INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN
CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

El desarrollo de un pensamiento deductivo en el Bachillerato Diversificado en un ambiente de Geometría Dinámica

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Luis Mario Dalcín Oliveira

Director de Tesis: **M. en C. Ángel Homero Flores Samaniego**
Codirector de Tesis: **Dr. Apolo Castañeda Alonso**

México, D.F. a Febrero de 2006.

SIP-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 26 del mes de enero del 2006 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"El desarrollo de un pensamiento deductivo en el Diversificado en un ambiente de Geometría Dinámica."

Presentada por el alumno:

Dalcín	Oliveira	Luis Mario
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	1	0	6	7	4

aspirante al grado de:

Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

M. en C. Homero Flores Samaniego

Codirector

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Cienci
Aplicada y Tecnología Avanzad
del Instituto Politécnico Naciona

Dr. Gustavo Martínez Sierra

Dra. Claudia Margarita Acuña

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de __México___ día _26__del mes__enero_____ año ___2006_____, el (la) que suscribe__Luis Mario Dalcín Oliveira____________________________________ alumno (a) del Programa de_Maestría en Ciencias en Matemática Educativa_____________con número de registro __A010674__, adscrito al _Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada __________, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de _M. en C. Homero Flores Samaniego_____ y cede los derechos del trabajo intitulado _"El desarrollo de un pensamiento deductivo en el Diversificado en un ambiente de geometría dinámica"__________________________, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección __filomate@adinet.com.uy_________________. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

____

Luis Mario Dalcín Oliveira

Nombre y firma

Admitir el debate como forma de encauzar la búsqueda de la verdad implica partir de dos supuestos: primero, que hay una verdad y, segundo, que nadie puede tener un acceso privilegiado a ella. Esto es así porque, si no hubiera una verdad, el debate carecería de sentido; pero, por otro lado, si hubiera algún tipo de acceso directo a ella, ese debate sería innecesario. No habiendo un acceso directo (ni los sentidos ni la razón por si mismos), la forma de decidir cuál es la verdad es mediante el debate, en el acuerdo con otros, donde prime la coacción sin coacciones del mejor argumento.

Índice

Glosario

Educación Media Superior: Se refiere a los últimos tres años, de un total de seis, de la enseñanza media en Uruguay. Comprende el Bachillerato Tecnológico (Consejo de Enseñanza Técnico Profesional) y el Bachillerato Diversificado (Consejo de Enseñanza Secundaria) y corresponde al 10º, 11º y 12º años de escolarización.

Bachillerato Diversificado: Se refiere a los tres últimos años de la enseñanza secundaria en Uruguay. El primer año es común, el segundo año está organizado en tres Orientaciones y cada una de estas Orientaciones abre la posibilidad a dos Opciones en el tercer año, cada una de las cuales habilita el ingreso a diferentes Facultades. Abarca la franja de edades que van de los 16 a los 18 años aproximadamente.

Demostración en las matemáticas escolares: según Godino y Batanero (1994) hay distintos objetos demostración según el contexto institucional en el que se den. La institución considerada en nuestro caso es la de las matemáticas escolares y nuestro objeto de estudio es la demostración entendida como un objeto matemático que es un emergente de un sistema de prácticas argumentativas significativas dentro de la matemática, puestas en juego por los estudiantes o el profesor, en situaciones donde deben validar una conjetura (en nuestro caso geométrica), mediante un razonamiento deductivo, en el salón de clase. Argumentar es ofrecer un conjunto de razones en apoyo de una conclusión, los argumentos son intentos de apoyar ciertas opiniones con razones.

Esquema de demostración de una persona: concepto usado por Sowder y Harel (1998) para referirse a lo que constituye el autoconvencimiento y la persuasión para esa persona.

Prueba: Balacheff (1998, 2000a) usa esta noción para designar una explicación cuyo fin es establecer la veracidad de un enunciado y que es reconocida y aceptada por un colectivo. Ésta puede evolucionar o cambiar con el tiempo y puede ser aceptada por un colectivo y no por otro.

Niveles de van Hiele de pensamiento geométrico: según la teoría de los van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1991, 1996; De Villiers, 1999) el pensamiento geométrico de los estudiantes pasa por cinco niveles de razonamiento. Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje para comunicarse y un significado específico del vocabulario matemático.

Relación de cuadros, tablas y figuras

El desarrollo de un pensamiento deductivo en el Bachillerato Diversificado en un ambiente de Geometría Dinámica

Resumen

Con el fin de ir construyendo los fundamentos de una propuesta de enseñanza para alumnos que contribuya al logro de los fines de la Enseñanza Media Superior en el Uruguay, presentamos un estudio sobre la enseñanza de la demostración, en torno al trabajo en un ambiente de Geometría Dinámica.

Nos planteamos como objetivo para el presente trabajo investigar de qué manera afecta la Geometría Dinámica la producción de un razonamiento deductivo en estudiantes de Bachillerato Diversificado que trabajan en la formulación y la validación de conjeturas referidas a actividades de geometría en el salón de clase.

Para ello propusimos una secuencia de actividades a dos grupos de estudiantes (que trabajaron en parejas) de 2º año de Bachillerato Diversificado, Orientación Científica (16–17 años), del Uruguay, en sus cursos curriculares de geometría, uno de los cuales trabaja en un ambiente de Geometría Dinámica y el otro con lápiz y papel. Esto se hizo con el objetivo de analizar sus respectivas producciones y comparar su desempeño.

Los resultados se analizaron de acuerdo con los esquemas de demostración de Sowder y Harel (1998), con los tipos de prueba propuestos por Balacheff (1998, 2000a), y con los niveles de pensamiento geométrico de van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1991, 1996; De Villiers, 1999).

Development of deductive thinking in *Bachillerato Diversificado* students within a Dynamic Geometry environment

Abstract

The aim of this study on the teaching of proof about the work in a Dynamic Geometry environment is to build the foundations of a teaching proposal that will help in the achieving of the goals in Upper Middle School level (High School) in Uruguay.

The objective of this work is to investigate how the Dynamic Geometry affects the production of a deductive reasoning in students of Diversified High School when they face the posing and validation of geometry activities in classroom.

For that purpose we posed a series of geometry activities to two groups of students (working in pairs) of 2º year of Diversified High school, Scientific Orientation (16-17 years), as part of they regular geometry class. One of the groups worked in a Dynamic Geometry environment and the other one with pencil and paper. This with the objective of analyze their respective productions and compare their performances.

The results are analyzed according to Sowder and Harel (1998) proof schemes, to the types of tests proposed by Balacheff (1998, 2000a), and to the van Hiele geometric thinking levels (Gutierrez and Jaime 1991, 1996; De Villiers 1999).

1. Introducción

La demostración ha sido considerada tradicionalmente como herramienta para verificar afirmaciones matemáticas y de esta manera establecer su validez universal. Ésta es la razón principal de su inclusión en el currículum, además de servir como medio de enseñar el razonamiento deductivo. Su presencia en la enseñanza, hasta este momento, responde a necesidades internas de la matemática, de esta manera el énfasis está puesto en los aspectos formales y no fundamentalmente en las condiciones de su aprendizaje por parte de los estudiantes.

El fracaso en la enseñanza de la demostración, a la manera de la nueva Matemática por ejemplo, el reconocimiento de que la actividad de demostrar debe tener en cuenta los motivos de los propios estudiantes y la aparición de programas computacionales de Geometría Dinámica (GD) han llevado a buscar alternativas para su enseñanza y su aprendizaje. (Hadas, Hershkowitz y Schwarz, 2000, pág. 127)

Hoy en día, los *Standards and Principles for School Mathematics* (NCTM, 2000) promueven "aprender a razonar y construir demostraciones como parte de la comprensión matemática para que todos los estudiantes

- reconozcan los razonamientos y las demostraciones como partes esenciales y poderosas de las matemáticas;
- hagan e investiguen conjeturas matemáticas;
- desarrollen y evalúen argumentos matemáticos y demostraciones;
- seleccionen y usen varios tipos de razonamiento y métodos de demostración."

En esta nueva concepción, como lo veremos más adelante, la demostración juega un papel más amplio que el de justificar teoremas. Aquí los aspectos sintácticos ya no son relevantes y sí importan los significados que se le asignan a los argumentos por parte de los estudiantes. Se hace así necesario saber cuáles son las formas en que éstos entienden lo que es una demostración y es en ese sentido que se presentan los trabajos de Sowder y Harel (1998) y de Balacheff (1998, 2000a). También se hace necesario disponer de herramientas que nos permitan entender las peculiaridades del proceder de los estudiantes cuando trabajan en geometría: recurrimos al modelo de pensamiento geométrico de van Hiele; y en particular cuando lo hacen en un ambiente de GD.

1.1 Justificación del trabajo

La enseñanza de la demostración en general y de la demostración geométrica en particular ha sido objeto de numerosos estudios a nivel internacional (así lo atestiguan, entre otros, el *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, página Web mantenida por Balacheff desde 1997; el grupo de trabajo en torno a la demostración creado a partir de ICME 8 (1996) y la inclusión de la demostración como tópico independiente en los *Standards and Principles for School Mathematics* (NCTM, 2000)). Esta preocupación creciente ha sido motivada por tres razones fundamentales: el fracaso en la enseñanza de la demostración, el reconocimiento de que la actividad de demostrar debe tener en cuenta los motivos de los propios estudiantes, y por la aparición de programas computacionales de Geometría Dinámica. (Hadas, Hershkowitz y Schwarz, 2000, pág. 127)

De acuerdo con los fines de la Educación Media Superior[1] (EMS) de Uruguay (Comisión TEMS, 2002) ésta debe posibilitar que los estudiantes puedan:

- ✓ desarrollar las competencias para seguir aprendiendo en niveles superiores;
- ✓ tomar decisiones en situaciones nuevas e imprevistas;
- ✓ ser capaces de enmarcar y orientar los conocimientos, producciones y decisiones en valores universales consensuados socialmente;
- ✓ estimular y desarrollar la capacidad de crear e innovar, a los efectos de hacerlo competente para promover sus propios aportes a la sociedad y a la cultura.

Para hacer posible estas intenciones se propone que al terminar la EMS el estudiante logre (entre otras cosas):

[1] Se refiere a los últimos tres años, de un total de seis, de la enseñanza media. Comprende el Bachillerato Tecnológico (Consejo de Enseñanza Técnico Profesional) y el Bachillerato Diversificado (Consejo de Enseñanza Secundaria) y corresponde a los 10º, 11º y 12º años de escolarización.

- ✓ Un desarrollo y profundización de la autonomía intelectual, el pensamiento crítico y la capacidad de problematización.
- ✓ Una alfabetización matemática que le permita:
  - Utilizar la matemática –sus conceptos y procedimientos– en la resolución de problemas de la vida y de otras disciplinas;
  - Desarrollar y poner en acción su capacidad de análisis de situaciones-problema y razonar adecuadamente en busca de soluciones apelando a modelos matemáticos;
  - Comprender y utilizar el lenguaje matemático (comunicación matemática), y
  - Desarrollar el gusto y el placer por la matemática como ciencia y como herramienta.
- ✓ Un desarrollo y profundización de las competencias científicas para que pueda:
  - Interpretar y comunicarse a través de códigos verbales y no verbales relacionados con el conocimiento científico;
  - Conocer y aplicar estrategias propias del método científico.

El Bachillerato Diversificado (BD) tiene un primer año común, un segundo año organizado en tres Orientaciones: Humanística, Biológica, Científica, y cada una de estas Orientaciones abre la posibilidad a dos Opciones en el tercer año (ver cuadro), cada una de las cuales habilita el ingreso a una Facultad.

La carga horaria de matemáticas varía según la Orientación o la Opción (ver cuadro). La Orientación Científica, donde desarrollamos la experiencia, tiene un curso de Geometría Euclidiana y uno de Álgebra de 6 horas semanales (de 40 minutos) cada uno separadas en 4 horas teóricas y 2 prácticas. Cada uno de estos cursos se aprueba mediante un examen final, pudiendo exonerarse la parte teórica por actuación en el año (con 7 o más en 12).

1º	**2º** Orientación:	**3º** Opción:
Común (4)	Científica (12)	Ingeniería (16)
		Arquitectura (6)
	Biológica (5)	Medicina (5)
		Agronomía (5)
	Humanística (5)	Economía (11)
		Derecho (0)

La práctica de la enseñanza de la matemática en BD ¿contribuye a las metas que se plantean para la EMS? Veamos cuál es esta práctica en tres niveles: curricular, el de los libros de texto y el del salón de clase.

Si atendemos a los programas propuestos en Uruguay, que no son más que un listado de contenidos, encontramos una fuerte tendencia a presentar una matemática axiomatizada, donde la demostración es entendida como demostración formal. A modo de ejemplo, el tema que más aparece en los distintos programas de BD es la axiomática de números reales (Wschebor, 2001, pág. 11), aunque el modelo por excelencia de sistema axiomático lo encontramos en la geometría métrica (2º año de BD, Orientación Científica).

Los textos usados en BD y en especial los de geometría también tienen una fuerte preocupación por la axiomática. A fines de los 80 e inicios de la década siguiente se produjo una crítica a la construcción axiomática de la Geometría Euclidiana, como la del *Curso de Geometría Métrica Tomo 1: Fundamentos* de Pedro Puig Adam (edición original de 1947), que se venía usando, por considerar que estos enfoques aíslan la Geometría Euclidiana del resto de la matemática, pero sin abandonar la propuesta de construir la matemática a partir de axiomas. “Hemos decidido evitar los Sistemas Axiomáticos Clásicos para la Geometría Euclidiana. Entre los argumentos que justifican tal decisión, señalamos que se prefirió un paquete de axiomas más fuertes, que reafirmen conceptos centrales de la Matemática (conjunto, clases de equivalencia, orden, funciones, transformaciones, etc.), que agilicen los desarrollos, entre los que se destaca el Axioma Métrico que motiva la introducción rápida del Número Real”, nos dicen los autores, docentes de renombre a nivel nacional, de las *Guías de Geometría*

(Casella et al., 1992, pág. 2). Es clara la influencia de la llamada Matemática Moderna[2] en estos cambios y llamativo el retraso con que llegan dichos cambios a los textos de geometría del Uruguay.

¿Cuál es la dinámica en un salón de clases? Los cursos están divididos en clases teóricas y prácticas. En las primeras el docente, en forma expositiva, desarrolla la teoría siguiendo la secuencia: axioma, definición, teorema –demostración–, definición, teorema –demostración– ... En esta dinámica se entienden las demostraciones como un encadenamiento meramente lógico de conclusiones en el marco de un sistema axiomático. En las clases prácticas el estudiante debe intentar resolver un listado de ejercicios que son aplicación directa de los teoremas demostrados en las clases teóricas. El docente resuelve algún ejercicio que será tomado como modelo a seguir por los estudiantes: nuevamente las justificaciones por parte del estudiante son reproducciones de las del docente.

Como dice Recio (2001, pág. 17) "El profesor muestra, de modo sistemático, la prueba de todos los resultados que enuncia, porque considera que el análisis y comprensión de las mismas por los alumnos es una fuente insustituible de entrenamiento en las formas peculiares de razonar y de usar los hechos básicos de la teoría que explica". El profesor demuestra hechos matemáticos durante la mayor parte del tiempo de clase y se espera que los estudiantes aprendan este proceso observando al profesor. De esta manera, las demostraciones le son impuestas al estudiante basándose en dos supuestos: su valor propedéutico para estudios posteriores y porque el ver demostrar, de manera gradual, desarrollará en el estudiante la capacidad de hacer demostraciones y por ende de razonar. Pero este segundo supuesto es cuestionable ya que según Hanna (citado en Recio, 2001, pág. 9*):* "Ninguna investigación convincente ha confirmado la hipótesis de que una dedicación a las demostraciones matemáticas haya resultado en una

[2] Por Matemática Moderna hacemos referencia aquí a la reforma que se originó en Estados Unidos y Europa a inicios de la década del 60 y que implicó grandes cambios en los contenidos matemáticos a enseñar en la enseñanza preuniversitaria, a saber: introducción de la teoría de conjuntos, simbolismo moderno, erradicación de la geometría euclidiana, introducción de las estructuras algebraicas y de sistemas axiomáticos, espacios vectoriales, entre otros. En cuanto a la demostración en el ámbito escolar, la Matemática Moderna promovía una concepción con un fuerte carácter formalista.

transferencia de este aprendizaje en forma de capacidades para aplicar hábitos de raciocinio en otras áreas del currículum".

¿Cuáles son los resultados obtenidos con esta enseñanza? Van en el mismo sentido de lo dicho por Hanna (párrafo anterior), como se evidencia en las conclusiones de la prueba de matemática aplicada a grupos de 3er año del BD por la CEPAL con un doble objetivo: "...identificar los conocimientos matemáticos efectivamente incorporados por los estudiantes a lo largo de casi doce años de educación formal y ...captar la capacidad de razonamiento adquirida en tal período de escolarización." (Rama et al., 1994, pág. 81); en tales conclusiones nos informan que: "...con el criterio estricto manejado en estándares internacionales (60% del puntaje) sólo 1 de cada 15 estudiantes aprobaría la prueba y con un criterio más benévolo (41% al 60%) lo haría 1 de cada 5"... "1 de cada 3 estudiantes logra menos de 5 puntos. Dicho de otra forma, su rendimiento no le permite a ese estudiante alcanzar el décimo del puntaje de la prueba. En este sentido, poco importa cuál sea la orientación de los estudios en este resultado, ya que con los ejercicios de lógica o de uso social –que sólo reclaman conocimientos aritméticos básicos– un estudiante podría lograr 24 puntos." (Íbidem, pág. 83)

Resulta claro, entonces, que la enseñanza de la demostración presente en los programas, los textos y el salón de clase no aportan a la formación del estudiante en el sentido esperado.

Surge así la necesidad de pensar en alternativas donde la enseñanza de la matemática contribuya efectivamente a los fines que se plantea la EMS.

1.2 Objetivo

Con el fin de ir construyendo los fundamentos de una propuesta de cambio curricular y de enseñanza para alumnos que contribuya al logro de los fines de la EMS en el Uruguay, nos

planteamos como objetivo del presente trabajo responder la siguiente pregunta de investigación:

> **¿Cómo afecta la Geometría Dinámica la producción de un razonamiento deductivo en estudiantes de Bachillerato Diversificado**

que trabajan en la formulación y validación de conjeturas referidas a actividades geométricas en el salón de clase?

Para ello propusimos una secuencia de actividades a dos grupos de estudiantes (que trabajaron en parejas) de 2º año de Bachillerato Diversificado, Orientación Científica (16–17 años), del Uruguay, en sus cursos curriculares de geometría, uno de los cuales trabajó en un ambiente de Geometría Dinámica y el otro con lápiz y papel. Esto se hizo con el objetivo de analizar sus respectivas producciones y establecer puntos de encuentro y desencuentro entre las mismas.

2. Marco teórico

Asumimos en este trabajo la teoría semántica de Godino y Batanero (1994) en la que el conocimiento matemático se da en dos niveles: institucional y personal.

Por *práctica personal* se entiende a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizar a otros contextos y problemas. Dicha *práctica personal es significativa* si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo. Un *objeto personal* es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas.

Una *institución* está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen. Un *objeto institucional* es un emergente de un sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas.

Según los autores, en un mismo campo de problemas que en una institución ha dado lugar a un objeto institucional con determinado significado, en una persona puede dar lugar a un objeto personal con significado no idéntico al institucional. La intersección de estos dos sistemas de prácticas es lo que desde el punto de vista de la institución se consideran manifestaciones correctas, esto es, lo que la persona ‘conoce’ o ‘comprende’ del objeto desde el punto de vista de la institución. El resto de prácticas serían consideradas ‘erróneas’ desde el punto de vista de la institución.

La institución considerada en nuestro caso es la de las matemáticas escolares y nuestro objeto de estudio es la demostración entendida como el objeto matemático emergente de los argumentos significativos puestos en juego por los estudiantes, en situaciones donde deben validar conjeturas previamente formuladas en torno a actividades de geometría en el salón de clase.

En esta alternativa, la demostración jugaría un papel importante en la consecución de los fines de la EMS en nuestro país. Para ello es necesario concebir la demostración no de una manera rígida, absoluta y referida a una matemática axiomatizada sino en el marco más amplio de las prácticas argumentativas significativas y por tanto aceptar que hay distintos objetos sujetos a demostración según el contexto institucional en el que se den: fundamentos de la matemática, matemática profesional, matemáticas de la vida cotidiana, ciencias experimentales, matemáticas escolares.[3] (Godino y Recio, 1997)

Que un estudiante haga uso de un razonamiento deductivo para validar una afirmación matemática es la meta a alcanzar, pero coincidimos con la concepción que aparece en los Estándares en que el recorrido bien puede iniciarse en los primeros años escolares. Los Estándares plantean para los primeros años de Enseñanza Primaria (ciclo P-4) que "Durante estos años, el razonamiento matemático debe incluir todo tipo de pensamiento informal, conjeturas y validaciones que ayuden a los niños a darse cuenta de que las matemáticas tienen sentido."[4] (pág. 28) Para los últimos años de Enseñanza Primaria y los primeros de Enseñanza Secundaria (ciclo 5-8) plantean como objetivo un tipo de razonamiento fundamentado en lo concreto, en métodos inductivos y en formas deductivas elementales.[5] Para los últimos años de Enseñanza Secundaria y

[3] En los fundamentos de la matemática la veracidad de un teorema se basa en la validez de las reglas lógicas usadas en la demostración, el teorema aparece como una consecuencia lógica y necesaria de las premisas de que parte mediante la correspondiente inferencia deductiva. Un teorema aceptado como verdadero tiene validez universal e intemporal garantizada por la validez de las reglas usadas en la demostración.

En las matemáticas profesionales las demostraciones son deductivas pero no formales, se expresan mediante el lenguaje ordinario completado con el uso de expresiones simbólicas. No hay un estándar del grado de rigor y sistematización que se le debe exigir a una demostración.

En la vida cotidiana muchas veces basamos nuestras conclusiones en razonamientos inductivos o analógicos (lo que es verdadero algunas veces lo será siempre en circunstancias semejantes).

En las ciencias experimentales la validez de un enunciado no es absoluto y universal, se incrementa a medida que se observan más hechos que se ajusten al enunciado, y que no se cumpla en algunas situaciones no invalida completamente el enunciado.

[4] En los niveles P-4, el estudio de las matemáticas debe hacer hincapié en el razonamiento, para que los estudiantes sean capaces de: llegar a conclusiones lógicas en matemáticas; usar modelos, hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar sus ideas; justificar sus respuestas y sus modelos resolutivos; hacer uso de sus estructuras conceptuales y conexiones para analizar situaciones matemáticas; creer en el significado de las matemáticas.

[5] En los niveles 5-8, el razonamiento debe impregnar todo el currículo de matemáticas para que los estudiantes sean capaces de: reconocer y aplicar razonamientos deductivos e inductivos; entender y aplicar procesos de razonamiento; hacer y evaluar conjeturas y argumentos matemáticos; dar validez a sus propias ideas; apreciar la utilidad y la potencia que tiene en toda situación el razonamiento como parte de las matemáticas.

Bachillerato (ciclo 9-12) –lo que nos interesa aquí– plantean que "a medida que los contenidos van siendo más profundos y complejos, debe mantenerse el énfasis en la interacción que se da entre la formulación de hipótesis y el razonamiento inductivo, y en la importancia de la verificación deductiva."[6] (pág. 148)

Debemos tener presente que lograr el dominio de la demostración por parte de los estudiantes es un proceso prolongado que irá tomando distintas formas a lo largo del trayecto escolar.

Según Balacheff (2000a), en la enseñanza tradicional la veracidad de un enunciado que se debe demostrar no se cuestiona, la demostración cumple centralmente una función evaluadora del aprendizaje que el estudiante ha logrado. Las demostraciones son hechas a solicitud del profesor que es quien evalúa, de ahí que el principal recurso del estudiante sea tratar de reproducir o imitar las demostraciones expuestas por el profesor o que aparecen en el libro de texto. En esa dinámica difícilmente los estudiantes puedan ir construyendo significados de la actividad de demostrar.

Si reconocemos que los procesos de validación que se ponen en juego en enseñanza primaria son diferentes de los puestos en juego en la enseñanza media y estos a su vez distintos de los del Bachillerato, "es necesario tomar en consideración la racionalidad de los alumnos y las condiciones de su evolución." (Balacheff, 1987, citado en Godino y Recio, 2001, pág. 412)

Balacheff concibe ***prueba*** como una explicación cuyo fin es establecer la veracidad de un enunciado y que es reconocida y aceptada por un colectivo. Ésta puede evolucionar o cambiar con el tiempo y puede ser aceptada por un colectivo y no por otro.

Demostración es una prueba con una forma particular: es una sucesión de enunciados cada uno de los cuales es, o bien una definición, axioma o teorema, o bien es derivado deductivamente de los enunciados mencionados.

---

[6] En los niveles 9-12, el currículo de matemáticas debe incluir experiencias numerosas y variadas que refuercen y amplíen las destrezas de razonamiento lógico para que todos los estudiantes sean capaces de: elaborar y comprobar conjeturas; formular contraejemplos; seguir argumentos lógicos; juzgar la validez de un argumento; construir argumentos sencillos válidos.

Así como la demostración es el proceso deductivo de validación en la matemática y cumple una función de comunicación entre los matemáticos, la prueba es el proceso de validación –mediante una explicación no necesariamente deductiva- que elabora y acuerda un colectivo de estudiantes frente a una conjetura en el salón de clase.

"Crear las condiciones que permitan restaurar dentro del aprendizaje en situación escolar el significado original de la demostración es una cuestión importante para la didáctica de las matemáticas. Pensamos que uno de los medios para lograrlo consiste concretamente en **situar de nuevo la demostración en una práctica social, en un debate en el que esté en juego el valor de verdad de una aserción**. **Para esto es necesario que los partenaires se pongan de acuerdo sobre las reglas del debate, es decir, sobre la construcción y aceptación de un sistema común de validación. Pensamos que, una vez colocados en este tipo de situación, los alumnos podrán más fácilmente reconstruir y apropiarse del sistema de validación específico de las matemáticas**." (Balacheff y Laborde, 1998, págs. 268-269)

Balacheff propone **estudiar la demostración desde el punto de vista de las prácticas matemáticas de los estudiantes en el salón de clase** y no desde el punto de vista lógico, **centrando la atención "en cómo llegan los estudiantes a la convicción de la validez de la solución propuesta**."[7] (1998, pág. 216).

Así pues, **en la institución de las matemáticas escolares** nos ceñiremos a la siguiente definición de demostración:

> **Demostración es un objeto matemático que es un emergente de un sistema de prácticas argumentativas significativas dentro de la matemática, puestas en juego por los estudiantes o el profesor, en situaciones donde deben validar una conjetura, mediante un razonamiento deductivo, en el salón de clase. Argumentar es ofrecer un conjunto de razones en apoyo de una conclusión, los argumentos son intentos de apoyar ciertas opiniones con razones.**

[7] Sobre esto volveremos en la sección 2.2.

En esta perspectiva la intención no es transmitir conocimientos matemáticos ya establecidos a ser repetidos por los estudiantes sino de enfrentar a los estudiantes a situaciones donde tengan que razonar –entendiendo el razonamiento como la actividad intelectual, la mayor parte del tiempo no explícita, de manipulación de informaciones para producir nuevas informaciones a partir de datos (Balacheff, 2000a, pág. 13)– y cuestionarse sobre la construcción de los mismos.

Como dice Juan de Mairena (citado en Morin, 1999, pág. 23) “La finalidad de nuestra escuela es enseñar a repensar el pensamiento, a des-saber lo sabido y a dudar de la propia duda, único modo de comenzar a creer en algo.” Ésta nos parece una forma más plausible de desarrollar un pensamiento acorde con los fines de la EMS de nuestro país desde la enseñanza de la matemática, que se opone a la forma tradicional de enseñanza donde la veracidad está basada en la autoridad del docente o del libro, en cualquier caso en criterios externos al estudiante.

Ya no se trata de lograr cabezas repletas sino de lograr cabezas bien puestas. Una ‘cabeza repleta’ es una cabeza en la que el saber se ha acumulado, apilado, pero que no tiene un criterio de selección ni una organización que le dé sentido; una ‘cabeza bien puesta’ significa que más importante que acumular el saber es tener además una aptitud para plantear y analizar problemas y tener también principios organizadores que permitan vincular los saberes y darles sentido. (Morin, 1999)

Trabajar en esta perspectiva también implica reconocer distintas formas de autoconvencimiento y persuasión en los estudiantes, esquemas de demostración (Sowder y Harel, 1998), formas que reflejan una habilidad cognitiva y que permiten caracterizar su pensamiento matemático en determinado momento y frente a determinada situación.

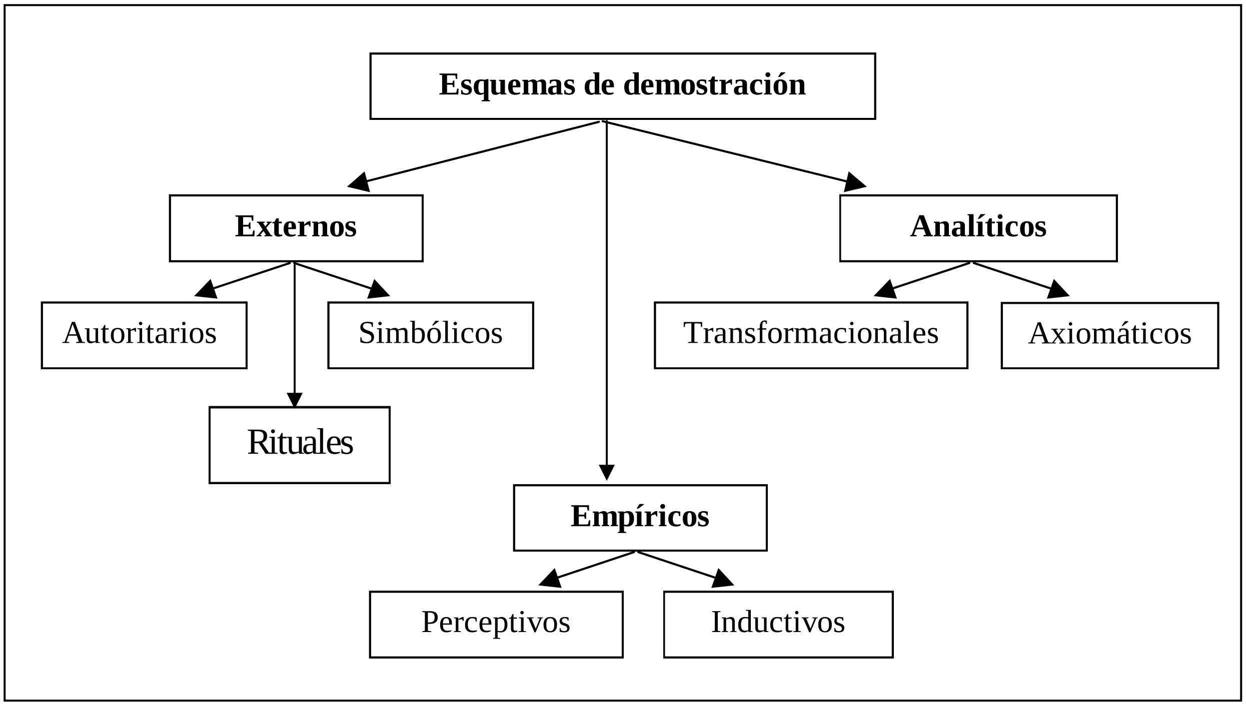
Tanto las pruebas, concebidas como objetos resultantes de una práctica argumentativa significativa en las matemáticas, así como los esquemas de demostración de los estudiantes involucrados en su elaboración, son factibles de cambiar y evolucionar de formas pragmáticas o inductivas, en un principio, a formas analíticas: en demostraciones. (Dreyfus y Hadas, 1996; Mariotti, 1997, 2000; Jones, 2000; Marrades y Gutiérrez, 2000; Hadas, Hershkowitz y Schwarz, 2000)

De esta manera, la demostración puede cumplir funciones como explicar el porqué de un teorema, comunicar un teorema o incluso hallar nuevos teoremas, y ya no queda restringida a verificar y sistematizar teoremas dentro de un sistema axiomático. Estrechamente ligada a estas nuevas funciones de la demostración está la de crear autonomía en los estudiantes, quienes deben tener la posibilidad de crear su propio conocimiento, producirlo y no ser meros consumidores del conocimiento de otros.

El desarrollo de programas de Geometría Dinámica –entre los que se encuentran *Cabri-Géomètre* (Laborde J.M., 1985) y *The Geometer's Sketchpad* (Jackiw, 1991)– nos obligan a preguntarnos si pueden –y en caso de hacerlo de qué manera– contribuir a la enseñanza de la demostración en el sentido que venimos señalando. Sería de interés comparar dichas posibilidades con las de un ambiente donde se use lápiz y papel. La capacidad de 'arrastrar' las figuras construidas en un ambiente de Geometría Dinámica permite generar una rápida convicción acerca de la verdad o la falsedad de una proposición pero, ¿no jugará esta capacidad en contra de la necesidad de elaborar una demostración? En caso afirmativo estaríamos sustituyendo la autoridad externa que recaía en el profesor o el libro por la del programa de Geometría Dinámica. ¿Qué necesidad tendrían los estudiantes en demostrar afirmaciones que están seguros son ciertas? Dreyfus y Hadas (1996) afirman que un acercamiento empírico puede ser usado como base para crear situaciones didácticas en las cuales los estudiantes requieran demostraciones, por ejemplo:

- estudiantes llevados a descubrir una relación que sea contra-intuitiva, que la encuentren difícil de creer y que requieran ser convencidos por una demostración,
- estudiantes llevados a creer que una relación es generalizable y ser sorprendidos cuando descubren un contraejemplo.

De Villiers (1996) afirma que la demostración surgirá en situaciones que requieran saber por qué ciertas conclusiones son verdaderas; en la misma dirección Balacheff (2000b) sugiere que los ambientes de Geometría Dinámica pueden permitir la generación de situaciones de incertidumbre donde la demostración surja como búsqueda de explicación.



2.1 Esquemas de demostración

Las formas en que los estudiantes justifican los resultados matemáticos a los que se enfrentan pueden ser muy variadas. Pueden ir desde "el profesor lo dijo" o "lo veo en la figura" a "hice una demostración".

Sowder y Harel (1998) proponen una estructura con la cual pensar sobre las justificaciones de los estudiantes. Introducen el concepto de *esquema de demostración de una persona* como "lo que constituye el autoconvencimiento y la persuasión para esa persona". La demostración es el instrumento matemático usado para validar una afirmación (teorema) y el esquema de demostración se refiere a la forma que toma el pensamiento de los individuos para desarrollar las demostraciones. Los esquemas de demostración no son demostraciones de diferentes tipos sino estructuras que desarrolla un individuo con el objeto de hacer una demostración.

Las distintas categorías de esquemas de demostración que identifican representan un estadio cognitivo, una habilidad intelectual en el desarrollo matemático de los estudiantes, y son derivadas de las acciones realizadas por los estudiantes en procesos de demostración. Los esquemas de demostración son una interpretación sobre estructuras cognitivas de pensamiento desarrolladas por los individuos en la dirección de elaborar una demostración. Cómo demostrar, o justificar, un resultado involucra averiguar, indagar, convencerse a sí mismo y persuadir; la demostración se concibe como “el proceso empleado por un individuo para asumir o apartar dudas sobre la verdad de una conjetura”[8]. (Godino y Recio, 1997, pág. 317)

Sowder y Harel (1998) organizan los esquemas de demostración o de justificación en tres categorías: esquemas de demostración externos; esquemas de demostración empíricos y esquemas de demostración analíticos, con subcategorías para cada uno.

Esquemas de demostración externos. En los esquemas de demostración externos, tanto lo que convence al estudiante como lo que el estudiante puede ofrecer para persuadir a otros tiene una

procedencia exterior.

En cursos donde es el profesor quien hace las demostraciones o donde los detalles formales están muy presentes es probable que los estudiantes terminen creyendo que los resultados son ciertos por la forma en que son presentados o porque los dijo alguna autoridad como el profesor.

***Esquema autoritario*.** Los estudiantes muestran un esquema de demostración externo autoritario

cuando creen que pueden confiar sólo en un libro, una afirmación del profesor, o quizás la confirmación de un compañero de clase más avanzado, para justificar un resultado.

Esto, en muchos casos, es el resultado de una enseñanza que pone énfasis en la autoridad del profesor o que centra su atención en los resultados sin prestar mayor importancia al razonamiento que lleva al resultado. También de profesores que hacen hincapié en los procedimientos sin apoyarlos mediante el razonamiento que da sentido al mismo.

Godino y Recio (1997, pág. 317), refiriéndose a cómo es concebida la demostración en la enseñanza tradicional, afirman que “La matemática elemental –incluida la que se

[8] Asumimos que los autores consideran que en el ámbito de la matemática escolar coinciden verdad y validez.

enseña en los cursos universitarios– constituye un cuerpo de conocimiento cuya verdad, en general, no se pone en duda. Se disponen de distintas pruebas para los teoremas que son aceptadas por la generalidad de los matemáticos profesionales. Constituye, pues, un cuerpo de conocimiento exento del carácter falibilista[9] que se atribuye a la 'matemática avanzada', o al menos, así se suele presentar en los textos correspondientes y en las clases de matemáticas.”

El estudiante debe tener la posibilidad de asumir el papel de constructor de su propio conocimiento matemático, para ello debe dejar de ocupar el papel de receptor y repetidor de un conocimiento ya elaborado, acabado, que es llevado al salón de clase por el profesor.

Una forma de revertir la situación de estudiantes que muestran este esquema de demostración es la de plantear tareas que requieran interpretaciones y apertura a razonamientos alternativos para ser trabajadas en pequeños grupos dando así la posibilidad de la discusión y cooperación entre estudiantes y sacando al profesor del lugar de única referencia y fuente de todo el conocimiento.

En el contexto de la clase de matemática la demostración debe ser entendida como el objeto matemático que resulte de los distintos argumentos significativos puestos en juego por los estudiantes y el profesor en la validación de una conjetura. El objeto matemático emergente dependerá del nivel escolar en que se encuentren los estudiantes, de la concepción que tenga el docente acerca de la matemática –y en

---

[9] El término falibilista citado remite a Lakatos (1994) quien sostiene que algunos resultados de la matemática son mucho más que mero encadenamiento deductivo, formal, apareciendo como un proceso creativo, ligado a la formulación de conjeturas, a la presencia de ejemplos y contraejemplos, a la falsabilidad, a los procesos de prueba y refutación. Lakatos sostiene esto para el campo de la matemática profesional y en ningún caso se refiere a que la matemática escolar podría ser empírica o falible. “...un cuerpo de conocimiento exento del carácter falibilista...” hace referencia a que en el ámbito de la matemática escolar tradicional tanto los conocimientos matemáticos como los criterios de validación de un enunciado preexisten a cualquier acontecimiento que pueda tener lugar en el salón de clase. Así como algunos resultados de la matemática profesional se desarrollan, según Lakatos, siguiendo “la lógica de pruebas y refutaciones” sería deseable que la matemática escolar se desarrollara siguiendo la lógica de conjeturas y demostraciones.

especial de la demostración–, y de la forma en que se realicen las actividades en el salón de clase. Esto implica concebir la demostración como algo dinámico, capaz de evolucionar acorde a la evolución de los conocimientos de los estudiantes y de las actividades de justificación que se aborden en clase.

Esquema ritual. Se juzga la exactitud de un argumento sólo por la forma del argumento más que por la exactitud del razonamiento involucrado.

El estudiante, incluso cuando esté dando argumentos sólidos, dudará de que haya dado una demostración porque sus argumentos no están organizados en determinado formato o porque no incluye suficientes cálculos o notación matemática.

El no quedar atado a una única forma de escribir las demostraciones, presentando alternativas donde los estudiantes sean capaces de identificar la línea de razonamiento independiente de la forma[10], así como no circunscribir la demostración a un solo campo de la matemática, ayudan a combatir los esquemas de demostración rituales.

***Esquema simbólico*.** Se da cuando los estudiantes consideran los símbolos como teniendo una vida independiente de significado o sin ninguna relación con las situaciones en que surgen.

Un aspecto positivo del esquema de razonamiento simbólico está en el poder de los símbolos, sobre todo en álgebra: al resolver un sistema de ecuaciones lineales para un problema ‘contextualizado’ el estudiante no tiene que ligar a cada paso en el proceso de resolución un significado en términos del contexto del problema.

Un aspecto negativo de este esquema es el que permite a los estudiantes calcular $2^5 \times 2^3$ como 4^{15} o reemplazar sen ($x + y$) por sen x + sen y.

Nuevamente, una perspectiva de enseñanza donde las afirmaciones estén sujetas a justificaciones puede ser útil para superar esta visión de los símbolos.

Esquemas de demostración empíricos. Los esquemas de demostración empíricos se dan cuando las justificaciones son hechas sólo con base en ejemplos.

---

[10] Para que sean demostraciones distintas de un mismo teorema deben ser encadenamientos distintos de afirmaciones pero lógicamente equivalentes, o sea que la función de verdad asociada a ellos sea la misma.

Esquema perceptivo. Cuando los estudiantes llegan a conclusiones basados en sus percepciones de uno solo, u ocasionalmente varios, dibujos. También se aprecia este esquema de demostración perceptivo cuando un estudiante trata de convencer a otro mostrándole un dibujo, algo muy frecuente al trabajar en geometría.

Un aspecto positivo de este esquema es aprovechar el aspecto heurístico de la representación gráfica. Un aspecto negativo es confundir a la representación actual con la figura ideal que es aquella que contiene las características matemáticas y del que el dibujo presente no es más que un representante de una clase. En el esquema perceptivo se usa la percepción exclusivamente como elemento de juicio para el razonamiento.

Por ejemplo, en la demostración de que los segmentos que unen los puntos medios de los lados de un trapecio isósceles determinan un rombo, el estudiante dibuja un cuadrado como trapecio isósceles y razona usando los ángulos rectos que ve en su figura.

Esquema inductivo**.** Cuando los estudiantes buscan convencerse a sí mismos y a otros evaluando una conjetura a través de uno o más ejemplos.

La validez de este esquema es esperable por parte del estudiante por ser la forma en que validamos las observaciones en nuestra vida corriente.

El razonamiento inductivo tiene un aspecto positivo: notar una característica particular que se mantiene en una serie de dibujos o ver un patrón en una serie de ejemplos es una excelente fuente de conjeturas. Pero los estudiantes deben ser conscientes de la naturaleza tentativa de las conjeturas hechas sobre la base de una serie de ejemplos, y deben crecer en sus habilidades para ofrecer mejores justificaciones adicionales.

Esquemas de demostración teóricos (o analíticos). Cuando la justificación está basada en deducciones lógicas.

Esquema de transformación**.** En la justificación hay una preocupación por los aspectos generales de una situación y se observa como una encadenamiento de proposiciones que permiten establecer la conjetura en general.

Por ejemplo, ante la pregunta ¿es la expresión $E = n^3 - n$ divisible entre 6 para todo n natural?, una respuesta posible es:

$E = n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n + 1)(n - 1) = (n - 1)n(n + 1)$ *de donde* $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$

De esta manera se obtuvo el producto de tres números consecutivos. Entre tres números consecutivos siempre hay, al menos, un número divisible entre 2 y hay siempre un número divisible entre tres. Por lo tanto el producto es divisible entre 2 y 3. El producto de tres números consecutivos será entonces divisible entre $2 \times 3 = 6$.

Este esquema es considerado por los autores como un precedente necesario del esquema axiomático.

***Esquema axiomático*.** La justificación está hecha con base en cadenas deductivas apoyadas en los elementos de un sistema axiomático.

En resumen, es posible que los esquemas de demostración bosquejados no sean los únicos esquemas que se encuentren entre nuestros estudiantes, pero pueden ser suficientemente significativos para explicar el fenómeno de manera general. Nos dan un camino para evaluar las justificaciones dadas por nuestros estudiantes, por lo que podemos planificar la enseñanza para promoverlos hacia formas más sofisticadas de razonamiento.

Así, un estudiante que confía en la autoridad puede beneficiarse con el trabajo en pequeños grupos donde deban hacerse conjeturas y donde se reconozca ante todo la coerción sin coerción del mejor argumento; donde las conjeturas deban establecerse en el grupo, sin recurrir al profesor.

Estudiantes con fe ciega en los ejemplos deben al menos ser enfrentados a aquellos ejemplos que los puedan traicionar y saber que los patrones hallados en ciertos ejemplos no son completamente fiables.

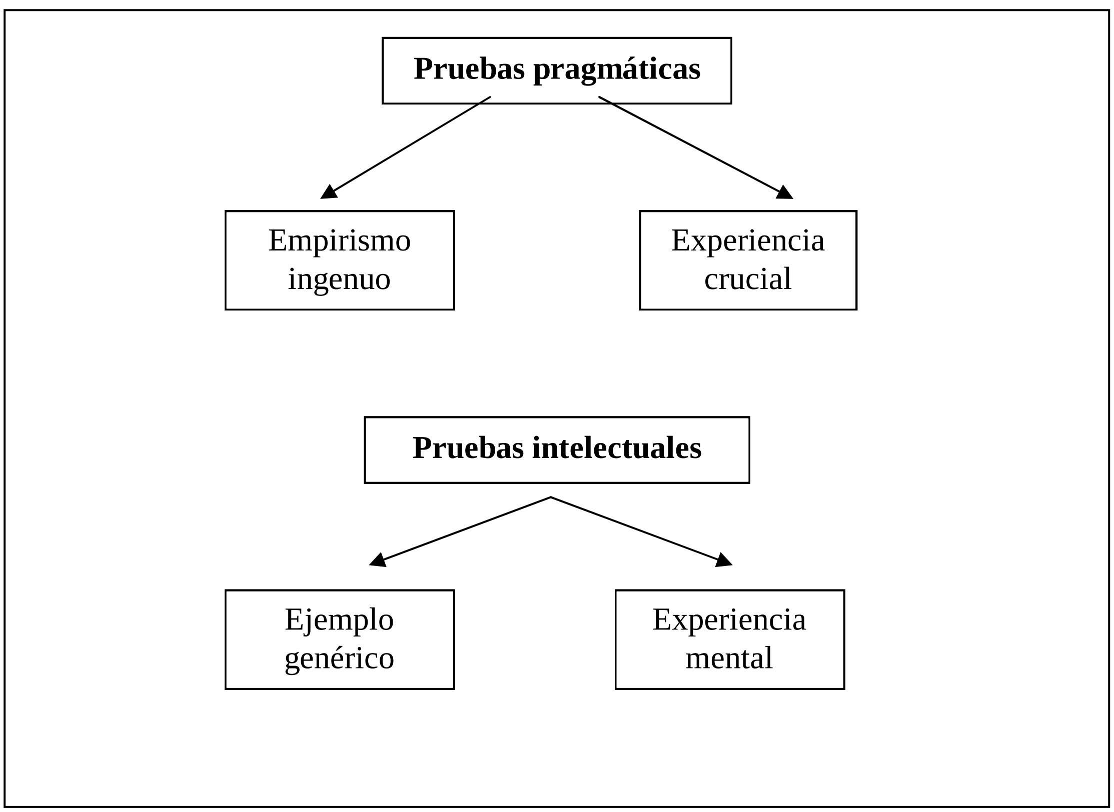
Incluso siendo algunos esquemas claramente más sofisticados que otros, los esquemas de demostración no deben considerarse como una jerarquía en la cual una persona siempre opera en un mismo nivel. Argumentos de una misma persona pero en diferentes contextos o en momentos distintos pueden caer dentro de categorías distintas, y una línea específica de razonamiento puede involucrar una combinación de varios esquemas de demostración.

2.2 Tipos de prueba

Dijimos antes que Balacheff propone estudiar la demostración desde el punto de vista de las prácticas matemáticas de los estudiantes en el salón de clase centrando la atención "en cómo llegan los estudiantes a la convicción de la validez de la solución propuesta."

A partir de un estudio empírico Balacheff propone una teoría sobre qué deberíamos considerar válido en la clase de matemática, qué pruebas considerar válidas aunque no sean deductivas.

Hace una distinción entre pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales, identificando dos tipos en cada caso.



Pruebas pragmáticas. Se basan en el uso de ejemplos, en una acción o en mostrar algo.

Empirismo ingenuo. Consiste en asegurar la validez de un resultado basándose para su verificación en algunos casos. Este tipo de prueba puede ser vista como una forma inicial de generalización.

Experiencia crucial. Basa la validez de un resultado en la verificación de un caso especialmente elegido. Hay un avance en la generalización con respecto al empirismo ingenuo en la medida que ésta es reconocida y puesta a prueba en un caso que se reconoce como general o extraño.

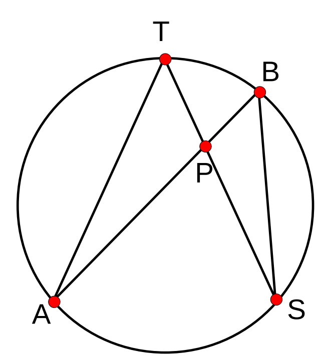
Pruebas intelectuales. Se basan en formulaciones abstractas de las propiedades involucradas y en sus relaciones.

Ejemplo genérico. La justificación se basa en operaciones o transformaciones realizadas sobre un ejemplo que es considerado como representante de una clase. Las operaciones o transformaciones se hacen sobre un ejemplo pero entendiendo que se podrían hacer sobre cualquier elemento de la clase.

Experiencia mental. La explicación de las razones que fundamentan la validez de la proposición se basan en un análisis de las propiedades de los objetos en juego. Estas propiedades no pueden ser testificadas por medio de sus representantes sino que deben ser formuladas en su generalidad.

Las acciones son internalizadas y separadas de los ejemplos específicos considerados.

Frente al problema: Dada una circunferencia y un punto P interior a la circunferencia, hallar una cuerda AB que pase por P y de manera que el producto de las longitudes de los segmentos PA y PB sea máximo; estudiantes procedieron de la siguiente manera: considerar una segunda cuerda ST que pase por P, reconocer la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice APT y SPB, construir los segmentos AT y BS y justificar que los ángulos ATS y ABS son iguales por abarcar el mismo arco AS, recurrir al criterio de semejanza ángulo-ángulo para justificar que los triángulos APT y SPB son semejantes y de ello deducir que



PA/PT = *PS/PB*, de donde pueden concluir que $PA \times PB = PS \times PT$, o sea que el producto $PA \times PB$ es constante para toda cuerda que pase por *P*; elaboraron una demostración en el nivel de experiencia mental

Tanto los esquemas de demostración de Sowder y Harel como los tipos de prueba de Balacheff son herramientas útiles para entender las producciones de los estudiantes ya sea respondiendo a la pregunta de cómo conocen los estudiantes –como en los esquemas de demostración– o haciendo referencia a cómo validan, justifican, legitiman dichos estudiantes lo que conocen –como en los tipos de prueba–.

En el caso de los tipos de prueba es natural que no aparezcan contempladas las demostraciones que apelan a la autoridad, en la medida que la responsabilidad de elaborar una explicación ha sido transferida a cada pareja de estudiantes bajo sus propios criterios, recién en una instancia posterior dicha explicación será expuesta al juicio de los compañeros de clase y del profesor, quienes irán marcando insuficiencias y fortalezas de los argumentos expuestos. De esta forma el profesor podrá interactuar con los estudiantes de manera que estos puedan ir evolucionando en sus producciones hacia lo que definimos como demostración en la institución escolar.

La autoridad queda excluida porque en la concepción de validación de Balacheff está presente ante todo el acuerdo intersubjetivo. (En la enseñanza tradicional la validación de un teorema pasa exclusivamente por la lógica interna de la proposición). Balacheff con sus tipos de prueba dice: aceptamos el razonamiento deductivo como la forma de validación en las matemáticas escolares pero también aceptamos temporalmente otras formas de prueba –no deductivas– como formas transitorias de validación de la matemática escolar en determinados niveles.

Entre los motivos señalados por algunos estudios (Battista y Clements, 1995; Balacheff, 2000a) que dificultan el aprendizaje de la demostración figuran la concepción que tienen de las matemáticas tanto los estudiantes como los profesores y la forma como es concebida la demostración en los programas de matemática.

Para muchos estudiantes que deben argumentar para confirmar algo que les resulta intuitivamente obvio las demostraciones son vistas como algo redundante, carente de sentido. De lo que se trata es a partir de los argumentos del estudiante llevarlo a una situación paradójica en la que se vea obligado a ponerlos en duda, que se pueda dar cuenta de que los argumentos iniciales no siempre se pueden mantener. El estudiante requiere de la convicción de que la situación paradójica tiene explicación y que es necesario encontrar las razones que explican tal situación. Es tarea del profesor contribuir al desequilibrio mencionado así como también es su responsabilidad proporcionar una alternativa plausible para que el propio estudiante enfrente el reto que significa dar sentido a lo ante sus ojos ha dejado de tenerlo.

Balacheff (1991, citado en Coe y Ruthven, 1994, pág. 3) afirma que la mayor parte del tiempo los estudiantes no actúan como teóricos sino como personas prácticas. Su tarea es dar una solución al problema que el profesor les ha planteado, una solución que será aceptable en el contexto del salón de clase. “En semejante contexto la cosa más importante es ser eficaz. El problema de la persona práctica es ser eficaz no ser riguroso. Es producir una solución, no producir conocimiento.” De esta manera, el estudiante no siente la necesidad de requerir más lógica que la necesaria en la práctica. Frente a situaciones en las que se les dice de antemano que son verdaderas, la demostración aparece como un ritual frente a requerimientos de la situación escolar. En estos casos se está despojando a los estudiantes de la responsabilidad de plantear conjeturas –elaborar afirmaciones acerca de una situación–, y de buscar fundamentarlas –establecer su validez–.

Plantear situaciones donde los estudiantes deban elaborar conjeturas parece un camino plausible para que éstos se vean involucrados en su justificación.

La alta incidencia entre los estudiantes de esquemas de demostración basados en convicciones externas (De Villiers, 1992; Mudaly y De Villiers, 1999; Sowder y Harel, 1998) puede explicarse por la influencia de una práctica escolar cotidiana acorde con ese tipo de argumentos. Si los estudiantes no se comprometen en procesos de demostración no es tanto porque no puedan hacerlo, sino porque no ven ninguna razón o no sienten ninguna necesidad en hacerlo.

Una vez asumida, tanto por parte del docente como del alumno, que la responsabilidad en la elaboración de demostraciones debe ser tarea del estudiante, y para ello el docente deberá plantear actividades acordes, el desafío que se presenta es hacer evolucionar a los estudiantes de esquemas de demostración empíricos (inductivo, perceptivo) a esquemas de demostración analíticos, de pruebas pragmáticas a pruebas intelectuales.

2.3 El modelo van Hiele de pensamiento geométrico

Según la teoría de los van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1991, 1996; De Villiers, 1999; Fuys y Geddes, 1988) el pensamiento geométrico de los estudiantes pasa por cinco niveles.

Nivel 1. Reconocimiento

El estudiante reconoce, de manera visual, figuras por su apariencia global. Reconoce triángulos, cuadrados, rectángulos, etcétera, por su forma y su posición, pero no identifica explícitamente las propiedades de estas figuras. Así un rectángulo muy alargado no es reconocido como tal o un cuadrado (con dos lados horizontales) después de girado (con una diagonal en horizontal) es un rombo. Un estudiante de este nivel puede aprender vocabulario geométrico, puede identificar figuras geométricas determinadas de entre un conjunto de ellas y, dada una figura, puede reproducirla.

Nivel 2. Análisis

El estudiante percibe las figuras como formadas por partes y con ciertas propiedades, pero no establece relaciones entre ellas. Así un rectángulo es un polígono con cuatro lados paralelos dos a dos, con cuatro ángulos rectos, con diagonales congruentes, con diagonales que se cortan en su punto medio, pero no llega a ver que unas propiedades se pueden deducir de otras. La definición de un concepto se entiende como una lista exhaustiva de propiedades en la que puede faltar alguna condición necesaria. No relaciona en forma inclusiva distintos tipos de figuras sino que las sigue percibiendo como pertenecientes a clases disjuntas (un triángulo equilátero no es isósceles). El estudiante puede deducir algunas propiedades mediante experimentación y generalizarlas a todas las figuras de la familia, también puede aprender la terminología específica para expresarlas. La demostración de una propiedad la hace mediante su comprobación en uno o en pocos casos. .

Nivel 3. Deducción informal

El estudiante puede relacionar las propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras y puede deducir algunas propiedades de otras usando argumentos informales. Entiende lo que es una definición y es capaz de establecer relaciones inclusivas (un triángulo equilátero es isósceles pero un triángulo isósceles no es equilátero). Puede entender y hacer implicaciones simples en un razonamiento así como entender cada paso de una demostración[11] si ésta es explicada por el profesor pero no entiende el encadenamiento de los pasos ni la estructura de la demostración: puede seguir una demostración pero no puede elaborar una.

Nivel 4. Deducción

El estudiante puede entender y hacer demostraciones. Puede aceptar que haya distintas definiciones para una misma figura o que se pueda demostrar un resultado de distintas maneras o a partir de premisas distintas. Puede entender la estructura axiomática de la matemática.

Nivel 5. Rigor

El estudiante puede hacer demostraciones en distintos sistemas axiomáticos y comparar dichos sistemas.

La teoría tiene algunas propiedades que la caracterizan:

- No se puede alterar el orden de adquisición de los niveles de razonamiento, es decir que no se puede alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado, de forma ordenada, todos los niveles previos.
- El tránsito entre los niveles de van Hiele se produce de forma lenta y continua, pudiendo durar varios años en el caso de los niveles 3 y 4.
- Un estudiante puede razonar en niveles distintos al trabajar en distintos temas de geometría, el nivel que alcance dependerá de sus conocimientos y experiencia previa en el tema.

[11] Demostración entendida aquí como razonamiento deductivo formal.

- Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje para comunicarse y un significado específico del vocabulario matemático. Dos personas que razonan a niveles diferentes no podrán entenderse entre sí.

El tener presente los niveles de razonamiento así como las características generales de la teoría nos pueden ayudar a evitar ciertas prácticas. Cuando un profesor pide 'demostrar' esto tiene significados distintos según el estudiantes esté razonando en el nivel 2, 3 o 4. Por lo general el docente pretende que la demostración sea un razonamiento deductivo formal (nivel 4), que el estudiante se adapte a su nivel, cuando, si desea ser entendido, deberá ser él quien se sitúe en el nivel del estudiante y pueda aceptar y entender la respuesta dada en forma de ejemplo (nivel 2) o de razonamiento intuitivo (nivel 3). "Según la teoría de van Hiele, la principal razón de la falla del currículum tradicional de geometría es que ésta es presentada en un nivel más alto del que los estudiantes están operando, en otras palabras ¡los estudiantes no pueden entender al profesor ni el profesor puede entender por qué ellos no lo pueden entender!" (De Villiers, 1999)

El tipo de demostración elaborado por cada estudiante estará acorde con el nivel en el que esté pensando: en el nivel 1 la justificación hará referencia a un ejemplo específico, en el nivel 2 la demostración se podrá referir a una colección de figuras similares, apenas en el nivel 3 podrá elaborar un razonamiento deductivo.

Como no se puede alterar el orden de pasaje por los distintos niveles, la enseñanza prematura de la demostración formal sólo puede contribuir a la confusión de los estudiantes, a oscurecer el papel de la demostración en la actividad matemática que será vista como justificación de lo obvio. El modelo van Hiele sugiere que la enseñanza debe contribuir a que los estudiantes progresen a través de los distintos niveles e "irónicamente, el camino más eficaz para generar un uso significativo de la demostración en geometría es evitar por mucho tiempo la prueba formal del trabajo de los estudiantes." (Battista y Clements, 1995, pág. 53)

Los resultados del presente trabajo se analizarán de acuerdo con los esquemas de demostración de Harel y Sowder, con la clasificación de Balacheff y con los niveles de Pensamiento Geométrico de van Hiele.

Le decisión de utilizar los tres referentes teóricos se debe a que en el proceso de recavar información en torno a la enseñanza de la demostración, nos encontramos con artículos –mencionados a lo largo del presente trabajo– que nos resultaron esclarecedores y que, abordando la misma temática, hacían uso de distintos marcos teóricos. Tener en cuenta los aportes teóricos de las tres vertientes consideradas nos permite tener una visión más amplia y más completa del problema estudiado y por tanto nos habilitan a que puedan ser más relevantes las conclusiones a las que se arriben.

3. La enseñanza de la demostración en la literatura

Antes de pasar a la descripción de nuestro experimento, haremos un recuento de lo que se dice en la literatura sobre las funciones de la demostración y su enseñanza, y sobre el uso de paquetes de Geometría Dinámica.

3.1 Funciones de la demostración

El fracaso en la enseñanza de la demostración es un problema universal, así lo testifican diversos estudios.

Referido al reconocimiento de una demostración:

Investigando cómo distinguían entre demostración empírica y formal, sobre una muestra de 400 estudiantes de secundaria en Tel Aviv, Fischbein (1982) encontró que sólo un 14,5% de los estudiantes estudiados fueron capaces de aceptar una demostración desarrollada de acuerdo con un razonamiento estrictamente lógico, sin necesidad de comprobaciones empíricas adicionales.

Martín y Harel (1989), en una investigación sobre esquemas personales de demostración matemática, realizada con 101 alumnos de Magisterio, encontraron que "... más de la mitad de los estudiantes aceptaban un argumento empírico-inductivo como demostración matemática válida."

Según Bell (1979, citado en Mudaly, 1999) la demostración axiomática formal incluso no fue entendida por estudiantes de 17 años especializados en asuntos matemáticos y científicos.

Referido a la formulación de una demostración:

Un estudio realizado por Senk (1985, citado en Balacheff, 2000a) en los Estados Unidos dio como resultado que de 2699 graduados de secundaria, el 85% no domina la formulación de una demostración.

Senk (1985, citado en Tall, 1995), en un estudio realizado con 1520 estudiantes, que habían recibido enseñanza sobre la demostración en un curso de geometría, en 74 clases, de 11 escuelas, de 5 estados de Estados Unidos, encontró que sólo aproximadamente 30% de los alumnos lograron el 70% del dominio en seis problemas de geometría que involucraban demostraciones.

En el mismo sentido, Usiskin (1982, citado en Mudaly, 1999) concluye que aunque el 50% de egresados de enseñanza media habían tenido un año de geometría, menos de 15% alcanzó el dominio en la escritura de una demostración.

¿Cómo es vista la demostración por los estudiantes? Estudios realizados muestran que más de la mitad de los estudiantes de Bachillerato basan sus conocimientos matemáticas en criterios autoritarios (es cierto porque lo dijo el profesor o porque aparece en el libro) más que en la convicción personal (De Villiers, 1992; Mudaly y De Villiers, 1999); en estudiantes de 14-15 años el 50% entiende que la función de la demostración es establecer la validez de un enunciado matemático, 35% le asignan una función de explicación mientras que el 28% tiene poca o ninguna idea acerca del significado de la demostración o para qué sirve (Healy y Hoyles, 1999).

Según Cobb (1986, citado en Almeida y Chamoso, 2001), "Si el niño no comprende intuitivamente que los formalismos usuales son un convenio de la forma de expresar y comunicar el pensamiento matemático, puede que éstos se traduzcan en dictados arbitrarios de una autoridad. En este caso la meta global del niño podría convertirse en satisfacer las exigencias de la autoridad, en lugar de aprender las matemáticas por sí mismas.". Si a esto sumamos que los estudiantes confían en que el profesor o el libro no le va a mentir –ésta es una de las reglas del juego– resulta claro que los estudiantes no sientan ninguna necesidad de hacer demostraciones.

Si recordamos los fines que se plantea la EMS, todos apuntan a desarrollar un individuo con capacidad de pensar y de contribuir a la convivencia en democracia. La enseñanza actual se muestra como una buena forma de preparar ciudadanos en un sentido diametralmente opuesto, donde la aceptación acrítica del juicio de otros esté posibilitada por la imposibilidad de elaborar y fundamentar juicios propios. Creemos que incentivar un espíritu independiente y cuestionante frente al profesor y frente a la asignatura da mejores condiciones para la construcción del conocimiento.

Estamos convencidos de que el desarrollo en nuestros alumnos de un pensamiento deductivo a través de la enseñanza de la demostración tiene un gran potencial en la preparación de individuos con las características deseadas, pero ¿cuáles son las dificultades de los estudiantes con la demostración?

Williams (1979, citado en Sekiguchi, 1996), en un estudio hecho sobre 255 estudiantes canadienses de 11º grado encontró que al menos 70% no distingue entre razonamiento inductivo y deductivo y por tanto no comprenden que la inducción no siempre es adecuada para fundamentar las generalizaciones matemáticas; casi 80% no entiende el concepto de contraejemplo; y no encontró evidencia de que distinguieran que una afirmación y su recíproco no son equivalentes.

Por otro lado, los estudiantes no reconocen la necesidad de demostrar lo que consideran obvio (Gonobolin, 1954, citado en De Villiers, 1993; Williams, 1979, citado en Sekiguchi, 1996), en especial si son teoremas geométricos que pueden establecerse empíricamente o les resulten visualmente inmediatos. Estudiantes con poco o ningún significado de la demostración son más propensos a considerar argumentos empíricos. (Healy y Hoyles, 1999)

El desempeño de los estudiantes en la demostración está estrechamente relacionado con las concepciones que éstos tengan acerca de la demostración (Healy y Hoyles, 1999). Éstas, a su vez, se forman a partir de las concepciones de sus profesores y de la forma de trabajo en clase.

En cuanto a las concepciones de los profesores la notable influencia de la matemática moderna, presente también en los programas de Bachillerato, ha llevado a que la demostración sea concebida como demostración formal dentro de un sistema axiomático. En esta concepción sus funciones principales son verificar/justificar/convencer (establecer la verdad de una proposición) y sistematizar (ubicar la proposición en la cadena deductiva) resultados.

En cuanto a la forma de trabajo en clase: los estudiantes toman nota de lo que el profesor escribe en el pizarrón para después memorizarlo y de esta manera responder frente a los ejercicios que se planteen.

¿Hay alternativas a esta forma de enseñanza de la demostración que efectivamente contribuyan al desarrollo del estudiante en el sentido esperado?

En cuanto a cambiar la visión de los profesores acerca de la demostración y de la matemática en general diversos autores (Hanna, 1996; De Villiers, 1993; Davis y Hersh, 1989; Kline, 1983) han analizado el funcionamiento de la demostración en matemáticas y a partir de sus conclusiones han hecho recomendaciones sobre el tratamiento de la demostración en la enseñanza. Estos aspectos pueden contribuir a que los profesores tengan una visión más amplia tanto de la matemática como de las funciones de la demostración en ella, por lo tanto ser proclives a promover y aceptar la diversidad de justificaciones.

Estos autores han señalado otras funciones que puede tener la demostración en matemáticas: explicación, descubrimiento, comunicación y desafío intelectual, funciones que deberíamos tener presente en su enseñanza. De éstas es de destacar la función de explicación (aclarar por qué una proposición es verdadera) que puede contribuir a que un resultado tenga sentido para el estudiante. “Una buena demostración es aquella que nos hace más sabios.” (Manin, 1977, citado por Coe y Ruthven, 1994, pág. 2). Éste parece ser un buen criterio para valorar una buena demostración desde la enseñanza: que desarrolle una mayor comprensión por parte del estudiante. Hanna (1989) defiende que el valor de una actividad de clase que incluya razonamiento formal o informal puede ser juzgado sólo por el grado de mayor comprensión que promueve y hace una distinción entre demostraciones que demuestran (argumentos válidos) y demostraciones que explican (argumentos válidos y que explican). Las demostraciones que demuestran muestran sólo ***que*** un teorema es verdadero, las demostraciones que explican además muestran ***por qué*** es verdadero.

También han señalado que las concepciones logicistas o formalistas de la matemática no son las únicas posibles. En este sentido Lakatos (1994) se plantea “elaborar la idea de que las matemáticas informales y cuasi-empíricas no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino que lo hacen mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones”. Al concebir la matemática de esta manera propone un juego entre conjeturas y refutaciones donde la demostración lógica formal, concebida como de una vez y para siempre, queda excluida.

Hay distintas formas de entender la demostración en matemáticas, dependiendo del contexto o de la época histórica. De forma análoga se pueden concebir distintas formas de demostración apropiadas a diferentes contextos (Tall, 1995; Ibañes y Ortega, 1996). Es importante que los profesores no se limiten a aceptar como única demostración la demostración formal y que demuestren un mismo resultado de diferentes formas o que usen distintos tipos de demostraciones en el desarrollo de un curso, así como que tengan la capacidad de reconocer distintos tipos de argumentos usados por los estudiantes en sus justificaciones.

Hanna (1991, pág. 58) ha señalado que el criterio para aceptar un nuevo teorema en la comunidad de matemáticos a menudo incluye otros factores (sociales y psicológicos) que la existencia de una demostración. Mientras que la verificación lógica de los resultados matemáticos es la visión ideal de la comunidad matemática, los factores sociales y psicológicos señalados por Hanna parecen reflejar mejor la realidad de su verificación. En forma análoga los criterios para aceptar un resultado matemático por parte de los estudiantes pueden ser muy distintos a una demostración.

A la luz de los resultados que se obtienen y de las dificultades que se constatan, parece claro que la demostración no puede ser aprendida espontáneamente por los estudiantes, como se pretende –a nivel curricular, de los libros de texto y en el salón de clase (sección 1.1)– generalmente cuando éstos llegan al Bachillerato, sino que ésta debe ser enseñada en forma gradual a lo largo de todo el currículum, interiorizándolos en los conceptos de ejemplo, conjetura, contraejemplo, generalización, etcétera, y en las “reglas” de la demostración: un teorema no admite excepción (será correcto sólo si es correcto en toda instancia concebible), incluso una afirmación obvia debe ser demostrada (en particular, una demostración no puede construirse sobre la apariencia de una figura) (Dreyfus y Hadas, 1987, citado en Sekiguchi, 1996) y sobre todo que en los estudiantes la necesidad de razonar, argumentar y justificar surja como una exigencia de la situación planteada.

En lo referente a la forma de trabajado en clase Alibert y Thomas (1991) proponen integrar a la enseñanza algunos aspectos de la actividad de los matemáticos donde la formulación de conjeturas y demostraciones juega por un lado un papel personal de clarificación de ideas y por otro un papel social de comunicación e intercambio de resultados inciertos. En este contexto una demostración es un medio de convencerse a sí mismo aunque intentando convencer a otros.

Una idea similar de demostración es la que aparece en *Pensar Matemáticamente* (Mason, Burton y Stacey, 1982) donde se le describe en tres niveles de exigencia: convéncete a ti mismo, convence a un amigo, convence a un enemigo.

“Convencerse a uno mismo es demasiado fácil. Convencer a un amigo implica organizar y exteriorizar cosas que para ti son obvias, de forma que tu amigo tenga razones convincentes de por qué es cierto lo que dices. Los ejemplos pueden ser útiles...pero tú tienes que justificar cada paso de tu argumentación. No basta decir ‘haz muchos ejemplos y ya verás’; tienes que enunciar las conexiones estructurales que indican por qué tu conjetura es válida... El tercer paso es intentar convencer a alguien que duda o cuestiona todas tus afirmaciones.” (Mason, Burton y Stacey, 1992, pág. 105)

Ambos planteos hacen hincapié en el compromiso social que implica el desarrollo de la demostración, aspecto totalmente ausente en la enseñanza tradicional. En la medida en que la demostración es un medio para convencerse uno mismo y a otros, el acento está puesto en su función clarificadora y no en sus aspectos sintácticos. La sintaxis se mostrará útil a la hora de comunicar el teorema. Nuevamente aquí se hace necesario llegar a un acuerdo entre los estudiantes, de fundamentar las virtudes y defectos de una u otra posibilidad de expresar el teorema, también acordar con el profesor quien también tendrá de argumentar el por qué de su elección.

La enseñanza tradicional de la demostración está basada en la repetición de resultados conocidos de antemano presentados por el profesor o el libro, donde “se despoja a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad” (Balacheff, 2000a, pág. 5); esta nueva concepción de demostración lleva implícita la necesidad de plantear actividades donde el resultado no sea conocido y que la duda sea el desencadenante del proceso de demostración. De esta forma el estudiante no demuestra para el profesor y de acuerdo con los criterios marcados por él sino que elabora una demostración de acuerdo con criterios propios, acordes con sus conocimientos previos y su propia experiencia matemática, con el objetivo de convencerse y convencer a sus compañeros, “llevándolo a rechazar los medios retóricos, que no son buenas pruebas ni refutaciones.” (Brousseau, 1986, citado en Balacheff, 2000a, pág. 5). “Para que la demostración tenga sentido es necesario que se presente ante los alumnos como una herramienta eficaz y confiable para establecer la validez de una proposición. Para conseguirlo, debemos construir y tener en cuenta la racionalidad que ellos tienen inicialmente, saber cómo funciona y cómo puede evolucionar; porque es a partir de esta racionalidad, en pro o en contra de ella, que los alumnos construirán el sentido de la demostración.” (Balacheff, 2000a, pág. 5). “No debería infravalorarse la importancia de sentir la necesidad de demostrar” dice Dreyfus (2000, pág. 130) y menciona estudios donde alumnos, incluso de primaria, pueden producir argumentaciones matemáticas poderosas y en los cuales el interés por la justificación emerge de su idea de que las matemáticas deben tener sentido.

Concebida de esta manera, la demostración cumple un papel de explicar y comunicar resultados, personales o colectivos, con el fin de convencer a otros.

En este sentido, coincidimos plenamente con Brousseau (1997, citado en Flores, 2004) acerca de la demostración:

“Las razones que un niño puede dar para convencer a otro, las que pueden ser aceptadas sin “pérdida de la dignidad”, deben emerger de manera progresiva, deben ser construidas, probadas, formuladas, analizadas y acordadas... Establecer un teorema no es comunicar información, se trata siempre de confirmar que lo que uno dice es verdadero en un cierto sistema; es declararse uno mismo listo para apoyar una opinión y para demostrarla... Por tanto, no es sólo cuestión de que el niño “sepa” matemáticas, sino de utilizarla como una razón para aceptar o rechazar una proposición (un teorema), una estrategia, un modelo, que requiere una actitud de demostración. Esta actitud no es innata. Se desarrolla y se sustenta por situaciones didácticas particulares...En matemáticas, el “por qué” no se puede aprender solamente por referencia a la autoridad de un adulto. La verdad no puede ser conformidad con la regla, con la convención social como lo “hermoso” o lo “bueno”. Requiere una adhesión, una convicción personal, una interiorización que, por definición, no puede ser recibida de otros sin pérdida de su valor. Pensamos que el conocimiento empieza construyéndose en una génesis de la cual Piaget ha señalado sus características esenciales, pero que también implica relaciones específicas con el *milieu*, en particular después del inicio de la enseñanza escolar. Por consiguiente, consideramos que para el niño, hacer matemáticas es principalmente una actividad social y no sólo individual... El pasaje del pensamiento natural al uso del pensamiento lógico como el que regula el razonamiento matemático viene acompañado por construcción, rechazo y el uso de diferentes métodos de demostración: retórica, pragmática, semántica o sintáctica... La consideración de una demostración es una actitud reflexiva. La demostración debe formularse y presentarse al mismo tiempo que se le considera y, con mucha frecuencia, cuando se le escribe, y debe poder comparársele con otras demostraciones escritas que también tratan con la misma situación... En general, la demostración se formulará sólo después de haber sido usada y probada como una regla implícita, ya sea en acción o en discusiones."

3.2 La demostración geométrica en un ambiente de Geometría Dinámica (GD)

Con el surgimiento y difusión de los programas de GD se han abierto nuevas posibilidades y también nuevos desafíos para la enseñanza de la geometría. La característica central de la GD, como su nombre lo indica, es que las figuras se pueden mover: un triángulo no es un triángulo estático, particular, como el resultante de dibujar tres segmentos con lápiz en papel sino que es todos los posibles triángulos en la medida que 'arrastrando' sus vértices cambiará en forma continua la posición y longitud de sus lados; pero es más que simple movimiento: en GD las figuras deben ser construidas estableciendo relaciones de dependencia entre sus componentes, un cuadrado no puede ser simplemente dibujado como tal ya que al ser arrastrado dejará de serlo, necesita ser construido como un cuadrado usando condiciones que lo garanticen (lados perpendiculares y congruentes o diagonales perpendiculares, congruentes y que se cortan en su punto medio, por ejemplo).

Esta forma de funcionamiento "proporciona a los estudiantes una herramienta para la validación de las propiedades que pueden percibirse en la pantalla: una propiedad será probablemente cierta sólo si se mantiene válida mientras se arrastran los puntos básicos de la construcción. En otras palabras, una propiedad geométrica ‘es un invariante perceptual’.” (Balacheff, 2000b)

Si los estudiantes ven la demostración sólo como verificación de algo que mediante la GD les resulta obviamente cierto, es claro que no tendrán ningún incentivo en generar una demostración deductiva. Es aquí donde debemos tener presente otras funciones de la demostración: explicación, descubrimiento, comunicación, sistematización, desafío intelectual. La convicción de la certeza de una proposición, que bien puede ser facilitada por el análisis de algunos ejemplos y contraejemplos mediante el uso de GD, puede ser el inicio de la búsqueda de una explicación, de aclarar el por qué.

Según Hoyles y Healy (2000), en un estudio hecho con estudiantes ingleses de enseñanza media, “...los experimentos pedagógicos computacionalmente integrados han sido tremendamente satisfactorios en cuanto a ayudar a que los estudiantes ampliaran sus formas de ver la demostración y en particular a que relacionaran la argumentación informal con la demostración formal, una transición que se sabe que es problemática.”.

La GD brinda la posibilidad de plantear problemas que no se podrían plantear trabajando con lápiz y papel; además permite adoptar un enfoque experimental de las matemáticas lo que cambia su forma de aprendizaje, dándole al estudiante un papel activo en la construcción de su conocimiento.

3.3 Antecedentes

En esta sección reportaremos algunos trabajos que consideramos como antecedentes para el nuestro.

Siendo concientes que no es lo mismo un trabajo centrado en la producción de demostraciones que uno cuyo centro de interés sea la construcción de conjeturas, en los tres estudios reportados se buscó que el punto de arranque para que los estudiantes elaboraran una demostración fuera la previa formulación de una conjetura. Las actividades planteadas a los estudiantes en el presente trabajo (Apéndice 1) siguen la misma lógica. Y obviamente que involucraran el trabajo de estudiantes en un ambiente de GD.

En *Pupils' needs for conviction and explanation within the context of Dynamic Geometry* (Mudaly, 1999)[12] con el propósito de determinar las necesidades de explicación y convicción de los estudiantes en un ambiente de GD, y si la demostración puede ser introducida en forma significativa a los novatos en un sentido explicativo, se plantean como principales preguntas de investigación –que tienen estrecha vinculación con nuestro trabajo-:

"(1) ¿Están los estudiantes convencidos acerca de la veracidad de la conjetura geométrica a la que arribaron? ¿Cuál es su nivel de convicción?

(2) ¿Muestran deseo de conocer por qué el resultado es verdadero?[13]

(3) ¿Pueden construir una explicación lógica por sí mismos con una guía adecuada?" (pág. 54)

Para dar respuesta a estas interrogantes se entrevistaron 17 estudiantes de aproximadamente 14 años (elegidos al azar de un grupo de 153 estudiantes de 9º grado) quienes no habían sido introducidos en la enseñanza de la demostración geométrica (ni de ningún tipo). Se les propuso para que trabajen en Sketchpad la siguiente actividad:

"Sarah, sobreviviente de un naufragio, tuvo que nadar hacia una isla desierta cuya forma se aproximaba a la de un triángulo equilátero. Ella pronto descubre que el oleaje es excelente en cualquiera de las tres costas de la isla, entonces construye con madera de un árbol caído una tabla de surf para surfear todos los días. ¿Dónde deberá construir Sarah su casa de modo que la suma de las distancias de su casa a las tres playas sea mínima?

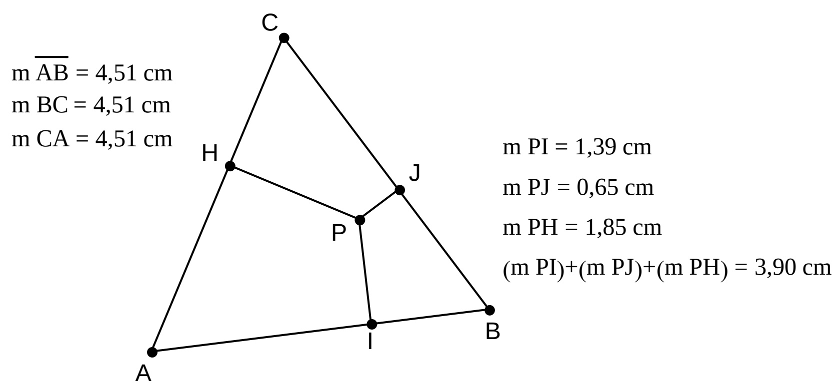
(Ella visita cada playa con igual frecuencia)." (pág. 59)

---

[12] Tesis de Maestría cuyos resultados experimentales se reportan en el artículo *Lerners' needs for conviction and explanation within the context of Dynamic Geometry* (Mudaly y De Villiers,1999).

[13] Asumimos que para el autor citado verdadero y válido coinciden en el nivel de la matemática escolar.

Se les proporcionó un archivo de Sketchpad donde contaban con la siguiente figura:



Podían arrastrar el punto P a cualquier posición dentro del triángulo equilátero y ver las distancias de dicho punto a cada uno de los lados del triángulo así como la suma de las tres distancias.

Los hallazgos frente a cada una de las interrogantes fueron las siguientes:

(1) “Los estudiantes desarrollaron grandes niveles de convicción en relación a la conjetura formulada en un ambiente de GD.” (pág. 78)

(2) “Los estudiantes parecen desplegar un deseo intrínseco por una explicación, esto es, la necesidad de entender la conjetura independientemente de su verificación.” (pág. 85)

(3) “Con una guía adecuada los estudiantes fueron capaces de construir explicaciones lógicas para la conjetura.” (pág. 101)

Entre las recomendaciones didácticas planteadas figuran:

- “La presentación de problemas o teoremas a los estudiantes debe ser hecha de tal forma que asegure un mayor entendimiento comparado con la forma directa de presentación del teorema y su demostración. En vez de que los estudiantes aprendan las demostraciones rescribiéndolas para ser reproducidas en pruebas y exámenes estos deben ser enseñados a probar por sí mismos con una guía acorde si es necesario. Los investigadores confían que a medida que los estudiantes son enfrentados a más ejemplos menos guía del docente será necesaria.

- Los estudiantes deben ser incentivados a escribir sus propias demostraciones.

La escritura de las demostraciones debe transformarse en una tarea disfrutable en vez de una sucesión de hechos aburridos." (pág. 111)

En *Proof produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment* (Marrades y Gutiérrez, 2000) los autores se plantean como principal objetivo "investigar cómo un ambiente de GD puede ayudar a los estudiantes a mejorar su concepción de demostración en matemática y sus métodos de justificación." (pág. 95)

Sus dos hipótesis principales son:

- "Las actividades desarrolladas en un ambiente de GD ayudan más que aquellas basadas en herramientas no computacionales o en el tradicional pizarrón y libro de texto porque el ambiente de GD favorece la organización de la clase promoviendo metodologías activas."

- "El ambiente de GD no impide el mejoramiento de las habilidades de justificación de los estudiantes, por el contrario este ambiente puede ayudarlos a usar distintos tipos de justificación sentando las bases para moverse desde justificaciones empíricas elementales hacia otras justificaciones más complejas, incluso a justificaciones deductivas." (págs. 95-96)

La investigación se llevó a cabo en un grupo de 16 estudiantes de entre 15-16 años como parte de un curso ordinario con su propio docente (uno de los investigadores) durante las horas de clase del curso. Al igual que en nuestro caso los estudiantes trabajaron en parejas.

La unidad de enseñanza tenía 30 actividades, cada una de las cuales fue estructurada en varias fases comenzando con la fase donde los estudiantes debían crear la figura en Cabri y explorar. Sólo en unas pocas actividades se les proporcionó un archivo con la figura. En la segunda fase los estudiantes tenían que generar conjeturas. En la última fase tenían que justificar las conjeturas que habían establecido previamente en una hoja proporcionada por los investigadores.

Los investigadores concluyen:

- "Un ambiente de GD puede ayudar a los estudiantes de secundaria a entender la necesidad de justificaciones abstractas y de pruebas formales en la matemática. Estos estudiantes no pueden hacer una transición rápida desde formas de conjetura y justificación empíricas hacia otras más abstractas. Esta transición es muy lenta y debe estar basada en los métodos empíricos usados por los estudiantes. En este contexto el ambiente de GD permite a los estudiantes hacer investigaciones empíricas antes de producir justificaciones deductivas, haciendo representaciones significativas de los problemas, experimentando y obteniendo devolución inmediata."
- "El arrastre es un rasgo característico de la GD lo que hace que este entorno sea mucho más poderoso que el tradicional aprendizaje con lápiz y papel. El arrastre permite a los estudiantes ver tantos ejemplos como sean necesarios en pocos segundos y les devuelve información en forma inmediata, cosa que no sucede en la enseñanza con lápiz y papel. En el estudio reportado, el arrastre ayudó a los estudiantes a reconocer propiedades, casos particulares, contraejemplos, etcétera, que pueden ser conectados con el objetivo de establecer una conjetura o una justificación." (págs. 119-120)

En *The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments* (Hadas, Hershkowitz y Schwarz, 2000) se presentan los resultados de una investigación realizada con estudiantes de Israel, en su curso normal de geometría involucrando a estudiantes de 8º a 10º grados. Con el objetivo de generar la necesidad en los estudiantes de desarrollar explicaciones deductivas, se los enfrenta a una serie de tareas que fueron trabajadas en un ambiente de GD. Los autores hacen uso de algunas posibles funciones mediadoras que proporciona el ambiente de GD entre las que figuran:

- Servir como ambiente de aprendizaje para formulación de conjeturas.

- Refutar o confirmar una conjetura inicial (formulada con o sin una herramienta de GD), y en los casos de refutación crear una contradicción entre los resultados esperados y los realmente encontrados.
- Llevar a los estudiantes a estar convencidos de que una conclusión es correcta basados en ensayos inductivos.
- Proveer fuentes adicionales de explicación.

La actividad, vinculada con nuestra investigación, es la siguiente:

“Parte A: Mide (con el software) la suma de los ángulo interiores en polígonos a medida que aumenta el número de lados. Generaliza y explica tu conclusión.

Parte B: Mide (con el software) la suma de los ángulos exteriores de un cuadrilátero. Forma una hipótesis acerca de la suma de los ángulo exteriores en polígonos a medida que aumenta el número de lados. Verifica tu hipótesis midiendo, explica lo que encontraste.” (pág. 132)

Referida a esta actividad los autores concluyen que “el aprendizaje en un ambiente de GD abre oportunidades para sentir la necesidad de la prueba en vez de considerarla como algo superfluo. Los estudiantes hicieron una conjetura acerca de la solución de la tarea y encontraron una razón por la cual esa conjetura era cierta. Esa razón a menudo tenía sus raíces en el sentido común o estaba basada en los aprendizajes previos. La refutación de esa conjetura se dio por los hallazgos de los estudiantes trabajando en GD y esto los llevó, más que aceptar la veracidad de la nueva conjetura, a construir nuevos argumentos. La construcción de nuevos argumentos en el campo deductivo estuvo acompañado por la evaluación de los argumentos anteriores. Los estudiantes se refieren a los argumentos previos para mostrar por qué estos estaban equivocados y por qué la nueva conjetura era verdadera. Por ejemplo, cuando se dieron cuenta que la suma de los ángulos exteriores es constante corrigieron el argumento usando la idea de compensación.

La variedad de explicaciones encontradas parece apuntar hacia el hecho de que los estudiantes comenzaron a estar alertas acerca del rol de las explicaciones en general y el rol de las explicaciones deductivas en particular, en la construcción de significados y en el aumento de la confianza en las conclusiones geométricas.

Concluimos que el diseño en un ambiente de GD ubicó a las pruebas en el centro de las actividades y argumentos de los estudiantes; esto es, se comprometieron naturalmente en la actividad de la verdad matemática."[14] (págs. 148-149)

[14] Asumimos que los autores identifican verdad matemática con validez.

4. Desarrollo Experimental y Metodología

En esta sección se hace una descripción del experimento, se fundamentan las actividades trabajadas y se explicita la metodología de investigación.

4.1 Descripción del experimento

La experiencia se llevó a cabo en dos grupos, uno de 8 y otro de 10 estudiantes, de 2º año de BD (16-17 años), Orientación Científica, como parte de sus cursos regulares de Matemática B (geometría, 6 horas de 40 minutos semanales), de los Colegios Latinoamericano (L) y Ciudad de San Felipe (SF), y con su propio profesor (quien escribe). En ambos grupos los estudiantes trabajaron en parejas y sobre el mismo conjunto de actividades, en uno (L) se trabajó en el salón de informática usando The Geometer's Sketchpad (versión 4), en el otro (SF) con lápiz y papel usando regla, escuadra, compás, y semicírculo o transportador.

El conjunto de las 10 actividades trabajadas, que forman parte del contenido normal del curso –que se evalúa con un examen al final del mismo– tienen como objetivo:

- Facilitar la enseñanza de conceptos y propiedades que forman parte de un curso de geometría en BD: rectas y ángulos entre ellas, ángulos interiores y ángulos externos en polígonos, triángulos isósceles;
- Promover en los estudiantes la elaboración de conjeturas, su justificación y su comunicación, basándose en sus propios conocimientos de geometría;
- Facilitar el progreso de los estudiantes a través de distintos tipos de demostraciones.

Para nuestra propia investigación buscamos:

- Investigar cómo afecta la Geometría Dinámica la producción de un razonamiento deductivo en estudiantes de Bachillerato Diversificado que trabajan en la formulación y validación de conjeturas referidas a actividades de geometría.
- Analizar y comparar la elaboración de demostraciones de estudiantes que trabajan en un ambiente de GD con estudiantes que trabajan fuera de él.

Cada actividad lleva implícita seis etapas: una primera donde cada pareja de estudiantes debe crear una figura y hacer exploraciones en ella; una segunda donde deben generar una conjetura; una tercera donde deben justificar la conjetura que han elaborado previamente; una cuarta donde deben escribir dicha justificación; una quinta donde deben, en el pizarrón, presentar su demostración al grupo, aclarando dudas y preguntas, así como analizar sugerencias que pudieran surgir de parte del grupo; y una sexta donde el profesor hace un resumen de la actividad y establece los nuevos resultados que los estudiantes deben integrar.

A la hora de elaborar justificaciones los estudiantes muchas veces necesitan ayuda para recordar todos los resultados previos que pueden usar. Para reducir este problema, en el experimento de enseñanza con las 10 actividades, cada estudiante tiene su cuaderno de clase donde lleva un registro de las definiciones y teoremas aceptados previamente. Este cuaderno puede ser consultado cuando no recuerdan un resultado. Al finalizar cada actividad los nuevos resultados, aprendidos y aceptados en dicha actividad, son integrados al cuaderno.

Las 6 horas semanales están agrupadas en 3 módulos de 80 minutos. Las actividades se trabajaron en las horas de clase del curso, lo que no requería ningún compromiso extra de los estudiantes, sólo el que implica una clase común. Trabajaron en parejas y debían entregar una sola hoja de trabajo donde se reportaba el común acuerdo al que habían llegado.

El grupo que trabajó con The Geometer’s Sketchpad no tenía experiencia previa con el programa (ni con ningún otro programa de GD), sumado a la escasa experiencia del docente con el mismo, llevó a que las construcciones de las figuras también implicaran una actividad de búsqueda de manejo del programa, hecho que fue positivo en dos aspectos: reducir el papel del docente en la clase y ponderar el papel protagónico de los estudiantes en la misma. [Es de señalar que todos los estudiantes del grupo (L), tenían PC en su casa y la usaban, como mínimo, desde que ingresaron a la enseñanza media (12-13 años).]

4.2 Justificación de las actividades propuestas

Las actividades se muestran en el Apéndice 1. El objetivo de las actividades 1 a 5 fue, por un lado, enseñar algunos conceptos geométricos y establecer algunos resultados que permitan generar múltiples cadenas deductivas entre sí y de esta manera llegar a las actividades 6, 7, 8 y 9 con un cierto bagaje de propiedades establecidas previamente y a las cuales los estudiantes pudieran recurrir en caso de elaborar demostraciones que hagan uso del razonamiento deductivo; por otro, permitir que los estudiantes se acostumbren a la forma de trabajo en clase (en parejas, teniendo que argumentar, escribir el acuerdo al que arribaron, explicar al grupo sus argumentos, entender los argumentos de los otros equipos) y al manejo del software de GD usado: The Geometer's Sketchpad.

Las actividades 6 y 7 buscan la elaboración de conjeturas por parte de los estudiantes pero dándoles la posibilidad de utilizar para ello evidencia que puedan hallar construyendo figuras y haciendo mediciones sobre ellas, posibilidad que no tendrán en las partes (b) de las actividades 8 y 9.

La elección del hexágono para las partes (a) de las actividades 8 y 9 se debió a que hacía falta un polígono que no fuera triángulo ni cuadrilátero y cuyo número de lados hiciera posible las mediciones sin invertir demasiado tiempo. Además, siendo el hexágono regular el polígono –excluyendo triángulos y cuadriláteros– con el que los estudiantes más han trabajado en su experiencia escolar (en la escuela es tradicional la construcción del hexágono regular con regla y compás y que se hagan cálculos de áreas y perímetros de polígonos donde interviene el hexágono regular en forma frecuente), se quiso dejar abierta la posibilidad de que los estudiantes recurrieran al hexágono regular cuando se les decía hexágono convexo y aprovechar para ver en qué medida lo hacían.

Con las partes (b) de las actividades 8 y 9, al considerar un polígono cuya cantidad de lados es un número de tres cifras, se busca eliminar la evidencia empírica como forma de argumentar la respuesta por parte de los estudiantes y ponerlos en una situación donde tengan que recurrir a otro tipo de argumentos.

Con la actividad 9 se busca además crear una contradicción entre lo que se espera que los estudiantes conjeturen: que la suma de los ángulos externos de un polígono aumenta a medida que aumenta su número de lados (basados en lo trabajado en la Actividad 8) y la evidencia que obtengan haciendo mediciones; de esta manera generar en los estudiantes la necesidad de elaborar una demostración.

Las actividades 8 y 9 están referidas a polígonos convexos ya que The Geometer's Sketchpad sólo mide ángulos menores que 180º.

En esta sección expusimos cómo fue pensada la secuencia de actividades. Asumimos como hipótesis de trabajo que dicha secuencia de actividades genera en los estudiantes la necesidad de elaborar demostraciones. También asumimos como hipótesis que algunas actividades transcurrirán por el camino sugerido.

4.3 Metodología de investigación

Siendo el presente un estudio cualitativo y dado lo reducido de los dos grupos –cuatro parejas en uno y cinco en el otro– se consideró viable que el investigador pudiera ir tomando notas sobre el trabajo de cada una de las parejas mientras transcurría la clase. Esto difícilmente hubiera sido posible si los grupos hubieran sido más numerosos.

En nuestro experimento se buscó preservar intactas las exigencias del curso al cual asistían los estudiantes, por consiguiente no contemplamos hacer entrevistas o cuestionamientos fuera de las actividades de clase, pues en caso de hacerse entrevistas éstas se harían fuera de los horarios de clase lo que implicaría un compromiso extra por parte del estudiante. De esta forma se buscó percibir las constantes y las excepciones en las forma de proceder de cada pareja por un lado, y de cada uno de los grupos por el otro.

Según Gutiérrez (1999, pág. 171): "La recogida de información cualitativa se hace generalmente de una de estas dos formas: la observación y las entrevistas. La primera forma tiene lugar cuando se desea investigar sobre el comportamiento de un grupo de estudiantes, pues la información que se recoge procede del grupo completo, o de un numeroso conjunto de sus elementos, y no de individuos aislados. Se debe recurrir a este método de trabajo cuando se es consciente de que los resultados de la investigación estarán altamente influenciados por las interacciones sociales del grupo formado por un profesor y sus alumnos durante su actividad cotidiana en el aula.”

Siguiendo con el método experimental sugerido por Gutiérrez, (1999, págs. 171-172) “...Aquí le surgirá al investigador un dilema en cuanto a su forma de actuar durante la investigación: por una parte, su presencia supone la aparición de un elemento extraño que puede producir distorsiones en el ‘ecosistema’ habitual del aula, las cuales serán más importantes cuanto más activo sea el papel del investigador; desde este punto de vista, lo ideal es que no estén en el aula más que las personas habituales (profesor y estudiantes). Pero, por otra parte, si el investigador no entra en el aula, la única fuente de información sobre lo que ha pasado es el profesor; la experiencia indica que los informes de los profesores suelen ser parciales (es imposible estar atento a lo que hacen todos los estudiantes durante todo el tiempo y, además, recordarlo todo) e involuntariamente sesgados (normalmente el profesor no sabe con exactitud qué es lo que busca el investigador ni cuáles son los aspectos más interesantes para él). Luego la recogida de información debería hacerla directamente el investigador y, salvo que el profesor sea un miembro del equipo investigador, es razonable que haya en el aula, como mínimo, un operador con una cámara de vídeo.”

En nuestro caso, el investigador fue el mismo profesor del grupo, por lo que sólo fue necesario diseñar una forma de recabar la información deseada sin introducir “perturbaciones” en las actitudes de los alumnos y sus producciones. Se pensó grabar (tanto en audio como en video) las clases para disponer de mayor información, pero experiencias previas hechas con otros grupos nos llevaron a desechar tal posibilidad: Introducir en el salón de clases elementos extraños al proceso de enseñanza y aprendizaje –como pueden ser grabadores, cámaras de video u observadores externos– hacen que los estudiantes no se comporten de forma natural como lo harían en una clase corriente. Algunos estudiantes, por estar siendo filmados o grabados, se sienten en la obligación de pensar cuidadosamente lo que van a decir y cómo lo van a decir, suponen que su respuesta natural no es de interés para el investigador o que este espera otro tipo de respuestas; otros, que viven la presencia de grabadores o cámaras en el salón de clase como algo experimental y ajeno al desarrollo normal del curso, no se comprometen con las actividades y se despreocupan de lo que van a decir y de cómo lo van a hacer. En ambos casos, por exceso o por falta de compromiso de los estudiantes, la información obtenida es acerca de un proceso que tiene características no deseadas.

Compartimos con Flores (2004, pág. 32) “considerar el aula y los procesos de enseñanza y aprendizaje que se dan dentro de ella como un sistema. La evaluación del desarrollo de este sistema y los cambios significativos que se den dentro de éste deben evaluarse a través de lo que se produzca dentro de él y de las impresiones del impartidor que tiene una posición privilegiada para llevar a cabo esta evaluación.”

Por otro lado “Se habla de dos tipos de observación: la observación participativa, en la cual el observador trata de comportarse como un miembro del grupo, para comprender mejor sus interacciones aunque, al mismo tiempo, toma una postura de observador externo, para tener una perspectiva objetiva adecuada sobre las actividades del grupo. Y la observación no participativa (o neutra), en la cual el investigador trata de pasar lo más desapercibido posible y no tiene ningún tipo de relación con los miembros del aula” (Gutiérrez, 1999, pág. 172). Nosotros optamos por una observación participativa, buscamos entender qué están haciendo los estudiantes mientras se enfrentan a las tareas –esto se podría hacer con una observación no participativa–, además de tratar de comprender por qué lo están haciendo y para ello en ciertas ocasiones es imprescindible preguntar sobre ciertos procedimientos o resultados.

Siendo el investigador el propio docente de los grupos en los cuales se lleva adelante la experiencia, es necesario explicitar las expectativas previas del investigador:

- el trabajo en un ambiente de GD facilitaría la formulación de conjeturas por parte de los estudiantes, pero no contribuiría a desarrollar un pensamiento deductivo ya que los estudiantes que trabajan en un ambiente de GD se quedarían conformes con la contundencia de la prueba del arrastre;
- estudiantes que trabajan con lápiz y papel, al ser engorroso el proceso de hacer sucesivas figuras y las mediciones correspondientes –sumado esto a la imprecisión de las mismas–, después de hacer una figura que estaría representando a todas las figuras posibles en las condiciones de la letra, tenderían a recurrir a la letra del problema y a resultados obtenidos en problemas

anteriores para formular una conjetura y elaborar una explicación deductiva. El razonamiento deductivo no se vería entorpecido por conocimientos de otro tipo como en el trabajo en GD.

Para la comparación de ambos grupos –(L) y (SF)– se escogieron escuelas con características parecidas, es decir instituciones privadas, del mismo barrio y con estudiantes provenientes de familias de nivel adquisitivo similar; ambas instituciones tienen una concepción de enseñanza similar. El año en que se hizo la experimentación ambos grupos tenían casi el mismo número de estudiantes, las notas con que los estudiantes habían aprobado el curso anterior eran similares salvo una estudiante (SF) que recursaba, el investigador es el docente responsable de ambos cursos desde hace varios años. Pensamos en el trabajo tanto en un ambiente de GD como con lápiz y papel como puntos de observación del proceso de razonamiento de los estudiantes y no como dos entornos que necesariamente se contraponen.

Teniendo en cuenta los elementos señalados consideramos importante poder establecer algunos rasgos característicos presentes en la enseñanza de la demostración donde sólo se hace uso de lápiz y papel, esta es información valiosa si tenemos en cuenta que es la forma en que el cuerpo docente enseña geometría en nuestro país y que ésa es la realidad que queremos transformar –porque ya conocemos sus resultados– y para ello necesitamos comprenderla, ser capaces de explicar los motivos de su fracaso.

Este trabajo tiene presente la preocupación expresada por reconocidos investigadores (Godino, 2000, pág. 347; Gutiérrez, 1999, pág. 158) acerca del marcado divorcio existente entre la investigación que se desarrolla en el ámbito académico y su aplicación práctica a la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Una posible vía de solución a esta problemática sería que investigadores y profesores caminaran juntos en la empresa de investigación, tal como lo sugiere Kilpatrick (citado en Godino, 1993, pág. 17). Coincidimos con D'Amore (2000, pág. 49) en que el efecto empírico de la investigación está todavía en la actualidad bastante lejano al salón de clases y que "en el próximo milenio se deberá perseguir una meta más compleja: construir un currículum consistente con los resultados obtenidos en las investigaciones."

Somos conscientes de la problemática que relata Schoenfeld (2000)[15] pero aquí no se trata de evaluar mediante un test dos formas distintas de instrucción con finalidades distintas sino que es una misma secuencia de actividades con la misma finalidad en ambos grupos –involucrar a los estudiantes en la demostración de conjeturas previamente formuladas por ellos mismos – y lo que varía en uno y otro grupo es el uso o no del software. No buscamos aquí tomar partido por el trabajo en uno u otro ambiente –GD o lápiz y papel– sino de analizar cómo afecta cada ambiente la producción de un razonamiento deductivo.

La información se obtuvo de las hojas de trabajo entregadas por cada pareja de estudiantes al profesor y de las notas tomadas en clase por el profesor durante la realización de las actividades. De esta forma se tomaron en cuenta, mediante las hojas de trabajo, las justificaciones finales elaboradas por cada pareja y, por medio de las notas, aspectos destacados del proceso seguido por cada pareja en la elaboración de dichas justificaciones. En el caso de los estudiantes (L) que trabajaron en un ambiente de GD también se contó con las construcciones hechas por cada pareja en The Geometer's Sketchpad.

La información proveniente de las hojas de trabajo entregadas por las parejas de estudiantes al finalizar cada actividad se organizó de acuerdo con los esquemas de

---

[15] "Hacia mitad de los noventa los encargados del programa del National Science Fundation (NSF) estaban convencidos de que la reforma del cálculo era 'buena' y que debía ser un modelo para la reforma en otras áreas de contenido. El NSF reunió a los matemáticos que habían estado implicados en la reforma con investigadores en educación matemática y planteó la siguiente pregunta: '¿Podemos conseguir evidencia de que la reforma del cálculo funciona (o sea, que la reforma del cálculo es mejor que el cálculo tradicional)'? Lo que tenían en mente, básicamente, era una forma de test. Pensaron que sería fácil construir un test, administrarlo, y demostrar que los estudiantes de la reforma lo harían mejor.

Los que eran partidarios de esta aproximación no comprendían que lo que proponían sería en esencia como una comparación de manzanas con naranjas. Si se da un test tradicional que se apoya fuertemente en la habilidad para realizar manipulaciones simbólicas, los estudiantes de la 'reforma' estarían en desventaja porque no practicaron destrezas de cálculo. Si se da un test que requiere el uso de tecnología o que tenga un fuerte componente de modelización, los estudiantes tradicionales estarían en desventaja porque la tecnología y la modelización no habían sido una parte importante de su currículum. De cualquiera de las dos formas, dar un test y comparar puntuaciones sería injusto." (págs. 3-4) demostración propuestos por Sowder y Harel (1998) y a los tipos de prueba propuestos por Balacheff (1998, 2000a), presentados en las secciones 2.1 y 2.2 respectivamente. A partir de las hojas de trabajo y las notas tomadas en clase por el profesor se determinó el nivel de van Hiele en el que trabajaba cada pareja.

5. Análisis de datos y resultados

Con base en lo trabajado por cada pareja de estudiantes[16] en las actividades 6 a 9 se construyeron tablas (consignadas en el Apéndice 2) donde se indica el argumento central generado por cada pareja en la justificación de cada actividad, seguido del esquema de demostración (Sowder y Harel, 1998) y del tipo de demostración (Balacheff, 1998, 2000a) al que correspondería. También se indica el Nivel de van Hiele en el que estaría trabajando cada pareja. La forma en que se hizo este análisis quedará en claro de inmediato cuando reportemos lo realizado por las parejas frente a una actividad. De esta manera se busca comparar los argumentos producidos por parejas de estudiantes que trabajan en un ambiente de GD con los producidos por estudiantes que lo hacen con lápiz y papel.

A partir del análisis consignado en las tablas (Apéndice 2) se pudo apreciar la regularidad de cada pareja en lo referente a niveles de van Hiele, a tipos de prueba[17] y a esquemas de demostración[18], presentadas en ese orden en los cuadros siguientes, a lo largo de las actividades 6 a 9.

Act.	**Lápiz y papel (San Felipe)**				
	EE	**AS**	**MV**	**LM**	**GM**
6	Nivel 2 Emp. Ingenuo (1) Esq. Perceptivo →Esq.Inductivo(1)	Nivel 2 Emp. Ingenuo (1) Esq. Inductivo (1)	Nivel 2 Emp. Ingenuo (1) →Exp. Crucial Esq. Inductivo (2)	Nivel 2 Emp. Ingenuo (2) Esq. Inductivo (2)	- Exp. Mental Esq. Ritual
7	Nivel 2 Emp. Ingenuo (2) Esq. Perceptivo (2)	Nivel 2 Emp. Ingenuo (1) Esq. Inductivo (1)	No elaboran una prueba	Niveles 2 y 3 Emp. Ingenuo (2) Esq. Inductivo (2) y Esq. Perceptivo (1)	Niveles 2 y 3 Emp. Ingenuo (1) Esq. Inductivo (1)

16 Los equipos que trabajan en un ambiente de GD (Latino) están conformados por Janine y Paula (JP), Javier y Matías (JM), Andrés y Diego (AD), Bruno y Daniel (BD); los que trabajan con lápiz y papel (San Felipe) por Emilio y Enrique (EE), Anaclara y Santiago (AS), Matías y Valeria (MV), León y Martín (LM), Graciana y Matías (GM).

17 El número de casos considerados en el tipo de prueba empirismo ingenuo figura entre paréntesis en las tablas.

18 El número de casos considerados en los esquemas de demostración perceptivo e inductivo figura entre paréntesis en las tablas.

8(a)	- Emp. Ingenuo	- Emp. Ingenuo	- Emp. Ingenuo	- Emp. Ingenuo	- Emp. Ingenuo
i)	Esq.Inductivo (1)	Esq.Perceptivo (1)	Esq.Perceptivo (1)	Esq. Perceptivo (1)	Esq. Inductivo (1)
ii)	Esq. Perceptivo (2)	Esq.Perceptivo (2)	Esq.Perceptivo (1)	Esq. Perceptivo (1)	-
iii)	Esq. Inductivo (1)	Esq.Perceptivo(∞)	Esq. Perceptivo(1)	Esq. Perceptivo (2)	Esq. Inductivo (∞)
8(a) iv)	Nivel 2 Emp. Ingenuo (2) Esq. Inductivo (2)	Nivel 4 Ej. Genérico Esq. Axiomático	Nivel 4 Ej. Genérico Esq. Axiomático	Niveles 2 y 3 Emp. Ingenuo (2) Esq. Inductivo (2)	Nivel 2 Emp. Ingenuo (1) Esq. Inductivo (1)
8(b)	No elaboran una prueba	Nivel 2 Emp. Ingenuo (3) Esq. Inductivo (3)	No elaboran una prueba	Niveles 3 y 4 Emp. Ingenuo (2) $\rightarrow$Ej. Genérico Esq. Empírico (2) $\rightarrow$Esq. Analítico	Niveles 2 y 3 Emp. Ingenuo (1) Esq. Inductivo (1)
9(a)	Nivel 4 Exp. Mental Esq. Analítico	Nivel 4 Exp. Mental Esq. Analítico	Nivel 2 No elaboran una prueba	Nivel 2 No elaboran una prueba	Nivel 4 Exp. Mental Esq. Analítico
9(b)	Nivel 3 Exp. Mental Esq. Analítico	No elaboran una prueba	No elaboran una prueba	Nivel 2 Emp. Ingenuo (2) Esq. Inductivo (2)	Nivel 4 Exp. Mental Esq. Analítico

Podemos afirmar así que las producciones de los estudiantes que trabajaron en un ambiente de GD correspondieron mayoritariamente a los Niveles 3 y 4 de van Hiele, a pruebas intelectuales y a esquemas de demostración analíticos; mientras que las producciones de los estudiantes que trabajaron con lápiz y papel correspondieron mayoritariamente a los Niveles 2 y 3 de van Hiele, a pruebas pragmáticas y esquemas de demostración empíricos. Aclaramos que para nada estamos sugiriendo aquí que la producción de los estudiantes en Niveles 2 y 3 de van Hiele fue empírica debido a que hicieron uso de lápiz y papel, y que la producción de estudiantes en los Niveles 3 y 4

Act.	**GD (Latino)**			
	JP	**JM**	**AD**	**BD**
6	Nivel 4 Exp. Mental Esq. Axiomático	Nivel 4 Exp. Mental Esq. Axiomático	Niveles 3 y 4 Exp. Mental Esq. Axiomático	Nivel 4 Exp. Crucial Esq. Perceptivo y Esq. Inductivo (1)
7	Nivel 4 Exp. Mental Esq. Axiomático	Nivel 4 Exp. Mental Esq. Axiomático	Nivel 4 Exp. Mental Esq. Axiomático	Nivel 4 Ej. Genérico Esq. Axiomático
8(a) i) ii) iii)	- Emp. Ingenuo Esq. Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)	- Emp. Ingenuo Esq. Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)	- Emp. Ingenuo Esq. Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)	- Emp. Ingenuo Esq. Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)
8(a) iv)	No elaboran una prueba	Niveles 3 y 4 Emp. Ingenuo (1) → Ej. Genérico Esq. Inductivo (1) → Esq. Analítico	Nivel 4 Emp. Ingenuo (1) → Ej. Genérico Esq. Inductivo (1) → Esq. Analítico	Niveles 3 y 4 Prueba Intelectual Esq. Inductivo (4)
8(b)	No elaboran una prueba	Niveles 2 y 3 Emp. Ingenuo (1) → Exp. Mental Esq. Inductivo (1) → Esq. Analítico	No elaboran una prueba	Nivel 2 Emp. Ingenuo (4) Esq. Inductivo (4)
9(a)	Nivel 4 Exp. Mental Esq. Axiomático	Nivel 4 Exp. Mental Esq. Axiomático	Nivel 4 Exp. Mental Esq. Axiomático	Nivel 2 No elaboran una prueba
9(b)	Nivel 4 Exp. Mental Esq. Axiomático	Nivel 4 Exp. Mental Esq. Axiomático	Niveles 2 y 3 Exp. Mental Esq. Axiomático	Niveles 2 y 3 Exp. Mental Esq. Inductivo (4)

fue analítica debido al trabajo en un ambiente de GD.

Nos planteamos estudiar cualitativamente cómo afecta la Geometría Dinámica la producción de un razonamiento deductivo (en el caso de que lo haya) en estudiantes de

Bachillerato Diversificado que trabajan en la formulación y validación de conjeturas referidas a actividades de geometría.

Para ello analizaremos las producciones de las parejas de estudiantes buscando establecer un vínculo entre el Nivel de van Hiele en el que trabajaron, el tipo de pruebas que desarrollaron, y si su concepción se puede inscribir en alguna de los esquemas de demostración. Ponderando las características del comportamiento de las parejas de estudiantes frente a las tareas propuestas posiblemente podamos tener elementos para responder nuestra pregunta de investigación.

Debido a las características de estabilidad señaladas antes, de las producciones de las parejas de estudiantes frente a las actividades propuestas, cuyo primer análisis se consignó en el Apéndice 2 y del cual las tablas anteriores son un extracto, resolvimos estudiar las producciones de todas las parejas frente a una misma actividad (y no las producciones de algunas parejas a lo largo de las distintas actividades). De esta manera creemos podemos tener una visión más precisa de cómo afecta la producción de un razonamiento deductivo el trabajo en un ambiente de GD o con lápiz y papel.

La Actividad 6 fue la considerada: *Construye un triángulo ABC y los ángulos externos CBP, ACQ y BAR. ¿Qué puedes decir de la suma de dichos ángulos? Explica por qué.*

Veamos primero el trabajo de los estudiantes que usaron lápiz y papel.

Emilio–Enrique: Construyen un triángulo equilátero, lo hacen con regla y compás. Construyen los ángulos externos y miden con el semicírculo. La suma de los tres ángulos externos les da 362.

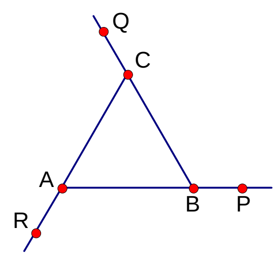
- Debería ser 360º, dicen.

- ¿Y si fuera otro triángulo?, pregunto.

- En la letra decía 'construye un triángulo', acá está, dice Emilio señalando el triángulo equilátero que habían construido.

- ¿Cómo deciden si es 360º o si es 362º?, pregunto.

Enrique sugiere construir otro triángulo con más cuidado (se sobreentiende que es equilátero) y volver a hacer las mediciones.



Los dejo haciendo la construcción y oigo que comentan:

- Enrique: Estos ángulos son de 60º, así que estos otros son de 120º...
- Emilio: ... y 120º + 120º + 120º es 360º.
- Ya está, dicen juntos.

Me llaman para comunicarme sus novedades, se sienten de lo más contentos con su explicación.

- ¿Por qué los ángulos miden 60º?, les pregunto.
- Porque el [triángulo] equilátero tienen tres ángulos de 60º.

Así, de esa manera tan inocente, surgía el razonamiento deductivo: trayendo trabajo pero también la recompensa del placer que daba la claridad.

Que la prueba generada y acordada por Emilio y Enrique no es una demostración, no hay ninguna duda; tampoco hay ninguna duda de que es un buen inicio. En dicha prueba esta presente lo medular de una demostración matemática: el razonamiento deductivo arrojando luz sobre una situación originalmente desconocida –enunciado de la actividad–, posteriormente ambigua –¿360º o 362?–, finalmente develando su misterio. Y de una manera muy peculiar: exclusivamente a partir de información que figura en la letra –y no de mediciones, por ejemplo– (al menos en la interpretación que le han dado construyendo el triángulo equilátero) han concluido que la suma de los ángulos externos es 360º.

¿Cómo se armó dicho razonamiento? Empezó por la mitad (si los ángulos interiores miden 60º, entonces los ángulos externos miden 120º), siguió hasta el final (120º + 120º + 120º = 360º), y finalmente se aclaró el inicio (los ángulos son de [miden] 60º porque el triángulo es equilátero).

“Jamás tan cerca arremetió lo lejos” dice Vallejo. Que el triángulo equilátero es el que tenía tres lados iguales y tres ángulos iguales había vivido de alguna forma en Emilio y Enrique desde los primeros años de la Enseñanza Primaria hasta que esa mañana habían ido en su búsqueda para resolver una situación incierta. ¿Cómo avanzar sobre lo incierto sino a partir de lo seguro? Sentían el placer de haber ellos mismo hallado una explicación para la situación planteada. Para Emilio y Enrique no había nada más allá del triángulo equilátero: tres lados iguales, tres ángulos iguales, otros tres ángulos iguales que finalmente sumados hacían 360º. No se daban cuenta que habían recurrido al triángulo equilátero no solo a la hora de buscar una explicación sino mucho antes: a la hora de hacer la figura después de leer el enunciado de la actividad.

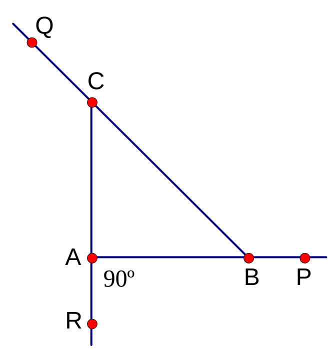
En cuanto a los Niveles de van Hiele esta pareja de estudiantes se podría ubicar en el Nivel 2, en una etapa de análisis donde “la demostración de una propiedad la hace mediante su comprobación en uno o en pocos casos.” (Gutiérrez y Jaime, 1991)

Según la clasificación de pruebas de Balacheff (1998, 2000a), la elaborada por Emilio y Enrique en esta actividad correspondería a una prueba pragmática, en particular al empirismo ingenuo donde se establece la validez de un resultado basándose en su verificación en algunos casos.

Emilio–Enrique, al trabajar con un triángulo equilátero y limitar su explicación a dicho triángulo, mostrarían un esquema de demostración empírico. Al principio (cuando hacen las mediciones de los ángulos con el semicírculo) un esquema de demostración perceptivo: “estudiantes que llegan a conclusiones basados en sus percepciones de uno solo, u ocasionalmente varios, dibujos.” (Sowder y Harel, 1998); finalmente un esquema de demostración inductivo: “cuando los estudiantes buscan convencerse a sí mismos y a otros evaluando una conjetura a través de uno o más ejemplos”, de un solo caso.

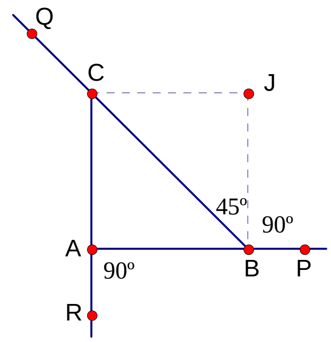
Anaclara–**Santiago**: Construyen, con regla y compás, un triángulo rectángulo isósceles. Inmediatamente oigo:

- Este ángulo [RAB] mide 90º, sanciona Santiago.
- Porque el interior [CAB] mide 90º, aclara Anaclara.



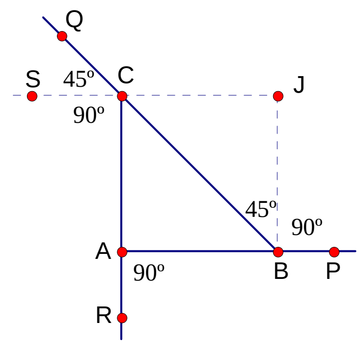
Constuyendo el triángulo rectángulo isósceles, apoyado sobre uno de los catetos, Anaclara y Santiago se mostraban enteros, pero tenía yo que reconocer que la elección ya había dado sus frutos. ¿Inocente? Puede ser. Pero sin ninguna duda deducción.

¿Y de los otros ángulos externos? Ni idea, no se les ocurre alguna menara de saberlo. Yo supongo que ahora usarán el hecho de que el triángulo es isósceles –y como es rectángulo– que los otros ángulos (interiores) del triángulo miden 45º y así llegar a los otros ángulos externos. Los siguen observando pero no se les ocurre nada, y no recurren al semicírculo para medirlos sino a otra figura conocida: el cuadrado. Construyen el cuadrado ABJC. Y ahí está el cuadrado también dando sus frutos:



- Santiago: Este ángulo [JBP] es de 90º.
- Anaclara: Y este [CBJ] es de 45º porque BC es diagonal y divide al ángulo [ABJ] al medio.
- S-A: Así que entonces CBP es [mide] 135º.
- A: Y acá [señalando el ángulo ACQ] pasa lo mismo.
- Yo: ¿Por qué?
- A: Estos ángulos [PBC y QCA] son iguales.
- Yo: ¿Si? No veo por qué.

Dada la figura que tienen supongo que ahora sí usarán que el ángulo ACB mide 45º y de ahí deducirán la medida de ACQ. Nuevamente me equivoco:

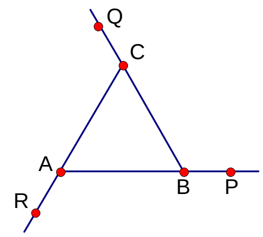


- S: Si prolongamos este segmento [CJ] tenemos un ángulo de 90º y otro de 45º.
- Yo: El de 90º les creo.
- A: Si, es de 45º porque BCJ mide 45 y QCB es opuesto por el vértice, así que son iguales.

Desde un primer momento Anaclara y Santiago recurrieron a las propiedades de las figuras involucradas siguiendo un camino deductivo en la construcción de su prueba. La prueba elaborada como justificación de la respuesta a la actividad planteada no fue una demostración –comprende el único caso del triángulo rectángulo isósceles–, y sin embargo en el tratamiento de ese único caso considerado estuvo el razonamiento deductivo en todo momento. No es una demostración porque a partir de la validez de la conjetura en el caso del triángulo considerado Anaclara y Santiago afirman que “siempre va a ser así”, que la conjetura va a ser válida para todo triángulo; están recurriendo a un razonamiento no deductivo de tipo inductivo donde la validez de las premisas (del caso considerado) ofrece un apoyo parcial a la validez de la conclusión (de la conjetura).

Consideramos que trabajan en el Nivel 2 de van Hiele, que su prueba puede considerarse como empirismo ingenuo y que su esquema de demostración es inductivo de un solo caso.

Matías–Valeria: Construyen un triángulo equilátero. Tienen el triángulo, tienen el semicírculo: miden sus ángulos externos con el semicírculo, suman y pronto: obtienen 360º.



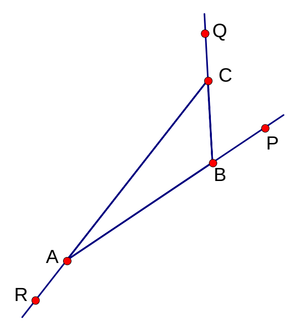
- Yo: ¿Y si el triángulo no fuera equilátero?

Mientras me alejo oigo a Valeria decirle a Matías:

- V: Cada uno podía elegir el triángulo que quisiera, nosotros elegimos este, ¿qué tiene de malo?

No logran entender la peculiaridad de su figura. Reemprenden la tarea molestos, como pensando que mi intención es complicar(los) por haber sido los primeros en terminar.

- Vamos a hacer un triángulo 'bien cualquiera' así [el profesor] no nos va a poder decir nada, propone Valeria.



Hablan de construir un triángulo obtusángulo como algo exótico. Después de algunas dificultades en construir los ángulos externos tienen finalmente la figura buscada. Como al principio: tienen el triángulo, tienen el semicírculo: miden sus ángulos externos con el semicírculo, suman y pronto: obtienen 358º.

Ambos concuerdan en que debería dar 360º, Matías explica:

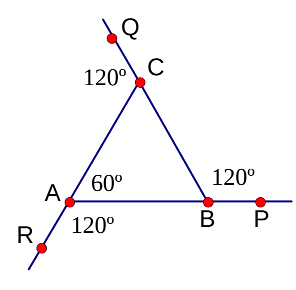
- La diferencia es por el trazado y por errores al medir.

Terminada la tarea se preguntan:

- ¿Por qué demoran tanto los otros equipos?

En ningún momento, mientras elaboraban su prueba, recurren a las propiedades de las figuras que consideran ni a ninguna de las actividades previas ya trabajadas en clase. No se encuentran indicios de razonamiento deductivo en su justificación.

Consideramos que esta pareja podría ubicarse en el Nivel 2 de van Hiele. Inicialmente la prueba ofrecida por Matías y Valeria correspondería al empirismo ingenuo, la prueba final se encuadraría dentro de experiencia crucial. En cuanto al esquema de demostración: esquema perceptivo.

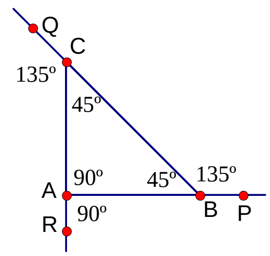


León–**Martín**: Con regla y compás, construyen un triángulo equilátero. Mirando la figura comentan:

- L: Los ángulos [del triángulo] son de [miden] 60º, así que este otro [RAB] es de 120º. Con los otros [PBC y QCA] es lo mismo.
- M: Así que 120º por 3 da 360º.
- L: Vamos a hacer otro [triángulo].

Construyen ahora un triángulo rectángulo isósceles. Empiezan a analizar su nueva figura:

- M: Este [CAB] es de [mide] 90º. Estos otros [ABC y ACB]...
- L: Son de 45º porque así con el [sumados al] de 90º completan los 180º del triángulo.
- M: Este de afuera [PBC] mide 180º menos 45º ...que da 135º.
- L: Y este otro [QCA] es igual [a PBC].
- M: Ahora sumamos 135º más 135º más 90º que da 360º.



Basándose en lo trabajado hasta el momento afirman que "siempre va a ser así".

En los dos triángulos considerados razonan deductivamente de una forma impecable. Claro que su prueba no es una demostración ya que le falta generalidad, alcanzar a todos los triángulos. Pero en lo trabajado en ambos casos hay elementos en común: primero hallan los ángulos interiores del triángulos, después los ángulos externos, luego suman dichos ángulos externos para obtener finalmente 360º. También en ambos casos resuelven la situación de la forma más económica, sin hacer trazados auxiliares o calcular ángulos prescindibles.

Su pensamiento geométrico podría ubicarse en el Nivel 2 de van Hiele, la prueba elaborada en el empirismo ingenuo, su esquema de demostración en el esquema inductivo apelando a dos casos.

Graciana–**Matías**: La que toma la iniciativa es Graciana, quien está recursando.

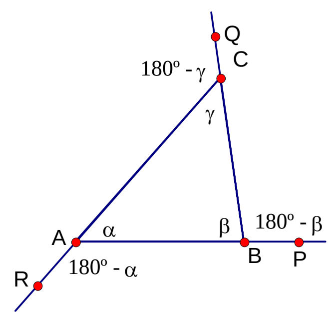
- G: Tenemos que hacer un triángulo que no tenga nada de especial, porque sino no sirve.

Una vez construido el triángulo con regla Graciana identifica la actividad propuesta con un teorema del año anterior. Me llama y dice:

- G: Esto [la actividad] es un teorema que vimos el año pasado. ¿Por qué no nos decís cómo es la demostración? Sería mucho más rápido.
- Yo: La idea es que hagan ustedes una demostración, le respondo.
- G: Pero no me acuerdo como era.
- Yo: No tiene por qué ser la misma del año pasado.
- G: Pero si ya tengo la que nos diste vos, ¿para qué hacer otra si esa es la que sirve?
- Yo: ¿La tenés acá?, pregunto.
- G: No.
- Yo: Mejor, así pueden pensar ustedes una demostración. Recuerden que en la explicación que den tienen que estar los dos de acuerdo.

Después de trabajar un rato Graciana finalmente termina reconstruyendo la demostración del teorema vista el año anterior. Y le va explicando a Matías:

- G: A estos ángulos [CAB, ABC, BCA] los llamamos α, β, γ. Ahora calculamos [las medidas de] los ángulos BAR, CPB y ACQ.



Van escribiendo en la figura.

BAR = 180º – α, CBP = 180º – β, ACQ = 180 – γ.

- G: Ahora los sumamos

180º – α + 180º – β + 180 – γ

y como α, β y γ [sumados] dan 180º, todo da 360º.

Tratar de asignar un Nivel de van Hiele de pensamiento geométrico basándonos como única evidencia en lo trabajado en esta actividad por Graciana y Matías no sería correcto ya que centralmente lo que hubo fue un trabajo de rememorar una demostración hecha por el profesor el año anterior. El tipo de prueba elaborada corresponde a experiencia mental. El esquema de demostración es externo ya que “lo que convence al estudiante como lo que el estudiante puede ofrecer para persuadir a otros tiene una procedencia exterior”, y si tuviéramos que precisar más nos inclinaríamos por afirmar que es un esquema ritual donde el peso del argumento es juzgado en gran medida por su forma y no por su exactitud.

La prueba presentada por Graciana y Matías hace uso del razonamiento deductivo referido a una situación general de la actividad que permite, a partir de la información que figura en el enunciado y de un teorema demostrado en una actividad previa, dar una respuesta a la misma. La prueba expuesta sí es una demostración.

Veamos ahora el trabajo de los estudiantes que usaron The Geometer's Sketchpad.

Janine-Paula: Hacen la construcción, miden los ángulos externos, los suman y tienen la respuesta a la pregunta ¿qué puedes decir de la suma de dichos ángulos?

- J-P: Que la suma [de los ángulos externos] siempre da 360º.

Empiezan ahora a tratar de explicar por qué.

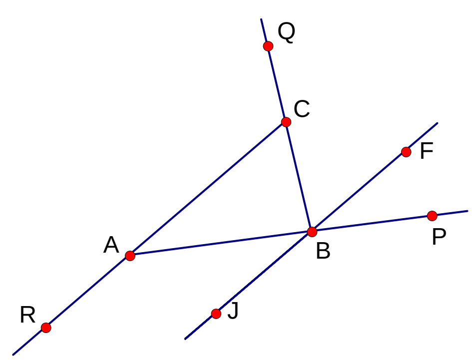
- J: Son [los tres ángulos externos] obtusos.

Paula arrastra uno de los vértices del triángulo y descartan la afirmación por falsa.

- J: Pero uno [de los ángulos externos] siempre es obtuso.

- P: No, mirá, hay dos que son obtusos.

Trabajan sobre la figura que tienen en la pantalla haciendo que cada uno de los ángulos externos sea agudo y verificando en la misma pantalla que efectivamente los otros son obtusos. Para apreciar mejor arrastran las medidas de los ángulos, que estaban en el ángulo superior de la pantalla, a las proximidades de los respectivos ángulos. Trabajan algo en explicar su conjetura y se dan por satisfechas diciendo que 'si uno [de los ángulos externos] es agudo [piensan en un ángulo cuya medida sea cercana a los 90º], como entre los tres tienen que sumar 360º, entre los otros tienen que sumar cerca de 270º y como son dos ángulos van a ser mayores que 90º]'. Dejan esta justificación de lado cuando recuerdan que su problema no es este sino explicar por qué los tres ángulos externos suman 360º.



Deciden trazar por B una recta paralela a AC.

Se percatan mirando en la pantalla y arrastrando de la igualdad de varias parejas de ángulos, verifican dichas igualdades midiendo y arrastrando. Pero como los ángulos son muchos y hay que marcar uno a uno para medirlos Janine empieza a decir que son iguales por algo que ya hicieron antes y recurre al cuaderno.

- J: El [ángulo] CAB es igual al [ángulo] FBP porque son correspondientes y esta recta [JF] es paralela a esta otra [AC], esto es lo que dice la propiedad 1 [Actividad 2 (b)]

Usando la misma propiedad justifican la igualdad de los ángulos: ACB y CBF, CAB y ABJ, RAB y JBP. Como son varios ángulos resuelven hacer una figura en papel y marcar con colores los ángulos iguales. Pero siguen sin poder dar una explicación para el hecho de que los ángulos externos sumen 360º. Me llaman y comentan:

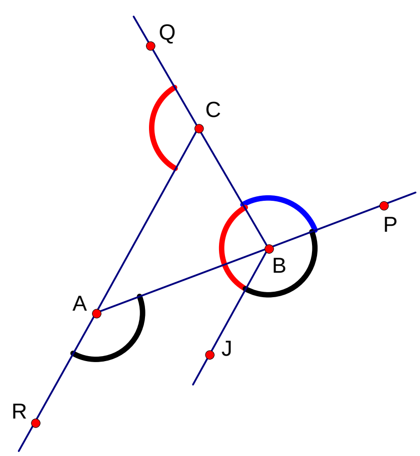
- J-P: Tenemos un montón de [parejas de] ángulos iguales pero no nos sirven de nada.

Las veo mareadas con todas la información que tienen, información cierta además.

- Yo: ¿Qué es lo que quieren hacer?
- J-P: Ver por qué estos tres ángulos [los ángulos externos] suman 360º.

Esto les sirve para darse cuenta que no han centrado su atención en los ángulos externos.

- J: El RAB ya sabemos que es igual al JBP.
- P: El QCA es igual a todo este [CBJ].
- J: Y el CBJ es la suma de CBA y ABJ.
- P: Ya está. El otro [ángulo externo] es este [PBC] y así [entre los tres ángulos externos] completan toda la vuelta.



Parecería que la dificultad que tuvieron en reconocer la igualdad de QCA y CBJ, así como en identificar al ángulo externo PBC, fue debida a que CBJ y PBC aparecen divididos por las semirrectas BA y BF respectivamente.

A la hora de escribir su justificación en papel se dan cuenta que pueden prescindir de la semirrecta BF.

Janine y Paula en su prueba recurren, después del trazado de una paralela, a una propiedad acordada en una actividad previa ya trabajada en clase. Dicha propiedad acordada es la que permite a Janine y Paula explicar la igualdad de algunos ángulos de la figura original con nuevos ángulos surgidos del trazado de la paralela. De estas igualdades no todas son útiles al fin buscado pero la propiedad seguirá siendo útil al igual que la paralela trazada: permitirá establecer la igualdad de dos ángulos externos con dos ángulos de vértice en el tercer vértice del triángulo. El tercer ángulo externo completará, junto a los dos ángulos de vértice en el tercer vértice del triángulo, los 360º. Hallada una explicación viene la hora de escribirla y ahí surge la necesidad de separar la paja del trigo: ciertas afirmaciones, aunque ciertas, no vienen al caso. ¿Para qué escribirlas? En ese momento la paralela también revelará que no toda ella es útil, que una de las semirrectas de origen en el vértice oscurece más que aclarar. La prueba fue una demostración: hizo uso del razonamiento deductivo –dejó en claro que la conjetura era válida-, echó luz sobre una situación –dejó en claro por qué la conjetura era válida– y en ambos aspectos concordaban quienes la habían construido. Ahí están los componentes de una demostración en el ámbito de la matemática escolar: el acuerdo –libremente expresado y en igualdad de condiciones– en torno a un razonamiento deductivo que explica una situación.

¿Afectó la Geometría Dinámica la producción de este razonamiento deductivo de alguna manera?

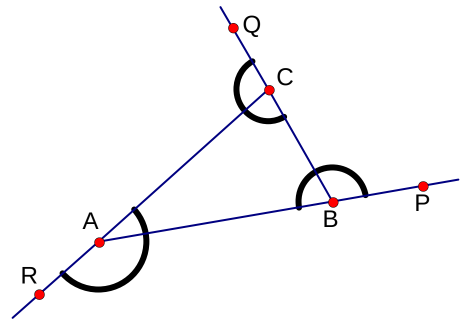
La conjetura se formuló y verificó mediante medición y arrastre en forma inmediata, directa, sin ningún tipo de dificultad.

Luego del trazado de la paralela permitió, visualmente junto al arraste, conjeturar la igualdad de varias parejas de ángulos.

Quizás por lo demorado, quizás por no conformar como explicación, la medición y el arrastre dio paso a una propiedad previamente acordada, que hacía el trabajo más rápido y también más claro, servía también como explicación.

Consideramos que Janine y Paula están trabajando en el Nivel 4 de van Hiele, que la prueba que elaboraron es una experiencia mental. Del esquema de demostración: analítico.

Javier–Matías: Hacen la construcción, miden, suman, obtienen 360º, y constatan que el 360º se mantiene si arrastran alguno de los vértices.



A la hora de buscar una explicación:

J: En cada vértice hay dos ángulos pegados: QCA y ACB por ejemplo.

Matías arrastrando los vértices de forma que el triángulo quede equilátero:

M: Y si hacemos que el triángulo quede equilátero los ángulos de afuera [los ángulos externos] van a medir 120º porque los [ángulos] de adentro [interiores al triángulo] miden 60º.

Así que 120º por 3 nos da los 360º.

J: Si, pero si deformamos el triángulo ya no sirve. Tenemos que hacerlo para cualquier triángulo.

M: No importa, si lo deformamos [al triángulo] siguen habiendo dos ángulos pegados –lo que decías vos al principio– y forman ángulos llanos. Así que si queremos hallar la suma hacemos 180º x 3.

Javier señalando los ángulos externos en la pantalla:

J: Pero lo que queremos es sumar estos otros.

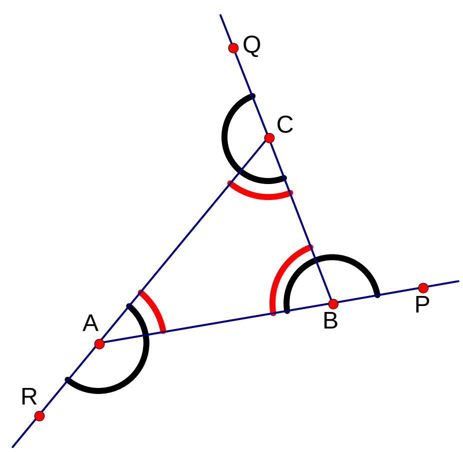
M: Y le restamos a cada media vuelta [180º] el ángulo de adentro: 180º - CAB, por ejemplo.

J ¿Y que tenemos? El número que ya tenemos en la pantalla, la medida del ángulo RAB.

¡Ah, esperá! Podemos hacer eso que decís en los tres vértices.

M: Tendríamos una vuelta y media menos...

J: Menos los tres [ángulos] de adentro [del triángulo].



Simultáneamente Matías que responde la pregunta que se le había formulado mientras hablaba: ¿menos cuánto?

M: Si tiene que dar 360º es ‘una vuelta y media menos media vuelta’

Y simultáneamente:

J: Los tres ángulos de adentro.

M: Media vuelta.

J-M: Los ángulos de adentro suman media vuelta, 180º. Ya está. ¡Qué genios!.

Escriben en la hoja, acompañado de una figura con un triángulo y sus tres ángulos externos marcados:

$$180^{\circ} \times 3 - (CAB + ABC + BCA) = 540^{\circ} - 180^{\circ} = 360^{\circ}.$$

Lo que aparece escrito en la hoja deja de lado el proceso y rescata la idea central: considerar la suma de los ángulos externos de un triángulo como la suma de tres ángulos llanos menos la suma de los ángulos interiores del triángulo. Conocer la suma de tres ángulos llanos no requiere más que hacer el cálculo, conocer la suma de los ángulos interiores del triángulo no requirió de un cálculo sino de apelar a un conocimiento matemático de los primeros años escolares pero que este año fue previamente demostrado y fue el teorema resultante de la actividad 4. La prueba sirve para explicar la situación planteada por la actividad 6, en ella se usa un teorema demostrado previamente para completar un razonamiento que es deductivo, y en dicha explicación hacen acuerdo Javier y Matías: es lo que asumimos como demostración en este trabajo.

Trabajar en un ambiente de Geometría Dinámica, si en algo contribuyó en la demostración de Javier y Matías de este teorema, fue en permitir constatar visualmente y mediante arrastre que en cada vértice del triángulo habían dos ángulos, uno externo y el otro ángulo del triángulo, que eran adyacentes y que completaban un ángulo llano. Sirvió también para analizar la situación en el caso particular del triángulo equilátero y elaborar una justificación deductiva para la misma.

Consideramos que trabajaron en el Nivel 4 de van Hiele, que la prueba que elaboraron es una experiencia mental. Su esquema de demostración es analítico.

Andrés-Diego: Construyen el triángulo, sus ángulos externos, miden dichos ángulos externos y los suman. Arrastran y observan que la suma es constante. En esta dinámica la formulación de la conjetura y su verificación empírica se hacen simultáneamente; en muy poco tiempo y sin ningún esfuerzo. Ya buscando una explicación comentan:

A: Los [ángulos] externos son más grandes que los [ángulos] del triángulo.

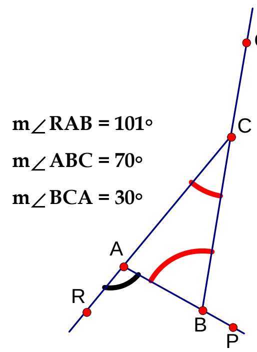
Quiere decir que cada ángulo externo es mayor que el ángulo interior adyacente.

Al decir esto Andrés está mirando en pantalla un triángulo que se asemeja bastante a un triángulo equilátero.

- D: No, fijate, depende de cómo esté el triángulo. Seguro que [RAB] es más grande que este otro [ABC].

Comprueban su conjetura midiendo también el ángulo ABC y arrastrando.

No saben como seguir. Miden también los ángulos CAB y BCA. Siguen arrastrando algún vértice del triángulo.

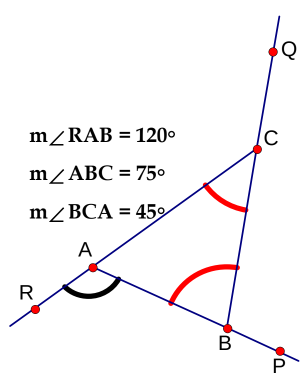


En determinado momento, frente a determinados valores de las medidas de los ángulos RAB, ABC y BCA, surge una observación:

- A: El de arriba [RAB] es la suma de los dos de abajo [ABC y BCA]

Con arriba y abajo hace referencia a las posiciones de las medidas de los ángulos en la pantalla.

- D: Pero no da. 70º más 30º da 100º y ahí [el ángulo] RAB mide 101º.



Resuelven arrastrar algún vértice y ver que pasa: encuentran algunas posiciones donde sí es cierta la conjetura y otras donde no.

La duda desparece cuando Andrés dice:

- A: Se cumple. Es cierto por una propiedad que vimos el otro día.

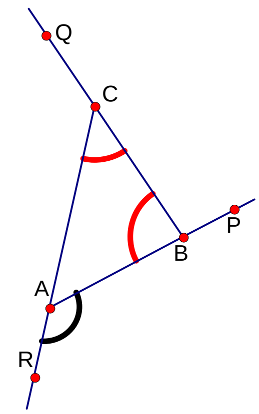
- D: Es verdad.

A-D: Lo mismo va a pasar con los otros ángulos externos. Este ángulo [ACQ] es suma de este [CAB] y este otro [ABC]. Y el [ángulo] PBC es suma de [los ángulos] CAB y ACB.

- D: Sumar los ángulos externos es lo mismo que sumar estos dos ángulos [ABC y BCA] con estos dos [BCA y CAB] y con estos dos [CAB y ABC]. Cada uno [de los ángulos interiores del triángulo] está dos veces.

- A: Así que es 180º por 2.

En la hoja de trabajo escriben y dibujan:



Suman 360º.

Porque: BAR = ABC + ACB

PBC = BAC + ACB

ACQ = BAC + ABC

BAR + PBC + ACQ = 2 $\times$ ABC + 2 $\times$ BAC + 2 $\times$ ACB.

2 $\times$ ABC + 2 $\times$ BAC + 2 $\times$ ACB = 2 $\times$ 180º = 360º.

$\rightarrow$ BAR + PBC + ACQ = 360º.

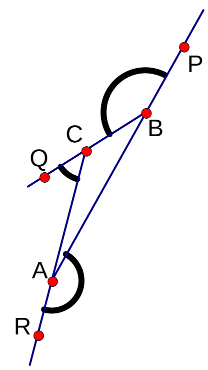
Les pregunto si usaron alguna propiedad anterior en la justificación de la actividad. Dicen que se basaron en que “la suma de dos ángulos interiores de un triángulo es igual al ángulo externo del otro vértice” (Actividad 5). No mencionan que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. (Actividad 4)

El trabajar en un ambiente de Geometría Dinámica contribuyó inicialmente a descartar rápidamente una conjetura falsa. Después a la formulación de una conjetura válida, aunque no a su verificación empírica ya que los valores generados por Sketchpad para las medidas de los ángulos les dejaban a Andrés y Diego un margen de duda. La duda fue despejada recurriendo a un teorema demostrado previamente en el curso. El trabajo en GD no parece haber contribuido a establecer la analogía entre los tres ángulos externos ni en nada de lo que siguió de la demostración.

En cuanto al pensamiento geométrico de Andrés-Diego se podría encontrar entre las etapas de deducción informal y deducción, correspondientes a los niveles tres y cuatro de la clasificación de van Hiele. Si atendemos a los tipos de prueba propuestos por Balacheff estaríamos ante una prueba intelectual, más específicamente una experiencia mental. Si atendemos a los esquemas de demostración esta pareja mostraría, en esta actividad, un esquema de demostración analítico: “cuando la justificación está basada en deducciones lógicas” (Sowder y Harel, 1998).

Bruno-Daniel: Empiezan por hacer la construcción, miden los ángulos externos, los suman y obtienen 360º. Arrastran y confirman que el 360º se mantiene mientras las medidas de los ángulos externos varían.

¿Cómo explicar la conjetura? Son los primeros en llamarme y decirme:

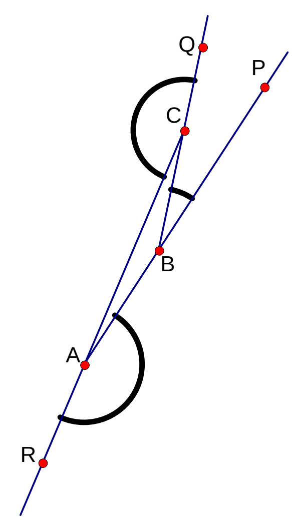


- B-D: Arrastramos el vértice C hacia el lado AB, de esa manera este ángulo [externo QCA] se va achicando y los otros dos [ángulos externos RAB y PBC] se agrandan, se van haciendo llanos, y como son dos hacen 360º.
- B: Se puede llevar [al punto] C hasta [ubicarlo en el segmento] AB, de esa manera un ángulo [el QCA] es [mide] 0º y los otros [RAB y PBC] miden 180º.
- D: Si, pero ahí [en ese caso] no hay triángulo.
- B: Se soluciona fácil: alejás un poquito el punto C de [el segmento] AB y listo.[19]
- D: ¿Cómo escribimos esto?
- Yo: Con una mano agarran el lápiz, con la otra una hoja, la apoyan sobre la mesa...
- B: ¿Podemos escribir acá mismo en el archivo?

No había pensado en esa posibilidad.

- Yo: Si, no hay problema, les digo.

Bruno y Daniel han sido los primeros en dar soluciones para los problemas de construcción de figuras en Sketchpad o de manejo del programa.



Como son los primeros en terminar se quedan arrastrando el triángulo con sus ángulos externos e investigando nuevas posibilidades que puede tener el programa.

Surge así una nueva idea.

- B: Podemos arrastrar [el punto] C hacia la semirrecta BP, así ahora el ángulo [externo] QCA se va agrandando, este otro [ángulo externo CBP] va desapareciendo y el otro [ángulo externo RAB] se va

[19] Una idea similar ya había sido usada por Bruno y Daniel para explicar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º (Actividad 4). Habían arrastrado un vértice del triángulo hacia el lado opuesto, de esa manera el ángulo con vértice en el punto que arrastraban se hacía llano y los otros dos ángulos del triángulo se hacían nulos.

agrandando.

- D: Si, estos dos [ángulos externo QCA y RAB] se van haciendo [ángulos] llanos y el otro [ángulo externo PBC] se va haciendo cero.

- B-D: En total suman dos llanos, que es [lo mismo que] toda la vuelta, los 360º.

Sin escribir lo anterior arrastran C hacia la semirrecta opuesta a AB (que no la tienen trazada) y nuevamente se encuentran que dos de los ángulos externos se acercan a ser ángulos llanos mientras el tercero se acerca a un ángulo nulo.

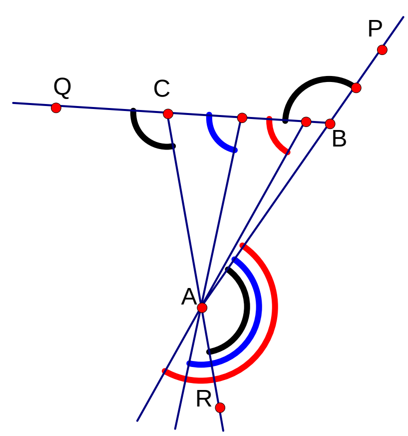
- D: ¡Pero estamos inventando la pólvora! Es todo lo mismo. Al arrastrar [el punto] C hacia la semirrecta BP el punto B se acerca a [al segmento] AC, es lo mismo que arrastrar [el punto] B hacia [el segmento] AC.

Parecería que dudaran entre: lamentar por haberse autollevado a engaño, y alegrarse por haberse dado cuenta del engaño. Siguen arrastrando la figura y haciendo comentarios. Pasados unos minutos me llaman nuevamente y me cuentan:

- B: Si llevamos el punto C sobre el B el ángulo externo de vértice C [QCA] pasa a ser el ángulo [interior al triángulo de vértice] B.

- D: Y el [ángulo] externo de vértice A se hace llano...

- B-D: Y estos dos [ángulos: CBA y CBP] forman otro llano, de ahí los 360º.



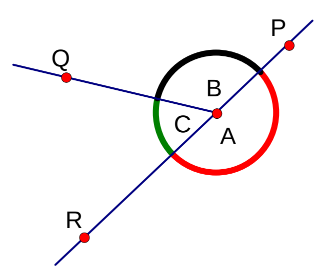
- Yo: Me gusta la idea, pero tengo el mismo problema que tuvo Daniel hace un rato: si el punto C coincide con B no tienen triángulo.

- B: Bueno, igual, [el punto] C no tienen por qué llegar a coincidir con [el punto] B. Si corremos el [punto] C hacia el [punto] B, el ángulo externo [QCA] de vértice C se va transformando en el ángulo [interior al triángulo] B y el ángulo RAB se va haciendo llano.

- Yo: Explíquenlo en forma escrita.

Los dejo escribiendo. Pasan otros minutos y me vuelven a llamar:

- B-D: Y si después [de lo explicado antes] también corremos el punto A hacia el B, cuando se superpongan tenemos toda la vuelta.



Antes de que les diga nada agregan:

- B-D: Si antes no teníamos triángulo ahora mucho menos. Pero la idea está buena, ¿no?
- Yo: Si, me parece muy buena, y también las ideas anteriores. Confieso que nunca las había visto antes.

Que las pruebas generadas por Bruno y Daniel explican la conjetura formulada al inicio resulta indudable. En los tres casos recurren a la situación límite como forma de argumentar. En la primera prueba haciendo que el triángulo se convierta en un segmento arrastrando uno de los vértices hacia el lado opuesto, percibiendo incluso que la explicación es la misma si se arrastra el vértice hacia cualquier punto de la recta que contiene al lado opuesto. En la segunda prueba dejando fijos un lado y un ángulo del triángulo y haciendo variar el tercer vértice hacia uno de los extremos del lado fijo. En la tercer prueba arrastrando uno de los extremos hacia el otro en el lado fijo. En las tres pruebas se va deformando el triángulo, mediante arrastre, de forma continua hasta una situación en que el triángulo deja de ser triángulo, en dicho proceso los ángulos externos también se han ido transformando en ángulos muy peculiares: un ‘ángulo nulo’ y dos ángulos llanos. ¿Es un ángulo el ‘ángulo nulo’? Para Bruno y Daniel sin ninguna duda que si. Declaran: “Si el ángulo se va achicando hasta que los lados se superponen, en ese caso el ángulo se hizo cero.” Vemos que expresan la combinación de dos observaciones en la pantalla: la de las semirrectas que se superponen y la del número que marca la medida del ángulo haciéndose cero, en ambos casos en forma continua. Se da una transición natural entre el triángulo y el segmento, entre un ángulo y el ángulo nulo, entre un ángulo y el ángulo llano. Ese pasaje de un estado a otro posiblemente ponga a prueba, incomode, a algunas de las definiciones matemáticas que usamos, pero en nada parece menguar la capacidad de un estado de echar luz sobre el otro. Ese pasaje de un estado a otro parecería actuar aquí de forma análoga a como actúan los triángulos equiláteros o los triángulos rectángulos isósceles en algunas parejas de estudiantes que trabajan en un nivel de pensamiento geométrico más bajo: a partir de una situación particular buscan inferir, implicar, una situación general. ¿Hay razonamiento deductivo en ellas? Me inclinaría a pensar que no es un razonamiento deductivo sino analógico[20]: si pasamos de una situación a la otra, y viceversa, de manera continua –de triángulo a segmento, de ángulo a ángulo nulo o ángulo llano–, las propiedades de uno de los estados –triángulo y tres ángulos externos– también serán propiedades del otro estado –segmento, ángulo nulo y dos ángulo llanos–. En el caso de los estudiantes que trabajaron con lápiz y papel, en un Nivel 2 de van Hiele, el razonamiento deductivo usado para validar que los ángulos externos de un triángulo equilátero suman 360º se continúa con un razonamiento inductivo donde a partir de lo verificado en uno o dos triángulos se generaliza a todos los triángulos.

¿Podría pensarse también que el razonamiento de Bruno y Daniel es no deductivo inductivo?: la justificación hecha para un caso especial, el caso límite –donde no hay triángulo–, es generalizada al triángulo dinámico –que es todos los triángulos– (y donde los triángulos son todos triángulos). Tendríamos que admitir de esta manera que el caso límite –el segmento y el ángulo nulo– es uno más de los triángulos pero con una cualidad especial: permite encontrar una explicación para la conjetura.

Polya (1989, pág. 116) escribió que "las matemáticas presentadas con rigor son una ciencia sistemática, deductiva, pero las matemáticas en gestación son una ciencia experimental, inductiva."

Podríamos parafrasear que las matemáticas escolares presentadas con rigor usan exclusivamente el razonamiento deductivo, pero las matemáticas escolares en

[20] Según Weston (2001, pág. 47) "Los argumentos por analogía, en vez de multiplicar los ejemplos para apoyar una generalización, discurren de un caso o ejemplo específico a otro ejemplo, argumentando que, debido a que los dos ejemplos son semejantes en muchos aspectos, son también semejantes en otro aspecto más específico."

De una manera un poco más formal Copi (1974, pág. 400) dice "Si a, b, c y d son entidades cualesquiera, y P, Q y R son propiedades o 'aspectos' cualesquiera, puede representarse la forma de un razonamiento analógico de la manera siguiente:

a, b, c, y d tienen todos las propiedades P y Q.

a, b y c tienen todos la propiedad R.

Luego d tiene la propiedad R."

En el razonamiento analógico a partir de la semejanza de objetos en ciertas propiedades o características, se concluye la semejanza de otra propiedad o característica.

El razonamiento analógico no es deductivo porque aunque las premisas sean verdaderas no se sigue necesariamente que la conclusión lo sea, sino que esta última se infiere en forma probable.

gestación son experimentales y recurren tanto al razonamiento deductivo como al no deductivo, sea este inductivo o analógico.

Bruno y Daniel dan indicios de estar trabajando en el Nivel 4 de van Hiele. La prueba elaborada tienen características de experiencia crucial. Su esquema de demostración es perceptivo e inductivo.

6. Conclusiones y sugerencias

En esta sección nos proponemos dar respuesta a la pregunta de investigación que nos planteamos, así como hacer algunas observaciones y sugerencias que se desprenden del presente estudio.

A lo largo de esta experiencia hubo estabilidad en las producciones tanto de las parejas de estudiantes que trabajaron con lápiz y papel como de las que lo hicieron en GD; no se apreció una evolución en los esquemas de demostración, ni en los tipos de prueba, ni en los Niveles de van Hiele de ninguno de los dos grupos a lo largo de la experiencia, posiblemente debido al poco tiempo que duró la misma.

Si aceptamos que el desarrollo del razonamiento deductivo es un proceso lento que se ha iniciado muchos años atrás en la vida del estudiante, parecería sensato también aceptar que el desarrollo de un razonamiento deductivo enfocado a generar demostraciones matemáticas sea un proceso lento y su estudio requiera de un seguimiento más prolongado.

En el presente estudio nos planteamos lo que podría ser un posible embrión de la investigación del desarrollo de un razonamiento deductivo, acotándonos aquí a estudiar cómo afecta la Geometría Dinámica la producción de razonamiento deductivo en estudiantes de Bachillerato Diversificado que trabajan en la formulación y validación de conjeturas referidas a actividades geométricas en el salón de clase.

Para ello se diseñó un proyecto de enseñanza que consistió en diez actividades geométricas por medio de las cuales se buscaba implicar a los estudiantes en la formulación y validación de conjeturas. Dicha experiencia se llevó adelante durante las primeras semanas de clases del año escolar e implicó clase a clase seguir seis etapas: una primera donde cada pareja de estudiantes debía crear una figura y hacer exploraciones en ella; una segunda donde debían generar una conjetura; una tercera donde debían justificar la conjetura que habían elaborado previamente; una cuarta donde debían escribir dicha justificación; una quinta donde debían, en el pizarrón, presentar su demostración al grupo, aclarando dudas y preguntas, así como analizar sugerencias que pudieran surgir de parte del grupo; y una sexta donde el profesor hacía un resumen de la actividad y establecía los nuevos resultados a integrar por los estudiantes.

De las diez actividades diseñadas se reportan las pruebas finales de las nueve parejas de estudiantes involucrados frente a las actividades 6 a 9 (Anexo 2) y de la Actividad 6 se reporta, además de la pruebas finales, el desarrollo de las mismas prestando especial interés en la producción de razonamiento deductivo y de demostración matemática.

¿Fueron adecuadas las actividades planteadas? El tipo de actividades planteadas, donde elaborar una conjetura era una actividad imprescindible y previa a su justificación; la forma de trabajo, donde el docente jugaba un papel de supervisor de las tareas y donde los argumentos elaborados por los estudiantes eran fundamentales, llevó a que los estudiantes se involucrasen en las mismas, se sintieran responsables de sus producciones. La misma dinámica de trabajo llevó a que los esquemas de demostración autoritarios quedaran excluidos de las posibles respuestas de los estudiantes (una estudiante que recursaba, quien buscaba recordar la demostración vista el año anterior, fue el único indicio hallado de esquema de demostración autoritario). **Estamos planteando que el interés de los estudiantes en la actividad matemática a realizar fue un factor fundamental, interés que difícilmente se pueda lograr si el papel del estudiantes es el de repetir los resultados que demuestra el profesor en clase** o que aparecen escritos en los textos o en tareas del tipo “Demuestre que...”.

En esta dinámica de trabajo, en el trabajo de cada pareja, **la formulación de conjeturas fue una actividad corriente e imprescindible donde los errores eran normales, formaban parte del proceso de aprendizaje. La demostración apareció como una herramienta útil, como un instrumento con significado personal, para convencer a otro de la verdad o falsedad de una proposición, no solo como un instrumento de verificación.** En el mismo sentido concluye el estudio de Hadas, Hershkowitz y Schwarz (2000) mencionado en los antecedentes. También en el trabajo de todo el grupo ya que en las puestas en común –donde el orden de presentación era de los equipos con demostraciones menos evolucionadas al inicio y al final los equipos con demostraciones más evolucionadas– al finalizar cada actividad eran los mismos estudiantes de los otros equipos quienes cuestionaban las insuficiencias de los argumentos más precarios y presentando los suyos buscaban mostrar que eran más firmes y así persuadir a sus compañeros.

Es de resaltar que parejas de estudiantes de los dos grupos en los que se llevó adelante la experiencia pudieron, en la mayoría de las actividades, elaborar pruebas que dieran cuenta de las situaciones en las que se vieron involucrados. **Muchas de dichas pruebas, no siendo demostraciones, hicieron uso de un razonamiento deductivo para establecer la validez de una conjetura en una situación particular**. Éste es un hecho nada frecuente en el salón de clase tradicional donde el papel del estudiante pasa fundamentalmente por repetir las demostraciones hechas por el profesor en el pizarrón o que encuentra ya escritas en los libros.

También **hay que señalar la variedad de justificaciones elaboradas por las parejas de estudiantes, tanto en el trabajo con lápiz y papel como en un ambiente de GD**. **Esto contrasta** claramente con la forma tradicional de enseñanza donde, salvo rara excepción, el profesor presenta una única demostración de la propiedad que se está trabajando en el momento, quedando instaurada en los estudiantes, sin nunca hacerse del todo explícita, **la idea de que hay una única manera de demostrar dicha propiedad: la hecha por el profesor.**

Cambió **el lugar del profesor en esta concepción de demostración: ya no es el depositario de la verdad, su función ya no consiste en exponer la demostración sino en plantear buenas situaciones a partir de las cuales los estudiantes puedan formular conjeturas e involucrarse en demostrarlas.** En esta dinámica de trabajo en clase el profesor puede aprender acerca de las concepciones de demostración de los estudiantes y posiblemente también pueda ver nuevas demostraciones de teoremas largamente conocidos por él.

¿Cómo afectó la Geometría Dinámica la producción de razonamiento deductivo?

Todas las parejas de estudiantes que trabajaron en un ambiente de GD fueron capaces de formular la conjetura que involucraba la actividad mediante la construcción de una figura dinámica que sirviera de modelo para la actividad planteada, posteriormente haciendo uso de la posibilidad de arrastre, y finalmente estableciendo invariantes ya sea visualmente en la pantalla y/o a partir de mediciones adicionales. **El trabajo con lápiz y papel** requirió de tiempos más prolongados en la construcción de las figuras, y **el proceso de formulación de una conjetura se hizo muchas veces en base a uno o dos casos especiales considerados** (triángulos equiláteros o triángulos rectángulos isósceles).

La posibilidad de arrastre que ofrece la GD hizo de ésta un ambiente sensiblemente más poderoso que el papel y el lápiz, debido a que **permitió a los estudiantes, en muy poco tiempo, poner a prueba sus conjeturas: una conjetura será cierta si se mantiene invariable mediante el arrastre, en caso contrario permitirá hallar un contraejemplo. Esto último dará paso a descartar la conjetura o a reformularla, dando paso así a una nueva conjetura (totalmente nueva o una reformulación de una conjetura anterior) que nuevamente será puesta a prueba mediante 'arrastre'. A través de este proceso se llega a la convicción de la certeza de determinada conjetura, condición necesaria para buscar justificarla. Los estudiantes que trabajaron en un ambiente de GD tenían una convicción muy firme acerca de las conjeturas que buscaban demostrar** –al igual que lo expresado en el trabajo de Mudaly (1999) –, **no así quienes lo hacían con lápiz y papel**.

La posibilidad de medición y arrastre que brinda el ambiente dinámico fue usada para descartar conjeturas incorrectas así como para verificar empíricamente las conjeturas correctas. La formulación y verificación empírica de una conjetura se dan así en forma inseparable, las conjeturas que no pasan la evaluación empírica son descartadas o reformuladas, las que sí lo hacen dan paso a la búsqueda de una explicación. Conjetura verificada empíricamente y razonamiento se dan así de forma inseparable. ¿Afecta la Geometría Dinámica que este razonamiento sea deductivo? Referido a este aspecto del trabajo en un ambiente dinámico también Mudaly (1999, pág. 85) concluía que "Los estudiantes parecen desplegar un deseo intrínseco por una explicación, esto es, la necesidad de entender la conjetura independientemente de su verificación." La suposición que teníamos antes de iniciar la experiencia con respecto a que el trabajo en un ambiente de GD llevaría a los estudiantes a conformarse con esquemas empíricos de demostración fue claramente contrariada ya que **la mayor parte de las pruebas producidas por estudiantes que trabajaron en un ambiente dinámico hicieron uso del razonamiento deductivo, fueron demostraciones matemáticas sin nada que objetar.** Esto coincide con las conclusiones del trabajo de Mudaly (1999, pág. 101) donde se afirma que “con una guía adecuada los estudiantes fueron capaces de construir explicaciones lógicas para la conjetura.”. Remarcamos que en nuestra experiencia **los estudiantes no contaron con una guía escrita de conjeturas intermedias que concatenadas hacían la demostración** como en la experiencia de Mudaly. **Con lápiz y papel muchas veces la validación de la conjetura se hizo mediante un razonamiento deductivo pero dicha validación se limitó al o los casos específicos considerados.**

Algo a lo que no hemos acudido en esta experiencia, donde los estudiantes sin ningún tipo de guía elaboran argumentos para justificar sus conjeturas, y que podría contribuir a obtener mejores resultados en cuanto a elaborar argumentos deductivos, es darles una guía adecuada, sugerir la justificación de resultados intermedios, que concatenados conduzcan a la justificación de la conjetura.

En algunos casos la verificación empírica en GD de una conjetura generó indicios fuertes acerca de su certeza pero también **creó un pequeño margen de incertidumbre**. En situaciones **así unos estudiantes se inclinaban por descartar la conjetura –los que mostraban mayor confianza en Sketchpad-, otros por afirmar su veracidad. Estos últimos estudiantes eran quienes, para salir de la incertidumbre y para probar que tenían razón, proponían buscar un nuevo camino, una nueva vía de explicación que no dependiera de la información empírica.**

Junto a lo anterior debemos señalar que sí hubo diferencias en la forma de proceder frente a cada una de las actividades de los equipos que trabajaban en GD y los que lo hacían en lápiz y papel. **Muchas veces los estudiantes que trabajaban en Sketchpad hacían la construcción de la figura correspondiente a una determinada actividad y lo primero que buscaban era arrastrarla de tal manera que ésta presentara cierta regularidad** (se pareciera a un triángulo equilátero en la actividad 6 o a un hexágono regular en las actividades 8 y 9) **y en muchos casos razonaban con**

base en dicha figura particular y recién en un etapa posterior tomaban conciencia de que la actividad estaba referida a una situación más general por lo que volvían a arrastrar la figura sacándola de su forma especial. Los estudiantes que trabajaron con lápiz y papel muchas veces recurrían también a figuras especiales como construcciones para las actividades pero nunca llegaban a tomar conciencia de lo especial de su figura haciendo la demostración para la figura particular considerada. **Éste es un aspecto donde el trabajo en un ambiente de GD se diferenció notoriamente del trabajo con lápiz y papel en la medida que facilitó la evolución de los estudiantes desde la consideración de situaciones especiales a situaciones generales**. Estos resultados son coincidentes con los de Marrades y Gutiérrez (2000) reportados en los antecedentes.

Los casos límite de la figura dinámica fueron usados para validar una conjetura: recurriendo a estos casos límite donde sí se encontraba una explicación para la conjetura, se afirmaba la validez de la misma para el caso general. De una forma análoga procedieron muchas parejas de estudiantes que trabajaron en lápiz y papel pero a partir de figuras particulares, como mencionamos antes.

En situaciones donde había que resolver sobre la verdad o falsedad de una conjetura y la demostración implicaba determinar un contraejemplo, todas las parejas que trabajaron en un ambiente dinámico hicieron pruebas que se enmarcan en el empirismo ingenuo. Nos surge la duda acerca de si el esquema empírico, ya sea perceptivo o inductivo, que mostraron la totalidad de parejas que trabajaron en un ambiente dinámico no entorpece la comprensión de que un sólo contraejemplo alcanza para establecer la falsedad de una conjetura. Para que una proposición sea falsa no es necesario que en todos los casos lo sea. Si bien alcanza con que un caso sea falso para refutar la proposición, que un caso sea verdadero no nos permite afirmar con seguridad ni que sea verdadera ni que sea falsa. Los estudiantes que trabajaron con lápiz y papel, por la particularidad de los casos considerados y por su escaso número, si tuvieron la posibilidad de apreciar que con un contraejemplo alcanza para establecer la falsedad de una conjetura y que dicha conjetura a pesar de ser falsa puede en determinados casos especiales ser válida.

En esta experiencia los estudiantes que trabajaron en un ambiente de GD lo hicieron en niveles más altos según los esquemas de demostración, tipos de prueba y Niveles de van Hiele, lo que no permitió observar las producciones en un ambiente dinámico de estudiantes que lo hicieran en niveles más bajos. En el trabajo de estudiantes con lápiz y papel se dio la situación inversa, lo que no permitió observar sus producciones en niveles más altos. Quedan así planteadas posible vías de ampliación de este estudio.

Acorde a lo que se desprende del presente trabajo consideramos que sería aconsejable enfrentar a los estudiantes a problemas matemáticos, problemas a partir de los cuales puedan formular conjeturas y trabajar en la creación de sus propias demostraciones para las conjeturas formuladas. Esto implicaría cambiar el rol del profesor y también el rol del estudiante que pasaría a tener el papel protagónico en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la construcción de su conocimiento matemático en general.

También nos parece importante incluir en el currículo el trabajo en un ambiente de GD. Creemos que los estudiantes, en esta etapa de sus estudios, deben hacer un proceso lento de transición desde esquemas empíricos (perceptivos o inductivos), frecuentes en GD por las características del ambiente, a esquemas más abstractos de justificación. **El trabajo en un ambiente de GD facilita la construcción de representaciones de los problemas, permitiendo la exploración empírica, donde el estudiante puede ir estableciendo relaciones entre sus observaciones y su inmediata verificación empírica, descartando conjeturas o reformulándolas, pudiendo alcanzar de esta manera una fuerte convicción acerca de la veracidad de una conjetura de esta manera construida, condición imprescindible para iniciar la búsqueda de una explicación. Sostenemos que plantear actividades donde esté presente la formulación de conjeturas contribuye a que los estudiantes se comprometan en buscar explicar por qué dicha conjetura es válida, en elaborar una prueba.** De esta manera los estudiantes pueden concebir la demostración como un proceso donde la comprobación empírica tiene un papel relevante en la formulación de una conjetura. Responder a la interrogante de por qué se cumple dicha conjetura lleva a la búsqueda de su validación.

7. Referencias

- ✓ Alibert, D. y Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 215-230. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- ✓ Almeida, D. y Chamoso, J. (2001). ¿Existen lazos entre democracia y matemáticas? *Uno Revista de didáctica de las matemáticas*, nº 28, julio, pp. 100-109.

- ✓ Balacheff, N. (1998). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*, pp. 216-235. London, U. K. : Hodder & Stoughton.

- ✓ Balacheff, N. (2000a). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

- ✓ Balacheff, N. (2000b). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, pp. 93-108. Barcelona, España: ICE de la Universidad de Barcelona y Editorial Graó.

- ✓ Balacheff, N. y Laborde, C. (1998). Lenguaje simbólico y pruebas en la enseñanza de las matemáticas: un enfoque sociocognitivo. En G. Mugny y J. Pérez (Eds.), *Psicología social del desarrollo cognitivo*. Capítulo 2, pp. 265-288. Barcelona, España: Anthropos.

- ✓ Battista, M. T. y Clements, D. H. (1995). Geometry and proof. *The Mathematics Teacher*, Vol. 88, nº1, pp. 48-54.

- ✓ Casella, S. et al. (1992). *Guías de Geometría. 5º Científico*. Montevideo, Uruguay: Edición personal.

- ✓ Coe, R. y Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, Vol. 20, nº 1, pp. 41-55.

- ✓ Comisión de Transformación de la Educación Media Superior (T.E.M.S.) (2002). Propuesta de diseño curricular para Educación Media Superior. Montevideo, Uruguay. www.comisiontems.edu.uy

✓ Copi, I. (1974). *Introducción a la lógica*. Buenos Aires, Argentina: Eudeba.

✓ D'Amore, B. (2000). La didáctica de las matemáticas a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses. *Educación Matemática*, Vol. 12, nº1, abril, págs. 39-50.

✓ Davis, P. y Hersh, R. (1989). *Experiencia matemática*. Barcelona, España: M.E.C. y Labor.

✓ De Villiers, M. (1992). Children's acceptance of theorems in geometry. *Draft for poster presentation at PME 16, 6-11 August, University of New Hampshire, U.S.A.* http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage4.html

✓ De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, pp. 15-30.

✓ De Villiers, M. (1996). Why proof in Dynamic Geometry? *Slightly edited version of invited letter in a special Forum in Mathematics in College*, 40-41, June. http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage4.html

✓ De Villiers, M. (1999). The van Hiele Theory - Defining and Proving within a Sketchpad Context. En *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*, pp. 11-20. U.S.A.: Key Curriculum Press.

✓ Dreyfus, T. y Hadas, N. (1996). Proof as answer to the question why. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 28, nº 1, pp. 1-5.

✓ Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del currículum. En *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, pp. 125-134. Barcelona, España: ICE de la Universidad de Barcelona y Editorial Graó.

✓ Flores, H. (2004). *La enseñanza de la demostración geométrica en el Nivel Medio Superior: Reflexión y análisis sobre las prácticas de los profesores*. Proyecto de doctorado, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, IPN, México.

✓ Godino, J. (1993). Paradigmas, problemas y metodología de investigación en didáctica de la matemática. *Quadrante*, Vol. 2, nº1, págs. 9-22.

✓ Godino, J. (2000). La consolidación de la educación matemática como disciplina científica. En A. Martinón (Ed.), *Las matemáticas del siglo XX*, págs. 347-350. Madrid, España: Nivola.

✓ Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, nº 3, pp. 325-355.

✓ Godino, J. D. y Recio, T. (1997). Meaning of proof in mathematics education. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, pp. 313-320. Lahti, Finland.

✓ Godino, J. D. y Recio, T. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, Vol. 19, nº 3, pp. 405-414.

✓ Gutiérrez, A. (1999). La investigación en Didáctica de las Matemáticas. En A. Gutiérrez (Ed.), *Área de conocimiento. Didáctica de la Matemática*. Capítulo 4, pp. 149-194. Madrid, España: Síntesis.

✓ Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1991). El modelo de Razonamiento de van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática*, Vol. 3, nº 2, agosto, pp. 49-65.

✓ Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). El modelo de razonamiento geométrico de van Hiele. En *El grupo de las isometrías del plano.* Capítulo 4, pp. 85-97. Madrid, España: Síntesis.

✓ Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (1988). *The van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents*, NCTM, Reston, VA.

✓ Hadas, N. ; Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp. 127-150.

✓ Hanna, G. (1989). Proof that prove and proofs that explain. *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education,* pp. 45-51. Paris.

✓ Hanna, G. (1991). Mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 54-61. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

✓ Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 21-33. Valencia, Spain.

✓ Healy, L. y Hoyles, C. (1999). Student's performance in proving: competence or curriculum? En I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the 1st Conference of the European Research in Mathematics Education I*, Group 1, Vol 1, pp. 153-167. http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks.html

✓ Hoyles, C. y Healy, L. (2000). Relacionando la argumentación informal con la demostración formal mediante experimentos pedagógicos computacionales. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº25, julio, pp. 9-20.

✓ Ibañes, M. y Ortega, T. (1996). Mathematical proofs: Classification and examples for use in Secondary Education. En M. De Villiers (Ed.), *Proceedings of Topic Group 8: Proofs and Proving: Why, when and how?, 8th International Congress on Mathematical Education,* pp. 109-154. South Africa: Association form Mathematics Education of South Africa.

✓ Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad* (Software de Geometría Dinámica). Emeryville, CA, U.S.A.: Key Curriculum Press.

✓ Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Student's interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp. 55-85.

✓ Kline, M. (1983). *El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* Madrid, España: Siglo XXI Editores.

✓ Lakatos, I. (1994). *Pruebas y refutaciones*. Madrid, España: Alianza Editorial.

✓ Mariotti, M. A. (1997). Justifying and Proving in Geometry: The mediation of a microworld.

Proceedings of the European Conference on Mathematical Education, pp. 21-26 (versión revisada y extendida).

✓ Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp. 25-53.

✓ Marrades, R. y Gutiérrez, Á. (2000). Proof produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp. 87-125.

✓ Mason, J.; Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona, España: M.E.C. y Labor.

✓ Morin, E. (1999). *La cabeza bien puesta*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Nueva Visión.

✓ Mudaly, V. (1999). Pupils' needs for conviction and explanation within the context of Dynamic Geometry. Unpublished Master Thesis. Durban, South Africa: University Durban-Westville.

✓ Mudaly, V. y De Villiers, M. (1999). Lerners' needs for conviction and explanation within the context of Dynamic Geometry. http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage4.html

✓ National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Standards and Principles for School Mathematics*. Reasoning and proof. http://www.nctm.org/standards/standards.htm

✓ Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

✓ Puig Adam, P. (1976). *Curso de Geometría Métrica Tomo 1: Fundamentos*. Madrid, España: Editorial Biblioteca Matemática.

✓ Rama, G. et al. (1994). Los resultados de la prueba de razonamiento y conocimiento lógico-matemático. En G. Rama et al *Los bachilleres uruguayos: quiénes son, qué aprendieron y qué opinan* (pp. 81-117). Montevideo, Uruguay: Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), Oficina de Montevideo.

✓ Recio, T. (2001). La mecánica de la demostración y la demostración mecánica. *Texto correspondiente a la presentación hecha en las X JAEM*, 7-9 setiembre, Zaragoza, España.

✓ Sekiguchi, Y. (1996). What is really special in the learning of proof for students?: An ethnographic analysis. *Proceedings of Topic Group 8: Proofs and Proving: Why, when and how?, 8th International Congress on Mathematical Education.* pp. 241-256. South Africa: Association form Mathematics Education of South Africa.

✓ Schoenfeld, A. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS (American Mathematical Society)*, Vol. 47, nº 6, junio-julio, págs. 1-16.

✓ Sowder, L. y Harel, G. (1998). Types of Students' Justifications. *The Mathematics Teacher*, Vol. 91, nº 8, noviembre, pp.670-675.

✓ Tall, D. (1995). Cognitive development, representations and proof. *Justifying and Proving in School Mathematics - London Conference on Proof*, pp. 27-38. London, England: Mathematical Sciences, Institute of Education, University of London.

✓ Weston, A. (2001). *Las claves de la argumentación*. Barcelona, España: Ariel.

✓ Wschebor, M. (2001). *La realidad en la educación matemática ante los requerimientos de la época.* Ciclo de conferencias organizado por la Inspección de Matemática de Enseñanza Media en la Cátedra Alicia Goyena. Agosto. Montevideo, Uruguay.

Apéndice 1

Actividades

Actividad 1

Construye dos semirrectas del mismo origen y nombra AOB al ángulo que se formó.

Construye la recta OB y en ella ubica un punto Q de forma que O esté entre Q y B.

¿Qué puedes decir de los ángulos AOB y QOA?

Escríbelo.

Construye la recta OA y en ella ubica un punto P de forma que O esté entre P y A.

¿Qué puedes decir de los ángulos POQ y QOA?

Escríbelo.

¿Recuerdas cómo se llamaba a la pareja de ángulos AOB y POQ?

¿Qué puedes decir de dichos ángulos?

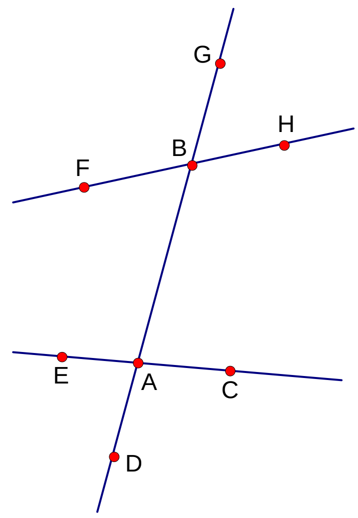
Explica

Actividad 2

(a)

Traza dos rectas y una tercera secante a las dos anteriores.

Se determinan de esta manera ocho ángulos, nómbralos como en la figura.



Cada pareja de ángulos, donde uno tiene vértice A y el otro vértice B, tiene asignado un nombre:

Alternos internos: BAC y ABF; _____ y _____.

Alternos externos: CAD y FBG; _____ y _____.

Correspondientes: BAC y GBH; ____ y _____;

_____ y _____; _____ y _____.

Conjugados internos: BAC y HBA; _____ y _____.

Conjugados externos: CAD y GBH; _____ y _____.

(b)

Marca tres puntos que no estén alineados y nómbralos A, B y C.

Traza la recta AC y construye una recta paralela a la recta AC y que además pase por el punto B.

Traza la recta AB.

Mide una pareja de ángulos alternos internos.

¿Qué puedes decir de los ángulos alternos internos? ¿Se mantiene en pie tu afirmación si repites la construcción para los mismos puntos A y C pero con otro punto B?

¿A qué se debe que se cumpla esta propiedad?

Nos referiremos de ahora en más a esta propiedad como Propiedad 1.

Redáctala.

(c)

Marca cuatro puntos y nómbralos A, C, B, D de manera que al recorrerlos en ese orden queden en sentido antihorario.

Traza los segmentos AB, AC y BD.

Mide los ángulos BAC y ABD. ¿Son iguales?

En caso de que no, manteniendo los mismos puntos A, B, C ubica un punto D de forma que los ángulos BAC y ABD sean iguales.

Traza las rectas AC y BD.

¿Qué puedes decir de las rectas AC y BD? ¿A qué se debe que se cumpla lo que acabas de observar?

Nos referiremos de ahora en más a esta propiedad como Propiedad 2.

Redáctala.

Actividad 3

Marca tres puntos A, B, C no alineados. Construye la recta AC y el segmento AB. Construye la recta paralela a AC que pasa por B.

¿Qué puedes decir de la suma de una pareja de ángulos conjugados internos?

Explica.

Actividad 4

Construye un triángulo y nómbralo ABC. Mide cada uno de sus ángulos interiores y calcula:

CAB + ABC

BCA + CAB

BCA + ABC

CAB + ABC + BCA

Vuelve a hacer los cálculos anteriores para otros triángulos ABC distintos del original.

¿Qué observas?

¿Cómo puedes explicar tu observación?

[Después de ver si alguno de los grupos tuvo alguna idea]

Construye la paralela a la recta AB que pasa por C. De esta manera se forman nuevos ángulos. ¿Tienen alguna relación con los ángulos interiores del triángulo?

Actividad 5

(a)

Ángulos externos a un triángulo son ángulos formados por un lado del triángulo y la prolongación del otro.

¿Cuántos ángulos externos tiene un triángulo?

(b)

Construye un triángulo ABC. Construye un ángulo externo de vértice B y nómbralo CBP.

Mide el ángulo externo CBP y calcula CAB + ABC, ABC + BCA, BCA + CAB.

¿Encuentras alguna relación entre la medida del ángulo CBP y alguna de las sumas anteriores?

¿Puedes explicar cuál es el motivo de que ocurra lo que observas?

Redacta la propiedad que acabas de justificar.

Actividad 6

Construye un triángulo ABC y los ángulos externos CBP, ACQ y BAR.

¿Qué puedes decir de la suma de dichos ángulos?

Explica por qué.

Actividad 7

Traza un segmento AB y dos rectas paralelas que pasen por A y B respectivamente.

Construye las bisectrices de dos ángulos conjugados internos.

¿Qué puedes decir acerca de dichas bisectrices?

Explica.

Actividad 8

(a)

¿Recuerdas qué es un polígono convexo?

Escribe.

(b)

Construye un exágono convexo ABCDEF antihorario.

Responde si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones para cualquier exágono convexo:

(i) FAB < ABC.

(ii) FAB + BCD + DEF = ABC + CDE + EFA.

(iii) FAB + ABC es constante.

(iv) GAB + ABC + BCD + CDE + DEF + EFG + FGA = 720º.

Si alguna de las proposiciones anteriores es verdadera para cualquier exágono convexo, ¿puedes explicar por qué?

(c)

Escribe un número de tres cifras: _ _ _.

¿Cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de ese número de lados?

Actividad 9

(a)

Construye un exágono convexo ABCDEF antihorario y los ángulos externos BAP, CBQ, DCR, EDS, FET, AFU.

¿Qué puedes decir de la suma de estos ángulos externos?

Explica.

(b)

Escribe un número de tres cifras: _ _ _.

¿Cuánto vale la suma de los ángulos externos de un polígono de ese número de lados?

Actividad 10

(a)

Construye dos segmentos del mismo origen y perpendiculares, nómbralos OA y OB.

Construye el segmento PQ de forma que P pertenezca a OA y Q pertenezca a OB.

¿Qué puedes decir de la suma de los ángulos APQ y PQB?

¿Puedes explicar a qué se debe?

¿Encuentras alguna relación entre la suma anterior y el ángulo AOB?

Explica.

(b)

Construye dos segmentos del mismo origen, nómbralos OA y OB.

Construye el segmento PQ de forma que P pertenezca a OA y Q pertenezca a OB.

¿Qué puedes decir de la suma de los ángulos APQ y PQB?

Explica por qué.

¿Encuentras alguna relación entre la suma anterior y el ángulo AOB?

Explica.

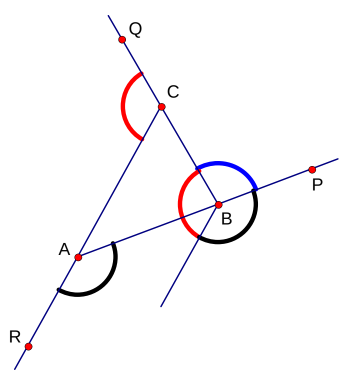
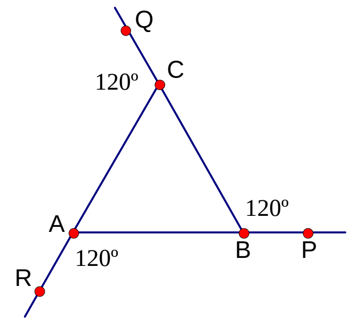
¿Coincide esta relación con la expresada en la parte (a)?

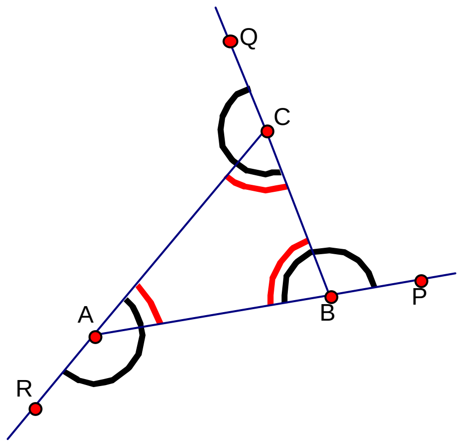
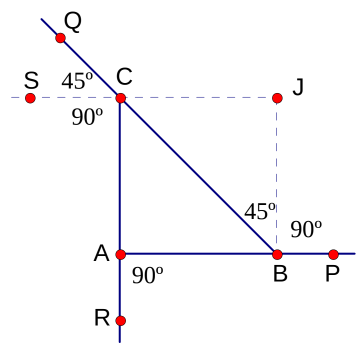
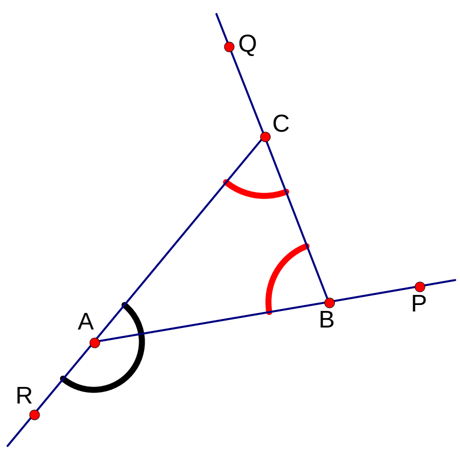
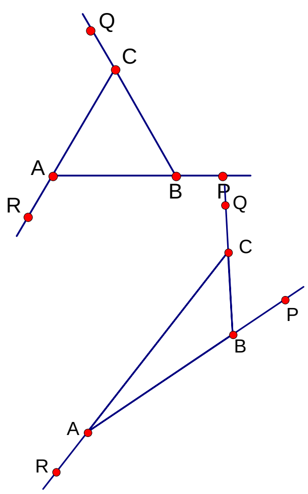
Apéndice 2

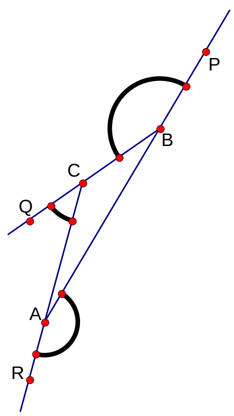
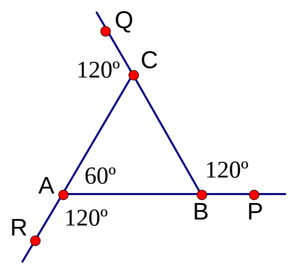
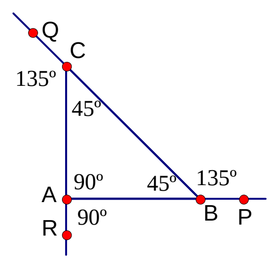
Argumentos vertidos por cada pareja de estudiantes

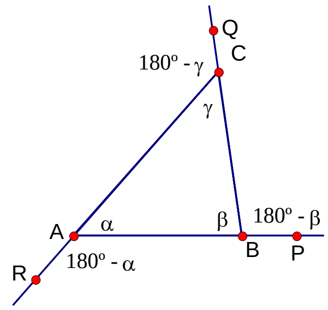
Actividad 6

Construye un triángulo ABC y los ángulos externos CBP, ACQ y BAR.
¿Qué puedes decir de la suma de dichos ángulos?
Explica por qué.

<table>
<tr><th>Act.</th><th>GD (Latino)</th><th>Lápiz y papel (San Felipe)</th></tr>
<tr><td>6</td><td>JP: Trazan la paralela a un lado por el vértice opuesto y usan el hecho que se determinan ángulos correspondientes iguales [Actividad 2] que dispuestos en torno a un vértice completan 360º.

</td><td>EE: Hacen deducción limitada al triángulo equilátero que usan: como cada ángulo interior mide 60º, cada ángulo externo mide 120º, por lo que su suma será 360º.

</td></tr>
<tr><td></td><td>Nivel 4.
Experiencia Mental.
Esquema Axiomático.</td><td>Nivel 2.
Empirismo Ingenuo (1)
Esquema Perceptivo $\rightarrow$ Esquema Inductivo (1)</td></tr>
</table>

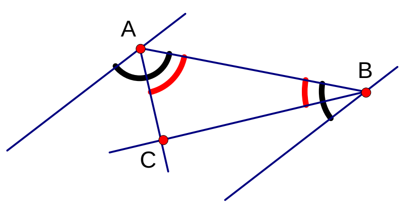
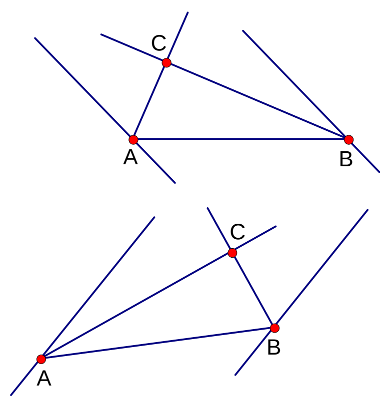
<table>
<tr>
<td>6</td>
<td>JM: Suman tres ángulos llanos y a dicha suma restan la suma de los ángulos interiores del triángulo [Actividad 4].
$180º \times 3 – (CAB + ABC + BCA) =$
$= 540º – 180º = 360º.$
</td>
<td>AS: Hacen deducción limitada al triángulo rectángulo isósceles que usan.
El ángulo externo de vértice A mide 90º. Para hallar la medida de los ángulos externos de vértices B y C construyen el cuadrado ABJC, de esa manera
$CBP = ACQ = 90º + 45º,$
por lo que
$BAR + CBP + ACQ =$
$= 90º + (90º + 45º) + (90º + 45º) =$
$= 360º.$
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Nivel 4.
Experiencia Mental.
Esquema Axiomático.</td>
<td>Nivel 2.
Empirismo ingenuo (1).
Esquema Inductivo (1).</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>AD: Usan el hecho de que la suma de dos ángulos interiores de un triángulo es igual al ángulo externo del tercer vértice [Actividad 5(b)], al sumar los tres ángulos externos obtienen el doble de la suma de los ángulos interiores de un triángulo [Actividad 4], o sea 360º.
</td>
<td>MV: Primero construyen un triángulo equilátero y miden con semicírculo sus ángulos externos cuya suma les da 360º.
Después construyen un triángulo obtusángulo “bien cualquiera” en el que vuelven a medir sus ángulos externos con semicírculo y cuya suma les da 358º. “Debería dar 360”, la diferencia se debe “al trazado y a errores en las mediciones”.
</td>
</tr>
</table>

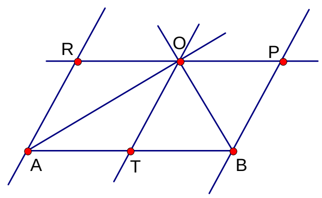
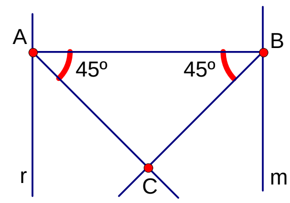
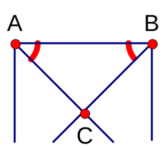
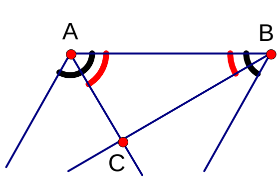
	Niveles 3 y 4. Experiencia Mental. Esquema Axiomático.	Nivel 2. Empirismo Ingenuo (1) → Experiencia Crucial. Esquema Inductivo (2).
6	**BD**: Arrastran un vértice del triángulo hacia el lado opuesto: el ángulo externo del vértice que arrastran tiende a ser nulo y los otros dos ángulos externos tienden a ser llanos. La suma de los tres ángulos externos del triángulo es 360º.  	**LM**: Deducen, sin medir con semicírculo, que la suma de los ángulos externos de un triángulo equilátero y de un triángulo rectángulo isósceles es 360º. Basándose en esto afirman que "siempre va a ser así".  
	Nivel 4. Experiencia Crucial. Esquema Perceptivo y Esquema Inductivo(1)	Nivel 2. Empirismo ingenuo (2). Esquema inductivo (2).
6		**GM**: Reconstruyen una demostración vista el año anterior: Asignándoles medidas α, β, γ a los ángulos interiores de vértices A, B, C respectivamente, calculan las medidas de los ángulos BAR = 180º – α, CBP = 180º – β, ACQ = 180 – γ. "Si los sumamos tenemos 180º – α + 180º – β + 180 – γ

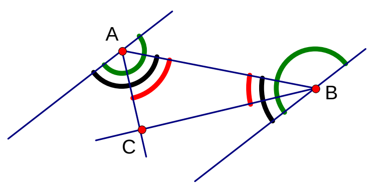
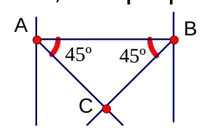
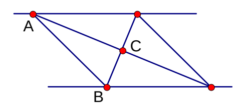
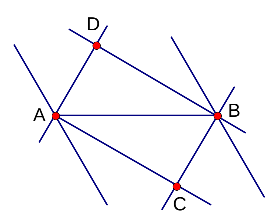
		y como α, β y γ [sumados] dan 180º, todo da 360º.” 
		- Experiencia Mental. Esquema Ritual.

Actividad 7

Traza un segmento AB y dos rectas paralelas que pasen por A y B respectivamente.
Construye las bisectrices de dos ángulos conjugados internos.
¿Qué puedes decir acerca de dichas bisectrices?
Explica.

Act.	GD (Latino)	Lápiz y papel (San Felipe)
7	**JP**: “Los ángulos conjugados internos entre paralelas siempre suman 180º [Actividad 3]. Al trazar las bisectrices de esos ángulos, se forman nuevos ángulos más pequeños, tal que, CAB + ABC = 90º [C es el punto de intersección de las bisectrices]. Por lo tanto [como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º [Actividad 4]], el ángulo de la intersección de las bisectrices será 90º.” 	**EE**: Se basan en la medición con semicírculo que hacen en dos construcciones. 
	Nivel 4. Experiencia Mental.	Nivel 2. Empirismo ingenuo (2).

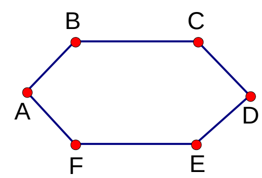
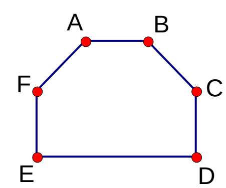
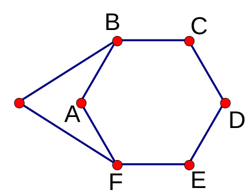
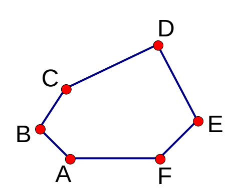
	Esquema Axiomático.	Esquema Perceptivo (2).
7	**JM**: Por O [intersección de las bisectrices] trazan una paralela a AB y una paralela a las rectas paralelas. Justifican la igualdad de los ángulos AOR y OAT, RAO y AOT (por ser alternos internos entre paralelas [Actividad 2 (b)]) y como AO es bisectriz de RAT los ángulos AOR y AOT son iguales. Reiteran el argumento para justificar que TOB = BOP. Culminan con: “ROA + AOT + TOB + BOP es 180º, así que dos ROA y dos BOP es 180º, así que un ROA y un BOP es 90º. AOT + TOB que es lo mismo que AOB es 90º”. 	**AS**: Hay deducción limitada al caso considerado: rectas paralelas perpendiculares a AB. “Las bisectrices forman con AB ángulos de 45º y como la suma de los ángulos interiores del triángulo es 180º [Actividad 4] el ángulo que forman las bisectrices es 90º”. 
	Nivel 4. Experiencia Mental. Esquema Axiomático.	Nivel 2. Empirismo Ingenuo (1). Esquema Inductivo (1).
7	**AD**: Primero trabajan con paralelas perpendiculares a AB. “ACB = 90º porque CAB + ABC = 90º (cada uno mide 45º porque son bisectrices de ángulos rectos) y ACB + CBA + BAC = 180º [Actividad 4].”  En el caso general argumentan que los ángulos conjugados internos entre paralelas suman 180º [Actividad 3] y como AC y BC son bisectrices CAB + ABC = 90º. Como los ángulos interiores de un triángulo suman 180º [Actividad 4] el ángulo ACB mide 90º. 	**MV**: No elaboran una justificación.

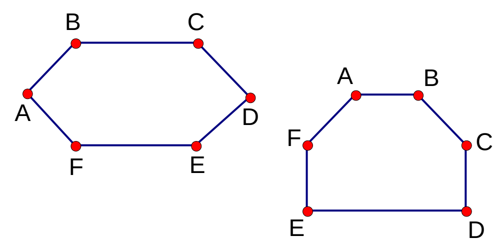
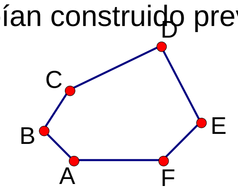
	Nivel 4. Experiencia Mental. Esquema Axiomático.	-
7	**BD**: “Las dos rectas paralelas, forman cada una 180º [ángulos llanos marcados en verde], si las cortamos con un segmento de recta, dos ángulos conjugados internos [en negro] suman 180º entre los dos [Actividad 3 que vuelven a justificar]. Y como las bisectrices dividen a los ángulos al medio, la suma de ellos es 90º. Por eso el ángulo formado por las bisectrices da 90º, porque la suma de los ángulos interiores de un triángulo siempre da 180º [Actividad 4]”. 	**LM**: Primero elaboran una justificación para el caso en que las rectas paralelas son perpendiculares a AB: los ángulos CAB y CBA miden 45º y como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º [Actividad 4], el ángulo ACB es 90º. En el caso general dicen que el cuadrilátero determinado por A, B y los puntos de corte de las bisectrices con las paralelas es un rombo y al ser las bisectrices diagonales del rombo, son perpendiculares. 
	Nivel 4. Ejemplo Genérico. Esquema Axiomático.	Niveles 2 y 3. Empirismo Ingenuo (2). Esquemas Inductivo (2) y Esquema Perceptivo (1)
7		**GM**: Construyen las bisectrices en ambos semiplanos de borde AB determinando estas un rectángulo, por lo tanto deben ser perpendiculares. Para fundamentar que ACBD es rectángulo escriben: ABC = DAB = 60º, BAC = DBC = 30º. ABC + BAC = 90º y como ABC + BAC + ACB = 180º [Actividad 4] → ACB = 90º. 
		Niveles 2 y 3. Empirismo Ingenuo (1). Esquema Inductivo (1).

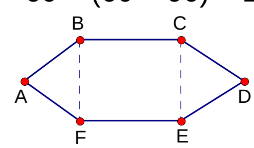
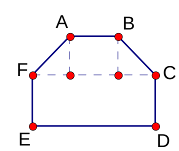
Actividad 8

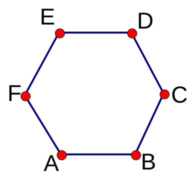
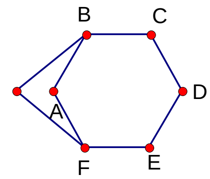
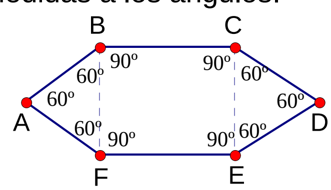
(a)
Construye un hexágono convexo ABCDEF antihorario.

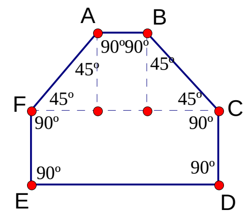
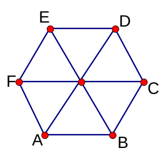
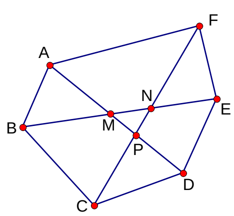
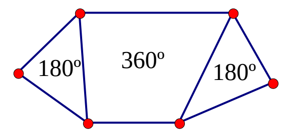
Responde si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones para cualquier hexágono convexo:
(i) FAB < ABC.
(ii) FAB + BCD + DEF = ABC + CDE + EFA.
(iii) FAB + ABC es constante.
(iv) GAB + ABC + BCD + CDE + DEF + EFA = 720º.
Si alguna de las proposiciones anteriores es verdadera para cualquier hexágono convexo, ¿puedes explicar por qué?
(b)
Escribe un número de tres cifras: _ _ _.
¿Cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de ese número de lados?

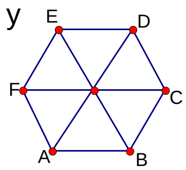
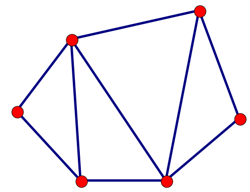
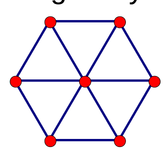
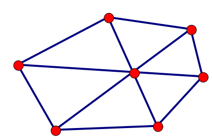
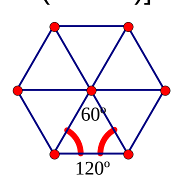
Act.	GD (Latino)	Lápiz y papel (San Felipe)
8(a)(i)	**JP**: Luego de construir el hexágono contestan “vimos al mover la figura que no siempre se cumplía, entonces no es verdadera”.	**EE**: “Falso porque no se cumple para todos los convexos”. De los hexágonos que construyen en uno se cumple que FAB < ABC y en el otro dichos ángulos son iguales.  
	- Empirismo Ingenuo Esquema Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)	Nivel 2. Empirismo Ingenuo. Esquema Inductivo (1).
8(a)(i)	**JM**: Respuesta correcta: Arrastran los distintos vértices del hexágono construido.	**AS**: “Falso porque puede o no pasar”. 
	- Empirismo Ingenuo Esquema Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)	Nivel 2. Empirismo Ingenuo. Esquema Perceptivo (1).
8(a)(i)	**AD**: Respuesta correcta: Arrastran un lado del hexágono construido.	**MV**: “Falso”. Contestan en base al hexágono no regular que construyeron. 

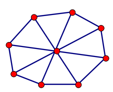
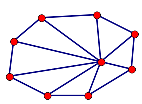
	- Empirismo Ingenuo Esquema Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)	Nivel 2. Empirismo Ingenuo. Esquema Perceptivo (1).
8(a)(i)	**BD**: "Falso". Miden los ángulos FAB y ABC y arrastran los vértices del hexágono.	**LM**: Construyen primero un hexágono regular y contestan "falso, son iguales". A continuación construyen un hexágono convexo, miden el ángulo FAB (121º) y el ABC (114º) y vuelven a contestar falso.
	- Empirismo Ingenuo Esquema Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)	Nivel 2. Empirismo Ingenuo. Esquema Perceptivo (1).
8(a)(i)		**GM**: "Falso, por ejemplo no se cumple en un hexágono equilátero". En la puesta en común queda claro que con equilátero quieren decir regular.
		Nivel 2. Empirismo Ingenuo. Esquema Inductivo (1).
8(a)(ii)	**JP**: "Falso". Miden los ángulos, hallan las sumas y arrastran los vértices.	**EE**: Respuesta incorrecta. Se basan en hexágonos simétricos. 
	- Empirismo Ingenuo Esquema Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)	Nivel 2. Empirismo Ingenuo. Esquema Perceptivo (2).
8(a)(ii)	**JM**: Respuesta correcta basada en el cálculo de las sumas de los ángulos y el arrastre de algunos vértices del hexágono.	**AS**: Respuesta correcta basada en argumento incorrecto: asumen que al variar los ángulos varía su suma.
	- Empirismo Ingenuo Esquema Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)	-
8(a)(ii)	**AD**: "Falso". Miden los ángulos del hexágono construido, hallan las sumas respectivas y arrastran los distintos lados.	**MV**: "No, la diferencia es 80º". Miden en la figura que habían construido previamente. 

	- Empirismo Ingenuo Esquema Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)	Nivel 2. Empirismo Ingenuo. Esquema Perceptivo (1).
8(a)(ii)	**BD**: Respuesta correcta. Hallan las sumas respectivas y arrastran los vértices del hexágono.	**LM**: Respuesta correcta. Miden en un hexágono regular y en uno que no lo es.
	- Empirismo Ingenuo Esquema Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)	Nivel 2. Empirismo Ingenuo. Esquema Perceptivo (1).
8(a)(ii)		**GM**: Respuesta correcta basada en argumento incorrecto: porque les resulta extraña la propiedad.
		-
8(a)(iii)	**JP**: Responden correctamente basándose en el cálculo de la suma de los ángulos y arrastrando los vértices.	**EE**: "Es falso". Se basan en los dos hexágonos simétricos construidos previamente. Explican: "Si [el triángulo] FAB es equilátero, como FBCE es un rectángulo: FAB + ABC = 60 + (60 + 90) = 210."  Después de hacer los segmentos punteados escriben: "FAB + ABC = (45º + 90º) + (90º + 45º) = 270º." 
	- Empirismo Ingenuo Esquema Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)	Nivel 2. Empirismo Ingenuo. Esquema Inductivo (1).

8(a)(iii)	**JM**: Respuesta correcta. Arrastran los vértices F y C hacia la recta AB. “Los dos ángulos aumentan así que la suma también.” 	**AS**: “Es falso”. Su argumento no es suficiente: “Si movemos los lados [se refieren a AF y AB] los ángulos cambian”. 
	- Empirismo Ingenuo Esquema Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)	Nivel 2. Empirismo Ingenuo. Esquema Perceptivo (∞).
8(a)(iii)	**AD**: Respuesta correcta. Arrastran el vértice B.	**MV**: Respuesta correcta basada en argumento incorrecto: “En cualquier figura [refiriéndose a cualquier hexágono] no puede dar [la suma] siempre lo mismo”. “Si dibujamos otro va a ser distinto”.
	- Empirismo Ingenuo Esquema Perceptivo y Esq. Inductivo (∞)	Nivel 2. Empirismo Ingenuo. Esquema Perceptivo (1)
8(a)(iii)	**BD**: Respuesta correcta. Calculan la suma y arrastran el vértice A.	**LM**: Respuesta correcta. Hacen distinción entre hexágonos regulares y hexágonos que no lo son: en el primer caso contestan que la suma sí es constante y en el otro que no.
		Nivel 2. Empirismo Ingenuo. Esquema Perceptivo (2)
8(a)(iii)		**GM**: Respuesta correcta. Reconocen que pueden construir infinitos hexágonos donde dicha suma no sea constante.
		Nivel 2. Empirismo Ingenuo. Esquema Inductivo (∞).
8(a)(iv)	**JP**: Respuesta correcta en base a mediciones, cálculo de la suma y arrastre de los vértices. No elaboran una justificación.	**EE**: Respuesta correcta en base a los cálculos que hacen en los dos hexágonos simétricos considerados donde, divisiones mediante, asignan medidas a los ángulos. 

		
	-	Nivel 2. Empirismo ingenuo (2). Esquema inductivo (2).
8(a)(iv)	**JM**: Trabajan en hexágono casi regular donde las diagonales concurren: hallan la suma de los ángulos interiores de los seis triángulos y restan 360º.  En la puesta en común elaboran otra demostración para diagonales no concurrentes: Consideran los triángulos AMB, FPA, FNE, DME, CPD, BNC.  La suma de los ángulos es 1080. Hay que restar la medida de los ángulos AMB, FPA, FNE, DME, CPD, BNC. FPA + DME + BNC = 180º por interiores al triángulo MNP. AMB = DME por opuestos por el vértice y los otros dos que faltan por el mismo motivo. Concluyen que hay que restar dos veces 180º.	**AS**: Dividen el hexágono cualquiera en dos triángulos y un cuadrilátero. 
	Niveles 3 y 4. Empirismo Ingenuo (1) → Ejemplo Genérico. Esquema Inductivo (1) → Esquema Analítico.	Nivel 4. Ejemplo Genérico. Esquema Axiomático.

8(a)(iv)	**AD**: Trabajan en hexágono casi regular donde las diagonales concurren: hallan la suma de los ángulos interiores de los seis triángulos y restan 360º.  En la puesta en común participan junto a Javier y Matías en la elaboración de una nueva justificación.	**MV**: Dividen el hexágono en cuatro triángulos por lo que la suma de sus ángulos interiores es 180º × 4 = 720º. 
	Nivel 4. Empirismo Ingenuo (1) → Ejemplo Genérico. Esquema Inductivo (1) → Esquema Analítico.	Nivel 4. Ejemplo Genérico. Esquema Axiomático.
8(a)(iv)	**BD**: Construyen triángulo, cuadrilátero, pentágono y hexágono sucesivamente y observan que “al aumentar un lado el polígono aumenta en 180º”. En puesta en común hacen demostración dividiendo los polígonos en triángulos o triángulos y cuadriláteros.	**LM**: Trabajan con hexágono regular y con hexágono donde las diagonales concurren: hallan la suma de los ángulos interiores de los seis triángulos y restan 360º.  
	Niveles 3 y 4. Prueba Intelectual. Esquema Inductivo (4).	Niveles 2 y 3. Empirismo Ingenuo (2). Esquema Inductivo (2).
8(a)(iv)		**GM**: Trabajando en hexágono regular: “Como cada ángulo al centro es de 60º, los otros dos ángulos del triángulo suman 120º y 120º × 6 nos da la suma de los ángulos interiores”. En la puesta en común buscan una expresión matemática para su procedimiento: [180º – (360º/6)] × 6. 
		Nivel 2.

		Empirismo Ingenuo (1). Esquema Inductivo (1).
8(b)	**JP**: Respuesta incorrecta. Su argumento: En un hexágono se cumple que la suma de los ángulos interiores es 180º × 6 – 360º. Lo que intentan averiguar es, en vez de 360º, cuánto habría que restar a 180º × 321 (su número de lados elegido), para eso hacen una regla de tres: 6 lados le restamos 360º 321 lados le restamos X.	**EE**: No elaboran una justificación. Están un poco asombrados por la tarea, no se imaginan cómo hallar la suma de los ángulos interiores de un polígono de ese número de lados.
	-	-
8(b)	**JM**: Al principio elaboran justificación para un octógono de diagonales concurrentes: 180º × 8 y restan 360º.  Preguntados por la validez del argumento en un octógono cualquiera, después de pensar un rato, dicen que alcanza con unir un punto interior al octógono a cada vértice. 	**AS**: Respuesta incorrecta. Hacen regla de tres: 6 lados ---- 720º 100 lados ---- x En puesta en común, mediante la confección de una tabla de valores, llegan a la expresión 180º × (n – 2) donde n es el número de lados del polígono.
	Niveles 2 y 3. Empirismo Ingenuo (1) → Experiencia Mental. Esquema Inductivo (1) → Esquema Analítico.	Nivel 2. Empirismo Ingenuo (3). Esquema Inductivo (3).
8(b)	**AD**: Trabajan con polígono de 7 lados. No elaboran una justificación.	**MV**: No elaboran una justificación.
	-	**-**
8(b)	**BD**: En base a lo visto en la puesta en común de la parte (a)(iv) se dan cuenta que las sumas de los ángulos interiores en triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos es 180º, 360º, 540º, 720º respectivamente, que son múltiplos de 180. Lo que hacen entonces es buscar una fórmula que funcione para dichos resultados: llegan a 180º × (x – 2). ¿Cómo llegaron a la fórmula? "Le	**LM**: Generalizan el argumento usado en el hexágono regular y en el hexágono de diagonales concurrentes y obtienen la expresión 180º × n – 360º. En la puesta en común readaptan el argumento anterior considerando un punto cualquiera interior al polígono y uniéndolo a los vértices del polígono, así la expresión 180º × n – 360º siguen siendo válida.

	restamos 2 porque no hay polígonos de 2 lados” es su explicación.	
	Nivel 2. Empirismo Ingenuo (4). Esquema Inductivo (4).	Niveles 3 y 4. Empirismo Ingenuo (2) $\rightarrow$ Ejemplo Genérico. Esquema Empírico (2) $\rightarrow$ Esquema Analítico.
8(b)		**GM**: Usan el mismo argumento que en la parte (a)(iv): “360º / 381 lados = 0,94º cada uno [de los ángulos al centro]. 180º del triángulo – 0,94º = 179,05º de cada ángulo del polígono, ya que la suma de dos ángulos de cada uno de los triángulos es igual a un ángulo del polígono [Manejan, sin explicitarlo, que el polígono es regular]. 179,05º $\times$ 381 = 68220º” En la puesta en común dan la expresión: [180º – (360º/n)] $\times$ n, siempre trabajando con un polígono regular.
		Niveles 2 y 3. Empirismo Ingenuo (1). Esquema Inductivo (1).

Actividad 9

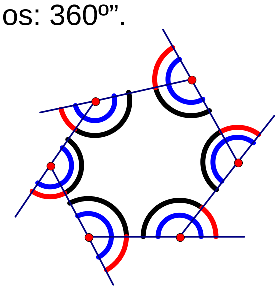
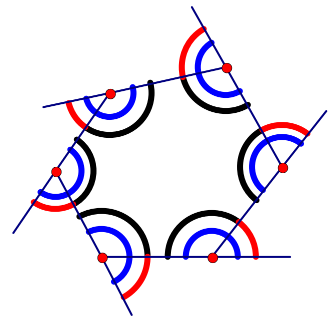
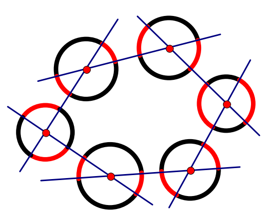
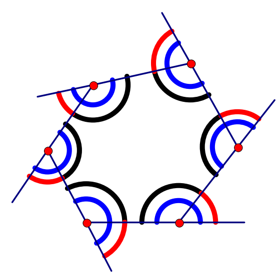
(a) Construye un hexágono convexo ABCDEF antihorario y los ángulos externos BAP, CBQ, DCR, EDS, FET, AFU.

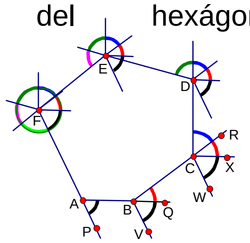
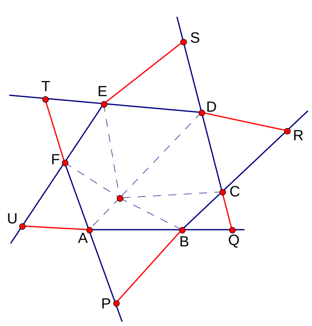
¿Qué puedes decir de la suma de estos ángulos externos?

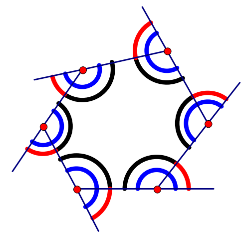
Explica.

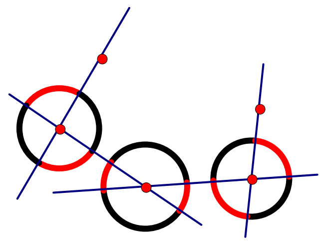
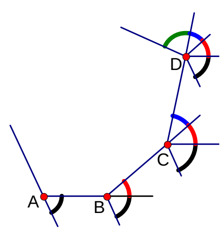
(b) Escribe un número de tres cifras: _ _ _.

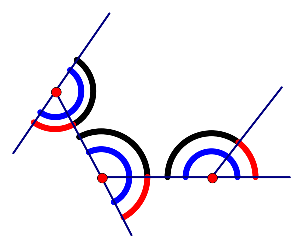
¿Cuánto vale la suma de los ángulos externos de un polígono de ese número de lados?

Act.	GD (Latino)	Lápiz y papel (San Felipe)
9(a)	**JP**: "Con el lado y su prolongación se forma un ángulo llano (180º), y sumados los 6 da un total de 1080º. Si restamos a ese total la suma de los ángulos internos (720º) [Actividad 8(a)(iv)], nos da la suma de los externos: 360º". 	**EE**: Marcan seis ángulos llanos (en azul) a cuya suma restan la suma de los ángulos interiores del hexágono (en negro) [Actividad 8(a)(iv)] 
	Nivel 4. Experiencia Mental. Esquema Axiomático.	Nivel 4. Experiencia Mental. Esquema Axiomático.
9(a)	**JM**: "La suma de todos los ángulos internos es 720º [Actividad 8(a)], si a estos le sumamos los opuestos por el vértice tenemos 1440º. Si se traza una circunferencia en cada punto, este sería un ángulo de 360º. Luego lo multiplicamos por el número de puntos [vértices]. 360º $\times$ 6 = 2160º. A este resultado le restamos los 1440º." Hacen la resta y obtienen 720º, que dividen entre 2 ya que cada ángulo externo aparece con su opuesto por el vértice. 	**AS**: Descartada la conjetura de que los seis ángulos externos son iguales, ven seis ángulos llanos a cuya suma hay que restar la suma de los ángulos interiores del hexágono [Actividad 8(a)(iv)]. 
	Nivel 4. Experiencia Mental. Esquema Axiomático.	Nivel 4. Experiencia Mental. Esquema Axiomático.
9(a)	**AD**: Con origen B construyen la semirrecta BV paralela a AP, de esta manera los ángulos BAP y QBV son iguales [Actividad 2]. Con origen C construyen las semirrectas CW y CX paralelas a BV y BQ respectivamente,	**MV**: Midiendo con el semicírculo hallan que la suma de los ángulos externos es 367º. El resultado no los conforma y dicen que debería dar 360º. Afirman después: "La suma de los

	de esta manera los ángulos BAP, QBV, XCW son iguales [Actividad 2] y también son iguales CBQ y RCX [Actividad 2]. Proceden en forma análoga con los vértices D, E, F. De esta manera obtienen con vértice en F ángulos iguales a cada uno de los ángulos externos del hexágono, que al ser adyacentes y cubrir el plano, permiten demostrar que la suma de los ángulos externos del hexágono es 360º. 	ángulos internos de un polígono de 6 lados da 720º, y si a este resultado lo dividimos entre dos nos da la suma de los ángulos externos." No elaboran una justificación para su conjetura.
	Nivel 4. Experiencia Mental. Esquema Axiomático.	Nivel 2.
9(a)	**BD**: Construyen triángulos exteriores al hexágono de modo que un lado es lado del hexágono y otro lado está incluido en el lado del ángulo externo. "Para esto [la suma de los ángulos interiores de un hexágono] se usó la suma de 2 ángulos de cada triangulo [punteado]. En los triángulos formados por los ángulos externos, usamos solo un ángulo, por lo tanto, como usamos la mitad de ángulos, nos da la mitad de grados (360º)." En su explicación errónea el resultado obtenido (360º) es el que habían obtenido sumando los ángulos externos del hexágono, lo que contribuye a que no se cuestionen la explicación elaborada. 	**LM**: Miden con semicírculo y obtiene como suma de los ángulos externos 356º. Dicen "Debería ser 360º". No elaboran una justificación para su afirmación.

	Nivel 2.	Nivel 2.
9(a)		**GM**: “Hay que hacer [sumar] seis ángulos llanos y restarle los internos” y a continuación hacen los cálculos: $180^o \times 6 = 1080^o$, $1080^o - 720^o = 360^o$. 
		Nivel 4. Experiencia Mental. Esquema Axiomático.
9(b)	**JP**: Generalizan lo hecho en la parte (a): después de escribir $180^o \times n - 720^o$, como un camino intermedio entre una expresión general y la forma de justificar hallada en la parte (a), no tienen mayor dificultad en llegar a la expresión $(180^o \times n) - [180^o \times (n - 2)]$ que usan para n = 217 y les da 360º.	**EE**: Generalizan lo hecho en la parte (a): “Hacemos 180º × 320 [el número elegido] y restamos 720º” Si bien tienen en cuenta todos los ángulos llanos siguen ligados al resultado 720º para la suma de los ángulos interiores del polígono, que en su figura es el mismo hexágono para el cual calcularon 720º. Al hacerles notar que ahora no se trata de un hexágono sino de un polígono de 320 lados modifican el argumento para considerar la suma de los ángulos internos del polígono de 320 lados y obtienen como resultado 360º para la suma de los ángulos externos. En la puesta en común manifiestan que no se convencen del resultado ya que habían intuido como resultado un número mucho mayor. León agrega: “En un triángulo es 360º, en un cuadrilátero es 360º, en un hexágono es 360º, así que siempre va a ser así” Esta inducción los convence más que la justificación correcta que habían hecho antes.
	Nivel 4. Experiencia Mental. Esquema Axiomático.	Nivel 3. Experiencia Mental. Esquema Analítico.
9(b)	**JM**: Generalizan lo hecho en la parte (a): “La suma de los ángulos interiores es 18000º (el número de elegido es 102)[Actividad 8(b)], si le sumamos los	**AS**: No elaboran una justificación.

<table>
<tr><td></td><td>opuestos por el vértice tenemos 36000º. La suma de los ángulos en cada vértice es 360º [el interior, su opuesto por el vértice y los dos externos], como el polígono tiene 102 vértices la suma da 36720º. A este resultado le restamos 36000º y dividimos entre 2 ya que cada ángulos externo aparece dos veces y tenemos 360º.”
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Nivel 4.
Experiencia Mental.
Esquema Axiomático.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>9(b)</td><td>AD: Generalizan lo hecho en la parte (a): dicen que su forma de proceder con el hexágono “sirve para cualquier número de lados”.

</td><td>MV: No elaboran una justificación.</td></tr>
<tr><td></td><td>Nivel 4.
Experiencia Mental.
Esquema Axiomático.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>9(b)</td><td>BD: Empiezan confeccionando la siguiente tabla:
<table>
<tr><td>Polígono</td><td>Suma de ángulos externos</td></tr>
<tr><td>Triángulo</td><td>360º [Actividad 6]</td></tr>
<tr><td>Cuadrilátero</td><td>360º [Midiendo]</td></tr>
<tr><td>Pentágono</td><td>360º [Midiendo]</td></tr>
<tr><td>Hexágono</td><td>360º [Actividad 9(a)]</td></tr>
</table>
A partir de la tabla buscan una expresión general y llegan a
$180º \times x – 180º \times (x – 2)$,
donde x es el número de lados del polígono.</td><td>LM: “En un triángulo es 360º [Actividad 6], en un hexágono es 360º [Actividad 9(a)]. En general debe ser 360º. No sabemos por qué.”</td></tr>
<tr><td></td><td>Niveles 2 y 3.</td><td>Nivel 2.</td></tr>
</table>

	Experiencia Mental. Esquema Inductivo (4).	Empirismo Ingenuo (2). Esquema inductivo (2).
9(b)		**GM**: Generalizan lo hecho en la parte (a): La medida de cada ángulo externo del polígono es la resta de un ángulo llano y un ángulo interior al polígono. El número de tres cifras usado es el 666. Calculan: 666 × 180º = 119880º 119880º – 119520º = 360º. Les pido que me aclaren de donde salió el número 119520º y escriben: “Para averiguar cuanto miden todos los ángulos [interiores] de un polígono sumados 666 × 180º = 119880º 119880º – 360º = 119520º” Están considerando un punto interior que unen a todos los vértices formando 666 triángulos, a la suma de todos los ángulos interiores de los triángulos restan 360º que suman los ángulos de vértice en el punto considerado. 
		Nivel 4. Experiencia Mental. Esquema Axiomático.