Obvio que sí, que ya las operaciones son distintas, entonces la forma de ver combinación lineal y todo el atado o dependencia lineal es distinta.

[183E] **:** Entonces, ¿Cómo tendrías que abordarlo acá? Según lo que tu me estás contando.
[182ES4] **:** Ya, *s*1 es linealmente independiente porque, hay, te lo puedo escribir no más, no voy a hacer toda la operación.

[184E] **:** El argumento no más, por que crees que es linealmente independiente.
[183ES4] **:** Porque ningún escalar multiplicado por el vector (2, 1) de esa manera me va a dar el (3, 2) y al revés tampoco.

[185E] **:** Perfecto… ahora tenemos que pensar en *s*2.
[184ES4] **:** S2 tampoco, por lo mismo.

[186E] **:** Por el mismo argumento… ya estamos, gracias.

<u>Video ENTREVISTA – ESTUDIANTE 5</u>

Pregunta 1

[1E] : Tienes que... responder esas preguntas.
[1ES5] : Ya…

[2E] : Y tú me vas contando como las vas respondiendo.
[2ES5] : Ya.

[3E] : Así que ahí tienes más hojas, si necesitas.
[3ES5] : ¿Se ve bien de aquí cierto?

[4E] : Sí, se ve acá si, ahí están las preguntas tú vas sacando de una en una.
[4ES5] **: Y**o voy sacando, ¿inmediatamente?

[5E] : Sí, empezamos estamos listos.
[5ES5] : Bueno.

[6E] : Esto es de espacios vectoriales el tema, todo con espacios vectoriales y nociones que se refieren a ello, lo que me interesa es cómo elaboras en tu mente el argumento para dar respuesta.
[6ES5] : Ya…

[7E] : ¿Listo?
[7ES5] : Ya…, voy a leer primero la pregunta.

[8E] : Bien.
[8ES5] : Dice: ”se han definido sobre IR^2 las siguientes operaciones: la suma de dos elementos de IR^2 así definido y la ponderación que toma un escalar de IR y toma un vector de IR^2 y me entrega uno de IR^2 … ¿es IR^2 con las operaciones anteriormente definidas una espacio vectorial sobre IR?,a ver veamos, un espacio vectorial…yo por lo menos lo veo como …como, ¿cómo se llaman?,cuatro cosas: como un conjunto de vectores que en este caso debería ser IR^2

[9E] : Ya…
[9ES5] : Un conjunto de escalares.

[10E] : Ya…
[10ES5] : Que en este caso es $IR^{2.}$

[11E] : Sí...
[11ES5] : Y dos operaciones que en este caso se supone que va a ser la suma y la ponderación.

[12E] : Ya…
[12ES5] : Ese cuarteto tiene que cumplir ciertas propiedades para ser llamado un espacio vectorial.

[13E] : Sí…
[13ES5] : Esas propiedades son varias.

[14E] : Son varias, sí.
[14ES5] : Son como 15 por ahí...

[15E] : Ya…
[15ES5] : A ver…

[16E] : ¿Puedes recordar algunas?, porque tienes que responder esa pregunta.
[16ES5] : A, sí, tiene que ser grupo abeliano con la suma.

[17E] : Perfecto.
[17ES5] : Con esta operación que está ahí.

[18E] : OK.

[18ES5] : Entonces primero grupo abeliano, o sea ahí están con cinco propiedades más o menos.

[19E] : Sí, yo también estoy de acuerdo.
[19ES5] : Grupo abeliano… con la operación suma.

[20E] : Bien.
[20ES5] : Eso es una, o sea, ¿Qué estoy diciendo?, estoy diciendo que IR^2 con la suma tiene que ser grupo abeliano.

[21E] : Perfecto.
[21ES5] : O sea, ahí no viene, o sea ahí no tiene nada que ver en el cuerpo de los escalares ni la ponderación.

[22E] : ¿Puedes explicarlo mejor?
[22ES5] : Claro, entonces tengo que ver ciertas cosas por ejemplo, clausura claramente que se cumple, porque, o sea, si está definida la suma.

[23E] : Por la definición.
[23ES5] : Claro, o sea esto siempre es un vector de IR^2.

[24E] : Bien.
[24ES5] : Hay que ver conmutatividad, porque tiene que ser abeliano.

[25E] : Entonces…
[25ES5] : A ver, veamos si la "conmutatibilidad", conmutatividad sirve..

[26E] : Entonces sigue...
[26ES5] : X, Y más a B lo pusieron ahí, ya eso ya esta listo, es 2Y más 2B menos X menos A, veamos al revés (A, B)+(X, Y) es igual veamos 2Y aquí viene siendo B, 2B más dos veces B y B viene siendo aquí Y. Hasta ahora no hay X.

[27E] : Ya...
[27ES5] : Coma menos X, o sea menos la primera, sería menos A y A viene siendo (X, X), si es lo mismo, es lo mismo son iguales.

[28E] : Sigue explicando.
[28ES5] : Así que por lo menos cumple con esa propiedad, a ver veamos estoy tratando de acordarme si es que hay algún teorema para ver fácilmente si es que es un espacio vectorial o no, me acuerdo que hay un teorema que dice que si yo tengo un espacio vectorial grande.

[29E] : Ya…
[29ES5] : Y si considero un subconjunto W ahí es mas fácil ver si es o no. Un espacio vectorial tiene que cumplir ciertas propiedades.

[30E] : Claro, claro.
[30ES5] : Primera que W no tiene que ser vacío.

[31E] : Ya…
[31ES5] : Y una cosa a verificar que este el cero por que el cero siempre tiene que estar cuando es un subespacio vectorial.

[32E] : ¿Cuándo dices cero?, ¿a que cero te refieres?
[32ES5] : O sea el cero de los vectores, el elemento neutro de la suma.

[33E] : Perfecto.
[33ES5] : Tiene que estar, o sea tiene que tener algún elemento, pero el elemento más importante que tienen que estar es el, el, el vector nulo.

[34E] : El vector nulo.
[34ES5] : Claro, porque por ejemplo: el espacio, el conjunto que tiene al vector nulo es un espacio vectorial, es como un trivial, ¿Qué?, a ver que si tengo dos elementos la suma está o sea que es cerrado con la suma.

[35E] : Entonces...
[35ES5] : Y es cerrado por la, por la multiplicación por escalar.

[36E] : Ya...
[36ES5] : O sea eso se puede ver como una sola propiedad que es cerrado mediante formaciones de combinaciones lineales.

[37E] : Ah, claro.
[37ES5] : O sea la primera, o sea la segunda sería que V y W pertenecen a W entonces la suma está en W y alfa esta en el cuerpo F digamos entonces alfa V tiene que estar en W.

[38E] : Perfecto.
[38ES5] : Si se cumplen esas 3 propiedades, entonces por teorema entonces W es un bueno… se puede decir espacio vectorial por si mismo o subespacio de W.

[39E] : De otro, claro.
[39ES5] : O digamos W subespacio de V.

[40E] : Perfecto.
[40ES5] : Entonces habría que ver eso, claro pero acá ¿eso me sirve o no me sirve este teorema?

[41E] : Buena pregunta.
[41ES5] : Porque estoy considerando, no estoy considerando subconjunto de IR^2, estoy considerando todo IR^2.

[42E] : Claro, en este caso todo, ¿si fuera un pedazo?
[42ES5] : claro, a ver, veamos… aquí no puedo usar ese teorema, porque ese teorema es por ejemplo típico que cuando uno tiene la suma tradicional digamos y la multiplicación por escalar digamos.

[43E] : Sí.
[43ES5] : Y ahí cuando uno tiene un cierto espacio definido, no sé una recta quizás algo así.

[44E] : Claro-
[44ES5] : Ahí se puede ver, pero aquí.

[45E] : Que fuera un subconjunto de otro, pero aquí.
[45ES5] : Claro aquí no éste es, este es el maximal.

[46E] : Claro.
[46ES5]: o sea no hay más grande que ese

[47E] : Es un conjunto no propio del mismo.
[47ES5] : Claro, o sea no podría haber o sea si tuviese que haber uno más grande serían las mismas operaciones y las mismas operaciones como que no son muy conocidas tendría que ver todas las propiedades.

[48E] : Claro, ¿y de que otra manera podríamos...? ¿Se podrá abordar eso para responder la pregunta?
[48ES5] : A ver… ¿Cómo puede ser esto?

[49E] : Por qué me estabas diciendo cual son los axiomas o propiedades que debe cumplir.
[49ES5] : Claro, en un principio, en un principio era eso.

[50E] : Claro, claro ¿no es cierto? Porque ahí íbamos, me hablaste del teorema
[50ES5] : Si pero que, que simplifica la vida pero parece que aquí no lo puedo usar.

[51E] : Ya que no…
[51ES5] : Entonces tendría que seguir viendo que se cumplan todas las propiedades por ejemplo…es que no me acuerdo, me acuerdo que tiene que ser grupo abeliano con la suma que tenía que cumplir ciertas propiedades con respecto a la del escalar.

[52E] : ¿Cuáles serán esas?
[52ES5] : Son hartas.

[53E] : ¿De dónde son tantas?
[53ES5] : Son como cinco.

[54E] : Cinco, esas son.
[54ES5] : Que por ejemplo: que se distribuye.

[55E] : Ya...
[55ES5] : Alfa punto ponderación V+W tiene que igual a alfa V mas alfa W, si no me equivoco.

[56E] : Si, si...
[56ES5] : Ya esa es una, dos que la multiplicación por escalar tiene que ser asociativa.

[57E] : Bien, sigue...
[57ES5] : Algp así alfa beta V.

[58E] : Entonces...
[58ES5] : Eh…

[59E] : Asociatividad un poco extraña entre escalares y vectores ¿no es cierto?
[59ES5] : Sí, o sea no importa en que orden lo haga.

[60E] : Sí.
[60ES5] : Eh…

[61E] **:** Tres…
[61ES5] : Tengo mala memoria, a ver tercera también que los escala…o sea la otra distribución que hay.

[62E] : Ya...
[62ES5] : Esa, no se como se llama, distribución…

[63E] : Distribución no más pongámosle.
[63ES5] : La segunda distribución.

[64E] : Ya...
[64ES5] : Que no es la misma.

[65E] : No, no.
[65ES5] : Claro, y acá también era especial.

[66E] : Bien...
[66ES5] : Bueno obviamente tenía que cumplirse ésta, éste es uno de los axiomas que tenía que cumplirse.

[67E] : Bien.
[67ES5] : Ese y ese y cuando subconjunto bueno…es más fácil…bueno es clausura ¿Cuál más tiene que cumplirse? A ver (suspiro)…asociatividad…no me acuerdo de más propiedades,

me acuerdo de ésta del grupo abeliano…las propiedades con el escalar.

[68E] : Sí.
[68ES5] : Eso sería todo, o sea bueno hay una entremedio y hay…

[69E] : Sí, sí, sí, pero ¿recuerdas otra?, porque esas son cinco.
[69ES5] : Si me falta una y me falta una, a ver ¿la conmutatividad de los escalares no será?

[70E] : No.
[70ES5] : No porque es un cuerpo, ya probé antes como llegar allá.

[71E] : Exactamente es un cuerpo entonces como que...
[71ES5] : Entonces ya conmutan alfa y beta, entonces…, aquí tengo un problema, que a mí también se me confunden a veces los que son axiomas y después los que pasan a ser teoremas por ejemplo: que cero por un vector es el vector nulo.

[72E] : Claro.
[72ES5] : Ese es un teorema.

[73E] : Claro por un teorema.
[73ES5] : O una proposición.

[74E] : Es un teorema sí, sí...
[74ES5] : Eh…

[75E] : Que se demuestra como ayudado por los axiomas.
[75ES5] : Por los axiomas claro, que… a ver cuáles son ¿Cuáles faltan? Alfa asociatividad o el nulo de IR…no me puedo acordar muy bien.

[76E] : Hay un elemento destacado que hace algo.
[76ES5] : Ah, el elemento neutro ¿el uno de cuerpo?

[77E] : Ya...
[77ES5] : Pero…o sea si es un cuerpo tiene el uno.

[78E] : Sí.
[78ES5] : Entonces la propiedad que tiene que cumplir es que uno por el vector tiene que ser el vector, entonces ahí me confundo por ejemplo si lo veo así no más ahí yo no, si lo veo así no más no sabría si es teorema o proposición, no sabría si se puede demostrar.

[79E] : ¿Por qué se te confunde?
[79ES5] : Porque es parecida a que creo con V es cero.

[80E] : Ahí esta la cosa ahí se produce la confusión.
[80ES5] : Es similar entonces una de ellas dos no es axioma.

[81E] : O sea un axioma es un teorema después tu no sabes cuál es cuál.
[81ES5] : Claro, claro y que quizás no sé, he visto en algunos libros que a veces por ejemplo una cierta teoría digamos de espacio vectorial por ejemplo si uno pone esto entonces sale como teorema que cero por V es cero y al revés si eso lo pongo como axioma este sale por teorema.

[82E] : Pero hay que anotarlos los 2.
[82ES5] : Claro, no sé si éste es el caso pero no sé si son cosas equivalentes no estoy seguro, pero ahí estarían, ahora estoy confundido por que están esas propiedades. De los escalares la del grupo abeliano con la suma ¿y era eso todo? Grupo abeliano con la suma y creo que eso era todo.

[83E] : Sí.
[83ES5] : Son 10 no más entonces.

[84E] : Claro.
[84ES5] : Claro pensé que eran más (risas).

[85E] : 10 si es que tu estas contando las otras que me estas diciendo, las proposiciones.
[85ES5] : Las proposiciones, pero profesora es que después me confundo, lo que pasa es después cuando a uno le enseñan por ejemplo: los axiomas que tiene que cumplir, después creo que no sé si es bueno o malo pero ponen inmediatamente las proposiciones.

[86E] : Ah…
[86ES5] : ¿Para qué? Porque por ejemplo a ver esa proposición de que por ejemplo el teorema que dice que…¿Cómo se llama? El elemento…neutro del cuerpo multiplicado por un vector es el vector nulo.

[87E] : A eso sí.
[87ES5] : ¿Cierto? Entonces eso lo ponen como teorema y es importante porque sirve para verificar que sea por ejemplo espacio vectorial o cosas así, entonces a veces lo ponen todo junto y ahí uno no sabe, hay unas cosas que son importantes pero son axiomas o cosas así.

[88E] : Cuando dices que sirve para verificar que un espacio ¿Cómo fue eso? Sirve para…

[88ES5] : Claro para verificar si es que es un espacio vectorial por ejemplo si acá yo pongo el cero y no me entrega el cero entonces no puede ser con esa operación no puede estar definido un espacio vectorial.

[89E] : En ese sentido ya, esta bien planteado.

[89ES5] : O tam…o por ejemplo como el teorema cuando decía que W que el uno tenia que estar en W o sea.

[90E] : Lo mismo.

[90ES5] : Claro, una cosa es que sea distinto de vacío pero como no solo es importante que no sea vacío si no que este el cero porque el cero es uno de los mas importantes…cosas así. Ahora la pregunta es si IR^2 con las operaciones anteriormente definidas es un espacio vectorial.

[91E] : Esa es la pregunta.

[91ES5] : Yo creo que no, yo creo que no porque es más fácil, demostrar que no.

[92E] : ¿Es intuición?

[92ES5] : Claro o sea porque si fuese así me tinca que hay que demostrar todas las propiedades.

[93E] : Entonces aquí hay otra hoja para que vayas argumentando para ir respondiendo la pregunta.

[93ES5] : Vamos, voy a ver con las propiedades de los escalares. Esta se parece a la del control ¿o no? ¿No es la misma? No me acuerdo.

[94E] : Es parecida, si parecida.

[94ES5] : Veamos…

[95E] : Hay que tenerlo.

[95ES5] : Sí, a ver voy a hacer las propiedades de los escalares, propiedades de los escalares primero que se tiene que distribuir…es que eso al igual es claro ¿o no? alfa X Y más Z a pero que esta es otra suma se me olvida es, a ver.

[96E] : Es una suma…

[96ES5] : Es la suma así definida, entonces eso tiene que se igual por un lado tiene igual a alfa XY+ alfa ZW, veamos si es verdad eso tendría que ser según la definición alfaX-alfaY+alfaZ-alfaW y eso en el fondo es alfaX+alfaZ-alfaY-alfaW y acá, a ver veamos esto es alfa, de hecho aquí esta definida la multiplicación, ponderación esta definida a través de la multiplicación por escalar o sea de elementos de IR, claro.

[97E] : De IR. Sí.
[97ES5] : alfaX+Z-alfaY+W entonces nuevamente por definición esto sería alfaX+Z, Y+W, o lo hice bien ¿o no? si, entonces eso es igual… ¿a que? … Ah… ¿Qué hice? ¿Qué hice? ¿Qué hice?. Primero demostré que…¿Qué hice?... voy a llegar a lo mismo (risas). Me confundí, es que me confundo cuando hago esto a ver.

[98E] : No se me olvida...
[98ES5] : Esa fue esa fue la respuesta eso fue a lo que llegué y la otra manera de hacerlo es a claro sumar primero, si yo sumo primero llego a esto entonces si lo hago llego a esto entonces llego a lo mismo son iguales.

[99E] : Entonces esa se cumple.
[99ES5] : Se cumple en esa propiedad, quería que no se cumpliera (risas)…yo creo que esa no se cumple a verla… α más β con un (x, y) eso tiene que ser según la definición α+β·x-α+βy y eso es igual a αx+α va! eh βx-αy+βy por otro lado. si es que yo lo distribuyo αxy+βxy eso tendría que ser αx-αy+βx-βy y aquí me equivoqué porque era un menos y si da lo mismo, da lo mismo son iguales también se cumple.

[100E] : También se cumple.
[100ES5] : A pero que soy leso porque eso no se cumple la del uno (risas) muy mal el uno.

[101E] : Estaba al último.
[101ES5] **:** x, y debería ser igual a x, y pero según la formula eso es x,-y y eso es distinto para muchos vectores o sea un ejemplo del vector a ver 1.1, 2 eso es 1,-2 eso es distinto de 1,2 entonces…

[102E] : Entonces ¿cuál sería la respuesta?
[102ES5] : No es un espacio “vectorial” no es vec...

[103E] : O sea lo que habías dicho así sin fundamento al principio se cumplió ahora lo tienes.
[103ES5] : Sí, sí o sea, no pero en todo caso la razón por la que yo pensaba que no era un espacio vectorial era por que es mas fácil hacerlo, no usar la mente.

[104E] : Ah, una cosa de trabajo.
[104ES5] : Claro o sea es que por lo general yo creo que sería malo que un profesor en una prueba pusiera demuestre que es un espacio vectorial con 10 propiedades.

[105E] : ¿Son muchas?

[105ES5] : Es que claro es mucho o sea está bien de tarea pero no de prueba.

[106E] : No para una evaluación, bueno en una entrevista tampoco.
[106ES5] : No, está bien.

[107E] : Entonces ¿no es espacio vectorial?
[107ES5] : No es espacio vectorial porque si no se cumple una murió.

[108E] : Son más, murió vamos con la segunda pregunta.

Pregunta 2

[108ES5] :,Sea IR el cuerpo de numero reales y F de IR en IR el conjunto de las funciones se definen las siguientes operaciones la suma de, de dos elementos de IR, ah ya, la suma normal y la ponderación, tomo una función tomo un vector y la evalúa, sabe si sabemos que IR y la su con la suma es un grupo abeliano sí, claro que sí que axiomas faltan para que IR sea un espacio vectorial sobre F(IR,IR), o sea ese es el cuerpo de escalares, bueno eso no influye en eso porque IR con la suma tiene que ser un grupo abeliano y ahora tiene que cumplirse lo… bueno los axiomas que habíamos dicho.

[109E] : Si los puedes anotar ¿Cuáles faltarían?
[109ES5] : No lo tengo que ver si se verifican solamente…

[110E] : Si después, después, pero me tienes que decir que axiomas faltan para...
[110ES5] : Para que IR sea un espacio vectorial sobre el conjunto de esos escalares.

[111E] : Exactamente.
[111ES5] : Entonces…

[112E] : Y después me puedes argumentar cuáles se cumplen ¿Por qué? Y cuáles no se cumplen ¿Por qué?
[112ES5] : Se supone que… ya lo primero es lo más fácil la clausura… se supone que si tomo un elemento de F que va a ser una función de IR en IR y la multiplico digamos la pondero con un vector un elemento de IRx, eso tiene que estar en IR que es el conjunto de vectores y eso es verdad porque es una función de IR, bueno después voy a decir que es verdad, clausura… lo segundo asociatividad sea asocia, no ¿Cómo era? Asociatividad, si asociatibilidad, entonces F con eso, eso tendría que ser igual a Fg.

[113E] : ¿Qué pasó?
[113ES5] : Me saltó una duda a ver ¿Cómo era esto? Se supone que esta definida una operación que es ésta operación que está definida así entre elementos de acá y un elemento de IR, entonces esto de ahí no está bien.

[114E] : No
[114ES5] : (risas) y ¿Por qué? ¿Cómo era? Era alfa beta V o sea en general era una alfa con una beta con un vector tiene que ser igual a alfa beta un vector ¿me equivoqué?

[115E] : Sí... ahí está..
[115ES5] : ¿Ahí está bien escrito?

[116E] : Sí digamos que sí.
[116ES5] **:** Que tengo una duda, a ver ese era el axioma de espacio vectorial.

[117E] : Sí...
[117ES5] : ¿Cierto? Que, que da lo mismo un seca y después el otro que los dos juntos digamos, pero como opero estos dos escalares, porque en un espacio vectorial no necesariamente está definida una operación entre escalares.

[118E] : Sí a veces.
[118ES5] : Porque hay una operación suma entre vectores y una de escalar pero es de un vector con un escalar entonces a ¿Cómo es eso?

[119E] : ¿Qué objetos son esos?
[119ES5] : Son elementos del cuerpo por lo tanto tienen una multiplicación.

[120E] : ¿Qué multiplicación es?
[120ES5] : Del cuerpo.

[121E] : Del cuerpo...
[121ES5] : Es que igual a uno se confunde porque ahí uno tiene el mismo signo, o sea digamos que es como un punto.

[122E] : ¿La anoto sin nada?
[122ES5] : Claro

[123E] : Ya...
[123ES5] : Porque ahí son distintas cosas, entonces se supone que éste cuerpo de escalares tiene que ser, bueno este conjunto se supone que estamos hablando de cuerpo, entonces es un cuerpo de escalares seguramente es con la suma de funciones y con la composición de funciones entonces esto es composición, entonces ponderación es composición, en todo caso entonces cuando uno o sea cuando uno habla de un espacio vectorial,

como ya dije que era un conjunto de vectores u conjunto de escalares una suma y una multiplicación también debería quizás mencionar porque en ese cuerpo había un cuerpo o sea con que operaciones es un cuerpo ¿o no?

[124E] : Claro, claro... uno debería tenerlo claro, cuáles son las operaciones que están en juego ahí ¿cierto?
[124ES5] : Sí, claro...

[125E] : Sí, ¿Por qué?
[125ES5] : Porque, porque no…pueden ser más de, no siempre son únicas las operaciones ¿o si? No, no tengo idea ahí no sé.

[126E] : O sea uno podría considerar un conjunto con varias operaciones, pero la estructura que cumplen a lo mejor no es la misma.
[126ES5] : Sí o la regla como se juntan.

[127E] : Como se ven también pero acá que están jugando ¿Qué operaciones para ti?
[127ES5] : O sea por lo que yo conozco en este conjunto de las funciones esta la multiplicación es la composición, o sea por lo general, no se si habrá otra creo que hay otras cosas como algo de convolución creo que me han dicho unos profesores, nunca he visto eso pero bueno… me guío según lo básico, la suma de funciones que siempre esta definida y la multiplicación no es que sería la composición de hecho hay otras cosas por ejemplo: está la, una función se multiplicar con un escalar real.

[128E] : También ¿no es cierto?
[128ES5] : Sí.

[129E] : Multiplicación por escalar.
[129ES5] : Claro, pero ahí entonces debería ser esto debería ser un cuerpo de F(R, R) con la operación suma de funciones y la composición de funciones ese es el cuerpo.

[130E] : Claro.
[130ES5] : Ese es el cuerpo.

[131E] : ¿Tú lo consideraste así?
[131ES5] : Claro.

[132E] : Por lo tanto, qué puedes decir la amplia, esa es la propiedad asociativa.
[132ES5] : Claro ahí eso, entonces me falta ahora la…las 2 distributividad, distributividad 1 pongamos que es, alfa no perdón F+G aquí tenemos de nuevo la operación de suma de función no la suma anterior porque la otra suma es al revés, esto en, en un vector X o en un numero real tendría que ser igual a f(x)+g(x), entonces esta es suma de función y esta es suma de números reales.

[133E] : Perfecto.

[133ES5] : La distributividad 2 que sería ponderación X+Y debería darme f(x)+f(y), ahí están y cinco es que el uno tiene que como es la identidad en esa realidad como un X debería darme X, ahora voy a ver si se cumplen, ésta se cumple, está claro en la ultima también se cumple la identidad de x es el x, la asociatividad F compuesta con G evaluado en x es por definición F evaluado en G de x así que es lo mismo, ahora la distributividad, ésta también es la definición de suma de funciones se define de esta manera cuando se evalúa en un X, esta no. ¿Por qué? Porque tendría que ser una especie de función lineal para que hiciera eso, o sea las funciones no todas hacen eso, las funciones que se llaman lineales son las que separan la suma eso no necesariamente si que se cumple dicho axioma no, no todos.

[134E] : No todos, ¿Cuál no se cumple?

[134ES5] : El de la distributividad.

[135E] : Me tienes que justificar por favor anotarme por qué...

[135ES5] : Anotar una función y 2 vectores, la función seno de…no, no muy complicada la seno x^2 la función $f(x)= x^2$, entonces F evaluada en 2+1 eso es igual debería ser igual a f (2)+f (1) pero eso no es verdad esto es 3 y 3 al cuadrado es nueve ¿eso es igual a 4+1? No.

[136E] : No cumple.

[136ES5] : Ahí está no se cumple.

[137E] : Listo-

[137ES5] : Esa es la pregunta ¿cierto?

[138E] : Sí, gracias la otra vamos a la tercera.

Pregunta 3

[138ES5] : Leemos, es posible que exista un espacio vectorial que tenga sólo 2 elementos si a ver consideremos el conjunto (0,1) tiene dos elementos y a ver tengo que definir la suma.

[139E] : Sí.

[139ES5] : Y la suma la defino como se define la suma 0+0, 0+1 uno 0+1 uno cero. Y tienen que cumplirse las propiedades para que eso esté bien a ver, grupo abeliano con la suma ¿cerrado? Si, se nota claramente si en todas las imágenes están en el (0,1), o sea no se como se llaman cosas.

[140E] : Todas las cuentas final se pueden sacar entre 0 y 1.
[140ES5] : Claro los resultados digamos, sí.

[141E] : Los resultados.
[141ES5] : ¿Es cerrado? Sí ¿es? A tendría que ver si es asociativa a pero este es un cuerpo ¿o no?

[142E] : Sí.
[142ES5] : Es un cuerpo o sea ya me acuerdo que es el cuerpo más pequeño de todos ¿o no?

[143E] : Sí ¿Cuál?
[143ES5] : ¿Tiene nombre?

[144E] : Sí.
[144ES5] : No tenia idea.

[145E] : Sí y se puede anotar.
[145ES5] : Eh...

[146E] : ¿Lo has visto?
[146ES5] : Z2 ¿o no?

[147E] : Sí, Z2 se anota.
[147ES5] : Es que no hemos visto eso recién pase a estructuras, pero claro Z2 tiene 2 elementos y cuando este número es un número primo es un cuerpo.

[148E] : Es un cuerpo.
[148ES5] : Esto es un cuerpo.

[149E] : Sí.
[149ES5] : Bueno en particular es un grupo abeliano.

[150E] : ¿En particular un grupo abeliano?
[150ES5] : Claro esto está definido en la suma módulo y en la multiplicación módulo ¿cierto?, módulo 2 .

[151E] : ¿Módulo 2?
[151ES5] : Sí, entonces es un cuerpo entonces bueno en particular es un grupo abeliano así que no tengo para que verificar esas propiedades, ahora me sobran propiedades porque la multiplicación no, módulo no la uso.

[152E] : No, pero para haber ¿Cuántas operaciones?
[152ES5] : El conjunto de vectores tiene que tener, tiene que ser grupo abeliano, tiene que tener suma, nada más.

[153E] : Nada más ahí estamos.

[153ES5] **:** Claro la suma y como es un cuerpo con esas dos propiedades, entonces es grupo abeliano con la primera, a hora me falta la multiplicación por escalar y ¿Cuál es el conjunto que voy a considerar conjunto de los escalares? Tiene que ser un cuerpo también, el cuerpo de escalares va a ser el mismo y la multiplicación por escalar va a serla multiplicación módulo 2.

[154E] : Módulo 2.
[154ES5] : O sea, claro. No si de hecho todos los cuerpos son espacios vectoriales sobre sí mismos.

[155E] : Entonces ¿Por qué de dónde sabes eso? ¿Cómo argumentarías lo que acabas de decir?
[155ES5] :¿Por qué? Porque la suma de vectores es un grupo abeliano por que es un cuerpo y después la multiplicaron por escalar la miro como multiplicación detectores que es equivalente en este caso, porque el conjunto de vectores y el conjunto de escalares es estoy considerando el mismo entonces yo sé que en vez de ver sí se cumplen las propiedades de vectores por escalares los miro como vectores con vectores y yo sé que esto con la multiplicación es un... ¿Cómo se llama? Un grupo…un grupo abeliano, pero ahí tengo que quitarle el cero ¿o no?

[156E] : Claro.
[156ES5] : Para que tenga inverso.

[157E] : Y tiene inverso específicamente.
[157ES5] : Pero eso, eso no influye en espacios vectoriales porque en espacios vectoriales nunca se habla de inverso.

[158E] : No, entonces.
[158ES5] : A si que si no tenga no influye como espacio vectorial.
[159E] : Entonces... ¿Cuál sería tu respuesta a esa pregunta? Que hace don Jaime.
[159ES5] : Sí, sí existe un espacio vectorial que tenga solo 2 elementos u ese es Z2 sobre Z2.

[160E] : ¿Por qué?
[160ES5] : Porque es un cuerpo y como es un cuerpo y como es un cuerpo un espacio vectorial es más chico que un cuerpo o sea es más básico digamos este es más complejo es como decir…si no buscamos un grupo puede hablar de cuerpo y parte del es un grupo así que es más fácil digamos…

[161E] : ¿Podrías dejar registrado tu argumento? Que dice que diga cuál es el espacio y ¿Por qué? Es un espacio.
[161ES5] : Z2 conjunto de vectores y Z2 a la vez conjunto de escalares entonces Z2 espacio vectorial sobre Z2, entonces grupo abeliano y el grupo abeliano debería ser Z2 con la suma y le voy a escribir modulo 2 y eso se cumple porque es un cuerpo.

[162E] : Sí...

[162ES5] : Pues es un cuerpo no lo he demostrado pero ese es un cuerpo y… voy a poner operación con escalares, operación con escalares, la multiplicación módulo, multiplicación módulo 2 y esto ¿Cómo se escribe? Se escriben como Z2 menos el cero es un grupo es un grupo con la multiplicación modulo 2 es un grupo abeliano, así que en particular cumple todas las propiedades que tiene que cumplir, los 5 axiomas de escalares, escalares en particular por que es más o sea más que eso, en particular cumple los axiomas de escalares, por tanto Z2 es un espacio vectorial sobre sí mismo y bueno creo yo que en general todo cuerpo es un espacio vectorial sobre sí mismo, eso.

[163E] : Eso, perfecto vamos a la cuarta.

Pregunta 4

[163ES5] : W conjunto de todos los polinomios tal que la integral de cero a uno sea ¿esto es con un n fijo cierto? Sí...

[164E] : Si los polinomios de grado ¿Cómo se dice? Menor o igual a n.

[164ES5] : Sí, con las operaciones usuales, o sea suma de polinomios y multiplicación de polinomios ¿es un espacio vectorial real? ¿Por qué?, ya en este casi voy a poder usar el teorema ¿Por qué? Porque W.

[165E] : ¿Cuál de todos de los que me has mencionado? Porque me has mencionado muchos, anótame el teorema.

[165ES5] : Que W es un subconjunto de $IR^n[x]$ y $IR^n[x]$ es un espacio vectorial entonces tengo que verificar que se cumplen primero que el cero este en W, cuando digo cero estoy hablando del polinomio nulo entonces, ya lo voy a escribir como el cero de X ¿están en W? si pues la integral de 0 a 1 de 0 de X es 0 y además es un polinomio de gado menor o igual a IR^n porque es un polinomio de grado nulo o no tiene grado, la suma de polinomios ¿está? Veamos p(x) y q(x) pertenece a W entonces primero p(x)+q(x) sigue estando en $IR^n[x]$ porque tengo que verificar que se cumpla eso y eso son dos cosas primero, están ésas y además la integral de 0 a 1 de p(x)+q(x) de x por linealidad de la integral se separa p(x) de x + 0 1 q(x) de x y eso es cero por lo tanto p(x)+q(x) está en W y tercero que la multiplicación por escalar este bueno lo pensé yo solo así que la multiplicación común y corriente α un elemento de IR porque los polinomios son con coeficientes reales y p(x) un polinomio cualquiera, bueno con grado menor o igual a, o sea perdón perteneciente a… W ahí si, entonces la integral entre cero y uno de α p(x) de x por linealidad de la integral sale también eso es α p(x) sigue estando en IR^n [x] o sea el grado no cambia.

[166E] : Si es un polinomio de la misma naturaleza al multiplicarlo por α.
[166ES5] : Claro, de grado menor o igual a n, por lo tanto α p(x) pertenece a W u de uno, dos y tres por teorema, W es un subespacio de IR^n[x] y en particular es un espacio vectorial o sea el teorema dice eso, pero dice mucho más que eso.

[167E] : Muchas gracias, la que sigue.

Pregunta 5

[167ES5] : Averigua si la siguiente afirmación es correcta o no en ambos casos justifica ti respuesta, sean V, W, Z espacios vectoriales sobre un cuerpo IK y supongamos que V, W es igual a d es igual a d+Z, ¿Qué suma es eso? La suma de espacio del conjunto de todos los vectores que son uno de acá más uno de allá.

[168E] : Suma de espacios, porque son espacios ¿cierto?
[168ES5] : Claro, o son de conjuntos también se puede.

[169E] : Pero son espacios, suma de espacios.
[169ES5] : Entonces hay que demostrar que W es igual a cero, si es que es verdadero no, no, no, yo creo que no.

[170E] : ¿Por qué?
[170ES5] : Porque estoy pensando en lo más fácil, IR estoy pensando, pero perdón acá son todos los vectores que son de la forma V+W donde V pertenece a IK y W IK esa es la definición de suma de espacio ¿cierto?

[171E] : Claro.
[171ES5] : Entonces, pensemos en V igual a IR ahí todo esto falso, pensé mas en V igual a IR entonces pensemos IR más un conjunto igual a IR más otro conjunto por ejemplo si yo ,aquí yo pongo el espacio nulo eso me da IR ¿cierto?

[172E] : Sí.
[172ES5] : De hecho si yo pongo cualquier cosa acá me va a dar IR.

[173E] : ¿Cómo cualquier cosa?

[173ES5] : Cualquier subespacio de IR, si yo pongo cualquier, por ejemplo…pongo el generado por el (1,1) el por ejemplo no el generado por el 1 esta en IR, IR más IR eso me da IR e ir no es igual a y ese y ese son distintos, por lo tanto, es falso.

Pregunta 6

[174ES5] : ¿Es Q un espacio vectorial sobre IR? Justifica. No, no es un espacio vectorial ¿Por qué?, porque si estos son escalares y estos son vectores entonces la clausura no se va a cumplir, no por clausura.

[174E] : ¿Por clausura de quién?
[175ES5] : Por clausura de la, con, las operaciones usuales supongo que lo dice…

[175E] : Sí, sí.
[176ES5] : De las por clausura de la multiplicación por escalar, multiplicación por escalar, porque dar ejemplo: tomamos un número no uno racional… dos y tomamos un numero no uno mejor uno, uno y tomamos un, este pertenece a Q y tomamos un escalar entre comillas (raíz de 2) que pertenece a IR entonces la multiplicación usual es (raíz de 2) y eso no pertenece a los racionales por lo tanto eso es.
¿Es IR un espacio vectorial sobre Q? Sí, sí lo es justificar.
Es IR un espacio vectorial sobre Q a ver, veamos la primera parte sobre yo digo que la primera parte sobre grupo abeliano no tiene nada que ver el Q, IR o sea sobre el grupo abeliano esta mas bien porque eso es independiente del conjunto de escalares.

[176E] : ¿Quién tiene que ser grupo abeliano? Que tengo dos conjuntos.
[177ES5] : El IR con la suma usual digamos si estamos hablando de esa, esa tiene que ser grupo abeliano y lo otro, propiedades de las escalares a ver... lo único que tengo que ver que se verifique es la nada, nada, porque todas las propiedades, veamos todas las propiedades que tiene que cumplir que tiene que cumplir o sea todas las propiedades que tiene que cumplir con respecto, todas las propiedades que tiene que cumplir con respecto a la multiplicación de escalar, multiplicación de escalar se pueden ver de la siguiente forma, se pueden ver de la siguiente forma. Tomo un vector X de IR y tomo un elemento Y de las racionales en particular o sea en particular y pertenece a IR entonces van a cumplir las propiedades que tiene que cumplir con respecto a los escalares porque IR es un espacio vectorial sobre si mismo, por lo tanto, se van a cumplir todas las propiedades, se van a cumplir que X ¿Cómo era? Que Y por X esta en IR se van a cumplir que

aquí puedo poner Z y Q porque por lo general se ponen 2 escalares XZ, también va a pertenecer a IR, se va a cumplirlo que habíamos dicho antes y ZX es igual YZX eso ya tienen que ver con la multiplicación del grupo IR, se van a cumplir todos que el uno X es igual a X y así en general se cumple todo pues IR es un espacio vectorial sobre si mismo, eso, solo pensé.

[177E] **:** Esta bien, la otra.

Pregunta 7

[178ES5] **:** IR-cero es un grupo abeliano con la operación suma definida como si, sigue a la multiplicación, ¿esa es la multiplicación que yo conozco?

[178E] **:** La suma esta definida por la multiplicación de números ¿de qué tipo?

[179ES5] **:** Donde X e Y son números reales no nulos, si porque bueno es lo mismo que yo dijera aquí IR menos el cero es un grupo abeliano a la operación multiplicación que yo conozco pero ahí está definida la suma como multiplicación.

[179E] **:** Muy bien dicho exactamente, es eso traducido.

[180ES5] **:** Claro, definir la otra operación, multiplicación por escalar sobre un cuerpo IK para que IR menos cero sea un espacio vectorial sobre IK, con esas dos aseveraciones, sea espacio vectorial sobre IK, entonces tenemos un conjunto que es un grupo abeliano y necesito… a ver si cumple todas las propiedades de grupo abeliano, están listas, faltan las propiedades de escalares entonces.

[180E] **:** ¿Y lo que falta definir es?

[181ES5] **:** El cuerpo de escalares.

[181E] **:** El cuerpo de escalares ¿Y también?

[182ES5] **:** La multiplicación por escalar, ahí tengo ciertas dudas, a ver, veamos, un intento para hacer tomar el mismo IR como cuerpo de escalares, me tinca que algo va a pasar con, con la distributividad. Veamos, tomar IK igual a IR entonces el grupo abeliano listo primero la propiedad sobre escalares, veamos, se supone que x+y, ah! Y con qué operación, con la multiplicación otra vez.

[182E] **:** ¿La multiplicación?

[183ES5] **:** Otra vez.

[183E] **:** Otra vez.

[184ES5] **:** Sí, y con la multiplicación normal digamos usual eso.

[184E] **:** Usual en IR.
[185ES5] **:** Claro, esto acá son todos números reales debería ser igual a XZ +YZ pero, esto es XYZ y eso es XZYZ no es lo mismo, son distintos. Así que bueno, pero quizás esta mal eso, esta mal eso, definir hay que encontrarla.

[185E] **:** Claro y hay que definirla.
[186ES5] **:** O decir porque no es imposible una cosa así.

[186E] **:** ¿O también? La otra posibilidad.
[187ES5] **:** A ver ¿Cómo sería? Por ejemplo que él, el ya dijimos el uno tiene que ir, o sea el uno los tiene que dejar iguales.

[187E] **:** ¿Estas pensando en qué propiedad hay?
[188ES5] **:** Claro los que tiene que cumplir, este ya no lo cumple…qué paso aquí, qué paso, que complicado. Sobre un cuerpo IK para que IR menos el cero sea espacio vectorial sobre IK con esas dos operaciones a ver…IK tiene que ser un cuerpo si IK tiene que ser un cuerpo entonces podría ser, IR ya no puede ser, lo otro es que fuesen con racionales, pero tampoco, porque no, va a pasar lo mismo. ¿Y qué otro cuerpo puede ser? Porque se supone que tengo que tener un cuerpo de manera que al multiplicarlo por un numero real me de un numero real, no nulo.

[188E] **:** Claro, que sea no nulo.
[189ES5] **:** Claro, entonces me quedan los complejos. No, los complejos no sirven, porque si los multiplico por un numero real, lo mas probable es que me de un complejo.

[189E] **:** Entonces, tú me dijiste dos posibilidades de falla.
[190ES5] **:** Claro, que fuese la definición de o sea la definición de la operación o el conjunto. Con esto como que no se me ocurre, entonces quizás voy a tener que definir otra operación, quizás con el mismo IR ¿cómo sería eso? A ver… sería extraño poner suma como intercambiando las cosas, a ver veamos, lo vamos a ver con la suma, estaría como todo al revés porque por lo general IR tiene como suma para que sea grupo abeliano y multiplicación por escalar a la multiplicación normal, entonces ahora al revés, multiplicación va a ser grupo abeliano y vamos a poner la suma ¿se puede definir suma cierto? Sí, porque son las mismas es todo.

[190E] **:** Sí, se puede, menos el cero.
[191ES5] **:** Entonces ahora tomar IK igual a IR y la, con la multiplicación, a ver veamos X, no alfa pasa a ser un escalar por X va ser igual a

alfa mas X, es un escalar y es vector porque son todos números reales. ¿Entonces se verifican todas las propiedades que tienen que tienen que cumplirse?

[191E] **:** ¿Cuántas son las propiedades que hay que chequear?

[192ES5] **:** Cinco, veamos, el uno por ejemplo uno por X tiene que ser X, eso es lo que dice, veamos. Uno por X, no mal se define como 1+x así lo defino yo y eso no es X ya entonces no sirve, tampoco sirve.

[192E] **:** Era un intento.

[193ES5] **:** Sí, la operación entonces ¿Cuáles son las operaciones que sea asociativa y cumple todo eso? Un cuerpo, a ver, análogamente a ver si había suma, entonces lo otro era multiplicación, entonces si es multiplicación ¿elevar a potencia?, no, muy raro, no le puedo hacer eso. No, no puedo.

[193E] **:** ¿Qué estas pensando cuando dices eso?

[194ES5] **:** Estoy tratando de pensar, o sea, análogamente, si yo tenía dos operaciones, ¿cierto?, la suma normal y la multiplicación por escalar entonces yo había pensado que cuando uno suma dos números reales es la suma normal y cuando uno multiplica, a no, cuando uno multiplica es otra cosa, no es sumar varias veces, que en un momento dije ahí multiplicar es como sumar varias veces, o sea a uno le enseñan eso cuando chico, que 2X2 es 2+2 una cosa así.

Entonces yo había dicho entonces si la multiplicación acá, entonces ¿Qué es multiplicar hartas veces?, elevar a potencia, pero no se puede porque los números negativos no los voy a poder elevar a números racionales. Por ejemplo, no puedo poner el -2 no lo voy a poder juntar con el ½ por ejemplo.

[194E] **:** Pero en... ¿tú estás pensando en potencias con exponentes de qué tipo cuando me dices eso?

[195ES5] **:** Como, como el exponente tiene que ser elemento del cuerpo, entonces pueden ser por ejemplo: racionales, reales complejos ¿complejos?, no complejos no, pero por ejemplo el más chico, los racionales, no voy a poder porque por ejemplo este conjunto tiene a los negativos, entonces que va a pasar cuando yo eleve a ½ por ejemplo. No me va a dar un número real, y tiene que haber clausura, entonces tiene que darme otro número real cuando unte un escalar con un vector.

[195E] **:** Pero qué dirías tú de la función entonces 2X es una función.

[196ES5] **:** Sí, pero la base esta fija y ahí cuando, y ahí estoy haciendo correr el exponente, cierto entonces.

[196E] **:** Pero 2 elevado a un número real, esta definido. A eso me refiero yo.

[197ES5] **:** Sí, en todos los números reales, claro. Pero por ejemplo aquí son todos números reales, pero sin el cero o sea las positivas y las negativas y por ejemplo la función exponencial es de ese tipo b^x se define para todos los b positivos. Y distintos de uno por que si es uno es una ralla y entonces ahí faltan todos los negativos y hay problemas con los negativos porque los negativos no están definidos casi en todas, en muchas partes no están definidos entonces eso no se considera.

[197E] : Entonces por eso dijiste, eso no puede ser...

[198ES5] : Claro y más encima la analogía era mala…

[198E] : No sabía cómo estaba haciendo esa analogía, sigue estando igual.

[199ES5] : No, más encima la analogía estaba mala porque multiplicar no es sumar varias veces, si multiplico por un numero natural sí pero...

[199E] : Eso era lo que te quería decir yo, que no era esa exactamente apuntaba a esa idea.

[200ES5] : Eh…

[200E] : Toma Coca-Cola haber si le hace bien.

[201ES5] : Quizás… la azúcar, café y todo eso…

[201E] : Habría que pensar en, no pelear.

[202ES5] : Sí es que nunca había visto un ejercicio de ese tipo o sea como que no es un ejercicio es como relacionar conceptos y cosas así, porque es como, o sea, tiene que ver más o sea con las estructuras mismas de los espacios vectoriales así como hablar de, del cuerpo, de la base de los espacios vectoriales.

[202E] : A eso apuntan las preguntas.

[203ES5] : Por ejemplo, yo no conozco ningún teorema que hable de esto no conozco ningún teorema que diga no sé un espacio vectorial con tal cuerpo que relación tiene con el mismo espacio vectorial del mismo cuerpo de escalares pero con otro cuerpo de escalares, no conozco yo un teorema de ese tipo, no sé si…, yo creo que si hay pero no sé…

[203E] : Pero como tú con lo que sabes podrías elaborar un argumento que te sirva para dar respuesta a eso.

[204ES5] : Sí, pero como siempre hay dos cosas, que no existan pero que ahí tendría que dar así un argumento como un teorema o algo así, así como que llegue a una contradicción pero no tengo ninguno, tengo pocas herramientas y lo otro es encontrarlo pero igual encontrarlo me parece que es un poco complicado. A ver...

[204E] : A lo mejor…
[205ES5] : A lo mejor sale, multiplicación por escalar sobre un cuerpo IK y si considero un cuerpo muy simple muy simple como el uno cero ¿puedo hacer eso?

[205E] : ¿Es un cuerpo?
[206ES5] : Sí y la multiplicación sería la multiplicación normal como uno y cero números reales no mirándolos de otra forma no porque si multiplico por cero me va a dar cero y eso no esta acá mal, entonces ¿no se puede?, no se puede.

[206E] : No sé yo.
[207ES5] : Yo creo que no se puede, porque si tengo un cuerpo voy a tener cero si tengo cero la propiedad, dice el teorema que el teorema no es axioma sino que cero con un vector cero y el cero no esta acá entonces no se cumple la clausura.

[207E] : Entonces ¿Qué artillería estás usando para las respuestas?, estás usando un teorema parece.
[208ES5] : O sea, lo del cero solamente en contradicción con la definición de espacios vectoriales seria supongamos que existe supongamos existe IK cuerpo con alguna operación, no me importa cual, con alguna operación tal que.

[208E] : ¿Le vas a poner nombre a la operación?
[209ES5] : Con alguna operación ponderación lo vamos a poner, ponderación tal que cumple lo que necesito, tal que cumple que IR menos el cero es un espacio vectorial sobre IK con las operaciones definidas, con las operaciones dadas, luego yo sé que el cero pertenece a IK porque es un cuerpo, luego puedo definir el cero ponderación con un vector porque ya está el cero y tomo un vector número real y eso me va a dar cero por axioma de espacio vectorial, no por teorema de espacio vectorial pero cero no pertenece a IR menos el cero claramente, por lo tanto, no se cumple el axioma de clausura sobre…tengo que ponerle, de escalares voy a poner entre paréntesis por que es la clausura sobre escalares contradicción por lo tanto no existe, no existe.

[209E] : Perfecto vamos a la siguiente.

Pregunta 8

[210ES5] : Veamos sea V el conjunto de todos los x`s ,y`s y z`s en $IR^3$ talque x`s y`s y z`s sean positivos es como el primer octante sin las paredes un espacio vectorial con las operaciones, o sea ¿o sea es un subespacio vectorial?

[210E] : Sí.

[211ES5] : No voy a ver nada. Sea W el subespacio de todos los puntos de V situados sobre el plano zeta igual a uno, ya escriba dos vectores de V, dos vectores de V, zeta tiene que ser uno eso esta claro cierto zeta tiene que ser uno y los otros dos tienen que ser positivos entonces dos, dos, pi, e.

[211E] : Perfecto pero son dos.

[212ES5] : Claro ¿Cuál es el vector nulo de W? el vector nulo de w, estamos hablando nulo con respecto a ¿Qué?

[212E] : El vector nulo, ¿Quién se llama el vector nulo? Los espacios vectoriales tienen vector nulo.

[213ES5] : Sí con respecto a la suma, de grupo abeliano porque en un grupo abeliano con respecto a esta suma el me tiene que dar cero entonces se supone que, se supone que entonces x, y, z sumado con un vector que es el vector nulo que yo voy a buscar (a,b,c) no mas le voy a poner eso me tiene que dar (x,y,z) ese el vector nulo el que cumpla con eso… veamos y esto se define como (xa,yb,zc) eso quiere decir que a es igual a uno b es igual a uno y c es igual a uno entonces el vector nulo es (1,1,1) esa es la respuesta y esta en W por que z es igual a 1, si v es igual a (3,2,1) en V ¿Quién es menos v?, el que sumado me da (1,1,1) ,(3,2,1) sumado según esta operación (a,b,c) me tiene que dar (1,1,1) eso de ahí que me quiere decir (3a,2b,c) (1,1,1) igualdad entonces había que hacer a= 1/3 b=1/2 c=1 menos v entonces es igual a (1/3,1/2,1).

[213E] : Perfecto

[214ES5] : Los vectores (2,2,1) y (1/2,1/2,1) ¿son linealmente independientes? Sí o no.
Ahí me entró toda la duda porque cuando uno ve si son vectores linealmente independientes entonces forma una combinación lineal pero ¿esa combinación lineal esta definida según las operaciones del espacio vectorial?, esto es α (2, 2,1)+ β (1/2,1/2,1) eso me tiene que dar cero no, no el (1, 1,1) ¿este es el vector nulo?

[214E] : Ese es el vector nulo.

[215ES5] : Y la multiplicación por escalar me tiene que dar, que extraño 2 elevado a α, 2 elevado a α, es que me entró duda porque...

[215E] : ¿Por qué te entró duda?

[216ES5] : Porque estaba pensando, yo siempre que he demostrado que son linealmente independiente entonces uso la multiplicación y suma usual de vectores de IR^n .

[216E] : Pero estas trabajando ¿en qué espacio cuando haces eso?

[217ES5] : En algún subespacio de IR^n, seguramente pero esa es mi duda que nunca en todas las veces que he estudiado nunca me han definido ninguna otra operación que no sea la suma y multiplicación usual, no parece que no, parece que no, yo creo que no porque siempre lo he hecho así y siempre ha estado bien.

[217E] : Este es un instante nuevo entonces.

[218ES5] : Claro.

[218E] : Veamos a que llegas-

[219ES5] : Y esto se multiplica un por uno dos elevado a alfa menos beta, dos elevado a alfa menos beta, uno, por lo tanto alfa menos beta tiene que ser…cero, alfa igual a beta.

Entonces no, o sea no son l. i. porque tenía que llegar a que son cero y por ejemplo si tengo alfa y beta igual a uno entonces esos me los deja fijo, si (1,1,1) (1,1,1) si porque además eso es un axioma tiene que pasar entonces (1,1,1) no son linealmente independiente.

¿Es el conjunto S es una base para W? y ¿Cuál será la dimensión de W?

[219E] : Muy buena pregunta.

[220ES5] : Es un plano es de uno a dos, o sea por lo general uno tenía a IR^3 y uno decía un plano tiene que pasar por el origen pero con las operaciones usuales, entonces si uno cambia esas operaciones ¿Qué pasa con el plano? ¿Qué tiene que ser ahora? Pasar por el vector nulo por el (1, 1,1).

[220E] : ¿Y pasa?

[221ES5] : Y W pasa por el (1, 1,1,) si porque, si ¿Qué más? Bueno hay que ver si es que es un...

[221E] : Estás usando una visualización geométrica para ver las cosas.

[222ES5] : Sí, pero...

[222E] : Claro y la asociación está bien porque tú estas diciendo que tú plano tiene que pasar por el cero vector y tu haz descubierto aquí ¿Qué cero vector?

[223ES5] : Que el vector es el (1, 1,1).

[223E] : Y me estas diciendo que pasa por el (1, 1,1).

[224ES5] : Sí, porque Z es igual a uno, si cualquier otro plano que no pase por ahí no es un subespacio de este conjunto con estas operaciones, pero a lo mejor unos considera otro plano que pasa por el (0, 0,0) pero no por el, por este (1, 1,1) por ejemplo y es un subespacio pero de IR^3 pero mirado desde otra forma, mirado como con las operaciones sólo de multiplicación por escalar y sobre el escalar.

[224E] : O sea las que están jugando un rol importante aquí son las operaciones, porque si usted dijeras un subespacio he de IR^3 o un plano que pase por el (0, 0,0) ¿te sirve a ti aquí?

[225ES5] : Aquí no de hecho el (0, 0,0) no siquiera esta en V.

[225E] : Exactamente, exactamente.

[226ES5] : Es que sabe tengo duda que como en todo este tiempo nunca me habían hecho esto de cambiarme, siempre lo hacían con la suma normal que, siempre lo hacen iguales.

[226E] : Bueno ahora tienes otra idea que espero que sea menos fome.

[227ES5] : Y ahí por ejemplo me confunde, o sea porque ahí me cambia todo, o sea no me cambia todo sino que ya no sé que cosas me sirven y cuales cosas no me sirven por ejemplo yo sabía siempre que un plano tenía dimensión 2, ahora este plano ¿tendrá dimensión 2? Yo creo que sí, tanto cambiará. ¿Qué tanto cambiará? Veamos…

El conjunto S es una base para W una forma de hacerlo es tomar un vector de W buscarle la base y que justo resulte eso, entonces es una base porque lo otro seria ver si es linealmente independiente.

[227E] : Tú tienes que decidir que camino tomas, porque tú me tienes que argumentar, estas contando las posibilidades.

[228ES5] : Yo creo que si a ver, veamos α(3,3,1)+ β(1/3,3,1) después voy a explicar porque yo creo que si entonces esto es 3 elevado a α, 3 elevado a α, uno más 3 elevado a menos β pongamos 3 elevado a β uno, (1,1,1) entonces esto me da 3 elevado α-β, 3 elevado a α+β uno (1,1,1) por lo tanto, alfa igual a beta alfa igual a menos beta entonces alfa igual a beta igual a cero y significa que son linealmente independiente.

[228E] : ¿Qué significa?

[229ES5] : Si a ver mal dicho es que yo iba a decir, lo que yo iba a decir es que este espacio tiene dimensión mínimo 2 y que como no es todo el espacio original entonces no puede tener dimensión 3, pero ¿este espacio tiene dimensión 3? Porque no es IR^3 común y corriente es otra cosa, a pero veamos lo otro era, lo que había dicho era tomar un vector w, ¿Dónde está? ¿A dónde está W? situado sobre un plano x,y,z, entonces un vector (x,y,z) esta en W si y sólo si z igual a uno entonces (x,y,1) se puede escribir como, como, como, como y ahí me entro toda la duda que por lo general yo descompongo esto se supone que lo tengo que descomponer en dos vectores y después decir que el espacio W es el espacio formado por esos dos elementos y ahí ¿Cómo lo hago? ¿Cómo lo descompongo? Porque aquí los escalares no los puedo sacar así no más, porque aquí los escalares salen como raíces digamos, y si lo descompongo como… me entró la duda.

[229E] : Claro, los escalares salen como místicos.
[230ES5] : Aquí una forma de hacerlo sería x,1,1 suma 1, y, 1 porque si los multiplico me quedaría x, y, 1 y aquí ese x no lo puedo sacar ¿Cómo lo saco? No puedo encontrar la como la base generadora así de simple, ahora.

[230E] : Estás pensando encontrar una base para W.
[231ES5] : Claro, por lo que generalmente uno hace descompone eso como combinación lineal de ciertos elementos.

[231E] : Hace eso, hace eso.
[232ES5] : Pero aquí es mas complicado porque no puedo, este escalar no lo puedo sacar.

[232E] : Pero, ¿podrías hacer un análisis de ahí?
[233ES5] : ¿Es esto?

[233E] : De eso.
[234ES5] : Lo otro sería demostrar que todo vector (x, y, 1) yo lo puedo escribir, x positivo e y positivo yo lo puedo escribir como combinación lineal de estos dos vectores y como ya, bueno son linealmente independientes puedo hacer eso, a ver…
A ver, veamos x, y, 1 yo lo quiero escribir como, va a ser lo mismo acá alfa esto más beta eso 3α-β, 3α+β, 1 de acuerdo entonces x es igual y, y esto ¿Qué voy a hacer acá? E igual a 3α+β eh… ¿logaritmo?

[234E] : Una ecuación de grado…
[235ES5] : ¿Qué es esto?, ¿Qué es esto? Logaritmo en base 3 a ver, α-β es igual a logaritmo en base 3 de x , es positiva así que puedo hacer eso, α-β logaritmo en base 3 de x y aquí OK, α-β es igual me da uno y α+β es igual a logaritmo en base 3 de Y entonces, donde concluyo que α sumando me que 2α es igual a logaritmo en base 3 de X+Y eso es X por Y , XY α es igual a logaritmo en base 3 de

XY sobre 2 análogamente ,no análogamente a ver si a este le resto ese me quedan 2 β es igual a logaritmo en base 3 de Y dividido X, son positivos así que puedo hacer eso β igual a logaritmo en base 3 de Y sobre X sobre 2, ahí está, encontré α encontré β, entonces todo vector se puede escribir como combinación lineal de estos dos por lo tanto si es una base, que extraño.

[235E] : ¿De qué te sirvió saber la dimensión para decir que era base? No me haz dicho eso, que relación tiene.
[236ES5] : Es que no lo usé.

[236E] : ¿No lo usaste?
[237ES5] : Es que creo que la dimensión no me ayudó mucho.

[237E] : No jugó ningún rol, ahora que tienes una base del espacio ahora ¿Qué podrías decir?
[238ES5] : Sé que tiene, sé que tiene dimensión dos o sea lo que usé para decir que es una base es primero que son linealmente independiente y todo vector se puede escribir como combinación lineal de ellos dos así que no necesito otro más, entonces eso.

[238E] : Muy bien, muy bien, está constatado.

Pregunta 9

[239ES5] : Sean U, W, V tres subespacios de IR^3 definidos como sigue, con la operación usual.

[239E] : Si, con la operación común y corriente, si cuando digo, cuando no hay nada, es la operación usual, estos son, estos que vienen ahora es una especie de rutina que seguramente tú haz visto.
[240ES5] : Ya los he hecho.

[240E] : Estos exactamente no pero otros pero quiero ver como los abordas aquí.
[241ES5] : Tengo que ver si son iguales, por ejemplo, este es un plano, ese si son linealmente independiente es un plano y ese sí es que son iguales tendrían que, tiene que haber un vector de sobra ahí y hay un vector de sobra, el (1,2,3).

[241E] : Lo de sobra ¿Qué significa?
[242ES5] : Que es combinación lineal de los otros dos.

[242E] : ¿Y si ese vector te sobra?
[243ES5] : Claro el (1,2,3) yo lo puedo escribir como (1,0,1) mas dos veces (0,1,1) y me da , si , así que este es combinación lineal, así que

no me sirve entonces U es generado por (1,0,1), (0,1,1) …(1,0,1), (0,1,1) ya y estos son linealmente independientes claramente que si porque si pongo un alfa acá se tiene que hacer cero y si pongo un beta acá me tiene que da cero, si son linealmente independiente, ahora W ¿son linealmente independiente?, es lo mismo, si pongo un A aquí me va a dar un cero y aquí me va a dar un cero y esto, bueno esta definido de esa forma, por ejemplo habría que ver eso si es que U es igual a W que es el (-1,1,0) (1,0,1), el (1,0,1) está bien, entonces a ver, veamos geométricamente, tengo un vector y el otro para definir el mismo plano… A ver estos son dos planos.

[243E] : Sí.
[244ES5] :¿Cierto?

[244E] : Geométricamente.
[245ES5] : Claro geométricamente hablando son dos planos, están generados por esos dos vectores entonces comparten uno, entonces ¿Cuál es la relación que tienen que cumplir los otros para que sean iguales? Yo creo que no son iguales, es que es muy distinto ese con ese o quizás.

[245E] : Las apariencias engañan, entonces tú tienes que dar un argumento, más sólido que las apariencias, si puedes.
[246ES5] : A ver, veamos U, pensemos en U, U es conjunto de todos los (x,y,z) que son de la forma α +β o sea α, β,α+ β ahí está, entonces, no listo se acabó, porque este, el (0,1,1) pertenece a U, a U el primero pero (0,1,1) no pertenece a V porque hay dos, dos no son iguales.

[246E] : Por lo tanto ¿Cuál es la respuesta?
[247ES5] : Por lo tanto U es distinto de V, ¿de V? si por lo tanto no son los tres iguales, no se cumple que U igual a W ¿eso es falso, verdad? ¿O no? , eso es negación .

[247E] : No conozco esa notación.
[248ES5] : ¿Es la negación? ¿O no? o ¿es así? , eso es falso, es que no sé.

[248E] : Yo lo anoto así con los estudiantes pero hay varias…ah si también rayita arriba, OK ya etapa superada

Pregunta 10

[249ES5] : V conjunto de todos los x`s, y`s, z`s, t`s ya… ¿Cuál es la idea? Un subespacio de la matriz de 2x2 determine una base ya…

[249E] : ¿Para?
[250ES5] : Para el conjunto V.

[250E] : Para el subespacio V.
[251ES5] : Sí, el conjunto que cumple eso.

[251E] : ¿Yo le puedo determinar base a algo que no sea subespacio?
[252ES5] : Que ¿no sea un espacio vectorial?

[252E] : Sí.
[253ES5] : No, porque cuando uno busca una base asume que se cumplen ciertas propiedades, por ejemplo, que salgan los escalares, pero por ejemplo, o sea yo que no he estudiado estructuras pero he estudiado otra cosa o sea he leído en algunos libros por ejemplo dice, que por ejemplo los grupos finitos tienen una base, un elemento que genera todos lo elementos, o sea ahí hay otro concepto de base, base para otras estructuras matemáticas.

[253E] : Y aquí ¿Qué me podrías decir?
[254ES5] : Si esto no fuese un subespacio vectorial, por ejemplo en IR^3 algo que no pasa por el cero, el plano, entonces no.

[254E] : ¿No le puedo encontrar base?
[255ES5] : No le voy a encontrar base, porque por ejemplo, o sea un ejemplo en IR^3 un plano que no pasa por el cero entonces se supone que si yo encuentro una base, el conjunto va a ser el, todas las combinaciones lineales y siempre una combinación lineal se puede formar el cero, entonces si esta el cero para las combinaciones lineales y no esta el cero en el conjunto entonces no van a poder ser iguales.

[255E] : Perfecto buen argumento y entonces como éste es subespacio le podemos encontrar base.
[256ES5] : Claro, entonces sistema de ecuaciones común y corriente, matrices X, 2,-1.
1,-2, X, Y, Z… X, Y aquí va la X, aquí va la Y aquí va la Z aquí va la T, entonces me da lo mismo ponerme una ralla o poner cero, cero, yo a veces lo pongo y me equivoco.

[256E] : Sí, yo también.
[257ES5] :Y no se porque si me lo sé bien, arrastra todos los ceros.

[257E] : Un arrastra ceros…
[258ES5] : Entonces un X – 2Z +T, X, 2Y,-Z, ya entonces ahora empiezo a hacer operaciones filas, entonces, no lo anoto ¿cierto? porque no me gusta anotar.

[258E] : Bueno, pero…
[259ES5] : Que se note.

[259E] : Caro lo que va quedando porque quiero ver como llegas a la base.

[260ES5] : Entonces -1, 0 , -2 , -1, si es que está bien debería ser así, veamos 0, -2,-1 eso otra vez, ah aquí multiplico por –½ y me queda 1, ½ , - ½ y se acabó no puedo hacer nada más, entonces esto que me quiere decir que X+ 2Y esto ¿Qué es un 1?, menos Z es igual a cero y lo otro me dice que Y +1/2Z- 1/2T es igual a cero esto va a tener dimensión 2 me van a quedar dos parámetros, veamos.

[260E] : ¿Cómo sabes la cantidad de parámetros? ¿Cómo la determinas? Que dijiste me van a quedar dos parámetros.

[261ES5] : Porque me va a quedar eso, eso lo voy a despejar entonces me van a quedar los dos parámetros o sea esto, las dos variables que voy a borrar digamos me van a quedar en función de los otros dos parámetros y entonces esto me queda Y primero menos 1/2Z más 1/2T, ahí están los dos parámetros que yo voy, yo escogí usar esos dos y si reemplazo allá me queda X menos Z más T, ahí multiplico por dos menos Z más T menos Z igual a cero por lo tanto X es igual 2Z-T, si es que está bien hecho, entonces X, Y, Z, T yo lo puedo escribir como 2Z-T ¿Quién es Y? ¿Quién es Y? menos ½ Z mas ½ T, Z y T, entonces saco la Z aquí me queda 2Z, una Z, cero Z menos ½ más T menos una, un medio, cero y una y si lo quiero ver más bonito…puedo poner un dos acá, no, no lo voy a hacer, entonces en la base va a ser el 2,-1/2 ,1 ,0 y el -1, ½, 0, 1, listo, si es que, quizás me equivoqué en algún cálculo pero, esa es la idea.

[261E] : Esa es la idea, vamos a llegar hasta la 11 porque en las otras haz hecho todo bien y no tiene sentido hacer la 12 y la 13, hasta la 11 la otra es de espacios françois.

[262ES5] : ¿Y eso?

[262E] : Si te llamó la atención alguna ¿la quieres hacer?

[263ES5] : Si me voy a llevar eso, ¿van desordenadas?

[263E] : Si como tú quieras, pero ésta si es obligación.

Pregunta 11

[264ES5] : Bueno después la voy a hacer, sea V un conjunto de elementos talque se define la suma y la multiplicación por escalar de esa forma V ¿es un espacio vectorial sobre IR? No sé, a ver, puede ser, puede ser, a ver. ¿Cómo es esto? Grupo abeliano tengo que ver, a ver por ejemplo, este conjunto tiene el elemento neutro es el mismo, aquí está entonces, neutro α, si conmutatividad o sea la tabla de la suma es α, α, α así está.

[264E] : Así está exactamente.

[265ES5] : Conmutatividad, claramente, no hay otra forma de hacerlo bueno, es lo mismo, asociatividad también porque no puedo hacer, asociatividad sería algo así como α+α+α igual a α+α+α pero esto es α y esto es α, todo es α entonces se cumple, neutro ya dijimos conmutatividad, asociatividad. ¿Qué me falta? Clausura también, clausura, asociatividad, conmutatividad, neutro.

[265E] : Falta una.
[266ES5] : Vamos a poner inverso.

[266E] : ¿Inverso?
[267ES5] : También, el inverso de α es α, porque α+α es α y ese es el neutro, entonces es todo, entonces es un grupo abeliano, segundo lo de los escalares, clausura también por la definición α, no IK por α es igual a α que pertenece al conjunto conmutatividad también porque k1, k2 , α esto es α, α y k1, k2 α me da α, distributividad 1, es que esto da todo α.

[267E] : Sí.
[268ES5] : Entonces bien, y distributividad 2 bien, o sea en el fondo siempre se va a dar la igualdad porque independiente de todas las operaciones que uno ponga paréntesis, suma, multiplicación en cualquier orden da α, α, α, α.

[268E] : Exactamente, ese es el argumento central ¿no es cierto?
[269ES5] : Claro, me falta acá el uno.

[269E] : Es que te ha dejado de faltar siempre.
[270ES5] : Uno por alfa es alfa también, entonces ¿es un espacio vectorial sobre IR? Sí, es, interesante ¿y la dimensión es uno?

[270E] : ¿Cuál sería la dimensión?
[271ES5] : Uno, la dimensión de V es igual a uno la base es α, es V la base es V. Sea V el conjunto de todos los, talque a y b son, ya o sea el primer cuadrante sin las líneas, un IR espacio vectorial con las operaciones así definidas, es lo mismo pero sin una dimensión, estudiar la dependencia lineal de los subconjuntos de V dados por, veamos α(2,1) + β(3,2) igual (1,1) ¿será el neutro? Si (1,1) es el neutro entonces esto es dos alfas, uno más tres betas, dos betas, uno, uno, entonces ahora ¿Cómo se suman estos? Se multiplican dos alfas tres betas, dos beta, uno coma uno entonces beta tiene que ser cero por esto y si beta es cero esto me da uno entonces alfa tiene que ser…no beta es cero, beta es cero, cero si, son linealmente independientes el conjunto S1.

[271E] : Vamos a S2.
[272ES5] : S2, nuevamente lo mismo, me voy a saltar algunos pasos aquí me va a quedar (1,1) mas 2 beta, uno, yo creo que no, aquí

quedamos no porque este es independiente del alfa, puede ser cualquiera, no pues alfa puede pertenecer a los números reales cualquiera, por lo tanto S2 es L. D. linealmente dependiente, si con beta igual a cero, con ese yo formo ese.

[272E] : ¿Ese es de V?
[273ES5] : Sí, sí.

<u>Video ENTREVISTA – ESTUDIANTE 6</u>

Pregunta 1

[1E] **:** Martín, entonces usted saca una pregunta, la primera de ahí y la empieza a leer, así igual que la que hacia la Soledad, o sea vamos aquí… comentando lo que vamos haciendo, me interesa como usted, el argumento que usa y sobre todo como lo elabora para responder lo que se pregunta, esa es la idea.

[1ES6] **:** Con esas dos operaciones ver si es un espacio vectorial. Habría que ver, por ejemplo a ver si tomo dos elementos en ese espacio y un escalar en IR, tendría que ver si se cumple… ¿Qué estoy haciendo?, tendría que ver si eso esta en… (Problemas de audio), entonces yo tengo que… esto es alfa x1 + y1, alfa x2 + y2, entonces, no me sirve eso.

[2E] **:** ¿Cómo? ¿Qué no le sirve?
[2ES6] **:** ¿O sí?

[3E] **:** ¿A que cosa se refiere que no le sirve?
[3ES6] **:** No, es que hice mal la operación aquí, estoy sumando mal.

[4E] **:** Entonces todo de nuevo.
[4ES6] **:** Alfa x1, x2 mas y1, y2… entonces eso vendría siendo, alfa x, menos alfa x2 mas y1, y2; y eso vendría siendo dos veces el primero mas dos veces el segundo… (Problemas de audio). Dos veces alfa x1 mas dos veces y2, vendría siendo menos este de acá, no, eso no vale, de nuevo. Vendría siendo dos veces la segunda coordenada del primer vector, menos alfa x2, mas dos veces este de acá dos y2, vendría siendo menos el primero alfa x1, menos y2, o sea menos y1…

[5E] **:** ¿A qué quiere llegar con esto?
[5ES6] **:** ¿A que quiero llegar? A ver…

[6E] **:** ¿Para dónde van estos cálculos?
[6ES6] **:** Para ver si esto esta en el espacio.

[7E] **:** Perfecto.
[7ES6] **:** ¿Tiene confort?, ¿Un pañuelo o algo así?, es que hacia calor afuera y me vine corriendo, a ver, creo que aun estoy un poco dormido.

[8E] **:** No importa, aquí despertamos… entonces usted tiene unos cálculos y esos cálculos ¿le ayudan a la respuesta?
[8ES6] **:** Eso es lo que estoy pensando… tiene que ser, porque este es un elemento del espacio, entonces con esa operación se ve si es un espacio.
[9E] **:** Entonces ¿Cuál sería su respuesta a esa pregunta?
[9ES6] **:** ¿Tengo que anotarla?

[10E] **:** Sí, la respuesta… por que usted hizo un cálculo ahí, entonces eso ¿es la respuesta?
[10ES6] **:** No…

[11E] **:** Esa es la respuesta.
[11ES6] **:** Perfecto.

[12E] **:** Pasamos a la segunda, ahí hay hojas si necesita…

Pregunta 2

[13E] : Entonces vamos leyendo, que nos dice esta pregunta.
[12ES6] : Hay que tomarnos el conjunto de las funciones de IR en IR, definen la siguiente operación, hay que usar elementos de IR no más, *a* mas *b* y la ponderación… ¿esto es la evaluación?

[14E] : Esa es la evaluación, exactamente.
[13ES6] : Sabemos que IR con la suma es un grupo abeliano… ¿Qué axiomas faltan para que IR sea un espacio vectorial?

[15E] : Quiero que anote, cuáles usted visualiza, ahí que axiomas faltan y cuál de esos se cumple o no…
[14ES6] : Faltan los del producto por escalar.

[16E] : ¿Los podría anotar?
[15ES6] : Entonces faltan los axiomas de producto por escalar, éste es el producto que se define…

[17E] : Es lo que se está definiendo, claro, ponderación es lo mismo que producto por escalar, ese es el producto que se está definiendo.
[16ES6] : Sobre ese espacio, entonces…

[18E] : ¿Sobre cuál espacio?, ¿Cuál es el espacio?
[17ES6] : No, no, no… IR, el espacio IR… entonces… ya, uno de los axiomas seria que si yo tomo dos elementos…

[19E] : Los elementos ¿De dónde esta pensando esos elementos?
[18ES6] : En IR; no, tengo que tomar una función y un elemento para evaluar.

[20E] : Ya. Bien.
[19ES6] : Entonces… por ejemplo, a ver, si tendría, si yo tengo un escalar en, estoy haciéndolo un poco mas general…

[21E] : Sí, si.
[20ES6] : Y tengo dos elementos en el espacio, entonces tendría que cumplirse que alfa por *v* más *w*, esto es alfa *v* más alfa *w.*

[22E] : Ese sería…
[21ES6] : Ese seria el primero y para este caso, tendría que cumplirse que si me tomo un elemento acá, ese, una función, si tomo *f*… y tomo… tendría que cumplirse que *f* de, a ver, *a* mas *b*, tendría que ser igual a *f(a)* + *f(b)*, pero eso no se cumple…

[23E] : ¿Por qué no se cumple?, ponga allá al lado…
[22ES6] : Pero, no se cumple porque *f* es función, una función cualquiera, a menos que se especifique que *f* sea lineal.

[24E] : En ese caso ¿Qué pasaría si *f* fuera lineal?
[23ES6] : Ahí si habría distributividad…

[25E] : Entonces cómo es una función, usted dice…
[24ES6] : Una función, no se cumple porque *f* es función cualquiera, lo mismo pasa cuando yo tomo el 1 y el *v* en el espacio, entonces *v* por 1 es *v.*

[26E] : ¿Ese axioma se cumple?
[25ES6] : Tendría que ser *f* evaluado en uno y esto es distinto de *f*, no sé como anotarlo, *f* de…

[27E] : *f…*
[26ES6] : No se cumple.

[28E] : Seguimos en otra hoja… tenemos que ponerlas de lado para que la cámara las lea.
[27ES6] : ¿Cuál otro hay?, si yo tomo *f* y *g* en ese espacio y tomo un elemento en IR, *f* + *g* coma alfa, eso si se cumple, eso es *f* + *g…*

[29E] : Y si yo le preguntara ¿Por qué?
[28ES6] : Eso es por… no, no es definición pero es una propiedad que tienen las funciones.

[30E] : ¿Ya?, ya…
[29ES6] : Que eso es $f(\alpha)+g(\alpha)$

[31E] : Busca su argumento, usted dice que eso es verdad.
[30ES6] : Es que no estoy seguro, en realidad no me acuerdo mucho, no se si es por definición o…

[32E] : Pero, lo que usted piensa…
[31ES6] : Hemm… (risas)

[33E] : Jaque Mate.
[32ES6] : Por algebra de funciones, ahí esta.
[34E] : Entonces se cumple.
[33ES6] : Sí, por lo tanto, se cumple se cumple… la cuatro, si es que hay cuatro, a ver, sí eran cuatro.

[35E] : Buena pregunta, ¿habrán cuatro?
[34ES6] : ¿Habrá cuatro?…

[36E] : ¿Habrá cinco?, ¿O son tres?... ¿Qué dice usted la cuatro?
[35ES6] : Ni recuerdo, tiene que pasar eso…

[37E] **:** Tiene tres ahí.
[36ES6] **:** A ver… esto, si yo tengo *f* y *g* en el espacio y tomo un elemento en IR… a ver, lo voy a hacer un poquito mas general, entonces *v,w* en *V* y alfa en un… no, *v* en *V* y alfa en el cuerpo y beta en el cuerpo también, entonces me tiene que cumplirse que alfa por beta por *v* esto es igual a alfa por beta por *v*, la asociatividad.

[38E] **:** Una suerte de asociatividad.
[37ES6] **:** Y esto no… en…

[39E] **:** Para estos objetos, ¿Se cumplirá su estructura general?
[38ES6] **:** No, creo que no, porque, a ver… aquí tendría que ser *f* de… para este caso, sería la composición, de alfa y… a no eso no, tendría que ser esto, porque aquí sería una especie de producto entre las dos funciones, este caso, entonces seria la composición.

[40E] **:** Claro, cuando mira… cuándo esta mirando esto, ¿A cuál de esos lados se esta refiriendo?
[39ES6] **:** Estoy, ¿Cómo a cuál de esos lados?

[41E] **:** Usted quiere probar esa igualdad, no es cierto.
[40ES6] **:** Sí.

[42E] **:** Cuando está haciendo esto, ¿Por qué lado empezó?
[41ES6] **:** Empecé por éste.

[43E] **:** Perfecto.
[42ES6] **:** Empecé por ese, entonces aquí sería una especie, sería la composición entre las funciones, pero si yo tomo los escalares se supone que… si tomo el alfa y tengo las funciones, se supone que aquí estoy evaluando el alfa en la composición.

[44E] **:** Claro, el alfa en la composición.
[43ES6] **:** Pero… y eso es *f* de *g* de alfa, que sería eso que esta ahí… entonces ese se cumple.

[45E] **:** ¿Por qué?
[44ES6] **:** Composición de funciones.

[46E] **:** Bien, etapa superada.
[45ES6] **:** ¿No hay más?

[47E] **:** ¿Faltan propiedades? (problemas de audio)
[46ES6] **:** ¿Faltarán más?, creo que no, no se a ver, no me acuerdo.

[48E] **:** ¿Se las juega con éstas?
[47ES6] **:** no… (silencio 25 seg.)… sí me las juego.

[49E] **:** Perfecto, etapa bien superada.

Pregunta 3

[48ES6] **:** Un espacio vectorial que tenga sólo dos elementos, yo creo que no siempre porque puede que la suma se salga.

[50E] **:** Entonces… (problemas de audio)
[49ES6] **:** Hemm.

[51E] **:** ¿Qué quiere decir que la suma se salga?
[50ES6] **:** Por ejemplo si yo tengo… seria un conjunto con dos elementos y verificar si ese conjunto con cierta operación tiene estructura de espacio.

[52E] **:** Siga.
[51ES6] **:** Entonces por ejemplo puedo tomar el conjunto *a,b* , más general, entonces tengo que verificar si *a* con la suma y con el producto por escalar, suponiendo con la suma, habría que decir que tipo de elementos son los que, los elementos de *A.*

[53E] **:** Depende… (problemas de audio)… depende de lo que usted este pensando para argumentar.
[52ES6] **:** A puede ser cualquier conjunto.

[54E] **:** Como lo tenemos ahí.
[53ES6] **:** Y, no sé, pueden ser: funciones, polinomios, no se cualquier cosa.

[55E] **:** Lo que venga.
[54ES6] **:** Y tengo que verificar que el *A* con la suma usual donde yo esté trabajando y con el producto por escalar tiene estructura de espacio… entonces voy a poner: tenemos que verificar si se cumple eso. Primero, por ejemplo si *a,b* son distintos del elemento nulo entonces ya no es un espacio… y por otra parte si…

[56E] **:** ¿Qué otro caso habría que considerar ahí? Si los dos son distintos del nulo estas poniendo ahí.
[55ES6] **:** Si *a* y *b* son distintos del elemento nulo, el elemento neutro, entonces *A* con la suma y la multiplicación no es espacio vectorial. Ahora si uno de ellos es cero y otro distinto, o sea no cero del neutro.

[57E] **:** Ya del neutro.

[56ES6] **:** Para dar mas generalidad, esto sería como el caso uno, sería como el caso dos… entonces, por ejemplo: *a* + *b* siempre va a estar en *A*, ¿cierto?

[58E] **:** Ya … (problemas de audio)
[57ES6] **:** Pero si tomo un… a ver puedo hacer la operaciones *b* con *b*, un especie de producto entre elementos de acá, no eso no lo puedo hacer. Voy a poner IK un cuerpo, ahí si, entonces esa suma siempre va a estar en *A* porque este elemento neutro y este va a ser un elemento distinto de cero entonces si lo sumo siempre me va a dar *b*, eso va a ser *b*; ahora si yo considero un escalar en el cuerpo y tomo *b* en *A*, entonces alfa por *b* no necesariamente esta en *A.*

[59E] **:** Volviendo a la cuenta de arriba, donde dice que *b* + *a* es *b*, pero ¿Quién podría sumar también? ¿Qué elementos tiene *A*?, tiene el *b* y tiene el cero.
[58ES6] **:** ¿Cómo?

[60E] **:** ¿Qué elementos tiene *A* aquí?, ese *A* ¿Qué elementos tiene?
[59ES6] **:** Cero y *b*

[61E] **:** Entonces yo podría sumar *a* + *b*, ¿Puedo sumar otro?
[60ES6] **:** *b* + *a*

[62E] **:** Y… ¿Qué mas?
[61ES6] **:** Y *b* + *b*

[63E] **:** ¿Quién es *b* + *b*?
[62ES6] **:** ¿Quién es *b* + *b*?

[64E] **:** Me va a decir 2*b*, pero eso también tiene que considerarlo… (problemas de audio)… o no necesariamente lo tiene que considerar.
[63ES6] **:** Sí, si lo puedo considerar.

[65E] **:** No, que usted vea, no que yo, usted, ¿Ve que es necesario considerar eso? ¿O no?
[64ES6] **:** Yo creo que sí, por que *b* + *b* se puede que se salga del conjunto.

[66E] **:** Pero esto está como argumento también, ¿Qué dice aquí?
[65ES6] **:** Que alfa por *b* no necesariamente está en *A.*

[67E] **:** Entonces qué quiere decir con eso.
[66ES6] **:** Que no hay clausura.

[68E] **:** No hay clausura ¿Dónde?
[67ES6] **:** En… ahí…

[69E] **:** Volvamos aquí entonces.
[68ES6] **:** Entonces, por ejemplo *b* + *b*, no necesariamente está en *A.*

[70E] **:** ¿Qué significa eso?
[69ES6] **:** Que tampoco hay clausura.

[71E] **:** ¿Dónde? Tiene que decir dónde.
[70ES6] **:** En *A* con la suma, por que si hubiera clausura tendría que cumplirse que *b*+*b* seria igual a *b*, y eso pasa cuando *b* es el elemento neutro.

[72E] **:** ¿Y por qué *b* no puede ser cero también?
[71ES6] **:** Es que si *b* es cero, ahí ya sería como un espacio trivial.

[73E] **:** Claro, y no coincide con esto ¿O sí?
[72ES6] **:** Sí.

[74E] **:** ¿O no?, pero ¿Cuál es la pregunta aquí?
[73ES6] **:** No, no coincide con eso, es que uno tiene que ser distinto de cero, por que tiene que tener por lo menos 2 elementos, si los dos fueran cero ahí seria un elemento.

[75E] **:** Perfecto.
[74ES6] **:** Entonces, vamos a hacer una observación *a* y *b* no pueden ser elemento neutro a la vez.

[76E] **:** Entonces, ¿Cuál sería la respuesta a la pregunta?, con todo esto que vió, con lo que tiene aquí anotado.
[75ES6] **:** Que no existe un espacio vectorial con 2 elementos.

[77E] **:** Se atrevería a decir que existe uno ¿Con cuántos elementos con seguridad?
[76ES6] **:** Con cuantos elementos.

[78E] **:** Sí, usted me dijo recién algo a raíz de las observaciones.
[77ES6] **:** Con un elemento.

[79E] **:** Con un elemento, pero con 2, que es la pregunta de ahora.
[78ES6] **:** No.

[80E] **:** Ya, anote cuál sería la respuesta.
[79ES6] **:** Es posible definir un espacio vectorial con un elemento, sería el electo neutro y para ese caso sería el espacio 1, en ese caso, podría decirse que con una cantidad finita de elementos, no puedo tener espacio, podría ser una cantidad infinita de elementos donde me podría definir espacio vectorial.

[81E] **:** Entonces es el intento ¿De qué?

[80ES6] **:** De generalizar.

[82E] **:** Anótelo.
[81ES6] **:** Ahí como que me asaltó una duda un poco, porque… una cantidad finita pero a lo mejor numeradores.

[83E] **:** Cada día a día tengo que revisar ese tipo de detalles ¿Cierto?
[82ES6] **:** Claro.

[84E] **:** Pero usted se está atreviendo a decir al responder esto, ¿Qué cosa?
[83ES6] **:** Para mi conjunto finito, no es posible en.

[85E] **:** Tienes 2 por que el 1 también es finito.
[84ES6] **:** ¿Cómo?

[86E] **:** De aquí el 1 es finito, 1 el uno para un conjunto es finito, no es posible y para el 1 dijo que sí era posible. Entonces ¿tenemos qué?
[85ES6] **:** Con más de un elemento**.** Para un conjunto finito. Voy a borrar esto. Par aun conjunto finito con más de un elemento, no es posible dar una estructura de espacio. De repente como que el lenguaje me juega chueco no se como expresar la…

[87E] **:** No importa. Yo aquí estoy atenta y lo hago ver lo que usted está haciendo y lo que está escribiendo. Usted dijo aquí con 1 si en realidad con finito no, entonces, pero…
[86ES6] **:** Con más de un elemento.

[88E] **:** Perfecto.
[87ES6] **:** Ahora no se si tendría que detenerme en ese caso, cuando, por que si es finito con más de un elemento no es posible darle una estructura de espacio de conjuntos, pero si fuera, si es infinito ahí si, ahí puede ser, pero si es numerable…no sé.

[89E] **:** Para notar ese tipo de detalles vamos a dejarlo como una incógnita de esta entrevista si es numerable o numerable, por que va a seguir trabajando con infinitos.
[88ES6] **:** A yo creo que no, yo creo que no.

[90E] **:** ¿Por qué?
[89ES6] **:** Porque por ejemplo si tomo los naturales ahí ya no.
[91E] **:** ¿Y se es numerable?
[90ES6] **:** Sí, el numerador.

[92E] **:** Pero ahí tiene espacios vectoriales infinitos así que sigamos en esta entrevista. Etapa superada pasamos a la otra hoja.

Pregunta 4

[93E] **:** ¿Quién es W ahí?
[91ES6] **:** Sería, el espacio de los polinomios cuya integral de 0 a 1 es 0, yo creo que… a no, no estoy mal ahí, estaba pensando en otra cosa.

[94E] **:** Yo creo que no alcancé a percatar bien ¿Yo creo qué?
[92ES6] **:** No es que estaba, me, se me vino a la cabeza eso de las funciones pares e impares pero eso es en un intervalo simétrico, cuando son impares en un intervalo simétrico da cero.

[95E] **:** Escriba lo que está pensando que eso me interesa**.**
[93ES6] **:** Yo creo que no, porque si yo tomo por ejemplo el polinomio x–½, la integral de 0 a 1 de x – ½, eso es la integral de 0 a 1 menos la integral de 0 a 1 1/2 de *y*, eso es ½ y eso también es ½, cero, por lo tanto. p de x esta en W. Ahora si yo, en por ejemplo quisiera ver, que sería otro ejemplo… p de 2 de x, x cuadrado menos 1/3, también me da 0, por que ahí me queda la integral de I de 0 a 1 x cuadrado de x menos, no, no me va a resultar aquí… no con ese ejemplo no me va a resultar, bueno esto también es cero.

[96E] **:** Qué estas tratando que resulte, que no entiendo.
[94ES6] **:** Que la suma se salga.

[97E] **:** ¿Qué quiere decir que la suma se salga?
[95ES6] **:** Que tomo, por ejemplo tomo 2 polinomios y su integral no es cero, a ver, a sí, si puede ser un espacio vectorial.

[98E] **:** ¿Por qué ese cambio de opinión tan rápido?, antes era no ahora sí.
[96ES6] **:** Es que, a ver, no está bien.

[99E] **:** Lo dejamos.
[97ES6] **:** Eso no.

[100E] **:** Fue un intento.
[98ES6] **:** Sí, fue un intento, ya por ejemplo.

[101E] **:** Está bien si esa es la idea, la idea es que usted me pueda explicar por qué cambio esta idea, por qué ahí esta lo fundamental.
[99ES6] **:** Es que de repente, no sé como que siempre me da por tratar de buscar los contra ejemplos primero.

[102E] **:** Así aborda usted los problemas, trata de buscar los contra ejemplos.

[100ES6] **:** Y si, no sé, a lo mejor .Es que de repente tratar de demostrarlo es como más complicado que…

[103E] **:** Buscar el contra ejemplo… para usted.
[101ES6] **:** De repente.

[104E] **:** Sí, entonces tratemos de buscar el contra ejemplo que pasó en su mente.
[102ES6] **:** Es que de repente tratando de buscar el contra ejemplo como que se me ilumina, me ilumino.

[105E] **:** Y llegamos, ¿A qué iluminación?
[103ES6] **:** A que esos signos son espacio vectorial, porque si yo tomo 2 polinomios en W y tomo un escalar en número real entonces alfa p x más q x esta en W.

[106E] **:** ¿Para qué estamos sacando esta cuenta?
[104ES6] **:** Para ver si esto es un espacio vectorial. Ya voy a poner en efecto, la integral de 0 a 1 de alfa de p de x más p de x, esto es por linealidad de la... Integral y por homogeneidad, creo que es, esto me queda alfa p de más q de x y esto es 0, que eso es 0 y esto es 0. Entonces con esa operación usual.

[107E] **:** Sí, con las operaciones usuales, sí.
[105ES6] **:** Entonces con la operación usada W es un espacio vectorial, no aquí lo voy a… W por la suma y un producto por escalar es un espacio vectorial.

[108E] **:** Le hago una pregunta, no sé si terminó.
[106ES6] **:** Dígame.

[109E] **:** Dígame usted si terminó primero.
[107ES6] **:** Es que me hizo dudar.

[110E] **:** ¿Con qué?
[108ES6] **:** No sé, no creo que no.

[111E] **:** ¿Me hizo dudar de qué?
[109ES6] **:** De lo que hice.

[112E] **:** No, no dude, no dude si mis preguntas no vienen a cuestionar esto, si no va a lo siguiente el ejercicio anterior, usted para ver si era espacio vectorial ¿Qué hizo?, la de los axiomas, se acuerda.
[110ES6] **:** Sí, ya.

[113E] **:** Habían axiomas.
[111ES6] **:** Sí.

[114E] **:** Ahora para demostrar que es espacio vectorial lo hace de otra forma, entonces mi pregunta es ¿Cómo se relacionan esas formas?
[112ES6] **:** Es que yo creo que aquí se…como se llama.

[115E] **:** No, las palabras que usted, comente.
[113ES6] **:** Es que no, si tengo un espacio, tengo elementos, un espacio vectorial sobre un cuerpo, tienen que estar las combinaciones lineales, entonces si las combinaciones lineales salen del espacio, entonces ya no puede ser.

[116E] **:** Por eso toma esa expresión y esa expresión ¿Qué es?
[114ES6] **:** Una combinación lineal.

[117E] **:** Ah, Listo.
[115ES6] **:** Es que en el otro caso ¿Cuál es el otro caso?

[118E] **:** De los axiomas, ¿Se acuerda de los axiomas?
[116ES6] **:** Claro, es que ahí es distinta la pregunta, por que decía ¿Qué tipo de axiomas se cumplen?

[119E] **:** Y aquí ¿Le pedían?
[117ES6] **:** En este caso es como un poco más general.

[120E] **:** Sí, más general.
[118ES6] **:** El otro no, era más, más particular.

[121E] **:** Si lo hubiese hecho de la otra manera, hubiese sido como…
[119ES6] **:** ¿Cuál?

[122E] **:** Si lo hubiese hecho a través de los axiomas. ¿Qué ganó usted? ¿Que ganó para usted haciéndolo así y no de la otra forma?
[120ES6] **:** O sea es lo mismo pero el otro es más largo.

Pregunta 5

[123E] **:** Ya, bien, pasamos al siguiente. Déme la, la afirmación que hay ahí.
[121ES6] **:** Sí tengo 3 espacios vectoriales y supongamos que baja eso, entonces *w=z.*

(problemas de audio)

[124E] : Cuénteme en qué está pensando, para yo darme cuenta cómo está elaborando, pensando responder. ¿En qué está pensando?

[122ES6] : Ya se me vino a la cabeza una... algo de teoría de conjuntos, por ejemplo, si yo tengo que A unión B es igual a A unión C no necesariamente *B = C,* hay contra ejemplos para eso. Pero estaba tratando de pensar en un contra ejemplo para eso y yo creo que es análogo, creo que es análogo.

[125E] : Entonces ponga ahí lo que esta pensando usted .Estoy pensando que esta es la relación que hace.

[123ES6] : En teoría de conjuntos, tengo que si A unión B es igual a A unión C entonces D no necesariamente es igual a C. Escribo un contra ejemplo.

[126E] : Si usted quiere .No es necesario por que usted ya lo ve, pero si quiere lo escribe, si a usted lo va a ayudar a responder, escribir eso, bienvenido, pero ver esto es muy bueno.

[124ES6] : Por ejemplo, si tomo A como, claro, uno: a B uno coma dos; y a C como dos no más, entonces A unión B, esto es uno coma dos; y A unión C también es uno coma dos…

[127E] : Pero…

[125ES6] : Pero B es distinto de C.

[128E] : Perfecto.

[126ES6] : Ahora, para el caso de espacios, como yo creo que es un poquito más complicado.

[129E] : ¿Cómo qué?

[127ES6] : Yo creo que es un poquito más complicado.

[130E] : Tiene una buena base.

[128ES6] : Pero a lo mejor no.

[131E] : Pero, tiene una buena base.

[129ES6] : Sí, creo que eso me va a servir un poco.

[132E] : Porque un espacio vectorial, si bien tiene estructura de espacio, ante todo ¿qué es lo que es?

[130ES6] : Un conjunto.

[133E] : Un conjunto, ¿no es cierto?, con lo que usted pensó, entonces relacionó muy bien, antes que todo es un conjunto y en los conjuntos no pasa eso. ¿Cuál es el problema de esto?, solamente al verlo como espacio.

[131ES6] : Que éstos no se podrían ver como espacios, porque son otro tipo de conjuntos, conjuntos finitos, con más de un elemento.

[134E] **:** Por lo que usted dijo antes, son conjuntos finitos, no se pueden ver como espacio.
[132ES6] **:** Por eso le dije, que aquí es más complicado, es que aquí tenían que ser conjuntos infinitos.

[135E] **:** Conjuntos infinitos, muy bien. Ahora tiene que tratar de ver… si es verdad (silencio 40 segundos)
[133ES6] **:** Puede, a ver, déjeme un poquito. Es que a lo mejor podría tomar, generadores.

[136E] **:** Sí.
[134ES6] **:** Puede ser, espéreme un poco.

[137E] **:** Te pueden servir, por su puesto, porque los generadores ¿Qué son?
[135ES6] **:** Son espacios vectoriales.

[138E] **:** Pero no son así, ¿no es cierto?, son ¿de que categoría? ¿Cómo es un espacio generado?, mi pregunta es ¿es finitos o infinitos?
[136ES6] **:** Infinito.

[139E] **:** Infinito, así que estaría concordando con las ideas que usted tiene.
[137ES6] **:** Claro, porque por ejemplo si yo tengo, no me acuerdo como era la… o sea como, a ver… ah, si yo tengo que V por ejemplo, es el generado por *a* y W es el generado por *b*, entonces V + W es el generado por *a* unión *b*, entonces ahí tengo algo como parecido. Ya ahora voy a tomar V como el uno coma dos y dos coma uno… no yo creo que ese no.

[140E] **:** Le pone "no" entonces.
[138ES6] **:** Voy a tomar V como el uno coma dos no más, voy a tomar W como cero coma tres y Z cero coma tres y uno coma dos, entonces en este caso V + W, esto es uno coma dos y cero coma tres y V + Z también es lo mismo.

[141E] **:** Pero…
[139ES6] **:** Pero esos dos no son iguales, eso ahí yo creo que sería. Ahora igual eso esta como medio mal porque, yo creo que los espacios generados deberían anotarse así como…

[142E] **:** Sí pero, ahora si usted ve un texto se asume con ese abuso de lenguaje.
[140ES6] **:** Sí, porque guiándome por eso.

Pregunta 6

[143E] : Sí, es lo mismo, si ¿no es cierto?, muy bien, etapa superada, vamos a la otra, estamos bien, (problemas de audio) nos falta buscar un contraejemplo, una situación nueva… hizo bien la analogía esa era la correcta, esa era la analogía buena. ¿Qué pasa con estas preguntas?

[141ES6] : Que una se cumple y una no.

[144E] : ah, las visualiza inmediatamente.

[142ES6] : Si.

[145E] : ¿Por qué?

[143ES6] : Porque por ejemplo, puedo tomar ½ en Q, y por, este sería el, haría el papel de vector.

[146E] : Ya, entonces tendría que profundizar en el espacio vectorial, por el vector ¿Quién haría el vector?

[144ES6] : Este sería el vector.

[147E] : Ya, éste es el vector.

[145ES6] : Y raíz de 2 sería el escalar, pero raíz de 2 medios no esta en Q.

[148E] : Entonces ¿Dónde esta la falla que esta tratando de enunciar ahí?

[146ES6] : Que si yo estoy, haber no se si será así, a lo mejor, que si yo tengo un espacio vectorial… tendría que ser de dimensión 1, aquí en este caso.

[149E] : Pero ahí usted tiene un escrito, ahí.

[147ES6] : Sí.

[150E] : Ese escrito es para respuesta ¿no cierto?

[148ES6] : Sí.

[151E] : Entonces ¿Cómo le ayuda eso a decir que eso no lo es, para darme cuenta?

[149ES6] : ¿Cómo?

[152E] : Usted hizo eso para responder esto ¿De qué le ayuda esto?

[150ES6] : A, que no hay clausura.

[153E] : ¿Para quién?

[151ES6] : Para… no es cerrado.

[154E] : Ya, no es cerrado.

[152ES6] : Eso, aquí sí.

[155E] : ¿Cuál es la diferencia que aquí sí y allá no?

[153ES6] **:** Eso es algo que debería definir, que era que, por ejemplo si yo tomo, por eso le digo en una dimensión no más.

[156E] **:** Sí, ¿Por qué saca a relucir la dimensión y dice en una dimensión no mas?

[154ES6] **:** No, a lo mejor es más de una dimensión… (problemas de audio), es que por ejemplo si yo tomo, bueno Q es más chico que R y no puedo definir un espacio vectorial sobre un conjunto que es más grande.

[157E] **:** ¿Ese es el motivo?

[155ES6] **:** En este caso sí, porque estoy tomando a los reales sobre un conjunto más chico, y por ejemplo en el caso de los complejos con los reales tampoco, ahí por ejemplo no puedo tomar a los reales como C-espacio vectorial, por que ahí tampoco sería cerrado, yo creo que por la suma.

[158E] **:** Entonces el problema de ahí es que toma un cuerpo en un subcuerpo. ¿Cuáles? Si toma un cuerpo y un subcuerpo ¿Qué se atrevería usted a decir? ¿Como tendría yo que decir para que sean espacios?, si tomo un cuerpo y un subcuerpo.

[156ES6] **:** Se tendría que definir, haber, se puede definir un espacio vectorial sobre el cuerpo, no.

[159E] **:** Y los escalares ¿Dónde?

[157ES6] **:** Claro, en el subcuerpo, ahí sí.

[160E] **:** Entonces respondamos esto que es más sencillo. Ya que usted es capaz de generalizar la idea, esto será un trámite, responder esto.

[158ES6] **:** Creo que se anota así, Q es el cuerpo de R, entonces es posible definir, no eso no, entonces R con la suma y el producto por escalar en Q, no es un espacio vectorial, aquí no (problemas de audio)

[161E] **:** Perfecto, estos productos son difíciles para los estudiantes que están iniciándose ¿Por qué? ¿Qué lo hace difícil?, en su opinión.

[159ES6] **:** No sé.

[162E] **:** ¿Para usted no es difícil?

[160ES6] **:** Es que, no sé, si igual es difícil, pero no sé porqué.

[163E] **:** Pero la supo abordar bien.

[161ES6] **:** No, no sé, ¿Qué cree usted?

[164E] **:** Yo creo que sí entendiera el papel del cuerpo y el papel de los vectores. ¿O puedo estar equivocada en eso?

[162ES6] **:** No.

[165E] **:** Se les confunde cuál es cuál, haber cuál es el espacio, cuál es el cuerpo
[163ES6] **:** No, no era eso.

[166E] **:** Dónde están los escalares dónde están los vectores en el fondo ¿no les pasa eso?
[164ES6] **:** No.

[167E] **:** O hay… es que trato de ver si hay otra razón que no sea esa, por eso estoy preguntando.
[165ES6] **:** Puede ser eso de que, tengo una idea más o menos de lo que es un subcuerpo, eso.

[168E] **:** Eso.
[166ES6] **:** Pero.

[169E] **:** Justificación hay.
[167ES6] **:** ¿Cómo?

[170E] **:** La justificación esta aquí entonces, en el subcuerpo.
[168ES6] **:** Claro.

[171E] **:** Está bien, la otra.

Pregunta 7

[169ES6] **:** ¿Así se define la suma?

[172E] **:** Así se define la suma, ¿Cómo se está definiendo la suma?
[170ES6] **:** Como producto.

[173E] **:** Como producto, exactamente.
[171ES6] **:** Definir la otra operación, la multiplicación por escalar… a partir de ésta tengo que…

[174E] **:** Le definieron la pura suma, usted tiene que tratar de ingeniárselas, como definir un producto para que todo eso sea…
[172ES6] **:** Un espacio vectorial.

[175E] **:** Un espacio vectorial… qué piensas.
[173ES6] **:** No sé.

[176E] **:** (problemas de audio)
[174ES6] **:** Tratando de buscar una, o sea tratando de definir una operación, si es que se puede, pero aquí como que no entiendo mucho, por que dice definir la otra operación.

[177E] **:** Claro porque un espacio vectorial ¿Cuántas operaciones tiene?
[175ES6] **:** No, no, no, si está bien, pero… como que no sé mucho lo que, o sea se que… es que, a ver…

[178E] **:** Dígame…
[176ES6] **:** Y si no hay tengo que decirlo.

[179E] **:** Exacto, si usted cree que no la hay…
[177ES6] **:** … O sea, en el fondo igual está preguntando si se podría definir o no la operación, porque aquí yo creo que se esta afirmando definir la otra operación.

[180E] **:** Defina la otra operación, claro usted debe argumentar esa definición que da o si no la da.
[178ES6] **:** A lo mejor… a lo mejor podría definir eso.

[181E] **:** Bueno.
[179ES6] **:** A lo mejor, habría que ver si se cumple las… ¿Cómo se llaman?, las propiedades, pero ahí no se cumplen, con eso.

[182E] **:** ¿Cuáles no se cumplen?, ¿Cuáles son sus argumentos para decir que no se cumplen?
[180ES6] **:** *x* por uno es distinto de *x.*

[183E] **:** Entonces está buena, no por…
[181ES6] **:** *x* por uno, con esa definición seria $x + 1$.

[184E] **:** Entonces ya no puede considerar esa operación, tendría que pensar en otra… (Silencio 40 segundos). ¿Quién fue, mi teléfono?
[182ES6] **:** ¿podría pasar a la otra? (risas).

[185E] **:** Sí.
[183ES6] **:** Que a lo mejor, esa otra la dejo para después.

[186E] **:** O ¿Si tiene algún argumento para dar ahora?
[184ES6] **:** No, todavía no se me ocurre.

[187E] **:** Estamos bien, no se preocupe.

Pregunta 8

[188E] **:** Esa era la suma ¿No es cierto? y la ponderación.
[185ES6] **:** Sí.

[189E] **:** ¿Y qué se dice después?

[186ES6] **:** Sea W el subespacio de todos los puntos de V situado sobre el plano *z=1.*

[190E] **:** Se piden 2 vectores dominio.
[187ES6] **:** 2 vectores de W.

[191E] **:** Claro, escriba 2 vectores de W.
[188ES6] **:** ¿Cualquiera?

[192E] **:** Sí, no pide ninguno específico.
[189ES6] **:** (3, 1,1) y (2, 5,1), esos están porque, éstos son positivo y el *z=1*, están situados en el plano *z=1*. ¿Cuál es el vector nulo de *y*? , no hay vector nulo.

[193E] **:** ¿Por qué?, tiene que argumentar.
[190ES6] **:** O sea, de par no, haber, no estoy mal. El vector nulo sería el (1, 1,1).

[194E] **:** ¿Por qué? ¿Qué cuenta hizo? Qué lo hizo pensar en eso.
[191ES6] **:** Porque aquí los, por ejemplo no, no hay inverso aditivo, porque me están diciendo aquí z positivo, entonces tiene que haber inverso multiplicativo por la definición de la, de la suma, entonces por ejemplo si yo tomo el (3,3,1) y el (1/3 , 1/3 ,1) la suma de ellos me da el (1,1,1).

[195E] **:** Eso es que usted esta apostando que el vector nulo es ¿Quién?
[192ES6] **:** El (1,1,1), haber, estoy medio confundido.

[196E] **:** Es una buena razón la que dio, (problemas de audio) ahora es el (1,1,1).
[193ES6] **:** Sería el elemento neutro dentro…

[197E] **:** Del espacio.
[194ES6] **:** Del espacio, pero le voy a poner algo ahí.

[198E] **:** Todavía entenderemos.
[195ES6] **:** Sí, lo mismo si ve es ese, entonces el inverso sería (1/3, ½ ,1), si fuera así el… (problemas de audio).

[199E] **:** Ese es menos v, póngale el bichito al medio que ese es menos v.
[196ES6] **:** Ese es menos v.

[200E] **:** Si eso fuera así, que podríamos decir de la 4.
[197ES6] **:** Que no son, haber, a que sí son L.I.

[201E] **:** Y… ¿Por qué?
[198ES6] **:** Porque, porque son L.I., porque esta combinación lineal, haber como lo, ya, esta combinación lineal (2,2,1) más beta (½ , ½ ,1)

me da el (1,1,1) si el alfa y beta son 0 , porque, por que si el alfa y el beta son 0, entonces alfa por (2,2,1) sería 2 elevado a alfa, 2 elevado a alfa, 1 elevado a alfa y puedo ocupar otra .

[202E] **:** Sí, adelante.
[199ES6] **:** Y beta por…

[203E] **:** Póngale 4 ahí, para que… estamos haciendo el 4.
[200ES6] **:** Ya, (½, ½ ,1) eso sería ½ elevado a beta, ½ elevado a beta, 1 y si yo sumo esos 2, eso es, haber, le voy a poner v1 y v2, entonces v1 + v2 sería, 2 elevado a alfa por ½ elevado a beta, y esto es, esto es (1, 1,1) si el alfa y el beta son 0.

[204E] **:** Entonces pongámoslo.
[201ES6] **:** v1 + v2 es elemento neutro si alfa, beta son 0.

[205E] **:** ¿Qué dice ahí?
[202ES6] **:** Luego…

[206E] **:** Luego, ya perfecto, perfecto entonces los vectores ¿Cómo serían?, un vector nada más…
[203ES6] **:** (2,2,1) y son L.I. Ahora como que con eso, como que le borraría una de acá.

[207E] **:** Ahora le va a borrar una, nos estamos asegurando que ese es el 0 vector ¿Eso esta pasando?
[204ES6] **:** Claro.

[208E] **:** Entonces, que podría decir de la cinco (silencio).
[205ES6] **:** Yo creo que no, porque alfa por (3,3,1) esto es tres elevado a alfa, tres elevado a alfa, uno, a ver…, voy a ver… (Problemas de audio), beta por (1/3,3,1), esto es 1/3 elevado a beta, 3 elevado a beta, uno… entonces v1 mas v2 seria 3 elevado a alfa menos beta, tres elevado a alfa mas beta, uno.

[209E] **:** Ya…
[206ES6] **:** Entonces voy a ver solamente la dependencia lineal no más.

[210E] **:** Ya, perfecto.
[207ES6] **:** Entonces, v1 mas v2 es el elemento neutro, si alfa menos beta igual cero y alfa mas beta igual cero, pero de estas dos alfa menos beta igual cero y alfa mas beta, entonces tengo que alfa igual cero y beta igual cero, tengo que son linealmente independiente… ahora tendría que ver si es que eso realmente genera.

[211E] **:** Claro, porque para que sea base.
[208ES6] **:** Tiene que generar y ser linealmente independiente.

[212E] **:** Entonces con esto que ha llegado a responder.

[209ES6] **:** No, me falta ver si…

[213E] **:** Claro, pero con esto que responde solamente.

[210ES6] **:** Es un conjunto L.I… me falta ver si generan… ¿lo dejo puesto acá?

[214E] **:** Sí (problemas de audio)… cuál le dejamos ¿ésta o ésa?, las dos, ya.

[211ES6] **:** Ya un elemento de W es de la forma (x,y,1)… x positivo, y positivo, esto es, esta en W, entonces tengo que ver si existen escalares en…

[215E] **:** ¿Dónde? y ¿Para qué?

[212ES6] **:** Existe alfa coma beta en IR, tal que se escriba como alfa 3… tendría que ver si existen escalares que cumplan con eso, o sea cualquier elemento del plano, se escriben como combinación lineal de esos, ya pero eso de ahí por lo anterior me quedaba, eso… eso de ahí y bueno para que esos sean, tendría que ver que x igual a 3 alfa menos beta, y igual a tres alfa mas beta, y ahora tengo ese sistema para alfa y para beta.

[216E] **:** (problemas de audio)

[213ES6] **:** Como el x y el y son positivos, entonces alfa menos beta va a ser logaritmo en base tres de x y alfa mas beta va a ser igual a logaritmo en base tres de y, por que son positivos.

[217E] **:** ¿Quiénes son positivos?

[214ES6] **:** El x y el y, tengo ese sistema. Y por ejemplo de la primera puedo despejar el alfa, me queda… y reemplazarlo en la segunda, entonces me queda… beta igual… entonces me queda logaritmo en base tres de y menos logaritmo en base tres de x igual a dos beta y esto lo podría dejar como y partido por x igual a 2 beta, entonces beta va a ser logaritmo en base 3 de la raíz de y partido por x, y ahí esta el beta y el alfa lo encuentro reemplazando el beta acá, ¿es necesario que lo haga?

[218E] **:** No, lo que necesito es que me responda la pregunta, si usted quiere seguir calculando más, bien y la pregunta era acaso eso era una base.

[215ES6] **:** claro, si yo reemplazo beta en este sistema voy a llegar a alfa igual a algo.

[219E] **:** Claro, entonces…

[216ES6] **:** Entonces existen los escalares.

[220E] **:** Claro si usted reemplaza éste. ¿Dónde lo iba a reemplazar?

[217ES6] **:** En cualquiera de los dos.

[221E] **:** Entonces ponga aquí… (Problemas de audio)… entonces ponga una flecha que indique donde iba a reemplazar… reemplazando ahí se obtiene lo que usted quiere.
[218ES6] **:** y alfa va a ser igual a logaritmo en base 3 de *x* raíz de *y* partido por *x.*

[222E] **:** Entonces ahora usted me podrá dar alguna respuesta.
[219ES6] **:** Por lo tanto, existen alfa igual a… tal que todo elemento se escribe como combinación lineal de… eso. Por lo tanto, W va a estar generado por… y, vamos a poner "luego"… es una base.

[223E] **:** Perfecto, esto es una base, listo.
[220ES6] **:** Entonces ahí le puedo borrar el otro.

[224E] **:** Ahora borra el otro, ¿Por qué borró tanto?
[221ES6] **:** No sé, como que, a uno siempre como que siempre, eso igual está mal en los profes, no, no sé si en los profes pero, o a lo mejor en uno también, que… como se llama, se restringe siempre a un mismo tipo de espacios vectoriales, de la misma forma: que el vector nulo tiene que ser el (0,0,0)… claro.

[225E] **:** Esa acotación me la han hecho otros entrevistados también, que no es usual encontrase con un vector nulo que no sea el compuesto por puros unos. Quedan 2 más no más y terminamos, estas son más de rutina para ver como enfrentas ciertas cosas.

Pregunta 9

[222ES6] **:** Haber, la igualdad.

[226E] **:** Claro son igual esos 3.
[223ES6] **:** Por ejemplo el U no puede ser igual al V por que el (1,2 ,3) no esta en v.

[227E] **:** Ya documéntelo.
[224ES6] **:** U distinto de V, ya que (1, 2 ,3) no esta en V y ahí.

[228E] **:** Y ahí ¿Qué pasa?
[225ES6] **:** Ahí qué pasa, no son iguales, por ejemplo, bueno el W también es distinto de V, ya que el (1, 0,1) ¿Porqué?, por que aquí 1+2+3 es distinto de 0 y aquí 1+0+1 es distinto de 3.
[229E] **:** Entonces, ¿Cuál sería la respuesta a su, a la pregunta que se plantea?
[226ES6] **:** No, no se como responderla todavía.

[230E] **:** No, todavía no.

[227ES6] **:** Porque, por ejemplo este, ya por otro lado tengo que W esta contenida en U, por que el vector (-1, 1,0) lo puedo escribir como (0,1,2,3) + (-1,1,0,1)+1 por (1,0,0,1) no (1,0,1,1), no sé si será de más esto que estoy haciendo. Se escribe como (0,1,2,3)+(1,0,1), pero al revés no.
Aquí también tengo que U esta conteniendo el W, por que el (1,2,3) yo lo puedo escribir como 2 por el primero+3 por el segundo y ahí me quedaría 3-2 =1 , ahí me quedaría 2 y 3 y los demás igual el (1,0,1) lo escribo como 0 por (-1,1,0) más 1 por (1,0,1) y (0,1,1), 1 por el primero, 1 por el segundo, entonces tengo que W es igual a U, y ahí tengo la respuesta W=U, U distinto de V y W es distinto de V.

[231E] **:** ¿Como son los 3 entre sí?, entonces, son los 3 iguales.
[228ES6] **:** Eso es lo que no, no tengo claro, porque…

[232E] **:** (problemas de audio)
[229ES6] **:** Aquí yo, lo que entiendo es que si son iguales 2 a 2 y no son iguales 2 a 2. O sea eso es igual, eso no son igual.

[233E] **:** Entonces anóteme eso que me acaba de decir.
[230ES6] **:** ¿Cómo lo anoto?

[234E] **:** No son iguales, eso que me acaba de decir, ya, bien, la otra. ¿Se le hizo tarde?
[231ES6] **:** Un poquito.

[235E] **:** Vamos a… (Problemas de audio)

Pregunta 10

[232ES6] **:** Determinar una base.

[236E] **:** Para V, si esa es la pregunta ¿Cuénteme que esta haciendo?
[233ES6] **:** Resolver el sistema, en, lo transformo a matriz 1 2 -1 y escalono la matriz, entonces esa fila la multiplico por -1 y se la sumo a esa 0 4 -2, a la fila uno la multiplico por ¼, 0 1 -1/2 y a esta fila la multiplico por -2 y se la sumo a esta, entonces de aquí saco que, bueno el sistema tiene infinitas soluciones y depende de un parámetro, entonces x es 0 y el y es igual a t/2 y z igual a t, a ¿que hice?, estoy mal acá, estoy súper mal, porque lo resolví mal.

[237E] **:** ¿Dónde?
[234ES6] **:** Todo eso está malo.

[238E] **:** Póngale malo. ¿Por qué?
[235ES6] **:** Porque no dije que había un t, me fui, como que…

[239E] **:** Vamos a…
[236ES6] **:** Pensé que era…

[240E] **:** (problemas de audio)… Algo así pensó…
[237ES6] **:** Claro, ya ahora sí, entonces eso es 1 2 -1 0 ,1 menos no 1, 0 -2 1 ahí si. Y ahora escalono, y ahora esa fila la multiplica por -2 y se la sumo a esa, no -1 y se la sumo a esa, 0 2 1 1, y esa fila la multiplico por ½, y ahí estamos, entonces el x va a ser 2t t sub 0 menos t sub 1. Ahí estaría.

[241E] **:** O.K.
[238ES6] **:** Entonces si lo reemplazo en la matriz.

[242E] **:** Eso lo hace ¿Para qué? ¿Por qué quiere?
[239ES6] **:** Para buscar el generador.

[243E] **:** El generador.
[240ES6] **:** Entonces aquí me queda t sub cero por 2 – ½, 1 0 mas t sub 1 menos 1 ½ 0 1, ahí quedo el generador.

[244E] **:** No contestaste la pregunta.
[241ES6] **:** Determinar una base, tendría que ver si esos son linealmente independientes, pero no es tan necesario porque, se ve a simple vista.

[245E] **:** Pongámoslo.
[242ES6] **:** O ¿Lo hago?

[246E] **:** No, usted déme un argumento porque se ve a simple vista… ¿base de quién es la *v*?
[243ES6] **:** De V, por ejemplo si yo multiplico cualquier, o sea si ese vector lo multiplico por cualquier escalar nunca me va a dar este, o sea nunca este va a ser cero y y ese se va a transformar en 1.

[247E] **:** Y eso hace que esos vectores sean ¿Cómo?
[244ES6] **:** Linealmente independiente.

Pregunta 11

[248E] **:** La ultima, ha respondido todo bien y falta esta ultima, es para ver la rutina y para ver que entiende por los conjuntos linealmente independiente-dependiente, como elabora argumentos para decir si uno es LI o no es LI, o LD o no LD, ¿ya?... (Problemas de audio)

[245ES6] **:** Aquí en este caso, sería el mismo, ¿Cómo se llama?, el elemento neutro del espacio seria el (1,1).

[249E] **:** Anotemos eso, es importante reconocer ese vector… ¿Qué le hizo pensar que era el mismo de antes?

[246ES6] **:** Porque es como el mismo ejemplo de antes.

[250E] **:** ¿La misma operatoria?

[247ES6] **:** Eso, la misma operatoria pero el otro estaba en IR 3.

[251E] **:** ¿Y éste?

[248ES6] **:** En… IR 2.

[252E] **:** Por un lado… (Problemas de audio)

[249ES6] **:** (1,1) es el elemento neutro de V, entonces te dan la dependencia lineal de los conjuntos de dos por dos, claro entonces tengo que resolver esta ecuación para alfa y beta y verificar si son cero también.

[253E] **:** Ya…

[250ES6] **:** Entonces eso de ahí vendría siendo 2 elevado a alfa uno mas 3 elevado a beta dos elevado a beta igual a (1,1) y esto es dos elevado a alfa por tres elevado a beta coma dos elevado a beta, entonces tengo dos elevado a alfa por 3 elevado a beta igual a 1 y dos elevado a beta igual a uno, bueno de aquí saco que beta igual cero, como beta igual cero, entonces lo puedo reemplazar acá y me queda que dos elevado a alfa igual 1, alfa igual cero, por lo tanto son LI.

[254E] **:** El otro.

[251ES6] **:** Me gustó ese ejemplo.

[255E] **:** Después no vamos a juntar lo que han participado aquí para dar a conocer algunos resultados, este otro semestre.

[252ES6] **:** El otro semestre…, para S2 sería el (1,1) y el (2,1), entonces… bueno lo mismo, tendría que resolver esa… igual a (1,1), estos no son LI.

[256E] **:** ¿Por qué?

[253ES6] **:** Porque, ya por ejemplo si el beta igual cero, el alfa puede ser cualquier número.

[257E] **:** Por ejemplo ¿Cuál?

[254ES6] **:** Por ejemplo, ya supongamos que beta igual cero y el alfa igual 10, ya 10 por (1,1) mas cero por (2,1) es, bueno aquí sería 1 elevado a 10, uno elevado a 10, mas 2 elevado a cero, 1 elevado a cero y esto es (1,1) + (1,1) esto es (1,1), por lo tanto S2 no es LI.

[258E] **:** Antes habías dicho algo súper bueno ahí, el alfa podría ser… (Problemas de audio)

[255ES6] **:** Aquí como conclusión, si beta es cero y alfa “c” una constante real, entonces alfa por (1,1) mas beta por (2,1) siempre me va a dar (1,1).

[259E] **:** Eso los hace ¿que sean? No es LI.

[256ES6] **:** Claro, ahí.

[260E] **:** Muchas gracias, muy agradecida de que me haya dado un poco de su tiempo de descanso.

VIDEO ENTREVISTA – ESTUDIANTE 7

Pregunta 1

[1ES7] **:** Entonces para ver què es un espacio vectorial, lo primero, para ver si el cero vector está en R2, entonces, esto, cero vector lo consideramos así, vemos si pondera la suma y entonces va a ser; así que con la suma si cumple. Con el producto y acá como es para todo se supone acá, para todo alfa en R, alfa en particular podría haber sido cero, así que también cumple; entonces ahora 2 vectores cualquiera en R2, y vemos si es cerrado con la suma: bueno acá es claro que si, tenemos dos coordenadas así que es cerrado, entonces……

[1E] **:** Pongámosle ahí? Lo que usted esta pensando…

[2ES7] **:** Voy a poner: es claro que es… con las suma, entonces nos quedamos solamente con una y vemos un alfa en R cualquiera, alfa por a b, y esto tendría que ser igual a alfa, haber no; lo voy a considerar de otra forma…

[2E] **:** Puede rayar toda la hoja…

[3ES7] **:** Ya entonces…

[3E] : ¿Qué estamos probando ahí? Para yo saber.

[4ES7] : Si es grupo abeliano, así que R2 con la suma, es grupo abeliano. Ahora, si es conmutativo, o sea es grupo abeliano con la suma, ahora grupo abeliano conmutativo, va a ser…a b; a no, acá no lo puedo definir así, solamente así… con alfa en R; se que es un grupo abeliano, ahora yo tengo que ver si es, asociativo.

[4E] : Tenemos que tener las dos hojas ahí en forma paralela.

[5ES7] : Eso… (escribiendo) Parece que consideré mal el producto, de la suma. Ahora entonce acá va a ser dos y 2b, bueno eso… más no, no estaba bien… acá tiene que ser “a prima”.

[5E] : Dos por esa ordenada, más 2 por la otra ordenada.

[6ES7] : Por esta, claro… no está bien, me confundí; entonces acá va a ser dos por y acá es dos la suma es asociativa, y también es claro que el producto lo es porque es coordenada a coordenada, y que me falta, elemento neutro y el producto también. “Es claro que el producto también” y elemento neutro debería cumplir el 1 1, y aquí parece que está el problema, porque… bueno, puede ser cualquiera verdad. Me da aun lado eso y por el otro puedo tomar el 1 1 y sumarlo consigo mismo y me va a dar 4 – 2, y si yo tomo cualquier vector, cualquier alfa, por el 1 1, me tendría que dar alfa alfa, y esto es de esa forma: alfa menos alfa, excepto si solo sí alfa es cero, pero se supone que es para todo, así que no debería ser espacio vectorial.

[6E] : Entonces anotemos la respuesta ahí, ¿Por qué falla ésta?, ¿Ese es su argumento?

[7ES7] : Sí.

[7E] : ¿Cuál sería el motivo?
[8ES7] : La identidad, la identidad: No tiene uno.

[8E] : No tiene uno.
[9ES7] : O sea, esto de acá, esto principalmente eso, que se supone que cualquier escalar por, tendría que ser el escalar identidad digamos, tiene que ser dependiente con cualquier otro que….

[9E] : Tiene que ser alfa, y le dio…..alfa menos alfa, muy bien, pasamos a la segunda….

Pregunta 2

[10E] : ¿La pregunta?
[10ES7] : Sí.

[11E] : Si me puedes ir contando cómo vas pensando para yo… cómo vas elaborando los argumentos.
[11ES7] : Ya entonces, esto de acá toma una función cualquiera y lo lleva a la ponderación, el producto tiene que ser conmutativo, entonces….

[12E] : ¿Ahí me está queriendo decir los axiomas que faltan?
[12ES7] : Claro, o sea debería ser que 1, conmutatividad…

[13E] : ¿Para quién, porque tenemos dos operaciones?
[13ES7] : Para éste, se supone que esto ya es grupo abeliano a si que ya no me preocupo más por eso; se supone, o sea tiene que ser conmutativo entonces si yo opero f cruz x por f y con ese; lo que pasa es que acá, haber, no se si tomar conmutatividad solamente en las variables, o sobre la función y las variables….

[14E] : Buen punto.
[14ES7] : Sí, porque esto de acá podría ser…, no, eso y esto….f(x) f(y) y eso tendría que ser f(x) aplicado a f(y), entonces esto podría ser, no sé, no; pero si tomase dos variables f punto x y , y esto tendría que ser – para que funcione, “y x”.

[15E] : ¿Así estas abordando la conmutatividad de las dos formas?
[15ES7] : Sí, no, no estoy segura si la de arriba me va a funcionar… porque acá tendría que ser compuesta de funciones, y eso no es

conmutativo, entonces no me serviría; para que sí lo fuera, tendría que definir ésta.

[16E] : ¿Y ese es el único axioma que faltaría?
[16ES7] **:** No, haber, tiene que ser asociativo, pero, acá de nuevo, porque podría operar sobre las funciones y variables o solo sobre las variables…

[17E] : Ahí tienes que decidir por el argumento, yo creo…
[17ES7] : Veamos si funciona la distributividad de ese modo, esto está en R o sea, R R, multiplicación por R, así que no tengo problema.

[18E] : Esa distributividad en R ,así es que está en ese paréntesis.
[18ES7] : Sí, acá… y, esto tendría que ser f, ax+ay…..

[19E] : ¿A qué quiere llegar ahí?
[19ES7] : No, esto no está bien.

[20E] : ¿Por qué?
[20ES7] : Porque no estoy usando lo que tengo que usar, estoy solamente diciendo: “a esta bien definida la función para cualquier r que yo tome, solo eso”, así es que no está funcionando, debería ser como de éste tipo.

[21E] : Si quieres me dices primero cuáles son los axiomas que debería ser, y después los chequeas.
[21ES7] : Sí, tiene que ser conmutativo, tiene que ser distributivo y…

[22E] : ¿Qué hiciste en el otro?
[22ES7] : Comprobar si tiene 1.

[23E] : ¿Cuál fue lo otro…..que chequeaste en el otro?
[23ES7] : Tiene que ser cerrado, bueno pero cerrado sí es porque toma una imagen real, así que eso…bueno y esto yo podría hacer: uno por eso uno por f(x) que es simplemente f(x) y si… eso.
Distribución tendría que ser un alfa x, acá mi problema es cómo definir el producto entre funciones…

[24E] : Claro porque esa distributividad, esa distributividad entre quién la estás pensando….
[24ES7] : Claro, o sea entre las variables acá, no me sirve, porque yo sé que tiene todo, pero acá entre las funciones, tengo que definir entonces un producto que lo haga; un producto entre funciones porque si llego y tomo el producto como conmutatividad, o sea como composición; entonces voy a tener alfa f(x), bueno acá voy a tomarlo así mientras porque ahí puedo hacer eso….

[25E] : Si quiere seguimos en la otra hoja….
[25ES7] : Y ahí puedo tomar la conmutatividad, pero acá la conmutatividad; eso es lo que me falta de tomar…

[26E] : Porque veo que esto es funcional o no?

[26ES7] : Sí, ha no, no es necesario porque puedo tomarlo simplemente así, eso, la conmutatividad con… aquí me faltó un x,… y eso es conmutativo, eso está en R, entonces, entonces sí.

[27E] : Se cumplen los axiomas.

[27ES7] : Sí

Pregunta 3

[28E] : ¿Qué piensa de ese?

[28ES7] : Bueno, tiene que tener cero, digamos, antes, sea V el espacio vectorial entonces tiene que tener cero, el cero tiene que estar en V; y también tiene que tener 1, así que pueden estar los dos elementos, entonces veamos si se cumplen todos los axiomas para eso.

[29E] : ¿Va a formar con qué elementos esa idea?

[29ES7] : (escribe su respuesta) Con esos, o sea son los mínimos que debe tener y, sí funcionan, digamos sobre R, cierto…., porque tiene que ser un cuerpo sobre R, sobre ese cualquiera así que ya, el cero está por definición; si sumo dos elementos alfa beta, la suma, no está… puedo tomar alfa=1, beta=1 la suma de alfa igual a beta es 2, y eso no está en V, por lo tanto, no es posible.

[30E] : Bien.

Pregunta 4

[31E] : ¿Quién es W?

[30ES7] : Sí-

[32E] : Tienes claro quién es W.

[31ES7] : Sí el cero está y la integral entre cero uno de cero dt en dt es cero, así que el cero cumple. Si tomo p(x), q(x) que están en W, p(x)+q(x) va a ser, se lo puedo…., la suma de eso, lo voy a definir como la suma de p(x)+q(x), por la linealidad de la integral; esto es cero, así que es cerrado con la suma; el producto también es cerrado pero no por…¿el producto es cerrado?...

[33E] : Buena pregunta.

[32ES7] : Pero en realidad no nos importa porque es espacio vectorial, no cuerpo, así es que ya, tomamos un alfa en R, porque es espacio real, y veamos: alfa por 0 1 de un p(t)dt ,con p(x) en W, y esto va a ser 0 1, bueno, si lo tomo acá dentro, con la linealidad, ahí está mejor, y esto es cero, así es que cumple la condición por escalar; también cumple la distributividad, de hecho lo podemos mirar así: como alfa p(x)+q(x) , entre 0 y uno dt, y eso es alfa y esos son ceros; así que sí, que me falta… eso me falta ahí estamos, por lo tanto, sí.

Pregunta 5

[34E] : Sí, es espacio vectorial, ya, vamos a ver la proposición que tenemos que ver si es Verdadera o Falsa.
[33ES7] : Averigua si la afirmación es correcta……..

[35E] : Dime qué has pensado en eso.
[34ES7] : Z doble prima…

[36E] : No, es…
[35ES7] : Z no más.

[37E] : Claro, sean tres espacios vectoriales, entonces si esa suma es igual, quiere decir que el espacio W, ¿es el espacio Z? ¿Es el mismo? Si, no y por qué. ¿Qué te atreverías a decir de eso? o ¿ qué estás pensando, me gustaría ver como estas pensando, para donde te estas enfocando.
[36ES7] : Si tomamos los espacios vectoriales triviales o todos como R; eso no es cierto, porque puedo dar un contraejemplo, o sea estoy pensando en una que no sea tan trivial pero no se me ocurre… no, no es cierto, podemos mirarlo como suma directa, decir H va a ser V+W espacio y supongamos que la dimensión de H es cuatro, a pero ahí me van a dar dos espacios de dimensión dos pero no necesariamente van a ser los mismos…

[38E] : Estas pensando en que las dimensiones sean iguales, pero ¿Los espacios no los mismos?
[37ES7] : Claro.

[39E] : Ya…
[38ES7] : Haber, si…, ya, sigamos con esto, entonces pueden ser, ya digamos que la dimensión de esto es 2 y esto también, entonces esto obliga a que la dimensión de Z tiene que ser 2, entonces si son suma directa, éste, y a la vez es suma directa de ese, haber…, no se cómo probar que van a ser distintos..

[40E] : O sea tú dirías que si sus dimensiones son iguales, pero no son los mismos espacios.

[39ES7] : Claro, pero sé que uno tiene que estar en ambos, entonces no necesariamente, o sea, no estoy segura si voy a encontrar elementos que sean, o sea dos, cuatro para, cuatro vectores que sean li con estos y con estos, yo creo que no los voy a tener.

[41E] : ¿Qué te hace pensar que no los vas a encontrar?
[40ES7] : Haber…, no, si los puedo encontrar puedo considerar V el generado por esos triviales W, el generado por eso; y Z el generado por… y éstos, y v+w generan y son li en R4 y también v+z y no generan los mismos espacios.

[42E] : ¿Qué significa eso?
[41ES7] : Que no…, aquí me equivoqué puse z de….

[43E] : Distinto de z.
[42ES7] : Sí, por eso me confundí, la rayita estaba al otro lado.

Pregunta 6

[44E] : Son 2 preguntas en forma paralela, ¿Es la misma pregunta? La pregunta del lado derecho es la misma que la del lado izquierdo, para ti.
[43ES7] : No.

[45E] : ¿Por qué no?
[44ES7] : No. Porque acá yo puedo considerar como escalar un alfa igual a raíz de dos, y alfa por cualquier elemento en Q, eso no va a estar en Q, así es que no; al revés sí.

[46E] : Entonces eso te hace pensar que, ¿cuál es la respuesta para esa pregunta?
[45ES7] : Que Q no puede ser un espacio vectorial sobre R.

[47E] : ¿Y que está fallando, así específicamente? Porque tu hiciste una cuenta ahí; esa cuenta te hace…
[46ES7] : Haber no, momento, no no, está mal pensado, no, estaban al revés acá sí es, acá si funciona, porque Q es cerrado con todo, con…., es cerrado con la adición, con la multiplicación, tiene distributividad, así es que sí; el problema acá es que, era lo que había echo acá antes, ahí sí, porque este de acá; por ejemplo, si tomo, haber… si lo pienso de la siguiente forma: en vez de erres, R2, dos coordenadas: x e y, entonces si yo multiplico alfa en R, ahora sí, alfa raíz de dos, raíz de dos por esto, va a ser raíz de dos x, raíz de dos y; y estos coeficientes tienen que estar en Q, y eso no esta en Q, así que ,acá no podría ser y bueno.., habría sido más simple haber tomado simplemente eso para cualquier y eso no esta en Q; así es que acá no, y acá sí.

[48E] : Perfecto. ¿Quedó claro? No era la misma pregunta.

Pregunta 7

[49E] : Si no está claro lo que se pregunta, me puede decir.
[47ES7] : Sí.

[50E] : ¿Se entiende?, haber si me vas contando para mí es mejor como para saber como estas pensando el argumento, me puedo dar cuenta como lo estás elaborando.
[48ES7] : Ya, haber ya, como la pregunta anterior, si el K es mas chico digamos o es un subconjunto de R; esto no tendría sentido por el caso anterior, si K en este caso fuese C, podría servir cualquiera, porque va a tener el producto definido sobre C, por un escalar; ahora para que funcione con todos los casos, podríamos definir lo siguiente: el producto, tomar un alfa en K, y un x en R sin el cero, entonces el producto por escalar, como éste es un cuerpo con alfa distinto de cero, haber…no, que no funcionaría.

[51E] : Ahí estabas definiendo…
[49ES7] :Claro..

[52E] : Con ese alfa en K, ese K, ¿Cómo lo estabas pensando?
[50ES7] : En un cuerpo, si lo que pasa es que si es C, si K fuese C, entonces sería…es natural que va a ser R un subespacio, pero si el K es Q, tendríamos el caso anterior, entonces no podría funcionar, entonces estaba tratando de definir una operación… un producto por escalar, tal que me diera de nuevo en x, pero tendría que, o sea tendría que llamarlo solamente x, tendría que decir que la, solo no, entonces no funcionaría aunque, por otro lado tendría que cumplir con alfa mas, y eso de ahí va a ser alfa por x y, eso es simplemente alfa x y, y eso tendría que ser alfa x mas alfa y…

[53E] : Qué está pasando, eso que estaba haciendo ¿Es una distributividad?
[51ES7] : Claro tendría que…., el producto tendría que cumplir con eso, porque éste va a ser un escalar, este es un escalar y eso es un tema cual, un elemento cualquier en R sin el cero, entonces tiene que cumplir con eso pero, cumple de forma natural.

[54E] : ¿Cómo cumple de forma natural? ¿Cómo lo ve que ésta forma natural?

[52ES7] : Porque… acá la definición me dice que es un producto, y estos son números reales, todos distintos de cero, así que cumple con eso, y para que esto funcione, esto debería ser igual a eso, tienen que ser iguales, entonces esto tendría que ser simplemente, pero acá me da alfa x, tendría que cumplir con eso…

[55E] : ¿Cumple? En forma natural ¿Cómo te das cuenta de que cumple en forma natural?
[53ES7] : No, no cumple.

[56E] : A no cumple.
[54ES7] : No, ya no, me acabo de cambiar de opinión porque esto tendría que ser…. tendría que ser lo mismo, ¿Verdad?, y esto de acá,no es igual.

[57E] : ¿Cuánto da entonces? Es igual a otra cosa distinta eso?
[55ES7] : Sí, sí, entonces tiene que ser algo para que eso sea igual a esto.

[58E] : Claro, cuando anotas eso, ¿Estás asumiendo que son iguales? O estas chequeando.
[56ES7] : O sea, tiene que cumplir con eso.

[59E] : Tiene que cumplir con eso, tengo que llegar a establecer…
[57ES7] : Tiene que… a una relación para que esto se cumpla, de otra forma no va a poder pasar, porque no va a ser….no va a ver distribución.

[60E] : Que dice tu mente de eso, tus ideas.
[58ES7] : Pero por otro lado, esto de acá, según la definición, va a ser alfa x alfa y, o sea alfa cuadrado de xy.

[61E] : Y tú estás persiguiendo que eso sea alfa xy?, eso es lo que persigues.
[59ES7] : Hubiese sido suficiente con ese producto, y eso, No pasa.

[62E] : Si quieres vemos las otras por mientras y volvemos a ésta.
[60ES7] : Sí.

[63E] : O si no quiere, no volvemos….
[61ES7] : No, sí.

Pregunta 8

[64E] : Cuénteme que va entendiendo de eso, de las ”operaciones marcianas”.

[62ES7] : Sí, dos vectores de W bueno trivial. Estoy pensando en esto x y z, z=1 entonces este… eso de ahí, y cualquier otro, tendría que ser uno de por acá; tendría que ser cero.

[65E] : ¿Para ti es más fácil verlo geométricamente?

[63ES7] **:** Sí.

[66E] : Eso me tiene que ir contando, porque todo lo otro lo hemos hecho algebraico, entonces aquí tú estás usando geometría. ¿Qué otro ves tú que podría estar ahí, en W?

[64ES7] : Haber…

[67E] : O hay ese puro vector.

[65ES7] : No. Tal vez te ayude, a contestar las dos.

[68E] : ¿Cuál crees tú, que es el vector nulo? en ese subespacio.
El hecho que me digan que es subespacio, tiene que tener vector nulo.

[66ES7] : Sí… podría ser el 011.

[69E] : Es otro vector de W.

[67ES7] **:** Es otro vector y el nulo tendría que ser este de acá, porque se supone que si tomo otro: a b, a b 1, digamos, en W, aplicando, a no!, a pero ese es un lamda cualquiera; sumándolos con el 001, me da un vector de acá; y no puede ser el 0 0, porque no pertenece al subespacio.

[70E] : Estamos claros que ese no; que sería como el natural de pensar. ¿Tú pensaste que ese podría ser?

[68ES7] : Sí.

[71E] : Y, ¿Por qué lo desechaste?

[69ES7] : Porque deseché que cosa.

[72E] : Que era 0,0,0 no era el nulo de W.

[70ES7] : No, porque el nulo no cumple con la condición de que esté en W.

[73E] : O.K. ¿Por el z=1?

[71ES7] : Claro.

[74E] : O.K.

[72ES7] : Hay… de nuevo, para mi es más fácil verlo así.

[75E] : Sí, como tú lo mires, tenemos hartas hojas para dibujar así que…

[73ES7] : Es el otro tendría que ser el como para allá, pero es mas simple, porque tendría que ser el -3,-2,1 para que esté en l subespacio, tal que si yo lo sumo con el otro, no, no pude ser ese.

[76E] : ¿Por qué no puede ser? ¿Por qué lo descartaste eso?
[74ES7] : Porque se supone que si lo opero tengo que volver al nulo y acá no voy a llegar, con esa operación, tendría que ser coherente con eso, pero ahora…

[77E] : Ahí tienes una hoja si necesitas, pon ahí Nº3, para yo saber….Tiene que existir el menos v? todo vector de un espacio vectorial, ¿Tiene un menos v?
[75ES7] : Sí, pero…

[78E] : Cuéntame lo que escribes, para yo saber como estás pensando, por favor…
[76ES7] : Se supone que esto tiene que existir, y lo más natural habría sido, bueno, de hecho es el que yo habría señalado antes, pero no cumple con esa suma, ese es el problema.

[79E] : ¿Por qué no cumple?
[77ES7] : Porque no va a dar el nulo.

[80E] : No te va a dar el nulo, te da cero….
[78ES7] : Me va a dar: menos nueve menos 4 ,1; se supone que si este producto funciona y yo, digo por el inverso aditivo, lo sumo, tiene que ser el nulo.

[81E] : Sino, pase a la siguiente, no se preocupe.
[79ES7] : Sí, definición (sacando cuentas)

[82ES7] : Ya explicaste que esos sean cero por definición.
[80ES7] : Por definición.

[83E] : ¿Qué chequearías para verificar que eso sea base?
[81ES7] : Gue genere, tiene que generar …..

[84E] : Eso solamente, para ser base, tiene que generar?
[82ES7] : Ya, es li, y veamos: va a ser un vector cualquiera, un a b 1 en W , se tendría que escribir como un a, este b1, como un alfa 331 mas un beta… si encuentro las coordenadas, está todo bien.

[85E] : Está todo bien.
[83ES7] : Así es que esto sería 11 33, 1/3 3 ampliado por a b 1; no, por 1 b a, así sí, estaba mal las coordenadas, 1 (sacando cuentas) 3.

[86E] : ¿Puede encontrar las coordenadas?
[84ES7] : No, no ….así es que W no es base, es li pero no base.

[87E] : ¿Y por qué no es base, cuál es, dónde esta la falla?

[85ES7] : Bueno en realidad era más simple porque tenía solamente dos vectores, y porque acá no tengo, o sea, me va a dar que es cero, va a ser igual a, así que no.

[88E] : O sea no genera…
[86ES7] : No lo genera, y acá…

[89E] : Diga…
[87ES7] : Sí, porque…

[90E] : ¿Qué es lo que te pasa ahí?
[88ES7] : Es que el vector natural, el inverso de eso, el menos digamos, tendría que ser -3-2-1 , con otra, la dirección para otro lado, pero no me cumple con la forma que me están definiendo, entonces ese el problema.

[91E] : Es un grave problema.
[89ES7] : Sí, ese es mi problema.

[92E] : Bueno, dejemos lo ahí para que las podamos ver, pero te diste cuenta que hay un problema aquí, ese es el problema; está bien eso.

Pregunta 9

[90ES7] : (sacando cuentas) V y W son distintos.

[93E] : Motivo.
[91ES7] : Porque a pesar de que coinciden en el primer vector, el segundo no, porque son li entre ellos, entonces no puedo escribir uno en combinación lineal del otro, ¿tengo que anotar eso?

[94E] : Sí, un breve detalle.
[92ES7] : Porque 0,1,-1 y 1,0,1 son li. Así que eso ya es y, por lo tanto, si éstos, no por lo tanto, nada; ya ahora vamos a ver U y W no se que pasa ahí porque también coinciden en ese y ese, entonces voy a ver si puedo escribir este en combinación lineal de esos dos, así que tendría que ser 1,1,0 por un alfa 123, mas beta 0,1,2; no 1 1, perdón.

[95E] : 1, 1 mejor
[93ES7] : 1, 1, 12,3 00 11 -11 0 (cuentas) por -3….3. No, no son iguales, y por lo tanto, tengo que este no es igual a éste, éste no es igual a éste, así que, por lo tanto, a no, ¿Puedo concluir eso?

[96E] : Que a ti, esos tres sean iguales U=W=V.

[94ES7] : Que…

[97E] : Que significado le das a eso.
[95ES7] : Que generan el mismo espacio, o sea que independiente de la base que yo tome, el a base, por ejemplo estos dos podrían haber sido iguales, porque tenían los mismos una base equivalente digamos en dimensión.

[98E] : Dimensión igual.
[96ES7] : Claro, entonces de haber sido estos dos ld, ahí sí, hubiesen sido, generan el mismo espacio, pero haber, no estoy segura si la desigualdad es transitiva.

[99E] : Buen punto.
[97ES7] : Si, porque puedo decir, ya U, por conclusión de esto, es distinto de W y W es distinto de U, o sea de V, pero eso implica que éstos sean distintos? O sea, estoy, acá, con relación de U=V , yo se que V esta contenido en U, eso es claro; ahora el U esta contenido en V? y esto es lo que vamos a ver, entonces uno cualquiera, tratar de escribirlo en combinación lineal de V, entonces veamos tengo 0,1,1 esto en combinación lineal de acá, o sea va a ser -1,1-0; 0,1,-1; 0,1,1 son distintos así que por lo tanto, no. No son iguales.

Pregunta 10

[100E] : Aparte de esa que da una más, ya una base para V, como lo harías? ¿Qué harías?
[98ES7] : Sistema no más (sacando cuentas) por memos -1-2, así que x es igual a 2z menos t… y acá va a ser a, me equivoqué por -2, cero. Por menos 2 menos uno, a esta bien, así es que eso y es li, me es claro, bueno, esto se nota sí en realidad ahí sí es li, por lo tanto, eso es base.

[101E] : Ya, ésta es el último de nuestra entrevista.

Pregunta 11

[99ES7] : O.K., sea

[102E] : ¿La pregunta?
[100ES7] : Sí.

[103E] : ¿Qué pasó?
[101ES7] : (Risa)

[104E] : Ha llegado a un sistema.
[102ES7] : Sí, pero, ya…

[105E] : Cuéntame lo que estás pensando para yo saber.
[103ES7] : Haber, ya apliqué todo como corresponde según la ponderación y la suma.

[106E] : ¿Y lo estás haciendo por definición?
[104ES7] : Por definición de li, ahora se supone que para que esto sea li o ld, va a depender de los valores de esto, o sea de alfa y beta, ¿cierto?, la única posibilidad de que estos sean li, es que éstos sean cero, pero acá en este sistema igualando coordenada a coordenada va a ser 2 elevado 2 igual a cero, y eso no pasa; en el mejor de los casos, si b es cero , esto es uno.

[107E] : Claro, pero no es cero.
[105ES7] : Pero no es cero, así es que ya, o sea estoy mirando de nuevo la ponderación, haber si puedo hacer otra cosa.

[108E] : Estudiar la dependencia lineal de…
[106ES7] : Claro porque si xx toma esta forma para cualquier abc, ab en, no habría linealmente y dependiente, por que no puede ser el vector nulo, no puedo escoger ese, tienen que ser distintos los nulos, estos de acá.

[109E] : Qué te suena raro, algo te suena raro a ti, algo no te convence.
[107ES7] : Sí.

[110E] : ¿Qué cosa es? Haber cuenta.
[108ES7] : Que de tomar un… cualquiera abcd, estaba tratando de darme cuenta cuales son los li de esta cosa…

[111E] : Cuáles son los li de este espacio.
[109ES7] : Claro, como tendrían que ser los li, entonces esto va a ser, digamos, por la definición k y uk prima por cd igual al cero, al cero…hi, de R2 y eso es lo mismo, va a ser a elevado a k coma b elevado a k mas c elevado a k prima, d elevado a k prima igual cero, y la única posibilidad que tengo es decir: sin pérdida de generalidad, a igual a cero y el b igual a cero; o sea este cero y este cero, de modo que cuando haga la operación….

[112E] : Me queden cero….
[110ES7] : Y no son el vector nulo.

[113E] : ¿Y por qué “c” no puede ser cero?
[111ES7] : Por eso, sin perder generalidad, puedo considerar o el otro par, claro, puedo considerar uno de los dos, entonces estos no son de esa forma, así es que estos son ld y esos también, deberían serlo.

[114E] : Claro que has generalizado tu…

[112ES7] : Claro, así que deben ser Id.

[115E] : Muy bien, quieres volver a la…
[113ES7] : Sí, haber…

[116E] : Aquí hay más hojas, ¿Quieres más hojas?
[114ES7] : No sé… Haber puede funcionar esto tal vez…

[117E] : Cualquier intento es válido, así es que vamos…
[115ES7] : Porque esto por la ponderación ón, va a ser raíz de alfa x por raíz de alfa y, pero para todo R no está definida; alfa x y, y esto sería alfa x más e igual a alfa x y, pero la única condición es que eso tiene que ser ahí, y eso no funcionaría.

[118E] : ¿Puede ser que el alfa esté en un pedazo del cuerpo? ¿Y no en el cuerpo?
[116ES7] : Es que no va a funcionar, no va a ser espacio.

[119E] : Buen intento.
[117ES7] **:** Sí, quería hacer que funcionara, pero no puede ser.

[120E] : Tú quieres llegar a la igualdad de ahí.
[118ES7] : O sea, lo que pasa es que tiene que cumplir con la distribución, entonces, esto me dice una distribución tiene que cumplir con eso, pero eso, acá el problema era el alfa cuadrado, así que por ser la raíces pero…

[121E] : Todo eso que está pensando.
[119ES7] : Pero los escalares están en el cuerpo y en este caso están en K.

[122E] : Podemos pensar, K que sea R, no quita, dicen un cuerpo K o Q.
[120ES7] : Es que, claro, hubiese pensado por ejemplo, no, en Q, podría haber sido K=C y ahí si, no tengo problemas, ahí esta definido eso… para cualquier alfa que no sea cero, para que no sea trivial, y eso funcionaría, tiene que ser para todo. (sacando cuentas)

[123E] : Pero el alfa esta en el cuerpo, y en el cuerpo está el cero.
[121ES7] : Sí, entonces tendría que ser para cualquiera que no sea cero.

[124E] : Dejémoslo hasta aquí por el tiempo.
[122ES7] : Sí.

VIDEO ENTREVISTA - ESTUDIANTE 8

Pregunta 1

[1E] **:** Usted va sacando las preguntas y si necesita hojas…ahí hay.
[1ES8] **:** Ya. La leo primero.

[2E] **:** Sí. léala … es bueno empezar así.
[2ES8] **:** La ponderación… Se define una suma. La ponderación. Entonces se pregunta… Si este R2 con esta operación es un espacio vectorial.

[3E] **:** Claro.
[3ES8] **:** Parece que no.

[4E] **:** Entonces si usted...
[4ES8] **:** O sea lo que yo estoy pensando es que como hay un signo menos acá puede fallar la asociatividad con la suma; tendría que verificarlo, sí pero…..

[5E] **:** Ya entonces vamos haciendo porque necesito un argumento más o menos.
[5ES8] **:** Claro, sería un poquito largo el ejercicio, sería, haber. Tendría que tomar dos elementos, éstos son así. A pero aquí el (a,b)….a pero el espacio aquí ese, ¿o no?

[6E] **:** Ahí usted tiene que darse cuenta de cuál es el espacio.
[6ES8] : Claro porque el espacio seria R2 X R2 pero me están preguntando por R2 solamente, entonces ahí…..

[7E] **:** Qué lo hace pensar.
[7ES8] **:** Hay un problema.

[8E] **:** ¿Qué lo hizo pensar eso?
[8ES8] **:** O sea…. de partida me hizo… claro lo que están diciendo aquí la suma… Haber, la suma la definen de R2 X R2; toma un elemento de R2 XR2 y suman las coordenadas.

[9E] **:** Sí.
[9ES8] **:** Y eso da un elemento de R2. Tengo, lo que pasa es que tengo un problema con la definición de…. Porque...

[10E] **:** ¿Con la definición de la suma?
[10ES8] **:** La definición de la suma, porque tengo un elemento en R2 que es la suma…Y debería ser sumar dos elementos de R2XR2, aquí faltaría una suma más, según yo, o no?, porque…claro, tomo este elemento y lo llevo en eso, pero se supone que esto es un vector de R2XR2, entonces más que todo parece como una.. como una función más que una….
[11E] **:** Como una función. Entonces cual sería su argumento aquí.

[11ES8] **:** Mi argumento sería decir que no está bien formulada…No esta bien formulada.

[12E] **:** ¿Alguna parte?
[12ES8] **:** Claro porque R2 es R2 con las operaciones anteriormente definidas, la primera que es suma, está definida para R2XR2, no para R2.

[13E] **:** Ya, y como debiera haber sido según usted.
[13ES8] **:** O sea, según yo deberían haber primero definido una suma con, entre dos elementos de R2XR2, si… y la suma entre esos dos llevarla a R2 si?....o sea claro….

[14E] **:** Y, ¿Esto no está en R2?
[14ES8] **:** Esto está en R2, claro pero… la suma acá, sería, la otra opción sería verlo así, pero es raro porque, el espacio de partida es aquí, a menos….a menos que sea una... Puede ser algo así como lo que veíamos nosotros, acciones, por ejemplo, acciones de grupo que, iba desde un producto…. A un producto de un espacio producto… a uno solo, claro. Y por eso consideraban eso. Pude ser eso también, que R2XR2 esté significando, los elementos que se están tomando…. Para hacer la operación. Entonces…

[15E] **:** Entonces. ¿Ahí tiene sentido?
[15ES8] **:** Ahí tiene sentido, tiene sentido absolutamente.

[16E] **:** Entonces.
[16ES8] **:** Entonces podríamos ver la asociatividad aquí.

[17E] **:** Entonces ahora volvamos a retomar la asociatividad.
[17ES8] **:** (x,y) por ejemplo, más a b… Vamos a tomar elemento de ahí…..Y le vamos a sumar un c d; y eso, vamos a ver por demostrar ¿por demostrar ponemos?

[18E] **:** Sí…está bien.
[18ES8] **:** Que eso es lo mismo que yo coloque por ejemplo x + y solo y le sume los otros dos mas c,d; vamos a ver si da lo mismo.

[19E] **:** Ya… perfecto.
[19ES8] **:** Ahora, quizás, para comodidad como aquí yo desarrollé esto quizás me quedé algo muy grande, quizás me quede, me va a quedar una expresión y no me voy a dar cuenta que es.. entonces yo prefiero desarrollar esto para ver si…

[20E] **:** Y mirar..
[20ES8] **:** Y mirar, y comparar y ver si es lo mismo.

[21E] **:** Perfecto.
[21ES8] **:** Entonces prefiero….
[22E] **:** Cómodamente.

[22ES8] **:** Desarrollar esto acá…

[23E] **:** Déle no más…

[23ES8] **:** Y me queda x,y; y la suma de esos dos está definida así: que sería, dos veces el segundo de acá… Sería 2b más 2 el dos de acá, o sea 2d, y coma, menos el primero menos a menos b debería ser así. Y eso sería lo mismo, ahora sumo estos dos y me queda 2y, tendría que ser a la primera coordenada más dos veces la segunda coordenada de éste.
Dos veces menos a menos b. Es más, perdón, eso vale la primera y la segunda va, menos la primera coordenada… Menos la segunda, la primera coordenada de la otra, que sería esa sí. Bueno y eso me quedaría 2y menos 2a menos 2b.

[24E] **:** Bien…

[24ES8] **:** Coma y aquí me quedaría menos x menos 2b menos 2d entonces, claro, voy a desarrollar ahora esto de aquí y voy a ver si me da eso. Y eso yo sé que es eso... Porque es mas fácil, entonces ahora desarrollo y quedaría este de acá desarrollo primero esa suma… Bueno, tan las mismas letras así que es cosa de colocar…

[25E] **:** Sí, démosle...

[25ES8] : 2y mas 2b menos x menos a, y a eso tengo que sumarle el c, b; y eso me queda, por la definición, 2 veces la segunda coordenada del primero, más dos veces d, en este caso, que sería eso, coma, menos eso…. Menos c.

[26E] **:** O.K.

[26ES8] **:** No, no es c, me va a quedar menos 2x menos, menos 2a, más 2d coma menos 2y, menos 2b menos c. Y no es lo mismo, entonces lo que pasa aquí que está fallando la asociatividad.

[27E] **:** Ya, entonces…

[27ES8] **:** Y ese era un requisito de espacio vectorial.

[28E] **:** Perfecto, entonces su respuesta sería….

[28ES8] **:** Por lo tanto, pondría, no es espacio vectorial, ya que falla la asociatividad.

[29E] **:** Muy bien.

[29ES8] **:** O sea, fue intuición en todo caso por el signo… el signo menos.

[30E] **:** Sí… eso me gustó un poco, el haber dado su falla, fijándose en el signo menos, usted puso intención en el signo menos.

[30ES8] **:** Sí, porque quizás hubiese sido con suma, probablemente si porque la suma siempre se porta bien… separa todo.

[31E] **:** Ya… se comporta bien.

[31ES8] **:** Pero la resta no.

[32E] **:** Usted tiene experiencia en que se porta mal.
[32ES8] **:** Sí, se porta mal, me ha pasado un montón de veces.

[33E] **:** Perfecto, por experiencias, pasemos a las 2. Todo esto es espacios vectoriales, todo ya…

Pregunta 2

[33ES8] **:** Tenemos cuerpo, los reales y tenemos la familia ese conjunto que son todas las funciones que van de R a R, tal que f es función y definimos la suma de los reales tal cual y la ponderación, ya, sabemos que es un grupo abeliano. ¿Qué axiomas faltan para que R sea un espacio vectorial sobre f de R R ¿Se cumple dicho axioma?

[34E] **:**¿Esta clara la pregunta?
[34ES8] **:** Sí.

[35E] **:** Ya...
[35ES8] **:** Sabemos que R+, es un grupo abeliano.

[36E] **:** Sí, eso no lo no lo pruebe se toma como, dato.
[36ES8] **:** Claro, haber necesito, haber para que R sea un espacio vectorial sobre f de R. Haber. Tiene sentido decir que los reales son espacio vectorial sobre eso? supongo. En este caso aquí los escalares serían ese conjunto – los elementos de las de f de R R.

[37E] **:** Sí, no aquí, no suponga nada….o sea …
[37ES8] **:** No, no, no.

[38E] **:** Usted, su mente...
[38ES8] **:** O sea primero estoy viendo si tiene sentido…..

[39E] : Perfecto.
[39ES8] : Antes, porque quizás es mas, quizás no sea, quizás la respuesta sea no. Estoy buscando, antes de pensar que sí, mejor ver si hay algún, un truquito pero…

[40E] : Un análisis de eso.
[40ES8] : Estoy viendo que tiene sentido por lo menos, porque me preguntan si R sea un espacio vectorial sobre eso, o sea, ese conjunto tendría que ser los escalares en este caso.

[41E] : Efectivamente, muy bien.

Y tiene sentido el escalar por un real en este caso porque definen el escalar aquí son las funciones; lo definieron así, que por lo menos tiene sentido. Sí, bien.

[41ES8] : Y como no veo nada más, tendríamos que, haber. ¿Qué axiomas faltan para que R sea un espacio vectorial?. Para que R sea un espacio vectorial sobre eso. Haber, quizás podríamos empezar a ver algunas propiedades, no son muchas. Si uno lo ve como, haber, si yo tuviese por ejemplo f y g. Perdón eso no…. En f de R R.

[42E] : Dos funciones.

[42ES8] : Dos funciones, una de las condiciones que tiene que pasar es lo siguiente y tengo un x un real, entonces, tiene que pasar las y ,x voy a colocar. Tienen que pasar dos cosas: f + g de x, por x, en este caso, es lo mismo que f, bueno aquí el producto es un circulito, más g punto x, y lo mismo tiene que pasar ahora pero con los escalares…. Pero tendría que ir el escalar, tendría que ir acá. Tendría que ser eso. Tendrían primero pasar dos cosas si es que pasan, pero…

[43E] : Para empezar a hablar recién.

[43ES8] : Claro, pero… bueno esta si pasa. Se da por la definición porque sería eso, sería f + g evaluado en x; y eso separa la suma.

[44E] : ¿Y dónde sacó usted eso que separa la suma? ¿De dónde se apoya para decir eso?

[44ES8] : Porque el dominio es común para los dos. Si siempre que el dominio sea común, pero aquí la gracia es que son los reales completos a si que separa inmediatamente. Ahora, esto de aquí…

es más delicado y quizás aquí no…. Aquí ya falla porque no cualquier función hace eso. Aquí estoy diciendo que esta función de acá. El resultado de eso es f, debería ser f…

Bueno eso de ahí, me están pidiendo que tiene que ser f(x) más f(y) ,y ahí ya le estoy pidiendo una condición de linealidad a la función. Entonces, basta, es claro que no todas estas funciones de aquí son lineales, por ejemplo, haber una función que va de R a R que no sea lineal hay haber cual, por ejemplo…..o se que no hay pero, un ejemplo, x cuadrado por ejemplo, por ejemplo x cuadrado va de R en R. Ahora yo no se si están pidiendo que el recorrido sea todo R? o que solamente el codominio.

[45E] : No, son funciones de R en R, codominio no….

[45ES8] : Claro. Entonces, por ejemplo.

[46E] : Siga...

[46ES8] : Entonces la función x^2 por ejemplo, cumple esa condición, esta ahí y no es lineal claramente, entonces….

[47E] : Entonces… pensamos, piense usted, pensó...
[47ES8] : Por ejemplo, pensé….

[48E] : Para yo recordarme que usted….
[48ES8] : Que, esto no es cierto pues, para que se cumpla…y le voy a poner asterisco acá, se necesita que f sea. Lineal, pero lineal entre comillas porque tampoco le estoy pidiendo que separe, que saque el escalar para fuera.

[49E] : Es un lineal con una operación.
[49ES8] : Con una operación….o sea en este caso con la suma.

[50E] : Con la suma, muy bien…..ya.
[50ES8] : Y f igual x^2 no es lineal.

[51E] : Perfecto
[51ES8] : Y f pertenece a ese conjunto, … entonces …tampoco.

[52E] : Entonces ya hemos chequeado dos.
[52ES8] : Sí.

[53E] : Pongámosle nombre uno, dos.
[53ES8] : Aquí sería uno, aquí y ese es el dos.

[54E] : Y ese sí y ese no.
[54ES8] : Claro, y ya, pero ya por el hecho que no se cumpla esto ya no es…. no es espacio vectorial.

[55E] : Perfecto
[55ES8] : Así que ya con eso como es por lo tanto….. perdón….

[56E] **:** No, siga...
[56ES8] : Por lo tanto, no es espacio vectorial.

[57E] : ¿Quién no es espacio vectorial? Porque aquí hay dos cosas que identificar, si quiero ver…
[57ES8] : Perdón. El conjunto los reales con esa operación definida sobre los escalares con las funciones, ese conjunto…. No es espacio vectorial.

[58E] : Impecable. Muy bien. ¿Había visto operaciones como esa para espacios vectoriales?, pero en espacios vectoriales, usted.
[58ES8] : No.

[59E] : Sin, sin entrar en algebra o estructuras.
[59ES8] : He visto, he visto otra operación pero esa no la había visto nunca.

[60E] : A que bueno, que bueno.
[60ES8] : No, para nada.

[61E] : El argumento esta muy, muy, muy bueno.
[61ES8] : No había visto operaciones, operaciones que nunca me habría imaginado, pero esa no la había visto nunca.

[62E] : Que bueno, que bueno, porque el argumento fue súper bueno.

Pregunta 3

[62ES8] : ¿Es posible que exista un espacio vectorial que tenga solo 2 elementos?. Aquí yo tengo, tengo que reconocer una cosa, yo leí en un libro que hablaban de…, de espacios vectoriales, como decirlo…. Que le agregaban elementos, algo así, no entendí muy bien que….lo que primero pienso yo…

[63E] : ¿Sí?
[63ES8] : Si es lo que le interesa……. es que sí.

[64E] : Entonces ese sí, que piensa para decir sí.
[64ES8] : Mi argumento es, cualquier cuerpo sobre si mismo es un espacio vectorial

[65E] : Muy bien.
[65ES8] : Entonces bastaría yo pensar en un cuerpo de dos elementos no mas, por ejemplo Z2.

[66E] : Perfecto.
[66ES8] : Z2… Z cuocentado con 2Z. Sobre sí mismo es un espacio vectorial y tiene dos elementos.

[67E] : Entonces a raíz de eso ¿Cuál sería su respuesta….
[67ES8] : Que ¡sí! Según y, si solamente, ya que Z cuocentado con 2Z sobre sí mismo, es un espacio vectorial, eso es lo que yo siempre, o sea eso es lo que yo sé por lo menos.

[68E] : Sí, y está bien.
[68ES8] : Y… Z cuocentado con 2Z… tiene 2 elementos, así que sí, eso es lo que yo sé.

[69E] : Muy bien.
[69ES8] : Así que ¡sí!

[70E] : Muy bien, vamos a terminar en media hora…..
[70ES8] : No, pero esta entretenido …..

[71E] : Sí, para mí es súper importante. Es que, o sea, tratar de yo ojalá sacarle radiografía a su mente para ver cómo elabora eso. Es la idea, yo me imagino que es la idea porque al final, es la idea como construyen los argumentos, los...

[71ES8] **:** En Algebra Lineal, estas preguntas son para averiguar eso…..es lo que queremos.

Pregunta 4

[72ES8] : Buena pregunta ésta, ¿Un conjunto polinomio de grado n, que significa eso?

[72E] : Sí, menor o igual que n.

[73ES8] : Menor o igual que n, que la integral entre cero y uno vale cero. Con las operaciones usuales, es un espacio vectorial real? Porque. Haber, la suma la separa haber aquí no estoy encontrando argumento para decir que no……

[73E] : ¿Por qué esos argumentos?

[74ES8] : O sea lo primero que estaba pensando ver, es que si hay algún problema con, con suma por ejemplo o asosciatividad, pero la gracia de la integral es que siempre asocia todo, la integral de la suma…. La suma de las integrales, así que…..

[74E] : ¿Su argumento desaparece con esas propiedades?

[75ES8] : O sea, me da a pensar, lo primero que me da a pensar, es que puede que sea, pero, todavía estoy pensando en un argumento, es que para mi siempre es mas fácil ver porque no…..

[75E] : ¿Es más fácil?

[76ES8] : Para mí es más fácil ver porque no, porque, como me voy a poner, como me voy a poner a pensar….”haber, ya! Voy a demostrarlo, no mejor prefiero ver que no, porque una justificación es mas rápida, decir porque no; demostrar que es un espacio vectorial es mas largo, son muchas condiciones, entonces eso es lo que me estoy tratando de ahorrar.

[76E] : Vamos si se lo puede ahorrar.

[77ES8] : Haber…vamos a tener que ir viendo paso por paso, porque lentamente no se me viene ninguna, nada que falle pero, haber… si yo tengo por ejemplo R , un real verdad…haber aquí quizás…

[77E] : ¿En qué estaba pensando con eso…”aquí quizás”

[78ES8] : No es que, yo lo que iba a ver era esto, pero, creo que ya entendí que pasa; eso es siempre verdad, que separa eso, lo que se me viene a mi cabeza de nuevo…..si le interesa….

[78E] : Sí, me interesa… ojalá pudiera explicar cómo se le viene a la cabeza, sería espectacular.

[79ES8] : A pero, claro, los polinomios si ya son un espacio vectorial, ahora se le está pidiendo una condición inicial, a esos espacios, a esos conjuntos.

[79E] :¿Cuál es la condición que piensa?

[80ES8] : La condición especial es que se le pide que la integral entre cero y uno sea cero, pero ya en sí, los polinomios son espacios, son un espacio vectorial, son un R-espacio vectorial, así que ahora podríamos ver solamente criterios para subespacio, ahí es mas sencillo, o sea, criterio, para subespacio uno ahorra trabajo en cierto modo porque, para ver que sea espacio vectorial se tienen que cumplir un montón de condiciones, no son tantas, pero igual es mas o menos larguito, pero también está lo que se llama un criterio para subespacio, que es cuando tengo un espacio vectorial metido en otro, y ahí las condiciones… como el conjunto de los polinomios es un R-espacio vectorial – bueno eso se sabe, es un R-espacio vectorial, y W está contenido ahí, verdad?, entonces ya me estoy omitiendo un montón de operaciones que tengo que verificar, porque ya por el hecho de ser e espacio vectorial ese…aquí también puede que se cumplan algunas condiciones, basta ver que W sea un subespacio; es que esos son menos pasos que demostrar; que quiere decir esto: para subespacios, el primer punto, primero que no sea vacío, pero aquí por ejemplo, en efecto, me dio, el polinomio nulo esta ahí, así que claro y es súper fácil ver que una integral ente uno y cero es cero. Ahora, el segundo criterio que hay que ver, es si yo tengo…en W…

[80E] : Dos polinomios ya…

[81ES8] : Entonces, hay que demostrar que la suma está, no y ahí la gente le agrega un escalar ahí, pero yo siempre por comodidad, el escalar lo hago como tercer paso, aparte, pero es lo mismo al final, pero… bueno ya si es espacio vectorial ya vi por qué, a la integral, pues, para que este ahí, la integral de eso tiene que ser cero, pero como la integral las separa, quedaría cero; y el escalar cuando sale para fuera, quedaría un escalar por cero…

[81E] : Arguméntelo

[82ES8] : Pues la integral entre cero y uno, aquí sería dt, sería la integral entre cero y uno de p(t)+ integral entre cero y uno de Q(t)……dt, y eso es ceroma cero…es cero. Ahora, estaba pensando,… esto lo puedo hacer, lo puedo separar porque estos dos están en W, mi pregunta es si la suma, tiene sentido hablar de esa suma integrar entre cero y uno, claro porque son polinomios, así que tiene sentido hablar de eso; era la otra duda porque quizás…

[82E] : ¿Y por qué saltó esa duda? porque…

[83ES8] : Es que de repente… me acordé de cuando demostraban que 1=-1, y en una parte ocupaban por ejemplo uno al cuadrado es lo mismo que, raíz de -1 al cuadrado creo que es…., no me acuerdo como era pero separaban, en una parte separaban eso……y eso no existía, entonces por eso yo podría haber llegado aquí es bien pero tenía que ver si esa cuestión tenía sentido, y, pero no hay problema porque como son polinomios, y el escalar es lo mismo porque: alfa en R y P(x) en W entonces integrar entre cero y uno de alfa P(x) es lo mismo que alfa P(x), y eso como está en W, quedaría alfa por cero, que es cero, así que por lo tanto W es subespacio vectorial de Rn, claro, es mas fácil.

[83E] : Muy bien, etapa superada.

Pregunta 5

[84ES8] : Buena….averigua si la siguiente afirmación es correcta o no, en ambos casos, justifica tu respuesta. Tengo W….V W y Z espacios vectoriales sobre un cuerpo K, y supongamos que V+`W=V+Z entonces W=Z, una especie de cancelación así, en espacios vectoriales.

[84E] : Claro, una idea a partir de ahí está tomado esto.

[85ES8] : Nunca había visto este ejercicio de verdad, o sea no,……

[85E] : De hecho esta propiedad usted la conoce… la cancelación la conoce de alguna parte.

[86ES8] : Sí, en los reales por lo menos, o en espacios vectoriales también, pero….

[86E] : Ahora, ¿qué pensaría de eso acá? Con espacios vectoriales, ¿es lo mismo que R?

[87ES8] : Es más delicado que R, no podría decir inmediatamente que sí porque ya esos son conjuntos, entonces, haber, pensemos porque no, ese es el razonamiento que siempre se hace, “por que no”,

[87E] : Su estilo, sí, déle...

[88ES8] : Por ejemplo…

[88E] : En qué está pensando ahí cuando me dice, pensemos…

[89ES8] : A no, no.

[89E] : ¿Cómo llegó a eso ¿Cómo llegó a eso?
[90ES8] : Por ejemplo, estoy pensando, lo primero que se me ocurrió es encontrar, están preguntando si W y Z son iguales, entonces yo estoy buscando dos elementos distintos que cumplan esa condición, y por ejemplo… V y cero sirven, por ejemplo, si W=V y Z es el espacio vectorial formado por el puro cero, entonces V+W es lo mismo que V+V y eso es V, y V+ cero, es V.

[90E] : Y eso.. ¿Qué quiere decir?
[91ES8] : Pero W es distinto de V, por lo tanto la proposición es falsa; claro, encontré dos, que cumplen la condición pero son distintos, entonces no…

[91E] : ¿Qué opina de esta pregunta, para usted, en este instante de su carrera que está? Es buena?
[92ES8] : Buena pregunta, pero por ejemplo a esta altura, por lo menos para mi, esta es una pregunta que tenía que ser así, respondida inmediatamente, sí, porque no, no se ve como muy coherente eso, o sea lo primero que veo yo, o sea en los reales tiene sentido llegar y cancelar pero…acá no.

[92E] : Usted cree que un estudiante que esté cursando Álgebra Lineal en este instante, razonaría para dar un contraejemplo?
[93ES8] : A no se no podría subestimarlos pero, pero yo creo que sí, es que el ejemplo fue súper sencillo entonces yo creo que un estudiante debería hacerlo…

[93E] : Hacer la diferencia que no está en los reales.
[94ES8] : No, es que no es, no tenía mucha ciencia, el ejemplo fue súper sencillo, considerar el mismo y el nulo.

[94E] : No, pero para usted...
[95ES8] : A bueno si..., si, es relativo pero, a lo que voy es que creo que ese era el ejemplo adecuado, yo creo que ese era el ejemplo que había que colocar, no había otro, sea, puede haber otro, pero es muy rebuscado.

[95E] : Hay muchos más, pero son muy rebuscados.
[96ES8] : Entonces yo creo que ese era el mas rápido.

[96E] : No le digo que nos íbamos a demorar media hora aquí.

Pregunta 6

[97ES8] : ¿Es Q un espacio vectorial sobre R?

[97E] : Y paralelamente esta otra.
[98ES8] : ¿Y es R un espacio vectorial sobre Q? …si y no.

[98E] : ¿Por qué? y ¿Por qué?
[99ES8] : Q un espacio vectorial sobre R, No ese no, por lo siguiente: para que sea un espacio vectorial sobre algo, sobre ese algo, entonces esos serían los escalares; en este caso los escalares, que así se les llama a los escalares, son los R, entonces se tiene que cumplir, si alfa pertenece a R y q pertenece a Q se tiene que cumplir que alfa Q tiene que estar en Q, ¿si?, ya y eso no es cierto, porque, porque si tomo alfa un irracional, por ejemplo el típico ya raíz de 2 , y q lo que sea…. Ya ½ por ejemplo, entonces alfa q es raíz de 2 medios, y eso no esta en Q, entonces al final lo que pasa aquí es que falla la ponderación, por lo tanto no es espacio vectorial, por ejemplo Q no es un R-espacio vectorial.

[99E] : ¿Cómo repararía la pregunta para R que lo fuera? Para que Q fuera espacio vectorial sobre quien debería haber sido?
[100ES8] : Debería ser sobre un conjunto, podría ser sobre el mismo Q.

[100E] : ¿Ahí sería verdadero?
[101ES8] : Ahí sería verdadero, claro porque el producto no es problema, y por la propiedad de cuerpo, se hace para todo, y no hay problema.
Acá, es R un espacio vectorial sobre Q, sí, el si es problema porque cuando es si, hay muchas cosas que se……

[101E] : Claro, usted me dice: sí, pero no se lo que significa ese sí, argumentemos.
[102ES8] : Si, pues se cumple lo siguiente:…. Vamos a tener que verlo a lo bruto.

[102E] : No si son ideas generales acá, usted tiene clara la estructura, entonces es un argumento.
[103ES8] : Se cumple toda la estructura, porque ahora tiene sentido hablar de ponderación por Q, porque aquí por ejemplo si, no está ese problema de acá, va a dar un real, porque la gracia de los reales es que es el conjunto mas grande, entonces, haber, se cumplen, si alfa beta pertenecen a R y p y q pertenecen a Q, entonces se cumple, por propiedad más que todo de los reales, por los axiomas de los reales, separa eso, no amerita demostración porque…..y lo mismo si yo tuviese p+q alfa por ejemplo, cierto? La otra propiedad que tiene que cumplir para que sea espacio

vectorial, bueno tiene inverso, tiene inverso aditivo porque los reales tienen inverso aditivo; en realidad cumple todas las propiedades, por que los reales cumplen todas esas propiedades, entonces,…

[103E] **:** es porque los reales son que?....
[104ES8] : Los reales son un cuerpo, entones mas que todo es por eso, se cumple todo, o sea, en general debido a que R es un cuerpo, se verifican todas las propiedades, todas las propiedades para que R sea un Q-espacio vectorial, la base ahí es…mas complicado…, eso sería.

Pregunta 7

[104E] : Pasemos a esta otra.
[105ES8] : Haber, R sin el cero es un grupo abeliano con la operación suma definida como sigue x+y es un producto usual. Definir la otra operación, multiplicación por un escalar sobre un cuerpo K, para que sea un espacio vectorial.

[105E] : ¿Entiende la pregunta?
[106ES8] : Sí, haber…. Tomo la suma, es el producto, la suma, si, necesito una operación multiplicación por un escalar, que cumpla las siguientes condiciones, haber, necesito lo mínimo que necesito pedirle a la operación, necesito una operación multiplicación por escalar que cumpla lo siguiente, necesito que, para que tenga sentido… si yo tengo alfa y beta en K, si, porque los escalares son de K ; entonces se tiene que cumplir, alfa x+y=alfa x+ alfa y; con x,y en R sin el cero, porque eso es lo que me están pidiendo y después alfa +beta, x sea alfa x +beta x ,si ,y el alfa y beta están en K . Haber para que se cumpla esa condición, la primera, como se definía ese alfa x+y …es alfa por, y “x+y” esta definido como “x por y” , y eso necesito – lo voy a anotar como pregunta ahí, que sea igual a alfa x + alfa y como quedaría: alfa x, claro, me tengo que definir la operación, tengo un problema aquí…

[106E] : ¿Cuál es el problema?
[107ES8] : El problema es el sentido que le estoy dando a esa operación, todavía no la he encontrado…

[107E] : Es que ese es el problema.
[108ES8] : Claro, tengo que separar una operación que todavía no sé cómo se define, o sea, de partida tendría que saber, bueno eso es lo que me están pidiendo, qué operación es esa para que eso tenga sentido.

[108E] : Efectivamente.

[109ES8] : Haber se me ocurre una forma, haber esas son las condiciones que tiene que cumplir.

[109E] : ¿Las únicas o faltan?
[110ES8] : Para que sea, una operación por escalar, que cumpla la siguiente haber, si esas son las dos operaciones que se le piden a la hace tiempo que no veía espacios vectoriales.

[110E] : Si, no importa, lo que se acuerde…
[111ES8] : Haber, distribuir la suma, todo eso… ¿Qué más se pedía? Creo que también era la asociatividad con los, si no me equivoco, creo que era, es, era, claro algo así, si parece que esa era la operación que faltaba, y ahí con esas tres ya, se me ocurrió una forma, pero por ejemplo, la multiplicación por escalar cero, que de cero, y cumple todo eso, sí.

[111E] : Haber…
[112ES8] : Si definimos, a simple vista veo que cumple todo, sí, se cumpla por x coma cero, para todo x en

[112E] : ¿Dónde?
[113ES8] **:** Claro, y alfa esta en K, está bien?

[113E] : ¿Qué cero es eso?¿ ese cero que es?
[114ES8] : Es lo que va es sí, si, tuve otro problema acá; no tiene sentido esta ésta cuestión.

[114E] : ¿Por qué no?
[115ES8] : Porque si yo multiplico por un escalar, la gracia es que el resultado, me de en el cuerpo, o sea en el conjunto que estoy pidiendo, que es los reales menos el cero, así que eso de aquí no.

[115E] : Póngale aquí….no.
[116ES8] : No, no tiene sentido que sea cero.

[116E] : Sacó el cero de ahí.
[117ES8] : O sea lo primero que vi. fue el cero fue porque era mas fácil que se cumpliera todo….

[117E] : Y de hecho se cumple.
[118ES8] : Se cumple, pero como no está el cero, jode todo, alfa x +y. ¿Qué operación puede ser? Esto ya es…..está un poquito más difícil, una operación que sirva….si al final lo que estoy pidiendo es la primera condición, que separe la suma, haber estoy pidiendo que pase esto de acá, ¿cierto? Esto es un real no nulo que lo puedo escribir como suma de dos reales siempre, por eso, el cero tenía esa gracia.

[118E] : Claro, claro que aquí no dimos la operación, para ver que podían argumentar.

[119ES8] : Es que, haber, ya estoy empezando a sospechar que no se me va a ocurrir a por x no parece que no se me ocurre. O sea haber, que argumento doy yo, o sea, el producto por un escalar, aquí tiene que darme un real.

[119E] : Tiene que cumplir eso…..

[120ES8] : Tiene que ser un real? No, tiene que cumplir eso, entonces tiene que pasar, tiene que ser un real, cierto? Eeee si yo lo dejo como un real fijo, que es lo que podía haber estado pensando yo, un real fijo, entonces aquí me va a dar ese mismo real mas ese mismo real, los dos porque los dos valen lo mismo, entonces no se va a cumplir, entonces tendría que ser variado el producto, o sea la función debería ser como variada, o sea lo que voy es que….

[120E] : No tan usual…..

[121ES8] : No tan usual, o sea, a por x, no va a poder ser r, con r perteneciente a R-{0}, fijo; no puede ser eso porque la suma no………..

[121E] : No va a dar, ya. Por lo menos eso está descartado.

[122ES8] : Entonces ya no puede ser un real fijo, entonces ya estoy pensando en condicionar el y es complicado ahora porque yo no conozco el cuerpo K, entonces como para definir una…

[122E] : Podría estar toda la tarde.

[123ES8] : Sí, no sé

[123E] : Pasemos a las otras, pero, fue una buena aproximación.

Pregunta 8

[124ES8] : Tengo b, x,y,z en R3 y las tres coordenadas positivas y es un espacio vectorial con las operaciones: suma, definida así, ya, ponderación, y a; sea W el subespacio situado sobre el plano z=1; escriba dos vectores de W, bueno dos vectores de W tendrían que ser, por ejemplo (2,3,1) y el otro (2,2,1) si, de hecho cumple todo porque son todos positivos y como están en el plano z=1, la coordenada z tiene que ser esa. Cuales el vector nulo de W, el vector nulo, el que tenga problemas con la suma, el (1,1,1) debería ser, si, para que sea vector nulo, tiene que pasar que al sumar, al sumar tiene que darme uno, cierto?, pero esa operación están definida como xa yb zc y ahí están definidos el u y el v, sí, cierto? Y eso tiene que ser igual al u, el u es x y z , ¿cierto?, y ese sistema da entonces que a b y c, que tiene que ser fijo, tiene que ser 1 1 y 1; primera vez que sea un espacio que no sea el puro cero el 1 1 1 claro, ese sería el vector.

[124E] : El vector nulo.
[125ES8] : Claro, el vector nulo. Si v es(3,3,1), quien es –v, bueno –v tiene que ser un compadre que...

[125E] : Que haga que gracia…..
[126ES8] : -v tiene que tener la gracia que al sumarle ese, de el vector nulo, que es ese de ahí, tendría que resolver el sistema, v entonces sería a b y c, y le estoy sumando un vector –v que le voy a poner x y z , y eso me tiene que dar 111 cierto? Y la suma de eso, esta definida como tendría que ser las coordenadas con los inversos, ta definido así, cierto?, y eso tiene que dar 111, por lo tanto, la coordenada x tiene que ser el inverso del otro, y así sucesivamente… y tiene sentido hablar de inverso aquí?, claro porque son positivos, así que, ese sería el inverso de él, claro.

[126E] : O sea en este caso, quien sería –v.
[127ES8] : -v, por lo tanto –v tendría que ser el inverso de cada uno: 1/3 ½ y 1.

[127E] : ¿Qué inverso era?
[128ES8] : El inverso multiplicativo, pero es que eso era mas o menos evidente si, por como está definida la operación, mas o menos porque...

[128E] : Pero siempre y cuando se entienda la operación.
[129ES8] : La operación como el producto multiplicación normal de R.

[129E] : Porque usted perfectamente podría haber dicho que –v es -3 -2 -1, también o no.
[130ES8] : Sí, tiene sentido, pero el problema es que….

[130E] : Más sentido o menos sentido.
[131ES8] : no, tiene sentido pensar eso, si porque normalmente en coordenadas, en R3 por ejemplo, anteponerle un signo era ponerle un signo menos a eso, entonces tenía sentido pensar eso, pero, no.

[131E] : Sigamos entonces….
[132ES8] : Me dan dos vectores, el 221 y el ½ ½ y 1 de W, son li; habría que ver entonces, son li, haber si yo tengo alfa y beta reales , si yo tengo eso igual a cero, que es el cero del, es el 111, ese es el cero de acá , si?; normalmente se define, si yo los igualo a cero pero es el cero vector, entonces aquí el cero es e 111, tengo que

llegar a que alfa y beta son cero, pero el cero de los reales. haber ,antes de evitarme hacer todo el todo el cálculo, voy a pensar si será así o no al tiro, que lo otro sería llegar a resolver y ver si habría una contradicción o si se llega, si tiene solución; haber, quedaría v ala alfa /&%$, a claro, porque llegaría a esto de acá, si lo desarrollo, como está definido esto quedaría: 2 a la alfa, 2 ala alfa y 1, sumado, esa suma especial que tiene, ½ elevado a beta coma ½ elevado a beta coma 1, y eso se supone que tiene que ser nulo acá, ahora la suma, esta definida como el producto de cada uno, aja, tiene cara ,ya, entonces, me va a quedar 2 alfa por ½ beta coma, a ya si, lo voy a escribir igual, por uno, y queda uno por uno, cierto?, y para que eso sea 111, aquí esta la cuestión, esto de aquí, me va a quedar, 2 elevado a alfa menos beta, el primero, cierto?, 2 elevado a alfa menos beta…coma 1, y eso tiene que ser igual a 111, para que eso sea verdad, la única condición que se pide aquí, es que el alfa sea igual al beta, ya aquí pa que me de cero ahí, cero ahí, me queda 2 elevado a cero, 2 elevado a cero, pero ahí ya no necesariamente el alfa y beta tienen que ser cero por que se pide una condición de igualdad, podría tomar alfa igual 5 igual beta por ejemplo, que son distintos de cero, y va a cumplir la propiedad, por lo tanto, No son li, no, no son.

[132E] : Ya…….., la cinco-

[133ES8] : ahora, el conjunto 331, tengo ese conjunto y 1/3 3 uno, es base? Es la pregunta…

[133E] : Exactamente si, no, por qué---

[134ES8] : Haber para que sea base, espero que sea no, porque si es si ,va a ser muy largo hacerlo, haber, por que podría ser no; tengo 2 vectores, para que sea base tienen que ser li y generar, ya, e no, no porque es el mismo caso anterior, que se cambia el 2 por el 3, pero aquí era 1/3 y ahí era 3, a no, pensé muy rápido, pero va a se similar; quizás falle que no sean li, lo mismo si tuviese una combinación lineal, alfa eso me va a quedar 3 alfa, 3 beta, uno sumado, perdón, alfa, un tercio de beta, 3 beta y uno, eso tiene que ser 111; y la suma, me daría el producto de los dos, y no va a no, no son li, por el simple hecho, hay un problema con esta coordenada, como esta definido esto, me quedaría tres alfa menos beta, ahorrando pasos, pero acá me va a quedar 9, o sea 3 alfa por 3 beta, eso es ,ahí el problema, porque en el otro queda uno, y yo necesito que eso sea 1….

[134E] : Y aquí también le quedó, aquí le quedó, ¿Y por qué le puso menos?

[135ES8] : Porque ahí no, porque es el producto, me quedaría 3 alfa por un tercio de beta…

[135E] : Pero aquí también es el producto.

[136ES8] : 3 alfa por 3 beta, así está definido, no?

[136E] : Sí.

[137ES8] : Sí, está bien, y queda 1 por 1, queda eso, ahora para que eso sea verdad, necesito que alfa sea igual a beta, para que eso sea…., aquí no hay problema, pero aquí necesito que alfa sea igual a beta .y aquí necesito que 3 alfa por 3 beta me de el 1, o sea eso implica que el beta tiene que valer -1, para que sea el inverso, no.

[137E] : No, porque ahí…………..

[138ES8] : No, perdón, me queda alfa mas beta, perdón, alfa mas beta, tiene que ser cero y sumado que alfa tiene que ser igual a beta, yo digo que alfa igual cero igual beta, entonces SI son li, por lo menos pasa eso. Así que por lo tanto con li, por lo menos cumple esa condición. Ahora para que genere, tendría que ver, son li tendría que ver ahora si generan a este.

[138E] : ¿Si es li es base?

[139ES8] : Si es li es base, no, no porque podría tener por ejemplo haber, el 1 coma 0 100, esa es una coordenada y el 001; dos elementos de R3, pero no genera todo R3, pero, o sea lo que yo puedo asegurar de éstos dos es que son un subespacio de V, porque por lo menos son dos li y el generado por ellos, pero que forme todo W , a claro, haber tendría que ver….

[139E] : Cómo ahora cambió de opinión sobre eso, como?

[140ES8] : Sí, no, sino, dije que si, haber, tiene que generar esto, o sea si yo tuviese por ejemplos sea a,b,1 verdad en W, el 1 es porque eso, entonces tengo que demostrar que a,b,1, siempre lo puedo escribir como alfa veces el primer elemento de mi base, mas verdad, ese mas especial que hay, mas 1/3 , 3 y 1, y tengo que ver si es soluble, o sea, si existen esos alfa y beta, tendría que ser desarrollando eso haber, esto me quedaría 3 a la alfa, 3 ala alfa, uno y sumado con 1/3 elevado a beta, 3 elevado a beta y uno; y la suma esta definida como... Producto de cada uno, me quedaría tres, a – b, después me quedaría tres a+b, 1, y eso yo tengo que ver si es a,b,1, ¿cierto?, El a y el b son reales positivos, porque son subespacio de V, pero la gracia es que la tercera coordenada es 1; por lo menos tengo que eso es positivo, así que por lo menos tiene sentido hablar de una igualdad, así que ya no me caigo en que ya no puede pasar, ahora, tengo que buscar la siguiente solución, tengo que ver si esto, puedo encontrar un alfa y beta que hagan esto, cierto, porque el 1 ya está ahí, gratis, que podría hacer para, podría desarrollar el primero, tiene sentido, es positivo, así que podría sacar logaritmo si es que me molestan los exponentes, y me quedaría a-b , por

las propiedades de logaritmo y puedo aplicar logaritmo ahí porque es positivo, y lo mismo acá, sí.
Entonces de ahí, como yo quiero desarrollar, encontrar la soluciones, podría decir a-b es lo mismo que logaritmo natural de a , partido por logaritmo natural de 3 , que es distinto de cero, así que tiene sentido; y alfa + beta es igual a logaritmo natural de b, partido por logaritmo natural de 3 ¿si? bueno ese sistema si, si tiene, no me voy a complicar la vida, quizás le poner una notación más fácil z1 y z2 por decirlo así, y voy a tener un sistema bien básico que es de colegio, algo que no es muy complicado, y ahí habría que ver si tiene solución, por ejemplo, haber por cuantos métodos hay aquí, por sustitución por ejemplo, podría decir que alfa vale beta mas z1 n el primero, en uno , y este es dos; entonces, evaluando en dos evaluando en dos, tengo alfa que vale beta mas z1 mas beta igual z2 , y eso también tiene solución; 2 beta verdad, si me va a quedar 2 mas z1, y saco beta, así que es soluble, entonces es posible escribir estos dos como combinación de ellos

[140E] : ¿Y la pregunta es entonces, era base?
[141ES8] : Sí es base, y, porque: primero porque es li, y genera a W, o sea, es decir, todo elemento o vector de W es combinación lineal de estos elementos, así que sí.

[141E] : Muy bien, súper. Ahora nos quedan unas preguntas que son de rutina, que son tres, haber como anda esa rutina.

Pregunta 9

[142ES8] : Tengo tres subespacios…

[142E] : De R3………
[143ES8] : El U, generado por esos tres vectores, el V generado por esos 3, y W, ya, y se pregunta si esos tres son iguales, haber. Lo primero que pienso es que si estos tres vectores fueran li, entonces ya no porque tendría dimensión 3, y el otro a lomas 2, así que no. Podría ser así, hacerlo igual, aquí la operación es la usual cierto?

[143E] : La usual, si, después de tanta operación extraña, vale la pena preguntar.
[144ES8] : Haber, porque así, a simple vista no se puede decir si sí o si no m o sea yo por lo menos, yo por lo menos, no puedo decir si si o si no a si que tendría que empezar a, a resolver mi primera duda, a ver si la, si los vectores de aquí son li, los primeros… Alfa y beta reales. Verdad, y lo igualo a cero cero, aquí sí es cero cero, y ver si eso es soluble, o sea, decir, alfa mas beta igual cero, dos

alfa mas gama igual cero, y después tengo tres alfa mas beta mas gama igual cero, y ver si eso tiene solución.. la trivial o sea puro cero cero, lo podría hacer por matrices, no se si se puede hacer así...

[144E] : Si, algo que le ayude a dar respuesta para que salga de a duda.

[145ES8] : ¿Sí?, lo más fácil sería porque ya como en un sistema ya de 3x3 hacerlo por los métodos anterior que era por sustitución, quizás muy largo; quizás sea mejor hacer una matriz, así matricialmente se podría ver que esto es, si aquí, voy a hacerlo así, ahí van los beta y los gama me quedaría 110, 201 y después me quedaría 311, verdad?, bueno eso va por alfa beta y gama, ¿cierto?, y eso…. Me queda 000, entonces para ver que alfa beta y gama son cero, bastaría ver que el determinante de esa matriz es cero, y si no, ahí ya estamos, problema; y el determinante de eso, lo podría sacar como 1 por -1, quedaría -1, verdad, menos, después quedaría 1 por 2 menos 3 menos uno, mas uno quedaría, mas cero, claro, da cero, si es que lo saqué bien, me queda 1 claro da cero…

[145E] : Da caro, ¿Qué quiere decir eso?

[146ES8] : Bueno eso era Álgebra 1, deje acordarme, ya la solución no era…. Podía ser, ya no era solamente la trivial por lo menos, podía pasar que no tuviese solución, o que tuviese, pero infinita y en ambos casos, se me cae la que sean 000.

[146E] : Entonces como son esos vectores de ahí?

[147ES8] : Son ld, son ld, así que…son ld voy a colocar, se me fue alas pailas así que no me va a servir. Eso era lo primero que había pensado, quizás era lo mas fácil de ver a mi juicio, que las dimensiones fuesen las mismas haber, me fijé en otra cosa, quizás tuve que verlo así primero, pero el nerviosismo, aquí he claro, a simple vista, o sea yo lo primero que veo es que quizás no porque, porque el elemento v, esta pidiendo que la suma de las tres coordenadas sea cero, cosa por lo menos que aquí no pasa, aquí n o pasa y aquí no pasa, así que ya no, entonces era mas fácil, ¿si? U es distinto de V, pues los elementos de U no cumplen x+y+x=0, con xyz en U; y basta verlo con los de acá porque estos son los generadores, entonces si no pasa con estos, puede que pase con algún generado por ellos pero, como ya este tiene elementos…. Tiene uno que no está ahí, entonces ya……

[147E] : Entonces que podemos decir acerca de la pregunta que se le hace…

[148ES8] : O sea ya por el hecho de saber que U y V son diferentes, no puedo decir que los tres son iguales, por lo tanto U e, no se cumple esa condición pero…no estoy; aquí la pregunta es si los tres son iguales, quizá podría ser que sean iguales dos a dos o algo, pero los tres iguales, por lo tanto, no son los tres iguales, pues ya hay dos distintos, a si que no se está cumpliendo esa proposición de ahí, lo que no niega que quizás V y W puedan ser iguales, no se si son iguales, pero, no niega eso, entonces, pero no son los tres iguales.

[148E] : Muy bien.

Pregunta 10

[149ES8] : Tengo haber….un espacio V de matrices que cumplen esa condición, subespacio… aquí las operaciones son las usuales ¿cierto?

[149E] : Sí, las operaciones son las usuales.

[150ES8] : Determine una base para V, a bueno esto ya es mas sencillo porque podría por ejemplo colocar, de las ecuaciones que se me están pidiendo, yo podría despejar z y t, y reemplazarlo ahí z vale –x-2y, y t vale2z-x, ahora reemplazando queda, si yo tengo un elemento ahí, e me va a quedar x,y,z,t ; si x,y,z, no ahí me faltó el z también lo puedo dejar en función de x e y; 2z, o sea me quedaría -2x-4y-x, bueno y ahí es mas fácil 3x-4y, ya y eso ahora, lo puedo separa, con cada variable podría quedarme, haciendo los pasos rápido, x veces 1 0 -1-3 mas y veces, que cosa, 0 1 -2 -4, si? Claro, así que el candidato a base, candidato, por lo tanto, candidato, 1 0 -1 -3 y 0 1 -2-4 , por que digo candidato, porque hay que ver si son li, porque generan, se ve y para ver que es li, así, basta ver que son li, y para ver que son li hago una combinación lineal entre ellos y veo si es cero, para ahorrarme pasos, esa es la combinación lineal si lo hago con x y con y, y me da cero, por el hecho de que aquí su combinación lineal me queda x y –x- 2y -3x-4y y eso es igual al vector cero, entonces eso implica que x=y=0 porque esos dos tienen que ser cero, así que son li y este conjunto es base.

[150E] : Las otras no las vamos a hacer porque era para reforzar, dudas de lo anterior, pero en este caso no.

[151ES8] : ¿Cómo dudas?

[151E] : Por ejemplo, hay personas que tuvieron confusión en las operaciones, entonces le hago otra para ver si después de todo este trabajo, pueden volver a retomar, por ejemplo contestaron que el vector nulo ahí en R es el 000.

[152ES8] **:** ¿Pero a cuantas personas, le hace solamente aquí a los de matemáticas?

[152E] : A los de matemáticas.

[153ES8] : ¿Pero de todos los años?

[153E] : No, ustedes y los que están en algebra lineal 2, del profesor León, para ver como argumentan; y el argumento es diferente, se nota la preparación; la gente que tiene más matemática, calcula menos, el que tiene menos matemática, necesita calcular más…

[154ES8] : Era quizás lógico pensar eso, pero es algo que uno hace con...

[154E] : Sí… pero necesito ver que cosas que calcula, que es lo que necesitas especificar muchos, claro, por que en los ejemplos anteriores, por ejemplo, si es base, pienso yo que no había otra forma de hacerlo que no fuese así porque, a la vista así no se ve, uno no podría dar un argumento, No, no podría, hay cosas que hay que hacer los cálculos, pero adecuados a la operación…

[155ES8] : Pero los otros quizás el anterior del W, no me había dado cuenta de eso.

[155E] : Pero está muy bien.

Pregunta 11

[156ES8] : Tengo V, las coordenadas en R2, pero con ambas positivas, un R-espacio vectorial con las operaciones: suma, definida así, estando en V los dos; y la ponderación, ya, la misma que la anterior casi, si. Estudiar la dependencia lineal de los subconjuntos…

[156E] : Los que vienen a continuación, es para reconocer cosas ¿ve? …. Las otras también, pero no tiene sentido porque usted estuvo bien.

[157ES8] : A sí, es lo mismo en realidad porque lo otro tenía tres variables.

EL ALUMNO FINALMENTE SE DA CUENTA DE QUE NO TIENE QUE SEGUIR RESOLVIENDO
…..EN REALIDAD LE CUESTA DARSE CUENTA DE QUE SE ACABÓ.

Video ENTREVISTA – ESTUDIANTE 9

Pregunta 1

Sin audio

[1E] **:** Es tener, un conjunto de vectores que sería… Vamos anotando para quede el registro.
[1ES9] **:** Conjunto de vectores.

[2E] **:** ¿Lo denota por alguna letra especial ese conjunto de vectores?
[2ES9] **:** IR2 sería el conjunto de los pares (x, y), lo segundo que deberíamos… es el cuerpo de escalares… entonces aquí, donde debemos verificar sobre el cuerpo IR de los números reales, ya cuerpo escalares, operaciones suma y la ponderación por lo menos tendríamos eso lo otro que verificaría es que la función este bien definida, en el sentido de que tomo 2 elementos en el caso de la suma por ejemplo y verificar que dado un elemento es que tiene una única imagen el conjunto de llegada, pero al parecer eso es así y tendríamos que ver con la ponderación…

[3E] **:** Perfecto. ¿Para las dos?
[3ES9] **:** Para las dos…, a ver… verificar y no se si valga la pena redactarlas cuáles son en el sentido por ejemplo de la distributividad.

[4E] **:** Me las podría ir anotando para ver como lo esta pensando hacer, y si quiere usted anotar las propiedades.
[4ES9] **:** Sí, no sé si, que aquí una propiedad que no se cumple que sería la de distributividad del producto por escalar, puede ser, voy a verificar, entonces, una de las propiedades que uno tiene que verificar es que…supongamos que son pares ordenados en IR2.

[5E] **:** Esos son los vectores.
[5ES9] **:** Los vectores y alfa un numero real, entonces lo que debería verificar aquí es que alfa de v+w es igual alfa v mas alfa w, entonces… a ver, perdón, (x, y) de w (a, b), entonces la suma esta definida, ya 2 veces la segunda coordenada del v y menos 2 veces la segunda coordenada… 2y – 2v alfa… a no, a ver me falto otra cosa menos x menos “a” y esto sería alfa veces la primera coordenada, esto sería producto por escalar como está definido así, entonces seria 2 alfa x mas 2 alfa v, menos alfa por

y, o sea menos alfa por la segunda coordenada, entonces seria alfa x mas alfa “a”… por otro lado, vamos a poner acá alfa v mas alfa w, sería alfa x menos alfa y menos alfa a, menos alfa v y esto me dice, sería 2 veces alfa y, no… dos alfa v, bueno, ya se esta viendo que la primera coordenada no funciona con…, así que y acá menos alfa, menos alfa veces la segunda coordenada, ah no, estoy acá, aquí sería menos x, menos alfa x menos alfa “a”, si ahora lo que podríamos…

[6E] **:** Ponga eso ahí para que después no nos olvidemos, puede sacar hojas después.

[6ES9] **:** Bueno, me da la impresión que uno podría, no se, factorizar por, pero ¿Qué querría decir eso?, no sé que sentido tiene factorizar por -1, que es sacar, entonces de ser así uno podría… factorizar, me daría este vector con este producto, con esta ponderación, ahora…

[7E] **:** ¿Pero eso es necesario para ver la propiedad que usted esta chequeando?

[7ES9] **:** Aquí es donde me encuentro con el problema, porque…

[8E] **:** Estábamos chequeando esta propiedad

[8ES9] **:** Bueno, así de a primeras, yo diría que no se cumple la distributividad de la ponderación en la suma de vectores.

[9E] **:** Y si le preguntara ¿Por qué?, qué me diría usted.

[9ES9] **:** Porque la primera coordenada, no coincide ni la primera ni la segunda coordenada de este vector, que sería éste y éste, no coinciden, no son iguales por lo tanto, no se cumple la propiedad distributiva, o sea la ponderación no se distribuye en la suma de vectores.

[10E] **:** Anóteme eso.

[10ES9] **:** Distribuye en la suma de vectores, ya y al factorizar por -1, creo que me equivoqué, porque aunque la haga usando esta ponderación, de igual manera me coinciden en los vectores…

[11E] **:** Entonces eso sería para responder a la pregunta y ¿Cuál es la respuesta para la pregunta?

[11ES9] **:** Mi respuesta, es que IR2 con estas operaciones no es un espacio vectorial sobre IR.

[12E] **:** Ahí tenemos una hoja y ahí respondemos, porque, pero la pregunta es ésta, entonces con esto cuál es su respuesta para la pregunta.

[12ES9] **:** Bueno, un espacio vectorial como decía debe estar compuesto por un conjunto de vectores, un cuerpo de escalares y 2 operaciones distintas, ahora, tiene que haber una relación o una propiedad importante entre la ponderación la que estamos definiendo y la suma que es la distributividad, y esta no se cumple, entonces yo podría decir que el par IR coma 2 IR la ponderación y la suma no es un espacio vectorial, sobre IR.

Pregunta 2

[13E] : Perfecto, la segunda.
[13ES9] : Sea IR el cuerpo de los números reales y f (IR, IR) conjunto de todas las funciones de IR en IR, se definen dos operaciones: la suma y la ponderación… estoy viendo la ponderación… ya, si sabemos que IR con la suma es un grupo abeliano, que axiomas faltan para que IR sea un espacio vectorial sobre este conjunto de funciones, de IR sobre IR, ¿Se cumplen dichos axiomas?

[14E] : No hay para que responder ahí mismo, hay hojas extras.
[14ES9] : A ver…

[15E] : ¿Qué se le viene a la mente al leer esta pregunta o estos datos, esta información?
[15ES9] : Bueno, primero estoy pensando en los axiomas… (Problemas de audio)… sobre este conjunto, ahora…

Sin audio

[16E] : Eso nos falta, ahí tiene uno, entonces esta pensando en que otros o ese es el único.
[16ES9] : No, hay varios axiomas que serían el IR de los cuerpos escalares… no, es que al decir los cuerpos escalares, me da la impresión de que estoy asumiendo que f (IR, IR) es un cuerpo.

[17E] : Y… ¿Qué pasa?
[17ES9] : Sí…

[18E] : ¿Qué hizo corto circuito?
[18ES9] : Pensar que le puede faltar a f (IR, IR) para que sea un cuerpo, ahora he estudiado que hay pares que se llaman espacios vectoriales pero, no pares si no que espacios de vectores, un cuerpo y operaciones que no necesariamente el… lo que yo le llamo cuerpo de vectores debería ser un cuerpo, sino debiera ser…

[19E] : Un cuerpo podría ser, usted me dijo un cuerpo podría ser…
[19ES9] : Podría ser un anillo conmutativo, con identidad y sin divisores de cero por ejemplo, eso.

[20E] : Entonces ¿Quiénes son los escalares acá?
[20ES9] : Los escalares serían las funciones de IR en IR… y los vectores serian los números reales.

[21E] **:** Sí, bien, exactamente ese sería el espacio, que dicen, que trabajamos, no sabemos si es espacio, tendríamos que ver, sóo sabemos que IR con la suma es grupo abeliano, entonces sabemos que IR con la suma es grupo abeliano, entonces habría que chequear axiomas y usted me tiene que decir cuál es su forma de pensar y los que faltarían y después que me diga cuáles faltarían, cuales se cumplirían o no con esas operaciones, las operaciones son fuera de lo común, no son comunes, esa ponderación, esa es la idea, que no sea común para que usted me diga como esta trabajando la argumentación.

[21ES9] **:** Es que uno tiene muy incorporadas las formas usuales de los problemas.

[22E] **:** Claro, porque aquí nada es usual, porque si fuera usual no tendría gracia porque seria todo una mecánica y yo no quiero ver mecánica, quiero ver como crea argumentos, lo que se le ocurra si no, como su mente le vaya dictando… ahí nombramos una, otra cosa que yo no me doy cuenta, ¿Qué le da vuelta?

[22ES9] **:** Bueno estaba pensando que, en este conjunto yo puedo hacer el producto de funciones y eso es pensando en esta operación, que estoy haciendo aquí, pensando en este axioma, en esta operación podría asumir que el producto es de funciones, producto punto… claro.

[23E] **:** va a chequear inmediatamente, ¿Eso me está diciendo?

[23ES9] **:** Bueno, eso lo estoy asumiendo que es producto punto a punto, no sé si…

[24E] **:** Usted lo interpreta.

[24ES9] **:** Sí… claro, a ver, también podría ser la compuesta de funciones, no sé si será bueno asumir que cosa es esto, suponiendo que es compuesta.

[25E] **:** Póngale al lado, que está pensando como producto.

[25ES9] **:** como producto, me voy a referir a la compuesta… si no resulta, el producto punto a punto.

[26E] **:** ¿Pero va a chequear esa primero?

[26ES9] **:** Entonces debiera verificar esto y esto sería, esto es un vector… estoy haciendo cosas extrañas, puse mecánicamente un axioma pero, ¿Quiénes son estas operaciones?

[27E] **:** Estas con el énfasis en ¿Quiénes son? y ¿lo necesita?, ¿ve qué es fundamental para chequear esta propiedad?, el poner atención en las operaciones ¿es relevante?.

[27ES9] **:** Para mí, sí, no se si lo será realmente, pero…

[28E] **:** Sí, es relevante, es muy relevante ¿no es cierto?, lo que usted está haciendo es una buena tarea, pero aquí tiene usted una notación de fgv y aquí tiene alfa beta v.
[28ES9] **:** ¡ah! Si, es que…

[29E] **:** Sí, está bien.
[29ES9] **:** Ya…

[30E] **:** Si, es cierto porque estamos en medios inconsistente, ahí… chequeamos.
[30ES9] **:** Lo que yo quiero es que no sean espacios vectoriales entonces tengo la intención de buscar un contraejemplo.

[31E] **:** Tiene que haber un fallo en alguna parte dices tú, ya vamos…
[31ES9] **:** (risas)

[32E] **:** ¿Qué paso? estamos chequeando si esta propiedad ¿se cumple o no se cumple?
[32ES9] **:** Sí.

[33E] **:** ¿Qué puede hacer con esas?
[33ES9] **:** Quiero que se cumpla ese axioma… mi problema es que me estoy enredando con la compuesta, con el producto por escalar…

[34E] **:** ¿Por qué le pasa eso que se enreda?, donde está lo complejo, lo difícil aquí, si uno quisiera darle ese nombre.
[34ES9] **:** Tal vez, debe estar en primero en interpretar esta, éstos con esas operaciones y tener cuidado con lo que estoy asumiendo de lo que uno usualmente tiene incorporado… eso ha sido la mayor complicación.

[35E] **:** Entonces usted después que ha hecho ese cálculo, podría decir que ese axioma ¿se cumple o no se cumple?, yo estoy clara que estamos aquí, muy bien, entonces que puede decir usted el axioma ¿se cumple?, para esas operaciones: suma y ponderación, usted me había respondido algo hace poco rato, ahora se arrepintió.
[35ES9] **:** Sí, es que me volví a cuestionar las cosas, porque… ¿Qué habré asumido bien o mal aquí?, asumiendo lo usual, que aquí hay una operación entre los escalares, que la compuesta…

[36E] **:** Sí, porque sus escalares son funciones ahora.
[36ES9] **:** Sí, con el número real, con el vector… ahora esta composición la estoy ponderando con el vector, esta es la ponderación y dándome la definición, sería la función aplicada al número real que seria la compuesta aplicándola al número real, por otro lado

aquí, interpretando, dije este alfa, este elemento escalar esta siendo operado como un vector, porque esto es un vector, entonces aquí estaríamos hablando de la ponderación, por eso le puse ponderación aquí, ahora, del vector que seria esta, ésta está definida como la función evaluada en el número real y luego lo que esta afuera, seria ponderar la función con este numero real, sería aplicar f a este numero real que es la imagen del v por g, y que coincide con la parte izquierda.

[37E] **:** Entonces, este axioma ¿se cumple o no se cumple?, volviendo a mí pregunta.

[37ES9] **:** Con la compuesta, sí.

[38E] **:** Basta.

[38ES9] **:** Con la compuesta, ahora el producto por escalar, o sea el producto punto a punto me refiero… tendría que ver.

[39E] **:** Hagamos una cosa, sigamos con ésta, para que no este chequeando dos cosas, sigamos con ésta, ya entonces ¿Qué podría decir usted? Ahora lleva uno de los axiomas, éste es un axioma y se cumple ¿Cuál otro seria otro axioma?

[39ES9] **:** Otro axioma debiera ser que la identidad del conjunto de escalares, que la llamamos uno, no sé, la función identidad ponderada con un vector, un numero real, debe ser el numero real y esto debe ocurrir para todo numero real en este caso, entonces esto efectivamente es así, porque esta es la función identidad, se cumple.

[40E] **:** ¿Por qué usted lo está viendo?

[40ES9] **:** Pues 1 operado con v, es v para todo v en IR, ese es el axioma que vi, que quería verificar…

[41E] **:** ¿Cuántos axiomas llevamos trabajados?

[41ES9] **:** Dos.

[42E] **:** … Las otras hojas, que queden en paralelo…

[42ES9] **:** El otro axioma, a ver, es la distributividad de la ponderación y la suma de escalares debiera ser eso, ya, y al parecer aquí hay un problema, ¿Por qué?, digamos que tomemos una función cualquiera de este de IR en IR escalar, entonces tomamos por ejemplo la función alfa de IR en IR, que a cualquier elemento, cualquier número real lo lleva a la identidad de IR, al 1.

[43E] **:** ¿Es la función constante o la identidad?

[43ES9] **:** No, dije que cualquier número real lo lleva a la identidad del cuerpo, entonces tomemos cualesquiera dos números reales por un lado, tenemos que… esto es lo mismo que alfa de (x + y) y esto debe ser 1, por x +y es un numero real, pero por otro lado alfa ponderado con v más… y alfa operado con w… me enredé…

[44E] **:** Más clarita la anotación.

[44ES9] **:** Este va a ser x y este "y"… y este es alfa de x mas alfa y, pero alfa x es 1 y alfa y es uno y esto es 2, distinto de 1, por lo tanto, existe… alfa en f (IR, IR) tal que, bueno entre paréntesis esto debe ocurrir para todo alfa en f (IR, IR), y para todo v y w en IR, entonces yo pruebo que existe un alfa tal que no se cumple la distributividad de la ponderación y la suma de escalares.

[45E] **:** Perfecto, llevamos analizados 3.

[45ES9] **:** 3 axiomas, pero qué axiomas faltan para que IR, bueno acá hay uno de los axiomas que faltan, este es uno de los axiomas que faltan para que IR sea un espacio vectorial sobre el conjunto de las funciones de IR en IR.

[46E] **:** Y éstos ¿No faltaban?

[46ES9] **:** Y éstos… no estos están bien…

[47E] **:** ¿Faltan más axiomas o no?

[47ES9] **:** Sí, ahora si yo tengo dos escalares, bueno lo que quería decir es que tengo dos escalares y los sumo, fundamento mi expresión media extraña, un vector v, un número real en este caso, esto debiera ser igual a alfa operado con v mas v beta, operado o ponderado que viene a ser lo mismo con v, y esto para todo alfa y beta y v en sus respectivos lugares, pero porque dije… aquí estoy también asumiendo una suma en este conjunto y ese sí, la suma de funciones es una función, pero si aquí por ejemplo me definiera ponderación o suma no usuales, porque aquí yo debiera asumir las usuales, podría definir una suma y una ponderación, según una suma de funciones y una ponderación distinta a la usual que yo tengo incorporada y el problema habría cambiado, habría que verificar de otra manera las propiedades pero estoy asumiendo que es la suma de funciones.

[48E] **:** Claro, como no me dicen nada, yo asumo que el que las lee tiene que pensar en lo usual, porque si no fuera usual me lo tienen que decir, entonces aquí este conjunto tiene operaciones usuales que son las que yo quiero en las que usted trabaje para chequear este espacio, con la usual, usted aquí dijo éstas son las usual, con la compuesta, producto punto, entonces nos quedamos con esta, para no ser tan extenso este problema y lo terminemos en 2 días, no, dijimos ésta, vamos a chequear con esta, pero esta es una operación que tiene esto, la otra debiera ser.

[48ES9] **:** La suma.

[49E] **:** La suma, consideremos la suma usual, que no fuera usual, como no me dijeron nada tengo que asumir que aquí hay algo usual. ¿Cuál es la usual ahí?

[49ES9] **:** La usual es la suma de funciones que… bueno, aquí lo voy a especificar una función de IR a IR que a cada x le asocio alfa más beta de x y me queda que alfa de x más beta de x eso es lo punto a punto… este es el otro axioma que debemos verificar, bueno y esto para todo alfa en f (IR, IR) y para todo v en IR.

[50E] **:** Entonces yo voy a preguntarle ¿Se cumple este axioma para estas operaciones?

[50ES9] **:** Hmmm.

[51E] **:** Ya…

[51ES9] **:** bueno, aquí esto es la ponderación, si ahí, ya entonces aquí yo debiera aplicar alfa… sí, se cumple.

[52E] **:** Razón o motivo.

[52ES9] **:** Porque aquí, bueno como esta definida esta suma y este producto por escalar esto no es mas que alfa mas beta evaluado en v, pero como dijimos acá esto es alfa evaluado en v mas beta evaluado en v y esto es la ponderación, cierto, entonces se cumple esto para todo alfa en el conjunto de las funciones y beta y ven IR, por lo tanto se cumple el axioma, a ver: 1, 2, 3, 4… ¿Cuál me falta?...

[53E] **:** La pregunta clave es ¿serán éstos o me faltarán?...

[53ES9] **:** Me da la impresión que me faltan, pero no me acuerdo.

[54E] **:** Quedémonos con eso y veamos otras preguntas a ver si aparecen nuevas ideas o son éstas, porque pueden estar bien, yo no voy a mencionar eso… trabajamos bien esto ya vamos a la otra, muy bien trabajado.

Pregunta 3

[54ES9] **:** Es posible que exista un espacio vectorial que tenga solo dos elementos. bueno en un principio había mencionado que, uno cuando habla de espacio vectorial se refiere a cuarto cosas: a un espacio de vectores.

[55E] **:** Ponga eso ahí, porque es importante.

[55ES9] **:** Un conjunto de vectores, un espacio de vectores.

[56E] **:** Cuando dice un espacio de vectores, está pensando físicamente ¿En qué?

[56ES9] **:** Estoy pensando en aquellos elementos.

[57E] **:** Porque cuando se habla de espacio vectorial y usted pone espacio de vectores, quiero saber ¿Cuál es la diferencia?

[57ES9] **:** Estoy diciendo aquéllos elementos que estoy sumando, o sea no, no que… a ver ¿Cómo lo digo?

[58E] **:** Si está algo bien eso, entiendo pero más clarito.

[58ES9] **:** Voy a decir las tres cosas que siguen y le voy a explicar por que le digo así, un espacio de vectores, un cuerpo de escalares, bueno entre comillas es cuerpo porque podría ser…

[59E] **:** Entre paréntesis como podríamos mirarlo también como dijo usted.

[59ES9] **:** Anillos conmutativos con identidad y sin divisores de 0, por ejemplo, el cuerpo o los conjuntos anteriores que habíamos definido tiene divisores de 0, entonces podría ser algo más general que esto, en realidad debe ser un espacio de un conjunto de elementos que cumplan los axiomas con las dos operaciones que debe tener un espacio vectorial, entonces, una operación entre el espacio de vectores, o sea los elementos y una ponderación.

[60E] **:** Esa ponderación se refiere a la operación ¿Entre quién?

[60ES9] **:** Una ponderación o producto por escalar esto es entre los elementos de este conjunto, entre los elementos, vamos a llamarle D2 y los de uno, ahora ahí he quedado con algo pendiente el porque le llame espacio de…

[61E] **:** M llama la atención, espacio vectorial y espacio de vectores, no es nada especial que valga la pena decir, sino seguimos.

[61ES9] **:** Espacio de vectores, lo que pasa es que aquí tienen que haber dos operaciones. una entre este espacio de escalares y el conjunto de vectores, que es lo que conocemos como ponderación.

[62E] **:** Para diferenciar.

[62ES9] **:** Claro y la otra es la operación entre los elementos del espacio de vectores, sería la operación entre estos elementos y una operación entre estos elementos y estos, que es la ponderación, entonces si uno considera los elementos, bueno este es un espacio de vectores no, a ver… el espacio vectorial pero este no es un espacio de vectores, el espacio vectorial yo lo considero como, por ejemplo el espacio de vectores yo lo llamo V, al cuerpo de escalares o conjunto de escalares lo llamo K y la operación, nuestras operaciones puedo llamarles: suma y éste un producto escalar, al par (V, K) con esta operación suma entre los vectores y la ponderación entre los elementos de este conjunto y los vectores cumpliendo los axiomas correspondientes le llamamos un espacio vectorial, entonces yo respondo que no es posible que tenga solo dos elementos porque a ver, el peor de los casos es que, no, bueno si, lo voy a poner, deben haber cuatro para que esto sea un espacio vectorial, por supuesto más los axiomas, ahora puede ocurrir que el espacio de vectores coincida con el cuerpo escalar y la suma de esto coincida con la ponderación, entonces voy a tener a fin de cuentas un par, por ejemplo. a ver, por ejemplo: IR, si ponemos IR como el espacio de vectores, también IR como el espacio de escalares, la respuesta definitiva es no, no me voy a hacer mas problemas.

[63E] **:** Claro, entonces usted me tiene que dar algo, un argumento, que me diga ¿Cómo sostiene, como avala que es no?, entonces yo le pregunto trate de decirme ¿Por qué no? Vamos, a partir de que no, según lo que me dice.

[63ES9] **:** Bueno, yo creo que no, ya que un espacio vectorial debe tener estas cuatro componentes más los axiomas, entonces por lo menos requerimos de cuatro elementos, entonces no, pues se requieren de al menos cuatro componentes, eso, ahora.

[64E] **:** Cuando usted me escribe componentes esta pensando en quién, para que a mí me quede claro.

[64ES9] **:** En las que mencione aquí: el espacio de vectores, el cuerpo o sea el conjunto de escalares y dos operaciones que tengo la impresión que deben ser distintas.

[65E] **:** Sí, por el ejemplo que me dio aquí, cierto.

[65ES9] **:** Claro, tengo la impresión que deben ser distintas porque en algún punto de los axiomas, tal vez la distributividad, la necesite.

[66E] **:** Sí, bien, nos quedan menos ya, si no son tantas.

Pregunta 4

[66ES9] **:** ¿Estos son los polinomios de grado n con coeficientes en IR?

[67E] **:** Sí… en IR.

[67ES9] **:** Tal que la integral entre 0 y 1, de la función polinomial sea 0, con las operaciones usuales ¿es un espacio vectorial?

[68E] **:** Si esto es todo espacios vectoriales, es un espacio vectorial ¿Por qué?, porqué si o porqué no…

[68ES9] **:** Bueno en lo que estaba pensando es, tengo un espacio de vectores que son los polinomios con coeficientes en IR de grado n, tal que la integral entre 0 y 1 es 0, de la función polinomial, dice operaciones usuales o sea tengo la suma de polinomios y el producto de polinomios y el conjunto de escalares seria IR, espacio vectorial real, lo que estaba pensando es ¿se cumplirá que el producto de 2 polinomios donde cada uno por separado, la integral de cada uno es cero, el producto será 0, eso estaba pensando, por que la suma y el producto, la suma y la distributividad, la suma de polinomios la integral es cero, esto es, con la suma, es cerrado con la suma…

[69E] **:** El producto de polinomios, y el producto ¿Por qué?
[69ES9] **:** Tengo la impresión que el producto de polinomios, donde cada uno por separados, la integral es 0, no necesariamente es 0, puedo estar equivocado, pero tengo la intuición de que así podría ser, ahora tendría que buscar un contraejemplo…

[70E] **:** Si, no se le viene a la mente un contraejemplo, puede anotar las ideas que me está diciendo, porque a lo mejor por tiempo no puede elaborar un contraejemplo y necesita meditarlo mucho, pero es un argumento que usted esta utilizando para dar una respuesta.
[70ES9] **:** ¿De a dónde parto argumentando?

[71E] **:** De lo que usted esta diciendo, que tiene que buscar, 2 polinomios con tales requisitos que le quiere pedir a eso polinomios.
[71ES9] **:** Sí, voy a escribirlos así como… a ver.

[72E] **:** Con sus palabras no más, ésta no es una clase de matemáticas, recuerde que a mí lo que me interesa es el argumento.
[72ES9] **:** Creo que no es necesario verificar que el producto de polinomios es… que estén en W sigan estando en W.

[73E] **:** Y ¿Por qué cambio de opinión?
[73ES9] **:** Si, porque requerimos de una operación que se llama suma entre los elementos de W y lo otro que requerimos es una ponderación, pero por un número real.

[74E] **:** Y que estaba tratando de argumentar.
[74ES9] **:** Yo estaba… verificando algo que no me están pidiendo, que no es necesario.

[75E] **:** Entonces, mucho a ese conjunto, no es necesario ¿Por qué la estructura no lo requiere?
[75ES9] **:** No, no lo requiere.

[76E] **:** Entonces ahora va atener que responderme no sé cómo.
[76ES9] **:** Entonces mi respuesta es sí.

[77E] **:** ¡ah! Cambiamos, bien.

[77ES9] **:** Porque… bueno primero tenemos un espacio de vectores, tenemos un cuerpo de escalares, tenemos una operación suma dentro de los elementos de W y una ponderación que sería el producto usual, entre números reales por, y además estoy seguro que se cumplen los axiomas.

[78E] **:** Me puede decir alguna breve idea de por qué tanta seguridad, usted dice: es más, se cumplen los axiomas, pero su mente algo le estará mostrando que usted ve… me podría contar un poco de porque está tan bien…

[78ES9] **:** Lo que pasa es que cuando hablamos de polinomios… lo que mas aparece son sumas, sumas de componentes, suma de monomios y creo que… éste producto es usual, entonces el producto usual y la suma usual son muy inofensivos, no veo haya problema de falta de algún axioma.

[79E] **:** O sea, porque es lo usual…

[79ES9] **:** Pues, son las operaciones usuales.

[80E] **:** ¿Qué ha pasado en las preguntas que ha revisado anteriormente?

[80ES9] **:** Lo principal es que, a diferencia de esto, no estamos hablando de sumas o productos usuales, que es lo que uno tiene mas incorporado, o sea la estructura mental, pienso yo, es pensada en lo usual, cuando le presentan lo inusual, es difícil asimilarlo y verificar que también se puedan cumplir las propiedades que necesitamos, es espacio vectorial, está muy bien hasta el momento, ya esa otra.

Pregunta 5

[81ES9] **:** Averigua si la siguiente afirmación es correcta o no, en ambos casos justifica tu respuesta… sean V, W y Z espacios vectoriales sobre un cuerpo K y supongamos que la suma de espacios, bueno si no me dicen nada, asumo que es la usual; es igual a la suma de V + Z, la suma entre V y W es igual a la suma entre V y Z, entonces W = Z… entonces W = Z…

[81E] **:** Una propiedad nueva, ¿es una propiedad nueva esa, las conoce en otras estructuras que no sean espacios vectoriales.

[82ES9] **:** Sí,… es que en un principio me da la impresión de que no, entonces estaba buscando un ejemplo…

[82E] **:** Entonces siga buscando un ejemplo en su mente… ¿de dónde viene la idea que le da la impresión de que no? ¿De dónde se agarra usted para decir me da la impresión de que no?, debe estar pensando en algo usted para agarrarse de ahí y decir me da la impresión que no ¿de qué? ¿Para dónde fue a pesar que le llevo a concluir eso?

[83ES9] **:** Esto, es V entonces yo puedo tomar a W igual al espacio nulo y Z, y asumir que V no es el espacio nulo.

[83E] **:** ¿Es o no es?

[84ES9] **:** No es, asumir que no es, entonces tendríamos que V + W que es lo mismo que V + Z, es igual a V mas W que es lo mismo que V mas el espacio nulo, bueno y esto es v pero W es distinto de Z, porque supusimos que V distinto de Z, entonces no siempre se va a dar cuando los espacios son nulos, por eso.

[84E] **:** Perfecto, muy bien.

Pregunta 6

[85ES9] **:** ¿Es Q un espacio vectorial sobre IR?, pregunta, justifica.

[85E] **:** Porque i o porque no, y al lado la otra mire la otra que está al lado.

[86ES9] **:** ¿es IR un espacio vectorial sobre Q?

[86E] **:** ¿Es la misma pregunta?

[87ES9] **:** No, no es la misma, aquí hay una diferencia entre los escalares y el espacio de vectores, en este caso el espacio de el conjunto de escalares es IR, bueno y Q sería el espacio de vectores y aquí es todo lo contrario.

[87E] **:** Que es todo lo contrario, yo no voy a entender, o sea usted me tiene que especificar que esta pensando todo lo contrario, porque yo no puedo interpretar lo que me esta diciendo, sino lo que realmente dice, por eso tengo que ser tan estricta cuando me dice todo lo contrario…

[88ES9] **:** lo que quiere decir todo lo contrario, el conjunto de escalares es Q y el espacio de vectores es IR.

[88E] **:** Y eso los hace ser distintos a la luz de su mirada del problema.

[89ES9] **:** Sí, los hace distintos, y eso se puede evidenciar en lo siguiente, por ejemplo acá: sabemos que raíz de 2 es un numero real, el 1 es un vector, o sea es un elemento de Q y que es lo que ocurre… con la ponderación… multiplicación de los reales… raíz de 2 por 1 es raíz de 2 y esto no está en Q y la ponderación, eso debiera estar en Q porque la ponderación como esta definida: tomo un elemento del conjunto de escalares y un elemento del espacio de vectores y esto tiene que parar en el espacio de vectores, entonces con la ponderación-multiplicación número real esto no es así, entonces, bueno ahora se me viene otra duda, uno se tiende a cuestionar cosas que la deja peor, pero… si estoy diciendo ponderación… si digo ponderación, estoy diciendo que est6a es una función producto cruz entre el espacio, el conjunto de escalares el espacio de vectores al espacio de vectores, al decir ponderación estoy diciendo que es una función con este dominio y este recorrido, entonces si digo ponderación multiplicación por escalara, esta mal que diga ponderación porque no cumple que es una función producto cruz entre este espacio y éste.

[89E] **:** Claro, lo que pasa es que la ponderación debiera tener un primer axioma que la ponderación debe ser una operación cerrada, entonces que es lo que le esta pasando, qué está viendo usted ahí… usted tiene definida una ponderación aquí ¿la ponderación es cerrada o no es cerrada?

[90ES9] **:** No es cerrada.

[90E] **:** Entonces eso hace que en el fondo no haya ponderación eso es lo que esta cuestionándose usted.

[91ES9] **:** Sí, lo que quiero decir con esto es que, no es una ponderación al decir es una ponderación, independiente de lo que sea esto, estoy definiendo primero que es cerrado.

[91E] **:** Estoy haciendo un abuso de lenguaje o de las cosas… por lo tanto cuál es la respuesta a la pregunta.

[92ES9] **:** Con esta ponderación, que… ponderación…

[92E] **:** Si quiere… aquí, uno debiera definir una ponderación, o sea yo defino esto como ponderación, pero a la ponderación yo le tengo que exigir una cosa mínima, ¿Cuál es la cosa mínima que le debo exigir a una ponderación? Como un axioma 1 al empezar a hablar.

[93ES9] **:** Que sea cerrado.

[93E] **:** Entonces yo definí una ponderación, ahí está la ponderación, esa ponderación no cumple el axioma mínimo ¿Cuál es el axioma mínimo? O que este bien definido, cerrado significa bien definido, eso es lo que esta pasando a su problema, así que no es que estemos hablando con tanto abuso, sino que depende de ponderación, que no cumple los requisitos, por lo tanto ¿Cuál es su respuesta a su pregunta?

[94ES9] **:** Bueno me pregunto, ¿habrá, existirá una ponderación tal que IR sea un espacio vectorial sobre Q?.

[94E] **:** Pero aquí estamos trabajando con lo usual.

[95ES9] **:** Bueno, entonces la respuesta es más simple: no, porque si trabajamos con lo usual este sería el contraejemplo.

[95E] **:** Bien, ahora si no queremos pensar en lo usual, pero no es el caso de esta entrevista, usted podría tratar de buscar una y chequear si existe una ponderación que hace que eso sea espacio vectorial, sería otro trabajo muy extenso, porque la justificación sería a lo mejor demasiado larga para encontrarla, pero es una buena intención, buscar una ponderación que a lo mejor lo sea, pero aquí como no hay nada, tiene que apuntar a lo usual, entonces la respuesta no me la escribió.

[96ES9] **:** Por lo tanto, bueno que podría decir, IR no es un espacio vectorial sobre Q, pero ¿Por qué?, porque la ponderación no está bien definida, por lo tanto, IR no es un espacio vectorial sobre Q, al otro lado sí, bueno la ponderación es cerrada, curiosamente le llamé igual como usted la definió acá, pero no pusimos de acuerdo, mentalmente, bueno la ponderación esta bien definida, la suma es la usual en IR, todo usual… claro todo se cumple aquí.

[96E] **:** ¿Por qué?

[97ES9] **:** Claro, hay distributividad, de la ponderación y la suma de vectores, de números reales o sea racionales, etc., etc., los axiomas del…

[97E] **:** Escríbame eso…

[98ES9] **:** Se cumplen los axiomas correspondientes.

[98E] **:** ¿Por qué al estudiante le cuesta identificar que estas son dos preguntas tan distintas?, como recién se inicia la teoría de espacios vectoriales, estudiantes creen que es la misma pregunta, claramente usted dijo que no eran la misma pregunta, ¿Dónde cree usted que radica la dificultad para eso?, porque ellos dicen: “ah, es lo mismo”.

[99ES9] **:** Es que cuando uno piensa en la ponderación y la suma usual… uno ve a Q y a IR tan iguales, no es como decir es un espacio vectorial y los escalares que se ponderan son muy distintos a los vectores de este espacio de vectores que en realidad Q está contenido en IR, entonces digamos los escalares y los vectores son muy parecidos, en realidad… uno ve a Q y a IR… a ver, uno contenido en el otro.

[99E] **:** Yo creo que ahí esta el problema.

[100ES9] **:** Y las ponderaciones y las sumas son las que uno trabaja en Q y en IR… pienso que esa es la mayor dificultad, que son tan parecidos.

[100E] **:** Que se confunden, bien… ya veamos.

Pregunta 7

[101ES9] **:** Números reales sin el cero son grupo abeliano con la operación suma definida como sigue. como la multiplicación de números reales, la suma mes la multiplicación. es un grupo abeliano, con la operación suma definida como sigue, definir la otra operación multiplicación por escalar sobre un cuerpo K para que IR sin el 0 sea espacio vectorial sobre este cuerpo con estas dos operaciones.

[101E] **:** Está claro lo que se pide…

[102ES9] **:** Bueno, mi intuición nuevamente me dice que uno podría considerar K como los números reales… puedo estar equivocado.

[102E] **:** Anotémoslo, fue la primera aproximación.

[103ES9] **:** Y lo único que se me viene a la mente es el producto usual en IR, a ver, no quise decir eso, con la suma en IR, considero K con la suma usual, no con esa. Entonces, ya habría que ver si con esto es un espacio vectorial sobre K, o sea los escalares son elementos de K y los vectores son números reales menos no nulos… a ver, bueno lo que debe cumplir la ponderación, vamos a ponerle así mejor haciendo diferencia, debiera ser al revés porque esta es la usual, pero esta es la ponderación, suma usual, entonces yo debería ver si esto es cerrado, IR sin el 0 esto debe llegar a IR sin el 0, que pasa si tomo el 0 aquí, a no, que estoy haciendo… un espacio vectorial sobre K y tomo número real, voy a tener que dar muchas explicaciones después de esto, dije que esta era la suma, bueno esto esta bien definido, ya porque le puse 0.

[103E] **:** ¿Va a tomar solamente el escalar 0? y cuando se toma otro escalar, como le queda la definición.

[104ES9] **:** Cuando tomo otro escalar.

[104E] **:** Claro, para yo entender como lo está pensando y esa es la usual, es un poco enredado.

[105ES9] **:** Sobre un cuerpo K.

[105E] **:** Cuénteme que le pasó, para yo ver qué está pasando.

[106ES9] **:** Es que estaba pensando en las propiedades que debe cumplir para que sea espacio vectorial sobre K, con esa ponderación, como primer intento, bueno que no debería haber cierta diferencia, pero pensé rápidamente y ligeramente pero multiplicar por 0 y eso es 0 y me iba a caer en los reales sin el 0, pero estoy definiendo la suma usual como la ponderación, entonces me quedé con la idea de ponderación multiplicación y, cómo lo definí como la suma, seguí pensando en la multiplicación y por eso ocupe el cero para ver que no era cerrada, pero no es la multiplicación es la suma.

[106E] **:** Tiene una ponderación ahí, valientemente definida, ahora ¿Cómo sigue?

[107ES9] **:** Pero esta ponderación tiene un problemita, no está bien definida porque yo puedo tomar en K, el inverso de x, y como la definí seria –x ponderado con x es –x + x y esto es 0, luego, por lo tanto, la ponderación que… mi primer intento no está bien definida, por lo tanto, IR menos el 0, no podría ser un espacio vectorial sobre K, con esa ponderación.

[107E] **:** En su primer intento, que llama usted…

[108ES9] **:** Ahora, uno podría seguir con el mismo espacio vectorial y buscar otra ponderación, para que descartar el espacio vectorial, definir la otra operación multiplicación por escalar. bueno pensaba en la multiplicación, pero no sirve, pensaba en una idea pero, como se llama esto, es K o sea IR con la multiplicación usual, pero lo que no se cumple aquí es, creo que la distributividad, elemento en K y sumo dos vectores, esto es x por a por" b" y esto es x por a por b, esto podría llamarlo como x a+b esa definición, entonces busco un contraejemplo, rápidamente porque uno dice, no necesariamente esto va a ocurrir, buscar un contraejemplo, entonces uno puede tomar cualquiera, x puede ser 1…2 y a sea 1 y, entonces tengo 2 por 2 cuatro, por un lado y acá tengo 3, entonces esta ponderación no cumple distributividad, pero además estoy pensando que además no está bien definida, porque estoy tomado aquí la ponderación como el producto usual, entonces, en particular si tomo x = 0, al ponderar por cualquier vector o número real distinto de 0 eso va a ser 0, luego me voy a caer en el recorrido tal que la ponderación está bien definida, que es los reales menos el 0, entonces antes de haber hecho cualquier cosa, no está bien definida la ponderación… así que parece que me voy a demorar mucho más, pero por lo menos lo pensé así.

[108E] **:** Bien, vamos a quedar hasta aquí, porque ahora hay clases aquí y nos quedan 3 preguntas.

Video ENTREVISTA – ESTUDIANTE 10

Pregunta 1

[1E] **:** Si quiere me va comentando como va a ir respondiendo o las dudas.
[1ES10] **:** Ya.

[2E] **:** Diga
[2ES10] **:** Bueno para ver si es espacio vectorial tengo que ver que sea cerrado….la ponderación se mantenga ahí, y esas cosas hay que ver, que se asocie….

[3E] **:** Vamos viendo.
[3ES10] **:** Y esas cosas las, las que uno ve normalmente para ver que funcione. Bueno, es cerrado para la suma porque como esta definida…. Sirve. También la ponderación está bien.

[4E] **:** ¿Por qué dice que está bien?
[4ES10] **:** Porque está en R2 ¿cierto?

[5E] **:** Claro, sí…
[5ES10] **:** Porque como está definida la ponderación, funciona.

[6E] **:** Ya, O.K.
[6ES10] **:** Y a ver que se asocia, claro x y lo asocio a (a,b)+(c,d), esto me va a dar 2a+2c-b-c, sería 2d, sí. Éste sería 2b, sí, y después acá me quedaría 2x menos en a remplazando, ahí sí.

[7E] : Entonces…
[7ES10] **:** Ahora aquí. Eso que quedaría la suma…

[8E] **:** ¿Que operación hay entre esos paréntesis? o no hay nada, ¿Entre esos paréntesis, que operación está considerando? Porque ahí no hay nada, yo digo ¿Qué está pensando?

[8ES10] **:** Sí, me como las… letras…

[9E] **:** No se preocupe, yo le……
[9ES10] **:** 2y después me queda 2b que sería este de acá, menos el x, menos el a y ahora me tendré que devolver…. Es que estas cosas es más fácil hacerlas al revés.
[10E] **:** Como usted tenga su estrategia ahí……
[10ES10] **:** Un paréntesis.

[11E] **:** ¿Paréntesis?
[11ES10] **:** 2 veces aquí…no son iguales.

[12E] **:** Entonces.
[12ES10] **:** Entonces no sirve.

[13E] **:** Entonces cuál es su respuesta a raíz de eso.
[13ES10] **:** Esto va a ser distinto.

[14E] **:** Y…
[14ES10] **:** Si yo hago (x,y)+(a,b) y después le hago el (c,d).

[15E] **:** Escríbalo…
[15ES10] **:** Entonces no es espacio.

[16E] **:** Vamos a pasar a la otra, más operaciones diferentes.

Pregunta 2

[16ES10] **:** Las funciones de Rn, las siguientes operaciones…

[17E] **:** Ya…
[17ES10] **:** La ponderación, la evalúo… qué axiomas faltan a R para que sea un espacio vectorial. Bueno, se cumplen muchos axiomas, si es grupo abeliano es cerrado para la suma también es cerrado para la ponderación esta bien hecha, un elemento de R con una función.

[18E] **:** Entonces…
[18ES10] **:** La asociación de elementos está dada porque es grupo abeliano.

[19E] **:** Perfecto.
[19ES10] **:** Además conmutan, todo eso.

[20E] **:** Todo eso lo tenemos dado.
[20ES10] **:** Claro, bueno que, entonces, es que el hecho de que sea grupo abeliano y la ponderación esté definida es espacio vectorial.

[21E] **:** No faltaría nada. Ponga eso…. Su argumento. Vamos a ver ahora si existe este espacio vectorial particular.

Pregunta 3

[21ES10] **:** Ese nos preguntaron el otro día.

[22E] **:** Sí…
[22ES10] **:** Tuvimos harto rato planeando, ayer porque….

[23E] **:** ¿Por qué…….con un elemento hay?
[23ES10] **:** El cero.

[24E] **:** El cero no es cierto, ahora la pregunta es con dos.
[24ES10] **:** Sí.

[25E] **:** Con uno sabemos que sí, estamos totalmente de acuerdo, ahora la pregunta es con dos.
[25ES10] **:** Sería Z2.

[26E] **:** Ya…
[26ES10] **:** Como espacio vectorial tiene sólo 2 elementos.

[27E] **:** Entonces…
[27ES10] **:** Tiene sólo dos representantes para todos sus elementos.

[28E] **:** Y…
[28ES10] **:** Eso es. Sobre…. Da lo mismo el que sea…puede ser Z….

[29E] **:** Sobre quién, tiene que ponerle ahí.
[29ES10] **:** No, sobre, sobre Z.

[30E] **:** Bien…
[30ES10] **:** Aunque sería, es que no puedo ponerle un anillo cualquiera; Z no es un cuerpo.

[31E] **:** Entonces…
[31ES10] **:** Ahí está, sobre R.

[32E] **:** ¿Sobre R?
[32ES10] **:** Sí.

[33E] **:** Póngalo mas al lado porque no noto bien que letra es esa.
[33ES10] **:** En los reales, sí porque sí no sería menos.

[34E] **:** ¿Sería otra cosa?
[34ES10] **:** Sería un módulo no más.

[35E] **:** ¿Un módulo?
[35ES10] **:** Sí.

[36E] **:** Muy bien, otro…

Pregunta 4

[36ES10] **:** Los polinomios, esa integral me da cero, porque la asociación me funcionaría porque la integral se separa con suma y se vuelve ajuntar y todo eso no hay problema.

[37E] **:** Y, entonces…
[37ES10] **:** Entonces se asocia bien.

[38E] **:** Ya…
[38ES10] **:** Si multiplico un escalar sale o entra …

[39E] **:** Sí, y eso lo sabe por qué usted.
[39ES10] **:** Por la definición de la integral.

[40E] **:** Con las propiedades de la integral ¿no es cierto?
[40ES10] **:** La ponderación funciona.

[41E] **:** Entonces…
[41ES10] **:** Asocia también por propiedad de integral.

[42E] **:** O.K.
[42ES10] **:** Y, es cerrada para la suma.

[43E] **:** Entonces…
[43ES10] **:** Los polinomios, son cerrados, por lo mismo por, por propiedad de integral, al final por propiedad de la integral salen todas las propiedades.

[44E] **:** Ya, entonces….
[44ES10] **:** Es un espacio vectorial.

[45E] **:** Póngale lo que me acaba de decir, que ese es su argumento, ¿cierto? Muy bien, esta otra.

Pregunta 5

[46E] **:** ¿Se entiende la pregunta?
[45ES10] **:** Sí.

[47E] **:** Ahora cuénteme que esta pensando.
[46ES10] **:** Pensando en que como son los espacios que me generan la suma estaba pensando, y además que están todos sobre el mismo cuerpo entonces debería resultar por el hecho de que esté trabajando sobre el mismo cuerpo. Yo creo que es verdad.

[48E] **:** ¿Cuál sería su argumento para afirmar esa respuesta?
[47ES10] **:** Bueno, están sobre el mismo cuerpo entonces todo, cuando están sobre el mismo cuerpo todo funciona como más o menos bonito, la suma se puede definir bien y todo. Y si yo veo el espacio generado por esta suma, por ejemplo si yo tengo la base de V y la base de W, yo tomo todos los elementos y les quito los que, los de W que son ld sobre los de V, y para ver, en la base de esta hago lo mismo, entonces si son iguales, los ld entre sí, entonces los que son que son ld de Z con, con V deberían ser lo mismo o combinaciones más o menos de los mismos elementos que deberían ser de W, comparándolos con V.

[49E] **:** Y eso le permite asegurar que es….
[48ES10] **:** Claro, entonces, yo creo que la base que me va a generar van a ser los mismos espacios.

[50E] **:** Anóteme eso de alguna manera.
[49ES10] **:** No soy buena para escribir las cosas que pienso, siempre las escribo mal.

[51E] **:** Para yo acordarme después. Por lo tanto, eso es verdad, ¿escribió la respuesta?
[50ES10] **:** Claro, "luego generan los mismos espacios".

Pregunta 6

[51ES10] **:** No había leído la última parte. Aquí hay 2 preguntas en forma paralela esta es verdadera….

[52E] **:** ¿Es la misma pregunta esa?
[52ES10] **:** No, y ésta es falsa.

[53E] **:** ¿Y por qué esa es verdadera y esta es falsa?

[53ES10] **:** Porque yo, porque la ponderación me falla, porque si yo pondero Q con un elemento de R, tendría que seguir perteneciendo a Q, es como si yo agarro el ½ y el 2pi ,me queda pi y NO esta en Q.

[54E] **:** Me tiene que justificar ahí. ¿Qué le estaría fallando ahí esencialmente?
[54ES10] **:** La ponderación.

[55E] **:** La ponderación.
[55ES10] **:** Sí, es que R es mayor que Q entonces nunca voy a poder mantenerme abajo al ponderar.

[56E] **:** ¿Un subcuerpo?
[56ES10] **:** Claro. Y este es verdadero, porque cumple con todos los axiomas, cumple con todas las propiedades.

[57E] **:** ¿Las propiedades de qué?
[57ES10] **:** De espacio vectorial.

[58E] **:** Ya.

Pregunta 7

[59E] **:** ¿Se entiende la pregunta?
[58ES10] **:** Sí.

[60E] **:** Ahora me tiene que ir contando como va a pensar, para responder…
[59ES10] **:** Tendría que buscar un alfa cualquiera en K, y que al ponderar, yo definir una ponderación que al hacerla siga estando en los reales menos el cero.

[61E] **:** ¿El K lo va a tomar como alguien en particular?
[60ES10] **:** No sé, se puede tomar sobre, podríamos tomar sobre el mismo incluso dice ahí.

[62E] **:** Sobre un cuerpo tiene que ser, sobre un cuerpo K.
[61ES10] **:** Sobre R podría ser, o sobre Q, pero en general sobre R es más fácil porque es como más grande.

[63E] **:** Entonces…
[62ES10] **:** La multiplicación usual en R, me puedo tomar el cero y multiplicarlo y no me estaría sirviendo porque estoy trabajando en los reales menos el cero….

[64E] **:** Claro…

[63ES10] **:** Entonces ahí también…

[65E] **:** ¿no podría ser esa?
[64ES10] **:** Claro.

[66E] **:** Pero ahí no estamos tomando el cero ¿No es cierto?
[65ES10] **:** Claro por eso, no pero es K si pondero por el cero se me va a salir si hago la multiplicación normal.

[67E] **:** Entonces esa ponderación que está pensando, le está sirviendo?
[66ES10] **:** No, tendría que buscar otra.

[68E] **:** ¿En qué está pensando, para hacerlo, en operaciones?
[67ES10] **:** Claro, que operaciones me pueden servir… es que en todas las que pienso, el cero me falla, si ese es el problema.

[69E] **:** En qué ha pensado, anóteme las que ha pensado y le han fallado, haber…
[68ES10] **:** En hacer por ejemplo: alfa x+y =alfa x, después ponerle el y, cosas así, ir cambiando, ir ponderando solamente uno de los elementos, cosas así, por como está definida pero, el hecho de que se me definan multiplicaciones, el cero, siempre me….

[70E] **:** Le está arrojando el cero, y eso… ¿No puede ser cierto?
[69ES10] **:** Ese es el problema.

[71E] **:** Ese es el gran problema, de ese problema.
[70ES10] **:** Esto no sirve.

[72E] **:** ¿En qué otras podría pensar? ¿Por dónde está buscando ideas?, para saber.
[71ES10] **:** Tratando de ver cómo puedo hacer multiplicar cero y que no me de cero, en realidad eso estoy pensando, porqué ese es el caso que falla todo el rato.

[73E] **:** El tope que tiene.
[72ES10] **:** Claro.

(pausa)

[74E] **:** Si quiere pasamos a otra y después volvemos a ésta, como usted quiera.
[73ES10] **:** Es que no está funcionando, no está funcionando mucho, es que el hecho de que sea multiplicación, como que…

.
[75E] **:** ¿Cómo se ve esa suma?
[74ES10] **:** ¿ahhh?

[76E] **:** La suma de dos…
[75ES10] **:** Claro, la multiplicación. Es que la única opción que me funcionaría sería como sumarle acá, pero, no creo que me serviría para que fuera espacio vectorial, o para que no aceptara lo que está pasando con estos dos o también si le estoy sumando tampoco puedo asegurar que no me de el cero, no sé…. No sé compensen.

[77E] **:** N se compensen, igual podría llegar a dar cero, buen punto.
[76ES10] **:** Entonces tampoco me sirve, tampoco me sirve sumarle algo acá porque tampoco funcione, entonces por eso…

[78E] **:** El mismo problema todavía….
[77ES10] **:** Sí, el cero es el problema. No realmente no sé cómo hacer que esto, no sé cómo hacer que de un espacio vectorial.

[79E] **:** ¿Qué no se cero eso?
[78ES10] **:** (afirmación)

[80E] **:** Dejémoslo un rato.
[79ES10] **:** No me funciona….

[81E] **:** Esto lo dejamos para el último.

Pregunta 8

[82E] **:** ¿Quién es W ?
[80ES10] **:** En R3.

[83E] **:** Ese es W, yo le pido que escriba 2 vectores de W ahí, escríbalo al ladito.
[81ES10] **:** El 1-1, y el 2 con el 1.

[84E] **:** Muy bien, entendió bien el W.
[82ES10] **:** Cuáles el vector nulo de W, el 0 0 1.

[85E] **:** Ya.
[83ES10] **:** Menos b.

[86E] **:** ¿Qué significa eso?
[84ES10] **:** Son ld.

[87E] **:** Ya.
[85ES10] **:** Una base para W, sí.

[88E] **:** ¿Cómo podría asegurarlo?
[86ES10] **:** Porque son li, y tienen 2, en W al final, en W los que hacen mover los elementos es el a y el b no más.

[89E] **:** Perfecto, muy rápidamente.

Pregunta 9

[87ES10] **:** Este es el generado por el 1,0,1 y el 0,1,1.

[90E] **:** ¿De dónde sacó eso?
[88ES10] **:** Puse los tres vectores, escaloné, y se me eliminó uno.

[91E] **:** Haa…
[89ES10] **:** Ahora, y éste es lo mismo que éste, porque a través de por operaciones puedo cambiar para allá…y me quedan, serían iguales, V igual a W eso sí. Haber esto serían, los x y z que suman cero, el otro no porque dice que la suma de los elementos tiene que sumar cero y acá tengo el 1 y el 1 y eso suma 2.

[92E] **:** ¿Y qué puede decir ahí?
[90ES10] **:** Que el vector (1,0,1) pertenece a U, y 1+1 es distinto de cero, entonces U es igual a W, pero U es distinto de V, y W también es distinto de V, también tengo el mismo, no son iguales.

[93E] **:** Bien.

Pregunta 10

[91ES10] **:** Una base para esto.

[94E] **:** Aquí estaba con las operaciones, y ¿Qué pasó con las operaciones. No siguió.
[92ES10] **:** No es que va quedar igual, no sacaba nada con seguir haciendo algo.

[95E] **:** Ya.

[93ES10] **:** (sacando cuentas) -4y-x+t=0 x, haber el t lo vamos aponer, el y ahí, no el z va a ser x+2y. Y el t va a ser 4y+x, entonces la base (1,0,1,1) y el (0,1,2,4).

[96E] **:** ¿Qué tipo de objetos tenía V?
[94ES10] **:** Matrices, así, lo escribo bien… El "x" aquí, el "y" era la segunda posición….me va a dar cero; después tengo el "y", el "z" que es el tercer vector, y después siempre se me olvida devolverme…..el x el y el z el t.

[97E] **:** Esa es una base para….
[95ES10] **:** Para V.

Pregunta 11

[98E] **:** La última y volvemos a la….
[96ES10] **:** A la otra que estaba pegada. a,b en (resolviendo). Hay que ver la independencia lineal entre los elementos?

[99E] **:** Claro si S1 es li…
[97ES10] **:** li respecto a s2 o a los elementos.

[100E] **:** A los elementos, es un conjunto li o ld.
[98ES10] **:** Son ld, …son li digo.

[101E] **:** Son li.
[99ES10] **:** Sí.

[102E] **:** Ahora vamos al otro.
[100ES10] **:** Es que estaba haciendo eso, pensé que a lo mejor podía ser otra la pregunta.

[103E] **:** Que era combinado así, no; cada uno por separadito.
[101ES10] **:** Entonces, uno a la alfa, dos a la beta, uno a la alfa, uno más 2 a la beta igual cero, y uno, más uno igual a cero. Los uno, uno más uno, eso no pasa nunca.

[104E] **:** No.
[102ES10] **:** Entonces, no puedo, no puede….

[105E] **:** En R no.
[103ES10] **:** No, estoy en R así que…

[106E] **:** ¿Dónde pasaría eso? En…
[104ES10] **:** En Z2

[107E] **:** Z2. ¿El caso de Z2?
[105ES10] **:** No, estoy trabajando en R, entonces no, no es li. No es que no sea li, no es espacio vectorial.

[108E] **:** ¿Por qué?
[106ES10] **:** Porque para ver li yo tendría que los 2 sean cero para que me dé la suma de los dos cero, pero aquí, ya la suma no estaría como bien definida, porque la suma me la definieron de esa forma, y aunque yo ponga, si pongo cero acá, de que no son li no son…. Hay pero a lo mejor le puedo poner, porque esto no es porque yo no escogí el alfa y el beta, es para cualquier alfa y beta arbitrario, el uno a la alfa siempre me va dar uno y el uno a la beta siempre me va a dar uno, y eso siempre va a ser cero.

[109E] **:** Claro, y usted está trabajando con estos vectores en particular, no con un vector genérico, un (a,b) y un (c,d); entonces la pregunta es en base a esto.
[107ES10] **:** Yo creo que ese… no es subespacio, de V.

[110E] **:** No, esos son conjuntos no más, ese dos es un conjunto, un conjunto.
[108ES10] **:** No tiene que ser subespa……

[111E] **:** No, es un conjunto, este S1 es un conjunto formado por 2 vectores, entonces, ver si ese conjunto es li, este conjunto formado por esos dos vectores.
[109ES10] **:** No es li.

[112E] **:** ¿Cómo es entonces?
[110ES10] **:** Es nada en realidad creo, es un conjunto nada más.

[113E] **:** Es un conjunto. Entonces no es…completemos la frase…
[111ES10] **:** No es li.

[114E] **:** Entonces, nos quedaría ésta haber si podemos echar …
[112ES10] **:** Pensar eso…

Pregunta 12

[115E] **:** Un vistazo, a la pendiente… Cuénteme eso que está pensando.
[113ES10] **:** Es que en realidad cuando yo pienso en ver que sea espacio vectorial, para hacerla como más, en poco espacio, yo pienso como más en verlo como que es subespacio porque, incluso con uno estoy lista, entonces estaba pensando en sumar x+y+alfa veces otro y que me…. Ver que estuviera ahí.

[116E] **:** Que fuera en los R-{0}.
[114ES10] **:** Claro. No ,realmente no… no sé como evaluarlo.

[117E] **:** Ya no importa.
[115ES10] **:** Yo diría que no,…. si me preguntan ¿es?; si me preguntan: ¿se puede definir?, yo diría que no.

[118E] **:** ¿Y podría argumentar por qué?, le es más fácil argumentar eso?
[116ES10] **:** Porque cualquier multiplicación, como el hecho de que la suma sea una multiplicación, al multiplicar por otra cosa, siempre me va a quedar cero si esa otra cosa es cero.

[119E] **:** Anote ahí, ese es el argumento que está dando…
[117ES10] **:** Estaba pensando en otra cosa ahora, en los ejemplos como los que habíamos visto anteriormente, la multiplicación por escalar la definía con potencia, y ahí una potencia elevaba a cero nunca es cero, eso sí podría funcionar, yo creo, haber. Porque si yo hago: alfa x+y = alfa x y. Esto podría definirse como alfa y, x y a la alfa, y si esto es cero, bueno aunque fuera, no importa lo que sea….

[120E] **:** ¿Y van a ser cero esos de abajo?
[118ES10] **:** No, pero sin importar lo que fuera incluso alfa puede ser cualquier número, y eso pertenece a R-{0}, ahí si me funcionó.

[121E] **:** ¿Cómo descubrió eso?
[119ES10] **:** Porque miré los otros ejemplos.

[122E] **:** Entonces sería una alternativa, ¿Y esa función?
[120ES10] **:** Sí.

[123E] **:** Entonces cuál sería su definición, hubiese definido, otra. Cuál es su definición precisa y concreta.
[121ES10] **:** La suma x por y, y la multiplicación… Ese x, elevado a alfa.

[124E] **:** ¿Qué gracia tiene eso? ¿Qué andaba buscando usted que tuviera eso?
[122ES10] **:** Que al ponderar, quedara, quedaran R-{0}, eso.

[125ES10] **:** Sí, Maurren, es eso, está bien. Muchas gracias Maureen, muy agradecida de que me haya respondido estas preguntas.