INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada

Unidad Legaria

Resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento: de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones

Tesis para obtener el grado de
Doctorado en Matemática Educativa

Presenta:
Astrid Morales Soto

Director de Tesis
Dr. Francisco Cordero Osorio

Febrero 2009

México, DF.

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 23 del mes de enero de 2009 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones"

Presentada por la alumna:

Morales	Soto	Astrid Marlene
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	5	0	4	1	6

aspirante al grado de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Francisco Cordero Osorio

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico

Dr. Gustavo Martínez Sierra

Dra. Gabriela Buendía Ábalos

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 06 del mes febrero del año 2009, el (la) que suscribe Astrid Marlene Morales Soto alumno (a) del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A050416, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Francisco Cordero Osorio y cede los derechos del trabajo intitulado Resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento: de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección ammorale@ucv.cl. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Astrid Marlene Morales Soto

Índice

Glosario

Socioepistemología

El término socioepistemología plantea un corrimiento al problema del saber, lo contextualiza, lo sitúa. De ahí que podamos decir que la socioepistemología es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente, las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, sobremanera, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La socioepistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión**.**

Resignificar

Es un constructo socioepistemológico, que quiere decir la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, es decir, será el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma de acorde con lo que organizan las participantes.

Matemática funcional

Matemática funcional quiere decir un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad. Todo ello en oposición al conocimiento utilitario.

Predicción

La predicción es una práctica social. Es una actividad racional que permite determinar el estado futuro de un sistema de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que la generan y los efectos que produce

Graficación-Modelación

Es una práctica institucional que genera conocimiento en la situación de transformación, en que en esta situación tiene el rol de ser el argumento rector.

Situación de Modelación del Movimiento

La situación de modelación del movimiento es someter a ciertas actividades a los alumnos donde se utilice tecnología, como las calculadoras gráficas y sensores en que se identifican a las gráficas como movimientos

Discurso Matemático Escolar

El discurso matemático escolar es la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la enseñanza y lo que es la matemática

Serie de Taylor

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ de clase C^{∞}. Si "*a*" pertenece al intervalo "*I*", y $(a+h) \in I$ entonces podemos escribir, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + .\frac{f''(a)}{2!}\cdot h^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\cdot h^{n-1} + r_n(h)$$

donde $r_n(h) = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta_n h)}{n!}\cdot h^n$, con $0 < \theta_n < 1$

La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot h^n\right]$ se llama Serie de Taylor de la función *f* en torno al punto *a*.

Toda función C^{∞} en un intervalo *I* posee una Serie de Taylor en cada punto interior $a \in I$.

Función Analítica

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto *I*, se llama *analítica* cuando es de clase C^{∞} y para todo $x_0 \in I$ $\exists r > 0$ tal que $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ implica que $x \in I$ y que: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots. + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots.$

Así mismo, el valor de una función analítica en cada punto está dado por una serie de potencias, a saber, una Serie de Taylor.

Resumen

La problemática fundamental que atiende la Matemática Educativa es la confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. Para entender la naturaleza de esa confrontación, la aproximación socioepistemológica desarrolla estrategias de investigación orientadas a formular epistemologías que analicen las circunstancias que favorecen la construcción social del conocimiento matemático. Estas epistemologías se fundamentan en prácticas sociales, en contraposición de metáforas del objeto matemático. Se busca que las prácticas sociales favorezcan el establecimiento de relaciones funcionales, alejadas del utilitarismo, entre los diversos tópicos del saber matemático (Cordero, 2006). Con esta visión, la socioepistemología ha ayudado a entender que la matemática escolar no tiene marcos de referencia para que la matemática se resignifique. Nuestra investigación consiste en resignificar la Serie de Taylor a través de una situación de modelación del movimiento (SM-M). En la Socioepistemología se formula una epistemología donde la predicción es el argumento rector del diseño de situación, con el cual se resignifica la analiticidad generando procedimientos para comparar dos estados de una cantidad que varía continuamente, según las experiencias institucionales de los participantes. Por otra parte, la SM-M genera una categoría de 'uso de las gráficas' propio de la modelación escolar. Por ello, la pregunta de investigación fue ¿Cuál es el "uso de las gráficas" cuando se resignifica la Serie de Taylor en SM-M? El uso de las gráficas, a través de su funcionamiento y forma, provee de elementos que robustecen la problemática de enseñanza y aprendizaje y de indicadores para el rediseño del discurso del Cálculo escolar. La puesta en escena del diseño de situación se realizó utilizando aspectos metodológicos de la ingeniería didáctica y con estudiantes de matemáticas de nivel superior.

ABSTRACT

The fundamental problem addressed by the Matemática Educativa is the confrontation between the mathematical work and school mathematics. To understand the nature of this confrontation, the socioepistemologic approach develops research strategies aimed at devising epistemologies that analyze the circumstances that favor the social construction of mathematical knowledge. These epistemologies are based on social practices, as opposed to metaphors of the mathematical object. It is intended that social practices favor the establishment of functional relationships, away from the utilitarianism, among the various topics of mathematics knowledge (Cordero, 2006). With this vision, Socioepistemology has helped to understand that school mathematics lack frames of reference to *re-signify* mathematics. Our research consists on re-signifying the Taylor Series through a movement modeling situation (M-MS). An epistemology is formulated within Socioepistemology; in it prediction is the argument guiding the design of situation, which in turn re-signifies analyticity by generating procedures to compare two states of a quantity that varies continuously, based on the institutional experiences of the participants. On the other hand, the M-MS generates a category of 'use of graphics' proper of school modeling. Hence, the research question was What is the "use of graphics" when re-signifying the Taylor Series in M-MS? The use of the graphics, through its operation and form, provides elements that strengthen the teaching and learning problematic and also indicators for the redesign of the school's Calculus discourse. The staging of the situation design was made by using methodological aspects of Didactical Engineering and with higher-level math students.

Introducción

Este trabajo, a través de diversas reflexiones, ha tenido su nacimiento y motivación en la inquietud por la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, desde allí surgen interrogantes como por ejemplo, ¿cómo se está enseñando la Matemática hoy en día? o ¿cómo nosotros, los docentes, estamos manejando nuestros conocimientos? O en consecuencia ¿qué tipo de conocimiento debe de manejar un docente de matemáticas?; siguiendo quizás con varias interrogantes en el mismo sentido, es a través de estas reflexiones que comienzan a emanar otras, como por ejemplo, si acaso el problema de la enseñanza de la matemática pudiera mejorar por el hecho de que la persona que en un futuro enseñe tenga un vasto conocimiento de ella, en otras palabras, que sepa mucha matemática, en consecuencia de esta reflexión llegué a otra, que el poseer un vasto conocimiento en matemáticas no bastaba sino mas bien habría que enfocar el conocimiento matemático a otras dimensiones.

El párrafo anterior sólo pretende dar cuenta de que una reflexión puede comenzar por una pregunta o inquietud muy sencilla, ingenua quizás, pero a través de ese inicio se pueden llegar a reflexiones más profundas. Desde este punto de vista las preguntas anteriores alcanzan otros niveles; cuestionarse por el conocimiento y por su construcción amplía la problemática y es en la disciplina de la Matemática Educativa que nuestras inquietudes iniciales son acogidas y desarrolladas.

Muchas investigaciones han abordado el problema de la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas y este trabajo no es la excepción pero lo que se quiere declarar es que este trabajo está desarrollado en Matemática Educativa y desde la Socioepistemología como aproximación teórica. El por qué esta aproximación y no otra tiene que ver con lo mencionado en el párrafo anterior, que es en donde se anidó la reflexión que se realizó, se comparte el hecho de preguntarnos por la construcción del conocimiento y de aquello que norma dicho conocimiento; en que las prácticas sociales son temas de estudio en la socioepistemología. Además, compartimos que el problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en algún sentido, es epistemológico y es desde allí donde se alberga nuestro punto de partida.

Particularmente este trabajo presenta una relación entre la Serie de Taylor y la predicción, cuyo objetivo es resignificar[1] dicha serie. Si nos centramos por un instante en la Serie de Taylor podemos percibir que, inserta en el sistema didáctico, tiene un tratamiento casi desapercibido tanto por la ubicación en el currículo como en su aspecto epistemológico: es justo a través de investigaciones socioepistemológicas que dan evidencias de la afirmación. Por otro lado la Serie de Taylor, en un sentido epistemológico, tiene sutilmente la idea de predicción, pero el tratamiento que se le da en la actualidad tiene que ver con el discurso de Cauchy, en que se mira su convergencia. Es por ello que se hace necesario hablar de la Serie de Taylor en el sentido de conocer sus inicios; su origen; cómo fue el tratamiento de ésta a través de la historia; y cómo fue desarrollada por matemáticos de aquellas épocas. En otras palabras, una mirada socioepistemológica descentraliza al objeto matemático en cuestión (la Serie de Taylor) y enfoca la atención aquello que norma su construcción (la práctica de predecir).

Sin embargo, en el discurso matemático escolar la Serie de Taylor es tratada solamente como un objeto matemático, adjudicándole un estatus de teorema que ensancha la lista de teoremas que se debe tratar en las materias de Cálculo Diferencial, pero no se logra así, visualizar la importancia que posee la Serie de Taylor cuando es interpretada como un modelo de predicción o en otras palabras que la Serie de Taylor es la expresión de la variación de cualquier cantidad que varía continuamente, en que dicha serie se ve reflejada en la analiticidad de las funciones.

Este trabajo apunta a resignificar la Serie de Taylor en una Situación de Modelación del Movimiento, es allí en que el binomio graficación-modelación juega un rol importante cuando se quiere predecir. Dicha resignificación se logra en una situación específica en que se debate entre su funcionamiento y forma, aquel debate lo provoca la predicción: manifestándose los significados, los procedimientos, los procesos y objetos en contextos argumentativos específicos de la situación.

La Socioepistemología trabaja cuatro dimensiones de manera sistémica, a saber: la didáctica, la cognitiva, la epistemológica y la social. Estas dimensiones se ven reflejadas

---

[1] Resignificación es un constructo socioepistemológico que se discutirá más tarde

en el diseño de situación que se elabora para luego ser aplicado. Es en este escenario, donde se ven las prácticas institucionales que los individuos manifiestan, a través de sus interacciones, y donde dejan evidencia de cómo se construye conocimiento.

La Socioepistemología aborda la problemática de que el discurso matemático escolar no es el adecuado y debe ser rediseñado puesto que no existen marcos de referencia donde pueda ser resignificado el conocimiento, es por ello que este trabajo aborda dicha problemática proporcionando un diseño de situación intencional, debido a que está inserto en el sistema didáctico, en que se ve plasmada la práctica social de la predicción como argumentación situacional con relación a la Serie de Taylor.

Así, esta tesis abordará cinco capítulos, a continuación describiremos lo que trata cada uno de ellos.

En el primer capitulo se plantean los antecedentes en que se describe la problemática alrededor de la Serie de Taylor y la pregunta de investigación.

En el segundo capítulo abordaremos el status epistemológico de la Serie de Taylor en un aspecto funcional por medio de un análisis histórico-epistemológico como también una revisión de textos tanto de otras investigaciones como de los trabajados en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile para finalizar con una reflexión desde una mirada a la Serie de Taylor como objeto matemático.

En el tercer capítulo se plantea el marco teórico de la socioepistemología que se aborda en este trabajo de tesis. Se discuten sus bases teóricas relacionadas con la problemática que conlleva la ausencia de un marco de referencia para resignificar la Serie de Taylor en el discurso matemático escolar.

En el cuarto capítulo se presenta la situación diseñada. Se pone a la vista un análisis a priori, luego la puesta en escena y un análisis a posteriori que permite plantear una epistemología revisada.

En el quinto capítulo se presentan las conclusiones finales, la contribución de esta investigación a la disciplina y a la reorganización de la obra matemática como también una mirada al nuevo estado de la problemática

En los anexos incluimos el diseño de situación que fue aplicado como también las transcripciones que surgieron de los tres grupos a los que se les aplicó dicho diseño.

Capítulo

I

ANTECEDENTES

Se formula la problemática y la pregunta de investigación, en el marco de la socioepistemología, considerando el estatus de la Serie de Taylor en la matemática escolar. Para ello se realiza un estado del arte orientado hacia las investigaciones que dan evidencia de epistemologías del Cálculo que destacan el pensamiento variacional como sustento para desarrollar un rediseño del discurso del cálculo escolar.

I.1 Problemática

El problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es mucho más complejo de lo que nos pudiéramos imaginar. Comunidades de investigadores y profesores han dado evidencias de ese hecho a través de estudios sistemáticos. La escuela francesa (Brousseau, 1997) abrió una perspectiva amplia del problema cuando enfocó la atención al sistema didáctico conformado por tres pilares (saber, profesor, alumno) pero enfatizando una unidad de análisis sistémica para entender los fenómenos didácticos con la interacción de estos tres pilares. Todo ello ha llevado a precisar que los procesos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática están inmersos en la producción y difusión del saber institucional propio del conocimiento matemático. Así, los fenómenos didácticos son de naturaleza epistemológica que responden a las diferentes formas de construir el conocimiento matemático en el sistema didáctico, y no de naturaleza pedagógica que responderían a problemas de educación del estudiante.

Para adentrarnos aún más en esta problemática es que queremos centrarnos en la rama de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo debido a que es en esta área que se encuentra orientada nuestra investigación, para ello daremos una mirada a cómo se está enseñando este tópico en el nivel superior.

I.1.1 Una mirada a la enseñanza del Cálculo

Situándonos en la enseñanza de nivel superior, podemos observar que en los planes de estudio de las carreras universitarias, los sectores curriculares de matemáticas tienen un carácter instrumental, en el sentido de que si recordamos que uno de los objetivos es “proporcionar al alumno los conocimientos fundamentales del cálculo diferencial e integral de una variable real que serán utilizados en la interpretación, planteamiento y resolución de problemas específicos de su carrera" hacen que la matemática sea un medio para lograr dicho objetivo. Ya es bastante conocido que la enseñanza tradicional del Cálculo se basa en la transmisión de conocimientos dando énfasis en el desarrollo de habilidades algebraicas y algorítmicas desatendiendo la comprensión de ideas, nociones y conceptos y la articulación de estos.

En Alanis (1996) podemos apreciar que destaca dos tipos de enseñanza del Cálculo, una es en cuanto al discurso, selección y organización de los contenidos a enseñar que tiene como objetivo que los estudiantes se apropien de las ideas fundamentales del Cálculo presentando dichos contenidos de una manera formal. Y el otro tipo de enseñanza respecto de los contenidos es que tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del Cálculo.

Algunos resultados de estos estilos de enseñanza están documentados desde hace algunas décadas, por ejemplo Alanis (1996) los menciona indicando que en Estados Unidos (1987) sólo el 46% aprobó el curso de cálculo a nivel collage de 600.000 estudiantes que lo cursaron. Por otro lado Dreyfus (1990) reporta que es común que los estudiantes aprendan a calcular primitivas pero no así aprendan a integrar, esto, en consecuencia, hace que los alumnos no reconozcan que algunos problemas de física sean típicos problemas de integración. Estos son algunos ejemplos que dan cuenta que los objetivos trazados de enseñanza no se están cumpliendo.

Sin embargo, hay una gran diversidad de investigaciones que muestran que el aprendizaje de los contenidos del Cálculo y el Análisis presentan ciertas dificultades de orden cognitivo y epistemológico. A continuación mencionaremos, por la importancia de las mismas, algunas investigaciones al respecto enfatizando las reflexiones que se han provocado y considerado en la enseñanza del Cálculo.

- Wenzelburge (1994) considera que:

  "El cálculo integral se introduce normalmente como el método inverso del cálculo diferencial, lo cual se puede justificar y comprobar desde el punto de vista matemático. Sin embargo para muchos alumnos permanece el concepto

abstracto de un Cálculo diferencial inverso sin significado ya que no puede relacionar fácilmente la derivación y la integración como tales procesos inversos. Solamente una construcción de conceptos que se apoya en la intuición y visualización hace que estos sean accesibles para los estudiantes".

- Dreyfus (1990)

  Los estudiantes aprenden los procedimientos del Cálculo (encontrar límites, diferenciación, etc.) en un nivel puramente algorítmico, construidos sobre imágenes conceptuales escasas. Las dificultades en la concepción de los procesos de diferenciación e integración pueden explicarse en términos de que los estudiantes carecen, necesariamente, de un nivel alto de abstracción, tanto del concepto de función (como un objeto), como de los procesos de aproximación.

- En Artigue (1991) se reportan factores que dificultan la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, a continuación mencionaremos algunos de estos factores:

  - La *formalización del Cálculo* provoca dificultades porque se introducen definiciones estructurales, lo cual pone en conflicto la mente del estudiante con sus concepciones intuitivas espontáneas.
  - De la misma manera que el punto anterior el *nivel altamente sofisticado* de las estructuras de los objetos en los fundamentos del Cálculo, tales como sucesiones y funciones, provoca dificultades cognitivas.
  - Los estudiantes llegan a obtener un nivel de éxito razonable en un cierto número de tareas algorítmicas; sin embargo, las concepciones desarrolladas por los estudiantes son pobres y las técnicas sutiles del Cálculo no son adaptadas.

- Artigue (1995, p. 97):

  …Estos estudios también muestran de manera clara que, frente a las dificultades encontradas, la enseñanza tradicional y en particular la enseñanza

> *universitaria, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio.*

Por otro lado trasladando nuestra atención de la enseñanza del Cálculo en un ambiente de aula podemos decir que nuestro sistema didáctico opera más o menos de la siguiente manera: la enseñanza tiene asignado un papel formativo puramente teórico, por otro lado los profesores tienen una "metodología" para ofrecer clases magistrales donde el alumno es considerado como un sujeto pasivo que asimila ideas de forma natural mediante el estudio de apuntes de clases y textos escolares (Marcolini, J & Perales, J, 2005). Esta observación sistemática nos lleva a reflexionar que estamos insertos en un sistema en que el alumno debe repetir lo que ve en clases llevando con ello a soslayar la reflexión que de ellos pueda surgir, dando cabida a ocupar razonamientos intuitivos y perceptivos; debido a que estamos trabajando en un "modelo de enseñanza" que no logra transmitir ideas matemáticas.

Alanís (1996; p.8) reporta que con los tipos de enseñanza del Cálculo que están predominando no se está logrando el objetivo de los cursos de matemáticas que es "mejorar el razonamiento de los alumnos" y para ello cita a Selden, et al (1989) en que menciona que estudiantes que acreditan un curso de cálculo, con calificación de C, son incapaces de resolver problemas no rutinarios en esta disciplina. Llegan a conjeturar que si la investigación la hubieran realizado con estudiantes de calificaciones A y B, los resultados no hubieran sido muy diferentes.

Esto nos lleva a preguntarnos ¿qué es lo que los alumnos realmente aprenden?, no podemos asegurar con certeza que estudiantes con muy buena calificación hayan aprendido los conceptos que se le enseñaron o dicho de otro modo que no se han apropiado de ellos.

I.1.2 El estatus del Cálculo y el discurso matemático escolar contemporáneo.

Si quisiéramos responder a la pregunta hecha en el párrafo anterior, debemos decir que lamentablemente la respuesta no es inmediata ni fácil, es por ello que muchas investigaciones se están realizando alrededor de este tema, lo que sí podemos hacer es mencionar cuáles son los factores que se perciben y que creemos dificulta la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

Uno de esos factores es que creemos que hoy en día el *conocimiento escolar está en un nivel utilitario* donde surgen ciertos comportamientos repetitivos en los alumnos y en el profesor, como por ejemplo, el alumno exige que le enseñen matemáticas para responder a sus necesidades cotidianas inmediatas, no demanda de la matemática un saber cultural. Por otro lado el profesor se siente con la obligación de brindar una respuesta pero que no la tiene porque quizás ni siquiera exista. En ese sentido se dice que la matemática en el sistema educativo está a un nivel de concepción utilitaria más que funcional (Cordero, 2006). Otro de los factores lo apuntamos al *discurso matemático escolar* que en la actualidad se sostiene una de las maneras, digamos tradicional, de tratar los temas con base a presentar definiciones, teoremas y algunas veces ejercicios de aplicabilidad. Desde el punto de vista socioepistemológico se afirma que el discurso matemático escolar no es el adecuado y el objetivo fundamental es poder realizar un rediseño de éste.

Para contribuir con esa tarea es necesario considerar que el status del Cálculo en el sistema educativo consiste en concebirlo como la rama de la matemática que trata con dos grandes conceptos la diferenciación y la integración. Si bien es cierto, en esta investigación, queremos tratar un enfoque diferente cuya base será una epistemología de prácticas sociales, que más tarde le llamaremos un socioepistemología del Cálculo. La intención apunta hacia lo que norma las formas de construir el conocimiento matemático en oposición al “modelo” que reproduce una matemática utilitaria. En otras palabras, lo que se propone es no centrarse en los conceptos sino en las prácticas que los grupos humanos hacen cuando construyen conocimiento matemático, para no soslayar lo que organiza el grupo humano haciendo matemáticas.

La tarea es entonces lograr sacar, del sistema educativo, la concepción del nivel utilitario y llevarlo al nivel funcional para lograr que el estudiante valore socialmente el conocimiento matemático. (Cordero, 2006)

I.1.3 Problema de Investigación

Como ya lo habíamos mencionado anteriormente este trabajo se apoya en la Matemática Educativa como disciplina y en la socioepistemología como marco teórico, se pretende analizar el estatus de la Serie de Taylor en la matemática escolar para luego poder lograr lo que se quiere como objetivo de investigación y de esta manera colaborar con elementos que puedan aportar al rediseño del discurso matemático escolar.

I.1.3.1 El estatus de la Serie de Taylor en la matemática escolar

La Serie de Taylor (ST) en la matemática escolar es un concepto desconectado del resto de otros conceptos que usualmente aparecen en los textos del Cálculo. Es posible tratar la derivada y sus n-ésimas derivadas y no necesariamente hablar de la ST. En todo caso la Serie de Taylor es destacada para atender aspectos propios de convergencia, es por ello que las materias tratadas en la enseñanza actual y que anteceden a la Serie de Taylor son los teoremas de continuidad, teoremas de los valores medios y los criterios de convergencia de series numéricas, tal estatus sugiere que la Serie de Taylor no es elemental, que pertenece a cierta matemática avanzada que tiene como objetivo profundizar en los procesos de convergencia de las series infinitas, acompañado de sus métodos algebraicos. Hay investigaciones que han dado evidencias al respecto, ver por ejemplo, Cantoral, (1995), Cordero (2006), Hernández (2006), Alanís (1996) entre otros.

Una restricción que el estatus de la Serie de Taylor en la matemática escolar provoca es que, si bien es cierto que tratar a la Serie de Taylor como un polinomio infinito que se aproxima a una curva en la vecindad de un punto potencializa a la serie misma, pero obscurece la situación de variación que subyace a la Serie de Taylor.

Por otro lado en los programas curriculares del nivel superior, como por ejemplo, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso - Chile, el tema de la Serie de Taylor aparece casi al final del programa y no todas las carreras tratan este tema. Dentro de la programación realizada por sesiones, la Serie de Taylor tiene destinada una sesión, es decir, 90 minutos. Cabe mencionar que en muchas oportunidades no se alcanza a ver todo el programa por lo que la Serie de Taylor a veces ni siquiera es tratada. En relación a lo dicho, sólo por ejemplificar, traeré a la luz dos programas de cursos que se dictan en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso - Chile

MAT 203 "Calculo 2-A"

Temas y Contenidos

1. Integración de funciones acotadas (3 sesiones)
2. Integral indefinida (3 sesiones)
3. Métodos de Integración (o cálculo explícito de Integrales indefinidas para funciones continuas) (6 sesiones)
4. Aplicaciones de la Integral (7sesiones)
5. Integrales Impropias (2 sesiones)
6. Series Numéricas (5 sesiones)
7. **Series de Funciones (4 sesiones)**
   7.1 Convergencia puntual y uniforme
   7.2 Series de Potencias
   7.3 Radio e intervalo de convergencia
   7.4 **Serie de Taylor y de Mc. Laurin**

MAT 117 "Calculo Integral y Series"

Temas y contenidos

1. Calculo Integral de Funciones Reales de una variable real (8 sesiones)
2. La integral de Riemann (9 sesiones)
3. Series Numéricas y Series de Potencias (11 sesiones)
   - Definición de serie numérica. Serie convergencia. Ejemplos
   - Condición necesaria de convergencia. Criterio de convergencia de Cauchy
   - Criterios de convergencia para series de términos positivos: criterios de comparación (directa y cociente). Criterio de la integral. Criterio del cuociente y la raíz.
   - Series alternadas. Criterios de Leibnitz. Convergencia absoluta y convergencia condicional. Series arbitrarias. Criterio de Dinchlet
   - Series de funciones. Tipos de convergencia: puntual y uniforme. Criterio M. Test de Weiestrass. Consecuencias.

- **Definición de Series de potencias, intervalos y radio de convergencia. El desarrollo en serie de Taylor y de Mc. Laurin. El teorema de Taylor**.
- Aplicaciones
- Operaciones algebraicas con serie de potencias
- Derivación e integración de series de potencia
- Aplicaciones
- Series de Fourier

De alguna manera, los programas mencionados muestran cuál es el lugar que toma la Serie de Taylor, si observamos el segundo programa descrito podemos ver que en el tercer tema *Series Numéricas y Series de Potencias* menciona 11 sesiones destinadas a este ítem pero en su desglose aparecen 11 temas por lo que la Serie de Taylor se remite a una sesión como mucho.

Después de tener una visión del lugar que tiene la Serie de Taylor, tanto en la ubicación del programa como el tiempo que se le destina podemos también mencionar brevemente su tratamiento en las aulas, éste se enmarca en una situación de aproximación y concuerda con el discurso de Cauchy, la preocupación es la convergencia. Por otro lado podemos agregar que una de las dificultades que se aprecia es que no se ve la diferencia entre serie y suma; se da más énfasis al polinomio de Taylor, además por su tratamiento se inhiben las ideas variacionales en los alumnos.

I.1.3.2 Lo que se quiere hacer

Considerando lo analizado en el estatus de la Serie de Taylor en la matemática escolar y con el marco teórico de la socioepistemología[2] es que este trabajo se va a centrar en la

[2] *el cual postula que las prácticas sociales son generadoras de conocimiento, lo que conlleva a crear un modelo de conocimiento matemático que da cuenta de lo que constituye su contenido y conocer los causales reales del desarrollo social de dicho conocimiento por lo que se debe romper la centración en los conceptos del discurso matemático escolar y crear otro discurso que ofrezca los marcos o prácticas de referencia donde se resignifique la matemática. Todo ello debido a que el modelo actual no brinda los marcos de referencia necesarios para que resignifiquen el conocimiento* (Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica.

Serie de Taylor para contribuir al rediseño del discurso matemático escolar, para lograr dicho objetivo uno de los aspectos que tratamos en la investigación es formular un escenario de variación para trabajar la Serie de Taylor, donde la predicción juega un rol crucial. Se trata pues de resignificar[3] la Serie de Taylor a través de una situación de modelación del movimiento[4] en donde la ST, a través de diferentes momentos, se resignifica hasta alcanzar la analiticidad[5] de la función.

El párrafo anterior da cuenta de lo que se quiere como objetivo de esta investigación, pero es necesario precisar aún más dicho objetivo, es por esto que declaramos que se realizó un estudio epistemológico, que da cuenta de la relación que existe entre la práctica de predecir y la Serie de Taylor pero también es necesario situarnos en una situación de modelación del movimiento porque es el escenario *adhoc* para cumplir con el objetivo, es aquí en que rescatamos el aspecto funcional de la ST, en esta situación el argumento en cuestión es la graficación-modelación. Estudios recientes dan cuenta que el binomio graficación-modelación ha logrado un status relevante en el discurso matemático escolar ya que se conoce como una práctica institucional en una situación específica.

---

[3] Resignificar quiere decir la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, es decir, será el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma de acorde con lo que organizan las participantes. (Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*. Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C., 265-286)

[4] La situación de modelación del movimiento es someter a ciertas actividades a los alumnos donde se utilice tecnología, como las calculadoras gráficas y sensores en que se identifican a las gráficas como movimientos (mayor información se puede encontrar en la tesis doctoral de Liliana Suárez 2008)

[5] Definición de analiticidad. Una función f la cual es la suma de su serie de Taylor en algún intervalo abierto que contenga a se dice ser analítica en el punto a. (Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*. Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C., 265-286)

Además, el hecho de romper la centración en los conceptos conlleva a crear otro discurso que enfoque la atención a las prácticas que generan los conceptos matemáticos. Por ello es que debemos llevar el *saber* al aula con intencionalidad didáctica. Es así como formulamos una epistemología en la cual relacionamos tres argumentaciones situacionales: la *predicción*, la *graficación* y la *analiticidad* (Cordero, 2001 y 2006)

Sin embargo, con la socioepistemología, el núcleo epistemológico está en las prácticas sociales lo que conlleva a explicar el "uso del conocimiento" ante una situación específica (Cordero, 2006). Por ello nos preguntamos cuál es el rol que juegan las gráficas de las funciones como una manifestación de los usos del conocimiento, es decir, cuál es el uso de las gráficas en las producciones de los alumnos y para ganar precisión: cuáles son sus funcionamientos y formas de las gráficas en situaciones específicas.

Todo esto nos lleva a generar la pregunta de investigación: ¿cuál es el "uso de las gráficas" cuando se resignifica la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento?

El motivo de la pregunta de investigación radica por el hecho de que la graficación-modelación es reconocida como argumento en una situación específica y colabora con elementos en el rediseño del discurso del Cálculo escolar y ello conlleva a tener elementos a considerar para llevar a cabo dicho rediseño, si nos cuestionamos por el uso del conocimiento, y estamos en una situación de modelación del movimiento queremos ver cómo es que esos usos surgen en lo planteado, por eso es que queremos analizar o estudiar cuál es el uso de las gráficas.

I.2 Estado del Arte

Siendo esta investigación desarrollada a la luz de la Matemática Educativa como disciplina y de la aproximación socioepistemológica cuyo programa fundamental consiste de la reorganización del Cálculo, es que se requiere generar un nuevo estatus de la Serie de Taylor que articule el concepto de analiticidad de las funciones y de la categoría de la predicción como argumentación en una situación de variación. Para ubicar la pregunta de investigación en este escenario formulamos un estado del arte considerando aquellas investigaciones que se han adelantado al tema en cuestión. Aspectos como “el uso de las gráficas” y el “comportamiento tendencial de las funciones” son indicadores, entre otros, para el rediseño del discurso del cálculo escolar. En ese sentido, a continuación, se presenta el estado del arte que sin duda ayuda a robustecer el objetivo de la investigación.

I.2.1. El estatus de la Serie de Taylor en las investigaciones de Matemática Educativa

En lo que sigue comentamos varias investigaciones que dan evidencias del estatus epistemológico de la Serie de Taylor y en consecuencia los cuestionamientos del Cálculo escolar que el estatus obligadamente trae a colación. Los aspectos fundamentales que se abordarán son los que tienen directa relación con este trabajo de investigación, es decir, temas como la Serie de Taylor, la predicción, la analiticidad de las funciones basadas en el uso de las gráficas y el comportamiento tendencial de las funciones.

Analiticidad de las funciones, una epistemología del cálculo

En Cordero (2006) podemos ver que en el estatus del cálculo escolar predominantemente, éste último, es concebido como la rama de la matemática que trata con la diferenciación y la integración, es por ello que los programas de las materias tienen una estructura relacionada con los conceptos de función, límite, derivada, integral y convergencia, donde además predominan las operaciones con relación a la definición de la derivada como el límite de un “cociente” y a la definición de la integral como el límite de una '”suma”. Con este marco el concepto de función es el núcleo del Cálculo.

Sin embargo, con ese marco, el discurso del cálculo escolar no ayuda a apreciar la epistemología de la analiticidad de las funciones que inclusive pudiera ser ignorado en la matemática escolar. Por ejemplo, el efecto que provoca, en el discurso de la matemática escolar, la centración del concepto de función consiste en privilegiar ciertos procedimientos e ignorar otros: hallar la recta tangente que pasa por un punto de una curva, cuyo procedimiento requiere de calcular el límite de cierto cociente a través de argumentaciones de aproximación. Explícitamente lo que se requiere para esta situación es una función f dada, un punto específico $(x_0, f(x_0))$ para calcular la derivada o encontrar la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto dado. Con estas herramientas se trabaja y se elaboran estrategias de preguntas para el alumno.

Sin embargo con esa manera de proceder lo que se pierde es la comparación de dos estados de una cantidad de variación continua, de la forma $f(x+h)-f(x)$ con argumentación de predicción expresadas por la analiticidad $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)h^2}{2!}+\ldots$. Para poder trabajar de esa manera se requiere de significados para predecir la posición de un móvil cuando se conoce su posición inicial y su variación en ese instante. En esta situación la función f no se conoce pero lo que si se conoce son los estados de la cantidad $f(x)$ y $f(x+h)$ y las variaciones $f'(x), f''(x), \ldots$

En Cantoral (2001) se llama la atención sobre la naturaleza del objeto de conocimiento y de sus contextos de significación como los puntos de apoyo para formular una "nueva" epistemología del Cálculo. Para ello, argumenta sobre las concepciones de los paradigmas científicos:

"cuando se plantea el estudio de un cierto fenómeno natural en particular, se advierte enseguida – y de ello cuenta la historia de las ideas científicas- que el primer esfuerzo por alcanzar una explicación de lo que acontece, se logra mediante un proceso de acumulación y ordenamiento de los datos fácticos en un sistema localmente coherente que precisa la intuición experimental común. Enseguida y mediando una serie de transformaciones y cambios en las bases de los paradigmas científicos, esta primera visión de lo observado se modifica a la luz de nuevas preguntas y de una experiencia más refinada; construyéndose así un marco teórico temporal que adquiere nuevamente el rango de paradigma científico y se torna en una ciencia normal, en el sentido de Lakatos" (p. 1, capítulo I, Cantoral, 2001)

Después de realizar un análisis de la génesis del Cálculo, Cantoral (2001) precisa un programa intencional que busque una base de significaciones para el cálculo, en el cuál se hipotetisa una relación de naturaleza dialéctica entre un par de nociones: la predicción de los fenómenos físicos de cambio y variación y lo analítico en la matemática de movimiento.

Como un aspecto teórico-metodológico de la disciplina de la Matemática Educativa se requiere de hacer estudios de la clase de fenómenos que conduce como necesidad funcional a la construcción de ideas, nociones, conceptos, técnicas y significados en la matemática. En la construcción del Cálculo y el Análisis se percibe un instrumento con el que es posible estudiarlo como esa clase de fenómenos, siempre que efectivamente se perciba la regularidad de estructura en dichos contextos. El instrumento será en el ámbito de la matemática la noción de lo analítico y su expresión funcional inmediata, aquella que representa a la Clase de Funciones Analíticas, es decir, a la expresión general que adquiere el conjunto de las funciones de clase C^{∞} tales que la Serie de Taylor converge a ellas localmente.

Las investigaciones mencionadas brindan un panorama epistemológico del Cálculo difícilmente encontrado en el actual discurso matemático escolar. En el mejor de los casos el panorama son indicadores de un marco de referencia para reorganizar el Cálculo o bien para hacer un rediseño del discurso del Cálculo escolar.

Predicción, la argumentación en una situación de variación

La predicción, en el marco de la socioepistemología, se ha ido convirtiendo en una categoría teórica-metodológica en la medida que se han desarrollado investigaciones que dan cuenta del rediseño del discurso del cálculo escolar.

Podemos apreciar a través de las diferentes investigaciones que la predicción como una práctica social es una de esas categorías que los humanos desarrollaron en su organización para construir conocimiento sobre la naturaleza del movimiento.

Cantoral (2001) reporta que el cálculo tiene su origen en las ciencias que estudian la naturaleza, en este caso la física y en particular el estudio del movimiento de los cuerpos. Emergieron marcos de pensamiento que precisaron el conocimiento del Cálculo. El paradigma newtoniano ha venido a fortalecer la reorganización del cálculo escolar, el cual Cantoral lo describe de la siguiente manera: "…*el paradigma newtoniano, el cuál fundamentalmente consistió en considerar a los problemas de la dinámica en particular y la variación de las magnitudes variables en general, de la siguiente manera: ciertos valores de los parámetros de un sistema en un momento y lugar dado, determinan la evolución ulterior del sistema. De ahí que el objetivo de la mecánica desde entonces sea predecir dicha evolución sin plantearse preguntas sobre la "causas" reales o "causas inherentes" al movimiento. La búsqueda de la predicción de la evolución de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza condujo a desentrañar los mecanismos que permitieron el pasaje de la predicción, noción propia de la física, a lo analítico, noción propia de la matemática…"* (p. 6, Cantoral, 2001).

Además Cantoral (2001) formula y evidencia una epistemología del Cálculo y Análisis que se refiere a la construcción del instrumento predictor y su representación en el contexto matemático: la serie de Taylor.

Muñoz (2005) reporta la problemática propia de la enseñanza que están inmersos los estudiantes de Cálculo integral, la cual consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico. Encuentra evidencias de la imposibilidad de la separación entre lo conceptual y lo algorítmico en un contexto del marco epistémico de Newton y en la perspectiva de la integral vía la noción de variación, la justificación de la naturaleza de los campos conceptuales del conjunto de situaciones problema, está centrada en relaciones de funciones entre variables y sus variaciones y en las construcciones de sistemas de transformación que permiten pasar de los estados iniciales y las variables de los fenómenos de variación a los estados finales en sus formas de número – estado o función – estado en donde es inherente la noción de predicción en tanto práctica social.

En los textos de física y de ingeniería utilizadas en nuestro medio, eventualmente aparecen ideas estrechamente vinculadas a las nociones pre - cauchianas de la serie de Taylor. Así es usual encontrar argumentos como el siguiente: *"Si p representa a un parámetro físico en un instante dado de tiempo* t*, un momento después* $t+dt$*, este parámetro será* $p+dp\ldots$*"*. Muñoz (2005, 2007) señala que para conceptualizar esas nociones se requiere pensar en la Serie de Taylor como instrumento de predicción y no como objeto de convergencia como aparece en los textos de matemáticas. Aunque el discurso de la matemática escolar vigente en las escuelas de las disciplinas mencionadas parece inhibir las ideas de variación y predicción de los estudiantes ya que el cálculo escolar es visto como una estructura formal que antecede al análisis. No obstante las estrategias seguida por los estudiantes para resolver problemas propios de la física, son de una naturaleza dinámica donde las ideas de cambio y variación están presentes **(Solís, 1999,** citado en la tesis de Hipólito Hernández P**,** 2006**)**

Cantoral, Molina y Sánchez (2004) reportan aspectos muy interesantes pero quisiera destacar, por el momento, tres ideas fundamentales:

- ***La predicción es una de las prácticas identificadas que generan conocimiento***, mencionan que hay evidencias, en el marco de las investigaciones socioepistemológicas que responden al hecho de que ante la imposibilidad de controlar el tiempo a voluntad, obliga a los grupos sociales a predecir, a anticipar los eventos con cierta racionalidad.

- ***Diferencia entre adivinación y predicción***:
  Puesto que la adivinación se refiere a un pronóstico generado por señales sin un fundamento científicamente aceptado, mientras que la predicción es una actividad racional que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que produce.

- ***La predicción está estrechamente relacionada con la variación***

> Para predecir un estado futuro correspondiente a un sistema es necesario cuantificar y analizar los cambios de sus causas y efectos y con base en esto generar modelos matemáticos que nos permitan anticipar consecuencias. Esto hace que la variación se convierta en una herramienta de análisis necesaria para el ejercicio de la predicción.

Alanis (1996) reporta en su trabajo un análisis epistemológico que permitió establecer un hilo conductor para el desarrollo de un curso en el que la atención se centre en el abordaje de problemas, dicho hilo conductor es la predicción que ayuda al rediseño del discurso escolar del Cálculo. En su trabajo se elaboraron situaciones didácticas que consistieron en once sesiones en las que se plasmaron las siguientes actividades centrales, se pensó en la cinemática como un contexto inicial adecuado para abordar el problema de predecir, elaborado con el siguiente enunciado: "predecir cuál va a ser la posición de una partícula que se esta moviendo a lo largo de una línea recta, abordando este problema en tres casos:
Caso 1: la partícula se mueve a velocidad constante
Caso 2: la velocidad de la partícula no sea constante pero sí su aceleración
Caso 3: la aceleración no es constante pero sí la razón con que ésta cambia"

Estos casos le han servido a Alanís y a un grupo de investigadores escribir recientemente un texto de Cálculo, donde precisamente estos casos son el eje del cálculo diferencial e integral (Alanís, et al 2003)

En Buendía (2004**)** queremos destacar la relación epistemológica entre la predicción y la periodicidad, además de hacer referencia al análisis de los procedimientos de predicción, y a la distinción entre periodicidad algebraica y periodicidad geométrica y la importancia del reconocimiento de patrones.

Las investigaciones anteriores, sin duda, fortalecen la idea de que para hacer un rediseño del cálculo escolar se requiere de constructos que normen la construcción del cálculo. En este caso, la predicción juega ese papel que desde la socioepistemología es una práctica social que ha normado la construcción del cálculo. Así, decimos que en una situación de variación la predicción es el eje conductor donde podemos apreciar que ciertamente es un hilo conductor para expresar un cambio de discurso para resignificar la ST y con ello construir la analiticidad. El cambio radicará en crear otro estatus a la Serie de Taylor en el cálculo escolar.

Acerca del comportamiento tendencial de las funciones

Vemos en Cordero (2001) que un estudio sobre la reorganización del cálculo consiste en haber encontrado que una noción sui generis llamada comportamiento tendencial de las funciones (CTF) tiene un carácter funcional del conocimiento matemático, y su construcción está con relación en la modelización y el uso de las herramientas.

Se ha encontrado en el ámbito escolar un argumento en las gráficas de las funciones, que puede ser tratado como una categoría del conocimiento del Cálculo. Esta noción clasificada como categoría describe un nivel de abstracción que corresponde a un nivel de construcción en un marco funcional, con esta mirada la modelación y el uso serán la base del comportamiento tendencial de las funciones en tanto categoría.

Además se han descubierto diferentes construcciones de la noción comportamiento tendencial de las funciones en las distintas situaciones diseñadas. El estudiante aprende a "identificar" coeficientes en la función, a reconocer "patrones de comportamientos gráficos, a "buscar" tendencias en los comportamientos y a "relacionar" funciones. El centro de la atención está en el lenguaje de las herramientas matemáticas y no sólo en el lenguaje de los objetos matemáticos. Este planteamiento está creando una nueva base de entendimientos y construcciones matemáticas con relación en el ámbito de la actividad humana (Cordero, 1998, 2001, 2003b).

Esta nueva noción ha influido en la reorganización de distintos temas curriculares en los niveles educativos medio superior y superior. En ellos, el CTF genera argumentos de tipo cualitativo que determinarán un intercambio permanente entre contextos algebraicos y gráficos.
Esta noción del comportamiento tendencial de las funciones en una visión de dimensión epistemológica nos da cuenta sobre su naturaleza en un contenido matemático y de esa

manera podemos mirar a esta noción en situaciones como comportamiento asintótico de una función, suma de funciones y variación de los parámetros de una función prototipo $f(x)$. A través de las investigaciones realizadas se da cuenta que el comportamiento tendencial de las funciones es un argumento que establece relaciones entre funciones y se da en situaciones del cálculo en que se discuten aspectos de la variación.

Lo dicho anteriormente nos permite apreciar de alguna forma que existe una nueva línea en las investigaciones que es la de considerar a la graficación como una práctica social y no como una habilidad cognitiva y en ir precisando cada vez más que los usos de las gráficas, así como su funcionamiento y forma, son elementos inherentes a la matemática funcional.

La problemática anterior se ha convertido en un motor potente para el desarrollo de investigaciones didácticas en el Cálculo. También ha motivado numerosos proyectos de innovación de la enseñanza, en especial en los niveles de la educación media y el nivel superior. A continuación describiremos algunas de las investigaciones que dan cuenta de lo mencionado en párrafos anteriores.

Campos (2003**)** nos muestra un marco de referencia que da evidencias que se puede construir conocimiento matemático a través de las gráficas. Diseña una situación para resignificar la transformación de la parábola cuya argumentación es el comportamiento tendencial de las funciones. Ponen en juego varios momentos: el geométrico, el funcional con relación a la variación y comportamientos al infinito.

Por otro lado, Cordero y Solis (2001**)** tratan el tema de funciones y sus gráficas donde sostiene que las gráficas de las funciones formulan argumentos del cálculo, la idea es poder dar una nueva mirada a las funciones $f(x)$ proporcionando una conceptualización de función que relaciona la representación de una curva completa y la función prototipo a través de variar los parámetros de la función para buscar comportamientos, con ello provee argumentos específicos al analizar las funciones en diferentes situaciones, el comportamiento tendencial de las gráficas y de las expresiones analíticas de las funciones son el punto central de estos argumentos. En otras palabras la "curva completa" y la expresión $y = A[f(Bx + C)] + D$ se relacionan a través de construir significados a los coeficientes A, B, C y D

Así, en Rosado (2004) podemos apreciar que trabaja en el concepto de derivada en el caso de la linealidad del polinomio mencionando la ausencia de marcos de referencia para resignificar la derivada, Rosado reporta en su tesis que las gráficas son argumentaciones que pueden construir significados, logra la resignificación de la linealidad del polinomio a través de los diferentes momentos que trabaja en su diseño que son: traslación de gráficas, tendencia de la gráfica y argumentación gráfica. A través de esta investigación vemos datos relevantes en relación a la función, sobre el uso y la modelación de lo gráfico.

Acerca del "uso de las gráficas" y la graficación

Desde la socioepistemología el "uso" de las gráficas es concebido como un concepto, más específicamente sobre el funcionamiento y la forma de la gráfica según la clase de tareas. Cordero (2006), llama la atención sobre la conveniencia de entender el uso de las gráficas en las prácticas institucionales y para ello se está investigando cuál ha sido su "uso" en la obra matemática y en el discurso matemático escolar. El aporte que han hecho estas investigaciones es dar indicadores de dos aspectos básicamente uno para poder desarrollar situaciones didácticas (donde la graficación es el argumento) y otra para formular epistemologías (donde la graficación es un práctica social que genera conocimiento del cálculo). Ofrece evidencias cuya finalidad es ver el funcionamiento y forma de las gráficas cuando los participantes usan las gráficas en una situación específica.

A continuación presentamos algunas de estas investigaciones:

Cordero & Flores (2005) plantean comprender a la graficación como una práctica institucional que se desarrolla en el discurso matemático escolar y es reflejada en los libros de texto, pero no como una representación del concepto de función.

El objetivo de la investigación, reportada en este artículo, consiste en ofrecer indicadores que ayuden a desarrollar una matemática funcional[6] en el sistema educativo. Sin embargo, la relevancia de la investigación está en los aspectos teóricos-metodológicos formulados para cumplir tal fin: se crea el concepto "uso de las gráficas" como marco teórico de la investigación y con ello se hace un estudio del discurso matemático escolar[7] a través de los libros de texto del nivel básico, donde se comprende a la graficación como una práctica social en su proceso institucional.

Con el fin de analizar el uso que se le da a las gráficas con respecto a los debates entre los funcionamientos y formas según la diversidad de situaciones específicas se proyectó el análisis en la observación de tres momentos:

- el del uso del síntoma de la gráfica de la función,
- el del uso de la gráfica de la función
- el del uso de la curva

En la investigación se encontró que las gráficas son usadas en diversas actividades sin ser un concepto curricular. Se enfocó la atención hacia el uso de las gráficas para determinar que cualquier uso de gráfica del espacio (mapas, ilustraciones, planos, cuadrículas y trayectorias), antes de ser especificada curricularmente la gráfica de la función, se le llamara el *síntoma del uso de la gráfica de la función* y una vez que la gráfica de la función es declarada curricularmente se le llamará *el uso de la gráfica de la función*.

Sin embargo para fortalecer el constructo "uso de las gráficas" se analiza el trabajo de Oresme cuando discute el modo en que las cosas varían.

Así, en Oresme, (*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum: 1379*) encontramos el *funcionamiento* y la *forma* de la gráfica diferente a la de las gráficas cartesianas (Suárez, 2002; Suárez y Cordero, 2005). Oresme se propuso representar a

[6] Matemática funcional quiere decir un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad. Todo ello en oposición al conocimiento utilitario.

[7] El discurso matemático escolar es la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la enseñanza y lo que es la matemática. Discutimos un poco más al respecto en la sección 'Estatus del uso de las gráficas en los libros de texto' de este artículo.

través de figuras geométricas (rectángulos y triángulos) el modo en que las cosas varían. Él parte de la idea que *el instante de una cantidad continua es representado por un segmento rectilíneo y que la medida de los instantes es representada por la medida de esos rectilíneos de instante*. Además, considera que *toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua.* El *funcionamiento* y la *forma* de las figuras (gráficas) no consistía en describir la posición de los puntos respecto de coordenadas rectilíneas, sino que las figuras mismas eran la cualidad de la cantidad continua, en ese sentido las figuras geométricas adquirían un significado global. Las propiedades de la figura podían representar propiedades intrínsecas a la misma cualidad. Tal vez por ello, Oresme resignifica las figuras geométricas para establecer diferentes tipos de variación: usa un rectángulo para representar una variación uniformemente uniforme (ver figura 1); un triángulo o trapecio para representar una variación uniformemente deforme (figura 2); y una figura irregular para representar una variación deformante deforma (figura 3).

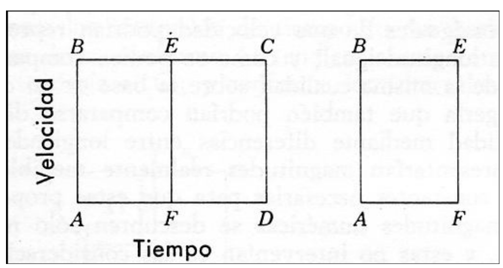


Figura 1: variación uniformemente uniforme

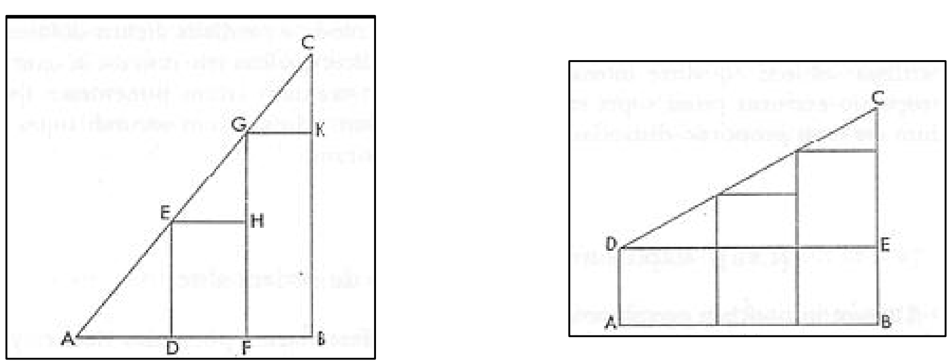


Figura 2: variación uniformemente deforme

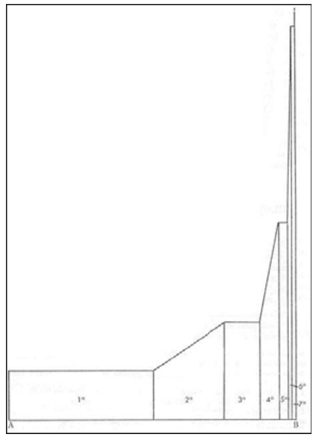


Figura 3: variación deformante deforma

Lara y Cordero (2006) citan a Roth (1997) quien afirma que "considerar a la graficación como una habilidad cognitiva limita la problemática" debido a que existe la creencia de remitirse a un problema de capacidad, es decir, creer que hay alumnos mas o menos capaces de graficar, sin embargo "tratar la graficación como una práctica social amplía la problemática". En otras palabras, pone la atención a no mirar sólo a las gráficas sino que a la práctica de graficación.

Una de las investigaciones importantes en este aspecto del "uso" de las gráficas fue la realizada por Cen (2006) quien reporta el uso de las gráficas en la parábola, en bachillerato.

Semestre	**Uso de las gráficas**	**Forma**	**funcionamiento**
I	Distribución de puntos y la interpretación geométrica	La forma de conocer a la parábola es a través de una tabla de valores previamente establecida y la ubicación de puntos en el plano cartesiano	Es el bosquejo de la ecuación
III	Interpretación geométrica de una ecuación	Elementos que interviene n en la parábola, como lo son, el vértice, el foco, directriz	Es la asociación gráfica-expresión algebraica
IV	Comportamiento de la curva	Primera y segunda derivada	Identificar los intervalos

			donde la función es creciente, decreciente, máximos y mininos de la función
V	Cálculo de áreas y volúmenes	La manera de integrarlos	Es el uso mismo

Esta investigación sin duda que marca un punto importante para pensar lo que ocurre en el nivel superior, lo realizado por Lara es ver las gráficas usadas en Cálculo Diferencial e Integral resignificadas en la Mecánica de Fluidos, en el ámbito de Ingeniería y reporta algunos usos de las gráficas:

- Variación numérica para las propiedades de los fluidos
- Interpretación de un fluido en un escenario físico
- Interpretación de un elemento infinitesimal de un fluido

Estos cuatro temas que hemos presentado en el estado del arte hacen robustecer la problemática en cuestión, debido a que la práctica social que se ocupará es la predicción partiendo de la base que genera conocimiento, aspectos como el comportamiento tendencial de las funciones y el "uso de las gráficas" son cruciales en este proyecto de investigación ya que la pregunta de investigación está concisamente relacionada con todo ello.

I.2.2 Prácticas sociales como modelo de construcción del conocimiento matemático

En Cordero (2006) se reporta que si queremos analizar el problema didáctico de las matemáticas nos referimos a la concepción del conocimiento, esta concepción enfoca la atención a aspectos del contenido matemático, como por ejemplo procesos cognitivos en que el alumno debe realizar ante algún problema matemático y el papel que juega las interrelaciones en escenarios socioculturales. Lo que interesa saber es cómo los grupos se organizan y de qué se valen para constituir conocimiento institucional. Destacamos que una concepción del conocimiento se pregunta por la construcción de cierto conocimiento específico (apuntando a los procesos cognitivos de los conceptos) y también se pregunta por la constitución de tal construcción (apunta a las prácticas sociales que generan dicho conocimiento).

La Matemática Educativa se preocupa de la construcción del conocimiento matemático y uno de sus objetivos es brindar explicaciones respecto de esta construcción, por otro lado busca también conocer cómo es que este conocimiento aparece en el sistema escolar. Es por ello que se hace énfasis en aspectos como que el individuo se soslaya ya que la preocupación hoy en día apunta a la actividad matemática que realiza un individuo y de cómo éste la logra pero el aspecto que se olvida es que lo que importa es el individuo haciendo matemática y cómo es que éste dentro de su interacción con otros construye conocimiento.
En otras palabras estamos haciendo referencia a la problemática fundamental que atiende la Matemática Educativa que es la confrontación de la obra matemática con la matemática escolar.

Es importante señalar que en la búsqueda de brindar respuestas frente a la pregunta de lo que ocurre con la construcción del conocimiento matemático es que la Matemática Educativa como disciplina en su evolución ha consistido en dos grandes programas de investigación: uno da cuenta de la construcción del conocimiento del individuo ante problemas matemáticos específicos y el otro da cuenta de la construcción del conocimiento en los escenarios socioculturales. Es decir, la preocupación por la construcción del conocimiento pero insertando al individuo en la escuela y en su cultura.

Si afirmamos que el discurso matemático escolar no es el adecuado uno de nuestros objetivos es realizar un rediseño de aquel discurso pero para ello requerimos de una base epistemológica donde resignificamos objetos matemáticos, el término "resignificación" es propio de la disciplina y se refiere a la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, es decir, será el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma de acorde con lo que organizan las participantes. (Cordero, 2006).

En la aproximación socioepistemológica se integran de manera sistémica cuatro dimensiones que son la didáctica, la cognitiva, la social y la epistemológica. La tesis consiste en considerar a la práctica social como la fuente de la reorganización de la obra matemática y el rediseño del discurso matemático escolar. Con esto una de las tareas principales de la socioepistemología es dar evidencia de lo que sostiene y es por ello que el diseño de situación es el que brinda dicha evidencia.

I.3 La investigación

Esta sección tiene como propósito hacer énfasis en la naturaleza y en la dimensión del objeto de estudio en cuestión.

Haciendo referencia a la visión socioepistemológica un aspecto de la investigación se enfoca a estudiar el hecho de que la manera como se han tratado las materias del cálculo no permite dar cuenta que la analiticidad de las funciones es el objeto principal del Cálculo. Proponemos abordar este aspecto por otra vía, reconociendo a la práctica social como generadora de conocimiento. Entonces la encomienda es formular epistemologías de prácticas como una base de nuestra investigación.

En la figura 4 se exhibe esquemáticamente una socioepistemología del Cálculo a través de tres situaciones. La tercera situación alude a una de las maneras tradicionales de tratar los temas del cálculo, a la cual se le concibe como una situación de aproximación. En contraste la primera situación alude a la práctica de predecir, la cual es el argumento de la situación y genera un pensamiento variacional. Nosotros con esta socioepistemología queremos abordar el diseño de una situación que ayude a resignificar la ST para llegar a la analiticidad de las funciones.

Cabe mencionar que la situación de aproximación (figura 4) expresa el discurso del cálculo escolar tradicional, enfatizando en cada uno de los conceptos matemáticos en cuestión para llegar a la analiticidad. Sin embargo, en muchos casos no existe conciencia de ello, nosotros creemos que por esta vía no se está logrando dicho objetivo por lo que queremos propiciar otro escenario que sería bajo la situación de variación en que el cálculo se mira como “variación y cambio” sustentados por una epistemología que será abordada en el capítulo siguiente de este trabajo para luego seguir una ruta en que el diseño de situación elaborado propicia que la graficación-modelación juegue también un rol importante. En otras palabras, si miramos la figura 4, el recorrido sería abordar una situación de variación (segunda columna) y luego entrar con la última fila con una situación de modelación del movimiento en que el binomio de graficación-modelación tiene el rol de argumento en una situación específica y así llegar a la analiticidad de las funciones (el argumento descrito en la última columna).

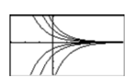
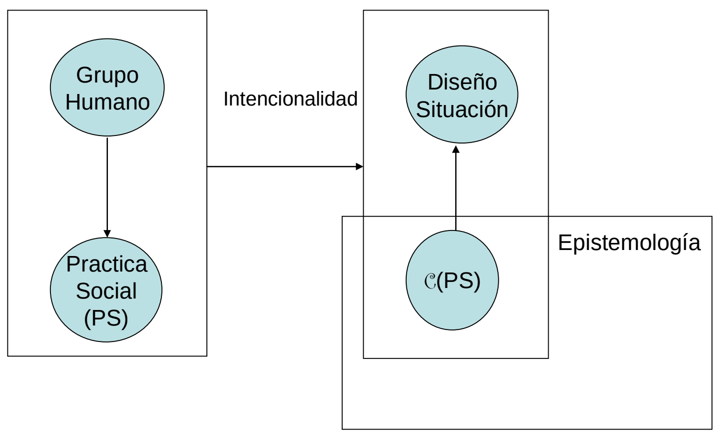
CONSTRUCCIONES EN LAS PRACTICAS	SITUACION DE VARIACION	SITUACION DE TRASNFORMACION	SITUACION DE APROXIMACION
SIGNIFICADOS	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos Comportamiento tendencial de la función	Límite Derivación Integración Convergencia
PROCEDIMIENTOS	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha = f'(x)$	Variación de parámetros $y = Af(Bx+C)+D$	Límite de un cociente $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$
PROCESO - OBJETO	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Función
ARGUMENTACION	Predicción $E_0 + variación = E_f$	Graficación - Modelación 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)h^2}{2!}+...$

Figura 4 “Socioepistemología del Cálculo”

Las argumentaciones de las situaciones son categorías epistemológicas que se derivan de prácticas sociales y son los ejes de cada una de las situaciones. Cada argumentación está compuesta de significados y en consecuencia de los procedimientos inducidos por los propios significados; los procesos y objetos expresan las experiencias de los participantes. Esta propuesta ha sido abordada en otras investigaciones y ella como tal es una socioepistemología del cálculo sustentada por una epistemología de prácticas.

Es de mi interés señalar que cuando hablamos de práctica social como generadora de conocimiento, en nuestro caso la predicción, y si queremos insertar dicha práctica y desarrollarla con intencionalidad en el sistema didáctico, debe ser reinterpretada es por eso que se forma una categoría de predicción (ausente en el currículo) donde en una situación específica, que en este caso es de variación, la predicción pasa a ser el argumento que sostiene dicha situación. Ver el esquema 1.



Esquema 1: Práctica social y categoría situacional

Con relación a lo mencionado anteriormente es como decimos que nuestra investigación pretende dar cuenta de la resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento bajo la problemática mencionada y con la mirada del marco teórico de la socioepistemología.

En otras palabras, el objetivo de investigación es plantear una socioepistemología de la Serie de Taylor en la que el "uso de las gráficas" juega un rol central. Además planteamos la relación que existe entre la práctica social de la predicción y el objeto matemático en cuestión: la analiticidad de las funciones expresada en la Serie de Taylor. Esta relación es entendida como un todo o como una dialéctica que no privilegia uno por sobre la otra, en otras palabras, no nos enfocaremos en el objeto matemático únicamente, pero tampoco trataremos la práctica social para analizar la actividad que ha desarrollado el ser humano sino mas bien la relación que existe entre ambos componentes, ver figura 5

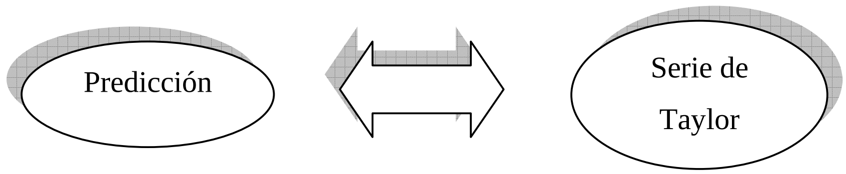


Figura 5: Relación entre la predicción y la ST

Reconociendo a la práctica social como generadora de conocimiento es que establecemos una epistemología como base de nuestra investigación. Presentamos un diseño de situación con el objeto de dar cuenta de la relación entre la predicción y la Serie de Taylor y así brindar marcos de referencia que ayude al rediseño del discurso matemático escolar.

El marco teórico que cobija estas ideas es la aproximación socioepistemológica que articula de manera sistémica cuatro dimensiones: didáctica, cognitiva, social y epistemológica. Integrar la componente social hace que el análisis sea más profundo, cómo es que se producen cambios y como afecta a nuestro estudio.

En el diseño de situación, la práctica social de la predicción es el argumento rector de la situación, con el cual se resignifica el movimiento generando procedimientos para comparar dos estados de una cantidad que varía continuamente según las experiencias institucionales de los participantes. Así, ofrecemos un escenario de una situación de variación en donde tenemos significados, procedimientos, procesos-objetos como una relación dialéctica y la argumentación de predicción como el eje central para dar articulación a todas estas etapas en una situación de variación.

I.4 Discusión

Hemos mencionado, a través de este capítulo, que la problemática que visualizamos en la enseñanza y aprendizaje del cálculo consiste en que el discurso matemático escolar en la actualidad maneja los contenidos de manera separada y carentes de interacción, provocando que en el proceso de adquisición del conocimiento se logre de manera particionada o segmentada, es por eso que nuestro objetivo es buscar aquellos mecanismos que hacen falta para lograr la vinculación e interacción de los contenidos y poder brindar aquellos marcos de referencia ausentes en el currículo actual, a través de prácticas sociales que son el modelo de construcción del conocimiento matemático cuya finalidad es la de reconstruir el discurso matemático escolar en que destaca la actividad humana en la construcción de dicho conocimiento.

Capítulo

II

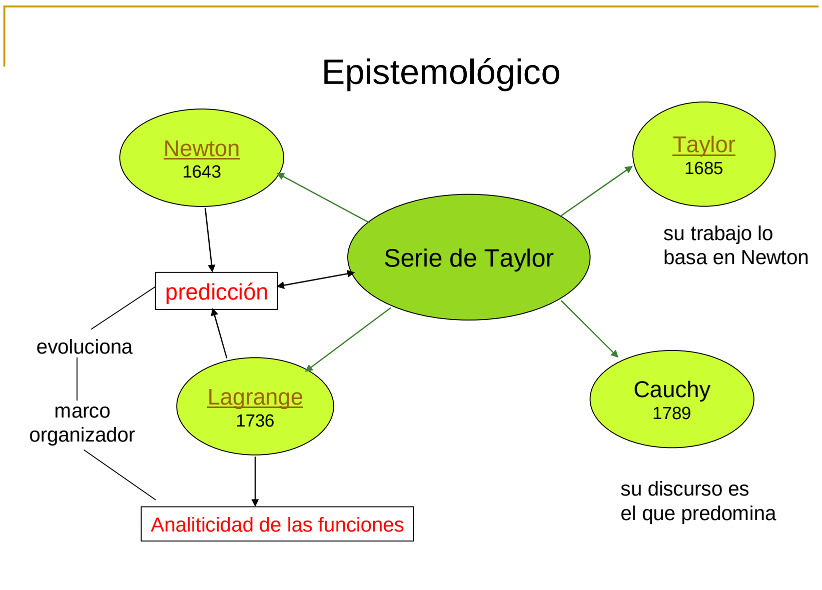
ASPECTOS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO: UNA EPISTEMOLOGÍA DE LA SERIE DE TAYLOR

Nuestra investigación tiene como objetivo crear un marco de resignificación de la Serie de Taylor (ST); es por ello que este capítulo está orientado a brindar su epistemología y su estatus, haremos un análisis epistemológico. Además discutiremos la conexión de la práctica social de la predicción con la ST. También para lograr una mejor precisión del estatus de la ST analizamos algunos textos escolares, tanto de Física como de Matemática.

II. 1 Análisis epistemológico

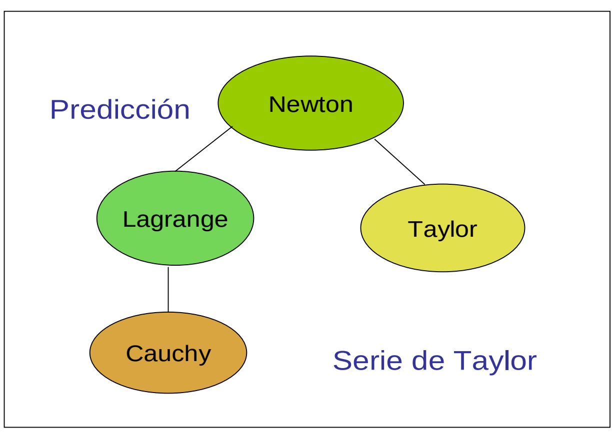
En esta sección tratamos el status epistemológico de la Serie de Taylor. Para ello, llevamos a cabo un análisis epistemológico, intentando adentrarnos en los pensamientos matemáticos de tiempos anteriores; con ello nos referimos a indagar cómo fue abriéndose camino la Serie de Taylor en la historia de la matemática: cómo se origina, de qué manera subyace en otros desarrollos, en qué estado se encuentra ahora; ello nos llevará naturalmente a referirnos a la obra de Newton, Leibniz, Lagrange, Taylor, Cauchy, procurando explicitar qué lectura acerca de la Serie se puede obtener en los trabajos realizados por estos personajes de la matemática.

El esquema 2.1.A., que se muestra a continuación da la idea global de lo que se pretende en esta sección: brindar un análisis histórico-epistemológico para discutir la conexión que existe entre la Serie de Taylor y la noción de predicción.



Esquema 2.1.A. Análisis epistemológico

Con tal propósito seguiremos la estructura que se visualiza en el esquema 2.1.B., dando especial realce a la obra de los matemáticos que aparecen en este esquema, sin soslayar otras obras que tienen relación con las mismas.



Esquema 2.1.B. Obras matemáticas con relación a la Serie de Taylor

II.1.1 Newton y Leibniz

Como se sabe los orígenes del cálculo están relacionados con problemas de la Mecánica del siglo XVII y problemas geométricos tales como la determinación de las tangentes a una curva dada y el cálculo de áreas y volúmenes. La obra de Fermat sobre estos asuntos fue seguida de una formulación general de Newton y Leibniz, independientemente, quienes sentaron las bases del cálculo diferencial e integral hacia 1660, y con ello crearon un método general para resolver aquellos problemas[8].

Alanís (1996) aborda este tema mencionando dos ideas centrales respecto a Newton, que se refieren a su *método de fluxiones*:

- *Un modo de enfocar los problemas mencionados*: considera a las magnitudes cambiando (fluyendo) en el tiempo y predice sus valores futuros mediante el conocimiento de las velocidades (fluxiones) con que cambian.
- *El carácter general del método de fluxiones*: este método puede aplicarse no sólo al trazado de tangentes a cualquier curva (ya sea geométrica o mecánica) sino también para resolver cualquier clase de problemas sobre curvatura, área, longitud, etc.

Por su parte, Cantoral (2001) nos recuerda que Leibniz ofrece un *método de diferenciales*, esto es diferencias infinitamente pequeñas entre valores sucesivos de una variable, acerca de las cuales se hace dos postulados, cuya finalidad de especificar cómo es que se comportan los elementos infinitamente pequeños:

- El primer postulado, en un contexto algebraico, habla de la noción de igualdad: dos cantidades son iguales si su diferencia es cero o si difieren por un infinitamente pequeño.
- El segundo postulado, en un contexto geométrico, habla de una *curva (contigua)* puede ser considerada como una poligonal con una infinidad de lados siendo todos de tamaño infinitamente pequeños.

[8] Cf., e.g., Mirón (2000)

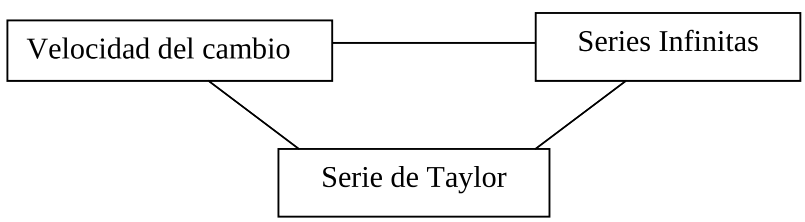
Con todo esto Leibniz define la segunda diferencial, la tercera diferencial, la cuarta, etc., haciendo además una interpretación geométrica. Con esa interpretación geométrica de las diferenciales sucesivas se puede tener una visión distinta de la Serie de Taylor.

II.1.2 Matemática, Cinemática y Predicción

Para poner de relieve la conocida relación de la Matemática y la Física expondremos cómo les subyace la noción de predicción. Para ello, recurrimos a Newton, Lagrange y Taylor por separado, mostrando reflejada en sus trabajos la Serie de Taylor y sutilmente la noción de predicción en cada uno de ellos.

Isaac Newton (1643–1727)

Temas importantes a resaltar del trabajo de Newton para nuestro objetivo son los que se señala en el esquema siguiente:

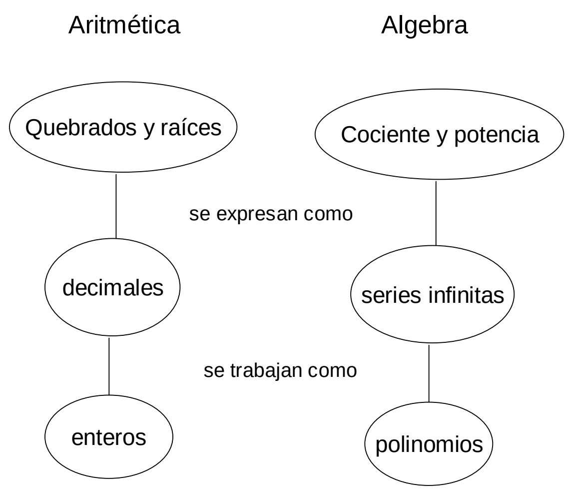


Esquema 2.1.2a.

Newton reflexiona sobre la *velocidad del cambio* o fluxión de magnitudes que fluyen continuamente. Él denominó "Mi método" a la asociación del manejo de las Series Infinitas con el estudio de las velocidades de cambio obteniendo de esta manera lo que conocemos hoy como el Teorema Fundamental del Cálculo.

Con relación en el tema de nuestro estudio, es conveniente poner de relieve los siguientes hechos:

- El Método de Fluxiones y Series infinitas (publicado en 1671) establece una analogía entre la teoría de decimales y las series infinitas. Tal analogía se puede representar de la siguiente manera (ver esquema 2.1.2b), fácil de apreciar:



Esquema 2.1.2b. Analogía entre lo decimal y la serie infinita

- Por otra parte, usando interpolación, Newton generaliza el Teorema del Binomio a exponentes fraccionarios (lo comunica en 1676):

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n}\frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + ...$$

  Como se puede apreciar, un resultado hasta entonces puramente algebraico ha sido convertido en un resultado analítico.

- Newton, al usar las series, no las utiliza solamente como recurso de aproximación, sino como expresiones alternativas para las variables que representan.

Los trabajos de Newton son esenciales para señalar que el estudio de la variación local describe el desarrollo posterior del fenómeno de evolución[9].

Este resultado de Newton se expresa como el Teorema Fundamental del Cálculo, y él lo ocupa reiteradamente en los problemas de variación. Lo que acontece en estados vecinos queda caracterizado por los ambientes físicos; en particular en los fenómenos de

[9] Ver Cantoral 2001

flujo es donde es esencial una descripción de cómo es que sucede dicha evolución, en otras palabras, poder anunciar lo que acontecerá con el comportamiento del flujo antes de que suceda, es decir, predecir.

Para ello, es necesario considerar la diferencia $\phi(A+h)-\phi(A)$, donde

$\phi(A+h)-\phi(A)=\phi'(A)h+\frac{\phi''(A)h^2}{2!}+\frac{\phi'''(A)h^3}{3!}+...$ (*);

esta diferencia resulta esencial para conocer lo que pasará en un estado posterior.

Newton recalca la importancia del estudio de esta diferencia a partir de los datos iniciales que proporciona el fenómeno bajo estudio; en otras palabras, contar con información inicial como $h, A, \varphi(A), \varphi'(A), \varphi''(A), ...$ permite:

- conocer el estado posterior del parámetro físico observado, que es, $\varphi(A+h)$
- realizar un análisis de la diferencia esencial $\varphi(A+h)-\varphi(A)$

Así, la expresión en (*) es el instrumento cognoscitivo con el que habrá de analizar tal diferencia esencial. Además, se caracteriza la primera evolución de las variables asociadas al flujo cuando h sea el elemento diferencial dA.

La expresión $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)h^2}{2!}+...$ establece una relación entre el estado vecino $f(x+h)$ con el estado primitivo caracterizado por un conjunto infinito numerable de datos como los son $x, h, f(x), f'(x), f''(x), ...$

Se observará, naturalmente, la relación de lo anterior con la Serie de Taylor.

Brook Taylor (1685-1731)

Basándose en los trabajos de Newton, Taylor realiza la primera publicación del teorema que hoy lleva su nombre, en 1715, en *"Methodus incrementorum directa et inversa"*; según su propia descripción, el método consiste en *estimar el valor de una ordenada a partir del conocimiento de otra que se encuentra ubicada en sus proximidades.*

La operación que lleva a cabo Taylor es tomar el límite cuando h tiende al infinito de la expresión

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}h + \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2!} + \frac{d^3 f(x)}{dx^3}\frac{h^3}{3!} + \ldots$$

Ya en la presentación que hace Taylor de su serie (estimar el valor de una variable a partir de otra que se encuentra en sus proximidades) vemos expresada sutilmente la noción de la serie como instrumento de predicción.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

La obra de Lagrange es considerada como un intento de fundamentar el Cálculo sobre bases más firmes que las que poseía; él quiere sustituir todo lo hecho hasta entonces por un método algebraico más simple cuyo objetivo persigue proporcionar al Cálculo todo el rigor de las demostraciones antiguas[10].

Tal intención se nota ya en el título de su obra fundamental en este sentido: *"Théorie des Functions Analytiques. Les Principes du Calcul différentiel, dégages de toute consideration d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et récluits á l'analyse algébraique des quantités finies*".

En la primera parte de este libro se explica lo que hoy se llama *método de Lagrange*, que él describe de la siguiente forma:

Toda función f se puede escribir de la siguiente manera:

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \ldots$$

donde $f'(x) = p \qquad f''(x) = 2!q \qquad f'''(x) = 3!r$

[10] Cf., por ejemplo, Alanís (1996)

En otras palabras, Lagrange intenta justificar que toda función es analítica, es decir, que el desarrollo de las funciones en Serie de Taylor es siempre posible, cualquiera que sea la función.

Cantoral (2001) hace algunas precisiones respecto de la obra de Lagrange, desde una perspectiva socioepistemológica:

Hacia finales del siglo XVIII, la evolución de la predicción encuentra un marco de organización en la noción de lo analítico (esto ocurre básicamente en la obra recién citada).

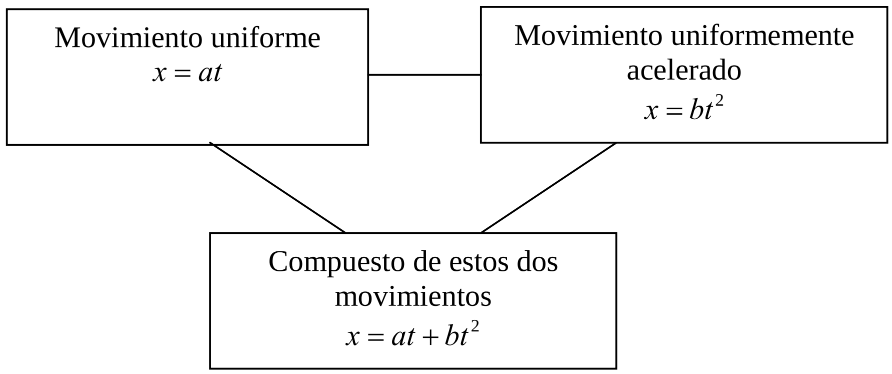
Lagrange (como Euler, de quien es sucesor) entiende por función analítica una función primitiva y sus funciones derivadas.
Esto tiene mucha importancia para las aplicaciones que hace de su teoría a la Mecánica. En efecto, ya en el Capítulo 1 de la obra ya citada, el índice nos muestra su intención:

- referido al objeto de la mecánica
- del movimiento uniforme y movimiento uniformemente acelerado
- del movimiento rectilíneo en general
- la relación entre el espacio, la rapidez y la fuerza aceleratriz

Para su análisis, requiere considerar a las funciones dependientes del tiempo, y utiliza series con residuos para deducir las ecuaciones que describen el movimiento de una partícula.

Cantoral estima que esa obra representa una sistematización de la visión paradigmática de su época y no como erróneamente se ha creído, un mero intento fallido de fundamentación del Cálculo.

Cantoral intenta, además, explicar lo que hacía pensar a Lagrange que toda función puede representarse como una Serie de Taylor; para ello, Cantoral procede según lo siguiente (ver esquema 2.1.2c.)



Esquema 2.1.2c.

Lagrange sistematiza el estudio del *movimiento rectilíneo.* Para ello, considera la ecuación $x = f(t)$, que da cuenta de la posición de x en el tiempo t; la expresión más simple que puede tener $f(t)$ es at donde a denota una constante.
Así, el movimiento representado por la ecuación $f(t) = at$ se refiere a que los espacios recorridos son proporcionales a los tiempos respectivos, es decir, se habla del movimiento uniforme con a como la rapidez constante; que expresa la razón del espacio con el tiempo. Con ello Lagrange comenta la ley de inercia

Luego explica que la ecuación $x = bt^2$ representa al movimiento uniformemente acelerado, donde b es la aceleración constante, y expresa que la caída libre es ejemplo de movimiento uniformemente acelerado.

Lagrange señala que cualquier movimiento puede considerarse como compuesto por movimientos simples, de modo que su ecuación es el compuesto de los dos movimientos ya mencionados:

$x = at + bt^2$

está compuesto de un movimiento uniforme y de un movimiento uniformemente acelerado.

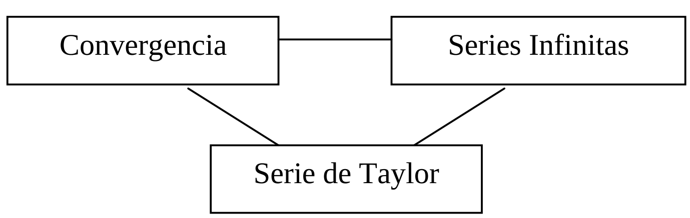
Lagrange dice que la naturaleza nos ofrece la composición de estos dos movimientos (en los cuerpos pesados lanzados verticalmente hacia arriba haciendo abstracción de la resistencia del aire y de cualquier otra cosa extraña).

Luego señala la naturaleza de la expresión de la posición futura para la cual considera que se tiene un movimiento rectilíneo cualquiera que lo representa por la ecuación $x = f(t)$ (una función cualquiera de t):
El móvil ha recorrido el espacio $f(t)$ en el tiempo t y habría recorrido el espacio $f(t+\theta)$ en el tiempo $(t+\theta)$. Entonces $f(t+\theta)-f(t)$ será el espacio que recorre en el tiempo θ comenzando en el instante t.
La función $f(t+\theta)$ será desarrollada siguiendo las potencias de θ, de modo que

$$f(t+\theta)=f(t)+\theta f'(t)+\frac{\theta^2}{2}f''(t)+etc$$

II.1.3. Augustin L. Cauchy (1789-1857)

Es importante mencionar siquiera, para nuestro análisis, la obra de Cauchy, por su manera de interpretar la Serie de Taylor y además por el hecho de ser quien hasta nuestros tiempos ha predominado en el discurso matemático escolar en este ámbito.
A continuación se han destacado los tópicos afines con nuestro tema que Cauchy relaciona en sus trabajos (ver esquema):



Esquema 2.1.2d.

A Cauchy le preocupa el hecho de que una serie infinita puede converger o no, de manera que hay que hacer, cada vez, un análisis de convergencia, y la Serie de Taylor es un ejemplo en el estudio de esas series.

Por otro lado Cauchy no está de acuerdo con Lagrange respecto a la fundamentación del cálculo diferencial, y muestra la existencia de funciones para las cuales su serie de Taylor, aunque convergente, no tiene por límite a la función propuesta (por ejemplo, las funciones $f(x)=e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ o $f(x)=e^{-x^2}+e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$)

En forma bastante esquemática, Cauchy propone lo siguiente:

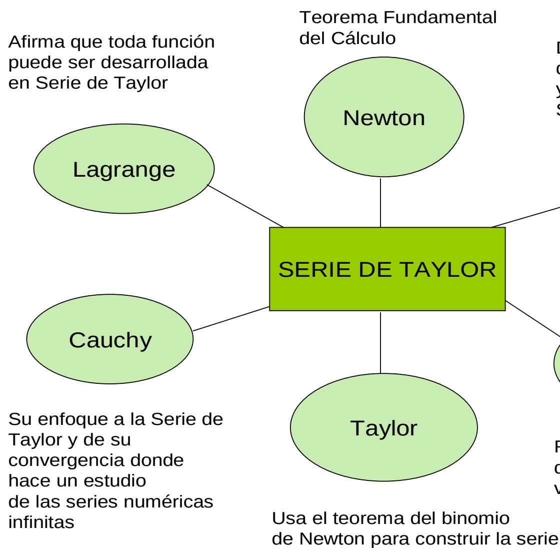
- Una serie es convergente cuando sus sumas parciales tienen un límite (suma de la serie)
- Propone y demuestra un teorema que establece una condición necesaria y suficiente para investigar la convergencia de una serie sin necesidad de conocer su suma.
- Establece que si una función puede desarrollarse en series de potencias, ésta sería la Serie de Taylor.
- Discute sobre el residuo de la Serie de Taylor, propone su forma integral (mediante integración por partes y el uso reiterado del Teorema Fundamental del Cálculo).

En el Cálculo Diferencial de Cauchy, la Serie de Taylor es un teorema más de la teoría; por el contrario, la visión que tiene Lagrange al respecto es que se trata del punto de partida, la base del desarrollo posterior, según manifiesta en su Teoría de Funciones Analíticas.

II.1.4 Visión general del tratamiento de la Serie de Taylor por distintos matemáticos

Collin Maclaurin (1698-1764) desarrolló criterios para determinar máximos y mínimos a partir de la Serie de Taylor.
Por otra parte, el trabajo de Cauchy será prolongado por Silvestre François Lacroix (1765-1843) a funciones de varias variables.

Un resumen de los resultados más relevantes para nuestro tema de investigación se encuentra en el esquema siguiente:



Esquema 2.1.4: Algunos matemáticos en relación con la Serie de Taylor

II 1.5 Comentario

El resumen esquemático anterior no hace justicia pero sugiere los desarrollos matemáticos actuales, que se verán más adelante.

La aproximación histórica hecha hasta aquí muestra la complejidad del problema, que se puede apreciar a partir del Teorema de Bolzano-Weierstrass, según describimos a continuación.

Un matemático sabe que los números reales pueden aproximarse por números racionales: cualquier número real puede desarrollarse (en su expansión decimal) con la precisión que se desee; de hecho, para muchas aplicaciones físicas directas se trabaja sólo con números racionales. Ahora bien, si se va a analizar un proceso que requiere de estimación en un período largo de tiempo, habrá que buscar el punto de convergencia de la sucesión –si ella es convergente–, que podría no ser un número racional (ese límite, claro está, a su vez puede conocerse con la precisión que se desee, usando racionales).

En la base de la posibilidad de realizar estos cálculos, está el hecho de que el conjunto **Q** de los racionales es denso en el conjunto **R** de los reales.

La correspondiente analogía con el caso de las funciones fue ya sugerida, si bien no con la precisión debida, por Newton, según se sugiere en el esquema 2.1.2b (página 47). De todas maneras, ni Newton ni Lagrange están conscientes de que el problema de aproximación debe encararse según la convergencia eventual de las series involucradas aludidas, cosa que hará explícitamente A. Cauchy.

Con mayor precisión, lo que se requiere es demostrar que una función tiene, efectivamente, un desarrollo en serie, para lo cual, se sabe hoy día, ha de cumplir ciertos requisitos: por ejemplo, que sea uniformemente continua. Un análogo a la densidad de los racionales en los reales es precisamente el Teorema de Bolzano-Weierstrass: si K es un conjunto compacto en un espacio métrico, el conjunto de las funciones polinómicas definidas en K es denso en el conjunto de las funciones continuas definidas en K. Esto significa que, en ese caso, toda función continua se puede aproximar por polinomios con la precisión que se desee, en otras palabras, tiene un desarrollo en Serie de Taylor en cada punto de ese dominio.

Ahora bien, si la función no es continua o bien su dominio no es compacto, se tiene ejemplos claros de que no haya el desarrollo en serie que se busca.

Por otra parte, el resumen hecho no refleja los problemas concretos que los matemáticos señalados enfrentaron. De hecho, el propósito de Newton, por ejemplo, no es sólo el de hacer lo que hoy llamaríamos un libro de Cálculo, sino de encontrar *los principios matemáticos de la Filosofía natural*[11], esto es, el estudio del mundo, en otras palabras, el Cálculo no es una herramienta creada sólo con propósitos puramente matemáticos, sino para desentrañar lo que serían las leyes de la Naturaleza.

Hasta Galileo, la pregunta había sido *por qué, y* Aristóteles había procurado encontrar las *causas* de los fenómenos. Galileo reemplaza causas y efectos por antecedentes y consecuentes; Newton contradirá expresamente a Aristóteles: no interesan las causas, sino que, a partir de unos cuantos principios elementales, describir qué va a pasar[12]. Es

[11] En efecto, su texto se denomina *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*

[12] "Decirnos que cada especie de cosas está provista con una cualidad específica oculta por medio de la cual actúa y produce efectos manifiestos, es decirnos nada: Pero derivar desde los fenómenos dos o tres

decir, la pregunta filosófica ha sido reemplazada por la búsqueda de leyes que permitan predecir el comportamiento de los fenómenos –no por qué suceden o se comportan así–.

II.2 Una mirada a la Serie de Taylor en los textos

En las secciones anteriores hemos tratado a la Serie de Taylor en su epistemología y visto su relación con otros dominios matemáticos como la Física, por lo que es necesario hacer alguna declaración de cómo vive la Serie de Taylor en los textos tanto de Matemática como de Física.

Describiremos aspectos relevantes de lo realizado por el Dr. Ricardo Cantoral en su libro *"Un estudio de la formación social de la analiticidad"* en que se trata esa cuestión, y, por otro lado, presentaremos una breve descripción de algunos de los textos de Cálculo Diferencial que se utiliza en los programas de carreras impartidas en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV)[13].

II.2.1 Aspectos del análisis realizado por Cantoral

En Cantoral (2001) encontramos un estudio profundo del **discurso escolar vigente[14],** haciendo alusión a un análisis de textos tanto de Física como de Matemática. A continuación se mencionarán los aspectos que se estiman necesarios para cumplir con el objetivo de esta sección.

En la revisión de textos de matemáticas y de física se encuentra los siguientes aspectos:

- En los textos de matemáticas la Serie de Taylor aparece desconectada del resto del cuerpo del libro.

principios generales del movimiento, y después decirnos cómo las propiedades y acciones de todas las cosas corpóreas siguen de esos principios manifiestos sería un gran paso en la filosofía aunque las causas de esos principios no hubieren sido aun descubiertas"

[13] La autora trabaja en esta institución.

[14] En su caso, de la República de México, pero con bastante intersección con otros países de Latinoamérica, según es fácil de inferir y comprobar.

- En los textos de física aparecen ciertas nociones pre-cauchianas *"Si p representa cierto parámetro físico en el instante t, un momento después, este parámetro sería $p+dp$"*

Frente a los aspectos mencionados Cantoral manifiesta que el contraste que se visualiza en los textos tiene raíces en la historia, mediante una transposición didáctica llevada a cabo desde los años 20 del siglo XIX.

Percibiendo hoy en día la coexistencia de dos modelos, éstos son:

Modelo A

Desde los trabajo de Newton a Lagrange

La expresión de la Serie lleva intrínseca un significado propio de la ciencia física.

Modelo B

Desde los trabajos de Cauchy

Reconstruye el Cálculo basado en el concepto de límite, toma a la Serie como un teorema más de la teoría, como una consecuencia del concepto de límite y el teorema del valor medio

Nos podemos preguntar *¿cuál ha sido la evolución de estos modelos?* y en Cantoral encontramos una respuesta donde manifiesta que lo que ocurre con estos modelos es que de los contextos físicos se pasa a otra visión, en el sentido de que en el ambiente físico la Serie tenía un rol importante en la resolución de problemas estudiados en cambio la visión a la que se pasa queda enmarcada en la preocupación por su relación con el tema de límites y la convergencia de series infinitas donde hoy en día es lo que se tiene presente en el estudio.

Siguiendo en la línea del análisis de textos podemos hacernos la pregunta ¿qué es lo que se está perdiendo? y podemos encontrar algo al respecto

- **Uso de la Serie**: *"La naturalidad con la que deducían y utilizaban la Serie se pierde debido a que los textos incorporan a su discurso los asuntos propios de la convergencia que es su preocupación"*.

- **Residuo de Lagrange**: *“garantizaba la aplicación de la Serie a diversos fenómenos físicos, asegurando que la cola de la serie era insignificante respecto de los primeros términos, se usa ahora para probar la convergencia en todo un intervalo”*.

Ahora continuando con la conexión en las secciones anteriores podemos decir que dentro del análisis que nos brinda Cantoral, él hace referencia a dos ideas principales de acercamientos del estudio de la Serie de Taylor que son: convergencia y predicción.
Estas ideas se ubican en lo que se llama paradigma cauchiano y paradigma newtoniano

Paradigma Cauchiano	**Paradigma Newtoniano**
El Cálculo descansa en objetos formales: *función* y *límite*	Se apoya en los fenómenos de naturaleza física: *flujos*
La noción de convergencia hace de la Serie de Taylor un asunto de representación funcional, es decir, se expresa en términos de que la función puede ser aproximada por polinomios en la vecindad del punto elegido	La idea de predicción se refiere al estudio de la cuantificación de las “formas” variables de la naturaleza: partículas móviles, cuerpos terrestres y celestes y los fenómenos de flujo continuo. La pregunta planteada inquiere sobre el comportamiento del estado vecino sobre la base de los datos del estado de facto
La idea de convergencia se manifiesta en la Serie como que la función se expresa como la serie infinita	Dicha pregunta lleva como respuesta una expresión para la Serie de Taylor de la forma Donde se conocen los datos iniciales se precisa encontrar el valor de …

En la siguiente tabla se ve la manifestación de la Serie de Taylor expresada a través de las ideas de convergencia y predicción

Convergencia	Predicción
$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=\begin{cases}\vartheta\left[(x-a)^n\right]\\ R_n(x)\\ E_n(x)\end{cases}$	*"Si p representa cierto parámetro físico en el instante t, un momento después, este parámetro sería $p+dp$"* *Si se conoce el estado inicial del fenómeno, esto es,* $f(0), f'(0), f''(0), \ldots$ *se tiene que un instante después* $f(t)=f(0)+f'(0)t+\frac{f''(0)t^2}{2!}+\ldots$

<u>En la revisión de los textos de matemática</u>

La presentación de la Serie de Taylor se antecede entonces por algunos de los teoremas que han sido transmitidos a los cursos de Cálculo como lo son:

- Teoremas sobre continuidad en intervalos
- Teorema del valor medio
- Los criterios de convergencia de series numéricas infinitas
- Construcción de los números reales como estructura teórica

Cantoral realiza un análisis detallado de textos y particularmente los textos de matemática los divide en: textos de análisis matemático y textos de Cálculo.

En el análisis llevado a cabo de los textos de Análisis Matemático los que trabaja son los siguientes:
Bartle (1982); Ross (1980); Courant (1965); Apostol (1967); Swokowski (1987)

Referente a los textos analizados Cantoral menciona lo siguiente:
Todos siguen la misma secuencia en relación a cómo presentan la Serie, haciendo primero alusión a la potencia del uso de la serie como análisis matemático dado que permite manejar cierta clase de funciones como polinomios, luego se apoyan de axiomas de completitud de los reales y los teoremas de los medios para así dar paso a construir o enunciar el polinomio de Taylor y prueban el teorema de Taylor cuyo significado consiste en que es posible expresar a una función con propiedades especiales como la suma de un polinomio de Taylor y un resto.

Texto de Cálculo sólo hace referencia a Rothe (1959)

Respecto a este análisis Cantoral dice que es usual iniciar con que la función es ya una serie de potencia, lo sea porque toda vez que la serie es convergente se denomina $f(x)$ a su suma, o bien por una analogía con los polinomios se asume que $f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...$ por lo que el problema ahora es entonces calcular los a_i

<u>En la revisión de los textos de física y de ingeniería</u>

Aparecen ideas estrechamente vinculadas a las nociones pre-cauchianas de la Serie de Taylor. La serie se usa como instrumento de predicción y no como un objeto de convergencia como aparece en los textos de matemática.

II. 2.2 Análisis de textos en la PUCV

En esta sección se realizará un análisis global de cómo es tratada la Serie de Taylor en algunos textos (3) que se ocupan como parte del programa de ciertas carreras de la

PUCV. Dicho análisis global no ha tenido otro objetivo que el de observar cómo es que se presenta la Serie de Taylor, recordando que éstos son textos que utiliza tanto el estudiante como el profesor que dicta el curso, por ello es que la revisión ha sido de manera general, sin una metodología específica a tratar, en que se puede apreciar qué elementos aparecen antes de definir la Serie de Taylor y cuáles son tratados posteriormente a la definición, etc

El primer texto a mencionar a pesar de no ser tratado como texto guía en los cursos se estimó necesario hacer mención por el tratamiento que se le da a la Serie de Taylor.

Granville (1908)

"Calculo Diferencial e Integral" por William Anthony Granville

El texto consta de 27 capítulos pero mencionaremos los que tienen directa relación con la Serie de Taylor y puntualizaremos cómo es que se presenta la Serie de Taylor en este texto.

Capítulo XIX: Series

Este capítulo aborda los siguientes temas:

Definiciones, la Serie Geométrica, Series convergentes y divergentes, Teoremas generales, Criterios de comparación, Criterio de D'Alembert, Series alternadas, Convergencia absoluta, resumen, Series de potencias, la serie binómico, otro tipo de series de potencias

Capítulo XX: Desarrollo de funciones en serie de potencias

Este capítulo aborda los siguientes temas:

Serie de Maclaurin, Operaciones con series infinitas, Derivación e integración de series de potencias, deducción de fórmulas aproximadas de la serie de Maclaurin, *Serie de Taylor* (página 450), otra forma de la Serie de Taylor (página 452), formas aproximadas deducidas de la serie de Taylor (página 454)

Capítulo XXIV: Aplicaciones de las derivadas parciales

Teorema de Taylor para dos o más funciones (página 598)

A continuación especificaremos cómo se da el tratamiento de la Serie de Taylor

Serie de Taylor. Una serie de potencias de x convergente se adapta bien al propósito de calcular el valor de la función que representa para valores *pequeños* de x (próximos a cero). Ahora deduciremos un desarrollo de potencias de $x-a$ siendo a un número fijo. La serie que así se obtiene se adapta al objeto de calcular la función que representa para valores de x cercanos a a.

Supóngase que

$$f(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\ldots+b_n(x-a)^n+\ldots \quad (*)$$

y que la serie representa la función. La *forma necesaria* de los coeficientes b_0, b_1, b_2, etc se obtiene derivando sucesivamente (*) con respecto a x, suponiéndose que esto es posible. Así obtenemos

$$f'(x)=b_1+2b_2(x-a)+\ldots.+nb_n(x-a)^n+\ldots$$

$$f''(x)=2b_2+\ldots+n(n-1)b_n(x-a)^{n-2}+\ldots$$

Etcétera.

Sustituyendo $x=a$ en estas ecuaciones y en (*) y despejando a b_0, b_1, b_2 obtenemos

$$b_0=f(a),\ \ b_1=f'(a)\ ,\ \ b_2=\frac{f''(a)}{2}\ ,\ \ldots\ldots,\ \ b_n=\frac{f^n(a)}{n}$$

Sustituyendo estos valores en (*), el resultado es la serie

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}+\ldots+f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n}+\ldots \quad \textbf{(A)}$$

La serie se llama *serie (o fórmula) de Taylor*

Ahora examinaremos la serie (A). Haciendo $b=x$ se obtiene:

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{(x-a)}{1}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}+\ldots+f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{n-1}+R\textbf{,} \quad \textbf{(B)}$$

En donde $R=f^{(n)}(x_1)\dfrac{(x-a)^n}{n} \quad (a<x_1<x)$

El término R se llama término complementario o residuo después de n términos

Ahora bien, la serie del segundo miembro de (B) concuerda con la serie de Taylor (A) hasta n términos. Representando la suma de estos términos por S_n, de (B) se deduce:

$f(x) = S_n + R$, o sea, $f(x) - S_n = R$

Si suponemos ahora que para un valor fijo $x = x_0$ el residuo R tiende a cero cuando n se hace infinito, entonces

$\lim_{n\to\infty} S_n = f(x_0)$ y (A) converge para $x = x_0$ y su límite es $f(x_0)$.

Teorema. *La serie infinita (A) representa la función para aquellos valores de* x, *y solamente para aquellos, para los cuales el residuo tiende a cero cuando el número de términos aumenta infinitamente*.

Ejemplo que trata: Desarrollar $\ln x$ en potencias de $(x-1)$

Otra forma de la Serie de Taylor.

Si en (A) reemplazamos a por x_0 y hacemos $x - a = h$, es decir, $x = a + h = x_0 + h$, el resultado es

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{1} + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + \dots + f^n(x_0)\frac{h^n}{n} + \dots}$$

En esta segunda forma el *nuevo valor* de $f(x)$ cuando x cambia de x_0 a $x_0 + h$ se desarrolla en una serie de potencias de h, que es el incremento de x

Ejemplo que el libro ubica en esta segunda mirada de la Serie de Taylor es el siguiente:

Desarrollar $senx$ en una serie de potencias de h cuando x pasa de x_0 a $x_0 + h$

Lang

"A complete course in Calculus" por Serge Lang

Capítulo XIV: Taylor's Formula (página 243-263)

El capítulo está subdividido en siete secciones de las cuales se nombraran las siete y se especificará lo que tenga relación con Taylor

Fórmula de Taylor, Estimación por el residuo, Funciones trigonométricas, Función exponencial, Logaritmo, Arcotangente, La expansión binomial, Ejercicios

En la primera sección trata lo siguiente:

Sea f una función la cual es diferenciable en algún intervalo. Podemos entonces tomar su derivada f' en aquel intervalo. Suponga que es derivable y también diferenciable.

En la notación $\frac{d}{dx}$, también se escribe: $f^{(2)}(x)=\frac{d^2 f}{dx^2}$; $f^{(3)}(x)=\frac{d^3 f}{dx^3}$

La Fórmula de Taylor de un polinomio, el cual aproxima a la función, en términos de la derivada de la función. Ya que estas derivadas son comúnmente fácil de calcular, esto no es difícil de calcular sus polinomios.

Teorema 1

Sea f una función definida en un intervalo cerrado entre dos números a y b. Asumamos que la función posee n derivadas en este intervalo, y que todas sus funciones son continuas. Entonces

$$f(b)=f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+R_n$$

Donde R_n es la integral llamada el residuo; $R_n=\int_a^b \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt$

Se probará que R_n puede ser expresada de una forma muy similar a la de otros términos

$R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$ para algún número c entre a y b

La fórmula de Taylor con esta forma es entonces muy fácil de memorizar.

Se ve el caso cuando $a=0$ quedando la fórmula de la siguiente manera:

$$f(b)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}(b)+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}(b)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}(b)^{n-1}+R_n$$

Donde $R_n=\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt$

Teorema 2

En la fórmula de Taylor del teorema 1 existe un número c entre a y b tal que el resto R_n está dado por $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$ si M_n es un número tal que $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M_n$ para todo x en el intervalo entonces $\left|R_n\right| \leq \dfrac{M_n\left|b-a\right|^n}{n!}$

Teorema 3

Asumiendo dado el teorema 1, tenemos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \ldots + f^{(n-1)}(a)\frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!} + R_n$$

Con la estimación $\left|R_n\right| \leq M_n \dfrac{|h|^n}{n!}$ donde M_n está resuelto por el valor absoluto de la n-ésima derivada de f entre a y $a+h$.

Esto muestra que podemos expresar $f(x)$ en términos de un polinomio, y un término de residuo, el polinomio existente es llamado polinomio de Taylor

$P_n(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n$ donde $c_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, llamamos c_k al k-ésimo coeficiente de Taylor de f

Capítulo XV: Series (página 264-283)

Este capítulo trata los siguientes temas: Series convergentes, Series con términos positivos, la prueba del radio, la prueba de la integral, convergencia absoluta y alternativa, series de potencia, diferenciación e integración de series de potencia.

Michael Spivak (1922)

"Calculus" Calculo Infinitesimal, segunda edición

En este texto, en particular, en el capítulo 19 "Aproximación mediante funciones polinómicas" en la página 576 podemos encontrar cómo es que se aborda el teorema de Taylor.

Teorema 4 (Teorema de Taylor)

Supóngase que $f', f'', ..., f^{(n+1)}$ están definidas sobre $[a, x]$, y que $R_{n,a}(x)$ está definido por $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x)$

Entonces:

1. $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a)$ para algún t de (a, x)
2. $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para algún t de (a, x)

Además si $f^{(n+1)}$ es integrable sobre $[a, x]$ entonces

3. $R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$

En el capítulo 23: "Convergencia uniforme y series de potencia" en la página 699 se expresa la serie de Taylor, el autor menciona la importancia que desempeña en el teorema anterior (la prueba de Weierstrass Teorema 4, página 693), la prueba M de Weierstrass constituye un instrumento ideal para analizar funciones de cierta regularidad. Dicho esto el autor dice que se pondrá atención especial a funciones de la forma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ las cuales pueden ser descritas mediante la ecuación $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ para $f_n(x) = a_n(x-a)^n$. Una tal suma de funciones que dependen solamente de potencias de $(x-a)$ recibe el nombre de **serie de potencia centrada** en a.

El autor aclara lo siguiente: por razón de sencillez, nos concentraremos por lo general en series de potencias centradas en el 0.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Un grupo especialmente importante de series de potencias son las de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, donde f es alguna función que tiene derivadas de todos los órdenes en a; esta serie recibe el nombre de **serie de Taylor para f en a**. Por supuesto, no se cumple necesariamente que $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, esta ecuación se cumple solamente cunado los restos satisfacen $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x)=0$

Entre el capítulo 19 y el 23 se encuentran temas como
Capítulo 20: ε es trascendente
Capítulo 21: Sucesiones infinitas
Capítulo 22: Series infinitas

II.2.3 Comentario acerca de la revisión de textos

Los textos revisados presentan una manera similar de tratar la Serie de Taylor, pero se pueden apreciar algunas diferencias en su tratamiento, como por ejemplo, en el texto de Granville se realiza un tratamiento de cómo se llega a expresar la serie (o fórmula) de Taylor y a partir de allí habla del residuo, algunas palabras que aparecen en su escrito son cercanía, incremento, en cambio en el texto de Lang expresa la serie de Taylor más abruptamente y aparecen el tema del residuo; en el texto de Spivak cuando escribe el residuo presenta tres puntos al respecto y el autor trata de dejar al lector claridad en la importancia de los teoremas y los temas que vienen, en otras palabras, entrelaza. Por otro lado, si ponemos atención a los ejercicios de estos textos, éstos no se escapan a lo tratado como estructura del tema en cuestión, en otras palabras, generalmente se pide lo que se ha trabajado en el texto y no se puede apreciar algún interés por presentar la serie de otra manera y por ende enfocar los problemas o ejercicios desde otro punto de vista.
Sin embargo, en términos globales podemos declarar que el discurso en los textos revisados es más cercano a Cauchy y compartimos las conclusiones que realizó Cantoral en la revisión de textos. En relación a la Socioepistemología del Cálculo propuesta en el capítulo anterior y conectando con lo revisado podemos decir que efectivamente el tratamiento de la Serie de Taylor se enmarca en la situación de aproximación y su tratamiento no es de carácter funcional.

II.3 La Serie de Taylor como objeto matemático

Una vez hecha la visión que se da a la Serie de Taylor en los textos de estudio y habiendo revisado cómo ella aparece a través del análisis histórico-epistemológico, situaremos ahora la mirada en la Matemática, para luego hacer una reflexión en relación con nuestro objetivo.

Interesa trabajar con sucesiones de funciones que converjan a una función f .

Como sabemos, se trata de la cuestión siguiente:

Sea (M,*d*) un espacio métrico, y sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en M, y sea f una función en M. En símbolos, (f_n) converge a f se expresa como sigue:

$$(f_n) \to f \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(n > n_0 \Rightarrow d(f_n - f) < \varepsilon) \text{ con } f_n \in B(f, \varepsilon)$$

Uno de los cuestionamientos es qué propiedades de las funciones de la sucesión se mantienen para f, esto es, preguntarse cómo es la función f y cómo deben ser las f_n. Si las f_n son continuas, entonces f es continua; si las f_n son diferenciables, entonces f es diferenciable.

Sin embargo, hay problemas con la derivabilidad, por cuanto las derivadas de las f_n no siempre convergen a la derivada de f, e interesa saber cuándo lo hacen.

En el caso de que las f_n sean funciones polinómicas, se tiene esa convergencia:

Si las f_n son polinomios del tipo $f_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$, y dependiendo de los parámetros a_k, la sucesión (f_n) converge uniformemente a una f en un conjunto con radio de convergencia determinado, es decir, se tiene

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ , donde } f^{(n)}(k) = \frac{a_n}{n!}.$$

Se ve claramente que f tiene infinitas derivadas en x_0 .

El razonamiento anterior, sin embargo, no muestra el fenómeno de la variación que nos ocupa.

En el discurso escolar actual se pierde el sentido de variación porque se hace énfasis sólo en un cálculo mecánico (hasta la segunda derivada). Se habla de convergencia y no del concepto de variación ni de que una función f se aproxima por una sucesión de funciones polinómicas, en los coeficientes de los cuales se podría leer directamente el concepto de variación: los a_k, según la fórmula $f^{(n)}(k) = \frac{a_n}{n!}$.

II. 4. Modelo predictivo propuesto

El diseño de situación que se verá más adelante se apoyará en un modelo predictivo propuesto por Cantoral (2001).

Nos interesa ese modelo porque permite, precisamente abordar una situación de variación en donde la predicción es el argumento que predomina. A continuación destacamos los aspectos relevantes de ese modelo que tienen relación con el objetivo de esta investigación.

A modo de introducción

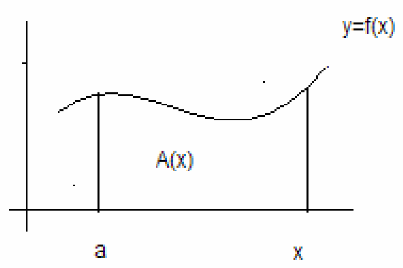
Supongamos que observamos un flujo cualquiera –por ejemplo, el movimiento del agua en un río o una acequia–. A primera vista, el movimiento es muy desordenado y las partículas se mueven cada una por su cuenta, de acuerdo a accidentes no siempre aparentes (piedra oculta bajo el río, por ejemplo). Un análisis de carácter matemático que pretenda encontrar alguna regularidad deberá fijarse no solo en el movimiento en sí sino *en la manera en que cambia*.

Ello requerirá de estrategias que permitan describir en detalle la evolución de ese movimiento, su pasaje sucesivo de unos estados a otros. A su vez, esto necesita de ubicar variables que dependan unas de otras, y establecer relaciones funcionales entre ellas –fórmulas–. Tratándose de un fenómeno físico, habrá que localizar esas variables y medirlas, pero la formulación no necesariamente aparece a la primera mirada: habrá que conjeturar, experimentar, y, además, la relación de variación entre las variables buscada puede no ser aparente sino después de examinar la relación entre sucesivas variaciones instantáneas.

Ilustración

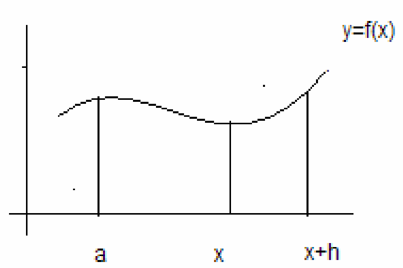
Damos aquí un ejemplo clásico de lo descrito, cuya justificación aparece más adelante; usamos dos aproximaciones diferentes, una de ellas hace uso del proceso de integración.

Supongamos que tenemos una curva de ecuación $y = f(x)$ y que queremos encontrar el área *A(x)* que ella encierra conjuntamente con el eje *OX* y las correspondientes ordenadas de las abscisas a y x.



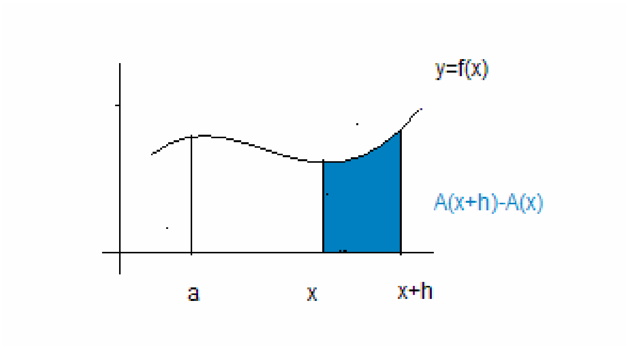
La idea es encontrar una fórmula que relacione las variables asociadas $a, x, f(x), A(x)$; para ello, buscaremos la regularidad entre sus cambios.

Fijémonos primero en la variación de la variable de área desde su valor $A(x)$ hasta su valor $A(x+h)$



Midamos la variación del área en el tiempo *h*, esto es, $A(x+h) - A(x)$.

Esta diferencia denota el área entre las ordenadas de x, $x+h$,el eje y la curva $y = f(x)$.



$A(x+h)-A(x)$ es también el área de una figura de base h y altura variable $f(x)$

Ahora bien, por el teorema del valor medio, si h es infinitamente pequeño, $f(x)$ puede considerarse constante y el rectángulo tendrá un área igual a $f(x)h$. Así, tendremos:

$A(x+h)-A(x)=f(x)h$, es decir, $\dfrac{A(x+h)-A(x)}{h}=f(x)$, y por tanto, cuando h tiende a 0, tendremos $A'(x)=f(x)$.

De esta manera se ha encontrado una relación funcional que regula los cambios del área respecto de las ordenadas.

Desde esa relación, podemos proseguir de dos modos distintos:

- Una de ellas consiste en usar el proceso de integración y obtener de inmediato

  $$A(x)=\int_a^x f(x)dx$$

- La alternativa es considerar nuevamente la ecuación

  $$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=f(x)$$

Ahora bien, cuando h es finito, el área posterior $A(x+h)$ se puede expresar en términos de las variables conocidas, esto es, $A(x+h)=A(x)+f(x)h$

Mirarlo así no centra la atención en los conceptos de derivada o integral sino en el fenómeno de variación que se estudia.

Esto último significa que, si buscamos la ley que gobierne las relaciones funcionales entre el área, la abscisa, la ordenada y el incremento, habremos de estudiar la variación de la magnitud principal buscada; esto es cuando *x* varía a *x+h, entonces el área* $A(x)$ varía a $A(x+h)$.

La pregunta inicial entonces, se convierte en: ¿Quién es $A(x+h)$ en términos de $A(x)$, $f(x)$, h y x?

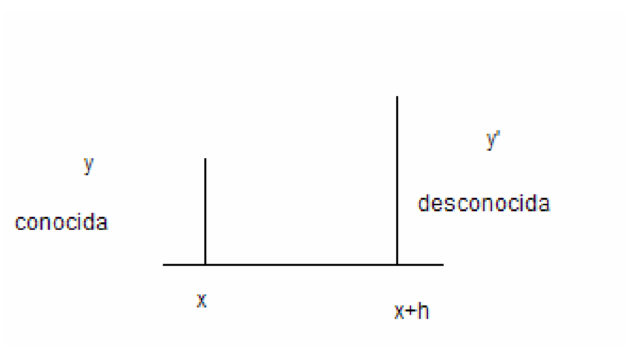
La respuesta radica en la geometría de la situación, ello permite expresar:

$A(x+h) = A(x) + f(x)h + \text{algo}$

Sigue que $A'(x) = f(x)$

Generalización

En términos generales, tenemos lo siguiente: si deseamos saber la variación que sufre $F(x)$, es decir, conocer $F(x+h)$, el problema es encontrar una estrategia general que permita la *predicción*, es decir, anunciar el estado posterior $F(x+h)$ de la variable $F(x)$.



Un problema clásico de cinemática

Hasta aquí, no hemos hecho referencia a las series para resolver nuestro problema de predicción. Incluimos ahora un ejemplo clásico de cinemática que sugiere cómo es que las series dan respuesta al problema que hemos venido considerando.

Supongamos que conocemos los datos del estado inicial el sistema, esto es, $t = 0$, $s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$, $a(0) = a$

La pregunta es buscar los valores del sistema en cualquier estado posterior, esto es, $t = t$, $s(t) = ?$, $v(t) = ?$ y $a(t) = ?$.

Se sabe que las ecuaciones de la cinemática para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado que *s(t), v(t)* y *a(t)* tienen las fórmulas

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

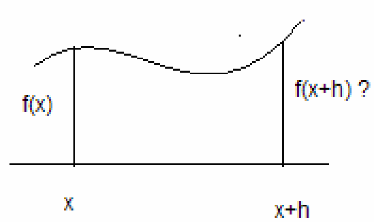
$$v(t) = v_0 + at$$

$$a(t) = a$$

Por lo general, se recurre a argumentos tradicionales para deducir estas fórmulas, ya sea en términos geométricos, algebraicos y de cálculo integral, olvidándose de mencionar siquiera la conexión de esos tratamientos con el problema original del movimiento.
Ahora bien, si ese problema se plantea como uno de naturaleza similar al de la determinación de la fórmula para el área bajo una curva, el objetivo sería encontrar una fórmula que permita establecer las dependencias entre las variables asociadas en su estado inicial, esto es, establecer $s(t)$ como función de s_0, v_0, a, t_0 y t, lo que comporta escribir

$$A(a+x) = A(a) + A'(a)x + \frac{A''(a)x^2}{2} + \ldots = f(a)x$$

Lo que se quiere es determinar el estado inicial y preguntarse por el estado final



Utilizando el arreglo geométrico que se plantea en (L'Hôpital, 1696) y la estrategia de cálculo desarrollada en (Taylor, 1715) se tiene:

$$f(x+h) = y(x) + n\Delta y(x) + \frac{n(n-1)\Delta^2 y(x)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)\Delta^3 y(x)}{2 \cdot 3} + \ldots$$ y si hacemos $n \to \infty$ entonces $\Delta x \to 0$ y $f(x+h)$ se desarrolla como

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \ldots$$

De ahí se busca expresar el valor del estado posterior $f(x+h)$ en términos de los datos anteriores h, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, etc. Con ello se obtiene por respuesta, según se aprecia, nuestra Serie de Taylor

Un tratamiento similar al descrito pone en evidencia que, también para el caso del movimiento no uniforme, la Serie de Taylor es un instrumento natural para el estudio de la predicción.
En efecto, en este caso el valor futuro de la posición está dado por:

$$s(t) = s(0) + s'(0)t + \frac{s''(0)t^2}{2!} + \frac{s'''(0)t^3}{3!} + \ldots$$

Pero $s(0) = s_0$, $s'(0) = v_0$, $s''(0) = a$ y como $s''(t) = a$ para cualquier tiempo entonces $s'''(0) = s^{iv}(0) = \ldots. = 0$ de ahí que

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2!}$$

El instrumento permite generalizar la situación y establece que $s''(0) = a_0$, $s'''(0) = a_1$, etc. Entonces,

$s(t) = s_0 + v_0 t + \dfrac{a_0 t^2}{2!} + \dfrac{a_1 t^3}{3!} + \ldots$ y así se podrá estudiar el caso del movimiento con aceleración variable.
Análogamente para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado tendremos:
$v(t) = v_0 + a_0 t$, y $a(t) = a_0$

A modo de conclusión

Esta presentación parece aceptable en una primera enseñanza de la serie en nuestros días; pues con elementos geométricos y colocando el problema en el contexto de la predicción, sería factible sin un gran cúmulo de conocimientos previos, discutir y sobre todo, construir la serie.
Se ha escogido este extracto del escrito de Cantoral (2001) porque presenta la estructura adecuada para dibujar la idea de lo que luego será el diseño de situación que esta investigación presenta.

II. 5 Discusión

En este capítulo queda de manifiesto el rol que jugaron las importantes obras matemáticas como las de Newton, Leibniz, Taylor, Lagrange y Cauchy desde un punto de vista histórico-epistemológico como así poder confirmar que el discurso de Cauchy es muy fuerte ya que aún está presente en los textos actuales. Sin embargo, destacamos el rol que jugaron los trabajos de Newton y Lagrange enfatizando la conexión que visualizamos entre estos dos discursos: la noción de predicción y la noción de analiticidad. Todo ello nos da las bases para construir un marco de resignificación de la Serie de Taylor: de la predicción a la analiticidad en un ambiente de cinemática.

Capítulo

III

Marco Teórico

A continuación describiremos el marco teórico que sustenta esta investigación. Para cumplir con este objetivo hemos dispuesto presentar este capítulo en tres secciones: en la primera describimos *grosso modo* la aproximación socioepistemológica en su generalidad; en la segunda explicitaremos la aproximación teórica con relación a lo que aquí le hemos llamado resignificación de la Serie de Taylor, y en la última, daremos cuenta del rol que juega el uso de las gráficas en la situación de modelación del movimiento que tiene directa relación con la pregunta de investigación.

III.1. SOCIOEPISTEMOLOGIA

III. 1.1 Prácticas sociales: un camino para construir conocimiento

Para la ***socioepistemología*** *resulta básica la idea de que los grupos humanos* ***construyen conocimiento*** *a través de las* ***prácticas socialmente compartidas*** *en las que se involucran* (Buendía, 2004).

Con la expresión anterior resaltamos el hecho de que cuando nos referimos al marco teórico de la socioepistemología podemos advertir que existen elementos basales que se articulan, uno es entender a través de las definiciones otorgadas por los investigadores qué es la socioepistemología o a qué se refiere y por otro lado identificar dichos aspectos basales (fundamentales) que son el interés por la construcción del conocimiento matemático y el rol que juegan las prácticas sociales en este proceso de construcción.

Para avanzar en nuestro propósito, vamos a partir por definir la socioepistemología, recordaremos la descrita por Cantoral y Farfán (2003):

El término socioepistemología plantea un corrimiento al problema del saber, lo contextualiza, lo sitúa. De ahí que podamos decir que la socioepistemología es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de *institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente, las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, sobremanera, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La socioepistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión*

Por otro lado Cordero (2001) nos menciona el papel fundamental del humano y su actividad en esta aproximación, planteando que la aproximación socioepistemológica intenta articular dos grandes componentes, la social y la epistemológica, en los que el humano y su actividad se convierten en elementos primarios en las teorizaciones de la matemática educativa.

Para Arrieta (2003), lo socioepsitemológico debe significar, en primer lugar, el reflejo de cualquier actividad humana haciendo matemáticas, y en segundo lugar, que el funcionamiento mental que atañe a una aproximación sociocultural a la mente debe de estar en correspondencia con el lenguaje de herramientas.

Otro de los aspectos que le interesa a la aproximación socioepsitemológica es que centra su atención en el examen de las prácticas sociales que favorecen la construcción del conocimiento matemático.

Hablar de prácticas sociales nos puede llevar a reflexionar que es "algo" que está inserto en la sociedad pero específicamente que es "práctica", tratar de definirlo concretamente nos puede llevar a un mundo inmerso de especificaciones pero podemos recordar lo expresado por Buendía (2004): *"una* ***idea intuitiva de práctica se refiere a actividades****, a la clase de cosas que las personas hacen. Resulta, pues, necesario* ***distinguir entre aquellas actividades inerciales o no intencionales****, de aquellas que se realizan de manera* ***voluntaria y sean significativas****.* ***Van Dijk establece a la intención como lo que distingue entre actividades y actos".***

Si reflexionamos frente al párrafo anteriormente descrito podríamos llegar a pensar que cualquier actividad podría llevar el nombre de práctica pero no podemos dejar de lado que esta "actividad" se sitúa en un contexto de sociedad, por eso la intención es importante y la sociedad también, quizás podríamos mencionar que práctica social es lo que norma hacer algo, en el sentido de estar normado por la sociedad.

Si hablamos de construir conocimiento a través de prácticas sociales, debemos mencionar que dicho conocimiento está sujeto a modificaciones, en otras palabras, no es estático, ya que el protagonista es el hombre, como lo expresó Arrieta (2003) *el individuo, es pues, un ente activo modificando su entorno y modificándose a sí mismo de las prácticas en las que se involucran y éstas son la fuente de resignificación del conocimiento matemático.*

Podemos agregar que si el conocimiento está en constante movimiento ya que no es algo acabado podríamos advertir que también está en constante resignificación, todo esto normado por lo social e institucional, de esta manera en Domínguez (2003) encontramos que resignificar al propio conocimiento no trata respecto de establecer un significado nuevo en un contexto determinado, sino en cuanto a su uso en la situación donde se debate entre su función y su forma de acorde con lo que organiza el grupo humano.

Al plantear en esta sección el hecho de describir la aproximación socioepistemológica nos lleva a la necesidad de hacer referencia a tres aspectos fundamentales que se articulan entre ellos, la construcción del conocimiento matemático, las prácticas sociales como generadoras del conocimiento y la resignificación, en estos tres aspectos que se destacan están resaltadas las dimensiones epistemológicas y sociales, cabe mencionar que el rol de las prácticas institucionales es fundamental. Trataremos de brindar una especie de resumen que engloba todo lo mencionado anteriormente

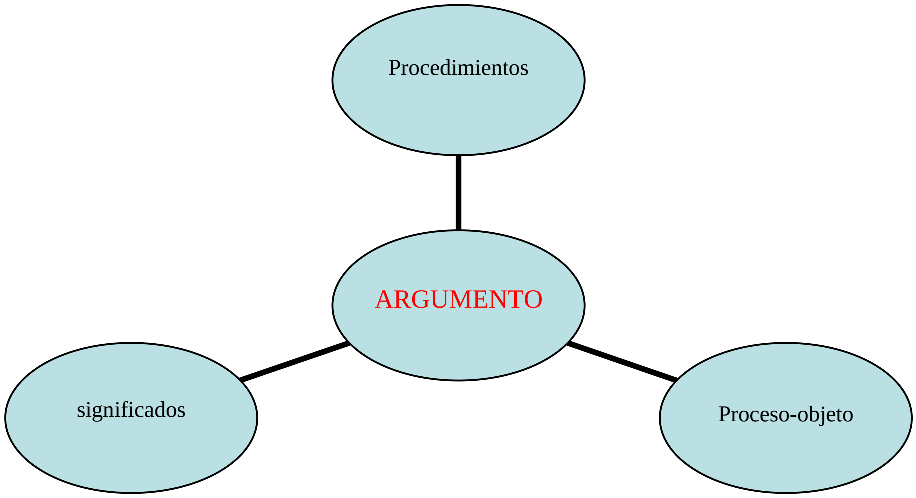
Referirnos al problema de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es entrar en el tema de la construcción del conocimiento matemático, ya en ese escenario reconocemos que el problema de fondo es epistemológico, de esta manera surge la pregunta ¿cómo son los procesos de construcción?, si en estos procesos interviene el individuo y la sociedad se debe decir de qué manera construye conocimiento el individuo y también la sociedad. Frente a lo expresado la socioepistemología tiene una postura: *son los grupos humanos los que se organizan para crear conocimiento, el humano tiene una organización para construir el mundo y por ende la construcción social* (Cordero 2001) Analizar el cómo se organizan es donde aparece la componente social. Dos preguntas son fundamentales ¿cómo se construye conocimiento?, en que se hace referencia a los conceptos matemáticos en su cognición y la segunda pregunta es ¿cómo se constituye tal construcción? donde se hace referencia a la práctica social como generadora de conocimiento. (Cordero, 2001).

La organización humana se plasma en sus prácticas institucionales, tal vez por ello nosotros podamos realizar nuestras clases hoy en día sin cuestionar cuál es el origen de ese saber, ni qué obligó ha enseñarlo, y qué es lo que permite el continuo de ese saber. Entonces es imperioso no soslayar la institucionalización cuando se analiza la construcción de un conocimiento. Por eso en Cordero (2006a) vemos como hace un énfasis importante en dichas prácticas mencionando cuál es su propuestas: la prácticas sociales son consideradas como base del conocimiento, debemos crear un modelo de conocimiento que dé cuenta de lo que constituye su contenido y conocer las causas reales del desarrollo social de dicho conocimiento, es decir las prácticas institucionales, entonces se debe **romper** la centración en los conceptos del discurso matemático escolar (DME) y **crear** otro discurso que ofrezca las prácticas donde se resignifique la matemática.

III.1.2 Argumento: una herramienta en construcción

Al situar la construcción del conocimiento matemático en un ámbito social, sin lugar a dudas el conocimiento matemático adquiere un estatus diferente. Por ejemplo, el grupo humano como organizador de esa construcción genera contextos argumentativos. Se trata pues de crear el constructo teórico que le dé sentido a ese hecho.

Referirnos a contextos argumentativos nos lleva a pensar en la reconstrucción del conocimiento matemático, en Cordero (1998 y 2000) podemos apreciar cuatro elementos para estudiar una reconstrucción del conocimiento matemático en contextos argumentativos:



- Los *significados* que pone en juego un estudiante en esa interacción y que se reflejan a través de argumentos situacionales.
- Los *procedimientos* que son las operaciones inducidas por los significados.
- Los *procesos-objetos* que se refieren a diferentes construcciones mentales que aparecen en los procedimientos.
- Los *argumentos* son pues, esquemas explicativos, estamos entendiendo esquema como el resultado de una serie de actividades alrededor de la construcción del conocimiento y no como algo fijo o preestablecido.

Destacamos que el rol del argumento es central y articula los restantes elementos, estos elementos están basado en las prácticas en construcción. Podemos referirnos a lo que nosotros comúnmente realizamos en una práctica, me refiero a tener significados, procedimientos pero cuando la ubicamos ya en el sistema didáctico tiene una intención por lo que el rol que juega el argumento es fundamental, por ejemplo, en un diseño de situación lo que se plantea debe producir, en las personas que se someten a tal diseño, un debate para que se produzca la resignificación y ese debate lo provoca aquel argumento porque logra en los procesos-objetos anclar un debate entre el funcionamiento y forma del conocimiento en cuestión, donde la forma se relaciona con el objeto y el funcionamiento con los procesos, expresando así un desarrollo del uso del conocimiento.

III.1.3 La reorganización del Cálculo

Como ya se ha mencionado en párrafos anteriores una de las preocupaciones de la Matemática Educativa y de la socioepistemología es la construcción del conocimiento, por lo que las prácticas sociales juegan un rol fundamental ya que lo que se postula es que dichas prácticas generan conocimiento. En este contexto la práctica social es fuente de la reorganización del Cálculo y del rediseño del discurso matemático escolar.

En la perspectiva socioepistemológica la resignificación es la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, o sea será el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma acorde con lo que organizan los participantes (Cordero, 2006).

A través de la resignificación se ha permitido establecer diferentes categorías de conocimiento matemático que permiten establecer relaciones funcionales entre los diferentes tópicos que integran el saber matemático. En el desarrollo de la socioepistemología como marco teórico, esta reconstrucción de significados en contextos interactivos en el salón de clases se ha logrado precisar en tres marcos, llamados situaciones: variación, transformación y aproximación (ver figura 6).

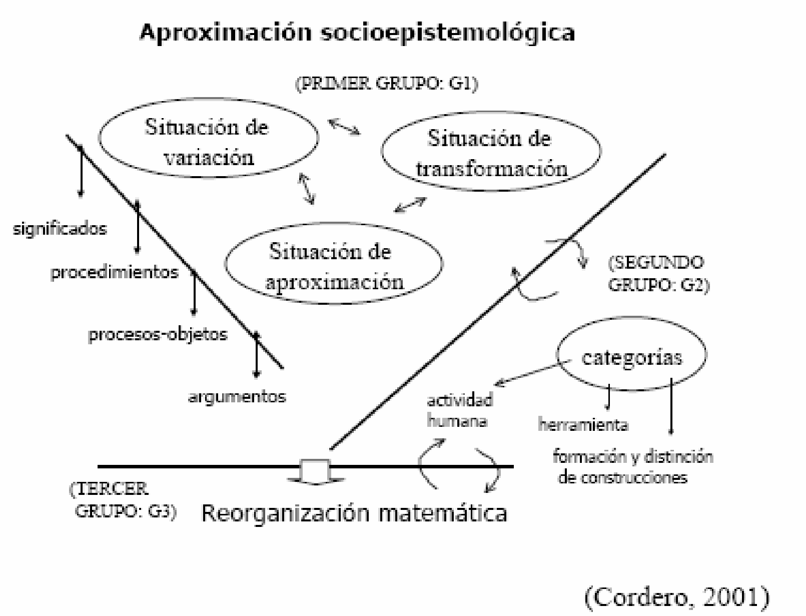


Figura 6: Aproximación Socioepistemológica

Grupo 1

El primer grupo de relaciones (G1), consiste de los siguientes cuatro elementos propuestos por Cordero (1998, 2000) llamados elementos de la construcción de representaciones presentadas en el párrafo anterior.

Estos elementos permiten la articulación de las cuatro dimensiones, de tal forma que una vez que se establece el marco de referencia del contenido matemático (marco epistemológico), aparecen los planos de representación y procedimientos del estudiante a través de la cognición que está construyendo (dimensión cognitiva) y después, utilizando ambos, el marco de referencia y las representaciones y procedimientos, se establecen los argumentos o explicaciones de lo que en el marco de referencia se reorganiza tomando en cuenta la organización social y la intencionalidad del contexto interactivo (dimensión didáctica y social).
El aspecto cognitivo deberá ahora ser guiado por la pregunta cómo los estudiantes y el profesor, interactivamente, construyen identidades, significados, sus realidades y su propia cognición. El aspecto didáctico abordará cuestiones relativas a los contextos argumentativos que se proponen a los estudiantes y las formas y mecanismos para

argumentar y llegar a consensos. Finalmente, la dimensión epistemológica se centra en analizar la naturaleza social de la construcción del conocimiento matemático, su conformación cultural y el papel esencial que desempeña en la acción humana (Arrieta, 2003).

La argumentación necesita de los otros tres elementos y de una situación que lo cristalice. Los argumentos, que en el contexto de la situación (marcos de referencias dónde sucede la resignificación institucional), se construyen para convencer, se forman de los significados y los procedimientos y van formando un esqueleto argumentativo

Con referencia al Cálculo estos elementos que encontramos en la construcción de representaciones se mueven en distintos marcos de referencia de dicha disciplina. Se han encontrado tres marcos de referencia presentados en término de situaciones que son: variación, transformación y aproximación

Estos tres tipos de situaciones están articulados, cada una compone un marco epistemológico del Cálculo y en conjunto componen una epistemología del Cálculo. Lo que ocurre en cada una de estos marcos tiene que ver con los cuatro elementos mencionados: los significados, los procedimientos, la cognición que influye y es influida por ambos y finalmente, estos tres serán reorganizados en el argumento.

Grupo 2

En el segundo grupo (G2), se plantea una construcción del conocimiento correspondiente a la actividad humana la cuál consiste en reconstruir significados a través de su organización social. Esta reconstrucción se hace posible, gracias al lenguaje de las herramientas cuyo propósito es identificar todas las relaciones en el marco de referencia del contenido matemático a través de los procedimientos en el contexto de interacción.

Se han hallado categorías del conocimiento que son: predicción, acumulación, estado permanente y comportamiento tendencial de las funciones, son nociones medulares de la reconstrucción de significados del cálculo en la actividad humana, su construcción se relaciona con el uso de herramientas y la modelación.

Aquí podemos situar a la práctica social de *predicción* (informar sobre el comportamiento del movimiento) como la argumentación en situaciones de variación, esta favorece la resignificación del movimiento como acumulación y flujo, y en estas mismas situaciones se generan procedimientos (comparar dos estados), se construyen procesos y objetos de cantidades de variación continuas.

Existen otras prácticas sociales que permiten reconstruir conocimiento: prácticas de *Graficación- Modelación*. Esta puede ser considerada como un medio para la argumentación. Esta práctica es la argumentación en situaciones de transformación, se resignifica el uso de las gráficas debatiendo entre su funcionamiento y forma. Aquí la gráficas que describen un movimiento son resignificadas como patrones de comportamientos gráficos y comportamientos tendenciales de las funciones (Cordero, 1998 y 2001) generando procedimientos que consisten en identificar y variar los parámetros de las funciones, construyendo procesos y objetos de instrucciones que organizan comportamientos

Las prácticas de Predicción y la Graficación- Modelación contribuyen a que aparezca la *analiticidad de las funciones*. La predicción fue resignificada hasta materializarse en la analiticidad de las funciones, pero sin la práctica de predecir la analiticidad hubiera sido imposible. Eso hace que tenga sentido relacionar la práctica de graficación-modelación con la de predicción, donde el comportamiento de las curvas o funciones anticipa tendencias de comportamiento tanto localmente como globalmente. La *analiticidad de las funciones* que es el núcleo del Cálculo que se convierte en la argumentación de la situación de aproximación, ahí se resignifican los conceptos de variable, función, límite, derivada, integral y convergencia.

Grupo 3

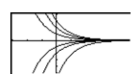
El tercer grupo de relaciones (G3), formula un mecanismo que permita objetivar la epistemología del contenido matemático considerado en la problemática a través de la actividad humana para cualquier relación didáctica. Tal objetivación buscaría entonces hacer explícita la reorganización matemática y hacerla coherente con el fenómeno educativo. Esta epistemología debe ser la base del diseño de situaciones y de su implantación.

Estos tres grupos están articulados: el mecanismo comienza formulando una problemática en un contenido matemático, es decir se formula e interpreta el fenómeno didáctico (G1) (se formula una epistemología de dicho contenido). La epistemología deberá modelar el diseño de la situación y su implementación, interacción entre G1 y G2 y por último la recolección de datos y su análisis teórico obliga a una revisión de la epistemología inicialmente formulad, interacción entre G2 y G3. Esta revisión servirá para la reorganización matemática con relación al fenómeno didáctico.

III.2 LA SOCIOEPISTEMOLOGIA DEL CÁLCULO: LA SERIE DE TAYLOR

Recordando el título que lleva este trabajo de investigación *"Resignificar la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento: de la predicción del movimiento a la analiticidad"* hace conexión directa con la socioepistemología, pero en particular con la socioepistemología del cálculo.

La manera de abordar la problemática de investigación es partir del hecho que faltan marcos de referencia para resignificar el conocimiento, en particular el de la Serie de Taylor, es por ello que retomaremos lo mencionado en el capítulo I con relación a la socioepistemología del cálculo y el análisis. Recordemos la Socioepistemología del Calculo mencionada en el capítulo I

CONSTRUCCIONES EN LAS PRACTICAS	SITUACION DE VARIACION	SITUACION DE TRASNFORMACION	SITUACION DE APROXIMACION
SIGNIFICADOS	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos Comportamiento tendencial de la función	Límite Derivación Integración Convergencia
PROCEDIMIENTOS	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha = f'(x)$	Variación de parámetros $y = Af(Bx+C)+D$	Límite de un cociente $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$
PROCESO - OBJETO	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Función
ARGUMENTACION	Predicción $E_0 + \text{var}\,iación = E_f$	Graficación - Modelación 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)h^2}{2!}+\ldots$

El motivo de considerar nuevamente a la socioepistemología del cálculo y el análisis no tiene otro fin más que el de expresar de mejor manera lo que se quiere mostrar en la investigación.

Al observar el cuadro, éste nos hace referencia a dos cosas una es darnos cuenta cuál es la manera tradicional de entregar los conocimientos (última columna) y la segunda es el poder proveer marcos de referencia ausentes en el currículo, a través de las dos columnas centrales.

Uno de los objetivos de este trabajo es resignificar la Serie de Taylor, al analizar la última columna, es decir la situación de aproximación, podemos ver que ésa es la manera actual de cómo se entregan los conocimientos, dicha entrega se realiza con una centración en los conceptos, lo que hace que todos los conocimientos que se manejen sean el resultado de algo, son conocimientos que están acabados, en otras palabras no existe construcción de conocimiento. Particularmente lo que ocurre con la Serie de Taylor es que se trabaja en una situación de aproximación, es decir, damos la función y lo que interesa es encontrar los coeficientes del polinomio de Taylor que mejor se aproxime a dicha función en un punto. Frente a esta situación el desarrollo de esta materia y lo que se puede consultar en torno a ella en cierto sentido resulta repetitivo y algunas veces intuitivo pero surge la pregunta ¿qué pasa si se cambia la forma de abordar este tema?, concretamente ¿qué pasaría si no se conoce la función? ¿qué podríamos preguntar?, ¿cómo podemos evidenciar de alguna manera que existe construcción de conocimiento? Esta investigación quiere dar cuenta que es posible lograr construcción del conocimiento a través de otras vías, como por ejemplo, en una situación de variación donde el argumento de la predicción juega un rol primordial.

El diseño de situación propone un diseño de situación que ha sido elaborado con una epistemología que lo sustenta, este diseño pretende evidenciar la resignificación de la Serie a través del uso del conocimiento, aquel uso se manifiesta cuando se produce un debate entre su funcionamiento y forma, en nuestro caso, la forma tiene que ver con el objeto matemático en cuestión (la Serie de Taylor) y el funcionamiento con los procesos que se llevan a cabo, esto debe producir un debate y lo que debe lograr que dicho debate se realice es la predicción.

III.3 EL USO DE LAS GRAFICAS

Referirnos al "uso de las gráficas" hace necesariamente que hablemos respecto de la modelación, cómo este término es discutido en la Matemática Educativa. Nuestra pregunta de investigación se refiere al "uso de las gráficas" cuando se resignifica la Serie de Taylor, concretamente la pregunta es cuál es ese "uso" y para poder abordar esta interrogante es importante situarnos en el ambiente de situación de modelación del movimiento (Suárez, 2008) en que se desarrollará el diseño que será presentado en el capítulo siguiente.

Recordando lo dicho por Cordero "..es *así que la gráfica como una representación de la función trata el desarrollo del concepto de función pero no así el desarrollo del uso de la gráfica. Sin embargo, con el marco anterior (socioepistemología) desarrollar los usos de las gráficas traería en consecuencia el desarrollo del concepto de función. Se debe precisar que en la socioepistemología la práctica social como unidad de análisis no analiza a los participantes sino a los usos (y costumbres) de los participantes,* *porque lo que nos importa de los participantes son sus formas de constituir conocimiento. En ese sentido no estudiamos a las gráficas como una representación del concepto de función, sino los usos de las gráficas de los participantes".*

El motivo de traer a colación este párrafo expresado por Cordero es para poder esbozar cuál es la dirección de la pregunta de investigación de este trabajo y por qué dicha interrogante es factible de hacerla. Hoy en día la modelación es mirada como una aplicación de un contenido matemático específico, es copiar algo; una vez tratada la matemática se hace un aplicación de ella y eso es términos actuales una modelación, también se puede relacionar como una representación de un objeto, una parábola por ejemplo y desde ese punto de vista la modelación es una herramienta. La Matemática Educativa tiene una visión contraria a la mencionada sino mas bien apunta a que la modelación es en sí misma creadora o generadora conocimiento, si decimos que se deben crear marcos de referencia en el sistema didáctico que ayudan a resignificar el conocimiento matemático, la modelación es uno de esos marcos que hoy en día no están en el currículo, por eso que la modelación no es simplemente una representación sino mas bien una práctica, que inserta en una situación específica toma el rol de argumento de dicha situación. Un ejemplo de modelación es el "uso de las gráficas".

Cordero (2006b) nos hace referencia que la graficación es la argumentación de ciertas situaciones del Cálculo, que las gráficas de funciones formulan argumentos pero que existe un punto central en este argumento que es la relación entre el comportamiento tendencial de las funciones y la expresión analítica de las funciones.

Este trabajo, en particular, pone su mirada en aquella relación, así como en Cantoral, Molina y Sánchez (2004) "Socioepistemología de la predicción" nos habla del cambio pero acentuando en el cómo cambia aquí se habla del uso de las gráficas en el sentido de cómo es su "uso" , su desarrollo, cuáles son loa argumentos que se ponen en juego. Particularmente trabajar en una situación de modelación del movimiento es el escenario preciso para que aflore la graficación-modelación. Los sensores y las calculadoras gráficas son usadas como instrumentos de modelación y no como instrumentos para representar el concepto de función o de un objeto matemático en particular.

El objetivo de la socioepistemología es realizar un rediseño el discurso matemático escolar y por ese motivo fundamental surgen muchas inquietudes e interrogantes, una que manifiesta Francisco Cordero es ver cuál es la relación que existe entre el DME y el uso de las gráficas.

Capítulo

IV

Diseño de Situación

En los capítulos anteriores se ha dejado de manifiesto cuál es el objetivo de esta investigación: resignificar la Serie de Taylor (ST).

El diseño que se presenta, desde el enfoque socioepistemológico, consiste en formular un marco de referencia intencional para resignificar la ST. El marco pondrá en juego elementos tales como las prácticas y las herramientas, los cuales están insertos en el sistema didáctico y afloran en contextos argumentativos. Más específicamente, el diseño es una situación de variación en la cual se relacionan movimientos específicos con sus gráficas y con aspectos de cinemática, la búsqueda de patrones de comportamientos y las prácticas, tanto de predecir como de modelar-graficar.

Por otra parte y como se sabe, uno de los objetivos que persigue la aproximación socioepistemológica es hacer un rediseño del discurso matemático escolar. En este capítulo se aportan evidencias en tal dirección (ausentes en el currículo habitual) para el caso del objeto de estudio; es por ello que describiremos un diseño realizado en una situación de modelación del movimiento[15], es decir, en una situación específica y con uso de tecnología.

Además, describiremos la metodología utilizada para realizar la puesta en escena de la situación, así como los respectivos análisis a priori y a posteriori, que ayuden al rediseño que se procura. Asimismo, haremos una aproximación a nuestra pregunta de investigación: "¿Cuál es el *uso de las gráficas* cuando se resignifica la Serie de Taylor?".

[15] Situación de modelación del movimiento, será el conjunto de características de las tareas y clases de tareas que realizará el estudiante y que están condicionadas por los datos epistemológicos que aporta la categoría de Modelación-Graficación. (Suárez, 2008 Tesis Doctoral, p.100)

IV.1 EL DISEÑO DE SITUACION

Yendo a otro aspecto del problema, específicamente en la matemática escolar, necesariamente se debe hacer referencia a su discurso que vivimos actualmente donde se visualiza como una de las problemáticas la falta de marcos de referencia que ayuden a resignificar el conocimiento matemático y por otro lado que la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos, donde adquiere sentido. Particularmente, este trabajo ha hecho referencia a la práctica de predicción del movimiento como una alternancia de dominios (la matemática y la física) donde se resignifica la Serie de Taylor y nos ofrece rasgos de su carácter funcional, justo donde la Serie de Taylor deja de ser el objeto de la situación sino mas bien, el movimiento es el objeto.

Como ya se ha declarado en el párrafo anterior, es el movimiento el objeto de estudio en nuestro diseño, en que procuramos resignificar la ST en una situación de modelación del movimiento: de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones, es por ello que nuestro diseño se desarrollará en un ambiente tecnológico, en la cual haremos uso de calculadoras gráficas (TI 84) y sensores de movimiento (CBR2), por lo que, en todo el diseño, estará presente la práctica de modelación. Además es en la Situación de Modelación del Movimiento (SM-M) en que la categoría de graficación-modelación tiene un rol importante. Cabe mencionar que para lograr nuestro propósito, el estudio epistemológico desarrollado y descrito en el capítulo 2 es fundamental porque otorgó elementos para elaborar el diseño de situación, nuestra resignificación de la Serie de Taylor tiene que ver con recobrar su aspecto funcional y justo como el movimiento es el objeto en cuestión nosotros construiremos dicha serie.

El diseño consta de tres momentos para mostrar la relación graficación-modelación; en él, la predicción es el eje rector que argumenta la situación de variación. Los momentos están estructurados de tal forma que en cada uno de ellos se puede apreciar que existe predicción y modelación: en el primero se refleja la predicción de manera implícita; en el segundo, se hace uso de la predicción de manera explícita, y luego, en el tercer y último momento, aparece el objetivo principal de la investigación, que es resignificar la Serie de Taylor en su carácter funcional que se ve expresada en la analiticidad de las funciones.

La siguiente tabla (figura 7) explicita la estructura global de este diseño, señalando, en la última línea, el *argumento* de cada momento.

Momento 1	**Momento 2**	**Momento 3**
Actividad 1 *interacción de gráficas y sensores*	Actividad 1 *dado un problema de movimiento uniforme cuya gráfica se solicita, realizar una predicción*	Actividad *sin disponer de gráfica ni de una función, se pide un modelo predictivo*
Actividad 2 *dadas ciertas gráficas, reconocer patrones de movimiento*	Actividad 2 *dado un problema de movimiento uniformemente acelerado cuya gráfica se solicita, realizar una predicción*	
Actividad 3 *dado un enunciado, construir una gráfica ad hoc*	Actividad 3 *dada una función, responder preguntas específicas de predicción*	
movimiento-gráfica	***modelación-graficación***	***predicción***

Figura 7: Estructura del diseño aplicado

A continuación describimos el diseño.

IV.1.1 MOMENTO 1

A través de sensores y calculadoras gráficas se realizarán tres actividades en las que se representarán distintos movimientos a través de gráficas. El objetivo central de este momento es identificar la relación entre movimiento y gráfica

Actividad 1 (formación)

Se dan tres gráficas que representan, respectivamente, el movimiento constante, el uniforme y el uniformemente acelerado, y se pide realizar físicamente los movimientos necesarios para que el sensor dibuje esas gráficas.

Esta actividad tiene como objetivo que el alumno logre identificar la relación entre un movimiento y su gráfica, es decir, que se dé cuenta de que, si realiza algún movimiento determinado, éste puede ser expresado en una gráfica correspondiente. Para ello los estudiantes dispondrán de una calculadora gráfica (TI 84) y un sensor (CBR2).

Actividad 2 (argumentación)

Se presentan los mismos tipos de movimientos que en la actividad 1, pero en cada uno de ellos los estudiantes deberán identificar la curva de entre un conjunto que se les propone, y argumentar por qué es de esa manera.

El objetivo de esta actividad es que el alumno reconozca patrones de movimientos, y, a partir de ello, argumente acerca de qué tipo de curvas van apareciendo al ir variando esos patrones. Para este propósito se dan ciertas gráficas –que representan variaciones– a partir de las cuales deben analizar qué movimientos físicos deben realizar para obtenerlas correspondientemente. En esta actividad no es necesario el uso de la tecnología de que disponen.

Actividad 3 (funcionamiento)

Se entrega un enunciado y se pedirá un análisis de él y luego la representación gráfica que le corresponde.

Esta actividad tiene el propósito de que el estudiante haga una conexión entre las dos actividades anteriores; en particular, se le pedirá que, a partir de la gráfica encontrada, explique de manera más precisa el movimiento que se está reflejando.

IV.1.2 MOMENTO 2

Este momento consta de tres actividades; su objetivo es resignificar las expresiones analíticas de las ecuaciones de primer y de segundo grados. Para ello, los estudiantes deberán utilizar diferencias entre ‘punto inicial’ y ‘punto final’, y dar la importancia debida tanto a la función, como a sus derivadas primera y segunda. Para realizar esta secuencia vamos a situarnos en un ambiente de cinemática. La importancia de ésta es identificar la relación graficación-modelación.

Actividad 1 (formación)

Se entrega un problema de cinemática en que la velocidad es constante y se pide predecir la posición de un móvil en un tiempo determinado.

Esta actividad procura resignificar la ecuación de la recta, en el sentido de que se pueda interpretar a la pendiente como la velocidad constante y a la intersección con el eje Y como el punto inicial del movimiento.

Actividad 2 (argumentación)

Se entrega un problema de cinemática en que se refleja el movimiento acelerado y se pide predecir la posición de una partícula en un tiempo determinado.

Esta actividad procura resignificar la ecuación de segundo grado, en el sentido de que la aceleración juega un rol en dicha ecuación, tanto como la velocidad constante y el punto inicial.

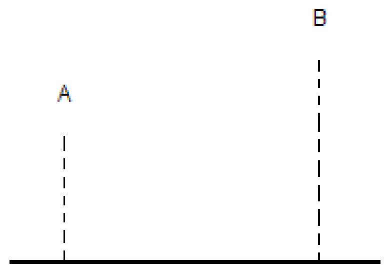
Actividad 3 (funcionamiento)

Dada una función que representa el movimiento de un móvil, se pide predecir su posición, si acaso se acerca o aleja del observador, su velocidad, su aceleración en un tiempo determinado, etc., y luego comparar estos datos con los de otra función de movimiento. Esta actividad pone en evidencia lo realizado en las actividades anteriores que conforman esta secuencia.

IV.1.3 MOMENTO 3

Este momento consta de una actividad en que se procura integrar los elementos obtenidos en las actividades anteriores en una expresión que representa los primeros términos de una Serie de Taylor.

La pregunta de predicción trata de lo siguiente: Dados A y la variación de A de acuerdo al movimiento, se pregunta por B.



IV.1.4 ASPECTOS GENERALES DEL DISEÑO

En los momentos 1 y 2 del diseño aparecen las palabras formación, argumentación y funcionamiento, expresadas en las actividades 1, 2 y 3 respectivamente, la razón de ello es debido a que en el trabajo de Suárez 2008 podemos notar que ella realiza todo un estudio (capítulo IV) en que nos muestra un desarrollo del uso de las gráficas en la Figuración de Cualidades y los presenta en tres momentos, éstos son, Momento 1: establecimiento de la *forma* del nuevo funcionamiento del uso de las gráficas. Momento 2: Construcción de *argumentos* en el uso de las gráficas. Momento 3: Puesta en *funcionamiento* del uso de las gráficas en la modelación, todo este análisis y otros aspectos fue el soporte teórico para elaborar su diseño de situación que nos presenta en el capítulo V de su tesis doctoral. La conexión que se realiza con el diseño que propongo es que las actividades 1,2 y 3 de los momentos 1 y 2 tienen relación con la forma, el argumento y el funcionamiento que aparecen de manera implícita. Todas las actividades planteadas en los momentos están interrelacionadas, es a partir de la actividad 1 del momento 1 que comienza la hilación con el resto de lo planteado en el diseño.

Por otro lado, la estructura del diseño logra que existan dos componentes esenciales, a saber, la predicción y la modelación, que se ven reflejados en los tres momentos del diseño. Además, como el ambiente en que nos ubicaremos es el de la Cinemática, es muy adecuada y necesaria para lograr nuestro propósito, una Situación de Modelación del Movimiento.

En la Figura 8, a continuación, presentamos lo que queremos lograr en los tres momentos, en términos de resignificación y cómo están articulados entre sí.

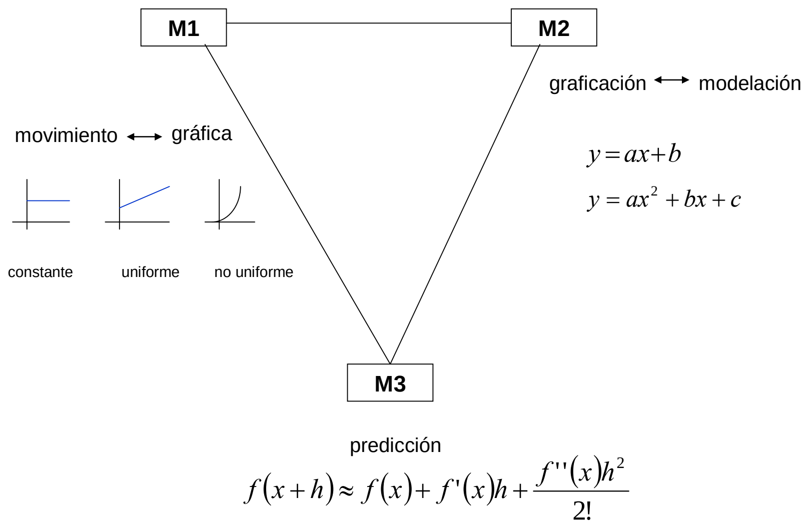


Figura 8: Resignificación de la Serie en su aspecto funcional

En la siguiente sección nos referiremos al objeto matemático en cuestión y a la práctica que está relacionada con él.

IV.1.5 SERIE DE TAYLOR Y PREDICCION

La situación presentada desde la perspectiva socioepistemológica resalta la relación entre la práctica de la predicción y la Serie de Taylor.

Este diseño, inserto en el sistema didáctico –por lo que es intencional–, propone a la predicción como argumento en la situación específica que favorece la reconstrucción de significados en un ambiente de cinemática en que el estudio del movimiento toma un rol principal. De esta manera resignifica la Serie de Taylor según se explicó en el capítulo II.

Nuestra base de estudio es la Socioepistemología del Calculo pero creemos necesario mencionar específicamente el objeto de estudio en cuestión y referirnos a la socioepistemología de la Serie de Taylor (figura 9) debido a que allí podemos ver los elementos que entran en juego. En la situación de variación (figura 10), especificamos nuestra perspectiva, que da cuenta de cómo la práctica de predecir, en una situación de variación, se puede explicar a través de los significados que un individuo enfrenta en determinada situación, los procedimientos que de ahí genera y cómo influye su aspecto cognitivo.

La situación de variación (figura 10) será la base para describir el análisis a priori que será presentado en la próxima sección.

Una socioepistemología de la Serie de Taylor

	SITUACIONES		
CONSTRUCCIÓN EN LAS PRÁCTICAS	**VARIACIÓN**	**TRANSFORMACIÓN**	**APROXIMACIÓN**
Significados	Flujo Movimiento	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos Comportamiento tendencial de la función	Límite Derivación
Procedimientos	Comparación de dos Estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha = f'(x)$	Variación de parámetros $y = Af(Bx+C)+D$	Límite de un cociente $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$
Procesos y Objetos	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Relación específica entre números
Argumentación	**Predicción** $E_0 + Variación = E_f$	**Graficación-Modelación** 	**Analiticidad de las funciones** $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+...$

Figura 9: Socioepistemología de la Serie de Taylor

SITUACION DE VARIACION	
Significados	Flujo, movimiento Las curvas de movimiento como patrones de comportamientos gráficos y analíticos
Procedimientos	Comparación de dos estados. Identificar y variar parámetros
Proceso-objeto	Cantidad de variación continua
Argumento	Predicción

Figura 10: Elementos de estudio para una reconstrucción del movimiento en contextos argumentativos.

La predicción, como argumento, en una situación de variación, permite una confrontación y posibilita la construcción de la Serie de Taylor en un carácter funcional para verla manifestada en la analiticidad de las funciones.

IV. 2 PUESTA EN ESCENA

IV.2.1 Aspectos Metodológicos

Este trabajo ocupa elementos de la Ingeniería Didáctica, en particular la metodología ocupada en esta investigación no es diferente de lo que se realizó en el trabajo de Buendía.

El aspecto metodológico que guía la recolección de datos tiene que ver con un análisis a priori en que la epistemología inicial informa acerca de lo hipotético, una puesta en escena y un análisis a posteriori para tratar lo que realmente hicieron los alumnos. La confrontación entre ambos análisis generará una epistemología final revisada que permitirá dar cuenta de esta confrontación. (Buendía, G, 2004, p. 101):

El diseño ha sido aplicado a tres grupos de estudiantes de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV). El primer grupo (G1) estuvo conformado por dos estudiantes, quienes se encontraban en el sexto semestre de la carrera de Pedagogía en Matemáticas y cursaban el ramo Análisis Real 2. El segundo grupo (G2) estuvo formado por tres estudiantes; ellos se encontraban en el primer semestre de la carrera, por lo que estaban cursando el ramo Cálculo 1. El tercer y último grupo (G3) lo constituyeron tres estudiantes, alumnos de primer año de Bachillerato en Ciencias, quienes ya tenían aprobado los ramos de Matemáticas 1 y Matemáticas 2 (que incluían las materias de Cálculo 1).

Trabajar con ocho alumnos de diferentes niveles en matemáticas, particularmente en Cálculo, nos permitió tener más variedad de argumentos para analizar y de esta manera brindar alguna respuesta al problema planteado.

Cada uno de los grupos desarrolló el diseño en un tiempo aproximado de dos horas en que interactuaron entre pares, y, cuando surgió alguna duda, pudieron solicitar al profesor (en este caso, la autora) que les respondiera o aclarara alguna inquietud –siempre con un espíritu de guía y no de proporcionar una respuesta explícita–.

Este diseño utilizó tecnología, la calculadora TI 84 y el sensor de movimiento CBR2, cabe mencionar que para los ocho alumnos, éstos instrumentos no fueron problema, la calculadora todos la conocían y la habían trabajado en otros cursos, el sensor era mas nuevo para algunos pero no fue impedimento para el desarrollo de las actividades.

En la siguiente sección se presentan los respectivos análisis a priori de las actividades de cada momento junto con lo sucedido en la puesta en escena, para ello se muestran algunos extractos de las producciones de los grupos, por lo que denotaremos las nomenclaturas E1G1, E2G1, E1G2, E2G2, E3G2, E1G3, E2G3, E3G3 donde, por ejemplo, E1G1 se refiere al estudiante 1 del grupos 1.

IV.2.2 MOMENTO 1

Este momento tiene como objetivo central que los alumnos logren la relación movimiento-gráfica. El hecho de ocupar calculadoras gráficas y sensores produce un impacto en los alumnos que no conocen este tipo de tecnología. Ellos pueden notar que al realizar algún movimiento logran ver su representación gráfica en la calculadora de manera muy rápida; es por ello que la centración ya no está en el dibujo de la gráfica sino en su interpretación: saber qué es lo que está pasando para poder decir si la gráfica obtenida es la correcta o no –es en este sentido que hablamos de la relación movimiento-gráfica–.

Se estima que el manejo de la calculadora y del sensor no tiene mayor dificultad ni es un impedimento para que los alumnos puedan avanzar en las respuestas frente al diseño planteado.

Una de las hipótesis para este momento es que los alumnos que desarrollen el diseño pueden lograr la relación planteada anteriormente, es decir, el tener una representación gráfica es porque hubo algún movimiento realizado.

A continuación detallamos lo que esperábamos que respondieran los estudiantes en cada una de las actividades a lo largo de todo el diseño; este detalle se realizará a través de la figura 3 descrita en la sección anterior de este capítulo.

IV.2.2.1 Actividad 1

Análisis a priori

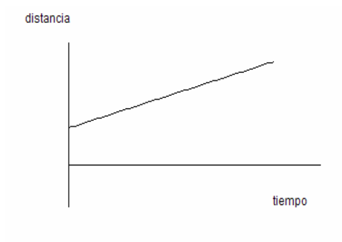
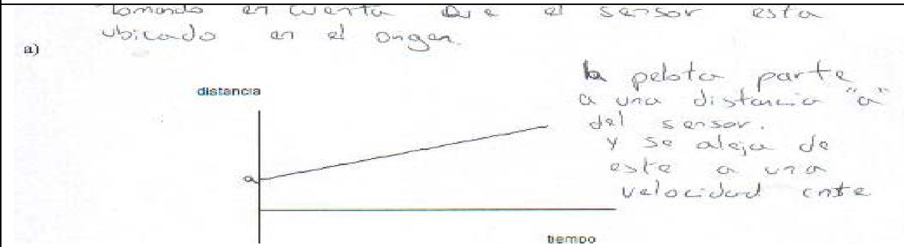
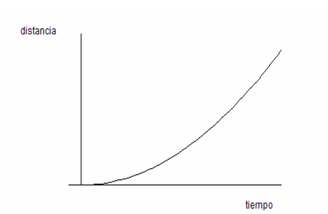
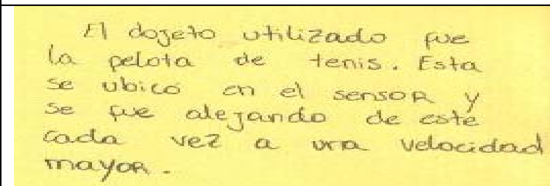
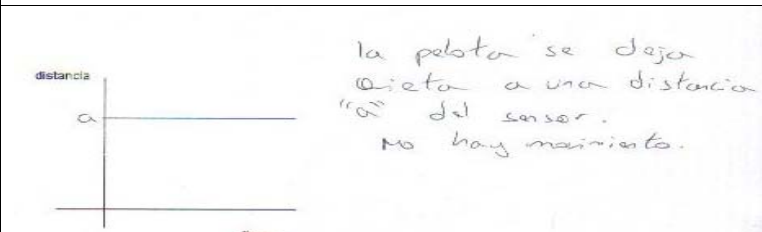
Dadas las tres gráficas que denotan movimientos específicos, esperamos que los estudiantes logren visualizar que para obtener cada una de esas gráficas, la manera en que ellos deben realizar sus movimientos es diferente: en la primera, el movimiento es uniforme y está relacionado con la velocidad constante; en la segunda, el movimiento es uniformemente acelerado, y, en la tercera, no hay movimiento. (Además y de acuerdo a lo planteado para el Momento 1, veremos cómo ponen en juego la tecnología para abordar la actividad planteada).

Actividad 1	**Descripción general**	**Gráfica a)**	**Gráfica b)**	**Gráfica c)**
Significados	Identificación de la gráfica con la cinemática.	Relacionar la gráfica con un objeto en movimiento con velocidad constante	Relacionar la gráfica con un objeto en movimiento que no tiene velocidad constante.	Relacionar la gráfica con un objeto que no se mueve.
Procedimiento	Ubican sensores y realizan movimientos para replicar una recta o una curva	Identificar una recta con pendiente positiva	Darse cuenta que no es recta	Identificar una recta con pendiente cero
Proceso-objeto	Identifica la curva o recta. Identifica punto de partida y la relación con el sensor. Identifica el tipo de variación. Objetos (pendientes, puntos, rectas, intersecciones, variaciones, cuocientes)	Identifica la recta. Identifica el punto de partida Determina una variación constante de la distancia con respecto al tiempo. .	Identifica la curva. Identifica el punto de partida Se percata que la variación no es constante de la distancia con respecto al tiempo.	Identifica la recta Identifica el punto de partida Determina que no hay variación.
argumento	Gráfica-movimiento	Recta pendiente positiva-movimiento uniforme	Curva-movimiento uniformemente acelerado	Recta con pendiente cero- sin movimiento

Puesta en escena

Esta actividad fue desarrollada por los estudiantes de manera muy similar y con argumentos parecidos, casi todos los grupos obtuvieron las mismas observaciones pero en algunos la manera de expresarlos fue diferente, a continuación presentaremos una tabla con una descripción general dada en esta actividad y algunos ejemplos y diálogos realizado por los estudiantes (ver tabla 1).

Tabla 1

Gráfica	Descripción general	Ejemplos y diálogos
a) 	Se identifica que se trata de un movimiento cuya velocidad es constante, es decir, relacionan la gráfica presentada con un tipo de movimiento. Se hace referencia a si dicho objeto puesto en movimiento se aleja o no del sensor.	 G1 E1G1**:** sipo, pongamos una velocidad más o menos constante E2G1**:** si, es como una recta, tú me dices cuando
b) 	Asocian a la gráfica con un movimiento que tiene velocidad: Creciente (G1) Mayor (G2) Acelerado (G3)	 G2 E2G2 : mira…con la pelota , tenis que moverlo y cada vez aumentando su velocidad
c) 	Identifican que en esta gráfica no hubo movimiento	 G1 E1G1: …y la ultima es una constante, quedarse quieta ¿o no? Dejémosla pegada…

Uno de los aspectos importantes de recordar es que esta actividad está inserta en el momento 1, que tiene como objetivo la relación movimiento-gráfica. La actividad fue abordada por los tres grupos, éstos declararon los tres tipos de movimientos, salvo el grupo tres (G3) en el inciso c), que no declaró explícitamente que la pelota usada está sin movimiento, argumentando que el sensor es muy sensible, por lo que no pudieron obtener la gráfica pedida cuando estaban a mayor distancia; este argumento nos da pie para afirmar que los estudiantes de este grupo tenían una buena representación gráfica cuando dejaban algo quieto frente al sensor y que consideran que el problema es del sensor y no de su razonamiento.

El rol de la tecnología en esta actividad es fundamental, en el sentido de que por tener la posibilidad de contar con ella necesariamente la actividad se torna con un matiz diferente, no se pide al alumno que grafique sino mas bien que dada la gráfica, obtenida por calculadora gráfica éste pueda argumentar la gráfica sino, para ahondar mas en esta idea, el hecho de proporcionar las gráficas hace que la actividad tenga otra perspectiva, en el sentido de que el estudiante se involucra porque participa en la realización de algún movimiento; es por ello que hay dificultades en esta actividad que no se visualizan en las producciones; de hecho, sabemos que algunos grupos tuvieron que realizar varios intentos para obtener las gráficas. Lo importante es que, cuando se encontraban con problemas, no era porque no supieran qué movimiento hacer, sino porque el sensor captaba otras cosas que intervenían, como por ejemplo, las luces de la sala o el hecho de que tuviera un rango de alcance de dos metros solamente, etc.

Los estudiantes logran la relación movimiento-gráfica y, más aún, identifican qué clase de movimiento es el que se está representando en cada gráfica. Si miramos esto con la pregunta de investigación –cuál es el “uso” de las gráficas que hacen los estudiantes– observamos que las respuestas de los alumnos evidencian lo mencionado en el trabajo de Suárez 2008, esta actividad proporciona la gráfica y los estudiantes, a partir de ella, trabajan y razonan. Se puede observar cómo el aspecto visual que la gráfica proporciona incide en razonamientos como por ejemplo, que la gráfica continúa de cierta manera, aunque la calculadora muestre hasta cierto rango la curva.

Los estudiantes exhiben, además, conexiones con su conocimiento matemático previo, al que recurren de manera natural, como por ejemplo, conectan con la Física (velocidad constante, aceleración, etc.) y aspectos tales como que la gráfica es creciente o decreciente o "se parece a" una curva conocida, etc.

El siguiente ejemplo da cuenta de los argumentos que surgen entre los estudiantes y los consensos a los que llegan:

Ejemplo Grupo 1

E1G1: *…lo que pasa es que la pendiente igual es una constante porque es una recta*

E2G1: *– lo que pasa es que el sensor es una distancia lo que va graficando*

E2G1: *–ya, pero la distancia ¿respecto a qué?. Lo que pasa es que la velocidad va a ser la pendiente de esta recta; mira, suponte que la recta sea un "m", constante, entonces quiere decir que la velocidad la hiciste constante, pero ¿por qué grafico la distancia así?: porque se va separando la distancia y aquí va a transcurrir un tiempo ¿me entiendes o no?; porque aquí va aumentando la distancia, a medida que va aumentando la distancia va aumentando el tiempo y esto va a seguir siendo constante*

E1G1: *–es que si fuera… mira, piénsalo de esta manera: seria una constante como dices tú, si se mueve…*

E2G1 *– pero la velocidad va a ser una constante*

E1G1 *– pero fíjate, pero si se va moviendo al mismo tiempo, se va moviendo a una velocidad constante, o sea, el promedio va a ser siempre el mismo, la división de las dos, entonces te va a quedar una recta, no una…*

E2G1 *– pero si hay tienes una recta*

E1G1 *– pero así, mira esto es una velocidad constante, respecto a la grafica de velocidad*

E2G1 *–no, porque aquí la pendiente es cero, no quiere decir que es constante la velocidad, la velocidad te representa la variación de los "y" partido por "x", la pendiente de la recta, eso es claro ¿o no?, distancia partido por tiempo, ya la recta de esta pendiente va a ser la velocidad, ¿o todavía no te convence eso?*

E1G1 ***–*** *es que yo la veo de otra manera, el sensor me calcula sólo la distancia que recorrió en el tiempo, no la veo como la velocidad, ¿me entiendes?*

E2G1 *–es que la pendiente ¡tiene que ser la velocidad!... pero tú mismo lo estás diciendo, esto va graficando la distancia que va recorriendo en algún tiempo, va aumentando la distancia, va aumentando el tiempo, o sea… aquí por ejemplo* *te está graficando una recta, nosotros si hacemos la división de esto, va a ser la pendiente de la recta y que eso va a ser la velocidad*

IV.2.2.2 Actividad 2

Análisis a priori

En esta actividad no es necesario el uso de la tecnología.

Dadas las cuatro gráficas que denotan movimientos específicos, esperamos que los estudiantes logren argumentar la manera en que deben ocurrir los movimientos para obtener esas gráficas, cómo deben ser las variaciones que se deben experimentar. Dichos argumentos están directamente relacionados con los movimientos descritos en la actividad 1, pero ahora se requiere ser más explícitos en argumentar cómo se debe realizar el movimiento para interpretar cada gráfica.

Con esta actividad pretendemos que los alumnos puedan identificar ciertos patrones de comportamientos para que logren explicar qué es lo que ocurre con las gráficas proporcionadas y por qué se comportan de la manera en que lo hacen; en otras palabras, que descubran variaciones y puedan explicarlas, además que identifiquen ciertas funciones que representen las gráficas dadas.

Algunas expresiones que deberían aparecer en sus producciones son: variación, velocidad constante, aceleración, sin movimiento, distintos puntos de partida, sin velocidad, etc.

Con todo lo anterior, se lograría que los alumnos modelen el movimiento.

Actividad 2	Descripción general	Gráficas a) y b)	Gráfica c)	Gráfica d)
Significados	Identificar las curvas dadas con movimiento y comparar si tienen distinta variación	Relacionar la gráfica con un objeto en movimiento con velocidad constante igual o diferente. Identifica punto de partida	Relacionar la gráfica con un objeto en movimiento que no tiene velocidad constante igual o diferente. Identifica punto de partida .	Relacionar la gráfica con un objeto que no se mueve pero que está en distinta posición.

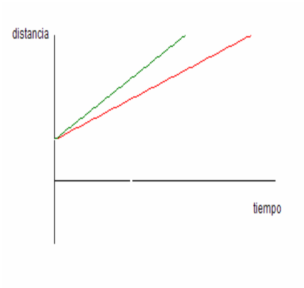
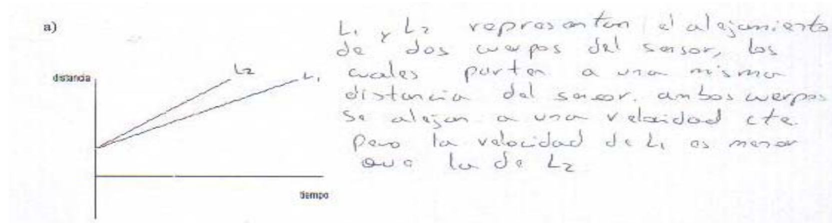
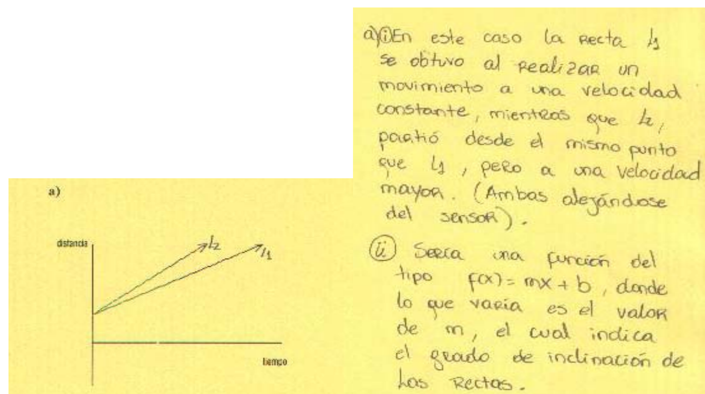
Procedimientos	Identificar una recta o una curva y la variación de parámetros que existen entre las curvas dadas	Identifica rectas con pendientes e interceptos diferentes.	Identifica curvas con interceptos diferentes.	Identifica rectas con pendiente cero y distintos puntos de partida.
Proceso-objeto	Identifica la curva o recta. Identifica puntos de partida y la relación con el sensor. Identifica el tipo de variación. Objetos (pendientes, puntos, rectas, interceptos, variaciones, cuocientes)	Identifica las rectas. Compara las pendientes (variación constante) y los interceptos Determina que ambas curvas tienen una variación constante de la distancia con respecto al tiempo	Identifica las curvas. Compara con una recta (variación no constante) Identifica interceptos. Determina que ambas curvas tienen una variación no constante de la distancia con respecto al tiempo.	Identifica las rectas. Identifica puntos de partida. Determina que ambas curvas no tienen movimiento.
argumento	Gráfica-movimiento-modelación (Variación de parámetros)			

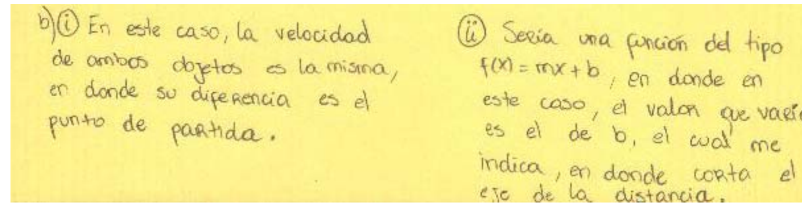
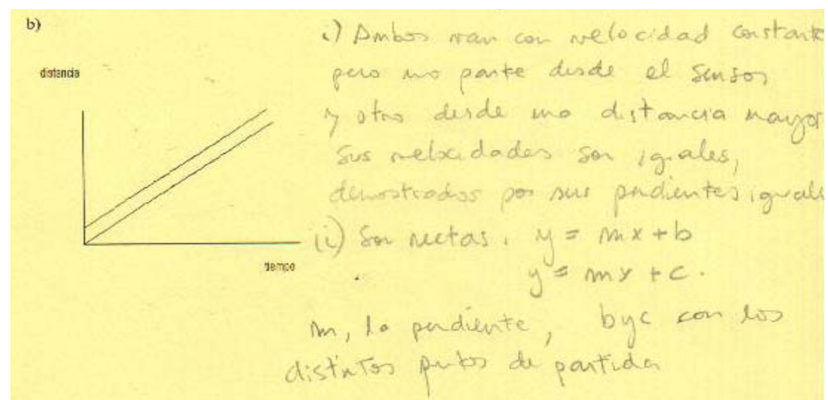
Puesta en escena

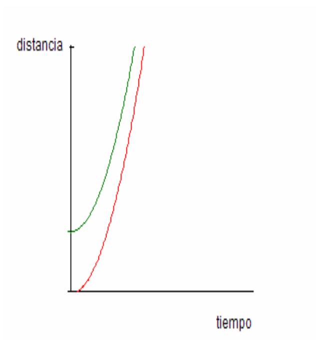
En esta actividad los grupos de estudiantes reconocen los movimientos que se visualizan debido a la actividad anterior, por lo que se focalizan en dar respuesta a cuál es la diferencia entre dos gráficas distintas pero correspondientes a un mismo tipo de movimiento. Las respuestas que dan son similares entre sí, tanto en los argumentos como en sus justificaciones.

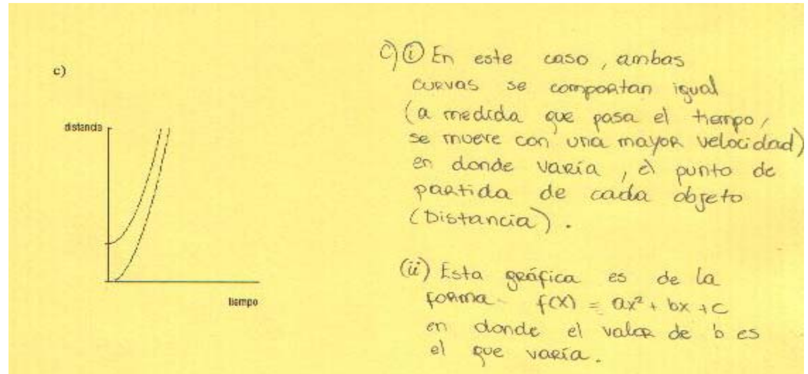
A continuación presentamos una tabla con la caracterización dada a esta actividad, algunos ejemplos y diálogos realizado por los estudiantes (ver tabla 2).

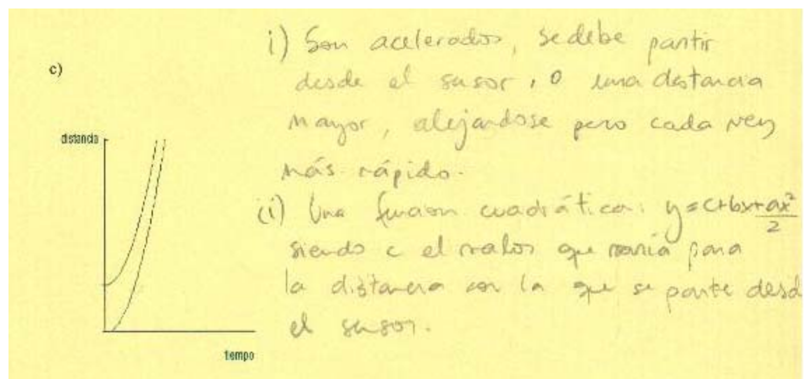
Tabla 2

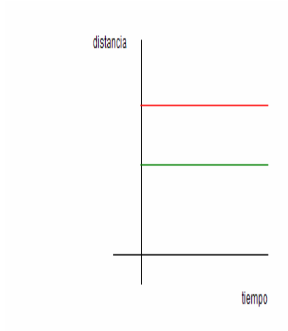
Gráficas	**Caracterización de patrones de movimiento y relación funcional realizada por los grupos**	**Ejemplos y diálogos**
a) 	Identifican que ambas gráficas representan el movimiento de un objeto con velocidad constante pero distintas y que tienen el mismo punto de partida. Dos grupos relacionan dicho movimiento con la expresión funcional de rectas indicando diferente pendiente y el mismo punto de partida.	G1  G2  E1: se obtuvo…al realizar un movimiento… E2: constante, a una velocidad determinada… E2: en cambio la otra realizó lo mismo, pero a una velocidad mayor

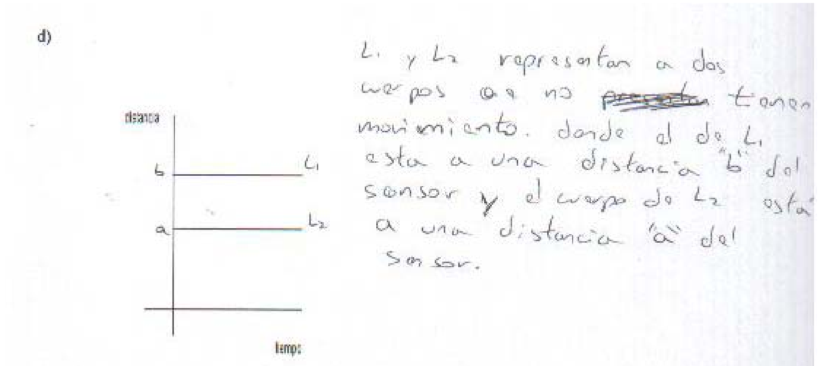
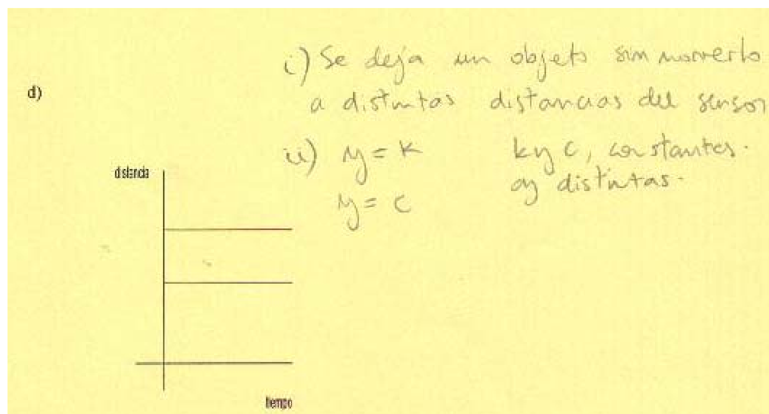
b)  	Identifican que se trata de objetos en movimientos con la misma velocidad (constante) y que difieren en el punto de partida. Dos grupos hacen la relación con funciones de ecuaciones de rectas que tienen igual pendiente pero diferente punto de partida.	G2  b) (i) En este caso, la velocidad de ambos objetos es la misma, en donde su diferencia es el punto de partida. (ii) Sería una función del tipo $f(x) = mx + b$, en donde en este caso, el valor que varía es el de b, el cual me indica, en donde corta el eje de la distancia. E2: aquí igual es una velocidad cosntante, en L_1 y L_2 la velocidad es la misma E1: velocidad? E2: si velocidad E3: velocidad E1: … y además por la propiedad … distancia tiempo E1: en este caso…la velocidad de ambos objetos… E3: … es la misma E2: lo único que cambia es la distancia que está el objeto del sensor G3  b) distancia tiempo i) Ambos van con velocidad constante pero uno parte desde el sensor y otro desde una distancia mayor. Sus velocidades son iguales, demostrados por sus pendientes iguales. ii) Son rectas. $y = mx + b$ $y = mx + c$. m, la pendiente, b y c con los distintos puntos de partida

<table>
<tr>
<td>c)
</td>
<td>Identifican que se trata de movimientos cuya velocidad ya no es constante sino que:
velocidad mayor (G2)
acelerada (G3)

Dos grupos identifican una expresión funcional y la deswcriben</td>
<td>G2

E2: en un corto tiempo la velocidad es cada vez mayor
E1: …se mueve con una mayor velocidad
E1: … en donde varía el punto de partida

G3
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>d)
</td>
<td>Identifican que se trata de objetos que están sin movimiento a diferentes distancias con respecto del sensor

Dos grupos hacen la relación funcional identificando una función constante como la representativa de la gráfica.</td>
<td>G1

G3
</td>
</tr>
</table>

Para el desarrollo de esta actividad, la tabla 1 fue relevante, porque como los estudiantes tenían hecha la conexión movimiento-gráfica e identificados los tipos de movimientos que estaban representados, se logró que argumentaran frente a lo planteado en esta actividad. Ellos identificaron expresiones tales como: varía, velocidad constante, a una misma velocidad, distintos puntos de partida, velocidad mayor, velocidad creciente, etc.

Dentro de las funciones que dan como respuesta, identifican cuál sería la variable "que cambia" (la variable independiente), identifican las curvas con cuerpos u objetos que no están en movimiento y los relacionan con una función constante. Cabe destacar que en esta actividad ningún grupo recurrió al uso de tecnología.

De acuerdo a las producciones de los estudiantes podemos observar que los tres grupos logran reconocer patrones de comportamientos mencionando explícitamente qué es lo que varía para explicar las distintas curvas presentadas; el hecho de tener ya la relación gráfica-movimiento logra que puedan avanzar en esta etapa. El "uso" de las gráficas en esta actividad no se escapa a lo mencionado en las conclusiones de la tabla 1. Por otro lado, la predicción se puede apreciar en un cierto nivel: a pesar de que no se pregunta explícitamente que predigan, deben ocupar ciertos datos para argumentar frente a sus pares por qué es correcto lo que afirman.

El siguiente ejemplo da cuenta de cómo los estudiantes llegan a consenso en la expresión analítica que representaría cierto tipo de movimiento.

Ejemplo Grupo 3

E1G3 *– dice que tipo de funciones tendría la misma gráfica, una curva.*
E3G3 *– es una curva sí, pero…*
E1G3 *– es una linda parábola que seria como…*
E3G3 *– una parábola, ¿una cuadrática una cosa así?*
E2G3 *– yo creo que seria una exponencial*
E1G3 *–sí, es que una exponencial sería*
E2G3 *–es que aquí tenemos, estamos limitados hasta donde llega el grafico no más.*
E3G3 *–¿si?*
E2G3 *–la otra sería como una exponencial pero con el dominio restringido*

E1G3 *– también podría ser pero…*

E3G3 *– si, también da*

E1G3 *– pero ¿cuál es la fórmula de la exponencial?*

E2G3 *– un número cualquiera elevado a X*

E1G3 *– mmm… también podría ser…*

E3G3 *– ocho, no sé como elevado a tres la cuestión*

E2G3 *– como 2x…*

E3G3 *– ¡Ah! pero no puede ser 3 la cuestión porque sería como estúpido*

E1G3 *– con dominio restringido, podría ser, si*

E3G3 *– sí, con dominio restringido, ya ¿le ponemos esa exponencial?*

E1G3 *– una* $ax^2 + bx + c$ *una ecuación de la recta ¿no podría ser?*

E2G3 *– eh… una x2 un puro x positivo, pero depende si te coloca menos tanto más tanto*

E1G3 *– podría ser, una cuadrática*

E2G3 *– es que sería como media parábola*

E3G3 *– sí, como lo mismo, imagínate*

E1G3 *– pero podría ser en una de esas una cuadrática ¿o no?*

E3G3 *– sí, porque acá no se le sumas b o algo así y ahí la parábola queda así, pero tienes que sacarle el resto.*

E1G3 *– pero esa fórmula podría ser, porque te acuerdas del lanzamiento de proyectil lo que daba la… lo que daba una fórmula, pongamos partimos tú tomas tiempo positivo y tiempo negativo, ¿te acuerdas? A ti te pueden salir dos tiempos nos habían explicado que el tiempo positivo ya es cuando supongamos tú dejas caer un objeto y La, la, la, la, la y cae y el tiempo negativo sería como… porque la fórmula no te margina si , si lo estás lanzando desde abajo no te margina , no te hace parar la curva no te da la curva desde acá hasta acá, no te da en la fórmula así te va a dar entero, por eso el tiempo negativo, el tiempo negativo sería como que parte desde acá*

E2G3 *– ya, coloca eso*

E1G3 *– cachas*

E2G3 *– es más fácil*

E3G3 *– ¿por qué así?*

E2G3 *– porque esa es la fórmula de distancia del movimiento acelerado, uniformemente acelerado*

E3G3 *– ¿sí?*

E1G3 *– podría ser*

E3G3 *– pero espérate ¿qué es c acá?*

E2G3 *– c seria el intercepto de donde parte, ya x ya x2 una cuadrática*

E1G3 *– distancia tiempo, claro*

E2G3 *– que en pocas palabras es velocidad por tiempo y eso es un medio de la aceleración por el tiempo al cuadrado*

E1G3 *– pero ¿ese sería semejante a ese de la posición final y todo eso?*

E2G3 *– sí, si distancia es eso*

E1G3 *– posición inicial menos posición final…*

IV.2.2.3 Actividad 3

Análisis a priori

En esta actividad, a diferencia de las dos anteriores, no entregamos gráficas sino que un problema en que se pide una representación gráfica y además una comparación entre las dos situaciones planteadas.

Esperamos que los estudiantes logren identificar la problemática planteada con una representación gráfica adecuada en relación directa con el movimiento expresado; para ello deben verificar en este momento cómo asimilaron o hicieron suyas las actividades anteriores.

Actividad 3	Descripción general	Preguntas a) y b)	Pregunta c)
Significados	Asociar la problemática dada con una representación gráfica que manifieste el movimiento que realiza una persona.	Identifica la variación constante en diferentes sentidos. Identifica cómo se está moviendo la persona y cuando se mueve.	Logra identificar las rectas que describen ambas situaciones planteadas. Identifica que ambos tienen variación constante pero en diferentes sentidos (ida y regreso) Identifica que en algún momento no hay movimiento.
Procedimientos	Identificar una función que describa la situación	Identifica rectas que describen el movimiento descrito Identifica el tipo de	Logra identificar las rectas que describen ambas situaciones planteadas y

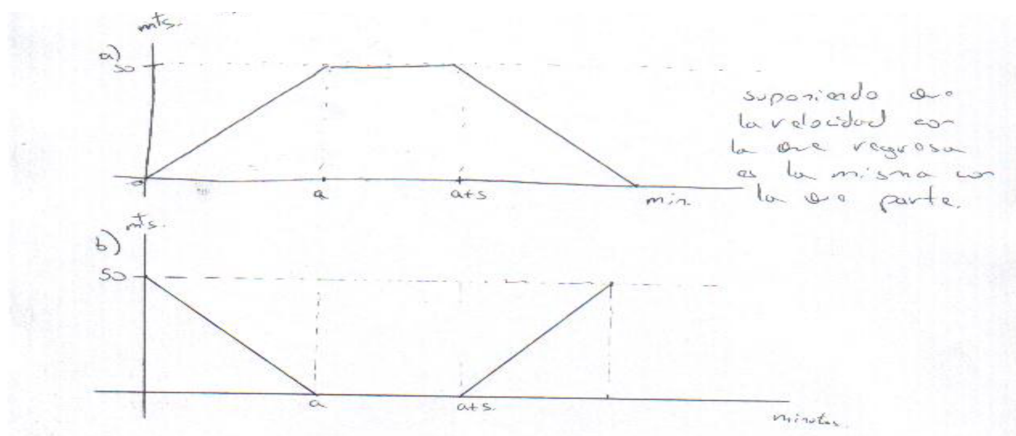
		pendientes que requiere cada recta que ocupe	compara. Identifica que las pendientes deben tener distinto signo
Proceso-objeto	Identifica la curva o recta. Identifica puntos de partida y la relación con el sensor. Identifica el tipo de variación	Identifica punto de partida Identifica la ubicación del sensor Identifica el significado de que se detiene por cinco minutos	Identifica el efecto de ir en un sentido y luego partir desde el otro sentido y compara. Identifica puntos de referencia (poste) Determina lo importante de la ubicación del sensor para comparar.
argumento	Graficación-modelación	Recta pendiente positiva- $y = bx + c$	

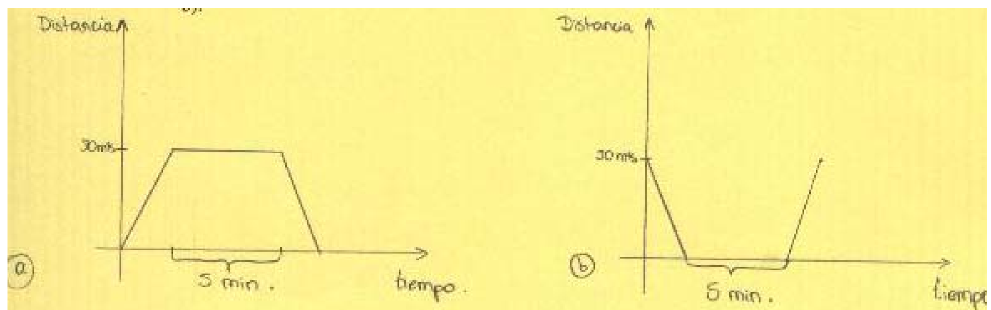
Puesta en escena

La respuesta que obtuvieron los estudiantes manifestada en los tres grupos fue la misma; las gráficas obtenidas son similares salvo en la manera de expresar ciertos datos (el intervalo del movimiento); se observó que enfrentaron la situación planteada sin mayor dificultad, debido a que rápidamente reconocieron el movimiento expresado y los puntos de referencia –por ejemplo, de dónde parte la persona caminando y lo que significa el hecho de que se quede detenida por cinco minutos–.

A continuación presentamos una tabla con la caracterización dada a esta actividad, algunos ejemplos y diálogos realizado por los estudiantes (ver tabla 3).

Tabla 3

Actividad 3	**Caracterización del movimiento y uso de gráficas realizado por los grupos**	**Ejemplos y diálogos**
Suponga que usted toma datos con un sensor de los movimientos indicados. Una persona que está a su lado comienza a moverse con velocidad constante hasta un poste situado a 50 metros de distancia, y se detiene por cinco minutos; luego regresa al lugar de partida. a) Construya una gráfica que describa el movimiento realizado por la persona, desde que parte hasta que regresa b) Suponga ahora que la persona parte	Identifican una representación gráfica a los problemas planteados en que describen el tipo de movimiento realizado. Brindan alguna justificación o argumentación de por qué resultaron de esa manera las gráficas.	G1 

desde el poste se acerca a usted a una velocidad constante, se detiene cinco minutos y regresa al poste. ¿Cuál sería la gráfica del movimiento realizado? c) Realice una comparación fundamentada de las gráficas obtenidas en los incisos a) y b).		i) las graficos son similares pero representan movimientos opuestos. ~~en el intervalo [0,a] en tiempo en el insiso "a", la persona se aleja a una velocidad constante del sensor hasta llegar al poste~~ y cada recta en isisos está fundamentada en los analisis previos. G2  (c) Cuando el punto de origen es el sensor, la gráfica es de forma creciente, en cambio, como la persona se acerca al sensor, la gráfica es decreciente, y en ambos el tiempo que se detuvo me indica que es una constante, ya que su velocidad es nula.

Esta actividad refuerza la relevancia de las anteriores, si bien aquí ya no se presentan gráficas a los alumnos sino un problema en donde ellos deben realizar una representación gráfica.

Un aspecto interesante de mencionar es que el problema presentado no manifiesta si acaso al devolverse la persona mantiene la misma velocidad constante con la que se desplazó hasta el poste, y dos de los grupos lo asumen como tal; sin embargo, un grupo reacciona explícitamente:

Ejemplo Grupo 1

E1G1 **–** *suponga que usted toma datos con el sensor de los movimientos indicados: una persona que está a su lado comienza a moverse con velocidad constante hasta un poste situado a 50 metros de distancia, entonces esto es como la, es lo que esta haciendo esto parte a su lado como lo que hace aquí la l1 ¿sí o no? Porque, mira, dice: una persona que está a su lado y se supone que tu estás con el sensor, comienza a moverse con velocidad constante hasta un poste situado a 50 metros de distancia y se detiene por 5 minutos, luego regresa al lugar de partida, ¡Aah! ya, cachái que se detiene por 5 minutos entonces en ese momento hay un lapsus de constante y luego regresa al lugar de partida, se supone que con la misma velocidad, como que se aleja se queda quieto y baja. Si hace como un cerrito entonces dice construya una grafica que describa el movimiento de la persona desde que parte hasta que regresa, entonces esa seria letra A. entonces para A tendríamos el eje de coordenadas 0 ¿cierto?, a una distancia de 50 metros de distancia entonces esto va a ser como el…*

E2G1 **–** *a dónde va a parar, y después se va a devolver… suponiendo que regresa a la misma velocidad deeel…sí po, porque no lo dice acá*

E1G1 **–** *entonces le vamos a poner suponiendo que regresa a la misma velocidad entonces ¿como era que dijiste tú? Se mueve así parte junto al sensor.*

Con esto queremos dar evidencia de cómo los integrantes de este grupo dialogan y argumentan para escribir su respuesta final; los otros grupos lo trabajan de la misma manera pero no queda escrita dicha reflexión.

Todos los grupos que trabajan esta actividad logran llegar a una respuesta y, más aún, es la misma respuesta. Si analizamos el “uso” de las gráficas podemos manifestar que es diferente al de las actividades anteriores debido a que al comienzo no poseen una representación gráfica del problema y por lo tanto tienen que generar una: deben interpretar adecuadamente el problema planteado de acuerdo a lo que han apropiado de las actividades anteriores –la relación del movimiento con la gráfica– y, mediante esa relación, su representación gráfica resulta más inmediata.

IV.2.3 MOMENTO 2

Este momento tiene como objetivo central que los alumnos logren la relación modelación-graficación. La importancia de este objetivo es que, para predecir la posición de un móvil en un tiempo específico, se requiere de un manejo tanto gráfico como de una expresión analítica, debido a que en ésta, si interpretan correctamente las variables que entran en juego, pueden predecir.
Otro objetivo de este momento es resignificar la expresión funcional de ecuaciones de primer y segundo grados (expresadas en las actividades 1 y 2, respectivamente)

Este momento está planteado en un ambiente de cinemática en el cual se espera que los estudiantes logren visualizar la importancia del tipo de movimiento para obtener una gráfica que lo represente.

A continuación detallamos lo que esperamos que respondan los estudiantes en cada una de las actividades de este momento

IV.2.3.1 Actividad 1

Análisis a priori

Esta actividad describe una problemática en la cual el movimiento es uniforme. Con los datos entregados se espera que los estudiantes, con ayuda del sensor, puedan relacionar ese movimiento con una expresión gráfica entregada por la calculadora; lo fundamental es que puedan predecir la posición del móvil en el tiempo dado. Al pedir la gráfica, les hacemos relacionar esta actividad con el momento 1 del diseño y, de esa manera, ellos pueden modelar y responder a la pregunta de predicción.

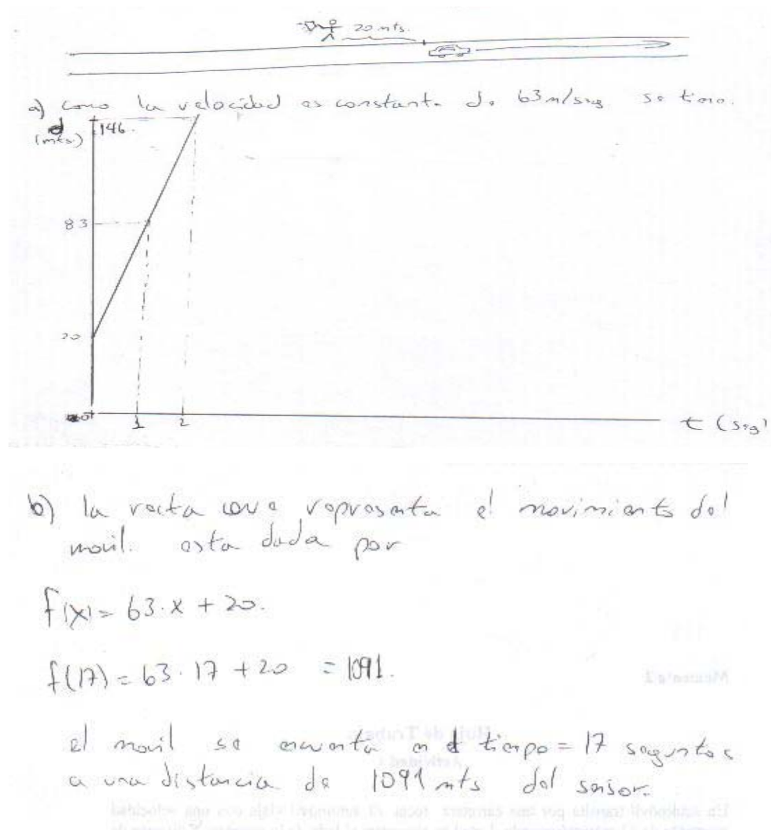
Actividad 1	Descripción
Significados	Identificar el tipo de movimiento descrito en el problema.(uniforme)
Procedimiento	Identificar la gráfica que el sensor entrega con relación al movimiento descrito (velocidad constante). Identificar una expresión analítica en relación con la gráfica (recta o curva) Predecir la posición del móvil en el tiempo pedido luego de resignificar la expresión funcional con el movimiento descrito.
Proceso-objeto	Identificar una recta. Identificar la función que describe el movimiento indicando que su pendiente debe ser positiva.(ecuación de la recta) Identificar punto de referencia y en qué sentido iría el movimiento. Resignificar la ecuación de una recta al interpretar que la pendiente es la velocidad constante y el intercepto es el punto de referencia.
Argumento	predicción

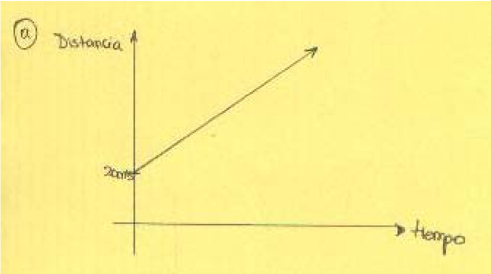
Puesta en escena

La actividad es abordada por los tres grupos; los estudiantes dan una representación gráfica acorde con el tipo de movimiento expresado en el problema planteado. Además, se observa que ellos rápidamente relacionan la gráfica con una función que la representa a ella y también a los datos entregados en el problema. Las respuestas obtenidas por los tres grupos es la misma.

A continuación presentamos una tabla con la caracterización dada a esta actividad, algunos ejemplos y diálogos realizado por los estudiantes (ver tabla 4).

Tabla 4

Actividad 1	**Caracterización del movimiento realizado por los grupos**	**Diálogos y ejemplos**
Un automóvil transita por una carretera recta. El automóvil viaja con una velocidad constante de 63 metros/segundo. Usted se encuentra al lado de la carretera y dispone de un sensor, suponga que en el momento que empieza a medir el tiempo, el automóvil se encuentra a 20 metros a la derecha y se aleja de usted. a) ¿Cuál es la gráfica obtenida por el sensor para establecer la relación entre las variables t y d? b) Prediga la posición del móvil en un tiempo $t = 17$ segundos	Relacionan el problema planteado con la gráfica obtenida por el sensor. Predicen la posición del móvil en el tiempo pedido a través de la ecuación de la recta que manifiestan para este problema.	G1 

		G2  ⓑ Esto lo podemos expresar de la forma $f(x)= mx + b$ $m= 63\ m/s$ $x= 17$ seg $b= 20$ mts $f(x)= ?$ $f(x) = mx + b$ $y = 63 \cdot 17 + 20$ $y = 1091.$ ∴ El móvil se encuentra a 1.091 mts, luego de haber transcurrido 17 segundos.

El hecho de plantear un problema de cinemática en que se otorga cierta información a los estudiantes, permite percibir que ellos pueden identificar el movimiento descrito con la representación gráfica que le otorga el sensor; relacionan las variables que entran en juego como son el tiempo y la distancia, y pueden interpretar de buena manera la función lineal con los datos entregados; es por ello que pueden predecir la posición del móvil en el tiempo pedido.

Siguiendo en la temática del momento anterior, proporcionamos dos ejemplos que dan cuenta del conocimiento que entra en juego por parte de los alumnos: el primero muestra cómo los estudiantes argumentan la situación recurriendo a contenidos ya vistos y a la relación con el momento anterior; el segundo manifiesta cómo los estudiantes llegan a una respuesta sin evidenciar cómo la obtienen, pero luego recurren a la cinemática y dan una descripción más detallada de cómo ocupan los datos del problema, y, finalmente, comprueban que el resultado es el mismo.

Ejemplo 1 Grupo 1

E1G1 **–** *momento 2 hoja de trabajo actividad 1: un automóvil transita por una carretera recta, estamos bien en el monito, el automóvil viaja con velocidad constante a 63 metros por segundo ya dice usted se encuentra al lado de la carretera y dispone de un sensor, suponga que en el momento en que empieza a medir el tiempo, el automóvil se encuentra a 20 metros a la derecha y se aleja de usted….*

E1G1 **–** *entonces este loco partió de aquí en ese sentido hacia afuera ¿Cuál es la grafica obtenida por el sensor para establecer la relación entre la variable tiempo y distancia?, es constante la velocidad*

E2G1 **–** *es 63 metros partido por 1 segundo*

E1G1 **–** *ya, en el 0 esta en el 20, en el 1 esta en 80, a no 83, en un segundo recorrió 83, en el 2 va a estar en el doble 126….146 si o no?, a 1 segundo recorrido va a recorrer 63 metros mas , o sea, 83 al anterior como es una velocidad constante se le va a sumar entonces va a ser super para la recta ya entonces vamos aponer acá como la velocidad es constante de 63 metros por segundo, se tiene entonces vamos a hacer*

	una mirada con lupa bien grande la grafica ….entonces distancia tiempo le voi a poner 20 aquí
E2G1	***–*** *no importa ponle 0 aquí, a pero ya partiste de aquí*
E1G1	***–****no po esta mal hecha la raya…. Entonces aquí va a ser 20 metros como la imagen del 1 vamos a hacer la segunda mas gordito y va a ser 83 acá vamos a poner el 2*
E2G1	***–*** *teni que poner el tiempo en minutos, o sea en segundos entre paréntesis*
E1G1	***–****entonces cuanto era en el 2….146*
E2G1	***–*** *indica la posición del móvil en el tiempo t, entonces va a ser una función ahí, entonces podemos decir que f(x) va a ser 63A+20, eso no tiene nada de ….*
E1G1	***–****va a ser la recta que representa el movimiento del móvil esta dada por y=63*x+20*
E2G1	***–*** *y tomamos de 17, o sea y=17, porque después nos dicen ubica el móvil en y=17*
E1G1	***–*** *el móvil en el tiempo t=17entonces aquí vamos aponerle f(x)…*
E2G1	***–*** *pero ponle f(t)*
E1G1	***–****entonces va a ser f(17)=63*17+20 (cálculos) es 1091 entonces el móvil se encuentra en el tiempo igual a 17 segundos a una distancia de 1091 metros del sensor*

Ejemplo 2 Grupo 3

E3G3	***–*** *tomo una paralela recta la tomo en directo con una velocidad constante de 63 metros por segundo*
E1G3	***–*** *entonces iba lento*
E3G3	***–*** *el automóvil se encuentra punto a la derecha…*
E1G3	***–*** *siempre va a ser positivo, a la derecha, convencionalmente yo digo que a la derecha es positivo, oye esa puede ser una observación buena*
E2G3	***–****ya está hecha la recta con los 2 puntos de más arriba*
E3G3	***–*** *¿Por qué los pusiste abajo?*
E2G3	***–*** *porque me pifie, partí de cero y tienes que partir del veinte y cuando empieza a medir el tiempo está a 20 metros*
E1G3	***–*** *parte del 20*

E3G3 *– ¿ahí no más?*

E2G3 *– no, sigue de largo no más, si después te piden T17*

E1G3 *– está recta no va a la misma pendiente a cero…*

E2G3 *– ya está hecho*

E1G3 *– hay que poner la gráfica ahora, a no na que ver estaba pensando en la ecuación*

E2G3 *– a y el automóvil está a…*

E1G3 *– hay que poner formula de cinemática*

E2G3 *–1091 metros*

E1G3 *– ¿seguro?*

E3G3 *– ¿seguro?*

E1G3 *– haber hagámoslo por cinemática*

E2G3 *– ¿Cómo?*

E1G3 *– hazlo con formula de cinemática*

E2G3 *– ¿de cinemática?*

E1G3 *–por si acaso*

E2G3 *– posición inicial son 20 más la aceleración por, velocidad por tiempo, 16 por 63 son 1071 más los 20 1091*

Esta actividad tuvo respuesta por los tres grupos y todas ellas fueron iguales, se destaca el hecho de que no hubiera sido posible la predicción sino existiera la relación graficación-modelación debido a que no hubieran podido conectar los datos.

El "uso" de las gráficas está relacionado en conexión con el momento 1, es decir, relacionan la gráfica con el movimiento (velocidad constante) y además realizan una conexión entre la gráfica y una función que la represente, en otras palabras, logran la relación graficación-modelación.

IV.2.3.2 Actividad 2

Análisis a priori

Esta actividad describe una problemática en que el movimiento es uniformemente acelerado. Se espera que con todos los datos entregados el estudiante (con ayuda del sensor) pueda relacionar dicho movimiento con una expresión gráfica entregada por la calculadora; lo fundamental es que pueda predecir en el tiempo pedido. Al pedir la gráfica les facilitamos relacionar con lo realizado en el momento 1 del diseño y, de esa manera, pueden modelar y responder a la pregunta de predicción.

Actividad 2	Descripción general
Significados	Identificar el tipo de movimiento descrito en el problema.(uniformemente acelerado)
Procedimiento	Identificar la gráfica que el sensor entrega con relación al movimiento descrito (velocidad no constante). Identificar una expresión analítica en relación con la gráfica (recta o curva) Predecir la posición del móvil en el tiempo pedido luego de resignificar la expresión funcional con el movimiento descrito.
Proceso-objeto	Identificar una curva. Identificar la función que describe el movimiento indicando el hecho de que existe gravedad en este caso (ecuación cuadrática) Identificar punto de referencia y en qué sentido iría el movimiento. Resignificar la ecuación cuadrática al interpretar que la pendiente es la velocidad constante , el intercepto es el punto de referencia y que la aceleración es el coeficiente que acompaña a x2.
Argumento	predicción

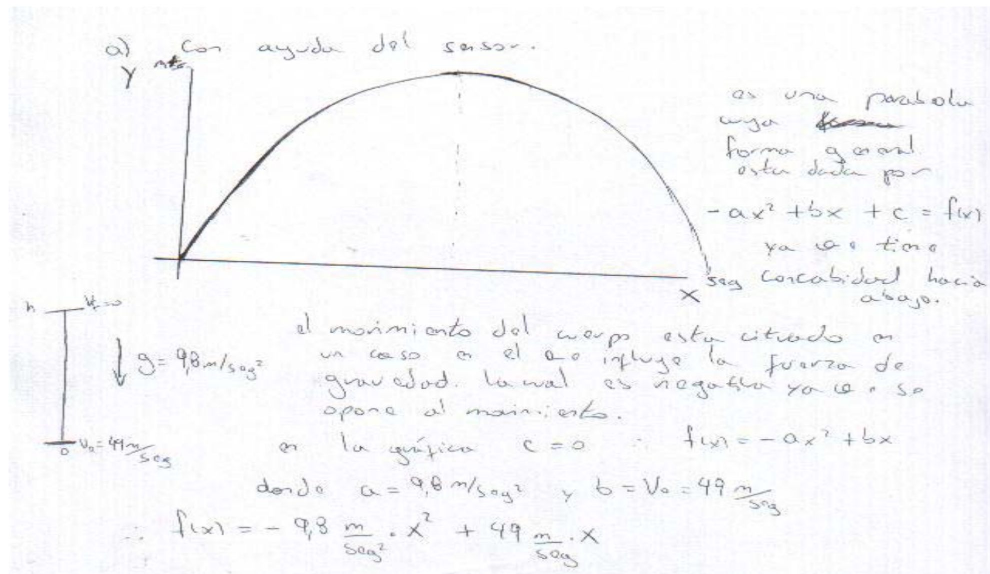
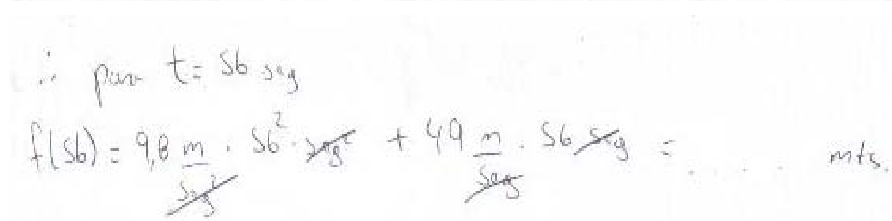
Puesta en escena

En esta actividad podemos observar que los tres grupos abordan las preguntas que la actividad les propone, pero ya se pueden visualizar algunas diferencias, como por ejemplo, el resultado final.

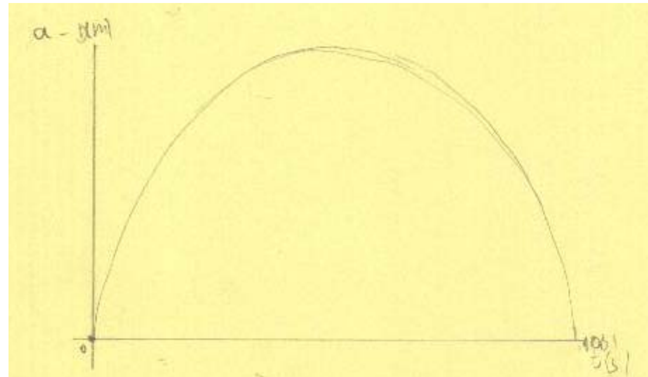
Ellos obtienen la gráfica que corresponde al movimiento planteado y logran realizar una conexión con una función que representa dicha gráfica; además, observan la relación de los datos entregados con la función que han expresado como respuesta.

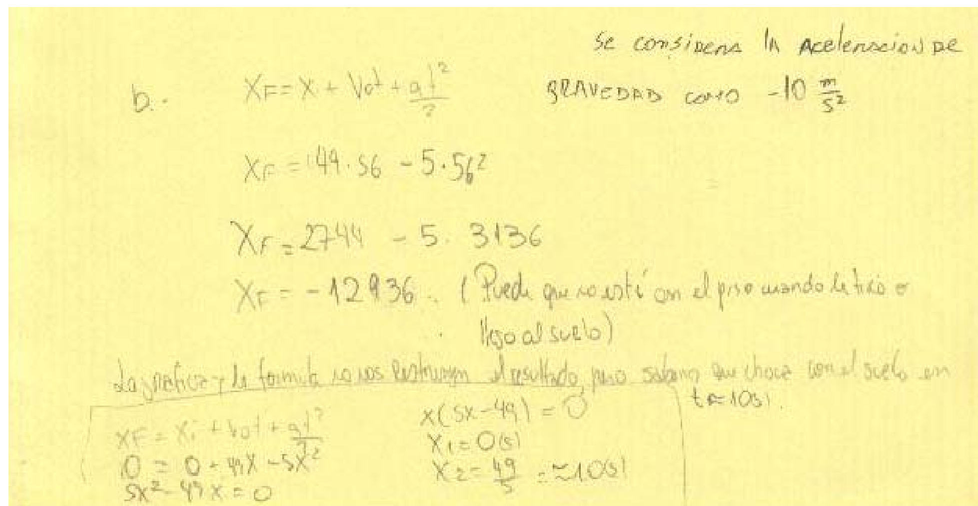
A continuación presentamos una tabla con la caracterización dada a esta actividad, algunos ejemplos y diálogos realizado por los estudiantes (ver tabla 5).

Tabla 5

Actividad 2	**Caracterización del movimiento realizado por los grupos**	**Ejemplos y diálogos**
Un observador lanza un objeto desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 49\frac{mt}{seg}$. a) ¿Cuál es la gráfica que el observador haría para establecer la relación entre las variables t y d? b) Prediga la posición del objeto cuando han transcurrido $t = 56$ segundos	Relacionan el problema planteado con la gráfica obtenida por el sensor. Predicen la posición del móvil en el tiempo pedido a través de la ecuación que deducen de la curva.	G1 

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
G3





Se considera la aceleración de gravedad como $-10 \frac{m}{s^2}$

b. $X_F = X_i + V_0 t + \frac{a t^2}{2}$

$X_F = 49 \cdot 56 - 5 \cdot 56^2$

$X_F = 2744 - 5 \cdot 3136$

$X_F = -12936$ (Puede que no esté en el piso cuando lo tiró o llegó al suelo)

La gráfica y la fórmula no nos muestran el resultado, pero sabemos que choca con el suelo en $t \approx 10(s)$.

$X_F = X_i + V_0 t + \frac{a t^2}{2}$

$0 = 0 + 49X - 5X^2$

$5X^2 - 49X = 0$

$X(5X - 49) = 0$

$X_1 = 0(s)$

$X_2 = \frac{49}{5} \approx 10(s)$
</td>
</tr>
</table>

A pesar de que nuevamente estamos en un ambiente de cinemática en que se describe un tipo de movimiento, podemos apreciar que aquí las respuestas comienzan a ser distintas, lo que se percibe por los argumentos que los estudiantes dan. Mostraremos evidencia de cómo un grupo relaciona el problema con la primera y la segunda derivadas, además de cómo otro grupo recurre a una representación gráfica para explicar cómo es el movimiento y de qué manera llega al resultado.

Ejemplo 1 Grupo1

E1G1 **–** *pero a ver ¿qué pasaría?... v_0, v en el tiempo cero… este movimiento que hace, recorre una cierta altura ¿cierto?, parte con v_0. Cierto, ¿verdad? Es igual a 49 y el v final es cero*

E2G1 **–** *te acordai de las ecuaciones diferenciales, ¿qué representaba la velocidad? ¿cuál derivada?...*

E1G1 **–** *la primera*

E2G1 **–** *y después venía la…*

E1G1 **–** *la aceleración… entonces aquí hay algo que se está oponiendo ¿verdad?, esto que sería la fuerza de gravedad g, es igual a menos 10, menos 9,8 metros partido por segundos al cuadrado, esta es aceleración*

Ejemplo 2 Grupo 3

Lo que sigue da evidencia de un cierto uso de gráfica, y de cómo los alumnos recurren a graficar el problema

E3G3 **–** *se lanza un objeto desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial de 42 metros por segundo. ¿Cómo…?*

E1G3 **–** *que hay que ver lo que hace el objeto, el objeto sube y baja, es decir se aleja del observador y vuelve, es decir es como la distancia…*

E2G3 **–** *pero no son rectas, porque es acelerado*

E1G3 **–** *¡Ah! Claro, porque cada vez cuando, porque sale con una velocidad, sale con una velocidad que es rápida, que la tira así con fuerza y tiende, y en el punto máximo queda con velocidad cero y después comienza con* *la misma velocidad con que subió comienza a bajar, o sea, tomando en cuenta que es un sistema aislado y no hay viento ni cosas malas que lo afecten, ¿cuál sería la gráfica del observado en la a?; ya, ¿quién sería?*

E2G3 **–** *parte desde el origen*

E1G3 **–***¿parte desde el origen? ¿y te vas como así?*

E2G3 **–** *es como una parábola dada vuelta, a ver…*

E3G3 **–***no puede ser po*

E1G3 **–** *a ver, espérate, hagamos el dibujito ya, sube y baja*

Este ejemplo da evidencia que con una representación gráfica se amplía la mirada a la resolución del problema en cuestión, recurren a la gráfica para poder potenciar su pensamiento y a través de ella argumentar.

IV.2.3.3 Actividad 3

Análisis a priori

Esta actividad, a diferencia de las dos anteriores, entrega como dato una función cuadrática que representa el movimiento de un móvil; en torno a esta información se realizan cinco preguntas relacionadas con la predicción, se pide predecir la posición de un móvil, su velocidad, la aceleración en tiempos determinados.

Actividad 3	Lo que se espera
Significados	Bajo al función dada identificar cuál es su representación gráfica (recta o curva) Identificar cuál es el sentido del móvil con respecto de un punto de referencia. Relacionar el movimiento con cinemática (la velocidad y la aceleración). Predecir: la posición, la velocidad, la aceleración del móvil en un tiempo determinado. Resignificar la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx$ Bajo otra instrucción, con otra función relacionar la cinemática con lo pedido.
Procedimiento	Identifica la curva Identificar cuál es el punto de referencia para analizar en qué

	sentido se dirige el móvil Relacionar el movimiento con la velocidad y la aceleración. Resignificar la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx$ donde *a* es la aceleración, *b* la velocidad constante Bajo otra instrucción, con otra función identificar su velocidad
Proceso-objeto	Identificar la función que describe el movimiento indicando el hecho de que existe gravedad en este caso (ecuación cuadrática) Identificar punto de referencia y en qué sentido iría el movimiento. Resignificar la ecuación cuadrática al interpretar que la pendiente es la velocidad constante, el intercepto es el punto de referencia y que la aceleración es el coeficiente que acompaña a x^2.
Argumento	predicción

Puesta en escena

En esta actividad se evidencian las diferentes respuestas que dan los tres grupos a las preguntas; ellos coinciden en las respuestas a las dos primeras preguntas, pero en las otras se deja ver los diversos razonamientos por parte de los estudiantes.

A pesar de las diferencias todos los grupos dan respuesta a la actividad en su totalidad y no dejan una pregunta sin responder.

A continuación presentamos una tabla con la caracterización dada a esta actividad, algunos ejemplos y diálogos realizado por los estudiantes (ver tabla 6).

Tabla 6

<table>
<tr>
<th>Actividad 3</th>
<th>Caracterización del movimiento realizado por los grupos</th>
<th>Ejemplos y diálogos</th>
</tr>
<tr>
<td>

La función $f(t) = 49t + 4.9t^2$ representa el movimiento de un móvil respecto de un observador.

a) Indique si el móvil se acerca o se aleja del observador
b) Prediga cuál es la posición del móvil en el tiempo $t = 4$
c) Prediga la velocidad del móvil en el tiempo $t = 4$
d) Indique la aceleración del móvil en el tiempo $t = 4$ y en el tiempo $t = 8$
e) La función $f(t) = 25t + 8t^2$ representa el movimiento de otro móvil. ¿Qué puede decir de su velocidad y su aceleración en relación con las del primer móvil?

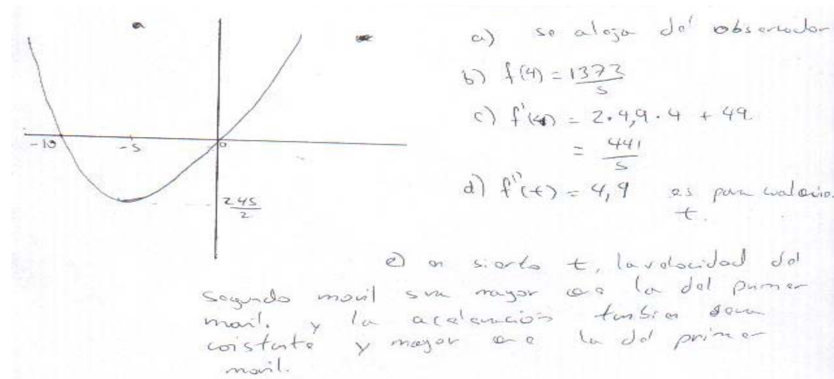
</td>
<td>

Dos grupos realizan la gráfica correspondiente a la función dada.

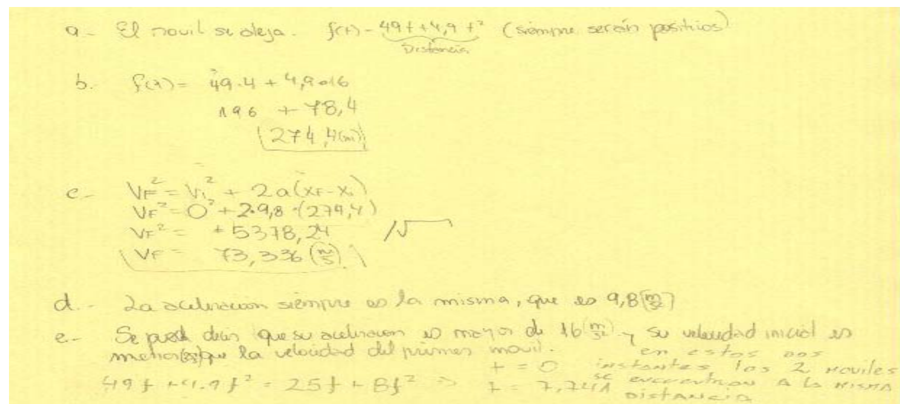
La manera de abordar las preguntas es distinta entre los tres grupos por lo que se obtienen respuestas diferentes

</td>
<td>

G1



G3



</td>
</tr>
</table>

El desarrollo de esta actividad deja de manifiesto que los grupos abordan el problema de diferente forma y llegan a distintos resultados; esto comienza a suceder en los incisos c) y d). Veamos algunos ejemplos que den cuenta de lo dicho.

Ejemplo 1 Grupo 1

E1G1 **–** *prediga la velocidad del móvil en t = 4*

E2G1 **–** *hay que derivar esto*

E1G1 **–** *derivarlo y lo evaluamos*

E2G1 **–** *te queda que f'(t) = 49 partido por 10 por 2 dt + 49*

E1G1 **–** *ya, entonces para calcular la velocidad derivamos*

E2G1 **–** *te queda f'(4)…*

E1G1 **–** *espérate, es 2 por 49 por t, es 2 por 49 por 4*

E2G1 **–** *partido por 10*

E1G1 **–** *¿por qué partido por 10?*

E2G1 **–** *sí, si es 4,9*

E1G1 **–** *sería 2 por 4.9 por 4, mas 49 ¿sí o no? Ya y esto es igual a… pero dejémoslo así no más…*

E2G1 **–** *¡ya! eso sería 441 partido por 5…*

E1G1 **–** *¡ya! d) indique la aceleración del móvil y en el tiempo t = 8, entonces hay que volver a derivar, esta misma que derivamos recién la volvemos a derivar, entonces se nos va el 49 ahora, y nos queda 4,9x*

E2G1 **–** *¿por qué x?, estay derivando 2 veces*

E1G1 **–** *se baja una vez y queda constante, se baja otra vez 4,9, esa es la aceleración, en todo los tiempos*

E2G1 **–** *va a ser constante*

E1G1 **–** *dt = 4.9, para cualquier tiempo… y la e), la función representa el movimiento de otro móvil, ¿Qué puede decir acerca de la velocidad y la aceleración?... también tiene aceleración constante ¿cierto?*

Ejemplo 2 Grupo 3

E1G3 **–** *prediga la velocidad del móvil en t=4 segundos*

E2G3 **–** *la velocidad del móvil es 49*

E1G3 – *va ser… porque la velocidad es igual*

E2G3 – *va ser velocidad final al cuadrado es igual a velocidad inicial al cuadrado*

E1G3 – *no, ni idea porque se está, ésta es una cuestión de movimiento rectilíneo, a mí no me parece*

E2G3 – *por a por xf-xi ¿para qué tiempo? A los 4*

E1G3 – *y ya tenemos la distancia*

E2G3 – *¿eso es 279? No ¿Cuánto es?*

E1G3 – *274,4*

E2G3 – *por a que es 4,9 por la velocidad inicial al cuadrado*

IV.2.4 MOMENTO 3

IV.2.4.1 Actividad 1

Análisis a priori

Este momento tiene como objetivo central que los alumnos logren predecir. Para ello, cuentan con una información inicial que deben saber ocupar; además, se espera que los estudiantes puedan construir un modelo predictivo y en definitiva construir la Serie de Taylor.

Este tipo de pregunta puede ser inusual para los estudiantes, es por ello que los momentos anteriores del diseño están elaborados para que en esta etapa pueda estar más familiarizados con el tipo de pregunta.

Este momento no cuenta con una expresión analítica ni con una gráfica, sino que los estudiantes, con todo lo que han relacionado anteriormente, deberían elaborar alguna respuesta a lo que se les plantea.

A continuación detallamos lo que esperamos que respondan los estudiantes en esta actividad.

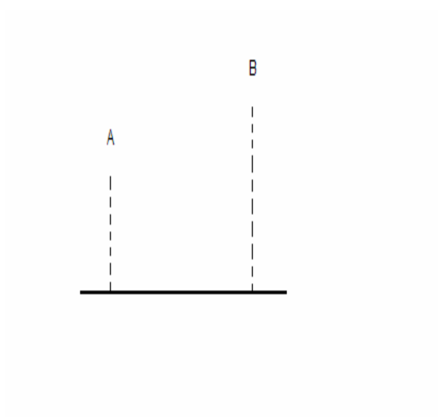
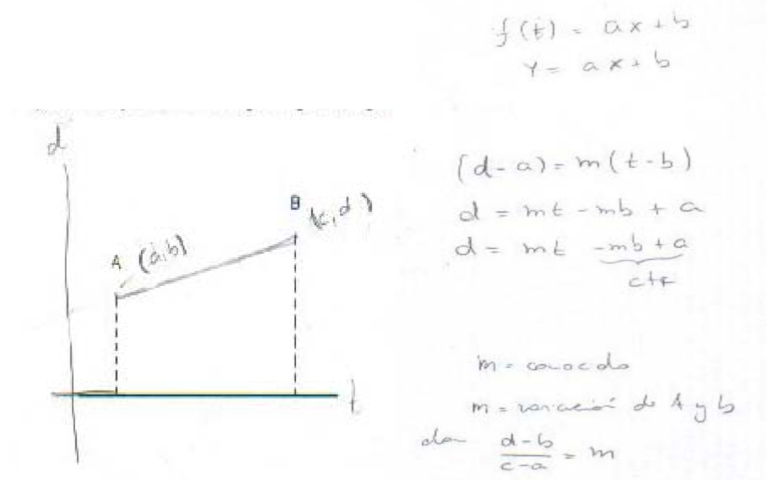
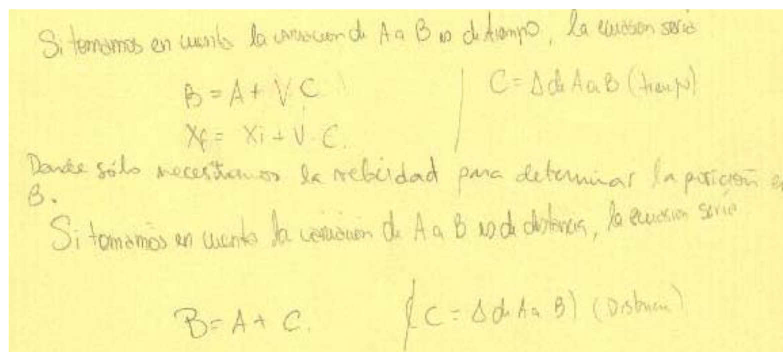
Actividad 1	Lo que esperamos
Significados	Identificar los datos entregados y lo que se pregunta (cuáles son las variables conocidas y cuál es la desconocida) Relacionar la variación con cinemática
Procedimiento	Ubicar los puntos de referencia Reconocer el tipo de variación
Proceso-objeto	Identificar alguna gráfica o expresión analítica
Argumento	Predicción

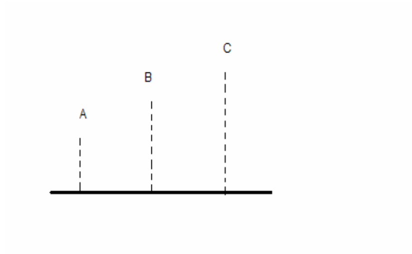
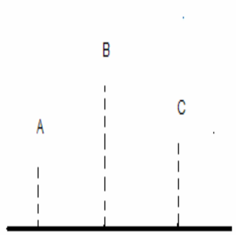
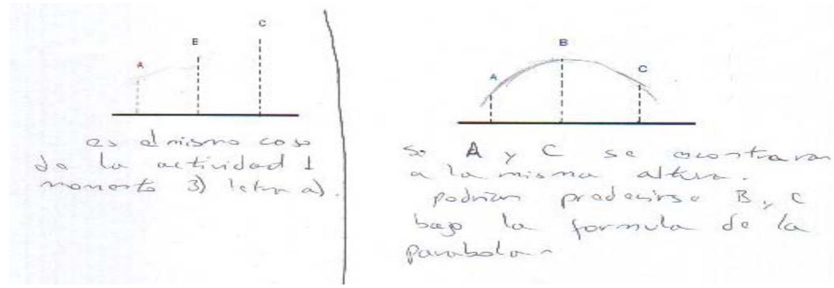
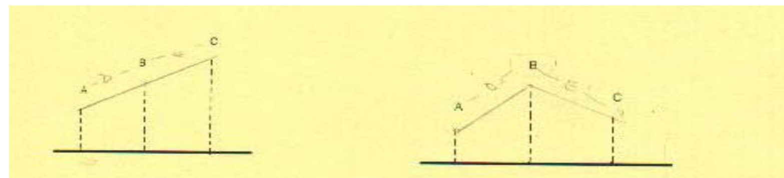
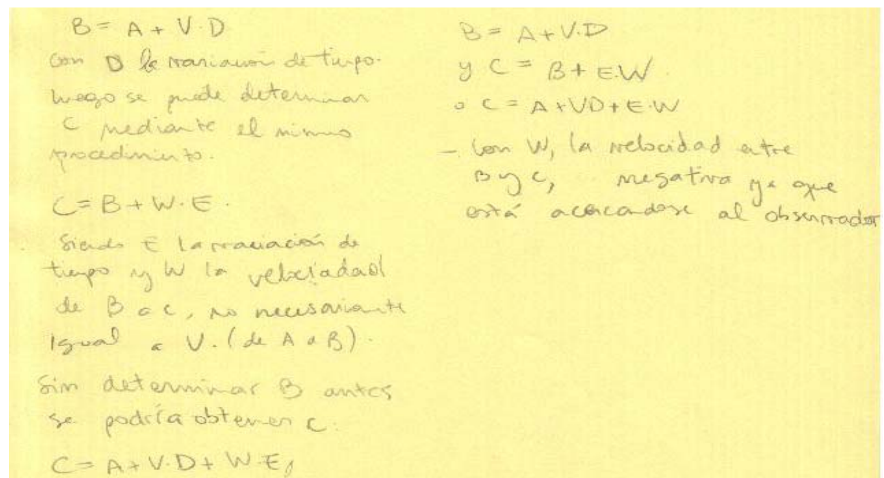
Puesta en escena

Esta última actividad del diseño tiene un grado de dificultad diferente a las otras, debido a que la manera de preguntar es distinta; sin embargo, todos los grupos enfrentan el problema y dan una respuesta a todo el momento. Podemos apreciar las diferentes maneras de abordarlo y los distintos resultados que obtienen.

A continuación presentamos una tabla con la caracterización dada a esta actividad, algunos ejemplos y diálogos realizado por los estudiantes (ver tabla 7).

Tabla 7

Actividad 1	Modelo predictivo realizado por los grupos	Ejemplos y diálogos
a) En la siguiente figura, A y B representan la posición de un móvil en tiempos diferentes. Se supone que usted sólo conoce A y la variación de A a B (pero no B). Construya un modelo que le permite predecir B a partir de esos datos 	Todos los grupos responden a la problemática planteada pero de manera diferente. El dibujo que se les presenta en la pregunta, un grupo hace uso de éste para luego argumentar su respuesta.	 

b) Suponiendo que se conoce A, la variación de A a B y la variación de B a C (pero no B ni C) construya un modelo que le permita predecir B y también C a partir de esos datos . i)  ii) 	Todos los grupos responden a lo planteado pero de manera diferente abordan la argumentación. Dos grupos utilizan el esquema de dibujo planteado	  

<table>
<tr>
<td>c)

De acuerdo a la experiencia obtenida en los casos anteriores construya un modelo predictivo de la posición futura del móvil si usted conoce:
• Posición inicial del móvil A
• Variación entre los puntos A y B
• Variación de la variación, obtener el punto C

¿Puede con esto predecir D?</td>
<td>Todos los grupos responden que si se puede predecir D.

Los argumentos para que ocurra aquello son diferentes.

Sólo un grupo realiza un bosquejo de gráfica frente al problema planto</td>
<td>G1

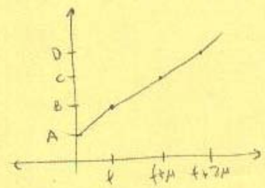
Con la variación de la variación de la variación podemos predecir D.

G3

$C = A + V \cdot f + W(f+\mu)$
Sea C la posición que queremos determinar,
A la posición inicial.
f, la variación de tiempo entre las posiciones A y B.
μ, la variación de la variación del tiempo para obtener C.
V, la velocidad de A a B. } pueden ser iguales o distintas.
W, la velocidad de B a C.

* Se puede predecir D si la variación de la variación (μ) es constante, y entre cada cambio de posición el tiempo transcurrido (f) fuere sólo variado según μ.

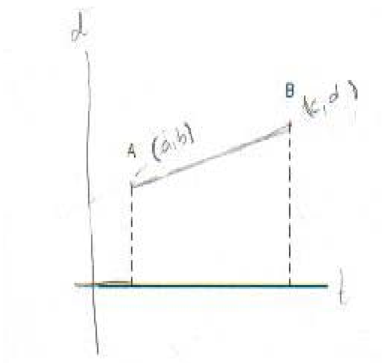
Se puede conocer la posición D si es que el tiempo en que se toma D está entre 0 y f+μ, conociendo sólo el tiempo.


</td>
</tr>
</table>

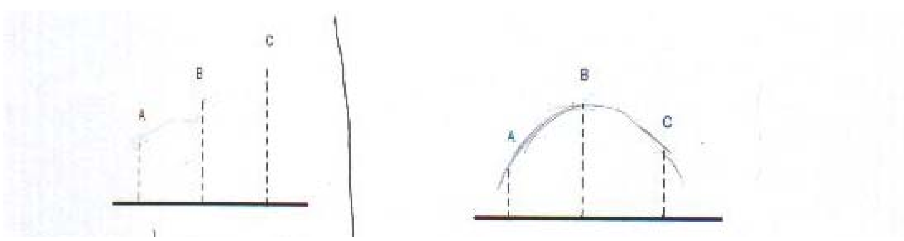
En esta actividad, los tres grupos responden a las preguntas planteadas, pero las respuestas son diferentes y la manera de abordar la problemática también; por ejemplo, podemos notar si lo grupos recurren o no a gráficas o bien si trabajan en el dibujo entregado para poder obtener alguna idea de cómo abordar el problema

Ejemplos de registros gráficos en torno al momento 3

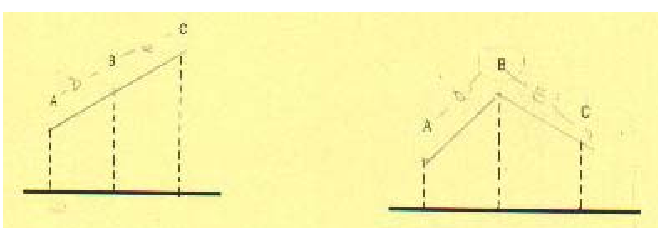
Grupo 1, letra a)



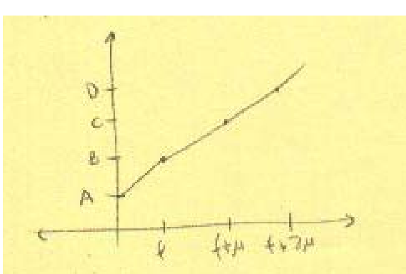
Grupo 1, letra b)



Grupo 3, letra b)

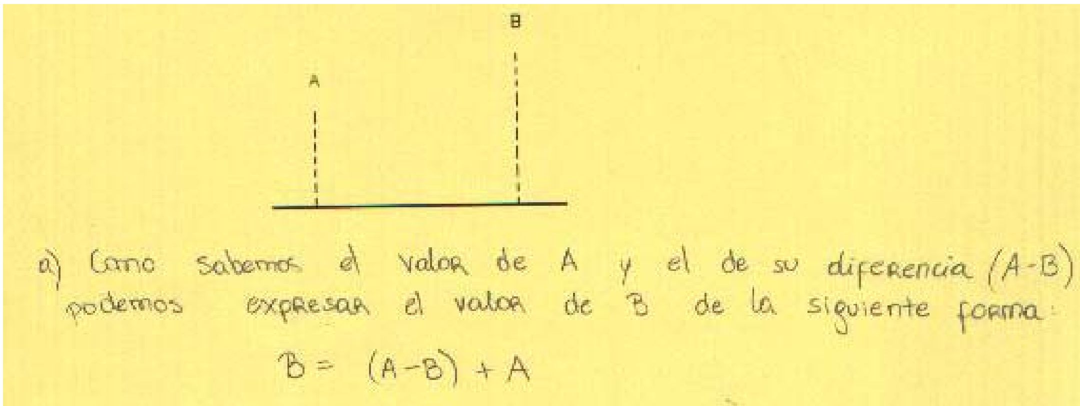


Grupo 3 letra c)



Otro aspecto a considerar es que, en los escritos de los alumnos, se refleja la expresión *variación de la variación*, así como también hacen referencia a una resta o a aspectos tales como posición final o inicial. Uno de los grupos trabaja con la diferencia, pero con los términos intercambiados, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo Grupo 2



IV.2.5 ANALISIS A POSTERIORI

Nuestro trabajo procura mostrar, a través del diseño, la relación que existe entre la práctica de la predicción con la Serie de Taylor; es por ello que el diseño de situación presenta a la predicción como argumento en una situación de variación, y el punto relevante que se quiere probar, a través de nuestro diseño, es la resignificación de la Serie de Taylor donde el movimiento pasa a ser el objeto de estudio y no así la Serie de Taylor, la manera de lograr dicha resignificación es que se pueda construir la Serie de Taylor con todo lo que plantea el diseño.

Además el diseño logra un ambiente en donde se reconstruyen significados, como lo son las relaciones gráfica-movimiento y las relaciones de gráficas con funciones (expresiones analíticas); todo ello en un escenario de situación de modelación del movimiento en que la práctica de graficación-modelación permite predecir.

Se puede analizar esta reconstrucción de significados que la práctica de predecir favorece en una situación de variación en que la graficación-modelación resignifica dicha variación.

Este análisis se desarrollará a partir de la revisión de los argumentos entregados por los estudiantes en dos apartados, el primero se refiere a explicitar lo que se logró en ámbito general del diseño en relación con lo hipotético planteado, el segundo se refiere a destacar dos instancias de la práctica de predecir en una situación de modelación del movimiento: la primera cuando se predice dadas las gráficas o expresiones analíticas, y la segunda cuando se predice sin gráficas ni expresión analítica, el objetivo que tiene este análisis no es sólo centrarse en cómo es que los estudiantes predicen sino también como se desenvuelven usando gráficas o no, cuáles son las conexiones que hacen, como también el poder observar cómo es que van construyendo la Serie de Taylor donde le movimiento es el objeto de estudio. Para ello se utilizarán tanto las respuestas finales de los estudiantes como la manera en que llegan a ellas: cuáles son sus posturas, argumentos, reflexiones, relaciones con otros temas, etc. Lo anterior nos permite determinar las conexiones que son relevantes al momento de predecir.

Para finalizar esta sección entregaremos una aproximación a la respuesta de nuestra pregunta de investigación

Aspectos generales de logros del diseño

Este ítem tiene como objetivo dar a conocer lo que se pudo apreciar en las producciones de los estudiantes que respondieron a las preguntas que el diseño de situación ofrecía pero en relación a nuestro análisis a priori.

En el momento 1, en términos generales e incorporando las tres actividades que conformaban este momento podemos decir que se logró:

- Que los estudiantes reconocieran los movimientos que estaban planteados, es decir, movimiento uniforme, movimiento uniformemente acelerado y que no hubo movimiento. Hubo conexión con cinemática
- Reconocieron punto de partida, ubicación del sensor, si la gráfica era una recta o una curva.

- Reconocen patrones de comportamientos, conectan con los movimientos que ya tienen clasificados y al ir analizando los parámetros obtienen conclusiones, como por ejemplo, si la pendiente es cero o que cierto valor debe ser positivo, etc
- Logran satisfactoriamente la relación movimiento-gráfica, particularmente, en la actividad 3, no tienen inconveniente en lograr la representación gráfica adecuada al problema e interpretan de buena manera lo que significa que una persona se detenga por 5 minutos, por ejemplo.
- En este momento se pudo apreciar cómo el uso de las gráficas favoreció sus argumentos.

En el momento 2, en términos generales e incorporando las tres actividades que conformaban este momento podemos decir que se logró:

- La relación entre el problema de cinemática planteado con el movimiento que se describía.
- La representación gráfica que le correspondía al ejercicio estaba a un nivel funcional, en el sentido, de que no recurrían a razonamientos lógicos.
- Respondieron a la pregunta de predecir, una vez realizada la conexión con el movimiento y su expresión analítica.
- En momentos en que aparecía una expresión analítica, algunos grupos, recurrían a su gráfica y luego daban respuesta a lo planteado, en el sentido que ya era parte de sus argumentos y razonamientos para enfrentar el problema.

En el momento 3, en términos generales e incorporando la única actividad que este momento tenía podemos decir que se logró:

- Que todos respondieran a la actividad, a pesar de ser una actividad ya diferente a las anteriores en cuanto a su planteamiento
- Razonamientos como *variación de la variación*, recurrir a la expresión de resta (B-A).
- Cuestionamientos como si lo que varía es la velocidad o el movimiento.
- Que en torno al dibujo planteado en la actividad, los estudiantes recurrieran a realizar conexiones a través de rectas entre los puntos A y B, y en torno a esos aspectos conectar con los momentos anteriores para argumentar sus respuestas.

Predecir en una situación de modelación del movimiento

A continuación presentamos, en dos partes, lo realizado por dos grupos de estudiantes (G1 y G3) basándonos en tres actividades del diseño:

En la primera parte:
Se revisan la actividad 2 (sin ecuación ni gráfica visual) y la actividad 3 (dada la ecuación) del momento 2, debido a que en ellas se puede ver la pregunta de predicción

En la segunda parte:
Se revisa la actividad 1 del momento 3 en que se pide un modelo predictivo pero sin conocer la función ni la ecuación correspondientes; luego presentamos algunas conclusiones al respecto.

(Se ha omitido algunas frases que no aportan al análisis, y se ha indicado con el signo (…) el párrafo faltante).

Estudiantes de Pedagogía en Matemáticas (G1)

Primera parte

Predecir dadas las gráficas o las expresiones analíticas (tabla 1)

Actividad sin ecuación	***Actividad con ecuación***
<u>*Analizando el problema*</u> **E2G1:** no, no va a ser una recta, porque la lanza hacia arriba y la velocidad va variando… **E1G1:** no yo tenía la idea de que iba a seguir constante, acuérdate de la gravedad **E2G1:** esta ejerciendo hacia abajo la gravedad… **E1G1:** ¿eso como lo miramos?, como en un vacío, como lo miramos, tomando en cuenta la gravedad que le resta… <u>*Conectando el problema con el hecho de predecir y con una expresión analítica*</u> **E1G1:** si, tendríamos que empezar para el tiempo	<u>*Analizando el problema*</u> **E1G1:** ya, hoja de trabajo actividad 3, la Función f(t) = … te das cuenta que se parece a la que hicimos recién, es mucho más fácil, entonces indique si el móvil se acerca o se aleja del observador. **E2G1:** se aleja <u>*Dada la ecuación grafican*</u> **E1G1:** ¿la graficaste? **E2G1:** si, y ahí esta parte queda así, aquí suponiendo que aquí está el sensor, o sea tienes que tomar, tomando este lado no mas,

cero, para el uno tienes 49 **Profesora:** claro en el fondo es… entienden cuando se les dice prediga **E1G1:** si es como encontrar una formula yo creo, es Como encontrar, como evaluar **Profesora:** porque aquí si esta en segundo, ¿ustedes tienen en segundo esto, cierto?, entonces ahí estamos dando el dato de la velocidad, solo ese dato, porque para poder predecir en ese tiempo, donde va a estar ese objeto, ¿que necesitan? tienen que pensar ¿que deberían saber? **E2G1:** saber la función que modela ese movimiento **Profesora:** ya, y mas o menos ¿Cuál seria? **E1G1:** una parábola vuelta hacia abajo, o sea, seria una parábola con pendiente, o sea con el "a" negativo *Relacionando los datos con una posible ecuación* **E1G1:** pero a ver ¿Qué pasaría?... v0, v en el tiempo cero… este movimiento que hace, recorre una cierta altura ¿cierto?, parte con v0 ¿cierto, verdad? Es igual a 49 y el v final es cero **E2G1:** te acordai de las ecuaciones diferenciales, ¿qué representaba la velocidad? ¿cuál derivada?... **E1G1:** la primera **E2G1:** y después venia la… **E1G1:** la aceleración… entonces aquí hay algo que se está oponiendo ¿verdad?, esto que sería la fuerza de gravedad g, es igual a menos 10, menos 9,8 metros partido por segundos al cuadrado, esta es aceleración **E1G1:** ya para llegar a esto te diste cuenta, ya pero al fin y al cabo esto ¿Qué representa?, así lo vi yo representa la curva y ¿Qué curva me está representando?, esta curva, ya y esta curva es la "y", que me está dando todos los valores de aquí entonces esto es "y", yo así lo vi, entonces ahora como destinamos el "a" 9,8 y el b como la velocidad, fue por la eliminación de las unidades **E2G1:** o sea al final el b te dio la velocidad, pero eso es lo mismo que estaba diciendo, que el b	esta gráfica es así. *Pregunta de predicción* **E1G1:** prediga cual es la posición del móvil en el tiempo t = 4, lo reemplazas, cierto, después prediga la velocidad en el tiempo t = 4, la velocidad, entonces distancia partido por tiempo… ah, entonces… **E2G1:** ahí está la velocidad, hay que derivar y ver f derivado de… *Conexión del problema con la gráfica* **E1G1:** ya entonces ¿Qué dibujo es la gráfica?, donde corta aquí… **E2G1:** en -10 **E1G1:** y abajo **E2G1:** en -245, 2 partido por 2 y en -5, o sea yo lo hice así no mas, pero es más abajo, no lo hice así no mas, lo factoricé, vi donde tenía su mínimo y donde tenía los cortes con el eje Y… *Respuesta a la pregunta de predicción* **E1G1:** …, o sea, se aleja del observador… f(4) ¿Cuánto te dio? **E2G1:** lo estoy haciendo aproximado, me dio eso 1372 partido por 5… ahí 274,4 *Otras preguntas de predicción* **E1G1:** prediga la velocidad del móvil en t =4 **E2G1:** hay que derivar esto **E1G1:** derivarlo y lo evaluamos **E2G1:** te queda que f'(t) = 49 partido por 10 por 2 dt + 49 **E1G1:** ya, entonces para calcular la velocidad derivamos **E2G1**: te queda f'(4)…

representa la pendiente de la cuestión.. *Se les pregunta si pueden predecir* **Profesora:** entonces ahora yo hago otra pregunta, si ubicamos 65 segundos, 30 segundos, ¿pueden predecir? **E2G1:** si, puedes predecir cualquiera	----- **E2G1:** ya eso seria, 441 partido por 5… **E1G1:** ya, d) indique la aceleración del móvil y en el tiempo t = 8, entonces hay que volver a derivar, esta misma que derivamos recién la volvemos a derivar, entonces se nos va el 49 ahora, y nos queda 4,9x **E2G1:** ¿Por qué x?, estay derivando 2 veces **E1G1:** se baja una vez y queda constante, se baja otra vez 4,9, esa es la aceleración, en todo los tiempos **E2G1:** va a ser constante **E1G1:** dt = 4.9, para cualquier tiempo…

Segunda parte

Predecir sin dar la gráfica ni la expresión analítica

Analizando el Problema **E1G1:** en la siguiente figura a y b representan la posición de un móvil en tiempos diferentes, se supone que usted solo conoce “a” y la variación de “*a*” a “b”, pero no b, construya un modelo que le permita predecir b a partir de estos datos. Pitágoras, una cuestión así ¿verdad? **E2G1:** es que Pitágoras te aparece la cuestión de la pendiente… igual vas a tener que trabajar con variables, porque te dice que: en la siguiente figura a y b representan la posición de un móvil en tiempos diferentes, se supone que usted solo conoce “a” **E1G1:** y esta distancia **E2G1:** y conoces esta distancia

Uno de los aspectos que debemos resaltar es la manera en cómo se presenta un problema ya que la forma de abordarlo va a depender de lo que se tenga como dato, esto es debido a que en la tabla presentada se hace una distinción entre poseer la ecuación o la gráfica al hecho de no contar con dichos elementos. Hemos observado, a través de las producciones de los estudiantes, que la forma de enfrentar la actividad sin ecuación es distinta a la actividad con ecuación, en la primera comienzan a discutir lo que dice el problema, a ver de qué manera lo interpreta cada uno, tratando de convencer al otro de su razonamiento, cuando se pregunta por la predicción uno de ellos deja evidencia de que es encontrar una fórmula que no tienen aún, y tratan de encontrarla. Los estudiantes en esta actividad cuentan con un problema de cinemática pero no poseen visualmente la gráfica (la pueden obtener del sensor si quieren ocupar dicha tecnología) y se les pide que predigan, ellos saben cómo debe ser la gráfica por los momentos anteriores y afirman que ésta no es una recta sino mas bien una curva, entonces tendiendo la gráfica se preocupan de buscar una función que la represente y de esa manera interpretar toda la información que el problema les está entregando para así dar respuesta a la predicción, el resultado de esto es que pueden dar respuesta a la pregunta y predicen.

En el ejercicio con ecuación ellos declaran que es más fácil y aparecen conexiones como la primera y segunda derivada, dada la ecuación el hecho de graficar se hace más familiar y natural, se deja ver qué alumno relaciona rápidamente materias de cálculo, sin embargo cuando predicen logran afirmar que se puede y más aún para cualquiera (en el contexto de la pregunta).

La relación de la primera y la segunda derivada con la velocidad constante y la aceleración queda en un nivel primario debido a que no logran dicha conexión para la actividad del momento 3.

Podemos exteriorizar que en ambas actividades descritas en la primera tabla, los estudiantes hacen uso de las gráficas, y por supuesto de la ecuación, realizan la práctica de la graficación-modelación y no sólo una de ellas. Cuando se les pide predecir las conexiones que ellos hacen es la de graficación-modelación, buscan dicha conexión y el nivel de relación entre ellas debe ser de tal forma que puedan conectar los datos entregados con la función y su respectiva gráfica, no basta que digan que es una curva sino que deben decir qué pasa con la aceleración, que rol juega en la función que encontraron, etc.

La manera de abordar las actividades es distinta, se evidencia que en una actividad existe más discusión en relación a la otra; si poseen la función, la grafican y no existe tanto reparo al respecto, es como decir esa es no nos cuestionemos y respondamos a la pregunta

A pesar de poder analizar que los estudiantes conectan materias que ya han visto, como puntos máximos o puntos de corte todo relacionado con la gráfica, así como primera y segunda derivada se hace notar que en la actividad en que no poseen ni la gráfica ni la ecuación y la pregunta al parecer no aporta muchos datos, o en términos matemáticos, es abstracta, uno de ellos recurre a algo muy básico como Pitágoras.

Estudiantes de primer año de Bachillerato en Ciencias (G3)

Primera Parte

Predecir dadas las gráficas o las expresiones analíticas

Actividad sin ecuación	***Actividad con ecuación***
<u>*Análisis del problema*</u> **E3G3:** se lanza un objeto desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial de 42 metros por segundo ¿Cómo…? **E1G3:** que hay que ver lo que hace el objeto, el objeto sube y baja, es decir se aleja del observador y vuelve, es decir es como la distancia… **E2G3:** pero no son rectas, porque es acelerado <u>*Conexión con gráfica y análisis de ésta*</u> **E1G3:** a claro porque cada vez cuando , porque sale con una velocidad , sale con una velocidad que es rápida , que la tira así con fuerza y tiende , y en el punto máximo queda con velocidad cero y después comienza con la misma velocidad con que subió comienza a bajar , o sea tomando en cuenta que es un sistema aislado y no hay viento ni cosas malas que lo afecten , ¿Cuál sería la gráfica del observado en la a? ya , ¿Quién sería? **E2G3:** parte desde el origen **E1G3:** ¿parte desde el origen? ¿Y te vas como así? **E2G3:** es como una parábola dada vuelta, haber	<u>*Pregunta con predicción*</u> **E1G3:** .., ya diga cual es la posición del móvil en el tiempo T=4 segundos **E2G3:** ¿Cuánto? **E1G3:** T igual 4 segundos ¿Cuánto es 4,9 por 16? …. **E3G3:** 78,4 …. <u>*Otra pregunta de predicción*</u> **E1G3:** prediga la velocidad del móvil en t = 4 segundos. **E2G3:** la velocidad del móvil es 49. … **E2G3:** va ser velocidad final al cuadrado es igual a velocidad inicial al cuadrado. **E1G3:** no, ni idea porque se está, ésta es una cuestión de movimiento rectilíneo, a mi no me parece **E2G3:** por a por xf-xi para ¿qué tiempo? A los 4 **E1G3:** y ya tenemos la distancia … **E1G3:** 274,4

E3G3: no puede ser po

E1G3: a ver, espérate, hagamos el dibujito ya, sube y baja

…

E3G3: empieza como a desacelerar, en vez de hacer como así la guatita tiene que ser una guatita así y después cuando baja también acelera

E2G3: mira si es distancia primero se empieza a alejar y llega a un punto y se empieza a acercar cada vez más rápido

E1G3: tienes toda la razón, empieza claro ¿Cómo sería? ¿Así?

E3G3: una especie de parábola

Conexión con una ecuación

E3G3: pero ¿Por qué estas ocupando esa formula?

E2G3: lo que tú quieres saber es donde está

E1G3: porque no sabemos cuanto se demora ¿o no?

E2G3: pero tu sabes la aceleración, si te asumes a menos 10

E1G3: si, pero espérate pero lo que pasa es que no sabemos si cuando está bajando o está subiendo

E2G3: ¿Cómo?

E1G3: no sabemos como va a ser la velocidad, positiva o negativa

E2G3: no, si es velocidad inicial y la velocidad inicial es positiva

E3G3: pero, a ¿Qué están hablando? Me perdí

E2G3: física

E3G3: ¿Qué formula es?

E1G3: es del movimiento

E3G3: a ya no

E2G3: arco acelerado

E1G3: 49 por 56 más

E2G3: un medio, menos 10

E1G3: menos 10 menos 5

E2G3: 562

E1G3: y eso es…

Conexión del problema con ecuación

...

E3G3: y ¿Cómo sabes que es 4,9 la aceleración?

E1G3: ese es más no es por, más…

E2G3: dice, la velocidad al cuadrado ¿Cuánto es? ¿Cero?

E1G3: cero

E2G3: 4,9 ·2, 74,4 ¿Cuánto es?

E3G3: ¿Cómo?

E2G3: 274,4 ·49 no 4,9

E3G3: ¿eso?

E2G3: ¿y la raíz de eso?

E1G3: no tiene aceleración

E2G3: si, 4.9 · t2 a pero es un medio la aceleración 4,9 · 8,…

E1G3: a ver multiplica 4,2 por nueve caro.

E2G3: no, 4,9 por 2

E3G3: eso es lo que estaba pensando ¿Por qué es 4,9?

E1G3: 9,8

E2G3: y eso por los 274,4

E1G3: pero ¿la aceleración es positiva o negativa? A, pero dos nueve coma ocho, esto es un lanzamiento, mira los dos puntos medios 9,8 y la velocidad inicial sería 02

E3G3: ¿y la velocidad a los 4 segundos cuanto?

E1G3: multiplica 2,74, sabes que no se parece que en algo estamos equivocando

….

E2G3: serían 73,33

Otra pregunta de predicción

E1G3: … Indica la aceleración del móvil en T=4 y en el tiempo T=8 segundos

E2G3: 4,9, no 9,8, la aceleración siempre es la misma

E1G3: la aceleración es 9,8 metros por segundo al cuadrado, aceleración siempre es la misma, a ver espérate hay que ver si en T=8 se no se detiene

E2G3:¿Por qué? Si siempre se va alejando

E3G3: en alguna parte que como conclusión podemos decir que se trata de una, lanzamiento hacia abajo o

	caída libre, ¿la lanzaron hacia abajo? **E2G3:** no tampoco, o sea puede representarse así pero puede ser que no te este acelerando a 4,8 metros por segundo y esté fuerza horizontal, que es más factible que hacia abajo porque hacia abajo está a un momento choca con el suelo **E1G3:** la aceleración siempre es la misma y es de 9,8 metros por segundo al cuadrado **E2G3:** 9,8 es gravedad un medio es 4,9 si es que consideraron con 10 como consideramos nosotros en denantes

Segunda Parte

Predecir sin dar la gráfica ni la expresión analítica

E2G3: B en este caso es V por T más, ese V si fuera cambio de velocidad **E3G3:** pero eso, puede ser la variación de la velocidad pero estoy pensando necesitas sacar la velocidad en la posición A, la velocidad en la posición B y la variación entre esas dos velocidades es C entonces necesitas saber el tiempo, necesitas saber una de las dos velocidades, a la tienes, la aceleración si es que hubiese, de hecho si la hay porque varía la velocidad

Este grupo de estudiantes al igual que el anterior tienen maneras diferentes de abordar las actividades, en la actividad en que no se les proporciona la gráfica (sino que la pueden obtener por el sensor), estos analizan el problema y tratan de hacer la representación gráfica para luego obtener una fórmula pero en la actividad en que poseen la función, comienzan a reemplazar los valores entregados y responden, se convierte en una especie de reemplazo de variables pero sin tanta discusión previa, luego comienzan a tener intercambio de posturas y recurren a analizar cómo sería el movimiento, si se aleja o acelera, etc. Se puede observar que trabajan ambos aspectos la modelación y la graficación, pero la forma de abordar es diferente, dependiendo de los datos entregados ellos manifiestan una primero y luego la otra.

El uso de las gráficas se puede visualizar en este grupo, en el caso en que no la poseen recurren a obtenerla y argumentan cómo debe ser en relación con el tipo de movimiento planteado, luego reconocen una función que represente dicho movimiento y la conexión entre la gráfica con la función debe ser la adecuada para que puedan interpretar los datos entregados con la función para así poder predecir en el tiempo pedido. En la actividad donde poseen la función, este grupo no grafica y responde en función de los datos entregados. En la actividad en que no poseen ni la gráfica ni la función, este grupo abordó la problemática en su totalidad y analizaremos sus respuestas posteriormente.

Después de aplicar las actividades en torno al diseño elaborado, podemos explicitar algunas categorías de predicción que emergen de manera evidente: éstas son las analíticas y las gráficas. Las analíticas se refieren al hecho de buscar una expresión (función) que describa la gráfica en cuestión; en la categoría gráfica están aquellas en las que se hace un uso del comportamiento de la gráfica. La estructura del diseño y la situación en donde se realiza hacen que estas dos categorías surjan de manera natural.

Al referirnos a la predicción, nos parece necesario hacer la distinción de cómo se da esta práctica cuando tenemos distintos elementos que entran en juego en un ambiente de modelación del movimiento; por ello, hemos distinguido tres tipos de predicción, según el tipo de predicción que resulta dados ciertos elementos que componen la problemática para predecir y cómo están ellos relacionados; esto es, cómo conectan la gráfica con la expresión analítica.

Tipo 1:

Aquí se observa la predicción implícitamente, y se manifiesta al solicitar a los alumnos que argumenten por qué las curvas son de cierta manera. Es factible predecir a través de la variación de parámetros en conexión con el tipo de movimiento que se describe y con alguna expresión analítica; sin embargo, dicha conexión está en un nivel inicial, ya que para predecir, en el caso de una función lineal, sólo es necesario tener claridad en los siguientes elementos: que representa un movimiento con velocidad constante, el signo de la pendiente y cuál es la intersección con el eje OY. De esta manera, a través de la gráfica, los alumnos pueden argumentar qué es lo que está variando (punto de referencia, pendiente, intersección con el eje OX) y decidir cómo es el movimiento que representa la gráfica (uniforme, uniformemente acelerado, sin movimiento).

Tipo 2:

La predicción se manifiesta en forma explícita. Se pueden distinguir dos casos que muestran la predicción: El primero se produce cuando se posee la gráfica y se recurre a la expresión analítica, de modo que aparece la graficación-modelación. El segundo se evidencia al observar que, dada la expresión analítica, aun cuando no se recurra a la gráfica, la práctica de predecir se manifiesta al resignificar la expresión analítica y relacionarla con la gráfica.

Respecto de la conexión entre la gráfica y la ecuación, ésta requiere de otro nivel que el descrito anteriormente: en caso de tratarse de un movimiento uniforme, se requiere que no sólo se haga referencia a la pendiente de la función lineal correspondiente, sino considerarla en cuanto velocidad constante y de esta manera poder predecir en un tiempo cualquiera; para el caso del movimiento uniformemente acelerado, se requiere determinar cuál es la conexión con una función que lo identifique, en otras palabras, no basta decir si la curva representa un movimiento no constante sino que de qué manera se interpreta (si se lanza un objeto hacia arriba o hacia abajo, cómo queda la gráfica y su respectiva función, etc.).

Tipo 3:

En este caso podemos decir que se mira la práctica de predicción de una manera *pura*, ya que con ciertos elementos que no son los habituales (no se cuenta ni con la gráfica ni con la expresión analítica), al conectar los datos entregados de manera adecuada con la problemática, se puede evidenciar la conexión entre la primera derivada y un movimiento uniforme, y la segunda y un movimiento uniformemente acelerado. Este nivel requiere de una suerte de sumatoria de los dos anteriores y, al prescindir de la representación gráfica y de la expresión analítica, induce a que se procure encontrarlas –esto último está, por supuesto, en directa conexión con la resignificación de la Serie de Taylor–.

Se observa que este nivel de predicción está en un ámbito más abstracto, y, por otra parte, se puede distinguir dos subniveles, según el tipo de gráfica que los estudiantes pudieran llegar a realizar: pueden trabajar con rectas o con curvas diversas para conectar los datos entregados de A y B

Siguiendo con la idea de los tipos de predicción, se hace necesario revisar lo que desarrolló un grupo en particular (G3) con respecto al tipo 3 que se desarrolla precisamente en el momento 3 del diseño elaborado, es interesante observar lo que desarrolló este grupo de estudiantes al respecto, cuáles fueron sus razonamientos, sus usos de conocimiento puesto en juego, sus conexiones con los otros momentos del diseño, y sus respectivas conclusiones frente a lo planteado.

El hecho de enfocarnos solo al momento 3 no quiere decir que los otros momentos sean poco relevantes o no nos interesen en este análisis pero la forma como está estructurado el diseño nos permite poner la mirada en el momento al que hago mención. Se dará cuenta de cómo influyen las etapas anteriores y como los estudiantes logran resignificar la Serie de Taylor en tanto que la van construyendo.

En la tabla que se presentará a continuación quiere destacar el cómo se trabajó y no si el resultado es correcto o no, desde ese punto de vista, realizamos las conclusiones.

G 3	Resolución y argumentos	Uso del conocimiento	Conclusiones
Pregunta a)	Esta pregunta la responden considerando dos casos, suponen dos variaciones diferentes, una que dependa del tiempo y otra que dependa de la distancia, en ambos casos construyen su modelo predictivo en torno a una ecuación que elaboran y representa cada uno de los casos existentes por ellos.	- Se expresa una diferencia. - Se encuentra una ecuación y la relacionan con los datos entregados. - Se expresan con x_f y x_i en relación con la ecuación encontrada. - Afirman que sólo se necesita la velocidad para determinar la posición del móvil. - No recurren a ninguna representación gráfica	Los estudiantes en esta parte conectan con lo realizado en los momentos anteriores, referente a lo mencionado en la columna anterior. Las dificultades no se visualizan en la pregunta de la predicción sino mas bien en la interpretación de los datos entregados, tanto del esquema de dibujo como cuando se dice que se conoce la variación de A a B
Pregunta b)	En cada dibujo los	- Identifican una	Reconocen que para

	estudiantes unen los puntos a través de una línea recta, además anotan letras diferentes a las entregadas indicando lo que representan. Los dos dibujos planteados tiene una sutil diferencia y la manera de enfrentarlos si bien es cierto es similar pero los estudiantes manifiestan una diferencia.	ecuación que de cuenta de lo pedido. - Relacionan la ecuación con los datos entregados, es decir, mencionan la variación de tiempo y la velocidad de un punto a otro. - Afirman que sólo se necesita la velocidad para determinar la posición del móvil. - En los dibujos entregados los estudiantes recurren a realizar conexiones entre los puntos dados a través de rectas.	obtener lo pedido se debe encontrar las variables previas , es decir, para obtener C en el primer dibujo se debe obtener B primero. De igual manera proceden para el segundo dibujo pero mencionan que la velocidad es negativa entre B y C debido a que se está acercando al observador. También conectan con lo realizado anteriormente.
Pregunta c)	Cada dato entregado los estudiantes lo identifican y lo representan a través de una ecuación. Responden que se puede determinar el punto pedido y más aún responden que se puede predecir.	- Identifican una ecuación que de cuenta de lo pedido. - Relacionan la ecuación con los datos entregados, es decir, mencionan la variación de tiempo y la velocidad de un punto a otro. - Indican que se puede predecir D si la variación de la variación en constante, también hacen referencia a cómo debe ser el tiempo. - Indican que se puede conocer la posición D. - Realizan una representación gráfica.	En esta parte no existe dibujo entregado pero los estudiantes realizan uno, afirman que se puede predecir D, que es una de las preguntas, si la variación de la variación es constante y hacen alusión a el rol que juega el tiempo.

Aproximación a la pregunta de investigación

Este diseño fue trabajado en una situación de modelación del movimiento (SM-M) y la pregunta es ¿cuál es el uso de las gráficas cunado se resignifica la Serie de Taylor?

Recordando lo expresado en Suárez (2008) la categoría de Modelación-Graficación está conformado por tres elementos, que son,

a) los datos epistemológicos de la modelación del movimiento
b) los elementos propios de la modelación-graficación (realizaciones múltiples, identificación de parámetros, realización de ajustes, desarrollo del razonamiento)
c) las argumentaciones conformadas por significados, procedimientos y procesos

Otro de los aspectos a recordar es que existen datos epistemológicos que caracterizan un uso de las gráficas proporcionando un funcionamiento y una forma de la gráfica diferentes a las asociadas a la representación gráfica de la idea de matemática de función, estos elementos epistemológicos son: la gráfica antecede a la función; la gráfica es argumentativa y el uso de las gráficas tiene un desarrollo (en el sentido de que se adquieren significados).

Los datos obtenidos en nuestro diseño puede evidenciar que los estudiantes efectivamente, realizan ajustes a las gráficas para obtener el patrón deseado, ellos interpretan que si la gráfica, por ejemplo, es una recta y al final la calculadora le muestra una vuelta es porque en ese momento dejaron de tomar dato y tuvieron que sacar el objeto que estaba realizando el movimiento en ese instante. También realizaron interpretaciones de parámetros, cuando pensaban en una parábola, asumían que el valor de "a" que acompañaba a la expresión x^2 debía ser positivo, etc.

Por otro lado queda de manifiesto que la gráfica es un argumento debido a que en las producciones de los estudiantes podemos apreciar aquello. También es evidente que el "uso de las gráficas" tiene desarrollo, cada momento del diseño así lo declara, debido a que lo que los estudiantes obtienen de información de la gráfica se va profundizando. En alguna actividad que prescindiera de la gráfica, los estudiantes recurrían a realizar la gráfica y así obtener sus argumentos frente a lo planteado.

IV.3 EPISTEMOLOGIA REVISADA

Este trabajo ha propuesto una socioepistemología de la Serie de Taylor, entendiéndose ella por la relación entre la Serie de Taylor como objeto matemático y la predicción como práctica, esta relación se da a través de la práctica de predecir el movimiento pero en una situación específica, que en este caso es la de variación a través de una situación de modelación del movimiento. A partir de esta relación se ha creado un diseño en una situación de variación en que el argumento central es la predicción quien favorece la reconstrucción de significados respecto a la variación, a la relación que se da entre movimiento-gráfica y a la graficación-modelación, dando en consecuencia una resignificación a la Serie de Taylor en un carácter funcional y que vemos reflejada en la analiticidad de las funciones.

Al referirnos a la resignificación debemos dejar de manifiesto que no hacemos referencia al hecho de proveer un nuevo significado en un contexto específico para así buscar otro que resignifique lo ya significado (Buendía, 2004) sino mas bien hablamos de un concepto propio de la socioepistemología y que se refiere a la construcción del conocimiento mismo que está normado por lo institucional, recordando lo dicho por Cordero (2006) la resignificación es el uso del conocimiento en la situación específica donde se debate entre su funcionamiento y forma de acuerdo a lo que organizan los grupos humanos.

Desde este punto de vista la predicción es la encargada de producir dicho debate, es por ello que esta práctica se sitúa en una situación específica (variación) en que se pueden ver la organización de los individuos que participan del diseño y todo lo que resulta de allí, en otras palabras, cuáles son sus argumentos, sus consensos, sus herramientas, sus procedimientos, por ello que influyen los aspectos culturales y los institucionales.

En los momentos que arman el diseño podemos decir que los significados que el estudiante pone en juego es el hecho de poder establecer la relación movimiento-gráfica en que logra reconocer ciertos comportamientos en los movimientos específicos y darle una clasificación. Dichos significados son etiquetados por el tipo de movimiento presente en la actividad, movimiento uniforme, movimiento uniformemente acelerado y sin movimiento, en que se hace presente la conexión entre lo que significa una gráfica y el movimiento que se le asocia.

Al momento de predecir, el problema planteado tiene un realce diferente en cuanto a la gráfica o a la expresión analítica porque de allí surgen procedimientos que el estudiante comienza a denotar como lo son buscar una expresión analítica acorde con la gráfica que está dada o la que la calculadora gráfica le arroja en que realiza una conexión entre estos datos para poder interpretar adecuadamente qué significan, como por ejemplo qué tiene que ver la velocidad constante con respecto a la ecuación de la recta, o la aceleración con respecto a la curva, etc. Se pueden visualizar procedimientos como hablar de resta (posición final menos posición inicial), las herramientas que traen a colación los estudiantes en conexión con materias que traen de antes, como relacionar curvas crecientes, decrecientes, punto máximo, puntos de referencia, primera y segunda derivada, etc. Todo esto no está desconectado de los significados que ellos logran porque si no reconocen los tipos de movimientos que se describen o la relación movimiento-gráfica quizás no es tan evidente llegar a los procedimientos. Lo que se ha identificado en los procedimientos es una inclinación de contextos como los mencionados anteriormente que son los analíticos en que usan expresiones analíticas y los gráficos acudiendo a lo visual y a lo que conocen de gráficas.

Al referirnos a la reconstrucción de significados concretamente en este trabajo hacemos referencia a que si resignificamos la variación en una situación específica nos da pie para poder resignificar la ecuación de la recta y la ecuación cuadrática, en donde están relacionadas con la primera y segunda derivada así la Serie de Taylor obtiene una nueva significación basado en la práctica de predecir, ésta práctica logra que el binomio graficación-modelación sea mas robusto debido a que las concepciones acerca de las gráficas de una función son mirados diferentes tanto como sus expresiones analíticas.

La predicción es la que permite una confrontación en el diseño planteado, donde su escenario está en una situación de modelación del movimiento en que a través de la práctica institucional de la graficación-modelación es fundamental.

Es por esto que la socioepistemología puede dar cuenta de sus dimensiones epistemológicas, cognitivas, didácticas y sociales de manera sistémica en el siguiente dibujo (ver figura 11)

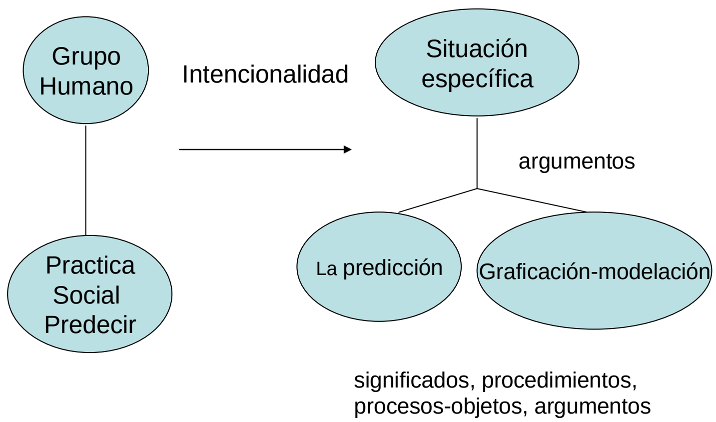


Figura 11

La importancia de haber desarrollado el diseño en una situación de modelación del movimiento tiene que ver por el hecho de que la situación específica es de variación en que a través de la graficación-modelación se resignifica la variación, podemos ver en los resultados obtenidos tanto una visión global como local de la gráfica y construcción con respecto a la pendiente.

Capítulo

V

Conclusiones Finales

Esta investigación ha problematizado sobre el discurso del cálculo escolar y el rol de la analiticiad de las funciones en el mismo, todo ello expresado en la Serie de Taylor. Si nos detenemos en un aspecto del problema nos encontraremos cuestionando cómo es que este tema vive en el currículo, por otro lado nos preguntamos si es que todos los estudiantes tienen acceso a él o cómo este tema está inserto en la matemática escolar, desde allí podemos centrarnos en las definiciones, en los teoremas, en definitiva en los contenidos y quizás abordar el aspecto de cómo se está enseñando el tema y dar una critica al respecto, pero este trabajo ha manifestado además la mirada desde lo epistemológico y cómo la Serie de Taylor ha sido tratada en sus orígenes, es en torno a aquello que surge de manera natural el referirnos a matemáticos importantes como Newton, Lagrange o Cauchy quienes tienen directa relación con la problemática en cuestión.

Yendo a otro aspecto del problema, específicamente en la matemática escolar, necesariamente se debe hacer referencia a su discurso que vivimos actualmente donde se visualiza como una de las problemáticas la falta de marcos de referencia que ayuden a resignificar el conocimiento matemático y por otro lado que la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos, donde adquiere sentido. Particularmente, este trabajo ha hecho referencia a la práctica de predicción del movimiento como una alternancia de dominios (la matemática y la física) donde se resignifica la Serie de Taylor y nos ofrece rasgos de su carácter funcional, justo donde la Serie de Taylor deja de ser el objeto de la situación sino mas bien, el movimiento es el objeto.

Este trabajo ha presentado desde la socioepistemología la relación Serie de Taylor con la práctica de la predicción brindando un marco de referencia ausente en el discurso matemático escolar y que a través de éste se puede resignificar la Serie de Taylor. Con otras palabras, el constructo teórico resignificación fue de hecho el objetivo de esta investigación. Para cumplir con el objetivo trazado se elaboró un diseño de situación de variación, es aquí en donde precisamente se ve reflejada la relación Serie de Taylor y la predicción (del movimiento). El escenario ad hoc para poder cumplir con esto fue en la formulación de una Situación de Modelación del Movimiento en la que se reflejó la práctica de graficación-modelación enlazada con la práctica de predecir. Recordando la Socioepistemología del Cálculo, podemos ver que nuestra entrada fue desde la situación de variación pasando por el argumento de predicción y el de graficación-modelación para así llegar a la analiticidad de las funciones expresada en la Serie de Taylor. En otras palabras, el diseño trabajó con dos prácticas, la predicción y la graficación-modelación, en que la segunda se cobró fuerza a partir de la primera.

Para abordar los aspectos que se consideran relevantes y de esta manera dar fuerza a nuestra propuesta es que a manera de conclusiones esta sección tiene tres apartados, en el primero hacemos referencia a al reorganización del contenido matemático, de qué manera se colabora con aquello, en un segundo apartado se hablará acerca del aporte que está investigación brinda a la aproximación socioepistemológica y el último apartado se refiere al nuevo estado de la problemática propuesta en que se manifiesta alguna interrogante.

V.1 REORGANIZACIÓN DEL CONTENIDO MATEMÁTICO

Uno de los objetivos de este trabajo es con evidencia colaborar en la reorganización del Cálculo, ya que apuntamos a realizar un rediseño del discurso matemático escolar. La manera en que se trabajó para este objetivo fue considerar la problemática que asume la ausencia de marcos de referencia en el discurso matemático escolar y propone, a través de la socioepistemología del Cálculo, una situación de variación en que sirvió de base para el diseño de la SM-M.

Con la epistemología que conlleva la SM-M se destacaron dos caminos, uno orientado a rehabilitar a la Serie de Taylor en una concepción funcional donde el objeto de estudio es el movimiento, en ese sentido se abandona la centración de la Serie de Taylor como objeto matemático; y el otro, orientado a plantear una situación no común en el discurso matemático escolar, lo que propicia la funcionalidad del conocimiento matemático y se reconoce como un marco de referencia para resignificar la Serie de Taylor, generando contextos argumentativos.

Hacer referencia a la reorganización del contenido matemático nos lleva sin elección a tratar el tema del diseño en el que podemos, por un lado, hablar desde la matemática y ver cuáles son los temas que entran en juego cuando se plantea dicho diseño de situación, tratando desde allí entender en qué sentido se puede reorganizar pero si nos quedamos en ese análisis quizás nos detendremos en los temas que los alumnos traen a colación en el diseño planteado y no de qué manera los ocupan, podemos decir que tienen temas de Cálculo como funciones, describir función creciente, decreciente, definición de derivadas y ciertas aplicaciones, gráficas, cinemática, nociones como velocidad constante, aceleración, expresiones analíticas pero por otro lado podemos hacer referencia a cómo ocupan dichos contenidos, en otras palabras, la mirada en este caso no apunta a los contenidos sino mas bien a cómo son usados, cómo se produce un quiebre cuando comienzan a cuestionar algunas cosas que creían saber y de esta manera comenzar a ubicar sus conocimientos, sus puntos de vista, sus interpretaciones, sus consensos, sus argumentos en ellos mismos y frente a sus compañeros.

Una Situación de Modelación del Movimiento favorece la matemática en su aspecto funcional, concordamos con las conclusiones de Suárez (2008) *"El hecho de plantear preguntas en una gráfica sobre cómo cambia, aumenta o disminuye, la posición de un móvil que se desplaza de un lugar a otro, propicia la creación de los argumentos que establecen relaciones entre la situación de movimiento y las características de la gráfica: la velocidad como la inclinación de una recta, la comparación de la distancia recorrida en un tiempo determinado y los patrones de ida y vuelta o aceleración o desaceleración"* (p.144)

Este trabajo permite ver de qué manera se relacionan temas y cuál es la profundidad que se requiere para dar respuesta a una problemática educativa. Es así como se pudo observar que el conocimiento que los estudiantes tratan en las materias de matemáticas tradicionales que los estudiantes tienen consigo al momento de trabajar el diseño está en un cierto nivel que no es suficiente. Se requirió de hacer conexiones tanto de gráficas como de funciones, imaginar cómo debería ser cierto comportamiento de movimiento, etc. Se pudo palpar cómo dichos conocimientos los ocuparon al momento de predecir, cómo es que una curva dibujada no es lo mismo que plantear un problema y deducir la curva, los movimientos con velocidad constante y con aceleración se pudieron ver representados en una gráfica y los estudiantes pudieron participar de dichos movimientos y ver reflejado aquello en una gráfica que una calculadora les mostraba, etc. Un aspecto interesante de mencionar es que todos los alumnos que trabajaron en el diseño no tienen tratado el tema de la Serie de Taylor por lo que ellos no saben en realidad cuál era el alcance de sus conexiones, pero la estaban construyendo.

Por otro lado, si analizamos una mirada desde el punto de vista pedagógico no se trata de realizar una actividad para ver de qué manera se enseña un tema específico sino de cómo se hace, precisamente el diseño pone en evidencia el cómo, brindando una situación específica ausente en el currículo y la manera en cómo afloran temas matemáticos y sus posibles conexiones. En otras palabras, las articulaciones que pueden surgir con la propuesta del diseño en cuestión.

V.2. LA APROXIMACIÓN TEÓRICA

La Socioepistemología postula que a las prácticas sociales generan conocimiento, esta investigación propone a la Serie de Taylor en relación con la práctica de la predicción brindando un análisis epistemológico al respecto, pero se debe hacer notar una importante conexión, que el trabajo desarrolla su diseño en una situación de variación y para ello lo realiza en un escenario llamado Situación de modelación del movimiento en que la práctica de graficación-modelación cobra un rol relevante.

Referirnos al binomio graficación-modelación nos hace conectarla de manera natural con la predicción, preguntándonos cuál es el rol de una con respecto a la otra, debido a que ambas son trabajadas en el diseño, es por ello que una de nuestras reflexiones es que la práctica de la predicción, que es inserta en el sistema didáctico, es la que potencia dicho binomio, en otras palabras, el binomio graficación-modelación se potencia con la práctica de predicción.

Para hacer una reflexión a lo dicho es que nos atrevemos a decir que la dupla graficación-modelación está fuertemente relacionada si está facilitada la parte graficación por algún mecanismo (tecnología por ejemplo) porque puede darse sólo una de las partes que componen este binomio pero el escenario de situación de modelación del movimiento robustece la dupla graficación-modelación y por supuesto la práctica de predecir. La graficación-modelación la miramos como un modelo que representa el movimiento en donde la predicción está incluida. Afirmamos que la predicción es un concepto fuerte en el sentido, por ejemplo, de que si estamos frente a una representación gráfica o en la búsqueda de un modelo no basta pensar que es algo que “sigue” sino que hay que incluir el pensar “cómo sigue”.

En cuanto a las evidencias que entregamos en este trabajo señalamos que en el desarrollo del diseño se ha trabajado el aspecto gráfico, en algunas actividades proporcionando las gráficas y en otras no, así como también pedir una función que represente la gráfica y en otras actividades entregar dichas funciones, la manera en que los estudiantes recurren a una gráfica o a una función nos proporciona una mirada para decir en qué aspecto trabajan con mayor facilidad y cómo en la actividad final del diseño en que no se les entrega ni gráfica ni función se propende a encontrarlos.

Ayudando a lo dicho es que se hace necesario mencionar lo realizado a un grupo de estudiantes de magíster en didáctica de la matemática, que se encuentran cursando su último semestre de la carrera en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, a ellos se les entregó un ejercicio muy sencillo en que se les pide que predigan, no disponen de tecnología (ver anexo 3), el resultado fue interesante. Algunos aspectos que queremos destacar, por ejemplo, es que ellos no tuvieron inconveniente cuando se les preguntó que predigan, es decir, entendían a lo que se refería la palabra predicción, además usaron los datos que el problema les proporcionaba. Las respuestas que ellos obtuvieron nos daba dos clasificaciones, en otras palabras, unos recurrieron a la gráfica y brindaron la respuesta a lo planteado sin error y otros recurrieron a una expresión analítica y también entregaron su respuesta sin error. Podemos analizar que unos se inclinaron al aspecto de la graficación y sólo eso bastaba para abordar la problemática presentada de igual manera los otros recurrieron al aspecto de la modelación. Pero cuando les preguntamos que si el ejercicio se modificaba agregando complejidad en los datos, ellos mencionaron que hubieran necesitado del otro aspecto que no habían trabajado, es decir, la graficación-modelación cobraba importancia como dupla.

Este trabajo da cuenta de la relación ente el objeto matemático y la práctica de predicción, basándonos que las prácticas generan conocimiento, la predicción es una práctica que surge al seno de lo que organizan los grupos humanos y una vez identificada se lleva al sistema didáctico para entrar en él como un argumento en una situación específica, referirnos al binomio graficación-modelación nos hace hablar de una práctica que nace también en la organización de los individuos pero más bien desde el sistema didáctico, es una práctica "institucional" .

Es importante hacer notar que hoy en día la modelación se trabaja como una aplicación o una representación de un objeto, la mirada es desde la matemática, sin embargo, desde la socioepistemología la graficación-modelación se desarrolla desde la práctica hacia la matemática (o al conocimiento), en otras palabras, nuestra mirada es contraria a la tradicional.

La graficación-modelación tiene intrínsecamente el "uso de las gráficas". La graficación por su parte es un uso y si estoy con tecnología el alumno esta provisto de su "uso" pero al ponerlo en una situación específica. Por otro lado podemos ver en el trabajo de Suárez (2008) quien postula que la graficación-modelación resignifica la variación

En relación a lo expresado anteriormente es que hacemos referencia a nuestra pregunta de investigación ¿cuál es el uso de las gráficas cuando se resignifica la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento?, abordar esta pregunta nos lleva necesariamente a referirnos a nuestro diseño en que el binomio graficación-modelación es el argumento en una situación específica.

El diseño de situación que esta investigación presenta es en un escenario de modelación del movimiento, es por ello que trabajamos con tecnología, la idea es poder esbozar lo que creemos que los estudiantes realizarán en el "uso de las gráficas". Uno de los aspectos que creemos van a ser expuestos en las producciones de los estudiantes es la asociación a gráficas conocidas más propiedades típicas (crecientes, decrecientes, concavidad, puntos máximos, puntos mínimos, gráficas parecidas a …), se estima que un funcionamiento puede ser la relación gráfica-expresión analítica.

Una reflexión interesante de mencionar es que si no tengo tecnología estaríamos frente al hecho de que faltaría la gráfica misma y en ese escenario los estudiantes realizarían el "uso de las gráficas" mencionado en el trabajo de Lara G. (2007) donde nos hace referencia a lo descrito por Cen (2006) afirmando que las gráficas tienen un desarrollo y un fin argumentativo.

Podemos mencionar algunos usos de las gráficas encontradas en este trabajo, particularmente en el momento 2 que tiene relación con la parábola, uno de estos usos son la distribución de puntos y la interpretación geométrica, este uso en cuanto a su funcionamiento (bosquejo de la ecuación) se da porque los estudiantes cuentan con la representación gráfica y asocian una ecuación con dicha representación, otro uso que se percibe es el de comportamiento de la curva, debido a que en las producciones de los alumnos manifiestan con el comportamiento visual de la gráfica y lo que ellos manejan de sus contenidos matemáticos.

Con esto queremos decir que dependiendo de las herramientas que el estudiante posea y cómo está elaborada la propuesta de diseño es que sus "usos" se van transformando, estamos ciertos que lo mencionado por Cen se verifica cuando dice que las gráficas tienen un desarrollo y un fin argumentativo, este trabajo proporciona evidencia de aquello, a través de los distintos momentos en que los estudiantes hacen un uso de las gráficas y se apoyan en ellas para argumentar.

También podemos agregar que las gráficas tienen una dimensión distinta con tecnología a que sin tecnología, debido a que con tecnología ya contamos con las representaciones gráficas y podemos centrarnos en otros aspectos, desde ese punto de vista es que mencionamos que el primer uso de gráficas descrito por Cen para el caso de la parábola no se estaría dando pero si no contamos con tecnología evidentemente se realizaría por parte de los estudiantes.

En los trabajo reportados por Suárez (2008) podemos ver otros usos de gráficas a los que hace mención.

La propuesta de este trabajo colabora con el marco teórico de la Socioepistemología ya que aporta con el hecho de que la práctica de la predicción genera conocimiento a través del diseño planteado quien deja evidencia de aquello. Por otro lado reafirma lo descrito en los trabajos de Buendía (2004) como de Alanís(1996) en que el dominio de la Física interactúa con el de Matemática y que la predicción como argumentación en una situación específica genera conocimiento. Además colabora y aporta nuevas evidencias a lo investigado por Suárez (2008) en que la Modelación-Graficación es una práctica institucional que genera conocimiento.

Este trabajo, a través de su diseño, ayuda a evidenciar la reconstrucción de significados en contextos argumentativos donde se ven surgidos los, significados, procedimientos, procesos, objetos y argumentaciones.

V.3 SOBRE EL NUEVO ESTADO DE LA PROBLEMÁTICA

La problemática planteada en el capítulo 1 de este trabajo no se resuelve con lo que trabajamos pero si aportamos con marco de referencia y en ese sentido podemos decir que la problemática está en un nuevo estado, es por ello que reflexionamos y manifestamos lo que expresamos en el párrafo siguiente

Como ya hemos reiterado nuestro diseño fue trabajado en una situación de modelación del movimiento, en que los estudiantes contaban con tecnología, además la predicción estuvo relacionada con la cinemática y allí se trabajó, es por ello que surge la siguiente interrogante ¿cuál sería el rol de la predicción en otro ambiente (no de cinemática) como por ejemplo, temperatura?.

El por qué hacemos este cuestionamiento está basado en la siguiente reflexión: en cinemática la persona está mas involucrada porque puede realizar los movimientos, tanto las personas como el hecho de que ellos mismos puedan mover objetos, por otro lado la cinemática se les hace mas familiar porque de alguna manera es tratada en su enseñanza previa a la universitaria y por ende sus ecuaciones son mas familiares pero si nos centramos en temperatura puede que no sea de manejo tan familiar como el de cinemática ya que no es tan conocido ni tratado previamente.

Referencias Bibliográficas

1. Alanís, J. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo*. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y estudios avanzados del IPN. México.
2. Alanís, J et al (2003). Elementos del Cálculo. Reconstrucción Conceptual para el aprendizaje y la enseñanza. Editorial Trillas.
3. Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada. CINVESTAV-IPN. México
4. Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 167-198). Netherlands: Kluwer Academic Publishers
5. Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica
6. Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in Mathematics. *Didactique des mathématiques*, 197-1990. Kluwer Academic Publishers
7. Buendía, G. (2004) *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. (Un estudio* s*ocioepistemológico)*. Tesis de Doctorado no publicada. CINVESTAV-IPN. México
8. Camacho, A. (2000). *Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite.* Tesis de Doctorado no publicada. CINVESTAV-IPN. México
9. Campos, (2003). *Argumentaciones en la transformación de las funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Área de Educación Superior. Cinvestav-IPN, México
10. Cantoral, R. (1991). Proyecto de Investigación: Formación de la función analítica. *Mathesis* 7, pp. 223-339.
11. Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: El caso de la Serie de Taylor. *Mathesis* 11(1), 55-101
12. Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Iberoamericano.
13. Cantoral, R.; Molina, J.G., Sánchez, M. (2005) Socioepistemología de la Predicción. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18 (1). J.

Lezama (Ed.). Universidad Autónoma de Chiapas: Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. 463-468

14. Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctico del punto de inflexión*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.
15. Cordero, F (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Numero1, 56-74.
16. Cordero, F. (2001). La incidencia de la socioepistemología en la red de investigadores en matemática educativa. Una experiencia. Serie Analogías. Programa Editorial Red Nacional de CIMATES, Núm.1, 99-124.
17. Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Distrito Federal, México pp. 103-128.
18. Cordero, F y Solís, M. (2001). Las gráficas de las Funciones como una Argumentación del Cálculo. Grupo Editorial iberoamericana.
19. Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, volumen 8, número 003. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Distrito Federal, México pp. 265-286.
20. Cordero, F. (2006a). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*. Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. 265-286.
21. Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matemática. *La Matemática e la sua Didattica*, 20, 1, 59-79.
22. Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.

23. Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. En P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-134). Cambridge: University Press
24. Granville, W. (1908).Calculo diferencial e Integral
25. Hernández, H (2006). *Una visión socioepistemológica de la matematización del movimiento: del binomio de Newton a la Serie de Taylor. Tesis de Maestría en Ciencias*. Universidad Autónoma de Chiapas.
26. Lang, S. (1968) A complete Course in Calculus
27. Marcolini, J. y Perales, F. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, volumen 8, 1, pp. 25-68
28. Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.
29. Montiel, G. (2005) *Estudio Socioepistemológico de la función Trigonométrica* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.
30. Muñoz, G. (2006). *Dialéctica entre lo Conceptual y lo Algorítmico relativa a un campo de prácticas sociales asociadas al Cálculo Integral: aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos*. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y estudios avanzados del IPN. México.
31. Rosado P. (2004). *Resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Área de Educación Superior. Cinvestav-IPN
32. Spivak, M (1922). *Calculo Infinitesimal, segunda edición*
33. Suárez, L. (2002). *Actividades de simulación y modelación en el salón de clases para la construcción de significados del Cálculo.* Proyecto de investigación doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.
34. Suárez, L. (2007). Modelación – Graficación, *Una categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*. México: Cinvestav-IPN.

35. Suárez. L y Cordero, F. (2005). Modelación en Matemática Educativa. En J. Lezama, Sánchez, M. y Molina, G (Eds.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. CLAME* Vol. 18, pp. 639-644.
36. Torres, A y Suárez, L (2004) *La Modelación y las Gráficas en Situaciones de Movimiento con Tecnología*
37. Wenzelburge (1994). *Cálculo Integral*, Grupo Editorial Iberoamérica. México
38. Lima, Elon Lages (1987). *Curso de Análisis*, Volúmen 1, Quinta Edición. Instituto de Matemática Pura eAplicada-CNPq

Anexos

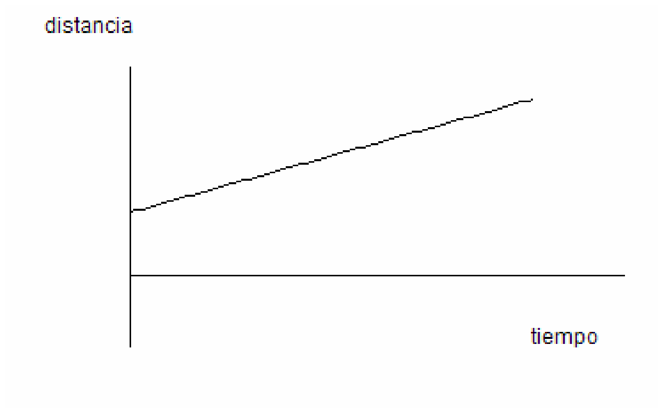
ANEXO 1: EL DISEÑO DE SITUACIÓN APLICADO

Momento 1

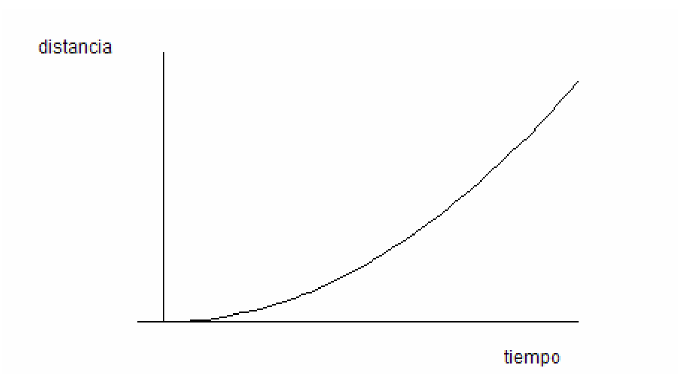
Actividad 1

Se muestran tres gráficas que representan distintos movimientos ya sea de persona o de una pelota. Utilizando calculadora gráfica y sensores realice los movimientos necesarios para reproducir cada una de esas gráficas. (indique la ubicación del sensor en cada gráfica)

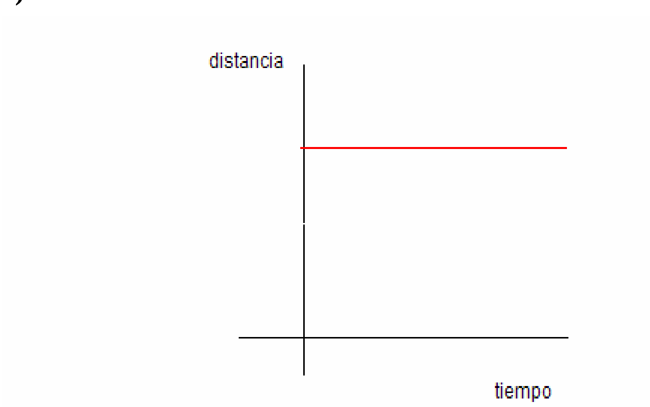
a)



b)



c)



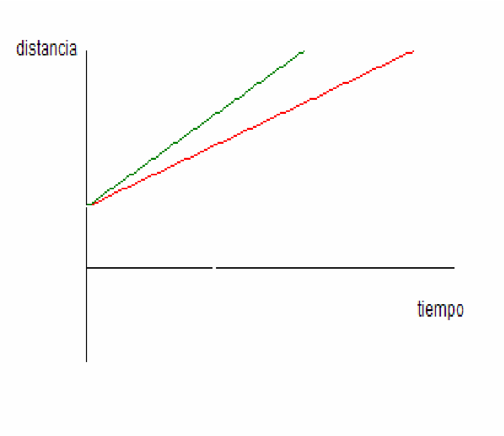
Actividad 2

A continuación encontrará cuatro gráficas cartesianas, en cada una de las cuales se ha dibujado un grupo de curvas.

i) Para cada grupo, describa los patrones de movimientos necesarios para obtener las curvas dibujadas.

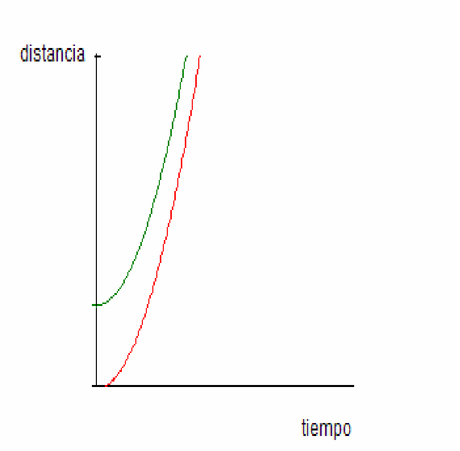
ii) ¿Qué tipo de funciones darían las mismas gráficas?

a)

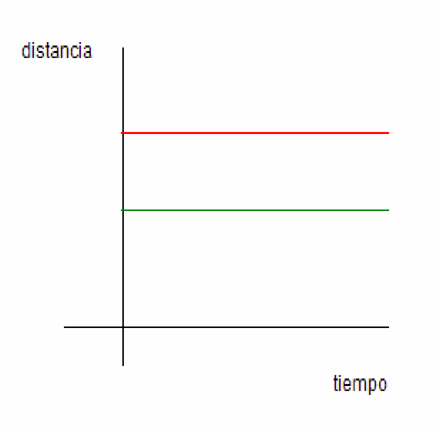


b)

c)



d)



Actividad 3

Suponga que usted toma datos con un sensor de los movimientos indicados. Una persona que está a su lado comienza a moverse con velocidad constante hasta un poste situado a 50 metros de distancia, y se detiene por cinco minutos; luego regresa al lugar de partida.

d) Construya una gráfica que describa el movimiento realizado por la persona, desde que parte hasta que regresa

e) Suponga ahora que la persona parte desde el poste se acerca a usted a una velocidad constante, se detiene cinco minutos y regresa al poste. ¿Cuál sería la gráfica del movimiento realizado?

f) Realice una comparación fundamentada de las gráficas obtenidas en los incisos a) y b).

Momento 2

Actividad 1

Un automóvil transita por una carretera recta. El automóvil viaja con una velocidad constante de 63 metros/segundo. Usted se encuentra al lado de la carretera y dispone de un sensor, suponga que en el momento que empieza a medir el tiempo, el automóvil se encuentra a 20 metros a la derecha y se aleja de usted.

c) ¿Cuál es la gráfica obtenida por el sensor para establecer la relación entre las variables t y d?
d) Prediga la posición del móvil en un tiempo $t = 17$ segundos

Actividad 2

Un observador lanza un objeto desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 49 \frac{mt}{seg}$.

a) ¿Cuál es la gráfica que el observador haría para establecer la relación entre las variables t y d?
b) Prediga la posición del objeto cuando han transcurrido $t = 56$ segundos

Actividad 3

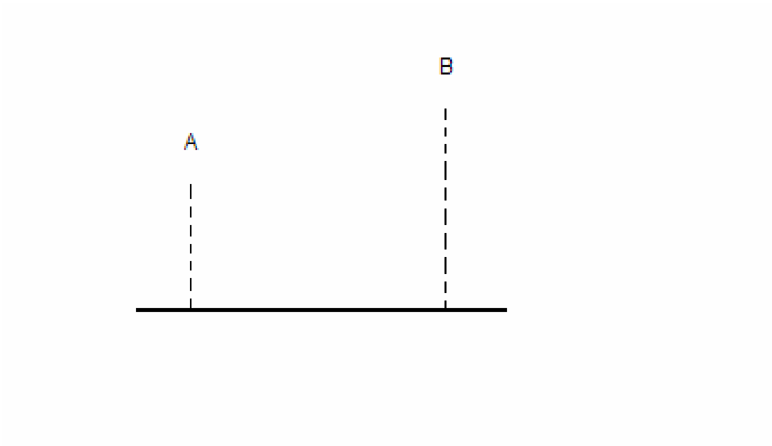
La función $f(t) = 49t + 4.9t^2$ representa el movimiento de un móvil respecto de un observador.

f) Indique si el móvil se acerca o se aleja del observador
g) Prediga cuál es la posición del móvil en el tiempo $t = 4$
h) Prediga la velocidad del móvil en el tiempo $t = 4$
i) Indique la aceleración del móvil en el tiempo $t = 4$ y en el tiempo $t = 8$
j) La función $f(t) = 25t + 8t^2$ representa el movimiento de otro móvil. ¿Qué puede decir de su velocidad y su aceleración en relación con las del primer móvil?

Momento 3

Actividad 1

a) En la siguiente figura, *A* y *B* representan la posición de un móvil en tiempos diferentes. Se supone que usted sólo conoce *A* y la variación de *A* a *B* (pero no *B*). Construya un modelo que le permita predecir *B* a partir de esos datos.



b) Suponiendo que se conoce *A*, la variación de *A* a *B* y la variación de *B* a *C* (pero no *B* ni *C*) construya un modelo que le permita predecir *B* y también *C* a partir de esos datos.

c) De acuerdo a la experiencia obtenida en los casos anteriores construya un modelo predictivo de la posición futura del móvil si usted conoce:

- Posición inicial del móvil *A*
- Variación entre los puntos *A* y *B*
- Variación de la variación, obtener el punto *C*

¿Puede con esto predecir *D*?

ANEXO 2: TRANSCRIPCIONES DE LAS RESPUESTAS DE LOS GRUPOS

Primer Grupo

Transcripción VIDEO 1

<u>Datos</u>:

Dos estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemáticas

Estudiante 1: E1G1

Estudiante 2: E2G2

<u>Transcripción</u>

E1G1 **:** ya, la actividad 1 dice: se muestran 3 graficas que representan distintos movimientos ya sea de persona o de una pelota usando una calculadora grafica y sensores, realice los movimientos necesarios para reproducir cada una de estas graficas, indique la ubicación del sensor en cada grafica. Entonces habría que empezar a reconocer, ya, aquí aparece con una distancia el sensor ¿verdad?

E2G1 **:** sipo, pongamos una velocidad más o menos constante

E1G1 **:** si, es como una recta, tú me dices cuando

E2G1 **:** dale… si

E1G1 **:** tomemos una distancia más grande, para ver si… para que se note esa diferencia, tú me dices cuando ¿listo?... si va por ahí…

E2G1 **:** tiene que ser más constante…

E1G1 **:** … ya, entonces seria así: que partiría de una distancia… ya, vamos a ver la “d”, ¿lo hacemos de nuevo?

E2G1 **:** si

E1G1 **:** ya tú me dices cuando ¿listo?... no, otra vez, la ultima, pero hazla más acá, eso, voy a verla de más lejos, tú me dices cuando

E2G1 **:** ya

E1G1 **:** … si, pero por lo menos intento seguir la recta, entonces tendríamos esa para la primera grafica, ya la segunda al parecer se va moviendo mas rápido

E2G1 **:** ya, tienes que ir como más rápido…

E1G1 **:** si, al parecer partiría junto a una distancia "0", ya… pero verdad que va mas rápido, ah excelente ¿cierto?, ya entonces…

E2G1 **:** hazlo de nuevo…

E1G1 **:** acuérdate de la inclinación… ahí si, ¿cierto?, ya… si ahí yo creo que por ahí estaríamos bien, ahí se parece mas o menos a la que tenemos acá, entonces partirían juntos y moviéndose un poco mas rápido y la ultima es una constante, quedarse quieta ¿o no? Dejémosla pegada… si, entonces tendríamos lista la actividad 1, que seria reconocer la grafica

E2G1 **:** ¿hay que escribirla o no?

E1G1 **:** escribamos al tiro la 1 para que no se nos vaya, ya entonces la primera ¿qué sacaríamos?, no parten junto al sensor, parte a una distancia *x* del sensor, le vamos a poner aquí un valor ahí, ¿ya?, le puse "*a*" tomando en cuenta siempre que el sensor esta en el punto de origen…

E2G1 **:** ya y tomate un punto "*b*", para llegar a ese punto, y explicar al final que la velocidad que está, por que tu tienes al final que esta es distancia y este es el tiempo, tienes que esta pendiente de esta recta va a ser la velocidad, la pendiente igual es una… igual es una constante

E1G1 **:** yo la veo como lo discutimos la otra vez en el mismo tema

E2G1 **:** lo que pasa es que la pendiente igual es una constante porque es una recta

E1G1 **:** lo que pasa es que el sensor es una distancia lo que va graficando

E2G1 **:** ya pero la distancia ¿respecto a que?, lo que pasa es que la velocidad va a ser la pendiente de esta recta, mira, suponte que la recta sea un "*m*", constante, entonces quiere decir que la velocidad la hiciste constante, pero ¿por qué graficó la distancia así?, porque se va separando la distancia y aquí va a transcurrir un tiempo ¿me entiendes o no?, porque aquí va aumentando la distancia, a medida que va aumentando la distancia va aumentando el tiempo y esto va a seguir siendo constante.

E1G1 **:** es que si fuera… mira piénsalo de esta manera: seria una constante como dices tú, si se mueve…

E2G1 **:** pero la velocidad va a ser una constante.

E1G1 **:** pero fíjate, pero si se va moviendo al mismo tiempo, se va moviendo a una velocidad constante, o sea, el promedio va a ser siempre el mismo, la división de las dos, entonces te va a quedar una recta, no una…

E2G1 **:** pero si ahí tienes una recta.

E1G1 **:** pero así, mira esto es una velocidad constante, respecto a la grafica de velocidad.

E2G1 **:** no, porque aquí la pendiente es cero, no quiere decir que es constante la velocidad, le velocidad te representa la variación de los "*y*" partido por "*x*", la pendiente de la recta, eso es claro ¿o no?, distancia partido por tiempo, ya la recta de esta pendiente va a ser la velocidad, o todavía no te convence eso

E1G1 **:** es que yo la veo de otra manera, el sensor me calcula solo la distancia que recorrió en el tiempo, no la veo como la velocidad ¿me entiendes?

E2G1 **:** es que la pendiente ¡tiene que ser la velocidad!... pero tu mismo lo estas diciendo, esto va graficando la distancia que va recorriendo en algún tiempo, va aumentando la distancia, va aumentando el tiempo, o sea… aquí por ejemplo te esta graficando una recta, nosotros si hacemos la división de esto, va a ser la pendiente de la recta y que eso va a ser la velocidad

E1G1 **:** es la misma discusión que tuve la otra vez… bueno, para salir de la duda consultémosle a la profesora, la duda es que yo no veo la grafica como velocidad

E2G1 **:** no, pero no la grafica, sino que la pendiente de la grafica, la pendiente de la recta, o sea eso es lo que yo veo

E1G1 **:** acá por ejemplo, no se mueve

Profesora **:** ¿no hay movimiento?

E2G1 **:** entonces no hay velocidad, es cero

Profesora **:** ¿entonces acá?

E2G1 **:** acá hay velocidad, es constante

Profesora **:** entonces hay una relación entre la velocidad, porque yo puedo relacionar esta grafica con el movimiento, pero hay una velocidad que hace el movimiento y que me tira la grafica, acá hay movimiento y una velocidad, acá no hay movimiento, como ustedes dicen, entonces mas adelante… la idea es que ustedes aquí lograran rehacer las graficas, al parecer salieron, pero la idea es que ubicaran el sensor y acá…

E2G1 **:** ubicáramos el sensor, entonces estábamos discutiendo…

Profesora **:** porque acá en la actividad 2, si se fijan son las mismas…

E2G1 **:** con una variación

Profesora **:** porque la idea es que aquí ustedes conversen y me digan ¿por qué esa y que pasa para que ocurra esta?, aunque la discusión original esta bien, por que en algún minuto, en el transcurso van a dilucidar esa discusión, porque hay otras preguntas que tienen relación con las anteriores, a lo mejor relacionar con una ecuación, no se, entonces ahí pueden…

00:11:37

E2G1 **:** por ejemplo relacionar esta curva, la pendiente aquí las derivadas en los puntos aquí va a dar, va a ir variando, porque la velocidad va variando, por algo esta grafica, cuando tu empiezas, empiezas a acelerar… entonces la velocidad va a ir variando, por que va a ser la derivada en cada punto aquí, entonces va a ir variando

Profesora **:** no se, si quieren avanzan…

E1G1 **:** … entonces en todas las ubicamos en el origen, que reconoce que va a estar a una distancia "*a*" del sensor, o sea no va a partir junto al sensor, va a partir a una distancia…

Profesora **:** pero por ejemplo, pudieron lograr la…

E1G1 **:** logramos la grafica… (todos hablan)… pusimos la pelota a una distancia…

Profesora **:** digan eso, que pudimos notar… digan lo que hicieron para reproducir la grafica… pero pusieron la discusión en… y creo que la van a ir dilucidando…

E1G1 **:** … frente al sensor y se aleja de esta a una velocidad constante… ya, en la 2 que hicimos, partimos con la pelota junto al sensor… y la fuimos alejando cada vez mas rápido, a una velocidad creciente… (murmuran todos)… generalizando seria como una distancia cuando se mueve, acá era una cosa de cómo graficaba la calculadora, pero podía ser cualquier punto… si, la pelota se deja quieta a una distancia "*a*" del sensor, no hay movimiento y el sensor dijimos que iba a estar ubicado siempre en el origen…

E2G1 **:** quien me daría las mismas graficas

Profesora **:** o sea aquí por ejemplo en la primera parte…

E2G1 : … describa el movimiento…

Profesora : que tipo de funciones, que función te daría mejor esta grafica

E2G1 : a pero esta función, no esta si… ah, y que cambio le hacemos, pensé que función me da esta grafica

Profesora : no, lo que pasa es que en la parte "i", tú analizas que es lo que esta pasando para que sea esa grafica y después sea esa, son dos estilos; y en la "ii", que función podría representar esto, no estamos pidiendo exactamente (todos hablan)

00:16:12

E1G1 : ya entonces podemos ver aquí, que la grafica se parece a la de la primera, se parece, una partiría junto al sensor y la otra partiría a una distancia del sensor, pero tomando en cuenta que ambas se van alejando del sensor a la misma velocidad, en ambos casos, ya entonces en esta seria el caso "b"… ya, como le podemos poner, en este caso…

E2G1 : rebautízala, ponle L1 y L2…

E1G1 : L1 representa el movimiento de un cuerpo que inicia su movimiento junto al sensor… al final decimos que ambas con la misma velocidad

E2G1 : ponle una velocidad "*a*" por ejemplo, con "*a*" constante, entonces la otra, que va a tener velocidad, por ejemplo en movimiento

E1G1 : le voy a poner alejarse, junto al sensor con una velocidad constante… junto al sensor con una velocidad constante

E2G1 : si, por que si se acercara…

E1G1 : si, seria otra grafica seria decreciente, y la L2 representa un cuerpo, el alejamiento de un cuerpo del sensor el cual parte a una cierta distancia del sensor, entre paréntesis, no esta junto al sensor y se mueve a la misma velocidad de L1

E2G1 : ya, aquí parten de una misma parte, pero una va más rápido que la otra

E1G1 : si y ambas con velocidad constante, ya entonces L1 y L2, ya y aquí L1 y L2 representan el alejamiento de dos cuerpos del sensor, donde, los cuales parten a una misma distancia del sensor, ambos cuerpos se alejan a una velocidad constante, pero la velocidad de L1 es menor que la de L2

E2G1 **:** no mayor

E1G1 **:** la de L1 es la de abajo

E2G1 **:** es menor que la de L2

E2G1 **:**lo que estaba viendo yo aquí que parte a una…

E1G1 **:** a una distancia distinta, uno junto y otro

E2G1 **:** a una distancia distinta, claro, que la aceleración aquí va variando, o sea la aceleración…

E1G1 **:** aaa si, no es una velocidad constante ambas crecientes

E2G1 **:** ambas crecientes pero fíjate que una va mas lenta que la otra, una va creciendo mas lenta que la otra, porque esta fíjate que aquí, eso es lo que estaba haciendo, estaba midiendo, están separados aquí y aquí se van juntado, entonces quiere decir que esta va a pasar para allá, y esta para allá, y esta que va a pasar para allá, esta que sigue así como derecho es mas rápido..

E1G1 **:** ah eso veamos bien el crecimiento, porque me salió una duda ……es que por eso, podrían ser iguales porque ¿que tal si esta la bajáramos?, podría quedar encima

E2G1 **:** por eso te digo es que como esta hasta ahí, no se puede saber que pasa mas allá, porque que pasa aquí por ejemplo como la velocidad va variando puede que se junten en algún momento y ser la misma

E1G1 **:** podríamos solo decir que ambos son movimientos eee de aceleración o sea de velocidad creciente y que parten de puntos distintos porque igual no podríamos dilucidar que podría pasar

E2G1 **:** vamos a decir, porque para acá para arriba no podríamos saber si se juntan

E1G1 **:** pero igual son parecidos los movimientos, podrían ser similares, pero lo vamos a dejar como…

E2G1 **:** podría ser como, no podría ser

E1G1 **:** asas 1 lo vamos a dejar ahí, dando vueltas para que no se desordene. Ya entonces aquí

E2G1 **:** estas 2 graficas son…..

E1G1 **:** L1….

E2G1 **:** velocidad creciente

E1G1 **:** L2. Ya entonces, velocidad creciente ¿verdad?. Ya L1 representa el movimiento de un cuerpo.. que parte junto al sensor ¿cierto?, el cual se aleja a una velocidad creciente, lo mismo ocurre con la curva L2 pero en este caso el cuerpo parte a una distancia A del sensor. Si ya? , y en el otro bueno ambos son constantes entonces son dos casos de dos cuerpos que no se mueven pero que están …

E2G1 **:** distinta distancia del sensor

E1G1 **:** y en ninguno de los dos casos están junto al sensor, uno A y otro a distancia B. ya entonces este es L1 y este L2. L1 y L2 representan a dos cuerpos que no presentan movimientos

E1G1 **:** o que no tienen movimiento donde el de L1 esta a una distancia B del sensor y del cuerpo de L2 esta a una distancia A del sensor ……

E1G1 **:**… suponga que usted toma datos con el sensor de los movimientos indicados una persona que esta a su lado comienza a moverse con velocidad constante hasta un poste situado a 50 metros de distancia, entonces esto es como la, es lo que esta haciendo esto parte a su lado como lo que hace aquí la L1 ¿si o no? porque mira dice, una persona que esta a su lado y se supone que tu estas con el sensor, comienza a moverse con velocidad constante hasta un poste situado a 50 metros de distancia y se detiene por 5 minutos, luego regresa al lugar de partida, ah ya, cachai que se detiene por 5 minutos entonces en ese momento hay un lapsus de constante y luego regresa al lugar de partida, se supone que con la misma velocidad, como que se aleja se queda quieto y baja. Si hace como un cerrito entonces dice: “construya una grafica que describa el movimiento de la persona desde que parte hasta que regresa”, entonces esa seria letra A. entonces para A tendríamos el eje de coordenadas 0 ¿cierto?, a una distancia de 50 metros de distancia entonces esto va a ser como el

E2G1 **:** a donde va a parar, y después se va a devolver… suponiendo que regresa a la misma velocidad deeel… si porque no lo dice acá

E1G1 **:** entonces le vamos a poner suponiendo que regresa a la misma velocidad entonces ¿como era que dijiste tú? se mueve así parte junto al sensor

E2G1 **:** por ejemplo este es A porque no dice cuanto se demora

E1G1 **:** pongámosle aquí un número…(hablan ambos) … A+5

E2G1 **:** la distancia en metros y el tiempo en segundos… minutos 5 minutos

E1G1 **:** entonces aquí vamos a hacer…. hasta ahí y después de aquí se devuelve….

E2G1 **:** mide cuanto hay …

E1G1 **:** para que no nos equivoquemos

E2G1 **:** que se vea que es la misma velocidad y suponiendo que…, entonces suponiendo que la velocidad con la que regresa es la misma que con la que salió……. Supongamos ahora que la persona parte desde el poste se acerca a usted a una velocidad constante se detiene 5 minutos y regresa al poste, ¿cual seria la grafica?

E1G1 **:** esta misma pero dada vuelta, porque va a partir lejos y se va a acercar….

E2G1 **:** mirada con un espejo, reflexión

E1G1 **:** entonces va a partir a 50 y se supone que va a regresar, se queda aquí quieta y vuelve a subir ¿también se queda aquí quieta cierto?

E2G1 **:** si

E1G1 **:** entonces aquí también puede ser A, A+5, sí decidido. Y la tercera realice una comparación fundamentada de las graficas obtenidas en los ejercicios A y B. entonces

E2G1 **:** entonces podríamos decir que, o sea que no se pero

E1G1 **:** o sea que más podríamos decir

E2G1 **:** o sea una comparación fundamentada, fundamento grafico, fundamento matemático

E1G1 **:** que nosotros podríamos decir lo mismo como son velocidad constante los intervalos son rectos por ejemplo

E2G1 **:** o por ejemplo si tomamos un intervalo de tiempo de 0 a A

E1G1 **:** …..el A+5, que representa que en el tiempo A va a haber llegado al poste y 5 minutos después

E2G1 **:** en cambio aquí no porque parte cerca del sensor

E1G1 **:** aquí no, porque parte lejos del sensor

Profesora **:** o sea cual es el motivo porque son distintas

E2G1 **:** fundamento grafico de la experiencia que estamos viviendo nosotros y no un fundamento matemático

E1G1 **:** si te das cuenta al fin y al cabo la grafica representan lo mismo, o sea estos son movimientos opuestos o sea las graficas son las mismas

00:35:50

Profesora **:** todo eso anoten, como dice….

E2G1 **:** como de la experiencia lo que hemos vivido ahora

E1G1 **:** ya entonces para la letra c) tenemos que las graficas son similares pero representan movimientos opuestos

E2G1 **:** por lo tanto si tomamos un intervalo de tiempo entre A y, como le pusimos las mismas variables podemos hablar de A y A`….

E1G1 **:** ya suponiendo que tarda A minutos en llegar al poste en el caso 1

E2G1 **:** no, digamos mejor que si tomamos el intervalo de 0 a A en el tiempo en el ejercicio a)….

E1G1 **:** no tan matemático podemos decir que tanto en el, suponiendo que en ambos casos el A y el B, se mueven a la misma velocidad tarda el mismo tiempo en hacer el mismo recorrido, en ambos casos tarda A en llegar a la meta entonces por ejemplo, el tiempo A se aleja hasta llegar al poste A minutos y en el caso se acerca …..cacha pero mira fijate en esto es el mismo movimiento es como que hicieron el movimiento, pero al revés no mas

E2G1 **:** pero significan lo mismo, porque aquí tu tienes que se va alejando y aquí también se va alejando, aquí esta cerca y aquí esta lejos y después esta cerca.

E1G1 **:** los movimientos están claros pero el decirlo

E2G1 **:** no pero se super conciso, di tomando los intervalos de tiempo en un tiempo determinado, intervalo de tiempo A en el inciso a) la persona se aleja del sensor por lo tanto …

E1G1 **:** pero es como estar reproduciendo lo que ya hicimos

E2G1 **:** pero si es como comparar eso es lo que dijo mas o menos la profe, que otro fundamento vas a dar?, mas allá seria como dar un fundamento mas matemático.

E1G1 **:** supuestamente esta grafica las pudimos lograr mediante el análisis que antes habíamos hecho que se alejan movimiento constante

E2G1 **:** eso es lo que te están preguntando, que des un fundamento basado en la experiencia de ahora que hemos hecho, que otro fundamento puedes dar

E1G1 **:** la persona se aleja a una velocidad constante

E2G1 **:** por lo tanto la pendiente es negativa

E1G1 **:** pero eso es lo que nos pidieron hacer, es como obvio

E2G1 **:** ah ya po, pero es que tu lo estas escribiendo mal, yo te dije si tu te tomas un intervalo la pendiente de la velocidad, o sea, la pendiente de la recta va a ser positiva y en la otra como tiene la misma velocidad

E1G1 **:** te das cuenta, esto es pendiente positiva o pendiente negativa

E2G1 **:** es pendiente positiva

E1G1 **:** y ésta?

E2G1 **:** es pendiente negativa

E1G1 **:** y se mueve con velocidad constante también

E2G1 **:** pero es que es valor absoluto, la velocidad es valor absoluto…..si po, si las velocidades son en valor absoluto

E1G1 **:** no se que …..tienes en la cabeza …., la comparación fundamentada de las graficas obtenidas son movimientos opuestos

E2G1 **:** esa es la comparación

E1G1 **:** eso es lo que vemos…(hablan ambos)… y cada recta que hicimos esta fundamentada en los análisis previos, si porque ya dijimos que representaba cada recta que es constante cierto, que no se mueve el cuerpo, que se va alejando a una velocidad constante….momento 2 hoja de trabajo actividad 1: un automóvil transita por una carretera recta, estamos bien en el monito, el automóvil viaja con velocidad constante a 63 metros por segundo ya dice usted se encuentra al lado de la carretera y dispone de un sensor, suponga que en el momento en que empieza a medir el tiempo, el automóvil se encuentra a 20 metros a la derecha y se aleja de usted….

00:45:17

E1G1 **:** …. entonces este loco partió de aquí en ese sentido hacia afuera ¿cuál es la grafica obtenida por el sensor para establecer la relación entre la variable tiempo y distancia?, es constante la velocidad

E2G1 **:** es 63 metros partido por 1 segundo

E1G1 **:** ya, en el 0 esta en el 20, en el 1 esta en 80, a no 83, en un segundo recorrió 83, en el 2 va a estar en el doble 126….146 si o no?, a 1 segundo recorrido va a recorrer 63 metros mas , o sea, 83 al anterior como es una velocidad constante se le va a sumar entonces va a ser super para la recta ya entonces vamos a poner acá como la velocidad es constante de 63 metros por segundo, vamos a hacer una mirada con lupa bien grande la grafica ….entonces distancia tiempo le voy a poner 20 aquí

E2G1 **:** no importa ponle 0 aquí, a pero ya partiste de aquí

E1G1 **:** no esta mal hecha la raya…. Entonces aquí va a ser 20 metros como la imagen del 1 vamos a hacer la segunda mas gordito y va a ser 83 acá vamos a poner el 2

E2G1 **:**tienes que poner el tiempo en minutos, o sea en segundos entre paréntesis

E1G1 **:** entonces cuanto era en el 2….146

E2G1 **:** indica la posición del móvil en el tiempo *t*, entonces va a ser una función ahí, entonces podemos decir que *f(x)* va a ser *63A+20*, eso no tiene nada de ….

E1G1 **:** va a ser la recta que representa el movimiento del móvil esta dada por *y=63*x+20*

E2G1 **:** y tomamos de 17, o sea *y=17*, porque después nos dicen ubica el móvil en *y=17*

E1G1 **:** el móvil en el tiempo *t=17* entonces aquí vamos aponerle *f(x)*…

E2G1 **:** pero ponle *f(t)*

E1G1 **:** entonces va a ser *f(17)=63*17+20* (cálculos) es 1091 entonces el móvil se encuentra en el tiempo igual a 17 segundos a una distancia de 1091 metros del sensor

E2G1 **:** un lanzador, lanza un objeto al aire con una velocidad inicial de 40 metros por segundo ….tengo una consulta la grafica en la actividad 2, por ejemplo, va a ser un lanzador que tira desde el suelo hasta arriba con una velocidad, va a ser solo de abajo para arriba o de arriba hacia abajo

Profesora **:** no, piénsenlo antes de caer

E1G1 **:** ya, pero tomando en cuenta los conocimientos físicos que nosotros tenemos, porque nosotros sabemos que en algún momento se va a detener

Profesora **:** …, porque ahí dice un lanzador lanza…

E2G1 **:** pero va a ser fácil ver la grafica porque esto va a ser como la exponencial como que se va deteniendo, como que…

Profesora **:** y si ven las graficas del principio las pueden volver a ver?

E2G1 **:** no, perdón, no va a ser como exponencial, si no que va a ser así como… que se va deteniendo

E1G1 **:** entonces tu sabes como parte con la velocidad de 49 metros por segundo, entonces en el segundo 0 el loco no la a tirado todavía, en el segundo 1 el ya la va a haber tirado un segundo después que la haya tirado entonces va a estar a 49 metros desde donde la lanzo porque ha pasado 1 segundo y el recién la soltó, entonces de el no había recorrido nada en el cero, pero en el segundo 1, ya había recorrido 49, dos el doble, tres… ya entonces va a ser la misma recta…

E2G1 **:** no, no va a ser una recta, porque la lanza hacia arriba y la velocidad va variando…

E1G1 **:** no yo tenía la idea de que iba a seguir constante, acuérdate de la gravedad

E2G1 **:** esta ejerciendo hacia abajo la gravedad…

E1G1 **:** ¿eso como lo miramos?, como en un vacío, como lo miramos, tomando en cuenta la gravedad que se le resta…

Profesora **:** no, la pregunta original del problema, hasta donde consideramos

E2G1 **:** multiplicarlo, hasta que va a llegar a una velocidad cero, va a quedar parada, y después se devuelve

Profesora **:** entonces consideren hasta ese momento

E2G1 **:** entonces hace esto, debería hacer esto la curva así, así, así, así… eso es lo que me imagino yo la curva, la pendiente, tomando cada punto porque es una curva, porque la velocidad va variando

Profesora **:** eso ¿responde tu pregunta original?

E2G1 **:** si, si, es que yo creía que… igual uno puede hacerlo como lo dices tu, como una grafica, hazlo así…

E1G1 **:** pero miremos el tema de que, por eso, la velocidad ya no va a ser constante porque se va a empezar a disminuir

E2G1 **:** de hecho no es constante porque es una curva

E1G1 **:** por eso te decía yo, porque si lo vemos por ejemplo en un lanzamiento en el vació nunca va a tener algo que la detenga

E2G1 **:** mira, es una curva donde vas a ir derivando, derivando… entonces en algún momento va a ser una… o sea cero

E1G1 **:** pero ¿va para arriba o para abajo?... a no, tienes razón tu, porque parte recorriendo 49 y tanto así…

E2G1 **:** pero parte en 49 metros, como tú dijiste, ya fijemos punto a punto

E1G1 **:** entonces que pasaría primero, tendríamos que para, el loco la lanza, pero tengo que hacer en distancia-tiempo, en metro partido por el tiempo, ya entonces en el tiempo 1, ah pero esto tengo que graficarla…

E2G1 **:** en segundo 49…

E1G1 **:** 49 metros partido por segundo, a los 49 metros…

E2G1 **:** la velocidad va a ser constante

E1G1 **:** de partida el loco la tiene en su poder, supuestamente esto tiene que hacer el movimiento, o sea al lanzarla, no me refiero a la grafica sino que al lanzarla, eso va a pasar por que al lanzarla… va a quedar, se aleja y va a caer, porque se supone que al caer cae con la misma velocidad que con la que salio, ya entonces hasta aquí es, hasta donde nosotros nos importa, entonces ¿cómo representaríamos esta función?

E2G1 **:** pero ¿hagamos una prueba con el sensor o no?

E1G1 **:** y como lo haríamos con el sensor

E2G1 **:** pescamos la pelota y la tiramos con el sensor para arriba… la tomamos así, y yo me pongo el sensor y tú tomas la pelota con las dos manos y la tiras para arriba

E1G1 **:** imaginémonos lo del sensor, parte súper rápido, eso, no necesitamos hacerlo hacia arriba… vamos con el sensor, podemos hacer con el sensor, partir rápido y la frenamos… viste que es una curva creciente, pero me salio una duda, el i que representa, el tiempo es el de abajo ¿verdad?, si entonces estaría bien

E2G1 **:** si pero seria hasta la mitad no mas

E1G1 **:** entonces tomando en cuenta que vamos a hacerla hasta donde se detiene no mas, hasta que llegue arriba, para la “*a*”, con ayuda del sensor le vamos a poner…

E2G1 **:** igual va estar complicada esta, dice: prediga la posición del objeto cuando han transcurrido 56 segundos, pero no sabes si va a estar cayendo o va a ir subiendo, porque tienes que saber el peso del objeto

E1G1 **:** si igual esta complicado el tema

E2G1 **:** yo igual tengo una consulta en la "b", porque dice: prediga la posición del objeto cuando han transcurrido 56 segundos, porque para eso uno tiene que saber el peso del objeto

E1G1 **:** porque no sabemos en que tiempo se detiene

Profesora **:** pero por ejemplo, ¿a donde esta la grafica?, esa es, ya por ejemplo, cual es la relación que ustedes habían obtenido, algebraica? o tendrían que sacar una formula

E1G1 **:** si, tendríamos que empezar para el tiempo cero, para el uno tienes 49

Profesora **:** claro en el fondo es… ¿entienden cuando se les dice prediga?

E1G1 **:** si es como encontrar una formula yo creo, es como encontrar, como evaluar

Profesora **:** porque aquí si esta en segundo, ¿ustedes tienen en segundo esto, cierto?, entonces ahí estamos dando el dato de la velocidad, solo ese dato, porque para poder predecir en ese tiempo, donde va a estar ese objeto, ¿que necesitan? Tienen que pensar ¿que deberían saber?

E2G1 **:** saber la función que modela ese movimiento

Profesora **:** ya, y mas o menos ¿cuál sería?

E1G1 **:** una parábola vuelta hacia abajo, o sea seria una parábola con pendiente, o sea con el "*a*" negativo

Profesora **:** ya y ya les dan un dato inicial…

E1G1 **:** ya y tendríamos que empezar ahí, cuando, si esto 49 metros por segundo, ¿cuándo esto podría ser cero?

E2G1 **:** esto tiene que ver con una ecuación diferencial

E1G1 **:** a ver, empecemos a lesear, pera ver que tenemos que sacar, a ver ¿qué sabemos nosotros? cuando y = 0, no cuando x = 0, y = 0 ¿cierto?... cuando el x = 1, y = 49…

E2G1 **:** no

E1G1 **:** no... ah, no necesariamente

E2G1 **:** es la velocidad partido por 49, es v_0 partido por 49

E1G1 **:** ¿por qué?

E2G1 **:** si, te queda… es 1 y quieres saber los metros, se pasa dividiendo

E1G1 **:** la curva *f(x)*, esta dada por v_0 o sea por la velocidad

E2G1 **:** no

E1G1 **:** ¿qué representa esta curva?... la velocidad

E2G1 **:** ah ¿la curva?, la curva pero no la grafica

E1G1 **:** esta es *f(x)* es la grafica de la curva

E2G1 **:** la velocidad… nosotros no sacamos la…

E1G1 **:** ¿qué representa el *f(x)*?... la curva ¿qué representa en este caso?, tu dijiste: la velocidad, la velocidad

E2G1 **:** esta representando la velocidad

E1G1 **:** ya, entonces ¿qué esta representando la curva?

E2G1 **:** ya, pero esta curva no, esta curva no esta representando la velocidad

E1G1 **:** ah, no, verdad

E2G1 **:** por ejemplo: este va a ser mi x, o sea este va a ser mi "y", y este va a ser mi x, entonces yo despejo mi "y" y me queda que v_0 segundos, partido por 49 va a ser igual a "y"

E1G1 **:** y ¿qué concluye eso?

E2G1 **:** es por eso que me faltan datos

E1G1 **:** no calmado, esto es la velocidad es igual a 49 y partido por x, ya entonces la velocidad por x partido por 49 va a ser igual a "y", ¿cierto?, ya entonces esta es la curva, entonces ahora podemos predecirlo cuando x es 56 ¿es la velocidad inicial o no?

E2G1 **:** te queda 56 e "y" va a ser una…

E1G1 **:** ah calmado, pero espérate…

E2G1 **:** "y" va a ser, o sea, x va a ser mayor que el 49 por lo tanto ¿cómo va ser esa curva?

E1G1 **:** a ver, calmado, pero que pasa con la velocidad de esto, v velocidad… eso ¿cuánto vale?

E2G1 **:** no se sabe, por eso te decía yo…

E1G1 **:** pero a ver ¿qué pasaría?... v_0, v en el tiempo cero… este movimiento que hace, recorre una cierta altura ¿cierto?, parte con v_0 ¿cierto, verdad? Es igual a 49 y el v final es cero

E2G1 **:** te acordai de las ecuaciones diferenciales, ¿qué representaba la velocidad? ¿cuál derivada?...

E1G1 **:** la primera

E2G1 : y después venia la…

E1G1 : la aceleración… entonces aquí hay algo que se está oponiendo ¿verdad?, esto que sería la fuerza de gravedad g, es igual a menos 10, menos 9,8 metros partido por segundos al cuadrado, esta es aceleración

E2G1 : dijimos que el tiempo era *x* ¿cierto?

E1G1 : estamos complicados aquí…

Profesora : pero por ejemplo ¿cuál es la ecuación que ustedes sacaron?

E1G1 : es que jugamos con esto, porque los metros es lo que representa "*y*", el segundo es *x* el que tenemos en el tiempo

Profesora : ustedes me dijeron que esta era como una parábola, ahora pregunto la… escríbeme ahí lo que tu reflejas como xxxxx funcionales

E1G1 : yo lo veo como $-ax^2 + bx + c$, algo así

Profesora : ya, ahora mi pregunta es ¿qué vendría siendo, a lo mejor que sería este dato inicial? ¿qué función cumple el *x*? ¿qué función cumple el *a*? y ¿qué función cumple el *b*? ¿qué sería el *b*?

E1G1 : cuando esto vale cero, ¿cierto?... estamos hablando de este punto

Profesora : ya, correcto

E1G1 : y aquí el *x* ya es cero, cero, entonces "*c*"…

Profesora : pero el *x* esta puesto aquí, ¿tiene que ver con el tiempo?

E1G1 : el *x*, este es el *x*…

Profesora : y, en las primeras ¿qué hicieron?, traten de relacionar con las primeras que hicieron, él dijo algo respecto al "*b*", ¿te acuerdas?

E2G1 : el "*b*" de que, ¿el de la parábola?

Profesora : lo relacionaste con uno de los primeros movimientos, si no me equivoco el constante, dijiste algo con este movimiento, bueno, no hay movimiento pero dijiste algo

E2G1 : ah, porque la pendiente de ahí es cero

Profesora : entonces mi pregunta es: ¿qué relación tiene… que ecuación es esa?

E2G1 : $y = a$

Profesora : ¿qué ecuación hay aquí? ¿qué podemos sacar?

E2G1 : $y = mx + a$

Profesora : ya, y esa *m* ¿qué es?

E2G1 : la pendiente

Profesora : pero…

E2G1 **:** la velocidad

Profesora **:** entonces aquí pregunto ¿qué relación tiene el dato que les dimos?

E2G1 **:** es que eso estaba pensando, pero sabes que es lo que pasa, que el… la pendiente de una curva… es la parte lineal, ¿cuál es la parte lineal de una curva? Esa es la parte lineal de una curva… *(...)x + b*

Profesora **:** y ustedes este dato ya lo tienen, entonces yo lo único que veo es que necesitan la conexión

E1G1 **:** el *c* representaría… ¿qué representaría aquí?

E2G1 **:** el "*c*"…

E1G1 **:** en esto

Profesora **:** ¿qué pasa si yo esta curva la parto aquí?

E2G1 **:** ah, es el corte con el eje Y, si, cuando el *x* vale cero el "*c*" vale cero, o sea que aquí el *c* es cero

Profesora **:** entonces tú me estás diciendo, si *x* vale cero, o sea, el tiempo cero

E1G1 **:** entonces *c* es cero, todo el rato

Profesora **:** entonces aquí preguntamos 56 segundos, bueno aquí, ¿dónde yo ubico esos 56 segundos?

E1G1 **:** en el *x* yo lo veo

E2G1 **:** xxxxx

Profesora **:** ahí… ya, y ¿quién es el "*a*"? y ¿quién es el *b*?

E1G1 **:** el "*a*" debería ser la fuerza de gravedad, porque es negativa

E2G1 **:** y el *b* la pendiente de la parte lineal

Profesora **:** entonces, ¿qué están relacionando?

E2G1 **:** y es positiva, así que xxxxx esa pendiente

E1G1 **:** la velocidad ¿o no?

Profesora **:** ya, entonces tú el b lo relacionas con la velocidad… acuérdate que tu lo dijiste aquí

E1G1 **:** la pendiente ¿qué era?

Profesora **:** tu dijiste que: pendiente cero y lo relacionaste pendiente con la velocidad, entonces si el *b* aquí lo relacionas con la velocidad, entonces ¿qué es lo único que me queda sin relacionar?, entonces, por eso les digo, si aquí ustedes lo reemplazan y me dicen ok, y me dicen el *x* corresponde al tiempo, que en este caso corresponden a 56 segundos, puede ser cualquier segundo y aquí me queda la pregunta, entonces ¿quién es *a*?

E1G1 **:** porque es la aceleración de gravedad yo creo, porque aquí nos va a quedar el "*a*" como segundo al cuadrado, porque se van a eliminar las unidades, yo lo veo así, porque por ejemplo la gravedad estaría como menos 9,8 segundos al cuadrado, porque es una aceleración no una velocidad y el *x* también quedaría como segundos al cuadrado entonces ahí se eliminarían los segundos, una cosa así

Profesora **:** y la pregunta entonces ¿podrían predecir?

E1G1 **:** sip, en ese caso podríamos sustituir con $c = 0$

Profesora **:** con $c = 0$ porque lo están haciendo partir desde acá

E2G1 **:** desde el punto de vista matemático si podríamos predecirlo pero desde el punto de vista…

Profesora **:** no sé, porque aquí la pregunta solamente es prediga la posición del objeto cuando han transcurrido 56 segundos…

E1G1 **:** ¿cuál es el que representa la distancia?, el *c* es el que representa la distancia en este caso, porque en este caso el *c* va a representar este

Profesora **:** ¿qué pasa si tú partes de aquí?

E1G1 **:** si, el *c* va a estar aquí, entonces va a ser el *c* el que me represente el corte en el eje Y, entonces el que hay que despejar aquí es el *c*

E2G1 **:** pero es que el *c* va a ser solamente la distancia, de donde parte

Profesora **:** y la predicción es respecto a donde estaría el objeto cuando transcurran 56 segundos, entonces creo que solamente tienen que reordenar o conectar algunas cosas que ya tienen mas o menos, para que puedan avanzar…

E1G1 **:** ¿cómo quedaría eso?... el *x* es el tiempo, pero eso nos da un resultado, y ese resultado que es, por ejemplo si el *x* nos da 1 y el *v* representa velocidad…

E1G1 **:** ¿cuánto vale ahí, la altura máxima?...

E2G1 **:** ¿qué pasa si derivo esto?... es que mirándolo desde ese punto, aquí hay un máximo

E1G1 **:** la tangente igual cero

E2G1 **:** entonces podríamos derivar esto igual a cero y te queda $-2ax + b$

E1G1 **:** eso igual cero

E2G1 **:** te queda *b* partido en *2a*…

E1G1 **:** ah pero nosotros necesitamos encontrar, no sé, la altura… porque si tenemos esa altura, vamos mas o menos a…

E2G1 **:** es que lo que no se yo es que si esto representa realmente la grafica de una parábola, una media parábola, si cumple con la definición de la parábola

E1G1 **:** se supone que esto hace esto, así, sube…

E2G1 **:** entonces como poder expresarlo como una parábola y poder sacar como una predicción a lo mejor si se podría

Profesora **:** pero trata de conectar con lo anterior, eso ¿ustedes ya están de acuerdo que es eso?

E2G1 **:** o sea, podríamos modelarlo de esa forma

Profesora **:** por qué, ¿dudan que el movimiento sea parabólico?

E2G1 **:** eso, que cumpla con las condiciones para parábola

Profesora **:** ya, pero si lanzan el objeto, ustedes sacaron que este era recorrido y después se supone que empieza a caer

E2G1 **:** es simétrico

Profesora **:** y están diciendo que esa es la relación funcional que le están dando a ese dibujo, entonces yo les preguntaba a que corresponde el x y ustedes dijeron que al tiempo y nosotros les preguntamos qué predigan en esa cantidad de tiempo, ya tendrían la variable por reemplazar, entonces les preguntaba y dijeron que 9,8 es la gravedad, entonces la relación que les está faltando es que si ésta es la expresión que tiene que ver eso y que tiene que ver eso en eso, esa es la conexión que falta, creo yo. Porque les pregunto ¿qué cómo yo predigo? ¿cómo yo sé, digamos la variable, la segunda coordenada? ¿qué necesito para saber?, entonces ustedes dijeron anotemos eso, pero ¿para que no sirve? porque si yo puedo reemplazar el valor del segundo me voy a quedar en función de a y de b, entonces ¿quién es a y b?, porque si ustedes supieran quien es a y b podrían decir entonces donde va a estar, ¿o no?, entonces qué función tiene a y b, con todo lo que tienen anotado, yo creo que eso es lo que tienen que pensar un poquito… y en el caso anterior ¿ya lo hicieron?

E1G1 **:** esta nos dio una recta

Profesora **:** y eso que reemplazaron

E2G1 **:** es que sabemos que la velocidad que nos dieron es la pendiente de la recta

Profesora **:** entonces ¿cuál es la complicación acá?

E2G1 **:** es que, eso es lo que estaba pensando acá, la velocidad me está dando que es 49, la velocidad acá me representaría la derivada en un punto

Profesora **:** acá dice: velocidad inicial, pregunto, después ¿esa velocidad se mantiene?

E2G1 **:** no, varia, por eso sacamos que era una curva…

Profesora **:** entonces al ser así ya, son más elementos que xxxxx, y en el caso anterior necesitan menos datos y aquí necesitan más, pero ustedes sacan un dato, ¿cómo relacionan ese dato?

E2G1 **:** la gravedad, ¿qué significa la gravedad?, ¿cómo relaciono ese dato?, metros partido por segundo ¿cierto?... por segundo al cuadrado… ahí como mas diferencial ¿como ecuación diferencial?

Profesora **:** pero por ejemplo, él, tu 9,8 ¿dónde lo relacionaste aquí?

E1G1 **:** yo lo asocie en el lado negativo

Profesora **:** y si es metros por segundo al cuadrado y si ustedes dicen: lo reemplazan por 56 aquí te quedaría segundo al cuadrado…

E2G1 **:** y se eliminarían los segundos y te quedarían metros

Profesora **:** y entonces, ¿quién es el *b*?

E1G1 **:** ya, si esto quedaría en metros, el *b* seria lo que estoy buscando mi y, porque este es tiempo, esto es la aceleración que es de gravedad y esto sería tiempo, entonces mi incógnita seria *b* y el *b* es el que me representa mi imagen, porque ese va a ser el punto que me va a dar de altura

Profesora **:** si pero, y el problema original, ese dato ¿dónde lo ubicas?

E1G1 **:** es que por eso *b* sería la única incógnita por reemplazar, porque el *c* dijimos que va a ser el corte en el eje, cuando el tiempo era cero, entonces sería el *b* la velocidad, pero me quedaría como 49… ah, y partido por *x*…

Profesora **:** no, porque aquí tú tienes metros partidos por segundos, y si yo reemplazo metros partidos por segundos y este *x* corresponde a segundos ¿qué me queda?

E1G1 **:** metros…

Profesora **:** y aquí ¿qué te había quedado? ¿y con esta incógnita?, porque aquí yo doy el tiempo y tu quieres saber… mira, supongamos que xxxxx 56 segundos y yo quiero saber en qué posición está

E1G1 **:** seria este él "*y*", entonces como que "*y*" es igual a todo esto, porque si te das cuenta, cuando esto es cero, en este corte es cero y ahí tu conocías el valor de "*y*", verdad

Profesora **:** tú tienes anotado: *f(x)* eso…

E1G1 **:** yo recién me di cuenta, me guie por el valor del *c*, así como que me dije: ya pero *c* es cero, pero donde es cero, donde "*y*" es cero, por lo tanto lo igualábamos a cero porque es la curva el "*y*"

E2G1 **:** pero ¿entendiste tú? ¿me puedes explicar?

E1G1 **:** ya para llegar a esto te diste cuenta, pero al fin y al cabo esto ¿qué representa?, así lo vi yo representa la curva y ¿qué curva me está representando?, esta curva, ya y esta curva es la "*y*", que me está dando todos los valores de aquí entonces esto es "*y*", yo así lo vi, entonces ahora como destinamos el "a" 9,8 y el *b* como la velocidad, fue por la eliminación de la unidades

E2G1 **:** o sea al final el *b* te dio la velocidad, pero eso es lo mismo que estaba diciendo, que el *b* representa la pendiente de la cuestión…

Profesora **:** entonces ahora yo hago otra pregunta, si ubicamos 65 segundos, 30 segundos, ¿pueden predecir?

E2G1 **:** si, puedes predecir cualquiera

Profesora **:** a mí me interesa que lo saquen…

E1G1 **:** ya entonces vamos a seguir la curva aquí…

E2G1 **:** voy a ver mientras esta aquí…

E1G1 **:** ¿cuya forma canónica?, representación canónica ¿cómo le podríamos poner a eso del ax^2+bx+c?

E2G1 **:** la forma general de la… porque la principal… ponle la forma no mas…

E1G1 **:** ya pero en este caso el *c* es cero ¿verdad? Entonces sería como ax^2+bx, como reconocimos que el *c* es cero entonces va a estar dado por $-ax^2+bx$

E2G1 **:** cuanto es la mitad de 245… 122,5… ya tengo la primera…

E1G1	**:** ya, hoja de trabajo actividad 3, la función *f(t)* = … te das cuenta que se parece a la que hicimos recién, es mucho más fácil, entonces indique si el móvil se acerca o se aleja del observador
E2G1	**:** se aleja
E1G1	**:** ¿la graficaste?
E2G1	**:** si, y ahí esta parte queda así, aquí suponiendo que aquí está el sensor, o sea tienes que tomar, tomando este lado no mas, esta grafica es así
E1G1	**:** prediga cual es la posición del móvil en el tiempo $t = 4$, lo reemplazas, cierto, después prediga la velocidad en el tiempo $t = 4$, la velocidad, entonces distancia partido por tiempo… ah, entonces
E2G1	**:** ahí está la velocidad, hay que derivar y ver *f* derivado de…
E1G1	**:** ¿esto representa distancia?
E2G1	**:** no, derivas *f*…
E1G1	**:** no, calmado, te quiero hacer una pregunta esto es distancia, esto es tiempo ¿esta grafica representa la velocidad?
E2G1	**:** ¿esta grafica?
E1G1	**:** es que te acuerdas la pregunta, lo que discutíamos al inicio
E2G1	**:** ya, pero que tiene que ver con eso, la velocidad no la representa
E1G1	**:** es que tu antes decías que esa grafica era de la velocidad
E2G1	**:** no, la pendiente, yo te estaba diciendo la pendiente
E1G1	**:** ya entonces ¿qué dibujo es la grafica?, donde corta aquí…
E2G1	**:** en -10
E1G1	**:** y abajo
E2G1	**:** en -245, 2 partido por 2 y en -5, o sea yo lo hice así no mas, pero es más abajo, no lo hice así no mas, lo factoricé, vi donde tenía su mínimo y donde tenía los cortes con el eje Y…
E1G1	**:** y aquí es -10… ya esta es la “*a*” ¿cierto?... se aleja del móvil, o sea, se aleja del observador… *f*(4) ¿cuánto te dio?
E2G1	**:** lo estoy haciendo aproximado, me dio eso 1372 partido por 5… ahí 274,4
E1G1	**:** prediga la velocidad del móvil en $t = 4$
E2G1	**:** ¿hay que derivar esto?
E1G1	**:** derivarlo y lo evaluamos
E2G1	**:** te queda que $f'(t) = 49$ partido por 10 por 2 dt + 49

E1G1 **:** ya, entonces para calcular la velocidad derivamos

E2G1 **:** te queda $f'(4)$…

E1G1 **:** espérate, es 2 por 49 por *t*, es $2 \cdot 49 \cdot 4$

E2G1 **:** partido por 10

E1G1 **:** ¿por qué partido por 10?

E2G1 **:** si, si es 4,9

E1G1 **:** seria 2*4.9*4, mas 49 ¿si o no? Ya y esto es igual a… pero dejémoslo así no mas…

E2G1 **:** ya eso seria, 441 partido por 5…

E1G1 **:** ya, d) indique la aceleración del móvil y en el tiempo $t = 8$, entonces hay que volver a derivar, esta misma que derivamos recién la volvemos a derivar, entonces se nos va el 49 ahora, y nos queda $4{,}9x$

E2G1 **:** ¿por qué *x*?, estas derivando dos veces

E1G1 **:** se baja una vez y queda constante, se baja otra vez 4,9, esa es la aceleración, en todo los tiempos

E2G1 **:** va a ser constante

E1G1 **:** $dt = 4.9$, para cualquier tiempo… y la e), la función representa el movimiento de otro móvil, ¿qué puede decir acerca de la velocidad y la aceleración?... también tiene aceleración constante ¿cierto?

E2G1 **:** la aceleración es constante, si eso puedes decir, y la velocidad ¿qué puedes decir de la velocidad?...

E1G1 **:** ¿es más rápida o es más lenta?

E2G1 **:** eso, eso escribe…

E1G1 **:** este va a ser… es más rápida, porque va a ser $16t$

E2G1 **:** $16t + 25$… si más rápida, en algún momento va a ser más rápida, en un momento corto

E1G1 **:** cuando el tiempo sea, después de harto tiempo

E2G1 **:** no después de harto tiempo, porque mira, en el tiempo 1, este va a ser mayor pero en 2 ya aquí lo pasa… o ponle que en cierto *t* chico…

E1G1 **:** en cierto *t* la velocidad del segundo móvil será mayor que la del primer móvil y… la aceleración también va a ser constante, la de este es 4.9 y también va a ser mayor… y la aceleración también será constante y mayor que la del primer móvil…

E1G1 **:** en la siguiente figura A y B representan la posición de un móvil en tiempos diferentes, se supone que usted solo conoce "A" y la variación de "A" a "B", pero no B, construya un modelo que le permita predecir B a partir de estos datos. Pitágoras, una cuestión así ¿verdad?

E2G1 **:** es que Pitágoras te aparece la cuestión de la pendiente… igual vas a tener que trabajar con variables, porque te dice que: en la siguiente figura a y b representan la posición de un móvil en tiempos diferentes, se supone que usted solo conoce "*a*"

E1G1 **:** y esta distancia

E2G1 **:** conoces esta distancia

Segundo Grupo
Transcripción del VIDEO 2

Datos:

Tres estudiantes de primer año de la carrera de Matemáticas

E1G2

E2G2

E3G2

Transcripción

E1G2 : lo voy corriendo

E2G2 : si, lo vas corriendo

E1G1 **:** entonces, ¿altiro no más?......tu me dices cuando

E2G2 **:** pero ve como es la grafica

E1G2 : sipo si la grafica empieza de ……

E2G2 **:** altiro

E1G2 **:** si

E3G2 **:** …y va creciendo constantemente

E1G2 **:** tú me dices cuando

E2G2 : no, espérate, no todavía no entiendo porque no, a ver espérate…

E1G2 **:** tú me dices cuando

E2G2 **:** ya

E1G2 **:** he! nos salió!!! , ya , la otra grafica, ¿cómo es la otra gráfica?

E1G2 **:** ya la otra…….¿como pudimos hacer esta?

E2G2 **:** espérate….

E3G2 **:** con la pelota yo creo que se puede hacer eso

E1G2 **:** supongamos si lo hacemos así

E2G2 **:** mira…con la pelota, tienes que moverlo y cada vez ir aumentando su velocidad

E3G2 **:** si

E1G2 **:** a ya

E2G2 :¿me cachai o no?

E1G2 : tú dices….

E2G2 : espérate……ya!

E1G2 : tenemos que hacerla

E2G2 : …mas lento. No un poco mas lento……hagámoslo de nuevo

E3G2 : si, un poquito mas lento

E1G2 : tú me dices cuando………tu me dices

E2G2 : listo!

E1G2 : ahí la puedes parar tu

E2G2 : es que igual está ahí rápido….

E1G2 :.un poquito mas lento, pero tu…..tu puedes pararla …cuando quieras

E2G2 : pero si son 4 segundos

E1G2 : ya tú me dices, a ver si salió……….digna

E3G2 : noooo

E2G2 : es que tampoco no empieza del principio

E3G2 : no, no empieza del principio, empieza como un poquito mas alejado del sensor

E2G2 : no, no es eso, es que tu tienes que quedarte parado un rato y después avanzar

E3G2 : así, como lo hacia el……

E1G2 : pero lo puedo hacer, es que a donde lo hago, a lo mejor si lo hago así

E1G2 : no si todavía no lo vamos a….

E2G2 : no es que todavía no nos ha resultado

E1G2 : ya haber….ya se como va a ser……….tu me dices cuando

E2G2 : ya!

E1G2 : ahí salió……ahí si ….ahí quedó …..

E1G2 : si…..ahora

E1G2 : se ve? ya!.........................ahora….esa es así no mas.

E1G2 : esa es!

E2G2 : esa era la más fácil. ahh

E1G2 : ya eso no mas, ya ahora vamos para allá………

E1G2 : que el se siente al medio

E1G2 : ya haber como….

E3G2 : ¿qué dice?

E1G2 : se muestran tres graficas……

E3G2 : realice los movimientos necesarios……

Profesora : ¿tienen duda de lo que hay que hacer aquí?

E1G2 : no, indique la ubicación de…..ya

E3G2 : es que de verdad…….

Profesora : esta es la guía para que sepan que…..ahí solamente describan, indican el sensor y escriben : aquí hicimos el movimiento de la pelota fue así.

E2G2 : ya

E1G2 : y el sensor….sip

Profesora : o lo escriben con palabras…….

E2G2 : …al alejarse del sensor

E3G2 : y yo ,,,ya.. partiendo….

E1G2 : sipo tenemos que colocar que……

E3G2 :…..alejándose con un movimiento constante

E1G2 : sipo pero primero coloquemos que, cual es el objeto que utilizamos aquí

E3G2 : sipo……el tren

E1G2 : si

E3G2 : movimiento realizado con el tren

E2G2 : el tren

E1G2 : donde este se colocó en el sector……cerca del sensor, y nos fuimos alejando a una velocidad constante, a una velocidad constante.

E2G2 : ¿cerca del sensor? o en el sensor

E1G2 : en el sensor

E1G2 : ese fue la pelota

E3G2 : ¿y que le hiciste a la pelota?

E1G2 : arrastrando….si po para que…….

E3G2 : pero era con un movimiento constante…

E2G2 : no era,….o sea iba aumentando……cada vez…iba aumentando

E1G2 : porque si hubiera sido…..hubiera salido de esa forma igual

E2G2 : si……es que esa es la idea……

E2G2 : y se va alejando de éste cada vez, a una velocidad mayor

E1G2 : si

E2G2 : y en el otro no realizó movimiento

E3G2 : no realizo ningún movimiento……tienes que poner el objeto igual

E2G2 : el objeto fue la pelota

E2G2 : separemos esas hojas, ya esa es, a continuación encontraras 4 gráficas cartesianas, en cada una de las cuales se ha dibujado un grupo de curvas, para cada grupo describa los patrones de movimiento necesarios para obtener las curvas dibujadas

E3G2 : ¿ como encuentro………a para obtener las dos …cómo lo mismo de xxxxx pero….

E2G2 : esta no es tan difícil porque esta…..supongamos…..

E1G2 : no, esta se mueve a una velocidad constante y la segunda es una velocidad constante pero mayor

E2G2 : si

E3G2 : pónele a1……

E1G2 : a ver en este caso….

E2G2 : la recta…..la L1, la recta entre paréntesis le coloca y L1

E1G2 : pero vamos a hablar del movimiento po

E3G2 : es que, a lo que voy yo en estas rectas, es porque realiza dos movimientos con objetos distintos?

E2G2 : yo digo que supongamos , el objeto lo ubico en el mismo punto, los dos, o sea, el movimiento desapareció en el mismo punto pero….el primero objeto se…..

E1G2 : uno se xxxxxxxx a mayor velocidad que la otra

E2G2 : eso! , cachai?

E2G2 : porque en este…..es parecido al del tren pero en este, hubiera sido el tren andando mas rápido

E3G2 : xxxxx en el mismo tiempo, con un objeto, eso?

E1G2 : si po tu partes, mira por ejemplo tines ya , la pelota la moviste xxxxxxx

E2G2 : y ahí lo marcas

E1G2 : por ejemplo, desde el mismo punto la moviste más rápido, por eso es más todavía

E3G2 : a ya

E1G2 : en este caso la recta?, la recta?

E2G2 : sipo

E3G2 : si….la recta

E1G2 : se obtuvo…….al realizar un movimiento ……

E2G2 : constante, a una velocidad determinándola…….

E2G2 : en cambio la otra realizó lo mismo, pero a una velocidad mayor

E2G2 : oye …… el valor de “*b*” indica supongamos si la gráfica va a estar corrida hacia arriba o hacia abajo cierto?

E3G2 : si

E2G2 : a ya entonces ahí estaba

E1G2 : a una velocidad mayor

E2G2 : en esa…….en la…….

E3G2 : ahí…parte del origen

E2G2 : sea , a través del sensor seria como….pongamos aquí está el sensor y aquí está el auto en la primera, el tren y en la segunda va a estar adelante, una cosa así

E3G2 : es que mira, te acuerdas cuando hicimos esta grafica?

E2G2 : si

E2G2 : tu, ¿de donde partiste el tren? ¿justo del sensor o un poquito mas adelante?

E2G2 : un poquito mas adelante, nunca tocando el sensor

E3G2 : entonces tiene, ésta va a estar tocando el sensor y en la otra va a estar un poquito mas acá, pero van a tener el mismo movimiento

E2G2 : si po el mismo…..

E2G2 : en ese las dos rectas van a tener la misma…..

E1G2 : “¿qué funciones darán las mismas gráficas?”

E1G2 : como las mismas graficas? Las misma recta

E3G2 : no po esta gráfica

E1G2 : las rectas?

E3G2 **:** las dos rectas yo creo

E2G2 **:**:xxxxxx función

E1G2 **:** la xxxx po

E2G2 **:**sipo

E1G2 **:** solamente que tenis dos rectas

E2G2 **:** una función….

E1G2 **:** en donde lo que varía aquí es la pendiente

E2G2 **:**si entonces deveriay colocar ahí que , cual es la ecuación que se utilizó

E1G2 **:**aca po en las misma 2, ….en donde la diferencia está en la pendiente

E2G2 **:**a si po

E3G2 **:** pero, es una función un f(x)=x

E2G2	**:** sipo, es la ecuación……..
E1G2	**:**un y=mx+b
E2G2	**:**sipo
E1G2	**:** pero……ahhhh, si le entendí lo que dijo, que si lo escribimos como un "y" es como xxxxxx o como una f(x)
E2G2	**:** f(x) yo creo, si porque…
E3G2	**:** sip, si es una función
E2G2	**:** f(x)=mx+b donde varía el valor de la pendiente
E2G2	**:**….varía el valor de la pendiente
E2G2	**:** aquí igual es una velocidad constante , en L1 y L2 la velocidad es la misma
E1G2	**:** velocidad?
E2G2	**:** si velocidad
E3G2	**:** velocidad
E1G2	**:**…y a demás por la propiedad…..distancia tiempo
E1G2	**:**en este caso….la velocidad de ambos objetos….
E3G2	**:** ….es la misma
E2G2	**:** lo único que cambia es la distancia que esta el objeto del sensor
E3G2	**:**¿?
E2G2	**:** esa,
E1G2	**:** a pero si esa ya sabíamos cómo era.
E2G2	**:** si yo la hice….leí rápido así ….y salía
E1G2	**:**….ahora la segunda……..
E2G2	**:** esa era así……
E3G2	**:** … la gráfica de la exponencial,….siempre me confundo
E2G2	**:** ……donde varía el valor de b.
E2G2	**:** este va a ser casi igual…..que ese…..solo que aquí va aumentando la velocidad
E3G2	**:** si
E1G2	**:** terminamos de escribir
E2G2	**:** déjalo aya abajo ese, a no, lo dejamos ahí,….ya ese era…..era ……es lo mismo , solo que aquí aumenta la velocidad del…….del objeto
E1G2	**:** no, no es lo mismo
E2G2	**:** si es lo mismo que el de la pelota

E1G2 **:**….porque parte desde una distancia distinta

E2G2 **:** o sea, …

E3G2 **:** parten de distancias distintas

E2G2 **:** es como este, pero aquí,…es que aquí tenis que colocarle que el movimiento , que acá no es constante el movimiento,….va aumentando, cada vez mm….a mayor distancia aumenta mas .., la velocidad

E3G2 **:** aumenta mas……..eso

E2G2 **:**….menor tiempo

E1G2 **:** en este caso…eeeee…….ambas curvas , se podría decir……………..

E2G2 **:** si

E2G2 **:** en un corto tiempo la velocidad es es cada vez mayor.

E1G2 **:**….se comporta

E2G2 **:** si

E1G2 **:** .se comporta, a ver como………en este caso…¿Cómo era lo que estaban diciendo?

E2G2 **:** que, a menor tiempo la velocidad……….no……

E1G2 **:** menor tiempo…………

E2G2 **:** si porque a menor tiempo aumenta, aumenta mas…….

E1G2 **:** es que a medida que pasa el tiempo , aumenta la velocidad.

E2G2 **:** pero es que, pero diciendo que a menor tiempo mayor distancia po, entonces la velocidad va a ser cada vez mayor , es lo mimo que la gráfica de la pelota, no veis que yo lo iba haciendo lento….y va aumentando después

E3G2 **:**sip, iba aumentando la velocidad

E1G2 **:** por eso pero el tiempo no lo aumentaba po, no lo dominas, si lo que…., tu, a medida que transcurre el tiempo, va aumentando la velocidad.

E2G2 **:** pero yo digo que…a través de ésta grafica tu estay viendo que a menor el tiempo, a ver, avanzó mas po cachai? Eso es lo que estay diciendo a través de esta grafica, porque mira compara……

E1G2 **:** no

E2G2 **:**…compara esta gráfica …….

E1G2 **:** yo digo que la diferencia es el punto….

E3G2 **:** es que xxxxx puntos distintos,………………de distintos puntos

E2G2 **:** sipo

E1G2 **:**….pero no es eso poh

E2G2 **:**¿Por qué no?

E1G2 **:**por que no porque si tu partes de mas arriba, obvio que vas a llegar antes , en mayor tiempo vas a llegar al mismo punto de acá…….

E3G2 **:** si po porque si…….

E1G2 **:**….porque tu partiste del origen y tu tienes una ventaja…..

E3G2 **:** sip,…porque eso es como que esperó un ratito así…..en el sensor….

E2G2 **:** no porque se ubicó lejos del sensor

E1G2 **:** si po,,, punto cachai? Y por eso es menos tiempo……..

E3G2 **:** pero esta, esa partió…….

E2G2 **:** o sea esa partió………………..

E3G2 **:** ……y la otra partió mas lejos, y aumento altiro la velocidad

E2G2 o sea ,….tuvieron la misma……sipo, con la tenían la misma velocidad los dos objetos, pero un objeto partió mas adelante, por eso era mas….

E3G2 **:** la diferencia entre los dos es la distancia que tienen

E2G2 **:** si

E1G2 **:** entonces en este caso ambos x se comportan de la misma forma…

E2G2 **:** si po, solo que un objeto partió…….

E1G2 **:** se comportan igual …….entre paréntesis …

E2G2 **:** avanzaron……..

E1G2 **:**…se mueve con una mayor velocidad

E2G2 **:** si

E1G2 **:**…. en donde varía el punto de partida

E2G2 **:** si yo en el sensor colocara, supongamos, los dos objetos pero uno apegado……y el otro mas adelante…….se graficaran de esa forma?

E3G2 **:** no creo

E2G2 **:** porque tendría que ser supongamos, la grafica encima de…supongamos graficar uno, y después encima de esa misma grafica, hacerlo con un objeto ahí si….seria como esa cuestión de la Voyage poh

E1G2 **:** si

E3G2 **:** si

E1G2 **:** ya, esto hay que hacerlo….que es lo venia? A…….ya

E2G2 **:** el valor de "*b*" poh, el valor de "*b*" es el que ……..es el .xxxxxxxxxx

E3G2 **:** nopo porque eso no es una recta

E2G2 **:** a no, este es el valor de…………

E1G2 **:** esto lo podríamos ver como una cuadrática igual

E2G2 **:** ….como una exponencial poh

E3G2 **:** eso es lo que estaba viendo,….la exponencial es así poh,….sip es así la exponencial….

E1G2 **:**ahhh?

E3G2 **:** ¿la exponencial no es así? O no?

E2G2 **:** no así, la exponencial es así

E2G2 **:** y la de la raíz es así

E3G2 **:** es que ese es logaritmo poh, …es logaritmo eso…….xxxxxxxx al revés

E2G2 **:** a ver, llamemos……

E1G2 **:** si poh, tenis que hacerle una simetría

E2G2 **:** sería así poh

E1G2 **:**…..una rotación y una simetría

E2G2 **:** seria ,supongamos, lo tenis así,…..tendría que ser así , no

E1G2 **:**…una rotación y una simetría

E1G2 **:**…no tampoco

E2G2 **:** no pero tiene que quedar….. tiene que quedar como se llama….

E1G2 **:** no

E3G2 **:** ya, tu dices que esa es la función exponencial

E1G2 **:** m

E2G2 **:** si

E3G2 **:** ya, y como se escribe la función exponencial?

E1G2 **:** x cuad…..a nopo….x elevado a…………

E3G2 **:** ¿en general?

E1G2 **:** *a* elevado a *x*

E2G2 **:** y también el….sipo porque también puede tener un valor de…….una constante afuera

E1G2 **:** si, parece que *a* elevado a *x*

E3G2 **:** mmm

E2G2 **:** preguntémosle a la profe

E3G2 **:** profe

E2G2 **:** tenemos una duda….

Profesora : ¿qué pasa?

E1G2 : que…….. por ejemplo el comportamiento de la gráfica nosotros decimos que es como de la forma, no es como, haber…….como para expresarlo en una ecuación…..de la forma exponencial

Profesora : ya……………..

E1G2 : si, y la ecuación general es por ejemplo, *a* elevado a *x*, es la forma general

Profesora : me estas preguntando por la forma de la….

E1G2 : si….como expresarlo

Profesora : pero haber, me gustaría que primero analicen si puede ser una exponencial, porque….¿ cual fue el movimiento que sacaron acá?

E2G2 : era que….iba aumentando cada vez la velocidad

E1G2 : a medida que pasaba el tiempo cada vez, se movía a una mayor velocidad…

Profesora : ya y esta tiene diferencia con esta?

E2G2 : es que esta,…la velocidad era como mas……..o sea , si hubiera sido en el sensor , hubiera sido así, pero es que en esa la hicimos lento, pero cada vez iba aumentando

E1G2 : pero en este caso no nos pide como expresar una ecuación por eso xxxx es como esta caca

Profesora : pero…..no si entiendo la duda, pero antes de responder, era si es efectivamente una exponencial, esa es la pregunta, porque ¿que diferencia esta entre este movimiento y ese? Porque tu dices: aquí lo hicimos un poco mas lento y al hacerlo un poco más rápido , o sea ustedes especulan que al hacerlo un poco mas rápido me esta dando eso

Todos : si!

Profesora : ok, esa es la diferencia entre esta y esa, ahora entre esas dos, cual es la diferencia..

E1G2 : el punto de partida

Profesora : el punto de partida, pero yo me atrevería a decir, el motivo a que reflexionen un poco mas si es que acaso es exponencial , porque si esta es la diferencia están hablando de con que rapidez yo estoy haciendo el movimiento, y esta, con cual la relacionan; ¿ que gráfica es esta?

E1G2 : como una parábola, la mitad

Profesora **:** a claro, es como si este segmento se ….. de la parábola

E2G2 **:** si, es como una parte de la parábola

Profesora **:** claro, porque si la hiciéramos así, estaríamos……,como estamos trabajando con el tiempo versus distancia……………………..claro no estaríamos trabajando con -3 segundos …n o se que….entonces si para ustedes esto es una representación de una parábola , la diferencia que están haciendo……

E1G2 **:** esa era la duda que teníamos……exponencial o parábola

Profesora **:** a ya , pero aquí…la identifican; éste es el mismo movimiento solo que hay unas variaciones ……

E1G2 **:** a ya….con respecto a la velocidad

Profesora **:** sip

E1G2 **:** gracias profe…..

E1G2 **:** esta gráfica es del tipo….parábola……¿cierto?

E3G2 **:** es de la forma f(x)=ax^2…….

E1G2 **:** …..+ *bx+c.*

E2G2 **:** es que igual hay varias formas de escribirla, como la vemos en la…..en……en algebra no vis que la escribíamos como…….. de otra forma

E1G2 **:**….en donde…..

E2G2 **:** varía el punto de corte en el eje……de la distancia

E1G2 **:** en donde la variable…..que varía …o no? Jajajaj

E1G2 **:** en donde la incógnita que sufre un cambio……

E2G2 **:** la variable que cambia porque como vas a colocar la variable que varía

E2G2 **:** vas a quedar en los grandes pensadores ahí

E1G2 **:** en donde el valor de b…….

E2G2 **:** y acá es…..se mantiene sin movimiento

E3G2 **:** pero porque la…..aquí también lo que va a variar va a ser la distancia….

E1G2 **:** sipo con…. A través del sensor

E2G2 **:** x cuadrado como……………..mas c

E3G2 **:** f(x) igual a cualquier constante

E2G2 **:** f(x) igual a…..f igual a……

E3G2 **:** c va a ser una…..

E2G2 **:** y cómo vamos a indicar esto?

E1G2 **:** ese es el valor de donde va a estar alejado po, si supongamos , si va a estar alejado del sensor va a se mas arriba pero si esta mas cerca…..

E2G2 **:** pero eso como lo podemos eeeeee, con la cuestión de la constante…..como vamos a poder hacer eso

E1G2 **:** eso po ¡ si…..

E2G2 **:** pero como te queda una parte acá y la otra acá ……que igual as nos tendría que variar?

E1G2 **:** el valor de b varia po

E2G2 **:** y que valor si dijiste que f(x) era igual a c? donde te varía

E3G2 **:** es que eso no va xxxxxxxxxxx

E2G2 **:** yo creo que es la misma ecuación de la recta porque es una recta

E1G2 **:** o sea va a ser…….

E3G2 **:** nopo, ahí estábamos haciendo la recta po….

E2G2 **:** por eso po

E3G2 **:**……..que da igual a una constante….

E1G2 **:** porque va a ser cero po entonces no te vaaa……..no te influye el valor de x poh

E2G2 **:** no influye el valor de b por que m de x es la pendiente

E1G2 **:** el valor de b es el que va….. el valor de b

E3G2 **:** el valor de b

E2G2 **:** el valor de b, el que c , le puso c por ponerle una letra

E3G2 **:** por ponerle una letra

E1G2 **:** ahhh ya, si era la recta, que te estoy diciendo? Es que a mi me gusta con b, jajajaja, acá no hubo movimiento……….en ambos dos…ya si le pongo 2…….en ambos objetos……en donde……….

E2G2 **:** tenis que colocarle que partió a una distancia …..

E3G2 **:** sipo,…..distinta

E2G2 **:** ….distinta del sensor

E1G2 **:** o puede ser c o f

E3G2 **:** pongámosle z

E1G2 **:** si po para que nadie alegue

E2G2 **:** ya déjalo ahí para que se vea con la cámara

E2G2 **:** ya, esto es vacan, ya lo voy a leer

E1G2 **:** ya

E2G2 **:** suponga que usted toma datos con un sensor, de los movimientos indicados, una persona que esta a su la do comienza a moverse a velocidad constante hasta un poste situado a 50 mts de distancia y se detiene por 5 min. Luego regresa al lugar de partida. Construya una gráfica que describa los movimientos realizados por la persona , desde que parte hasta que regresa. Suponga ahora que la persona parte desde el<poste y se acerca a usted a una velocidad constante, se detiene 5 min, y regresa al poste ¿Cuál será la gráfica del movimiento realizado?. Realice una comparación fundamentada de las gráficas obtenidas en los insisos a y b

E2G2 **:** no es tan complicado

E3G2 **:** no…

E1G2 **:** ya en esta es….. supongamos que …..

E3G2 **:** xx a velocidad constante….

E1G2 **:** pero tiene que partir de…supongamos que ahora parte desde el sensor

E3G2 **:** …….del sensor, o sea va a ir decreciendo la gráfica….va a ir asi

E1G2 **:** si. Y después se va a detener……

E3G2 **:** se va a detener y se va a ir así….

E2G2 **:** porque parte del sensor………

E1G2 **:**sipo dice que parte del sensor

E3G2 **:** parte del sensor…….

E1G2 **:** despues tenemos que hacerlo cuando se acerca, …… por que mira

E2G2 **:** aya po entonces nopo la gráfica es así po va creciendo

E1G2 **:**no po si cuando parte el sensor va

E3G2 **:** cuando parte del sensor va decrecienedo

E1G2 **:** pera….

E1G2 **:**no, cuando parte del sensor va creciendo…

E2G2 **:** porque xxxxx se acercaba al sensor…..

E1G2 **:**e iba decreciendo

E2G2 **:** y la grafica iba ahí……

E3G2 **:** a verdad que se acercaba al sensor….

E1G2 **:** es que es como raro……..

E3G2 **:** lo estaba viendo al revés……a entonces va a ir así

E1G2 **:** para llegar a 50…..va a pasar 5 min y se va…..

E2G2 **:** va a ser así ….y después se va a ir pa abajo

E1G2 **:** lo mismo que dijo la profe ayer, entonces así va a ser la gráfica

E3G2 **:** si….o sea tu distancia es xxxxxxxxxxx tenis que poner 5Alumna :

E2G2 **:**hacelo que parte del punto……… inicial.

E2G2 **:**si

E1G2 **:** parte a 50 mts……ta el poste a 50 mts de distancia

E2G2 **:**y la gráfica chanta esa….

E1G2 **:** coloca ahí lo que se mide po…..supongamos ahí si son 5 minutos, con que lo vay a medir….metros por segundo…

E2G2 **:**…. Se detiene 5 min ahora?

E1G2 **:**calmado……

E2G2 **:** art atack, jaja

E1G2 **:** que aja que aja,

E2G2 **:**eso es lo que no se vio jaja

E1G2 **:** ahora la de la………..

E2G2 **:** ni en mis cuadernos hago estas gráficas….

E3G2 **:** ese xxxx el lugar de partida….

E1G2 **:** entonces va a ser…….va a ser así , así así y así………va a ser sipo, `porque se acerca se empieza del poste po….al sensor, entonces va a ir así…..después se va a demorar 5 min y después va a llegar a…….

E3G2 **:** ….o sea al revés…..

E1G2 **:**sip

E2G2 **:** haber……

E1G2 **:** ya como se comporta…….?

E2G2 **:** ahora dice : suponga que ahora…..suponga ahora que la persona desde el poste se acerca a una velocidad constante,………….. se detiene 5 min y regresa al poste

E1G2 **:** pero como se acerca, de adonde po

E2G2 **:** desde el poste

E3G2 **:** desde el poste……………o sea parte des de los 50 mts

E1G2 **:** poe seo po, pero se acerca a……………al sensor

E2G2 **:** si. Así así y así. No ,….asi así y así

E2G2 **:**: …aquí tu tabai haciendo la otra gráfica….la de la “d” poh

E3G2 **:** tama mirando la d poh

E2G2 **:**jajajajaja

E2G2 **:**se podría decir que……..no se podría decir jajajajaj

E2G2 **:** realice una comparación fundamentada…….¿ que comparación podríamos hacer?

E3G2 **:** que las gráficas son inversamente proporcionales…ja

E1G2 **:** que son contrarias porque……

E2G2 **:** depende del punto de partida

E1G2 **:**…depende del punto de referencia……sip

E2G2 **:** andas en llamas Nelson, jajajaj

E1G2 **:** y ahora coloca comparación……………ee la comparaciónnnnnnnnnn

E3G2 **:** como lo decíamos ayer …que ……cuando tu partías desde el sensor………la grafica iba creciendo, en cambio………………una parte en el sensor y la otra parte alejado del sensor

E1G2 **:** depende de los puntos de referencia que se ubique el..objeto a mover

E2G2 **:** ….en este caso….el poste vendría siendo nuestro sensor, no

E1G2 **:** no porque si fuera el poste el sensor, sería aquí mismo

E3G2 **:** en tu punto de origen va a ser el sensor

E1G2 **:** sipo

E2G2 **:** si….toda la razón…………ya díctenme

E1G2 **:** no es que me voy a enredar jaja

E2G2 **:** díctenme una idea

E1G2 **:** eso po, que depende del punto de partida….

E2G2 **:** pero con el comienzo no se..me das siempre la mitad…

E1G2 **:** pero es que tu soy el que la lleva aquí el de la argumento…

E2G2 **:** pero no me hagan reír

E1G2 **:** yapo,….a medida que uno esta , a medida que……mmmmm

E2G2 **:** unas graficas podrían ser

E3G2 **:** como….cuando el punto de origen es el sensor…………….

E1G2 **:** si

E3G2 **:** la grafica…va .a…………

E1G2 **:**crecer…..en cambio cuando esta…..

E3G2 **:** cuando se ubica lejos del sensor……

E1G2 **:** en este caso el poste………

E2G2 **:** en cambio………cuando

E1G2 **:** espérate, cuando el punto de origen es el sensor….

E2G2 **:** la grafica va a crecer

E1G2 **:** en cambio….

E2G2 **:** esto es en a sipo….

E3G2 **:** no porque esto es una comparación

E3G2 **:** en cambio como la grafica b esta alejado del sensor, su gráfica decrece

E1G2 **:** sip

E2G2 **:** en cambio como xx el automóvil……

E3G2 **:** no! una persona….

E1G2 **:** jaja, los edificios…..jaja

E2G2 **:** cacha mira esta es la misma que…de la que hizo la profe en laboratorio,….parecido…..asi

E1G2 **:** se acerca el sensor………………………

E2G2 **:**…decrece………la grafica es decreciente……..

E1G2 **:** no, estos son mas técnicos….

E2G2 **:** mm?

E2G2 **: ….** al tiempo que se detuvo…..me indica una constante,…

E1G2 **:** no po no puede…………….

E2G2 **:** porque la velocidad es nula

E1G2 **:** si

E1G2 **:** y ahora, momento 2 actividad 1

E2G2 **:** soy ordenado

E1G2 **:** si, esta terrible ordenado cacha esto………ya…….un móvil transita por una carretera recta, el móvil viaja con una velocidad constante de 63 mts/seg , usted se encuentra al lado de la carretera y dispone de un sensor. Suponga que en el momento que empieza a medir el tiempo, el automóvil se encuentra a 20 mts a la derecha de y se aleja de usted ¿Cuál es la gráfica obtenida por el sensor para estableces una relación entre las variables tiempo y distancia? prediga la posición del móvil en………no entiendo, aaaaaaa es parecido

E2G2 **:** se pueden rayar estas ¿cierto?

E3G2 **:** no se

E1G2 **:** si

E2G2 **:** este es tu distancia cierto? ya supongamos , mídela de 5 en 5

E1G2 **:** ya haber

E2G2 **:** sipo entonces va a estar a 20 mts alejada del sensor po, obio, entonces va a estar 20 mts arriba

E3G2 **:** arriba

E1G2 **:** ya

E1G2 **:** es que a medida que pasa…………esto va a ir decreciendo po, así se comporta el sensor….a medida que tu te acerca y va a ir decreciendo

E2G2 **:** pero es que este se va alejando del sensor po

E1G2 **:** no porque va allegar u punto que se va a acercar al sensor

E2G2 **:** ¿por qué?

E1G2 **:** va a pasar al sensor……..y después se va a alejar

E2G2 **:** no po dice…..

E1G2 **:** porque se supone que esta a la derecha cachai? Por ejemplo el sensor tu lo tienes aquí, el auto viene acá, va a llegar un momento en que va a pasar por el sensor, y después se va a alejar y ahí va a crecer….

E2G2 **:** ya

E3G2 **:** si

E1G2 **:** sería al final como una parábola la gráfica

E2G2 **:** no

E3G2 **:** no po dice que esta a 20 mts y después se aleja

E2G2 **:** y se aleja de…….

E1G2 **:** se puede alejar tanto pa alla…..como….

E2G2 **:** no es que si tu estay acá y el auto viene de allá como se va a alejar para acá, se esta acercando a ti po

E3G2 **:** es que tu tenis el sensor aquí po

E2G2 **:** sipo

E3G2 **:** te dice 20 mts a la derecha, o sea, para acá

E2G2 **:**si po entonces va a estar allá, entonces de ahí va a partir el móvil y a seguir para allá

E3G2 **:** mira los metros, o sea va a estar aquí y de ahí se va a ir

E1G2 **:** a y si se aleja va a ser así…

E3G2 **:** va a ser así….

E1G2 **:** si, una recta porque la gráfica es ..

E1G2 **:** ya.

E2G2 **:** ya entonces la gráfica va a ser……….de esa forma y tenemos que predecir la posición del móvil en un tiempo de ……

E1G2 **:**17 segundos.

E2G2 **:**un dos tres…………..

E2G2 **:**en un segundo va a regresar, entonces en un segundo aquí..a 63 mts/seg ….en un segundo cuanto va a recorrer? 63

E3G2 **:** 3 metros

E2G2 **:** no po en un segundo va a recorrer 63 mts

E3G2 **:** sipo

E2G2 **:** entonces en

E1G2 :7 segundos tendríamos que

E1G2 **:** 63 por 7

E2G2 **:** sipo

E3G2 **:** pero arriba falta responder…a no esta bien.

E2G2 **:** mira, estos son mas cuaticos…

E1G2 **:** no po es que aquí, es que el valor de x va a ser como la variable tiempo y tu vas a tener la ecuación que va a ser f(x) va a ser igual a 63 por x $+b$, que b va a ser el valor de ….20,….entonces tu reemplaza y el valor de x , voy a multiplicar 63 por x …

E1G2 **:**7, le vas a sumar 20 y ese va a ser el valor de……………..

E2G2 **:** ….de la distancia

E1G2 **:** …de la distancia.

E2G2 **:** prediga una posición…..

E1G2 **:** quien anda con calculadora?

E3G2 **:** celular….

E1G2 **:** el celular…

E2G2 **:** lo podemos expresar con la recta

E3G2 **:**: sip , si es una recta.

E1G2 **:** eso…1091, si porque si hubiéramos sumado los 63 no mas hubiéramos empezado como del origen po, pero acá empieza de 20 , entonces tenemos que sumarle 20 mas…

E3G2 **:** si, toda la razón.

E1G2 **:** que es lo que tenemos ….que nuestro x va a ser 63 cierto?

E2G2 **:** no ese es el valor de la distancia, o sea x , va a ser el valor del tiempo

E3G2 **:** del tiempo

E2G2 **:** *m* va a ser 63 va ser como la pendiente

E3G2 **:** e *y* va a ser…..

E2G2 **:** no y va a ser la distancia

E1G2 **:** va a ser igual a los63 mts por segundo cierto?

E2G2 **:** entonces sipo

E1G2 **:** x va a ser el tiempo transcurrido, cierto?

E2G2 **:** si

E1G2 **:** b va a se los 20 mts, el valor de y va a ser la…, el valor de f(x) va a ser

E3G2 **:** va a ser tu incógnita……..

E1G2 **:** si

E2G2 **:** entonces ahí tendríamos que f…………………(escribiendo)

E1G2 **:** 63 por

E1G2 **:**7 mas 20 que es

E1G2 **:** por lo tanto el móvil se encuentra……..

E2G2 **:** el momento maldito…..

E1G2 **:** un observador lanza un objeto desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial, velocidad inicial es igual a 49 metros por segundo. ¿ cual es la gráfica que el observador haría para hacer la relación entre las variables tiempo y distancia ¿ Aplica la posición del objeto cuando han transcurrido 56 segundos.

E1G2 **:** entonces va a ser a si una……va a variar , no a la ser constante la velocidad

E2G2 **:** a ver . un observador lanza un objeto desde el suelo hacia arriba….

E1G2 **:** entonces tenemos que ver como la…

E2G2 **:** te lo lanza o no?

E1G2 **:** sipo, porque el suelo va a ser como el sensor

E3G2 **:** mm

E2G2 **:** entonces se va a ir alejando y después se va a devolver, porque todo lo que sube tiene que bajar po jajajaaja entonces va a subir a una determinada velocidad y va a empezar como a disminuir la velocidad arriba

E1G2 **:** no se pero…es que a lo mejor puede ser como……….tu tira y el objeto pero lo puedes tirar así po, va caer así

E3G2 **:** según la posición

E2G2 **:** aquí como tira el objeto lo tira así

E3G2 **:** de abajo hacia arriba

E2G2 **:** derecho….

E1G2 **:** pero de forma recta?

Profesora **:** no pero es que …….no dice eso, si quieren hagan la prueba con la calculadora….

E2G2 **:** o no influye eso

Profesora **:** tienen un …..

E2G2 **:** porque no se po , yo puedo tirar la pelota en forma parabólica

E1G2 **:** o la puede tirar así po, o ahí no mas

E2G2 **:** igual va asubir hasta cierto punto

Profesora **:** si, pero deben recordar que, pero acordémonos un poco de algo, que hace que si sube después baja…….que está influyendo ahí

E2G2 **:** la gravedad…..

Profesora **:** pero no esta diciendo como la tiran, sólo habla de la velocidad inicial

E1G2 **:** a ya…

Profesora **:** ….y no dice que en forma recta o no recta

E2G2 **:** acá lo que nos interesa es que por ejemplo yo al lanzar , independiente como lance la …el objeto, va a llegar a un cierto punto de tope , y después desde ese punto va a empezar a bajar….

Profesora **:** claro entonces la pregunta que puede surgir es hasta donde considero la gráfica, entonces…….pueden pensarla en una cosa asi……

E2G2 **:** decíamos como que el sensor fuera el suelo…..

Profesora **:** claro pueden pensarla en que…..asi y después en algún minuto irá a bajar pero pueden pensar pero pueden pensar un sector de la gráfica, aa esto es de ustedes?

E2G2 **:** no

E1G2 **:** a sipo , si ubicamos el sensor como en el punto de lanzamiento…

E2G2 **:** no …es que yo lo estaba leyendo eeso……

E1G2 **:** eee al momento de lanzar ,eee se supone que la lógica a a ser de forma creciente

E2G2 **:** ese es el………

E1G2 **:** se supone que va a ser de forma creciente

E2G2 **:** entonces tu vas a tirar

Profesora **:** ese es cierto ¿

E1G2 **:** si

Profesora **:** chiquillos hagan la prueba po si…………..

E2G2 **:** no ,si

Profesora **:** ¿ya lo sacaron?

E2G2 **:** si

E2G2 **:** Entonces va a ser …eee.

E3G2 **:** ….es como raro

E1G2 **:** ya po entonces……el comportamiento

E2G2 **:**pásame una hoja para tratar de…. Todos con hojita

E1G2 **:** el comportamiento xxxxxxxx sería de forma creciente

E2G2 **:** sipo entonces va a ir……

E1G2 **:** va a ser así po

E2G2 **:** no es que no puede ser así porque…..si vas a tirar la pelota, la pelota no va a ir siempre a la misma velocidad, siempre va a ir disminuyendo hasta un cierto punto, punto límite , y después va a bajar , y va a aumentar ,…va a ir de lento a mas , supongamos va a ir de mas a lento , y después lento a mas

E3G2 **:** si, toda la razón

E2G2 **:** si va a ser como la….va a ser como la ecuación de la forma de la raíz…

E1G2 **:** ….de la raíz cuadrada

E2G2 **:** si va a ser así……..y va a llegar hasta un punto…………..

E3G2 **:** hasta un punto

E2G2 **:** y después va a bajar…………..va a ser como una parábola ……..asi de forma….con concavidad hacia abajo…………entonces va a ser una parábola

E1G2 **:** si

E3G2 **:** sipo

E1G2 **:** una parábola, ese es el gráfico…independiente de cómo la tires

E2G2 **:** si porque…….por eso que parte a 49 mts por segundo….la vas a tirar así po entonces va a partir rápido

E1G2 **:** ya

E3G2 **:** y después…. Si po y después, disminuye la velocidad

E2G2 **:** entonces va a ser así

E1G2 **:** ya, que es lo primero? , hay que graficar o no ¿

E3G2 **:**: graficar

E2G2 **:** eligieron a la persona equivocada a dibujar

E3G2 **:** voy a dibujar yo jajajaja

E2G2 **:** supongamos …………el límite ,jejejeje. Locos rayaos

E1G2 **:** algo así? Para que la vamos a hacerla completa

E2G2 **:** no, es que tenis que hacerla completa, porque después va a ir disminuyendo………va a ir bajando

E3G2 **:** pero te dice un observador lanza un objeto al suelo…..

E2G2 **:** sipo , entonces va a ir así porque

E3G2 **:** pero eeeeeee márcalo así po

E1G2 **:** ese es el punto de……máximo

E1G2 **:** ya entonces….. prediga la posición del objeto cuando has trasncurrido 56 segundos, entonces aquí no va a tener , va aser una ecuación de segundo grado po cierto? Entonces va a ser ax+bx +c

E1G2 **:** ya , y yo ya se mi f……….no, yo se…..

E2G2 **:** que lo que indica el valor de a

E1G2 **:** los cortes, ………..no po x cuad……¿ x me indica los cortes cierto?

E2G2 **:** si nosotros tenemos que……

E1G2 **:** el a lo único que me indica es la conc, ….como va aser la forma de la parábola nomas….

E3G2 **:** la forma de la parábola, si va a estar hacia arriba o hacia abajo

E1G2 **:** sipo,….en este caso va a ser negativo

E3G2 **:** tu a va a ser negativo.

E1G2 **:** tu a va a ser menor que cero

E2G2 **:** ya, el valor de b?..... o sea tenemos que reemplazar aquí los 56……….¿ como es la gráfica cuando……? ….mira paola, cuando el valor de b es cero? ,…..cuando es eso? Como va a ser la gráfica ahí

E3G2 **:** ….x cuadrado mas una constante….

E2G2 **:** como va a ser la gráfica ahí.

E1G2 **:** vay a tener 2 soluciones….

E2G2 **:** porque el valor de c , el valor de c me va a indicar de adonde va a empezar la parábola o no?

E3G2 **:** mm?

E2G2 **:** el valor de……..cuales son los que me indican los cortes de la parábola en el eje….?

E3G2 **:** aquí tu valor de a…..vay a saber que es

E1G2 **:** y va a ser positivo, o sea en ese caso

E1G2 **:**y tu lo puedes hacer porque es negativo ese, si es positivo, ahí quedaste

E3G2 **:** nopo, si pero es un ejemplo que estoy haciendo no mas….

E1G2 **:** por eso

E3G2 **:** ese va a cortar en uno al x…

E1G2 **:**….y en -1

E3G2 **:** …….y en -1, ……..y como a es positivo va a ser así ? o no?

E2G2 **:** si po ahí….es positivo cuando es así

E3G2 **:** sipo…..el valor de b entonces no te indica…..

E2G2 **:**….los cortes

E3G2 **:** mmmmm

E1G2 **:** si no hay b entonces supongamos la gráfica quedaría ahí po o ahí….quedaría el vértice en el ejeeee ypo

E3G2 **:** en el jeje Y

E1G2 **:**….si no hay b

E3G2 **:** si!

E1G2 **:** entonces tiene que estar el valor de b, porque tenemos que trabajar con 1, tenemos que trabajar con la parte positiva…

E2G2 **:** haber….es que tenemos que despejar este poh….49 mts por segundo, en la velocidad inicial

E1G2 **:** y que xxx c? cual es el aporte de c?

E2G2 **:** llamemos a la profe pa preguntarle como podemos reemplazar esos valores aquí?

E3G2 **:** ya.

E1G2 **:** profe!!!!! ………..tenemos una duda…..¿como podemos reemplazar lo valores que nos dan en la ecuación de segundo grado

Profesora **:** yaaaaaaaaaaa ,…esa es la grafica?

E1G2 **:** y 2 si

Profesora **:** ya eeeeee pregunto….pero cuando era así….entienden la pregunta cierto, tan en laaaaaa, en la b?

E2G2 **:** si, es que no hayamos donde ubicar….

Profesora **:** pe ro vamos analizar….¿ entienden cuando se les pregunta, prediga la posición del objeto cuando han transcurrido 56 segundos?

E2G2 **:** supongamos puede ir aquí,…a donde v…..en que parte vaaa

Profesora **:** ¿donde visualizas los 56 segundos? Mas o menos aquí, donde los visualizas? este es el segundo……

E2G2 **:** el segundo

Profesora **:** aquí el segundo cero cierto?

E2G2 **:** si

Profesora **:** ya, a donde estarían tus 56 segundos

E2G2 **:** es que yo podría supongamos…ubicarlos en cualquier parte de aquí

Profesora **:** ya pero dale….. ponle un……….ya

E2G2 **:** ya supongamos aquí

Profesora **:** ya, que estamos preguntando ¿tu tienes que predecir la posición del objeto

E2G2 **:** entonces va a estar supongamos ….estaría….

Profesora **:** ¿eso estas buscando cierto?

E2G2 : si estaría….deberíamos decir que esta ahí

Profesora **:** perfecto, entonces lo que estamos buscando está en segundos o esta en metros, esto es metros oo……..

E2G2 **:** es metros

Profesora **:** están buscando una……..

E3G2 **:** ….la distancia

Profesora **:** exacto, ………entonces ustedes dicen que esta es la ecuación

E2G2 **:** si

Profesora **:** ya, si es algo eeeedigamos una figura parabólica y es así

E2G2 **:** es negativo el valor de a po

Profesora **:** ya , entonces tu,…anota por ahí que el a es negativo…..ya……¿Qué vendría siendo x en esteeeeeeeee……?

E2G2 **:** los 56

Profesora **:** ya, y que vendría siendo a y que vendría siendo b

E2G2 **:** es que ahí……

Profesora **:**¿c que es?

E2G2 **:** es una constante

Profesora **:**….pero , digamos ….¿aquí? aquí que es c? o sea ,por ejemplo si yo parto e acá, si yo parto acá,,,,,,,en que me modifica esta ecuación, porque si estas partiendo aquí

E2G2 **:** sipo, entonces c sería como…….

Profesora **:** porque si `parto aquí esto……..en que tiempo sería

E1G2 **:** este es el punto inicial , o sea…..

Profesora **:** ya, o sea el tiempo sería cero cierto?

E2G2 **:** si!

Tercer Grupo

Transcripción del VIDEO 3

Datos

Tres estudiantes de primer año de Bachillerato en Ciencias de la PUCV

E1G3

E2G3

E3G3

Transcripción

E1G3 **:** ¿partimos no más?

Profesora **:** esa parte si quieren la colocan allá como quieran

E2G3 **:** hagamos la más sencilla, esa hagámosla con el tren.

E3G3 **:** y partimos…no más del principio

E2G3 **:** y la partimos de principio

E1G3 **:** no claro partimos

E2G3 **:** o sea alguien caminando, caminando más rápido

E1G3 **:** pero ¿ésta no sería, no seria con…? a no esta no es acelerada.

E2G3 **:** ¿con que con la mano?

E3G3 **:** con la pelota

E1G3 **:** yo creo que esta es con la mano, pero partir, partir claro pero un poquito más adelante del origen

E3G3 **:** ¿eso?

E2G3 **:** es que esa parte es el origen

E1G3 **:** ¿y así? demasiado rápido

E2G3 **:** si

E3G3 **:** y…

E2G3 **:** dejamos ver la parada o dejamos…

E3G3 **:** dejamos al chalo

E1G3 **:** ya, ok

E2G3 **:** ¿y las hojitas?

E3G3 **:** ¿quieres ésta?

E1G3 **:** muchas

E2G3 **:** es que estas se usan, vamos hacer la primera toda al tiro

E1G3 **:** no, pero hagamos mejor la primera que sale ahí o no, a ya la de tren

E2G3 **:** tienes que darle, espera yo te digo

E1G3 **:** ya, déjame ver como, deja cachar un ejemplo…bueno sabes hagamos algo, hagámoslo partir de acá y aprietas el botón justo cuando…

E2G3 **:** cuando valla más adelante, ya dale, hazlo partir

E1G3 **:** ya se fue, ya dale, hay que a ver yo creo que

E2G3 **:** no pero partió de más

E1G3 **:** si, ¿lo hago partir de? o apriétalo

E2G3 **:** ¿qué?... que la velocidad de un vehiculo…es porque esta trasladada

E1G3 **:** ¿si?

E2G3 **:** creo yo

E1G3 **:** ¿está trasladada crees tú?

E2G3 **:** es que me dice que $y = 2{,}03$

E3G3 **:** pero como el nos diga

E2G3 **:** en ese punto $y = 2{,}43$

E1G3 **:** ah, igual está trasladada, mientras tratemos otra vez, tómala la puse cuando este un poco más lejos

E2G3 **:** espera todavía no

E1G3 **:** ya pero ahora va a salir bien

E2G3 **:** dale, ya

E1G3 **:** esa, ¿no? ahí está bien, ahí está bien

E2G3 **:** pero ahí está en 4

E3G3 **:** ¿en 4?

E2G3 **:** $y = 4{,}33$ y si lo voy trasladando…

E3G3 **:** ya, entonces ¿qué hicimos?, espérate hay que poner que distancias son, ¿cómo es eso? ¿ahora que hicimos? ¿cómo le pongo? ¿qué pongo que empezamos así como a contar…?

E1G3 **:** y hay que poner que se pidió, que se partió desde el origen y se activo el sensor cuando ya tenia una cierta distancia del tren con respecto a…. La otra ¿cómo sería?

E2G3 **:** con la pelota

E1G3 **:** ¿dónde esta la pelota?

E2G3 **:** ahora, si, no

E1G3 **:** no midió

E2G3 **:** ya dale, yo te digo cuando, de ahora, ya, es que ahí la cuestión esta constante, cuando lo sacaste aunque estuvieran midiendo lo sacaste

E1G3 **:** ok, ok

E2G3 **:** hagamos que consideremos esa pura parte

E1G3 **:** vamos a partir de acá…

E2G3 **:** espera, ahora, ya, igual

E1G3 **:** ¿igual lo mismo?

E2G3 **:** si

E1G3 **:** ¿Cómo lo hacia? A ver

E3G3 **:** ¿puedo?

E2G3 **:** ¿atravesarla caminando?

E1G3 **:** si

E3G3 **:** ¿Cómo así?

E2G3 **:** es que va a salir así

E3G3 **:** es que tiene que ser como acelerado no más po`

E2G3 **:** lo otro es considerar esa pura parte

E1G3 **:** no, es que igual está como muy lejos de la, hace como ta! Así como casi recto

E2G3 **:** lo otro es considerar esa parte no más y de ahí hasta ahí

E1G3 **:** tratemos hacerlo caminando

E2G3 **:** ¿si, caminando?

E1G3 **:** tratemos de hacerlo caminando

E2G3 **:** si, espérate

E1G3 **:** pero tiene que ser caminando más rápido

E3G3 **:** no, tiene que ser acelerado partes más lento pero…

E2G3 **:** ya desde ahora ya, espera que corra la silla, desde ahora ya

E1G3 **:** ¿da algo parecido?

E2G3 **:** no, dio peor ¿nos tomamos con la pelota?

E1G3 **:** no haber tiene que haber otra cuestión

E3G3 **:** si queremos que…

E1G3 **:** ya no te metas, pero sabes que la profe haber ¿Cómo lo hacia?

E3G3 **:** no, era acelerado más

E1G3 : si

E2G3 : ya

E3G3 : parte del…

E1G3 : del origen, lo otro es que manipulemos el tren y lo hagamos

E2G3 : desde ahora ya

E3G3 : paso muy rápido

E2G3 : pucha no ¿puedes hacerlo más rápido?

E3G3 : no

E1G3 : ¿Cómo vamos muy lejos?

E3G3 : con la mano

E1G3 : ahí está

E2G3 : espérate que esté grabando

E1G3 : a ver espérate tengo un tengo un aprecio

E2G3 : desde ahora ya, no cero movimiento

E3G3 : ¿Cómo que no?

E1G3 : ahí está, sabes que, que lo que pasa esta recta es cuando sigue sonando

E2G3 : es cuando choca con la pared

E1G3 : no y cuando sigue sonando, ya cuando sigue sonando y yo no hago nada, entonces tendría que ser como así… y empezar a acelerar acá

E2G3 : si pero trata que sea

E1G3 : en los 6 segundos

E2G3 : mira

E2G3 : ya tú dices cuando

E1G3 : que sea en los 6 segundos, porque esa recta que da después de que yo termine queda más tiempo, el lapso de los segundo que sigue sonando…

E1G3 : pero la anterior era, así la anterior era hasta cierto punto y depuse porque saco la mano no más pero la gráfica también nos sirve.

E2G3 : ya, ya caché, desde ahora, da un paso más para que llegues hasta el fondo uno, dos, tres…listo

E2G3 : o hazlo con las 2, desde ahora ya…

E1G3 : revisa, si ahí dio algo parece, ahí dio algo

E2G3 : si

E3G3 : pero así hacemos, para saber algo

E2G3 : si con la pelota

E1G3 **:** tiene como la pequeña guatita antes que puede ser explicada porque ya no la, no tenia 100% la pelota sobre, tapando todo por eso…

E2G3 **:** ¿ahora lo hacemos con el tren?

E1G3 **:** ahora la pelota sola, pero están necesario como para…

E2G3 **:** no, ahora ya… ¿Qué es más fácil poner? Pone el tren encima primero así de costado para que abarque más espacio, ponlo más allá

E1G3 **:** no porque sabes está captando todo.

E2G3 **:** yo creo que deberíamos hacerla entera no más

E1G3 **:** yo creo que si ya la hacemos acá, va a captar todo

E2G3 **:** punto de parada va a ser en el origen

E1G3 **:** punto de parada va a ser en el origen, ¿habría alguna deferencia? No

E2G3 **:** listo

E1G3 **:** ¿ahí es la recta?

E2G3 **:** si

E1G3 **:** y otra recta…

E3G3 **:** tener problemas con el sensor

E1G3 **:** claro, claro al sensor

E2G3 **:** es muy sensible

E1G3 **:** aunque sea llegando al pico, el sensor capta todo…

E3G3 **:** después no hay que hacer nada más

E1G3 **:** ¿no?...ya

E2G3 **:** ¿hay que ubicar los sensores en cada uno?

E1G3 **:** dice: usar la pelota…

E2G3 **:** ¿Qué dice? Se hace partir el tren desde el origen pero el sensor inicia a captar de… el tren va en línea recta alejándose del sensor con velocidad constante

E2G3 **:** y el sensor se supone que…

E1G3 **:** si

E2G3 **:** en el extremo del mesón

E1G3 **:** ¿Cómo?

E2G3 **:** colocamos el sensor en el extremo del mesón

E1G3 **:** ya

E3G3 **:** ¿también ponemos eso?

E1G3 **:** ¿Qué cosa?

E3G3 **:** que pusimos el sensor en el mesón

E2G3 **:** en el extremo del mesón donde hicimos correr el tren

E1G3 **:** se usa la pelota partiendo desde el sensor…

E3G3 **:** ¿ya?

E1G3 **:** si

E3G3 **:** ya…

E1G3 **:** ya, eh, ya hicimos esto no hay nada más por ahí

E3G3 **:** esa cuestión de sensor ¿Dónde lo va a colocar?

E1G3 **:** ¿Qué cosa?

E3G3 **:** le ponemos que los dejamos en la mesa ¿eso?

E2G3 **:** dejamos en el mesón donde hicimos…

E1G3 **:** anota ahí que no hay que tomar en cuenta que todo se hizo sobre la mesa, que todo…

E2G3 **:** como ingeniero…

E1G3 **:** ¿hay que dejar todo bien especificado?

E3G3 **:** no, si quieren

E1G3 **:** ¿listo?

E3G3 **:** listo

E2G3 **:** en el primero los dos van con, con velocidad constante y parten desde el mismo punto pero entre ellos van a velocidades distintas.

E1G3 **:** exacto ¿y como se demuestra que van a distinta velocidad?

E2G3 **:** porque ellos tienen distinta pendiente

E1G3 **:** exacto

E3G3 **:** y ahora ¿Cómo lo pongo? ¿Qué dice?

E1G3 **:** hay que partir primero con…

E2G3 **:** los 2 parten desde el mismo punto

E1G3 **:** pero dice: para cada…describa los patrones de movimientos en cero para obtener la curva dibujada

E2G3 **:** por eso los dos parten desde el mismo punto, las dos mantienen velocidad constante pero entre ellas llevan velocidades distintas

E1G3 **:** si, dice: eh...

E3G3 **:** espérate

E1G3 **:** “Johanna eso es un circo”

E3G3 **:** ¿y eso no más?

E2G3 **:** y en eso se reflejan que llevan distintas pendientes

E1G3 **:** y eso es demostrado por las distintas pendientes de cada recta ¿Qué más se puede decir de este gráfico?

E2G3 **:** ¿de ese? No nada, ¿le pusieron que iban con velocidad constante?

E1G3 **:** si

E3G3 **:** ¿Qué tipo de funciones?

E1G3 **:** que tipos de funciones serian…claro ax+…y las dos positivas

E2G3 **:** o mx+c=y

E3G3 **:** ¿Cómo?

E2G3 **:** $mx+c = y$

E1G3 **:** claro, $mx+c =$...

E2G3 **:** con m igual pendiente y c igual al intercepto

E1G3 **:** y m seria positiva ¿o no?

E3G3 **:** ¿Cuándo la hemos escrito con c?

E1G3 **:** lo hemos escrito con c

E3G3 **:** no, $mx+b$

E1G3 **:** desde este semestre

E2G3 **:** un pequeño detalle

E1G3 **:** no te he visto mucho en esta clase…con suerte venia a cultura religiosa, m de pendiente y b punto de partida

E1G3 **:** el otro es el b se puede decir que uno parte del origen y el otro parte más adelante y los se mantienen con velocidad constante

E2G3 **:** van a la misma velocidad

E1G3 **:** van a la misma velocidad, exacto y uno va como más adelantado del otro, no a todos nos parece pero también uno se equivoca ¿Por qué son iguales? Su pendiente algo nos dice…

E1G3 **:** acá, vamos a terminar cabros…o sea no, nos quedan como unos cuantos momentos, momentos, momento 7 momento 8 momento 23…

E2G3 **:** van con velocidad constante pero no parten desde el punto cero

E3G3 **:** podríamos poner acá que una no se puede igual eh, $nx+b$ y el otro $mx+b$, tienen distinta pendiente y acá tienen $mx+b$ las dos

E2G3 **:** pero una es más c y la otra…

E1G3 **:** esos dos tienen igual pendiente…

E3G3 **:** ¿Cómo le pongo? ¿También son rectas o no?

E2G3 **:** si

E1G3 **:** pero son rectas y vectores…aquí como que va muy rápido

E3G3 **:** acelerando

E1G3 **:** aceleran pero mucho

E3G3 **:** ya entonces esto seria acelerado

E2G3 **:** movimiento acelerado

E3G3 **:** pero uno parte más después que el otro

E1G3 **:** uno parte a una distancia considerable, de un centímetro, pero en realidad que uno parte después del otro

E2G3 **:** uno parte desde el origen y el otro parte de

E1G3 **:** y las pendientes no son muy…o son iguales

E3G3 **:** esa esta como más así pero no importa tanto

E1G3 **:** no, la cosa es que acelera y mucho y parten de distinto…

E3G3 **:** primero había que decir como se obtenía ¿cierto?

E2G3 **:** explicar los patrones de movimiento necesario para obtener las curvas dibujadas

E3G3 **:** explicar los patrones de movimiento necesarios para obtener las curvas dibujadas, ¿qué se hace?

E2G3 **:** poner un objeto sobre el sensor

E3G3 **:** claro

E2G3 **:** uno desde el origen y otro un poco más delante de ese una distancia del sensor, se apareció el tren

E1G3 **:** sabes que hasta la actividad 3 esta piola la actividad

E2G3 **:** toda tranquila

E1G3 **:** pero ya la actividad 49, 4 coma 9, pero si esto lo vimos en física

E3G3 **:** no alejes tanto, acelerando no más

E1G3 **:** o más que o una distancia mayor es como es segundo es una distancia mayor alejándose, porque seria como

E3G3 **:** pero igual se entiende, que o partes ahí o ahí y te da una de esas dos, a ver lo voy a dejar así no más, ¿no dice más como para explicarle a la profe así no más? Ya y el 2 ¿Cuál es el 2?

E1G3 **:** dice que tipo de funciones tendría la misma gráfica, una curva.

E3G3 **:** es una curva si, pero

E1G3 **:** es una linda parábola que seria como…

E3G3 **:** una parábola, ¿una cuadrática una cosa así?

E2G3 **:** yo creo que seria una exponencial

E1G3 **:** si, es que una exponencial sería

E2G3 **:** es que aquí tenemos, estamos limitados hasta donde llega el grafico no más.

E3G3 **:** ¿si?

E2G3 **:** la otra sería como una exponencial pero con el dominio restringido

E1G3 **:** también podría ser pero…

E3G3 **:** si, también da

E1G3 **:** pero ¿Cuál es la formula de la exponencial?

E2G3 **:** un número cualquiera elevado a X

E1G3 **:** mmm también podría ser…

E3G3 **:** ocho, no se como elevado a tres la cuestión

E2G3 **:** como 2x…

E3G3 **:** a pero no puede ser 3 la cuestión porque sería como estúpido

E1G3 **:** con dominio restringido, podría ser, si

E3G3 **:** si, con dominio restringido, ya ¿le ponemos esa exponencial?

E1G3 **:** una aX2+bX+C una ecuación de la recta ¿no podría ser?

E2G3 **:** eh… una x2 un puro x positivo, pero depende si te coloca menos tanto más tanto

E1G3 **:** podría ser, una cuadrática

E2G3 **:** es que sería como media parábola

E3G3 **:** si, como lo mismo, imagínate

E1G3 **:** pero podría ser en una de esas una cuadrática ¿o no?

E3G3 **:** si, porque acá no se le sumas b o algo así y ahí la parábola queda así, pero tienes que sacarle el resto.

E1G3 **:** pero esa formula podría ser, porque te acuerdas del lanzamiento de proyectil lo que daba la, lo que daba una formula, pongamos partimos tú tomas tiempo positivo y tiempo negativo, ¿te acuerdas? A ti te pueden salir dos tiempo nos habían explicado que el tiempo positivo ya es cuando supongamos tú dejas caer un objeto y La,la,la,la,la y cae y el tiempo negativo sería como , porque la formula no te margina si , si lo estás lanzando desde abajo no te margina , no te hace parar la curva no te da la cuerva desde acá hasta acá , no te da en la formula así te va a dar entero por eso el tiempo negativo, el tiempo negativo seria como que parte desde acá

E2G3 **:** ya, coloca eso

E1G3 **:** cachas

E2G3 **:** es más fácil

E3G3 **:** ¿Por qué así?

E2G3 **:** porque esa es la formula de distancia del movimiento acelerado, uniformemente acelerado

E3G3 **:** ¿si?

E1G3 **:** podría ser

E3G3 **:** pero espérate ¿Qué es c acá?

E2G3 **:** c seria el intercepto de donde parte, ya x ya x2 una cuadrática

E1G3 **:**: distancia tiempo, claro

E2G3 **:** que en pocas palabras en velocidad por tiempo y eso es un medio de la aceleración por el tiempo al cuadrado

E1G3 **:** pero ¿ese sería semejante a ese de la posición final y todo eso?

E2G3 **:** si, si distancia es eso

E1G3 **:** posición inicial menos posición final…

E3G3 **:** espera aquí te dice que te puede funcionar…

E2G3 **:** funciona

E3G3 **:** ¿si?

E2G3 **:**si

E1G3 **:** o tal vez pongamos la otra opción que podía ser por lo que decíamos de la exponencial con dominio restringido igual no estaba mala la idea, estaba buena la ideal

E2G3 **:** con los reales positivos

E3G3 **:** y así, no se queda quieta pero se deja a una distancia

E2G3 **:** a una distancia si

E1G3 **:** a otra distancia pero en un sensor en el cual no, que fuera menos sensible, no como este

E3G3 **:** no, si eso ya lo puse por acá que era muy sensible y que por eso no nos daba muy bien pero si lo hacemos pegado

E2G3 **:** no pero es que acá no

E1G3 **:** en este caso lo que hay que poner es que es a distancia distinta que diga a distancias a distintas con respecto al sensor, sin no fuera tan sensible el sensor seria…

E3G3 **:** que FOME ¿esta listo o no?

E2G3 **:** si, pero seria con Y igual a una constante

E3G3 **:** ¿Qué le pongo K?

E1G3 **:** no mejor una G

E2G3 **:** K y J si son distintas

E1G3 **:** mejor una G la K es muy pobre y son C y K son distintos

E3G3 **:** obvio

E1G3 **:** pero igual hay que poner todo, hasta que comiste hoy día

E3G3 **:** vamos a otro punto ya, suponga que usted toma esto como el centro del movimiento indicado, una persona que está a su lado comienza moverse con velocidad constante y está un poste situado a 50 metros de distancia, se detiene por 5 minutos luego regresa al lugar de partida, entreguen el grafico que describa el movimiento realizado por la persona desde que parte hasta que regresa

E1G3 **:** esta diciendo, claro pon un eje al frente

E2G3 **:** ahí esta, no me alcance a cargar

E1G3 **:** ya tú soy el observador, tú serias el observador la persona que se está moviendo a 50 metros sería…

E3G3 **:** ¿estas seguro? No dice cuanto, se detiene por 5 minutos entonces de acá a acá debe quedarse con eso ¿cierto?

E2G3 **:** si

E1G3 **:** colócale 5 po

E3G3 **:** pero

E2G3 **:** ¿va con velocidad constante? Se supone que es la misma velocidad con la que va que con la que vuelve

E1G3 **:** esta diciendo de veras

E2G3 **:** esta tiene que ser igual a esa y esa no importa

E1G3 **:** oye eso hagamos pongamos esa observación…

E2G3 **:** a no, pero igual pongamos esa observación

E3G3 **:** pero ¿regresa a la misma velocidad?

E1G3 **:** si, si va a velocidad constante

E3G3 **:** dice que regresa al lugar de partida no dice si regresa más rápido o más lento , ya filo, entonces pongámosle que iba al sur se devuelve 50 metros , o sea que en 25 minutos fue y volvió…porque se supone que después paso un rato como unos 10 minutos pongámosle unos 15

E1G3 **:** no, no puedes decir eso

E2G3 : a no

E3G3 **:** no, porque tomo 2 y hay 7

E1G3 **:** o pon la cosa importante no más que acá ponle acá una llave que ahí hay 5 minutos, eso es lo importante

E3G3 **:** ¿se entiende?

E2G3 **:** si

E3G3 **:** ya, suponga ahora que la persona parte desde el poste y se acerca hacia usted a una velocidad constante, se detiene cinco minutos y regresa al poste , considere la otra formula…

E2G3 **:** como al revés

E1G3 **:** ponla al otro el do ¿o no?

E3G3 **:** ¿lo achico?

E1G3 **:** no, no, no, abajo…

E2G3 **:** porque el tercero que dice, realice una comparación fundamentada de la gráfica, a si eso

E1G3 **:** es como lo mismo pero al revés,

E3G3 **:** va al poste, viene para acá espera y después

E1G3 **:** ¿Cuánto estuvo parado?

E2G3 **:** los mismos 5 minutos

E3G3 **:** ya…ahora la comparación fundamentada

E1G3 **:** a, ya, aquí hay que primero hay que decir que esto es así porque parte del origen y toda la cuestión y que tu eres, tomando en cuenta que la persona es el observador, la otra persona es la que se mueve, que se desplaza 50 metros que hace el recorrido, en cambio en la otra parte desde, desde el puente…haber realice una comparación fundamentada de la gráfica obtenida en los ejercicios a y b, ya primero ¿Qué hay que decir? Que en la gráfica o hace arto que no escribo…la gráfica a parte desde del observador eh…luego avaza 50 metros eh… cinco minutos…porque todas son rectas, rectas paralelas…y luego vuelve al, al donde estaba su amigo, vuelve hacia el observador, hay que poner en la gráfica…hay que hacer la comparación a ya en cambio, que hace lo mismo pero en vez de, hace un movimiento parecido pero ¿Qué podemos buscarle un puto de comparación?

E2G3 **:** que debería ser la misma figura pero una esta dada vuelta, la que representa el grafico

E1G3 **:** claro

E2G3 **:** suponiendo que la velocidad constante con la que camino hacia el poste o con la que venia era la misma en ambos casos

E1G3 **:** ambos gráficos

E2G3 **:** y que durante esos cinco minutos en los dos se mantuvo constante, uno esta a una distancia y el otro está en el origen

E1G3 **:** ambos gráficos tienen cierta similitud…préstame un hoja, excepto en el hecho, tienen cierta similitud en el tiempo, en el tiempo que se quedaron parado…y se diferencian en el, ¿Cómo se podría explicar? Se diferencian obviamente en este movimiento

E2G3 **:** en el sentido que llegan

E1G3 **:** y se diferencian en el sentido

E2G3 **:** porque uno primero se aleja y después se acerca y el otro viceversa

E1G3 **:** en los sentidos del movimiento

E3G3 **:** ¿Qué onda?

E1G3 **:** estoy pensando en el otro por mientras, ya que en el gráfico a se aleja y en el grafico b

E3G3 **:** pero busca más espacio abajo

E1G3 **:** no tengo más espacio

E3G3 **:** está cada vez más apretado y más chico…

E2G3 **:** entre 83…

E1G3 **:** y el grafico b

E2G3 **:** 83, 45, 46

E1G3 **:** el movimiento es lo contrario, no mejor no

E3G3 **:** ¿Qué hay que hacer?

E1G3 **:** te voy a explicar, ¿no hay que hacer nada más? Que venga el siguiente, por favor el siguiente, o ya nos ganamos los dulcecitos, son demasiado excelentes estos dulces, yo creo que son demasiado barato para lo que son

E2G3 **:** 4, 6,8

E1G3 **:** no quiero imaginar de donde es eso

E2G3 **:** o me pifie, es ahí y ese es ahí

E1G3 **:** ¿Qué hizo él?

E3G3 **:** tomo una paralela recta la tomo en directo con una velocidad constante de 63 metros por segundo

E1G3 **:** entonces iba lento

E3G3 **:** …el automóvil se encuentra punto a la derecha…

E1G3 **:** siempre va a ser positivo, a la derecha, convencionalmente yo digo que a la derecha es positivo, oye esa puede ser una observación buena

E2G3 **:** ya está hecha la recta con los 2 puntos de más arriba

E3G3 **:** ¿Por qué los pusiste abajo?

E2G3 **:** porque me pifie, partí de cero y tienes que partir del veinte y cuando empieza a medir el tiempo está a 20 metros

E1G3 **:** parte del 20

E3G3 **:** ¿ahí no más?

E2G3 **:** no, sigue de largo no más, si después te piden T17

E1G3 **:** está recta no va a la misma pendiente a cero…

E2G3 **:** ya está hecho

E1G3 **:** hay que poner la gráfica ahora, a no na que ver estaba pensando en la ecuación

E2G3 **:** a y el automóvil está a…

E1G3 **:** hay que poner formula de cinemática

E2G3 **:** 1091 metros

E1G3 **:** ¿seguro?

E3G3 **:** ¿seguro?

E1G3 **:** haber hagámoslo por cinemática

E2G3 **:** ¿Cómo?

E1G3 **:** hazlo con formula de cinemática

E2G3 **:** ¿de cinemática?

E1G3 **:** por si acaso

E2G3 **:** posición inicial son 20 más la aceleración por, velocidad por tiempo, 16 por 63 son 1071 más los 20 1091

E1G3 **:** ya excelente, cámbiale las unidades o si no nos va a bajar nota

E2G3 **:** al primero…

E3G3 **:** ¿y lo justificamos así como?

E1G3 **:** no, la respuesta

E3G3 **:** ¿Qué respuesta?

E1G3 **:** el modelo estaba a…estoy comiendo dulce si no se me entiende nada

E1G3 **:** el origen…ya pasemos a la otra

E3G3 **:** ya

E1G3 **:** pasé al movimiento b nos quedan siete movimientos más

E3G3 **:** se lanza un objeto desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial de 42 metros por segundo ¿Cómo…?

E1G3 **:** que hay que ver lo que hace el objeto, el objeto sube y baja, es decir se aleja del observador y vuelve, es decir es como la distancia…

E2G3 **:** pero no son rectas, porque es acelerado

E1G3 **:** a claro porque cada vez cuando , porque sale con una velocidad , sale con una velocidad que es rápida , que la tira así con fuerza y tiende , y en el punto máximo queda con velocidad cero y después comienza con la misma velocidad con que subió comienza a bajar , o sea tomando en cuenta que es un sistema aislado y no hay viento ni cosas malas que lo afecten , ¿Cuál sería la gráfica del observado en la a? ya , ¿Quién sería?

E2G3 **:** parte desde el origen

E1G3 **:** ¿parte desde el origen? ¿Y te vas como así?

E2G3 **:** es como una parábola dada vuelta, haber

E3G3 **:** no puede ser po

E1G3 **:** a ver, espérate, hagamos el dibujito ya, sube y baja

E2G3 **:** eso mismo tiene que, pero no tan cerrado, es más abierto

E1G3 **:** yo decía, lo que hace el objeto cuando tú lo tiras

E2G3 **:** eso, mira eso es lo que hace, bueno se supone que el objeto hace así, no hace así se supone que el objeto debería caer donde mismo tú empezaste y a través del tiempo va con una velocidad, no a ver ¿es distancia?

E1G3 **:** si

E2G3 **:** parte y esa velocidad empieza a frenar y después empieza a…

E3G3 **:** empieza como a desacelerar, en vez de hacer como así la guatita tiene que ser una guatita así y después cuando baja también acelera

E2G3 **:** mira si es distancia primero se empieza a alejar y llega a un punto y se empieza a acercar cada vez más rápido

E1G3 **:** tienes toda la razón, empieza claro ¿Cómo sería? ¿Así?

E3G3 **:** una especie de parábola

E1G3 **:** ¿así? Claro

E3G3 **:** ya, está bien

E1G3 **:** pero igual ver como creo igual es mucho

E3G3 **:** ¿Por qué? Mira hasta ahí tiene que llegar a

E2G3 **:** está subiendo

E3G3 **:** está subiendo claro

E1G3 **:** a tienen toda la razón

E3G3 **:** ¿cachas? Empieza más rápido, como que empieza a frenar y después baja y baja así ta! Fin, se aceleró

E3G3 **:** si, no pero

E1G3 **:** esto sería, cuando sube es negativo, la posición inicial es cero

E1G3 **:**…igual 56 segundos, esto seria formula de…

E2G3 **:** posición inicial

E1G3 **:** claro

E2G3 **:** Que es cero

E3G3 **:** no

E1G3 **:** no, a ¿Por qué?

E2G3 **:** en este case es cero, pero tienes que darlo desde el origen

E3G3 **:** pero ¿Por qué estas ocupando esa formula?

E2G3 **:** lo que tú quieres saber es donde está

E1G3 **:** porque no sabemos cuanto se demora ¿o no?

E2G3 **:** pero tu sabes la aceleración, si te asumes a menos 10

E1G3 **:** si, pero espérate pero lo que pasa es que no sabemos si cuando está bajando o está subiendo

E2G3 **:** ¿Cómo?

E1G3 **:** no sabemos como va a ser la velocidad, positiva o negativa

E2G3 **:** no, si es velocidad inicial y la velocidad inicial es positiva

E3G3 **:** pero, a ¿Qué están hablando? Me perdí

E2G3 **:** física

E3G3 **:** ¿Qué formula es?

E1G3 **:** es del movimiento

E3G3 **:** a ya no

E2G3 **:** arco acelerado

E1G3 **:** 49 por 56 más

E2G3 **:** un medio, menos 10

E1G3 **:** menos 10 menos 5

E2G3 **:** 562

E1G3 **:** y eso es…

E2G3 **:** multiplica 56 por 56

E2G3 **:** ¿la calculadora se puede ocupar?

Profesora **:** si

E1G3 **:** ¡pasamos matemáticas 2! ¿Qué nos pasa?

E2G3 **:** calcula los tres puntos, me da flojera, ¿la desconecto no más?

Profesora **:** si

E1G3 **:** si, ¿Cómo no te pasaron en el colegio la tabla del 56?

E2G3 **:** ¿Cómo calculas aquí?

E3G3 **:** ah, no se, no me interesa esa calculadora, home, home, home

E2G3 **:** ¿Dónde está el home no tiene home?

E1G3 **:** tienes que aprendértela con una canción 56 por uno 56

E2G3 **:** sal de ahí maldita

E1G3 **:** sabes mejor no la saquemos del área de graficar porque nos vamos a mandar la media embarrada y va explotar y vamos a tener que pagarla y el medio atado

E1G3 **:** ¿sacaste el 56?

E2G3 **:** si, los estoy sacando 25, 28

E3G3 **:** ah! lo tengo bueno 3.725 ese es mi resultado, ese es mi resultado

E1G3 **:** ese ¿Cuánto es? ¿49 por 56?

E2G3 **:**56 por 56 es 3136

E1G3 **:** pero ahora viene el 49 por 56

E3G3 **:** ya…

E2G3 **:** 2.744

E3G3 **:** y… 3136 por 5?

E1G3 **:** es como que nos va a dar un poco…

E3G3 **:** puede ser, si imagínate, el tiempo es 56

E2G3 **:** daría -12939

E1G3 **:** se fue para el infierno ya

E3G3 **:** eso, eso menos 12000 y tanto

E2G3 **:** 12936

E3G3 **:** y eso menos lo que acabo de poner

E2G3 **:** no

E3G3 **:** allá lo hiciste a eso me refiero, a ya, ya

E1G3 **:** ¿5 por 3136 está bien?

E3G3 **:** si da como quince mil y tanto y eso ahí 12

E2G3 **:** doce mil nueve…

E1G3 **:** nueve treinta y seis, ¿así?

E2G3 **:** si, o sea

E1G3 **:** esta el cerrando ya, esta con...

E2G3 **:** pero decir dos cosas, con que el la tiró, no estaba en el piso cuando la tiro y por eso se puede, o que simplemente se considera que llego al suelo no más

E3G3 **:** a lo mejor está mal eso…

E1G3 **:** hay otra formula que seria, pero necesitaríamos la velocidad, no estaríamos, que seria la posición final, que diga la velocidad inicial

E2G3 **:** *v* final al cuadrado es igual a la velocidad inicial

E1G3 **:** *v* final al cuadrado más 2 por a más por velocidad final más posición inicial

E2G3 **:** pero con eso sacas sólo con que velocidad llegó

E1G3 **:** está en el piso cuando la tiró o llego al suelo y…

E2G3 **:** rebotó hacia arriba y ahí no se puede calcular

E1G3 **:** no, llego al suelo, yo creo que el test te pone condiciones iniciales para envolinarte la perdiz porque hace cuando está por acá más o menos

E3G3 **:** es que en verdad no se, saquemos en que segundo está arriba.

E1G3 **:** el punto máximo

E3G3 **:** veamos

E1G3 **:** ya, posición…

E3G3 **:** porque si está muy lejos de esa cuestión

E1G3 **:** la posición es igual a la posición inicial, posición final sería X y la posición inicial

E2G3 **:** pero tampoco sabes cuanto se demora en llegar al suelo, al menos que digas cero es igual a creo y eso debería ser igual a eso

E1G3 **:** la velocidad inicia es 49

E2G3 **:** no, mira lo que yo decía si quieres comprobar cuando llega ahí sería, la posición final es cero la posición inicial es cero, la velocidad inicial es 49 por x que no lo vas a conocer más menos 10 o sea menos cinco por x, x2 yo te voy a decir en los dos momentos.

E3G3 **:** ¿Cuánto es?

E1G3 **:** 5x2-49x=0 y quedaría factorizas por X y tienes 5x-49 igual a cero x1 igual a creo segundo y x2 va ser igual en 49 quintos

E3G3 **:** ¿menos 49 quintos?

E1G3 **:** 49 quintos

E3G3 **:** ¿Cómo va a ser?

E2G3 **:** -49/5

E3G3 **:** eso es casi 10

E2G3 **:** no, es 48/5, el tiempo es positivo

E3G3 **:** ¿Por qué?

E1G3 **:** 5x-49, aquí, mira, mira de acá para acá

E3G3 **:** ah, ya ahí estamos bien

E1G3 **:** ya, eso es más o menos? Yapo 10 segundos aproximadamente es como 10 segundos acá por lo tanto 56 segundos es como terrible power

E2G3 **:** entonces llego al suelo y rebotó o la tiró desde un edificio

E1G3 **:** lo que pasa es que si uno ve la gráfica no te da a imaginar la formula en orden , esto va a seguir así, va seguir hasta abajo…entonces acá va estar los 56 segundos cosa que llegue ahí esta la cosa, pero que gráfica te la da , te la da de que llegue bien o mal..

E3G3 **:** ponle es, que la gráfica no nos da que la gráfica no es una forma de infringir en eso pero nosotros sabemos que…

E2G3 **:** gráfica, una fórmula

E1G3 **:** el resultado, pero sabemos que choca con el suelo, en T igual…

E3G3 **:** la otra opción podría ser que lo tiro de la mano, si lo tiró, lo tomo y espero que fuera el segundo 56 y lo tiene en la mano todavía

E1G3 **:** puede ser

E2G3 **:** o todavía está rebotando por ahí

E3G3 : ¿Qué era lo primero? Que tiraba

E2G3 : no, que al llegas a uno sólo y el resto lo dejas por ahí

E1G3 : el que la tira, la recibe en sus manos, pero es que no dice nada, no dice que esta interviniendo ni nada es como una hipótesis igual como media imaginaria ¿cachas? Porque no te dice que la agarra ni nada, si yo creo que nos están puro envolinando la perdiz loca

E3G3 : ya bórralo no más

E2G3 : entonces bórralo

E1G3 : están puro tratando de jodernos, el siguiente por favor…respecto del observador, entonces se mueve con la curva, acelerando indique si el balón se acerca o se aleja del observador, de donde lo mires se aleja ¿o no? pero este es tiempo entonces ahí…

E2G3 : no, en función del tiempo te está dando una distancia

E1G3 : ya, ¿seguro?

E2G3 : si o sea es como f(x)=y, ahí está Y

E1G3 : viendo las características de la fórmula, pero no me dice acá, ya eh… entonces por orden es que hay que indicar porque ¿cierto?

E3G3 : hay que decir si se acerca o se aleja

E1G3 : se aleja

E3G3 : ¿Cómo es que se aleja? Es que ¿Cómo queda nuestra formula?

E2G3 : ¿Cómo?

E3G3 : oposición, posición inicial…eso es ¿o no?

E2G3 : si

E3G3 : eso te da cero y que son con el cero

E2G3 : los otros son positivos y esa también tiene que ser positiva

E3G3 : y este es como el espacio, se aleja y se acerca

E1G3 : no, no siempre…

E2G3 : no es que o sea es que son menos

E1G3 : va haber un valor en el cual no, porque yo voy a poner siempre va a ser positivo, no, no siempre va ser positivo

E2G3 : y aquí en esta si

E1G3 : ¿o no? siempre, porque si tú supongamos este 49 yo mirándolo 49 por un tiempo y este tiempo hay que elevarlo al cuadrado ya OK pero es 4,9 ira...

E2G3 **:** pero los tiempos son siempre positivos no puedes tener tiempos negativos

E1G3 **:** claro

E2G3 **:** vas a tener todos los valores positivos

E1G3 **:** siempre serán positivos, ya diga cual es la posición del móvil en el tiempo T=4 segundos

E2G3 **:** ¿Cuánto?

E1G3 **:** T igual 4 segundos ¿Cuánto es 4,9 por 16?

E3G3 **:** ¿Cómo voy a saber eso?

E1G3 **:** ¿Cómo no lo vas a saber? ¿Nunca te pasó la tabla del 4,9? Ahora quiero demostrar mis habilidades y…

E2G3 **:** más 4…24, 2, 4 por una 6 más 4, 8, 7

E3G3 **:** 78,4

E2G3 **:**: si

E1G3 **:** 78 como resta, -78,4, o más, no nada que ver

E3G3 **:**: más, pero ¿Por qué le borras eso?

E2G3 **:** si, era cosa que…

E3G3 **:** y eso ¿Qué da? 49 por 4

E2G3 **:** 9 por 4, 36, 3 ,4 por 4 ,16 si 4,4

E1G3 **:** 16, 17

E2G3 **:** 6 y4 ¿no? son 6 y 8 a ver 196

E3G3 **:** no si ahí esta, eso da

E1G3 **:** la velocidad del tiempo, la velocidad del móvil que diga

E2G3 **:** ¿Cómo?

E1G3 **:** prediga la velocidad del móvil en T=4 segundos

E2G3 **:** la velocidad del móvil es 49

E1G3 **:** va ser…porque la velocidad es igual

E2G3 **:** va ser velocidad final al cuadrado es igual a velocidad inicial al cuadrado

E1G3 **:** no, ni idea porque se está, ésta es una cuestión de movimiento rectilíneo, a mi no me parece

E2G3 **:** por a por xf-xi para ¿Qué tiempo? A los 4

E1G3 **:** y ya tenemos la distancia

E2G3 **:** ¿eso es 279? No ¿Cuánto es?

E1G3 **:** 274,4

E2G3 **:** por a que es 4,9 por la velocidad inicial al cuadrado

E3G3 **:** y ¿Cómo sabes que es 4,9 la aceleración?

E1G3 **:** ese es más no es por, más…

E2G3 : dice, la velocidad al cuadrado ¿Cuánto es? ¿Cero?

E1G3 **:** cero

E2G3 **:** 4,9 ·2, 74,4 ¿Cuánto es?

E3G3 **:** ¿Cómo?

E2G3 **:** 274,4 ·49 no 4,9

E3G3 **:** ¿eso?

E2G3 **:** ¿y la raíz de eso?

E1G3 **:** no tiene aceleración

E2G3 **:** si, 4.9 · t2 a pero es un medio la aceleración 4,9 · 8,…

E1G3 **:** a ver multiplica 4,2 por nueve caro.

E2G3 **:** no, 4,9 por 2

E3G3 **:** eso es lo que estaba pensando ¿Por qué es 4,9?

E1G3 **:** 9,8

E2G3 **:** y eso por los 274,4

E1G3 **:** pero ¿la aceleración es positiva o negativa? A, pero dos nueve coma ocho, esto es un lanzamiento, mira los dos puntos medios 9,8 y la velocidad inicial sería 02

E3G3 **:** ¿y la velocidad a los 4 segundos cuanto?

E1G3 **:** multiplica 2,74, sabes que no se, parece que en algo nos estamos equivocando

E2G3 **:** ¿Dónde estás la…?

E1G3 **:** pucha y mi calculadora…

E2G3 **:** serían 73,33

E3G3 **:** y ahora ¿estas sumando?

E2G3 **:** si

E1G3 **:** no, pero ¿Cuánto es el resultado de esto?

E2G3 **:** de eso, 5378,24

E1G3 **:** menos cinco mil tres como algo positivo que da cinco mil

E2G3 **:** pero ¿Por qué menos cinco mil?

E1G3 **:** o sea, porque de partida, a claro

E2G3 **:** es más

E1G3 **:** ¿seguro?

E2G3 **:** si

E1G3 **:** más

E2G3 **:** 53, los 5378,24

E1G3 **:** 24

E2G3 **:** y la raíz de eso te va a dar la velocidad final

E1G3 **:** ¿Qué es?

E2G3 **:** 73,336 ya, si la velocidad es 9,8

E1G3 **:** ¿lo multiplicaste por 2?

E2G3 **:** si, el 4,9 lo multiplique por 2, me dio 9,8

E1G3 **:** no, no, no es 9,8 por 2

E2G3 **:** por eso 9,8 por 2 es 19,6 y 19,6 por los 274,4 son 5378

E1G3 **:** Ahora hay que poner, ¿este sería el resultado? Indica la aceleración del móvil en T=4 y en el tiempo T=8 segundos

E2G3 **:** 4,9, no 9,8, la aceleración siempre es la misma

E1G3 **:** la aceleración es 9,8 metros pro segundo al cuadrado, aceleración siempre es la misma, a ver espérate hay que ver si en T=8 se no se detiene

E2G3 **:** ¿Por qué? Si siempre se va alejando

E3G3 **:** en alguna parte que como conclusión podemos decir que se trata de un lanzamiento hacia abajo o caída libre, ¿la lanzaron hacia abajo?

E2G3 **:** no tampoco, o sea puede representarse así pero puede ser que no te este acelerando a 4,8 metros por segundo y esté fuerza horizontal, que es más factible que hacia abajo porque hacia abajo está a un momento choca con el suelo

E1G3 **:** la aceleración siempre es la misma y es de 9,8 metros por segundo al cuadrado

E2G3 **:** 9,8 es gravedad un medio es 4,9 si es que consideraron con 10 como consideramos nosotros en de nantes

E1G3 **:** no, pero es la misma cosa, la función f (t)=25t+8t2 representa el movimiento de otro móvil ¿Qué puede decir de su velocidad y su aceleración en relación con lo del primer móvil

E3G3 **:** que tiene menos velocidad inicial pero mayor aceleración, eso es lo que veo ahí

E1G3 : o sea ¿la aceleración es menor?

E3G3 : no, la aceleración es mayor

E1G3 : la aceleración es mayor es de 16

E3G3 : mira acá es 49, acá es 25 acá la aceleración es 9,8 con aceleración 16 ¿se puede decir eso o no?

E2G3 : ¿Qué cosa?

E3G3 : que el movimiento del otro móvil es ese ¿Qué puede decir de su velocidad y aceleración en relación al primero? que la velocidad inicial es mayor

E2G3 : es menor

E3G3 : es menor, perdón pero la aceleración es mayor, eso no más

E2G3 : por lo que en un punto se van a volver a cruzar

E1G3 : eso, aceleración y su aclaración es mayor, es de 16 m/s y su velocidad inicial es mayor

E2G3 : es menor

E3G3 : a mi también me paso lo mismo 25 es mayor que 49

E1G3 : menor que la velocidad del primer móvil eh…voy a escribir otra cosa.

E3G3 : ah momento 3

E1G3 : hasta ahí sería no terminamos, la siguiente figura representa la posición de un móvil en tiempos diferentes suponga que usted sólo conoce A y a la variación de A B pero no B

E3G3 : la variación de A a B, sabes donde está A y sabes la diferencia de a con B pero no sabes donde está B

E1G3 : a ya, sabes A y eso también se sabe, lo que no se sabe es eso

E3G3 : pero puede ser para adelante o para atrás

E2G3 : no es que…no se si esa ¿eso es lo que hay que saber? Porque sino sumar y restar y se sabe

E1G3 : ¿Cómo?

E3G3 : hubiésemos esperado, pero no importa a ver dale encuentre un modo para predecir B a partir de esos datos

E1G3 : no sabemos si va a velocidad constante

E3G3 : no pero

E1G3 : aunque no, puede estar en reposo que esté parado acá y esté parado acá

¿o sea que son dos cosas que están en reposo?

Profesora **:** la idea es que ustedes hagan un modelo en donde ustedes van a conocer la posición A y queremos predecir o queremos saber que pasa en B entonces ¿Qué conocen? Conocen A y conocen la variación

E2G3 **:** pero esa variación ¿Qué significa?

Profesora **:** pero B no lo conocen

E3G3 **:** a cuanto esta de distancia o

E1G3 **:** no, la distancia que uno en una para hacer la gráfica que era para hacer la ecuación uno lo partía del origen y el otro lo partía de la distancia que está acá

Profesora **:** por ejemplo en los gráficos que ustedes han hecho y en las relaciones algebraicas que han sacado deberían más o menos conectar que es la variación

E2G3 **:** si, es posición

Profesora **:** la idea es que ustedes saquen el, algún modelo o recurran a algunas cosas que puedan conocer y que digan se necesita esto más o menos para saber donde está B, porque en la figura AyB la posición de un móvil en tiempos distintos entonces aquí está el móvil, después está acá pero dice, de un móvil en tiempos diferentas, entonces está aquí y después en un minuto va estar acá si consideramos que un móvil se mueve, pero ¿Qué conocemos? Conocemos esto y la variación que tiene entonces hay que interpretar que es esa variación que se conoce y a raíz de esos datos ustedes pueden decir en ese sentido la idea es que ustedes construyan un modelo que pase, que pasaba en B y esta es la primera y la otra partimos con 2 y ahora damos un tercer punto entonces esta así ubicado y después están ubicados en forma distinta entonces la misma idea que ustedes construyan un modelo

E1G3 **:** tomo un delta x o no

E3G3 **:** ya pero ¿esa variación? ¿Qué va a ser? Tu dice que es de distancia

E1G3 **:** si

E3G3 **:** la variación es la distancia de A, a, B

E2G3 **:** y ese seria el tiempo y ese sería la velocidad

E1G3 **:** entonces ya, lo podemos poner como un, como en un plano cartesiano, porque esto no más te representa, pero igual pondría ser, distancia… es que esto como va ser tiempo porque igual es el mismo objeto no más que lo están poniendo en situaciones distintas, no es que

E2G3 **:** es que por lo dio a entender la “profe” es como si el objeto se estuviera moviendo en un principio está acá, después de un tiempo está ahí entonces eso es como después de un tiempo, primero está aquí a esa distancia de cómo el origen y pasado el tiempo está ahí

E3G3 **:** yo creo que esa variación podría ser tiempo, el tiempo que pasa para que el objeto llegue a B entonces no necesitaríamos saber la velocidad para saber la posición de B

E1G3 **:** seria como esto

E3G3 **:** como que

E2G3 **:** eso es lo que seria

E3G3 **:** mejor rallemos esta hoja

E1G3 **:** las siete de la tarde…

E1G3 **:** ya, a ver hay una posición, podríamos poner una posición final, posición inicial y se podría y después se puede tomar de nuevo como posición inicial y posición final ¿o no?

E3G3 **:** si, puede ser, pero piezazo así no necesitamos dar un número

E1G3 **:** necesitamos solamente dar unas lindas ecuaciones para ver la relación

E3G3 **:** entonces si decimos que la variación es el tiempo que le toma en ir desde A hasta B podemos decir que todo está en función de la velocidad que no conocemos , da lo mismo la velocidad que sea ,la rellenamos después en ecuaciones y nos va a dar la posición de B ¿cierto? Entonces es más fácil

E2G3 **:**: B es igual a A

E3G3 **:** es igual a A más

E1G3 **:** más un E más un tiempo

E2G3 **:** posición final igual a posición inicial más, desapareció si es tiempo

E3G3 **:** la variación seria T

E2G3 **:** B por cuanto le habíamos puesto a esto, esa variación la podemos sellar nueve por C

E3G3 **:** la variación dices tú que es C y es el tiempo, ¿eso?

E2G3 **:** y si conocemos esto, la velocidad se supone que es constante

E1G3 **:** y con C es la variación ¿o no?

E2G3	**:** claro conocemos C que es la variación la velocidad no la sabemos, la posición inicial es A la posición final es B que no lo conocemos
E1G3	**:** pero con el resultado de todo esto vamos a sacar, a claro
Profesora	**:** ¿se entendió?
E1G3	**:** a loco yo pensé…
E2G3	**:** lo que yo no entiendo es que si la variación de A a B es tiempo igual distancia
E3G3	**:** así es como si fuera en el tiempo, si fuera distancia hay que idear otro modelo sería
E1G3	**:** pero es que te dice, la posición de un móvil en tiempos diferentes ponte en el tiempo igual 2 y aquí en el tiempo igual 3, pero entonces ahí no nos serviría ese paso
E3G3	**:** pero puedes ocupar esa ecuación para ver eso, cachas porque, espérate, acá no es C
E2G3	**:** sería distancia es igual a V por T, pero tampoco
E3G3	**:** espera terminemos esto, acá no es C porque ese tiempo es el que le toma desde el inicio, desde esa posición inicial hasta B eso en ese tiempo, a OK
E2G3	**:** en ese caso estaría bien
E1G3	**:** entonces aquí si tomamos en cuenta que la variación de A es de distancia o sea de tiempo
E3G3	**:** y de la otra forma ¿Cómo seria?
E1G3	**:** la ecuación podría ser B igual a A
E2G3	**:** porque si es distancia, mira si es distancia esa variación con eso sólo tú ya conocías porque si conoces A y conoces la variación la variación en distancia B-A te tiene que dar C sea positivo o sea negativo
E1G3	**:** esto sería A más un C
E3G3	**:** no
E2G3	**:** C es igual a A+B B seria igual a C-A
E1G3	**:** posición final sería igual a la posición inicial
E3G3	**:** si, pero ¿Por qué estos están igualados? Más VC .Lo mismo que tienes abajo si esa es la posición final esa es la posición inicial eso si la variación estuviera en tiempo, bueno ya ¿Cómo seria si fuera en distancia?

E2G3 : es que si fuera distancia sería B es igual a C-A

E1G3 : si es por distancia es esta

E2G3 : no, si es por tiempo es esa

E1G3 : pero si es por distancia, por

E2G3 : suponiendo que ese C es la variación, variaron de A a B

E1G3 : velocidad es distancia partido tiempo y la velocidad partido distancia con respecto al tiempo que diga con respecto a la distancia m distancia es velocidad partido…tiempo ¿Cómo puede ser?

E2G3 : no, distancia es V por T, la distancia es la velocidad por el tiempo, no partido

E3G3 : que es tonto, que si esa variación fuera distancia

E2G3 : es que sería C-A

E3G3 : pero sería súper tonto si fuera distancia lo único que tendría que hacer es sumarle C nada más, por eso no, ¿Qué otra variación podría ser? Y si es una variación de velocidad y cuestiones acelerando

E1G3 : siento que más allá de ese espejo nos están observando enserio es como esa cuestión de los policías, hay que ir a reconocerlo…

E2G3 : nosotros necesitamos la velocidad para…y con la velocidad sacas todas porque ya tienes el tiempo

E3G3 : se supone que tu ya tienes el A y el C entonces necesitas puro B para poder saber, acá no los sumas y listo

E1G3 : ¿Qué otra variación podría ser? Esta es la actividad 1 cacha como hacer la actividad 4 van a hacer vectores así para todos lados

E2G3 : ¿Qué dice acá?

E3G3 : esto no tiene mucho sentido, sería muy tonto, ya aquí está B, la distancia de… aquí está, dice mide 2 ¿Dónde está B?

E1G3 : si pero yo creo que es más en esta

E2G3 : porque con cambio de velocidades ya es mucho más complicado

E3G3 : eso mismo estaba pensando como que ya mucho…que A y B son posiciones entonces relacionar las posiciones con los cambios de velocidades y el tiempo

E2G3 : que distancia es igual V por t, tú conoces eso y conoces la velocidad te falta el tiempo, no es tan complicado, supongo si es la variación de

E3G3 : pero de velocidad?

E2G3 **:** si conoces V y conoces T, no, no te sirve de nada porque si, esto tú lo vas a conocer si o si y esto no te va a influir el tiempo en dar en que posición está B si tú conoces A

E3G3 **:** y esa ecuación que es, ¿Cómo es la ecuación esa? Para la velocidad, velocidad final, velocidad inicial

E2G3 **:** al menos que tú conozcas esto, sea B-A que tú lo conoces porque es el C es igual a la velocidad, no po tú no lo conoces, pero tú conoces esto C por T entonces si fuera, si la variación fuera de tiempo sea no, si fuera distancia sería B-A

E3G3 **:** si fuera distancia?

E2G3 **:** no, velocidad , si la variación fuera velocidad , conoces A , conoces C te faltaría conocer el tiempo y con eso determinas V pero V seria igual

E3G3 **:** B y A ¿son posiciones?

E1G3 **:** si

E2G3 **:** B en este caso es V por T más , ese V si fuera cambio de velocidad

E3G3 **:** pero eso, puede ser la variación de la velocidad pero estoy pensando necesitas sacar la velocidad en la posición A , la velocidad en la posición B y la variación entre esas dos velocidades es C entonces nenecitas saber el tiempo, necesitas saber una de las dos velocidades , a la tienes ,la aceleración si es que hubiese , de hecho hay porque varia la velocidad a ya filo…ya dejemos esto así ¿sacamos esto o lo dejamos?

E1G3 **:** para que vea nuestro esfuerzo

E3G3 **:** suponga que se conoce A , la variación de A a B y la variación de B a C pero no B ni C construya un modelo que le permita predecir B y C

E1G3 **:** ya conocemos A

E3G3 **:** y conocemos

E1G3 **:** la variación de A a B entonces conocemos también B

E3G3 **:** no, no conocemos

E1G3 **:** pero suponiendo que se conoce A y la variación de A a B conocemos B

E3G3 **:** ¿tú dices aplicando la formula que tenemos antes?

E1G3 **:** no, sumando

E3G3 **:** no, no tomes esa variación como distancia a eso me refiero

E1G3 **:** y la variación de B a C

E3G3 **:** tenemos que predecir B y C predecirlos a parte ¿o no? primero B y después C

E1G3 **:**pero para estos dos gráficos, estos dos gráficos

E3G3 **:** no hay tanta diferencia entre estos dos gráficos

E2G3 **:**entonces vamos a suponer también…

E3G3 **:** ¿Qué es tiempo o es distancia? Porque si fuera distancia sería de sumar, el tiempo es más complicado o esa ni tanto podemos aplicar la anterior

E2G3 **:** claro

E3G3 **:** necesitamos saber la velocidad, pero no necesariamente es la misma velocidad ¿o si? No se si tomar estas figuras así como literales así como ahí está A…

E1G3 **:** sólo estamos trabajando con cambios de posiciones

E3G3 **:** ¿de posiciones o de tiempo?

E2G3 **:**no , pero estos son cambios de posiciones a través del tiempo

E1G3 **:** no me interesa la trayectoria que haya tenido

E2G3 **:**:por ejemplo velocidad de desplazamiento

E3G3 **:** ¿podemos suponer que la velocidad que llevaba de A a B es la misma que de B a C?

E2G3 **:** en este caso yo creo que si

E3G3 **:** ¿podemos suponer eso o no?

E2G3 **:** en este caso es **–**B es igual a **–**A, la velocidad de acá es la misma de acá pero en sentido inverso , suponer eso

E3G3 **:** ni siquiera

E2G3 **:** no pero mira

E3G3 porque acá si viéramos el dibujito, veámoslo así , no ni siquiera ¿cachas? Y acá es como así

E1G3 **:** no ahí tampoco

E2G3 **:** tampoco

E1G3 **:** y si tiras la recta ahí tampoco tendría tirar allá…

E3G3 **:** hagámoslo así mismo , digamos que , hagámoslo por parte

E2G3 **:** eso mismo estaba pensando yo

E3G3 **:** si vamos de A a B después llegamos de B a C, realmente hay que saber B para conocer C porque no hay una relación para eso

E1G3 **:** y se ocupa la misma fórmula

E3G3 **:** ocupemos la fórmula dos veces más tienes que conocer las velocidades de acá y de acá ya vamos , decimos que A.

E2G3 **:** o sea sería una función a trabes del tiempo

E3G3 **:** la velocidad por D , D sería la variación en el tiempo de

E1G3 **:** hay que poner eso

E2G3 **:** con T

E1G3 **:** y al tener B podría sacarse tratar de sacar esa

E1G3 **:** igual a B, A

E3G3 **:** ¿lo hago así no más?

E2G3 **:** si

E3G3 **:** y si tratamos de sacar C pero con A

E2G3 **:** yo lo hice así mira como definida por parte B sería igual a A más B y por D, para un tiempo menor que D o sea variación de tiempo menor que D, después llegamos a B que seria como en D y que sería para entre B y E+D ese sería B igual la velocidad 2 que es como el tiempo , el tiempo ahí

E3G3 **:** espérate ¿como sería?

E2G3 **:** B+ la velocidad 2 por E

E3G3 **:**:a no, si pero estaba cachando…este igual lo puedes escribir como…si, te está dando diferentes cosas acá estaba buscando si es …

E2G3 **:** a si, lo otro…es que se supone que la posición del mismo móvil pero en diferentes momentos que aquí le llamaron B y le llamaron C pero es el mismo móvil

E1G3 **:** ¿y no se sabe la variación de A a C?

E3G3 **:** no

E2G3 **:** si se puede saber

E3G3 **:** lo que pasa es que

E2G3 **:** pero seria como una compuesta, sería , de hecho en la pregunta 7 lo dice , recuerde la experiencia vivida en los casos anteriores , construya un modelo predictivo de la posición futura del móvil que ustedes conocen, la posición inicial de A la variación entre los puntos A y B y la variación de la variación obtener el punto C , ¿puede con esto predecir el punto D? si

E1G3 **:** eso aparece en la otra hoja

E3G3 **:**si

E2G3 **:** si

E1G3 **:**yo creo que hagamos el otro mejor

E3G3 **:**ya ¿Cómo sería acá?

E3G3 **:** ¿te tinca así o no pato?

E2G3 **:**¿Cómo? Si

E3G3 **:** se devuelve o algo así

E1G3 **:**aquí ya tienes una

E3G3 **:** la velocidad va como para el otro lado

E1G3 **:** en ésta

E2G3 **:** si lo ponemos como solamente números está bien si lo ponemos como que si esto te va a decir menos algo es que ese E es negativo

E3G3 **:** es que ese E es tiempo no puede ser negativo

E2G3 **:** pero el W si puede ser negativo , entonces te dan demás creo yo…

E3G3 **:** le ponemos más no más y le decimos que esa

E2G3 **:** que ese W…

E3G3 **:** ya llegamos al ultimo, con los casos anteriores construye un modelo predictivo de la posición futura del móvil si se conoce la posición…la variación de la variación , me perdí

E2G3 **:** conociendo la posición inicial de la primera, entonces sería X igual a A+vp no hemos usado ninguna de las 2 , las direcciones de los puntos A y B se lo colocamos como C sería X es igual

E3G3 **:** ¿Qué era X?

E2G3 **:** B en este caso porque la …llega hasta E no más A + C por , no B por C suponiendo que C es la variación entre los punto A y b y la variación de la variación obtenida en el punto C sería hacer la compuesta , sería

E3G3 **:**¿Cómo la variación de la variación?

E1G3 **:** ¿Cómo la variación de la variación?

E2G3 **:** llegando a, como a la variación de la primera …la otra que seria como llegar de aquí acá

E3G3 **:** variación de las variaciones

E1G3 **:** no se, ahí

E2G3 **:** o llamemos a la profe

E1G3 **:** a si ya se la haces si está viendo por la ventana , me están observando

E2G3 : profe tenemos una duda, dice acá variación de la variación te da el punto C ¿Qué quiere decir eso variación de la variación?

Profesora : cuando…una pregunta ¿Qué entendieron ustedes por variación?

E2G3 : tenemos como varios puntos de vista , estuvimos como una hora dando jugo

Profesora : bueno si yo estoy en un punto A y conozco su variación, no se ¿Cómo quieren llamarle? Variación no se ab y ahora yo conozco la variación de esa variación a eso se refiere la frase que me preguntaste

E2G3 : nosotros no sabíamos si interpretarla como una variación de donde esta uno, donde está otro o el tiempo en que está en un punto al otro

Profesora : por ejemplo, no se que hiciste en el puesto, a aquí está la respuesta, tú habías rallado algo acá porque ¿Qué entienden ustedes por variación?

E1G3 : el cambio de

Profesora : ya

E2G3 : pero no sabemos en función de que una variación de que una variación de tiempo una variación de distancia , una variación de velocidad esa es la duda

Profesora : a ya, si lo toman como variación de velocidad por ejemplo ¿cómo lo interpretan? Supongamos que estamos con variación e velocidad, esta frase estás diciendo que tú ya tienes una variación de velocidad y ahora tú vas a conocer la variación de esa variación de velocidad

E2G3 : o sea pensando un ejemplo , al principio era cuatro después era seis

Profesora : ahí hay una variación, después conoces la variación de esa variación que tú determinaste

E1G3 :y seria como el otro punto que seria el C

E2G3 :como el de aquí acá varió ahora va en otro

Profesora : claro, tú dices aquí de 4 a 6 tienes una variación , entonces nosotros estamos preguntando la variación de la variación para obtener el punto C

E2G3 : o sea de aquí a aquí cuanto cambió , gracias

E1G3 : entonces sería lo mismo

E2G3 :en ese caso seria hacer una compuesta porque con la primera llegamos hasta el punto B

E1G3 : no, hasta el C

E2G3 : es que por eso mira,

E3G3 **:** a lo mejor nos estando la relación entre D y E

E2G3 **:** ¿Cómo llegar de A a C?

E3G3 **:** tenemos D y nos falta E, no tenemos eso

E2G3 **:** no, tenemos esto y tenemos esto pero no tenemos esto

E3G3 **:** en el fondo tenemos esta y nos falta esa, pero nos dan la variación entre esas dos lo mismo que antes con A y B

E1G3 **:** te dan D y es como que te dieran C , como donde llegó hasta acá

E2G3 **:** yo lo veo así

E3G3 **:** mira imagínate que acá se demora 2 segundos desde acá ,acá se demora 3 por eso C es distinto de este otro , no te están diciendo que este vale 3 te están diciendo que este vale uno más que este ¿cachas? La variación…entonces si sabemos la variación

E2G3 **:** si sabemos esa, esa es la variación entonces sería como W, D+W

E3G3 **:** acá podemos escribir está en función de D… ¿o no? Acá lo que quieren es que hagamos un modelo resolviendo sólo eso o resolviendo sólo eso, ¿así? O todas las cosas de una

E2G3 **:** recuerde una experiencia en uno de los casos que usted construye un modelo productivo en relación, si usted conoce

E1G3 **:** no, es un modelo

E3G3 **:** un modelo para eso

E2G3 **:** un modelo para cada uno, porque dice si usted conoce la posición inicial del móvil A si usted conoce la variación entre los puntos A y B y si usted conoce…

E3G3 **:** profe

E1G3 **:** profe

E3G3 **:** acá

E1G3 **:** es para cada uno o tomando en cuenta

E3G3 **:** ¿un solo modelo o?

Profesora **:** leo: de acuerdo a la experiencia obtenida en los casos anteriores, construya un modelo predictivo de la posición futura del móvil si usted conoce, todas esas cosas las conoce

E3G3 **:** ya, vamos , ay que entrete ya entendí, ya conocemos la posición de A conocemos la velocidad entre esos dos ,conocemos la variación de eso, obvio

E2G3 **:** eso seria A o C es igual a A

E3G3 **:** ¿C?

E2G3 **:** así la veo yo

E3G3 **:** ya, tenemos la variación de la variación , digamos que la variación entre lo punto A y B es un numero para que…la variación de la variación va a ser…ya ¿Cómo obtenemos un punto x cualquiera ahí ,c?

E1G3 **:** ¿como lo veías tu pato?

E3G3 **:** es la posición inicial más la velocidad que hay, imagínate que este fuera B

E1G3 **:** la velocidad por E

E3G3 **:** seria la velocidad por E eso no s va a dar B

E1G3 **:** más la otra velocidad

E3G3 **:** y B más claro, la otra velocidad y la otra velocidad la determinamos, no pero entonces la misma velocidad

E1G3 **:** de cualquiera, la misma

E3G3 **:** puede ser la misma velocidad, como si fuera constante

E2G3 **:** yo lo veo así mira, C es igual a A+B por D +W que seria la otra velocidad por D más su , la variación de la variación que sería

E3G3 **:** ¿así dices tú?

E2G3 **:** ya pero no le coloques más 2 porque después ya se puede con este predecir D

E3G3 **:** no era B tampoco era F entonces le sumamos está variación a está variación y nos da la nueva variación y lo multiplicas por esa nueva velocidad que puede ser igual a esto también, entonces la dejamos así, ahora tenemos que ver cada cosa…o que cuatico

E1G3 **:** era obtener puntos

E3G3 **:** lo que pasa es que imagínate está variación ya, cuando tenemos esto así está A , B C ,acá está el tiempo esta va ser F más Y entonces va a ser F más 2 Y ¿o no? ¿Puede ser eso o no?

E2G3 **:** ¿Qué cosa?

E3G3 **:** que acá son 2 segundos después el tiempo varió a 3 y después el tiempo va a variar 3+1 , 4 ¿se puede decir que esa variación va a ser constante? Que siempre se va a sumar uno, como para poder determinar D

E2G3 **:** es mejor explicar que si es así, se puede determinar D

E3G3 **:** si esa variación de ahí es constante

E2G3 **:** o también puede ser que D esté dentro de esto , que D esté entre A y C y en ese punto también se puede encontrar

E3G3 **:** estamos dependiendo de la velocidad , si la velocidad fuera negativa quedaría acá B, que más tenemos

E1G3 **:** claro, la velocidad, entonces supongamos que en cada intervalo va a aumentar un mínimo

E3G3 **:** claro o va a desminuir

E1G3 **:** yo sigo sin entender algo, el gráfico que hiciste ¿te acuerdas del gráfico que hiciste recién?

E3G3 **:**si

E1G3 **:** quiero entender algo ¿Por qué el móvil va a aumentar en una unidad solamente.

E3G3 **:** no, en una unidad representa una variación

E2G3 **:** por ejemplo la variación entre Ay b eran 4 segundos y este mío son dos segundos entonces entre B y C van a ser 6 entre C y D van a ser otro

E1G3 **:** a claro se le va aumentando

E2G3 **:** cachas eso es lo que está escrito ahí

E3G3 **:** ¿se entenderá? Igual quiero hacerle como un dibujito así como, ya ¿y?

E2G3 **:** y lo otro es que D esté entre los puntos A y C

E3G3 **:** ¿Cómo? Entonces tú dices que la velocidad

E2G3 **:** :no necesariamente que B venga de , sino que incluso dentro del tiempo B, A y C

E3G3 **:** ah, OK es que igual

E2G3 **:** si B está entre , entre el T subcero y entre el T subefe más niu se puede conocer porque cae dentro de esta ecuación, porque V por F es velocidad por tiempo y este F +U también es tiempo, entonces si está entre cero que es la posición inicial y entre F+ miú sería como el tiempo final donde hasta nosotros nos hemos tomado, si está entre eso tu lo puedes encontrar

E3G3 **:** ya pero entonces ¿Cómo predecimos B? tú dices que B está

E1G3 **:** no, pero si estuviera ahí podría ser

E3G3 **:** pero así como…así como B

E2G3 **:** claro

E3G3 **:**entonces tienes que conocer la variación de acá no más

E2G3 **:** :no, mientras esto se comporte dentro de estos dos

E3G3 **:** este está ahí

E2G3 **:** y ahora está ahí…

E3G3 **:** pero ¿Cómo lo determinarías tendrías que igual tienes que conocer eso? Es lo único que necesitas conocer porque esa velocidad se supone que a la tienes, pero necesitas el segundo el tiempo para determinar la ecuación, entonces necesitas ese tiempo o la relación con la variación de tiempo acá, si la variación de tiempo acá fue F y que D esta en F/2, ¿lo pongo así?

E2G3 **:** si, se supone que quieres conocer a F, se puede conocer el valor, o sea la ubicación de B si es que eh…el tiempo en el que se toma B está entre cero y F+miu, eso porque si es más que F tienes que remplazarlo en esta fórmula y si es menos que F la dejas hasta aquí no más

E1G3 **:** tienes toda la razón

E3G3 **:** si fuera F….

E2G3 **:** si

Profesora **:** muchas gracias ¿Cómo se sintieron?

E2G3 **:** bien

ANEXO 3: ACTIVIDAD REALIZADA A LOS ALUMNOS DEL MAGISTER EN DIDACTICA DE LA MATEMATICA.

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Seminario de Graduación

4 / 4 / 08

Para trabajar

Teniendo en cuenta la lectura referente a la "Socioepistemología de la predicción" queremos invitarlos a realizar la siguiente actividad

Actividad

Considere la siguiente tabla

x	y
0	1
1	3
2	5
3	3
4	1
5	3
6	5
7	3
8	1
9	

Se pregunta:

1. Prediga el valor de y :
   a) cuando x es igual a 9
   b) cuando x es igual a 42
2. Describa la manera en que llega a una respuesta.
   Considere lo siguiente: si $x \in Z$, qué pasa con $f(x)$