



**Instituto Politécnico Nacional**  
**Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y**  
**Tecnología de Avanzada**

***El infinito en el aula de matemática. Un  
estudio de sus representaciones sociales  
desde la socioepistemología***

**Tesis que para obtener el grado de**  
**Doctora en Ciencias en Matemática Educativa**

**Presenta:**

Patricia Lestón

**Directora de Tesis:**

Dra. Cecilia Crespo Crespo

*México D.F., Enero de 2011*



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

**ACTA DE REVISIÓN DE TESIS**

En la Ciudad de México siendo las 10:00 horas del día 13 del mes de enero de 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

**"El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología"**

Presentada por el(la) alumno(a):

Lestón Patricia  
Apellido paterno materno nombre(s)  
Con registro: 

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 8 | 0 | 4 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|

aspirante al grado de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

**LA COMISION REVISORA**

Director de tesis

Dra. Cecilia Rita Crespo Crespo

Dr. Francisco Javier Lezama Andalcón

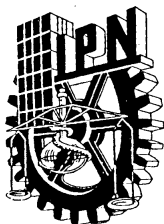
Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Gustavo Martínez Sierra

Dr. Alberto Camacho Ríos

**EL PRESIDENTE DEL COLEGIO**

CENTRO DE INVESTIGACION EN CIENCIA  
Y TECNOLOGÍA AVANZADA  
DEL IPN  
Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora



## CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 17 del mes enero del año 2011, el (la) que suscribe Patricia Lestón alumno (a) del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A080413, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dra. Cecilia Crespo Crespo y cede los derechos del trabajo intitulado El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección [patricialeston@gmail.com](mailto:patricialeston@gmail.com). Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

---

Patricia Lestón

## Índice

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| Resumen                                                                 | 1  |
| Abstract                                                                | 3  |
| Glosario                                                                | 4  |
| <b>Capítulo 1</b>                                                       |    |
| Problema de investigación                                               | 6  |
| <b>Capítulo 2</b>                                                       |    |
| La necesidad de explicitar un marco teórico                             | 15 |
| La Matemática Educativa frente al aula de matemática                    | 16 |
| La socioepistemología como marco teórico de esta investigación          | 18 |
| Las representaciones sociales como herramienta de la socioepistemología | 23 |
| Acerca de la democratización del conocimiento                           | 29 |

### Capítulo 3

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| Antecedentes a la investigación                           | 34 |
| Algunos resultados de investigaciones acerca del infinito | 36 |
| La justificación de esta investigación                    | 51 |

### Capítulo 4

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| El origen del infinito como concepto matemático                             | 54 |
| El infinito como fuente de dicotomía en el pensamiento antiguo de Occidente | 55 |
| El infinito relacionado con la idea intuitiva de límite                     | 58 |
| El infinito y el tamaño del Universo                                        | 61 |
| El fin de la Edad Media y el inicio de un espacio infinito                  | 67 |
| Bolzano y Cantor: el infinito de los conjuntos                              | 82 |
| El trabajo de Bolzano                                                       | 83 |
| El trabajo de Cantor                                                        | 90 |
| Las prácticas sociales asociadas al infinito                                | 99 |

### Capítulo 5

|                                                                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| El infinito desde la visión de los futuros profesores de matemática                                                          | 107 |
| Indagación acerca de las concepciones de Bolzano y Cantor sobre el infinito y su presencia en el discurso matemático escolar | 109 |
| Análisis de las respuestas                                                                                                   | 111 |
| Algunas consideraciones finales en relación a la visión del infinito de los futuros docentes                                 | 125 |

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Las representaciones sociales del infinito en alumnos del<br>profesorado en matemática | 127 |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|

|                                                                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Algunos comentarios finales acerca de las<br>representaciones sociales del infinito en los futuros<br>docentes | 132 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

|                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| Sobre la visión de los futuros profesores de<br>matemática del infinito | 134 |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|

## Capítulo 6

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| La función como concepto medular en el discurso matemático<br>escolar actual | 136 |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|

|                        |     |
|------------------------|-----|
| El concepto de función | 138 |
|------------------------|-----|

|                                                                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Indagación acerca de las concepciones del infinito<br>involucrado en el estudio de las funciones por parte de los<br>alumnos | 148 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| Análisis de las respuestas | 150 |
|----------------------------|-----|

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| Algunos comentarios finales | 158 |
|-----------------------------|-----|

|                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Estudio de casos: entrevistas en profundidad con futuros<br>docentes sobre el infinito que detectan en el estudio de<br>funciones | 159 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| Análisis de las respuestas | 160 |
|----------------------------|-----|

|                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Comentarios finales en relación a las<br>representaciones del infinito que tienen los futuros<br>profesores | 170 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

## Capítulo 7

|              |     |
|--------------|-----|
| Conclusiones | 172 |
|--------------|-----|

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| Lo que saben y piensan los estudiantes en relación al | 173 |
|-------------------------------------------------------|-----|

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| infinito                                                                          |     |
| Las respuestas a las preguntas que guiaron esta investigación                     | 178 |
| Las representaciones sociales como herramientas de la socioepistemología: aportes | 181 |
| Las prácticas sociales asociadas al infinito                                      | 183 |
| Aportes de esta investigación para el rediseño del discurso matemático escolar    | 184 |
| Maneras en que podría continuarse esta investigación                              | 185 |
| Referencias bibliográficas                                                        | 188 |

## **Figuras y Tablas**

### **Figura 1**

Comparación del infinito algebraico y analítico de Cantor y Newton 103  
respectivamente

### **Tabla 1**

Análisis de las representaciones del infinito dadas por estudiantes del 129  
Profesorado de Matemática

### **Tabla 2**

Análisis de las representaciones del infinito matemático dadas por 130  
estudiantes del Profesorado de Matemática

### **Tabla 3**

Análisis de las representaciones asociadas a las definiciones de infinito 132  
matemático dadas por estudiantes del Profesorado de Matemática

## Resumen

El presente trabajo reporta una investigación acerca del infinito y su presencia en el discurso matemático escolar. Se realiza desde el marco teórico de la socioepistemología, que entiende la construcción del conocimiento matemático como el resultado de acciones situadas en un escenario particular que se analizan de manera sistémica. El concepto en que se centra esta investigación es el infinito, cuya naturaleza y tratamiento es muy especial en el aula, ya que no es discutido ni definido explícitamente como elemento matemático en la escuela, pero cuya presencia es indiscutible. Los estudiantes se enfrentan a diversos obstáculos en la construcción de este concepto y de los que se relacionan con él. Sin embargo, en las Instituciones de Formación Docente, sí existe el infinito como concepto que se construye desde el trabajo de Cantor con conjuntos infinitos y números transfinitos.

Desde un estudio socioepistemológico de la evolución de este concepto se lograron detectar los procesos, significados y preguntas que provocaron el surgimiento de esta noción. La finalización de esa parte de la investigación permite identificar prácticas sociales, prácticas de referencia y contextos de significación para los dos infinitos que se detectaron: uno vinculado con el álgebra y el otro con el análisis.

Las indagaciones realizadas con los estudiantes del Profesorado y de la escuela media, llevaron a comprender que el concepto que se consideró como centro de esta investigación se encuentra muy atado a otros conceptos que le dan un

contexto para construir significado. Y esos contextos son lo que se necesita recuperar para la escuela y las instituciones de formación docente.

## Abstract

The research reported here is about infinity and its presence in the scholastic mathematics discourse. The socio-epistemological theory is the one chosen for this study, because it cares about the construction of mathematical knowledge as a result of the actions placed in particular *scenario*, analyzed from a systemic point of view. The core concept of this work is the infinite which is peculiar in nature and treatment within school, since it is not argued or defined explicitly as a mathematical concept, but is present without any doubt. The students are faced with different obstacles in the development of this idea and the others closely related to it. Nevertheless, in the Teachers Training College, Cantor's study on infinite is presented, along with the study of infinite sets and transfinite numbers.

From the socioepistemological point of view about the evolution and development of this concept we were able to find the processes, meanings and questions that made this idea emerge. In the end of that part of the research, we could detect the social practices, referential practices and meaning contexts for the two types of infinities that were found: the one related to algebra and the one related to calculus.

The experience done with students from Teachers Training College and high schools lead us to the understanding that the concept we began working with, is so close to many others that allow it to have meaning within certain context. And we assume that these are the contexts we need to take back to school.

## Glosario

**Aritmetización:** tratamiento aritmético de un objeto o conjunto de objetos que no son un número. Se entiende en esta investigación como el proceso que lleva a permitir la operatoria con los números transfinitos, definidas en función a las operaciones aritméticas, de la manera en que lo hace Cantor con los números transfinitos.

**Conjunto finito:** conjunto que puede ser puesto en biyección con un subconjunto inicial del conjunto de los números naturales.

**Conjunto infinito:** conjunto que no puede ser puesto en biyección con un subconjunto inicial del conjunto de los números naturales.

**Discurso matemático escolar:** conjunto de conceptos, procesos, herramientas y actitudes que una comunidad entiende es de importancia que sus ciudadanos construyan. El discurso puede estar establecido por documentos que lo guíen o por los usos y costumbres que una comunidad impone.

**Geometrización:** tratamiento geométrico de un objeto que no es una figura o cuerpo geométrico. En esta investigación, se entiende a la geometrización como el proceso que permite la matematización geométrica del espacio.

**Infinito en acto o actual:** característica de un objeto matemático que, concebido como unidad acabada, puede decirse que no es finito.

**Infinito en potencia o potencial:** característica de un proceso que puede continuarse eternamente sin llegar nunca a estar completo o acabado.

**Infinito impropio:** característica de un proceso que por repetición de procesos u objetos finitos logra tomar valores mayores a cualquiera dado.

**Infinito propio:** característica de los objetos o procesos que son en realidad infinitos y están claramente determinados, como el punto impropio de la geometría proyectiva.

**Matematización:** proceso que permite el tratamiento matemático de un objeto o proceso que no es de naturaleza matemática, al menos en su origen.

**Modelización:** proceso de construcción de un modelo matemático para una situación o problema de la realidad.

**Número transfinito:** número construido por Cantor para representar los cardinales de los conjuntos infinitos.

## **Capítulo 1**

### **Problema de investigación**

El infinito es un concepto que a lo largo de la historia atrajo a pensadores de diversas áreas del conocimiento por las dificultades en su tratamiento y abordaje científico y didáctico. Al incluirlo en la ciencia provocó numerosas paradojas y contradicciones que hicieron que durante siglos no fuera posible un tratamiento formal del mismo. Sin embargo, difícilmente podríamos en la actualidad trabajar ciertos contenidos en el aula de los distintos niveles educativos, si no habláramos de este concepto.

Al referirnos a la noción de infinito y su presencia en el aula de matemática, es posible encontrar numerosas investigaciones que lo han tenido como objeto desde distintas visiones y marcos teóricos (Garbin 2003, 2005; Montoro y Scheuer, 2006; Crespo Crespo, 2006; Lestón, 2008). En ellas se identifican y analizan, como se verá más adelante en esta investigación, dificultades y obstáculos a los que se enfrentan los estudiantes cuando en el aula trabajan con este concepto, intentan su construcción o se trabajan nociones que lo utilizan.

Tras haber indagado sobre el origen de las concepciones acerca de la noción que nos ocupa, que poseen estudiantes de escuela media como parte de una investigación realizada desde el enfoque socioepistemológico que abordó, en una primera etapa, la construcción del infinito intuitivo que se realiza en escenarios no académicos y con el que los alumnos llegan a la escuela (Lestón, 2008); la investigación ha continuado y en la actualidad se centra en la búsqueda de la caracterización de las concepciones del infinito matemático que se construyen en las aulas de educación superior de futuros docentes.

La escuela actual responde a las necesidades de una comunidad de la que es parte, que determina qué conocimientos deben construirse al seno de ella y qué otros conocimientos pueden ser relegados o dejados de lado. El discurso matemático escolar predominante de la escuela media en la Argentina, tiene como uno de sus contenidos más relevantes a las funciones, que inunda a los currículos de al menos tres de los cinco años de educación secundaria obligatoria. Se incluyen en el estudio y tratamiento de las funciones gran cantidad de elementos. Pero uno que es central en la comprensión y análisis de las funciones es la noción de infinito. Y sin embargo esa noción no es parte de ninguno de los currículos de la escuela media. ¿Por qué? Se parte del supuesto que la familiaridad del término en escenarios no escolares hace que los docentes y los investigadores que diseñan los contenidos de la escuela asuman que no es una necesidad. También se puede considerar que la complejidad propia del concepto sea una de las razones por las cuales esto ocurre.

El que se presenta hasta aquí es el cuadro de situación. Hay evidencias que indican que lo que se hace no es suficiente. Existen numerosos reportes que se analizan en el capítulo 6 donde se evidencia que la construcción que se hace de las funciones es puramente algorítmica y que el sentido de esta herramienta, que debería ser elemento para modelizar la realidad, está sumamente asociado con una serie de algoritmos y procesos, pero carece en gran medida de sentido.

Se parte de que eso ocurre, principalmente, porque no se puede construir una herramienta tan fuerte como es la función sin tener bien en claro todos los conceptos que en ella se involucran. El que se considera en esta investigación es el infinito.

Lo que se desea es reconocer el concepto de infinito factible de ser construido en las aulas de matemáticas. Si bien se parte del supuesto, como ya se mencionó, que no ocurre la construcción de esta noción en la escuela media, sí la hay en los cursos de Álgebra superior de la carrera de Profesorado en Matemática. Los futuros docentes transitan por una institución que incluye en sus diseños curriculares el estudio del trabajo de Cantor en los conjuntos infinitos y números transfinitos, lográndose así que los estudiantes de Profesorado enfrenten a sus cursos de escuela media con un constructo teórico que les permite enfrentar en el aula las situaciones que llevan a la discusión en relación al infinito.

Sin embargo, y a pesar de que el diseño curricular de la carrera de Profesorado de Matemática ha sido modificado en 2005, en algunos aspectos formales de los contenidos se mantiene la distribución y tratamiento de los mismos (hace al menos 40 años que estos últimos son parte del programa de Álgebra III), no se vislumbran en las escuelas medias propuestas de su construcción, o de discusión al menos, de lo que es el infinito. Se sigue aceptando, como se concluyera en Lestón (2008), que es lo que los estudiantes traen de los escenarios no escolares, aquello con lo que se cuenta en las aulas de escuela media. Y es sabido que eso no es suficiente ni funcional respecto a lo que el discurso matemático escolar precisa.

El planteo que se propone como eje de esta investigación puede comprenderse a partir de dos preguntas:

¿Cuál es la noción de infinito necesaria y cuál aquella que está presente en el discurso matemático escolar de la escuela media; y en la carrera de profesorado de matemática, donde se incluye el estudio del trabajo de Cantor?

¿Cómo hacer para acercar a la escuela media un infinito funcional a sus necesidades, en tanto en ese contexto se respete el infinito intuitivo ya construido en escenarios no escolares?

En el fondo, lo que se desea es recuperar para la escuela el sentido de una de las nociones que más fuertemente se usan en el discurso matemático. No se puede esperar que de manera natural se logre la uniformidad de pensamientos entre el infinito matemático que piensa el docente, el infinito matemático que necesita el discurso (que como se verá más adelante, no es por lo general el mismo) y el infinito no escolar del alumno.

La investigación con ese objetivo planteado se realiza desde una aproximación socioepistemológica, que mediante un estudio sistémico y situado del conocimiento permite, a través del reconocimiento de las prácticas sociales, comprender cómo es que el infinito ha aparecido a lo largo de la evolución del conocimiento científico y se ha constituido en concepto matemático (Cordero, Cen Che y Suárez Téllez, 2010). Bajo éste marco y entendiendo a lo social como condicionante fundamental de la construcción del conocimiento, se consideran a las Representaciones Sociales como herramientas de la socioepistemología para poder observar cómo se están dando los procesos de una construcción viva del infinito en las aulas del Profesorado en Matemática.

Ese objetivo, poder resignificar el infinito para el discurso matemático escolar de la escuela media, no fue perseguido linealmente. A lo largo del tiempo que llevó realizar este trabajo, el eje de la mirada fue cambiando, en gran medida por las respuestas parciales que se fueron detectando. Resulta ser que el camino que inicialmente se trazara para poder observar la evolución histórico-epistemológica del infinito, se fue torciendo a causa de los elementos que surgían de las experiencias que en paralelo se iban llevando a cabo con los estudiantes.

Por una lado, la visión de la realidad de lo que hay en el aula de escuela media permitió entender que existe una construcción del infinito pero que no es, por lo general, funcional respecto a lo que el discurso matemático necesita. Hasta ahí se llegó con lo obtenido de Lestón, (2008). Es bajo el reconocimiento de esa realidad circundante, por lo que se hizo necesario identificar qué es lo que el discurso matemático escolar del Profesorado ayuda a construir, para ver si eso que los futuros docentes construyen es lo que el discurso matemático escolar de la escuela media necesita. Se asume que lo que los futuros profesores construyen hoy es lo mismo que quienes ya están ejerciendo han construido en el paso por su formación de base. Si esos docentes son los que hoy están en las escuelas medias y no logran avanzar en una construcción real de las herramientas del cálculo, se entiende que lo que hay que modificar es la formación en el Profesorado. Por eso resulta de interés el trabajo realizado al seno de esa institución, sin perder de vista la educación media, que es últimamente, la que será receptora de esos educadores, a la que deberán responder con sus acciones.

Ver lo que la escuela media necesita llevó a reconocer que no se puede hablar de un infinito único en las aulas, sino varios infinitos que responden a usos diferentes, según refieren los futuros profesores con los que se trabajó al analizar la presencia del infinito en la secundaria, quienes reconocen que el infinito está presente en diversas ramas de la matemática y que frente a cada una de ellas, hay cuestiones involucradas que lo hacen aparecer de manera diferente. La

pregunta fue entonces porqué aparece como aparece, es decir, cuál es la aparición real que posteriormente llevó a su surgimiento dentro de la matemática, en la cual hoy lo reconocemos como objeto.

De frente a esa realidad, es que se comenzó a mirar la historia de la matemática y la manera en que ese conocimiento se hizo parte de los objetos que la matemática misma define, frente a lo cual se encontró que, quien finalmente lo establece (Cantor) le estudió desde un lugar de cardinalidad de conjuntos, que si bien es funcional para algunas de las ramas de la matemática, no lo es para todas. Y entonces fue necesario mirar más atrás, ya que no es en los conjuntos donde se presenta el conflicto que detectamos, sino en el estudio del análisis o el cálculo. En particular, en la escuela secundaria, el infinito aparece sujeto a las funciones, como si fuera ese el primer momento en que se detectan estas cuestiones.

Si las funciones son centrales en la construcción de la matemática escolar de la escuela media, es necesario volcar la mirada hacia la aparición del infinito en ese contexto. Pero entonces, la noción que nos ocupa, y que aparece en el cálculo, no puede comprenderse desde la cardinalidad como la trabaja Cantor. Es necesario ver a las funciones de manera dinámica para que el concepto de infinito tuviera sentido, y así llegar a la manera en que Newton entendía las curvas y la forma en que construye al infinito como elemento que le permite geometrizar el espacio y sintetizar el conocimiento que ya se tenía con aquel que estaba en construcción.

Todos los cambios de camino que fueron ocurriendo a lo largo de este trabajo, en el mismo sentido pero con recorridos diferentes, fueron acompañados por experiencias llevadas a cabo en dos tipos de instituciones educativas, una escuela media y un Profesorado, ambos de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires y con realidades suficientemente conocidas como para poder analizar sin perder noción del escenario sociocultural en que están inmersas y el público al que atienden.

Se inicia esta investigación con la firme convicción de que no hay manera de impactar las instituciones educativas sino se impacta en los docentes que ahí trabajan. Y es con esa idea que se busca ver, en cada paso, qué saben, qué creen, qué construyen y cómo ven sus propios procesos de construcción los futuros docentes y los alumnos actuales de escuela media. Para poder observar esas cuestiones fue necesario encontrar una herramienta que permitiera estudiar la construcción de las ideas al tiempo que van ocurriendo, y es ahí donde se hace necesario utilizar a las representaciones sociales como herramienta de la socioepistemología.

Se acepta que la complejidad que involucra la incorporación de una herramienta en el marco teórico de la socioepistemología es grande y que puede generar conflictos y disensos. Pero es la necesidad de poder ver lo que se construye mientras se está construyendo lo que obliga a esa incorporación. En el Capítulo 2 se profundizan los aspectos relativos al marco teórico y las herramientas utilizadas dentro de él.

En ese mismo capítulo se explicita el marco teórico elegido, la socioepistemología, con sus principales características y las unidades de análisis que se consideran para las distintas secciones de este trabajo. Se incluye también la descripción de las representaciones sociales, utilizadas como herramientas desde la socioepistemología para las indagaciones realizadas con los estudiantes con los cuales se trabajó.

En el Capítulo 3 se presentan los antecedentes a esta investigación, analizados desde la búsqueda de una mirada similar a la propia, en donde el lugar de lo social debe considerarse como central en el estudio del infinito, así como las propuestas

para la escuela en relación a ese concepto. Se finaliza este apartado con la consideración de lo que hace necesaria para nosotros esta investigación.

En el Capítulo 4 se muestra una revisión histórico-epistemológica del infinito, que parte de los griegos y continúa el recorrido hasta el siglo XIX con el trabajo de Cantor. La tarea estuvo organizada en relación a la búsqueda de las características del trabajo que realizaron los matemáticos, el escenario en el cual se encontraban y las preguntas que guiaban sus producciones.

En el Capítulo 5 se presentan dos de las cuatro experiencias llevadas a cabo con estudiantes de escuela media y de Profesorado de Matemática. Las dos que en este capítulo se describen van en dos sentidos: por un lado, en el análisis de las características que los alumnos ven en las obras de Cantor y Bolzano; y por otro, en la búsqueda de las representaciones sociales que los estudiantes de profesorado tienen sobre el infinito y el infinito matemático. De esas dos experiencias surge la necesidad de estudiar el papel de las funciones en el discurso matemático escolar, que aparece como una de las nociones que los estudiantes asocian con la presencia del infinito en la escuela.

En el Capítulo 6 se realiza un breve estudio histórico-epistemológico de las funciones y se analiza su presencia en el discurso matemático escolar. Éste último se refuerza además con la presentación de dos experiencias en relación a las funciones y su vinculación con el infinito. Las experiencias son un cuestionario abierto, aplicado en las escuela media y en Profesorado de Matemática; y tres entrevistas semiestructuradas en profundidad hechas con tres estudiantes del Profesorado del grupo que respondió al cuestionario.

En el Capítulo 7 se presentan las conclusiones de este trabajo, organizadas en función de lo que dicen los alumnos, lo que nos deja saber la historia, las

representaciones sociales que hay en el Profesorado de Matemática, las prácticas sociales del infinito, los aportes de las representaciones sociales como herramientas para esta investigación, y las formas como se cree puede continuarse en este trabajo.

## **Capítulo 2**

### **La necesidad de explicitar un marco teórico**

Ninguna mirada es ingenua. Frente a cualquier cuestión que uno decida observar en la vida, hay una lente que nos permite identificar las cosas que nos parecen relevantes. Y esas cosas relevantes para uno pueden no serlo para otros. Lo que nos preguntamos es qué hace que algunas cosas sean relevantes para nosotros y no para otros, en particular, al momento de mirar lo que ocurre adentro de la clase de matemática.

Para poder comprender cómo proponemos mirar lo que estamos viendo en el aula en relación al infinito, es necesario entender cómo hemos llegado a ver la clase de matemática y desde dónde la miramos. Por ello en este momento, se dedica un espacio a hacer explícito cuál es el marco teórico desde el que se realiza esta investigación y de qué manera se hará uso de ciertas herramientas para obtener información en relación al objetivo que nos proponemos.

## **La Matemática Educativa frente al aula de matemática**

La matemática educativa a lo largo de su historia ha generado producciones de diversa naturaleza, pero cada vez más se hace necesario que esas producciones impacten de manera directa en las escuelas.

Un fin último de la Socioepistemología es la INTERVENCIÓN. De aquí la importancia que tiene las aportaciones que podemos hacer al discurso matemático escolar. En este sentido consideramos esta investigación como un primer paso en un proyecto más global que pretende articular los resultados de esta investigación con las diversas variables de la difusión institucional del conocimiento, de manera de intervenir en el sistema educativo, en sus diferentes esferas, como lo son el nivel aula, el nivel currículo, y el nivel institucional en relación a la visión del por qué de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. (Espinoza, 2009, p. 149)

Las palabras de Espinoza llevan a pensar en este efecto que la matemática educativa debe esperar de sus producciones, y aunque su investigación no fue desarrollada dentro de la clase, sino desde un análisis histórico, epistemológico y sociocultural, no pierde de vista la clase de matemática ni el sistema educativo en general. La investigación que aquí presentamos, en cambio, nace y se desarrolla desde dentro de la clase de matemática porque nuestra propia historia es la que nos mantiene en ese lugar.

Se entiende que una de las tareas que debería proponerse la matemática educativa es preparar y formar docentes investigadores, para que desde su lugar en el aula puedan responder las preguntas que se hacen desde el propio escenario.

Lo que ocurre en las aulas no escapa a los ojos de los docentes, actores de la educación escolar. El problema es que los sistemas educativos que ubican a los docentes en esos escenarios no preparan en muchas oportunidades a los docentes para mirar lo que pasa y construir un conocimiento que les permita incidir de manera efectiva en esa realidad que los circunda. Homilka (2008) en su investigación sobre la formación docente en un instituto de formación de profesores de la Argentina, encontró que los cuatro años como mínimo, según el diseño curricular vigente en Buenos Aires, que un estudiante (futuro profesor) pasa preparándose, no son suficientes para modificar sus concepciones iniciales sobre lo que debe ocurrir adentro de las aulas e incurren en la repetición de los modelos que han tenido en su escuela secundaria. Se entiende que esto sucede porque no hay a lo largo de toda la carrera de formación docente una instancia de preparación de un docente investigador, con alguna aproximación teórica a lo que es la investigación educativa. Estamos convencidos de que sin un marco teórico, sin una lente que permita mirar la realidad, la posibilidad de construcción de conocimiento que implique cambio es tan lejana y tan improbable, que el miedo frente al estrepitoso y casi seguro fracaso hace que nos aferremos a la realidad conocida, por criticable e inoperante que resulte.

El marco teórico se está entendiendo en el sentido de esa lente de la que se hablaba antes: sin un marco no hay mirada posible. Todos ven lo que pasa, pero sólo pueden mirar los que han construido un sistema de referencia que le permite distinguir lo que es importante de lo que no lo es, lo que es posible de lo que no lo es. No creemos que un investigador adopte un marco teórico en función de la situación que quiere observar, creemos que uno adopta un marco teórico, o mejor dicho, es **adoptado** por un marco, que es el que nos va a ayudar a crecer y a mirar las cosas con una mirada de investigador que puede producir un conocimiento provechoso para una comunidad, con la que se comparten preocupaciones, preguntas y necesidades, propias de la cultura que lo rodea.

## **La socioepistemología como marco teórico de esta investigación**

Creemos que es la socioepistemología el marco teórico que nos ha dejado crecer en su seno, ver las realidades de nuestras aulas de la manera en que lo hacemos, y preguntarnos las cosas que nos permite esta aproximación sistémica, que pone el foco en los procesos de construcción que se dan al seno de una comunidad.

Las investigaciones que hemos desarrollado a fin de “hacer ver” la postura descrita, han seguido una aproximación sistémica que permite tratar con las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento, a saber; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el plano cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. Esta aproximación múltiple ha sido nombrada como el acercamiento socioepistemológico (Cantoral, 2001, p. 65)

La construcción social de ese conocimiento es el foco de la mirada: entender que todo conocimiento es producto de una necesidad y una serie de acciones que están sustentadas por una idea que las provoca y en un escenario sociocultural particular que permite que acontezcan.

El dominio matemático obliga a explicar la matemática desde la matemática misma y, en consecuencia, soslaya a lo humano y a los sentidos de todo el saber matemático. Se trata, entonces, de identificar o construir aquellos marcos o prácticas de referencia en los que se manifieste el uso del conocimiento matemático; es decir, donde sucede su funcionamiento y su forma orgánica en la situación específica. Ahí aparecerán elementos que no corresponden a las justificaciones razonadas que norman alguna estructura lógica, sino que atañen a la

utilidad del participante en la situación específica. Es por eso que no nos importa el estudio del conocimiento matemático, sino el estudio de la función del conocimiento matemático. (Cordero, Cen Che y Suárez Téllez, 2010, p. 189)

Hay entonces una realidad socialmente compartida, una necesidad o pregunta que nace de esa realidad y una serie de acciones que ocurren al seno de una comunidad en la búsqueda de encontrar respuesta a lo que se preguntan. Sin una necesidad no hay construcción, sin uso no hay acción. La socioepistemología proclama estas ideas, declara que es ese tipo de situaciones las que debemos acercar al aula. Y propone para ello una mirada global, sistémica, compleja, que incorpora todo aquello que interviene en los momentos de construcción de conocimiento. Como eje rector de la mirada que propone el marco, se define dentro de esta aproximación teórica una noción que ha sido eje de muchas investigaciones, la de **práctica social**. Consideramos como definición de esta noción la propuesta por Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez Sierra (2006).

La *práctica social* la entendemos como normativa de la actividad, más que como actividad humana reflexiva o reflexión sobre la práctica [...] Ahí radica una de las principales distinciones teóricas del enfoque socioepistemológico: “la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen” (Covián, 2005). De este modo, se pretende explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber con base en prácticas sociales. En sus investigaciones, los socioepistemólogos reportan más bien caracterizaciones del ejercicio de las prácticas que anteceden a la producción o construcción de conceptos y al desarrollo del saber. (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez Sierra, 2006, p. 85)

Compartimos esta idea que sustenta el espíritu de esta mirada que nos ha adoptado y que nosotros hemos aprendido a ver desde adentro. Sin embargo, hasta hace algún tiempo, no podíamos encontrar en las producciones evidencias concretas que permitieran actuar una vez que teníamos esas prácticas en las manos. Pero gracias a la colaboración de una comunidad que trabaja en un mismo sentido y con el propósito que antes exponíamos en las palabras de un joven investigador como Espinoza, cada vez es más claro para quienes estamos en las aulas cómo la práctica social es el elemento que una vez identificado va a permitir el impacto en el sistema educativo. Cordero et al (2010) presentan sin dejar lugar a dudas los motivos por los cuales resulta de relevancia identificar las prácticas sociales que norman las acciones que llevan a la construcción de conocimiento matemático.

Una vez identificadas las prácticas sociales que dieron y dan cuenta del conocimiento matemático necesitan ser reinterpretadas para integrarse al sistema didáctico, donde precisan de la intencionalidad (de producción, en el sistema didáctico) para que se desarrollen en las condiciones del sistema. (Cordero, Cen Che y Suárez Téllez, 2010, p. 190)

Ahora sí, sabemos cómo mirar nuestra realidad, cómo identificar lo que es importante (prácticas en lugar de objetos), y qué debemos hacer con eso que encontramos. Sin embargo, las prácticas sociales, como definen Cantoral et al (2006), no son acciones sino normativas, o sea, no son visibles. Y entonces los problemas de no saber qué buscar se transforman en cómo poder encontrar aquello que no puede ser observado de manera directa. Sin embargo, otros investigadores de este campo y de esta aproximación teórica han ido desarrollando elementos que dan pautas de qué debemos tener en cuenta para ver aquello que es invisible.

Por un lado, una noción que permite situar a las prácticas sociales es la de **escenario sociocultural**, que define Crespo Crespo (2007), tomando como base elementos de la psicología ecológica.

**Escenario sociocultural:** son los ámbitos en los que actúan los grupos sociales. Están definidos por prácticas culturales específicas que manifiestan necesidades de tipo ideológico, psicológico, fisiológico o ambiental de los individuos que constituyen las sociedades específicas. En estos escenarios se explicitan peculiaridades históricas y cotidianas, de carácter filosófico, epistemológico, ideológico, o podemos decir más generalmente: culturales (Crespo Crespo, 2007, p. 7)

Los escenarios sí son visibles, podemos entender de manera directa que cada grupo actúa de acuerdo a uno de esos escenarios. De hecho, en el trabajo de esta autora se mencionan algunos de esos escenarios (académicos, no académicos, escolares, no matemáticos) y ha continuado profundizando luego cuestiones relativas a esta noción (Crespo Crespo, 2009).

Todos esos escenarios hacen aportes a la manera en que las personas piensan y entienden al conocimiento matemático. Y si bien no todas las personas son parte de todos esos escenarios, sí ocurre que por lo general, se transita por más de un escenario. Y esos contextos en los cuales se vive y se construye conocimiento e identidad, no son entes estáticos ni estancos: se superponen, se modifican unos a otros, se influyen de manera en que cada uno aporta continuamente cosas a los otros en las mentes y las manos de quienes por ellos transitan.

Además, los escenarios no se encuentran generalmente aislados unos de otros. Existen interrelaciones entre los escenarios, que determinan influencias entre ellos y por lo tanto, en las conductas que generan. Un

escenario determinado puede estar recibiendo influencias de otros escenarios que existen simultáneamente con él o de escenarios del pasado. Esas influencias forman parte de los escenarios. Los escenarios influyen directamente sobre las conductas de los individuos que lo habitan. Por otra parte, también en estas conductas se ponen de manifiesto maneras de pensar y de comprender la realidad propia del individuo. (Crespo Crespo, 2007, p. 35)

Aparece explícito en esta idea de Crespo Crespo (2007) otro elemento que es de vital importancia: la conducta. Se acepta a la conducta como la manera en que se entienden las construcciones socioculturales y lo que se hace con dichas construcciones. Espinoza (2009), aporta a la comunidad y a la teoría otro elemento que construye sobre la idea de escenario sociocultural, y es la noción de **contexto de significación**.

El contexto de significación de cierto conocimiento es el ámbito en el cual cierta persona o colectivo sitúa la significación de cierto conocimiento en cierto escenario sociocultural. Estos contextos nos permitieron acercarnos a la mirada de los autores respecto a sus obras, de manera de entender las intencionalidades subyacentes y las ideas germinales de las obras. Los contextos de significación de ciertos conocimientos tiene tres dimensiones: la situacional, la sociocultural y la de la racionalidad, en las cuales se sitúa la significación del conocimiento matemático. (Espinoza, 2009, p. 150)

El escenario sociocultural se transforma entonces en un ámbito de interacción sociocultural que, además de estar vivo y siendo modificado continuamente por sus actores, permite construir significados propios de una comunidad a un conocimiento de acuerdo a las necesidades y cultura propia de esa comunidad. Podemos decir que de esta manera, la comunidad que construía conocimiento en

base a las prácticas sociales que normaban las acciones, tiene un ámbito que hace que esas normas estén sujetas a otras, más generales y que norman no sólo la manera de hacer las cosas sino de entender sus necesidades y proponerse preguntas que harán que aparezcan prácticas que normen acciones. La práctica social de una comunidad estará entonces sujeta a un contexto de significación que, como escenario sociocultural, hará que el problema que surge de esa realidad se aborde en función de un bagaje cultural y cuya construcción de conocimiento se dé asociada a un significado que es el necesario para los requerimientos de esa comunidad.

### **Las representaciones sociales como herramienta de la socioepistemología**

Tenemos entonces en el marco que nos cobija una cantidad importante de herramientas para poder detectar elementos que han aportado a la construcción del conocimiento matemático, para recuperar esos significados que dan las prácticas sociales a los conceptos y procesos. Estas herramientas, las prácticas sociales y los contextos de significación, resultan de indudable importancia para investigaciones de corte histórico y epistemológico, donde el objetivo está puesto en la recuperación de los procesos de creación y significación del conocimiento matemático desde sus orígenes. La manera de estudiar las obras de los matemáticos, en sus escenarios socioculturales, ha quedado más que claramente explicada a lo largo de diversas investigaciones (Crespo Crespo, 2008; Espinoza, 2009; Cordero et al, 2010; Buendía y Ordóñez, 2009).

En esta investigación, sin embargo, resultó necesario observar otras cuestiones. Dentro del aula ya se han ido construyendo diversos conocimientos, los alumnos que tenemos también han ido construyendo conocimientos fuera de las aulas, que entran con ellos en nuestras clases. Y existen evidencias que muchas veces esas

construcciones que ya han logrado llegar como obstáculos a nuestra tarea docente. (Lestón, 2008). Pero el problema que enfrentamos es que de esas construcciones no se tienen más evidencias que lo que se ve y se oye en las propias aulas. No hay obras para estudiar, no hay registros escritos además de las tareas de los alumnos, y esto sólo si se tiene la suerte de que sus construcciones previas aparezcan. Lo que ocurre es que sí es necesario saber qué es lo que ya han construido, en la escuela, en sus casas, en sus vidas; conocer en que están pensando, qué ideas hay ya en sus mentes para saber cómo acercarlos a otras nuevas, distintas. Y es para ese tipo de investigación para la cual no encontramos herramientas ya descritas o definidas.

La escuela actual debería prestar atención [a los conocimientos que] se construyen fuera de la escuela y que, penetran en ella a pesar de que los docentes de matemática los rechacen. Esa búsqueda fuera de la escuela puede dar claves acerca de los conocimientos que se construyen y a tratar de identificar la manera en la que se los construyen. De esta manera, la escuela pasaría a ser una instancia más de aprendizaje, pero no la única, se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento. (Crespo Crespo, 2007, pp. 277-278)

La pregunta en este momento es entonces, ¿cómo vemos lo que ya se ha construido? Porque de eso, no hay obras para ir a leer, no hay escenario más que los actuales en que nuestros alumnos se mueven y no hay significados más que los que cada microgrupo (escuela, familia) ha podido construir. Si no hay obras para estudiar, ¿cómo recuperamos esos procesos de construcción? Necesitamos una herramienta que permita ver lo que ya está hecho y de lo que no queda más evidencia que en las cabezas de nuestros alumnos. Esa herramienta entendemos debería ser la misma que se utilice para poder ver si lo que estamos haciendo

dentro de las aulas, cuando hemos logrado identificar todos esos elementos de los que hablábamos antes, está ayudando en la tarea educativa.

Estamos considerando entonces, una unidad de análisis que nos ayude a ver cuestiones relativas a la cognición; y ahí es donde no encontramos dentro de la socioepistemología una herramienta que permita analizar esto último. La psicología social brinda elementos, que creemos pueden transformarse en una **herramienta** en nuestro marco para poder observar puntualmente las cuestiones relacionadas con lo cognitivo que interviene en la construcción del conocimiento. La Teoría de las Representaciones Sociales reconoce a lo social como elemento de construcción de la realidad. Consideramos inicialmente dos cuestiones que al menos justifican que nos permitan el intento.

Parto del hecho de que las personas no construyen sus pensamientos en aislamiento, sino que se influyen unas a otras sobre la base de las verificaciones colectivamente compartidas, referidas a los objetos que conforman su realidad. [...] Las representaciones sociales dan sentido a nuestras creencias, ideas, mitos y opiniones para invadir de significado a las cosas y nos ayudan a comprendernos unos a otros, con base en las operaciones de las sociedades en las cuales vivimos con énfasis en los procesos de comunicación. (Vergara Quintero, 2008, p. 59)

El planteo de la Teoría de las Representaciones Sociales no está, bajo esta mirada, tan lejos de la socioepistemología. Lo que sí sabemos es que la propuesta de las Representaciones Sociales por sí misma no es suficiente para esta investigación pues no se refleja la importancia del aula como escenario en el que se resignifica el conocimiento matemático. Es fundamental comprender e interpretar el papel de lo cognitivo y lo social, para entender la naturaleza del pensamiento matemático. Pero resulta entonces que la psicología cognitiva por sí sola nos resulta insuficiente, ya que no atiende a lo epistemológico ni a lo

didáctico. Por eso en esta investigación se propone la inclusión instrumental de las representaciones sociales al seno de la socioepistemología. Las investigaciones relacionadas con aspectos cognitivos por lo general carecen de cuestiones sociales, ya que se entiende a lo cognitivo como acción individual. Pero esa manera de ver la cognición no comulga con nuestras ideas.

De este modo cuando un yo cognitivo habla en expresiones cotidianas, también habla un yo colectivo y anónimo, expresando el saber y el sentir de un estrato social y cultural, enunciando un imaginario cultural particular, imaginario que no siempre es coherente con el saber matemático escolar. (Carrasco citado en Crespo Crespo, 2009).

En este sentido es necesario mirar a lo cognitivo, relacionado con lo que la cultura nos dice que es importante construir y de la manera en que hemos aprendido a construir conocimiento. Las herramientas cognitivas que se usaron en la primera parte de esta investigación (Lestón, 2008) no contemplan lo social, se quedan con las acciones individuales (Fischbein, 1989), son válidas, pero no alcanzan a comulgar completamente con nuestro marco teórico. Al no incorporar lo social, no permiten entenderlo como inseparable de los procesos individuales que intervienen en todo acto cognitivo.

Ahora bien, la apropiación que un individuo hace de la realidad es también dependiente de su historia y el contexto social e ideológico que lo rodea. De hecho, la representación se sitúa en el punto donde se intersectan lo individual y lo social. Lo social interviene de varias maneras: por medio del contexto concreto en que se sitúan los individuos y los grupos; de la comunicación que se establece entre ellos; de los marcos de aprehensión que proporciona un bagaje cultural; de los códigos, valores e ideología relacionados con las posiciones y pertenencias sociales específicas. Por ello, los contenidos

y los procesos de constitución de las representaciones han de situarse en las condiciones y los contextos en los que surgen. (Ávila Storer, 2001, p. 60)

Resulta hasta natural entender a las representaciones sociales como herramientas de la socioepistemología. Se refieren a los mismos procesos y construcciones que la socioepistemología, aunque no asociadas a objetos matemáticos.

Para esta investigación, sin embargo, que toma evidencias de fuentes históricas y de las aulas de matemática, no es suficiente la Teoría de las Representaciones Sociales como marco teórico, dado que no puede ni le interesa mirar e intentar explicar la construcción histórico-epistemológica del conocimiento, ni matemático ni de otra naturaleza. Su objetivo es ver cómo se construye la realidad **mientras está ocurriendo**. La socioepistemología no sólo mira esto, mira también hacia atrás, al momento en que el conocimiento se constituyó y en función de qué situaciones y en qué condiciones. Es la mirada sistémica de la socioepistemología, a través de sus herramientas, la que le permite comprender la construcción social del conocimiento matemático.

El contexto de significación nos ayudará a situar la significación socio-histórica del conocimiento matemático y a identificar los medios de significación (herramientas conceptuales para significar el conocimiento matemático) y las ideas germinales (ideas que dieron origen) del conocimiento. El contexto de significación tiene tres dimensiones: a) La situacional, que incluye el conjunto de factores o circunstancias a considerar en el contexto (es aquí donde se cuestiona sobre el tamaño); b) La sociocultural, que se refiere a una manera de mirar a la dimensión situacional; y c) La dimensión de la racionalidad, que será un plano paralelo que determinará la “manera de ver” al conocimiento

científico relativo a la dimensiones situacional y sociocultural.  
(Espinoza, 2009, p. 163)

¿Qué le agrega esta herramienta descrita por Espinoza a la mirada que plantea Vergara Quintero sobre el conocimiento de la construcción del conocimiento? La racionalidad, propia del conocimiento científico. Pero lo otro que observó, que estudió y que analizó es de la misma naturaleza. La diferencia, más allá de la naturaleza, es que su mirada se ubicó en el pasado, en el estudio de obras originales de quienes fundaron las nociones que hoy siguen invadiendo nuestras aulas de matemática. Pero, ¿qué hubiera pasado si hubiera querido mirar esas nociones y cómo viven hoy en el aula? Seguramente su metodología debería haber cambiado, porque en los escenarios vivos no hay obra que mirar.

Una de las críticas que podemos anticipar a esta propuesta es la que se relaciona con la distancia entre la Teoría de las Representaciones Sociales y el conocimiento científico, ya que para algunos autores, las representaciones sociales son una modalidad especial del conocimiento del sentido común. Sin embargo, esa es una de las maneras de acercarse a esta teoría. En el escrito de Vergara Quintero (2008), la ciencia aparece como una de las preocupaciones de esta teoría.

Lo que nunca estudiamos, y que puede ser un verdadero problema, es cómo la ciencia, en su difusión en la sociedad, se transforma en conocimiento común o conocimiento banal, o más bien, cómo la ciencia llega a ser parte de nuestra herencia cultural, de nuestro pensamiento, de nuestro lenguaje y logra condicionar nuestras prácticas diarias. [...] Es allí donde el estudio de las representaciones sociales tiene importancia para ayudar a comprender por qué aceptamos ciertas teorías y otras no, qué hace que el núcleo central de la representación de los grupos sociales se mantenga por encima de las condiciones

periféricas que adoptan individualmente sus integrantes, o bien por qué las personas forman y fortalecen los nodos centrales con sus experiencias grupales. (Vergara Quintero, 2008, pp. 61-62)

## **Acerca de la democratización del conocimiento**

Cantoral habla de la democratización de la ciencia (Cantoral, 2010), de la llegada del conocimiento científico a todos los miembros de una comunidad de manera tal que lo que esa comunidad ha ido construyendo y considera importante sea un aporte al crecimiento y desarrollo científico y técnico de las comunidades actuales. ¿No es eso la transformación del conocimiento científico en conocimiento banal (en el mejor sentido de la banalidad)? Creemos que sí. Y acordamos con Cantoral en que esa democratización del conocimiento es el fin último de la Matemática Educativa.

El problema que enfrentamos entonces es comprender cómo la Teoría de las Representaciones Sociales puede ayudar a la Socioepistemología para lograr ese objetivo. Y aquí el aporte del trabajo de Vergara Quintero nos resulta muy relevante.

Para comprender bien una época, es útil poner la mirada en lo informal y en el innegable *ethos* que cada época construye. Es ya un lugar común que, para el pensamiento griego, había una distancia entre la *doxa* y la filosofía, entre el sentido común y el saber verdadero. La verdad tenía que ver con el valor de la demostración lógica que producía lo apodíctico, la construcción necesaria de concatenaciones de ideas, que permitían abrigar confianza en una afirmación. La *doxa*, en cambio, se movía en el mundo de lo asertórico, es decir, en las

afirmaciones gratuitas, que no eran demostradas mediante la lógica. Los criterios de verdad se transformaron y se multiplicaron hacia el siglo XIV, cuando Galileo, asomado a un telescopio, quiso demostrar mediante la observación, el sistema racional de Copérnico. De esta manera, los tribunales de demostración de lo apodíctico variaron y la *doxa* ya no fue desmentida por falta de lógica sino porque provenía del pueblo. (Vergara Quintero, 2008, pp. 59-60)

Venimos enfrentándonos desde hace cientos de años con el conocimiento que se construye fuera de los métodos y círculos científicos. El rechazo por lo que no es ciencia es tan fuerte y vivo, que nuestras escuelas están llenas de alumnos que fracasan porque no entienden qué es lo que sus maestros les quieren enseñar, sus maestros les hablan de un modo que ellos no pueden comprender (Lomelí Plascencia, 2009), los conocimientos que ahí se preservan y se pasan como la llama sagrada son respuestas a preguntas que nunca se hicieron. Y las preguntas que ellos sí se hacen, con las que vienen a las clases, sus concepciones, sus hipótesis, sus necesidades; esas, las tienen que dejar afuera, porque en la escuela no tienen lugar. (Lestón, 2008). ¿Cómo hacemos para llegar a ellos, para movilizarlos, para interesarlos, para entusiasmarlos, para hacerles sentir la necesidad de conocer si primero no los conocemos y reconocemos, con todo lo que son y lo que creen, quieren y necesitan? Lo que encontramos de positivo en la Teoría de las Representaciones Sociales, es principalmente eso: no hay ideas de segunda, el conocimiento es construcción social, y es válido por el sólo hecho de haber sido necesario para un grupo.

Nosotros estamos parados con un pie en cada lugar: uno en el infinito matemático, de construcción formal, con su epistemología y los grandes nombres de quienes en él intervinieron (desde Aristóteles y sus contemporáneos hasta Newton, Leibniz, Bolzano y Cantor); el otro pie lo tenemos en el aula, en donde los nombres sólo significan algo si uno conoce a los estudiantes que están

adentro de la clase, pero que cuando se conocen, representan más que los nombres de aquellos que todos conocemos. ¿Cómo hacemos para hacer jugar esas dos realidades, que por la naturaleza de sus escenarios hay que mirar de manera distinta? La respuesta que nos arriesgamos a dar es permitiéndonos reconocer que necesitamos una herramienta para mirar el aula y lo que ya está ahí, así como tenemos una herramienta, como la práctica social, para mirar la historia y ver lo que hubo ahí. ¿Por qué las representaciones sociales? Porque comparten con nosotros la idea de que lo que está en la escuela es valioso, es importante, es parte de quienes están con nosotros en los cursos y su conocimiento y reconocimiento es lo que nos va a permitir construir sobre él.

Entonces, las verdades populares, el sentido común, la vieja *doxa*, fueron consideradas como el pensamiento ingenuo, sin la consistencia de la demostración, de la razón o de la ciencia. La verdad se confinó en los claustros de la academia que cerró sus ojos y sus oídos al decir popular, a sus representaciones, y a sus mitos. Sólo hasta mediados del siglo pasado, con el interés de la antropología y la etnología por las culturas remotas, se empezó a dar crédito a verdades que no provenían de la lógica formal y se descubrieron migraciones de conceptos que invadían, en avalanchas temerarias, el mundo aséptico de la ciencia y la razón. Y desde entonces, al menos como objeto de estudio, las representaciones sociales —ese mundo inasible, inestable e imponderable del saber construido sin método— interesaron a diferentes disciplinas. (Vergara Quintero, 2008, p. 60)

Pensamos que una de esas disciplinas es la Matemática Educativa, que lo que declaramos con tanta fuerza que queremos lograr, ese impacto en el sistema educativo, lo vamos a poder hacer si primero entendemos que son quienes están en el sistema educativo los que nos tienen que decir con qué contamos. Queremos llegar al sistema educativo, entrar con el permiso de sus actores, dejar

que nos conozcan y conocerlos, no podemos pensar en imponer nuestras ideas y la realidad que nosotros creemos conocer. ¿Por qué fallan uno tras otros los planes de modificación curricular, al menos en nuestro país? Porque quienes los diseñan, lo hacen desde fuera, mirando el aula como si fuera un laboratorio y a los docentes y alumnos como si fueran sus conejillos, sin dejarse manchar por la tiza y sin contaminarse con las ideas de los que ahí pasan día tras día tratando de construirse una serie de conocimientos que le sean propios, que los ayuden a vivir y a crecer y a poder decidir. Creemos fervientemente que no se llega a las escuelas con ideas, si no se llega primero a las personas. Y las ideas son fáciles de identificar y conocer, pero las personas no son tan transparentes. Lo que podemos conocer de ellos son sus ideas, sus necesidades, sus preguntas, sus deseos. Eso es lo que queremos ver con las representaciones sociales, pero sin olvidar que estamos trabajando bajo un marco que nos cobija y que nos da guías de acción para poder analizar todo eso que rodea a lo que se hace en el aula, o lo que debería ser hecho.

La perspectiva socioepistemológica no mira a los conceptos y sus diferentes estructuraciones de manera aislada, sino atiende a las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos. Es decir, intenta crear un modelo que refiera la construcción social del conocimiento matemático y poner al descubierto sus causas reales: el reto es formular epistemologías sobre las prácticas sociales que generan el conocimiento matemático. (Cordero et al, 2010, p. 190)

La creación del modelo del que habla Cordero es el que necesita sin lugar a dudas, del aula, con todo lo que tiene adentro. La naturaleza del sistema es más que compleja, por el sólo hecho de ser un sistema íntegramente formado por personas.

Creemos entonces que en la búsqueda de una respuesta para nuestra pregunta, se hace necesario un doble abordaje de lo observado: por un lado, el proceso de construcción del infinito de idea filosófica a conocimiento matemático, y por otro, las representaciones que los alumnos han construido en relación a ese infinito a lo largo de toda su escolaridad. Y ese doble abordaje es el que nos lleva al uso de dos herramientas distintas: las prácticas sociales y las representaciones sociales. Pero ambas manifestándose bajo la socioepistemología como eje rector de la investigación.

## **Capítulo 3**

### **Antecedentes a la investigación**

Una de las hipótesis principales de este trabajo es la necesidad de considerar las construcciones socioculturales relacionadas con el infinito al momento de redefinir el discurso matemático escolar, incluyendo en este último al infinito como concepto u objeto de construcción. Basándonos en el conocimiento de la realidad actual de la escuela y de los contenidos matemáticos que en ella se construyen, o al menos pretenden construirse, entendemos la relevancia de colocar al infinito como objeto de estudio, como elemento fundamental del discurso matemático que los alumnos deben construir para apropiárselo o al menos lo discuta y vislumbre sus características peculiares), si se pretende sostener sobre él a todos los procesos y nociones que en la escuela se discuten y enseñan, y que de él hacen uso. Es necesario hacer visibles a los conocimientos que provienen de los “saberes culturales” (Díaz Moreno, 2003), comprender cómo la realidad de las tradiciones y las culturas marcan las formas en que el conocimiento se construye (Cantoral, 2007).

Lo cultural es parte de lo que el discurso matemático escolar debe considerar. Creemos que pensar en una escuela que enajena a la persona de sus espacios de desarrollo, crecimiento y formación es ignorar lo que la sociedad requiere de sus ámbitos de educación, que son cada vez más amplios y flexibles, abiertos en la comunidad y compartidos por la realidad globalizada de una sociedad de la información, que se comunica por diversos medios y se alimenta de los conocimientos que se construyen dentro y fuera de las instituciones educativas tradicionales. (Crespo Crespo, 2007)

En el caso del infinito, concepto alrededor del cual gira esta investigación, la escuela hace uso del mismo, pero no lo considera como objeto de construcción. Para el infinito, se entiende que alcanza con las nociones que se construyen fuera de la escuela, aunque se desconoce la naturaleza de esas ideas. El porqué de su aparición en los escenarios no escolares, el cómo, el para qué, no se estudian, no se analizan; en general, ni siquiera se consideran. Y sin embargo, se asume que la sociedad genera en torno a ese concepto una idea no sólo suficiente para lo que la matemática escolar requiere sino, además, coherente con ella. (Lestón, 2008)

Es posible encontrar numerosas investigaciones realizadas desde distintos marcos teóricos que hacen foco en diversos aspectos. Algunas han indagado acerca de lo que los alumnos saben o creen en relación al infinito (Garbin y Azcárate, 2002; Garbin, 2005; 2003; Lestón y Veiga, 2004; Montoro y Scheuer 2004; 2006; Dreyfus & Tsamir 2002; 2004; Tsamir & Tirosh, 1999; Díaz Navarro, 2007; Arrigo & D'Amore, 2004; Ortiz, 1994; Imaz, 2001, Lestón, 2008). Estos trabajos evidencian algunas de las ideas generadas en ámbitos escolares que los alumnos tienen sobre el infinito y los obstáculos a los que se enfrentan al abordarlo en el aula. Referidas a la construcción del infinito en el aula pueden hallarse algunas propuestas (Albert, Cazáres y Castañeda, 1999; Tsamir, 1999; Valdivé, 2006; Camacho y Aguirre, 2001; Jahnke, 2001). También se han analizado las

construcciones del infinito matemático hechas a lo largo de la historia (Solaeche, 1995; Crespo Crespo, 2002, 2006; Kleiner, 2001).

Presentamos a continuación la somera descripción de algunas investigaciones que se han realizado en relación con el infinito y que se orientan de manera que pueden ser considerados como antecedentes de esta investigación. La lectura y el análisis de las mismas ha sido hecha en función de lo que entendemos es necesario que los docentes e investigadores consideren la premisa: los alumnos y la gente en general no piensan en el infinito matemático. Y no es éste último mejor o más importante que el infinito intuitivo que se construye fuera de la escuela. Son distintos, uno no reemplaza al otro y no puede esperarse que una comunidad construya el infinito matemático si éste no es necesario, si no se constituye en un objeto imprescindible para su crecimiento personal o grupal.

### **Algunos resultados de investigaciones acerca del infinito**

El infinito matemático es un elemento que entendemos como “conflictivo”, no sólo es evidencia de esto lo que ha ocurrido a lo largo de la historia de la matemática (y de la humanidad), sino lo que se reporta en las distintas investigaciones que se han hecho alrededor de él.

Monaghan (2001) habla de una serie de conflictos que aparecen al momento de hacer estudios sobre el infinito: si se buscan elementos para indagar sobre las concepciones de los estudiantes (en este caso pre-universitarios), debe recurrirse a la matemática, ya que fuera de esta ciencia, no hay objetos infinitos. Y eso provoca que las investigaciones que hay hechas (de las cuales algunas son criticadas en este artículo por el autor) están planteadas con escenarios forzados o mal interpretados.

Lo que nos preguntamos es si el infinito intuitivo que se construye fuera de la matemática responde a cuestiones ciertamente infinitas para esta disciplina. Creemos que no, ese infinito, responde a cuestiones prácticas, sensibles o filosóficas. Como concluyéramos en Lestón (2008)

Culturalmente se generan ideas que rodean al infinito. Surge el término como adjetivo para adjudicar a todo aquello que no se puede calificar como “mucho”, “muy grande”. Es lo que excede a todo lo que es cuantificable. Es además una expresión de extensión del amor, del deseo, de la fe. Un amor infinito es un amor absoluto. Tan absoluto como es para un religioso el poder de Dios. (Lestón, 2008, p.114)

Si nos ubicamos en la matemática, poco sentido tendría discutir si el amor de una persona hacia a otra es ciertamente infinito, o el poder de Dios, o la fe. Pero fuera de ésta última, en el mundo en que vivimos, nos desarrollamos y nos comunicamos los seres humanos, esos conceptos están entre las más poderosas que le ocurren a una persona. De ahí que el calificativo sea infinito y no el de una característica matemática del mismo. Por lo que entendemos que, si se desea saber en qué piensa un alumno cuando le hablamos del infinito, no podemos esperar que responda de acuerdo a parámetros matemáticos, porque excepto en la clase de matemática, no será en eso en lo que esté pensando.

Estas mismas dificultades se presentan aún cuando los alumnos han alcanzado ya niveles de matemática superior. Garbin (2003, 2005) presenta los resultados de una investigación llevada a cabo con estudiantes universitarios a quienes se les aplicaron una serie de cuestionarios en los que las actividades eran situaciones o problemas que involucraban al infinito actual y potencial en distintos registros. La autora concluye que el primero es rechazado (como lo fue durante siglos) y que el

segundo corresponde a lo intuitivo que se asocia al infinito, es el que se acepta, además de haber en los registros de representación elementos que colaboran u obstaculizan (dependiendo el caso) lo que se desea que los estudiantes vean.

¿Por qué se rechaza el infinito en acto dentro de la matemática? Fuera de la matemática, las cosas al parecer son infinitas en sí. Podemos volver a pensar en el poder de Dios o en el amor. Dios es omnipotente y ve todo al mismo tiempo. No es que ve un lugar o a alguien en un momento, y luego a otro, etc, y así eternamente. Una persona enamorada no quiere a alguien un poco, luego un poco más, y así sigue aumentando. Es todo al mismo tiempo, es un amor imposible de incrementar “te quiero tanto que duele”...

Y sin embargo, en la matemática, lo infinito “puede hacerse infinito” pero no es infinito. La recta euclidiana no es infinita, “se puede continuar hasta el infinito”. Tal vez sea porque, en esta disciplina, las cosas no existen como las vemos... La recta que dibujamos no es “la” recta, sino una representación de ella. Pero es la representación la que los estudiantes conocen. “La” recta, como concepto, como idea platónica, no es conocida. La recta que sí conocen es el segmento que se puede continuar hasta el infinito. El amor, la fe, sí son conocidos por ellos, y en ese sentido son entendidos como infinitos, en acto, reales. Porque esos elementos representan cuestiones que los identifican, que les permiten relacionarse con otros.

Y no es sólo entre los estudiantes donde el infinito matemático resulta difícil, los docentes, en muchos casos, están utilizando algunas nociones intuitivas para caracterizar al infinito matemático. Valdivé Fernández (2006) reportó en su trabajo la forma en que 15 docentes trabajaban con conjuntos infinitos en sus clases, para luego indagar las concepciones que esos mismos docentes tenían al respecto de los conjuntos. Y se encontraron algunas ideas que contradicen al infinito matemático. Se reportan cuestiones como las siguientes:

¿Es  $0,999... = 1$ ?

Sí, por aproximación

No, le falta un pedacito para llegar a 1

¿Son infinitos los conjuntos  $N$ ,  $Q$  y  $R$ ? Explica

$N$  y  $Q$  son infinitos porque no son finitos y  $R$  más infinito que los anteriores, porque contiene otros conjuntos infinitos.

¿Es  $R$  equipotente a  $N$ ? Explica

Sí se pueden relacionar.  $N$  es subconjunto propio de  $R$  Son ambos infinitos. (Valdivé Fernández, 2006, p. 548)

Pero, ¿qué ocurre cuando los docentes no han construido el infinito matemático? Creemos que difícilmente puedan ayudar a sus alumnos a comprender las características que este concepto tiene y la complejidad de los elementos y cuestiones que se asocian al mismo. Si a “ $0,999... le falta un poquito para llegar a 1$ ” entonces la noción de límite se cae al vacío. Si “ $R$  se puede relacionar con  $N$ ”, es decir, si son equipotentes, entonces la continuidad no tiene sentido.

Existen otros trabajos que dan cuenta de las mismas dificultades en relación a la construcción del número real, la continuidad y lo infinitamente cercano. Uno de los que consideran la misma situación “¿es  $0.999... = 1$ ?” es el de Castañeda, Molina y Sánchez (2006) en el cual se presenta una discusión en un foro de un posgrado a distancia entre docentes en actividad, donde esta dificultad surgía de manera muy evidente.

En la bitácora 1 nos preguntaban si  $0.999... = 1$  es cierto o no. Yo estoy con una duda pues llegué a dos respuestas. Según yo si se ve a la recta real con los números siempre será posible irse moviendo a la derecha del .999 que tengamos, encontrar otro punto y nunca llegar al uno. La recta contiene una infinidad de puntos. Por lo tanto  $0.9999....$  nunca llega al uno.

Pero si vemos como un límite .999... si llega al uno. Por lo tanto  $0.999...$  si es uno.

¿Absurdo? Yo le comentaba a Mario que se ve desde diferente contexto. Le decía que por ejemplo las rectas paralelas no se cruzan en la geometría euclidiana pero se tocan en un punto en la geometría sobre una esfera. Es un contexto diferente y ambas cosas son ciertas.

¿Pero en el problema nuestro se valen las dos? ¿Cuál es la correcta?  
(Castañeda et al, 2006, p. 10)

Evidentemente, los docentes en ejercicio tienen dificultades con cuestiones relativas al infinito. Y sin embargo podríamos asegurar que esos mismos docentes enseñan en sus cursos límites y continuidad, y ellos lo han estudiado y fueron aprobados. Este tipo de situaciones nos llevan a plantearnos otra hipótesis que surge de la observación de lo que ocurre diariamente en las aulas: un alumno puede “construir” una serie de nociones funcionales aún cuando no tenga sustento teórico para sostenerlas. Se ven continuamente alumnos que aplican correctamente definiciones y procesos relacionados con el infinito matemático, aún cuando no han construido el concepto. Y sin embargo sobreviven a la escuela media, y a la universidad en muchos casos. Nos planteamos entonces ¿qué infinito se necesita en la escuela? Mientras la escuela mantenga un discurso lleno de algoritmos y de procesos vacíos de significado, como lo es en muchos casos, será complejo responder a esa pregunta. La realidad es que el infinito matemático es un concepto que requiere un alto nivel de abstracción y que ha provocado en la

comunidad matemática diferencias entre distintos modos de tratarlo, de acuerdo a los usos que se hagan de él.

No me extraña que los propios matemáticos que juegan con el símbolo de esta idea en sus demostraciones, reconozcan que los aspectos cognitivos involucrados en ella no se pueden generar puramente a partir de su definición matemática. Hace falta algo más que un esfuerzo de imaginación para acercarse al infinito, tal vez se trate de una auténtica iluminación. (Biedma, 2004, s/n)

Biedma retoma dos cuestiones que en esencia distinguen al infinito: la necesidad de verlo desde fuera de la matemática y la complejidad que encierra. Complejidad con la que se lo ha caracterizado desde la época de los griegos, cultura que hemos heredado y que ha determinado muchas de las formas en que vemos y entendemos el mundo que nos rodea. Otros pueblos, sin embargo, tuvieron una relación distinta con el infinito. El trabajo de Crespo Crespo (2002) inicia el recorrido histórico del infinito en la cultura jaina, que logró algunas ideas muy avanzadas en relación a este concepto muchos siglos antes que occidente.

Las especulaciones aritméticas permitieron a este pueblo descubrir de manera natural el cero en su función posicional, pero también con toda la connotación abstracta que lleva consigo este concepto. Mil años antes que en occidente, los indios reconocían al cero y al infinito como conceptos inversos. Para ellos, dividir por cero equivalía a infinito. Definieron al infinito como la cantidad que no sufre modificación alguna si se le suman o restan números finitos. (Crespo Crespo, 2002, pp. 529-530)

Estas ideas, si bien alcanzadas en occidente, fueron rechazadas durante años y Cantor, quien dedicó muchos años a la formalización de este concepto, encontró con su trabajo oposición de muchos matemáticos reconocidos y el rechazo de gran parte de su comunidad.

Solaeche (1995) presenta en su trabajo las diferencias entre Kronecker y Cantor. El primero, con su trabajo, intentó arrancar de raíz al infinito del campo de la matemática.

L. Kronecker con su epigrama: “Dios ha creado los números naturales, el resto es trabajo del hombre” y su pitagorismo meticuloso que insiste en descartar el infinito, edificando toda la Matemática a partir de los números naturales y realizando operaciones constructivas en número finito, se coloca entre uno de los representantes más radicales del Finitismo al rechazar el infinito como: ‘futilidad perniciosa heredada de filosofías anticuadas y teologías confusas, pudiendo llegar sin él tan lejos como se quiera’. (Solaeche, 1995, p. 117)

La postura inquebrantable de Kronecker se opone a un Cantor ya golpeado por la realidad de la comunidad que lo rodea, contra la que se debate en la defensa de los que, años más tarde, Hilbert llamaría: “*el paraíso de Cantor*”. Cantor, desde su trabajo, había llegado finalmente a lo que los matemáticos de todos los tiempos, no sólo no habían llegado, sino que ni siquiera buscaban... bastaba con negarlo y usarlo cuando era necesario.

Pero en el siglo XIX la obra de G. Cantor dota de contenido matemático al concepto de infinito actual, demostrando con rigor y formalismo que es una noción indiferenciada. Su creación de la Teoría de Conjuntos introdujo definitivamente el infinito actual y otras ideas igualmente

revolucionarios que le hicieron concluir: 'la cardinalidad de los conjuntos infinitos puede variar y ciertos conjuntos son más infinitos que otros. Así, de un conjunto numerablemente infinito se pueden generar infinitos conjuntos infinitos'. (Solaeche, 1995, p. 118)

En el caso del infinito, no sólo su construcción sino su mera existencia (si no física, filosófica) provocan incomodidad. El autor termina su trabajo con una serie de preguntas, de las cuales retomamos la última que permite reflexionar en más de un sentido respecto a este tema:

El infinito: ¿Tentación del pensamiento humano, término que nos remite al misterio consolador, categorías que exige explicación científica, concepto definible filosóficamente, evidente en su existencia, inalcanzable en su concretación, razón suficiente para la unidad matemática, concepto anárquico de un anarquista de esta ciencia, ideal que se pretende alcanzar o utopía irrealizable? (Solaeche, 1995, pp. 119-120)

Tal vez sí sea todo eso, y más. Las investigaciones que se han hecho en relación a este concepto se mueven entre todas esas concepciones. Muchos de los trabajos que se pueden leer se refieren a la obra de Cantor. De entre ellos, destacamos el trabajo de (Jahnke, 2001) en el cual se hace un estudio cuyo eje no es el desarrollo matemático sino el tipo de construcción que logró, sustentado en algunos momentos por lo que este autor llama "inner intuition". Cuando Cantor llega al punto de su trabajo en que compara los cardinales de dos conjuntos cualesquiera y asume que ocurre una de estas tres relaciones:  $|M| < |N|$ ,  $|M| = |N|$  o  $|M| > |N|$  no tenía prueba alguna para tal afirmación, ya que la demostración formal se fundamentaba en el teorema de buena ordenación, que no estaba probado. Lo relevante de este hecho para el autor es lo que llama la "visión", el proceso por el cual Cantor defiende sus ideas aún cuando no están demostradas y

aceptadas por la comunidad científica. La necesidad de probar que su trabajo va más allá de la existencia de dos cardinales (el de los conjuntos numerables y el del continuo) lo lleva a la búsqueda de conjuntos de cardinal tan grande como se quisiera, con lo cual Cantor logra probar la existencia de infinitos cardinales.

La necesidad de legitimar su obra, de sustentar la existencia de los números cardinales y ordinales transfinitos, lleva a Cantor a un desarrollo filosófico en que plantea al conocimiento matemático como el conocimiento de las ideas y conceptos, aún cuando no existe sustento perceptible de ellos. Habla de una matemática “libre”, desprendida de lo que la evidencia logra probar. Y recurre a la idea de “intuición interna”, que caracteriza como la habilidad de imaginar mundos que se encuentran fuera del propio mundo que experimentamos a diario. Según Jahnke (2001), Cantor estaba firmemente convencido de que su intuición interna le permitiría legitimizar la existencia de un objeto matemático y confiaba en que en algún sentido eso convencería a sus lectores. (Jahnke, 2001)

El análisis pedagógico que el autor hace del trabajo de Cantor le permite reflexionar sobre lo que la intuición, la “visión” representa para el desarrollo de los alumnos. Según Jahnke, pedagógicamente sería importante recuperar la intuición a un nivel más alto, en donde lo que el estudiante debería aprender es que la primera intuición no está errada, pero sólo puede aplicarse en algunos campos limitados, mientras que para otros es necesario construir nuevas intuiciones. (Jahnke, 2001)

Este artículo presenta un estudio en dos sentidos: el primero sobre la teoría de números transfinitos de Cantor, el segundo un análisis de los aportes didácticos que pueden obtenerse del trabajo así como la forma de desarrollo de esta teoría. Se destacan los “divorcios” que Cantor y su trabajo representan para la matemática de su tiempo y la importancia de recuperar las intuiciones, marcando que no son ideas erróneas sino aplicables sólo en algunas cuestiones reducidas.

El trabajo que Cantor realizó, como lo describe el autor, establece lo que ocurre cuando se intenta generalizar lo que sucede en conjuntos finitos a conjuntos infinitos, y en ese sentido es que lo considera un aporte a la clase de matemática. Además, se enfatiza la actitud de Cantor durante el desarrollo de su teoría, el creer en ciertas cuestiones aún antes de poder probarlas, el mantener sus ideas, lo que Jahnke llama visión. En ese sentido, propone recuperar la visión de nuestros estudiantes, mostrar nuestras visiones, aún cuando el fundamento matemático no sea formal o riguroso. Nuestros alumnos construyen conocimiento de esa manera, la formalización no es una necesidad de ellos, sino de los docentes y del discurso matemático escolar. Pero a sus intuiciones nos oponemos y las rechazamos, o, peor aún, las ignoramos. Y sin embargo, aceptamos y usamos en nuestras aulas ese infinito que viene desde fuera de la escuela, que no es formal, que no es riguroso y que no va a hacer más que mantenerse oculto debajo de todo lo que intentemos construir.

Imaz Jahnke (2001) reconoce que existe un infinito ajeno a la matemática, externo, cultural, que no se ha visto afectado por la teoría de transfinitos de Cantor. Y hasta analiza comparativamente lo que dicen y hacen matemáticos y filósofos al respecto.

Una idea o concepción de lo infinito podemos encontrarla presente en la mente de todos y así vemos que esta idea aparece, con matices y grados diversos, en filosofía, en literatura, en teología, en física, etc., pero señaladamente en matemáticas. (Imaz Jahnke, 2001, p. 305)

Lo destacable de este artículo es la evidencia que presenta de la distancia entre el infinito matemático formal y lo que es el infinito para el resto de las disciplinas, científicas o no. Más aún se verá esa distancia si nos adentramos en lo que se piensa y cree a nivel popular. De esta lectura surge una pregunta que resulta relevante para nuestra investigación: ¿Por qué intentamos que lo matemático

invada lo no matemático? ¿No sería una opción buscar que lo no matemático invada lo matemático?

En la misma línea podemos citar el trabajo de Ortiz (1994) que en un estudio histórico-epistemológico del infinito matemático presenta posturas de filósofos al respecto y su presencia en la literatura. Inclusive muestra el contacto del trabajo de Cantor con lo teológico.

El Infinito Absoluto es el Absoluto, por definición lo imposible de alcanzar: lo inalcanzable. El grado máximo de independencia, autonomía y completitud. En la categoría de Infinito Absoluto o Absoluto entran Dios, el último ordinal y la clase **V** de todos los conjuntos. Para Cantor desentrañar el infinito absoluto era una labor mística: la búsqueda de Dios. (Ortiz, 1994, p. 67)

Ortiz presenta los resultados de su investigación desde un lugar poco habitual: la matemática no puede alejarse demasiado de otras formas que tiene el hombre de buscar explicaciones a lo que es, al menos, difícil de comprender. “Casi podríamos decir que la matemática es el lenguaje que pretende hablar del infinito, o la ciencia que pretende medir el infinito” (Ortiz, 1994, p. 60).

Bajo esta última concepción podemos entender que el infinito no es propiedad de la matemática, sino de la humanidad, que lo ha forjado para que cumpla con diversas funciones, entre ellas, el sustento formal o teórico de muchos conceptos matemáticos.

Sin embargo, cuando se investiga en la manera en que se presenta o introducen algunas características del infinito matemático en la escuela se puede ver que hay

cuestiones que, aunque instrumentalmente resultan útiles, ocultan el sentido del infinito matemático. Camacho y Aguirre (2001) hacen una crítica a una de las maneras en que por lo general se “define” como infinito en la escuela.

De todo el estudio realizado, se determina que el tratamiento que se hace y se ha hecho en relación a cocientes de denominador nulo es, al menos, confuso. Se lo define como infinito y se lo escribe y usa de esa manera pero aclarando que, en realidad, es sólo una manera de abreviar el proceso, de lo que es infinito el cual lleva a cantidades cada vez más grandes. La igualdad  $\frac{a}{0} = \infty$ , que vemos en clases y libros de texto, oculta no sólo la idea de límite sino, además, la naturaleza del infinito.

Esta postura en la que hemos incurrido alumnos y profesores por largo tiempo, nos ha hecho preferir como objeto de conocimiento una noción sintáctica y equivocada del concepto, considerándole como un número; llegando incluso a manipularle sin una construcción didáctica previa de su significado y sin darle una significación precisa. (Camacho y Aguirre, 2001, p. 262)

Es habitual ese tipo de expresión y notación, aún cuando los docentes saben que eso que hacen oculta el significado del infinito. Reportes del tipo de situaciones que esa aproximación y otras, también “equivocadas” provocan, puede hallarse en el trabajo de Arrigo y D’Amore (2004), los cuales presentan un estudio de los obstáculos que se “construyen” en la escuela por culpa del tratamiento escolar del infinito.

Una de las hipótesis del trabajo reportado por estos autores es que los obstáculos que surgen, aún los que en apariencia son epistemológicos, tienen una fuerte

componente didáctica en su construcción. El proceso de biyección, la idea de la recta como sucesión de puntos, son cuestiones que se construyen dentro de la clase de matemática. En este sentido, la matemática es contradictoria, no es real, está alejada de la vida cotidiana.

Las respuestas halladas en función de un test reflejan de manera evidente que es la escolarización y no la propia creencia o experiencia sensorial la que ayuda a responder las distintas cuestiones sobre las que se indaga. Por ejemplo, frente a la numerabilidad de  $\mathbb{Q}$ , la mayoría de los estudiantes responde que eso se debe a que todos los conjuntos infinitos son equipolentes (proceso de comparación aprendido en la escuela) o a que en la clase se les ha enseñado una demostración “clara y convincente”.

Luego de la aplicación del test, algunos alumnos fueron entrevistados personalmente en busca de respuestas que mostraran realmente por qué dicen lo que dicen. En esas entrevistas, surgen las dudas, los cuestionamientos, e inclusive la contradicción con las propias ideas que se asume se construyeron en el aula... No hay convencimiento, no hay construcción, no hay ni siquiera respuesta. Aparece en más de una oportunidad como salida “no se puede decir”. Se concluye con la fuerte creencia que la educación matemática necesita un trabajo didáctico que acerque a los alumnos a lo que ocurre con el infinito, ya sea en el campo numérico o geométrico. Sin embargo, esa contradicción, que surge de la matemática, queda en la matemática misma, no afecta a otro nivel la vida, con lo cual no impide el funcionamiento correcto de los otros ámbitos en que una persona se desenvuelve y eso explica la falta de reacción. El infinito matemático, que no han construido, no modifica al intuitivo que sí han logrado construir. Entonces, ¿por qué es necesario cambiarlo?

El impacto de las ideas intuitivas en el caso del infinito es innegable, especialmente porque fuera de la matemática el infinito no es

contradictorio. En los sentimientos, en el tiempo, en el espacio, en la religión, el infinito “cierra”: convence, caracteriza de manera tal que todo el mundo sabe de lo que se está hablando. Los conflictos aparecen sólo dentro de la matemática: entonces, ¿por qué alguien cambiaría un modelo que no tiene problemas (el modelo intuitivo) por un modelo que se muestra contradictorio, conflictivo y que “no convence” (el modelo matemático)? La matemática escolar debe tomar parte en la modificación del discurso de manera tal que los alumnos encuentren en el sistema matemático un modelo compatible y sin problemas. (Lestón, 2008, p. 115)

Esta idea, tomada del trabajo que resulta antecedente directo del presente, permite fundamentar nuestro punto de partida. Necesitamos en la escuela un infinito matemático que sea significativo y coherente para nuestros alumnos. Pero ¿cómo lo hacemos? Eso es lo que en esta investigación intentaremos explicar, analizando inicialmente cómo y por qué algunas comunidades construyen un infinito matemático. Pero sin olvidar que ya existe un infinito, que es intuitivo y que no va a desaparecer. Entonces entendemos que es necesario conocer algunas de las cuestiones que los alumnos han desarrollado en relación a este concepto para comprender cuáles son los obstáculos que hay que superar, las discusiones que hay que generar, si se desea que pueda construirse un infinito matemático que no sea contradictorio.

La escuela no puede seguir mirando a la cultura popular como algo sin valor. Las ideas intuitivas, lo que se construye en la vida no escolar es parte de lo que los estudiantes saben, y debe aceptarse como elemento, ya sea para colaborar o para mostrar las contradicciones que con el conocimiento erudito presenta. (Lestón, 2008, p. 115)

Lo que hicimos y las respuestas que se buscaron en esta primera investigación no son las propuestas por el discurso matemático escolar, sino aquellas que éste último ignora. Así logramos detectar algunas actividades que generan la necesidad de infinito en el escenario no escolar, es decir:

- La enumeración: la necesidad de asignar cantidades a grupos de elementos semejantes (estrellas, granos de arena)
- La medida: conocer la extensión del mar, del espacio, del universo, de todo cuanto rodea al ser humano
- La temporalidad: comprender desde cuándo y hasta cuándo existe lo que se conoce
- La clasificación numérica: conjuntos pequeños, grandes, muy grandes... e infinitos. El infinito como adjetivo ayuda a la clasificación de colecciones de elementos similares.
- La clasificación cualitativa: el amor, la esperanza, la fe, el poder de Dios, requieren de calificativos lo suficientemente poderosos como para destacar la distancia entre estas situaciones y otras menos importantes (me gusta mucho el color rojo, pero amo infinitamente a mis padres)

Las antes presentadas son las cuestiones que surgen de lo que se lee en la historia, lo que se observa en las experiencias de este trabajo, pero principalmente de la vida. Cuando los niños preguntan, insisten, cuestionan, surge para los padres el infinito como un “comodín”: no es claro lo que representa, no es claro lo que quiere decir, y sin embargo los niños lo adoptan. (Lestón, 2008, pp. 112-113)

Ese es nuestro punto de partida. Ahora sabemos que contamos con eso, sabemos en qué están pensando los alumnos, no podemos volver a asumir que los

estudiantes están en concordancia con las necesidades del discurso matemático escolar. El problema entonces es llevarlos a reconocer la necesidad de pensar también en otras cosas al momento de entender el infinito al seno de la clase de matemática. No de negar lo que son ni condenar lo que piensan o sienten, sino ayudarlos a reconocer que en algunas situaciones, el infinito es otra cosa, e iniciar el camino hacia la construcción de un infinito más flexible al matemático.

El infinito ha provocado una gran cantidad de trabajos de distinta naturaleza, aunque son pocos en donde se estudia lo que los alumnos creen o intuyen en relación a este concepto. La matemática pura, la epistemología, la filosofía han tomado al infinito y han producido desde distintas perspectivas numerosas obras.

### **La justificación de esta investigación**

Dentro de la Matemática Educativa, es difícil hallar contacto entre lo que la escuela necesita y lo que el alumno sabe o cree. Se han estudiado los efectos de distintas aproximaciones didácticas al concepto, su presencia en la escuela, los obstáculos que genera. Pero no la naturaleza de esta noción para el alumno que va a la escuela, que es el receptor de lo que en ella se hace. Si la escuela no mira al alumno sino al conocimiento, ¿para qué hacemos que nos escuchen y nos vean durante horas, quietos y atentos? No hay escuela sin alumnos así como no hay escuela sin docentes o sin conocimiento o sin comunidad, pero ningún elemento puede ser dejado de lado.

Creemos que lo desarrollado hasta ahora establece cuestiones que son necesarias si mantenemos el objetivo de construir un concepto matemático del infinito dentro de la escuela. La epistemología de este concepto, los cambios que ha sufrido su tratamiento y lo difícil que ha sido su aceptación como constructo

matemático formal y riguroso, lo cual muestra en parte lo difícil que puede resultar su aceptación en un medio tan áspero como la escuela.

Puesto a analizar lo que Cantor tuvo que enfrentar a lo largo de su trabajo para que su construcción fuera reconocida, se podría considerar que algo similar ocurra con los docentes que intenten llevarlo al aula. Entendemos que la forma más natural de hacerlo es conociendo a ese infinito intuitivo con que nuestros alumnos cuentan, apoyándonos en él para mostrar cómo ese concepto puede ampliarse para aceptar lo que la matemática necesita de él.

Las ideas intuitivas, sin embargo, no han sido un tema analizado en los trabajos reportados hasta aquí, con excepción de Lestón (2008) y otros trabajos que lo mencionan, aunque no se clarifica en ellos qué debe entenderse por intuitivo en relación al infinito.

Si la filosofía, la teología, la magia y el misticismo han sido parte de la génesis de esta idea; si la matemática ha tenido que adaptar su forma de hablar para poder justificar sus pensamientos en relación al infinito; si de la hipótesis del continuo, resultado que se desprende de la creación de Cantor, quedan aún hoy dudas por resolver. Nos preguntamos: ¿cómo hacer para que desde la matemática pueda generarse una propuesta que permita la construcción del infinito matemático? ¿Podrá lograrse el desarrollo de una teoría que permita a los alumnos comprender la naturaleza esquivada y compleja de este concepto? Suponemos que la respuesta es sí, pero teniendo en cuenta que todo lo que ocurre y ocurrió alrededor del infinito es válido y debe considerarse, pero principalmente considerando lo que el infinito representa para las personas fuera de la escuela y no en sentido contrario. Si el infinito es una idea que se construye desde la niñez, que es consistente con lo que uno sabe y cree en relación a cuestiones de diversa índole, no puede esperarse que la matemática y la escuela se impongan de manera efectiva. Es necesario establecer un diálogo entre lo matemático y lo no matemático, el mismo

diálogo que la comunidad científica ha tenido que permitir entre las ideas matemáticas y las no matemáticas.

## Capítulo 4

### El origen del infinito como concepto matemático

En la búsqueda de la caracterización que se propuso como objetivo en este trabajo, resulta imprescindible conocer cómo el infinito de los griegos evolucionó hasta convertirse en un elemento de estudio de la matemática, formalizado y aceptado en el siglo XX. Proponemos entonces, hacer un recorrido histórico de esta noción, mirando cómo la evolución de las ideas y de los conceptos permitió la llegada de las comunidades epistémicas a la aceptación de esta idea como elemento de naturaleza científica.

Burbaque y Chouhan (2002), en un estudio de los aportes de Leibniz a la construcción del infinito, retoman algunas de las cuestiones fundamentales que hicieron de este concepto, como ya vimos, tan complejo e inabordable. Una de las consideraciones que hacen resulta de particular interés para justificar el estudio que en esta investigación se hace, que por la naturaleza del conocimiento involucrado y su propia historia nos ha llevado a indagaciones relativas a otras nociones.

Las cuestiones que conducen a “reencontrar” el infinito son muy antiguas, pero la conceptualización propiamente matemática del infinito se adquiere muy lentamente. Ciertos conceptos que hoy nos parecen

elementales, como aquellos de función o de límite, no vienen a ser contruidos sino muy tardíamente. Se encontrarían argumentos consistentes para decir que, no es sino hasta el siglo XIX, con los trabajos de Weierstrass y del mismo Cantor, que el infinito toma definitivamente su lugar entre los conceptos fundamentales del pensamiento matemático. Los matemáticos han dudado con frecuencia entre una desconfianza frente del infinito y la invención, quizás sutil pero mal controlada conceptualmente, de técnicas de cálculo que dan lugar (al infinito), como tales astucias que anticipan una teoría ausente. (Burbage y Chouchan, 2002, p. 13)

Es evidente entonces que iremos, a lo largo de este capítulo y los posteriores a él, revisando cuestiones relativas no sólo al infinito como concepto sino a otros que han sido los que lo han hecho “aparecer”. El trabajo de quienes finalmente logran conceptualizarlo no puede desligarse del resto de sus producciones. Porque son esas producciones las que los llevan a la conceptualización. No es casual que, tanto Newton como Leibniz, los dos primeros promotores del infinito como concepto científico, desarrollaron y cuestionaron problemas y conceptos semejantes, aún cuando veremos que no acordaban en el abordaje que hacían. La pregunta para la cual el infinito es respuesta ya estaba planteada, prácticamente desde el inicio de su construcción científica y filosófica. Sin embargo, las ideas que eran necesarias para poder plantear la discusión, aún no estaban en el ambiente.

### **El infinito como fuente de dicotomía en el pensamiento antiguo de Occidente**

Puede distinguirse ya desde la antigüedad en Occidente, una dicotomía en el tratamiento que se hace de este concepto: la aceptación del infinito como propiedad asignada al espacio, con lo cual podría aceptarse su existencia o el

rechazo del mismo como elemento, cuya sola existencia se sustenta en la divinidad, y no es posible asumirle a ninguna otra cosa.

La dificultad que plantea el infinito radica, así pues, en su inagotabilidad: lo que es infinito (Aristóteles hace referencia al ejemplo del conjunto de números) no puede estar nunca presente en su totalidad en nuestro pensamiento. (Zellini, 1991, p. 13)

En esta época también puede reconocerse otra distinción en relación al infinito: el infinito potencial, como posibilidad por adición o división hasta el infinito, y el infinito actual, como realidad completa. El primero, comprensible si uno se permite entender la eternidad: siempre hay tiempo para seguir agregando, para buscar un número más grande, para extender la recta, para dividir el segmento, etc. El segundo, en cambio, demanda la aceptación de algo que es infinito en sí, y que por nuestras propias limitaciones de naturaleza finita, no podemos adquirir a través de los sentidos. Esta diferencia puede encontrarse en diversas discusiones entre los filósofos griegos. En particular, consideramos la relacionada con la posibilidad o no de efectuar la cuadratura del círculo.

La concepción del infinito en potencia se encuentra claramente ejemplificada en la obra de Euclides, en la que todas las figuras geométricas desarrolladas son limitadas y susceptibles de ser ampliadas.

En la Física de Aristóteles se explica la presencia del infinito en el pensamiento científico de la época:

El creer en la presencia del infinito proviene principalmente de cinco consideraciones: del tiempo, que de hecho es infinito, y de la divisibilidad de las magnitudes, porque los matemáticos también emplean el infinito. Por otra parte, sólo si es infinito aquello de lo cual proviene el devenir, se dará la generación y la corrupción. Además,

dado que cada cantidad limitada siempre tiene un límite, es necesario que exista un límite particular si todo fin está limitado por algo diferente de sí mismo. Pero, sin duda alguna, el motivo más importante, que representa una dificultad sentida por todo el mundo y que no puede eliminarse del pensamiento, es que tanto el número como las magnitudes matemáticas y lo que está más allá del cielo, parecen ser infinitos. (Aristóteles, citado por Vita, 1992, p.116)

Se ponen en juego en el pensamiento aristotélico dos infinitos: uno matemático en los contextos de la divisibilidad de las magnitudes, relacionado con la continuidad y la infinitud de los números. El otro infinito que aparece es de carácter físico, relacionado directamente con la concepción cosmológica.

Aristóteles es el primero en asociar el infinito geométrico al infinito físico y lo introduce en su discurso en relación con el problema cosmológico de la existencia de un universo infinito. La existencia del infinito geométrico está ligada a la existencia de un cuerpo material infinitamente extenso (Vita, 1992). Aristóteles intenta demostrar que el infinito no puede existir en acto, ni como atributo, reconoce al infinito como propiedad del número y de las magnitudes, como un concepto abstracto contrapuesto al cuerpo material. Para ello afirma que “el cuerpo del todo no es infinito. La forma del todo es esférica” (Aristóteles, citado por Vita, 1992, p.120). Pero al no poder eliminar la idea de infinito, asevera: “Si se niega en modo absoluto el infinito, derivamos muchas consecuencias absurdas; de hecho se dará un principio y un final al tiempo, las magnitudes no serán divisibles en magnitudes y el número no será infinito” (Aristóteles, citado por Vita, 1992, p.120). No puede su reflexión eliminar el infinito, pero tampoco aceptarlo en acto. Por ello asume que ninguna magnitud puede ser infinita en acto, sino que lo es por sustracción o por adición, procedimientos que en potencia conducen a lo infinitamente pequeño y a lo infinitamente grande.

La teoría de Aristóteles se opone a la de Demócrito y sus seguidores, que ven al infinito en la materia y en los entes matemáticos con existencia real, en acto. Ellos consideran a la materia de lo eterno compuesta por un número infinito de pequeñas sustancias contenidas en un espacio de dimensión infinita.

### **El infinito relacionado con la idea intuitiva de límite**

Ya entre los sofistas es posible encontrar planteos semejantes, muchos de ellos relacionados con la idea intuitiva de límite.

Antifón, por ejemplo, creía posible hallar un cuadrado cuya área fuese igual a la de un círculo dado basándose en la evidencia de que son indistinguibles el arco mínimo de circunferencia y el segmento mínimo de recta; corolario de la demostración era la existencia en acto de infinitos objetos distintos (Zellini, 1991, p. 28)

El planteo de Antifón se basaba en la imposibilidad de distinguir un arco mínimo de circunferencia y una porción mínima de una recta, que actúa de lado de un polígono regular. Y dado el polígono regular, siempre puede construirse el cuadrado que iguala su área, por grande que sea la cantidad de lados del primero. Y si ya no es posible distinguir entre el arco de la circunferencia y esos pequeños lados del polígono, el cuadrado tendrá un área igual a la del círculo (Zellini, 1991). Sin embargo, esa existencia en acto no convencía a los detractores del infinito en acto, el más importante de los cuales era Aristóteles. Y continúa Antifón diciendo:

El conjunto de los polígonos inscritos en la circunferencia es evidentemente un conjunto ilimitado, en el sentido de que, para cada polígono con un número arbitrariamente grande de lados muy pequeños, existe un polígono sucesivo de lados aún más pequeños, el cual a su vez no coincidirá con la circunferencia sino que se admitirá

después de él un polígono ulterior: ejemplificación clarísima del enunciado aristotélico que describe el infinito como algo más allá de lo cual se halla siempre algo más. (Zellini, 1991, p. 30).

Esta discusión entre la posibilidad de ser y el ser en sí mismo del infinito está permeada por otra noción, que sigue siendo centro de conflicto en las aulas actuales, el límite, noción que los griegos no lograrían dominar.

La circunferencia es un límite que “comprende” la sucesión ilimitada de los polígonos, aun no constituyendo su término efectivo; constituye, con todo, una solución a la indefinida potencialidad de desarrollo de la sucesión, aún situándose *fuera* de ésta (Zellini, 1991, p. 31)

La comprensión del límite es en alguna medida lo que hace que este tipo de distinción comience a resolverse, como se verá más adelante. Pero para eso faltaron varios siglos de idas y vueltas en los cuales estas diferencias enfrentaron a matemáticos en relación al concepto. No es llamativo, de cualquier modo, que sea un concepto tan complejo como el de límite el que participe del establecimiento definitivo del que nos ocupa. Y no es sólo la complejidad del límite sino la aceptación de la imposibilidad de comprender con nuestros sentidos al propio infinito.

Piénsese por ejemplo en la suma de una serie infinita convergente cualquiera: se trata de un límite concretable en un ente matemático perfectamente definido que, empero, no pertenece a la sucesión indefinida de las sumas parciales que tienden a él. El límite no es un término de la sucesión y no es, por lo tanto, una mera aproximación al resultado que se quiere alcanzar; se llega a él renunciando al análisis indefinido de la sucesión que lo antecede y situándose en un punto de referencia externo que resulta invisible a quien se limite a la comprobación –correcta, empero- de su infinita lejanía e

inalcanzabilidad. Estamos, evidentemente, a un paso de un modelo de representación ideal de todo orden teológico del mundo que comporte un “regressus in infinitum” de las causas resolubles únicamente en la postulación de una causa final actualmente infinita e insondable para la sensibilidad ordinaria. (Zellini, 1991, p. 32)

Como en muchas de las explicaciones asociadas a la existencia de lo que es infinito, es posible encontrar cuestiones teológicas entrelazadas. Si se acepta que el ser humano es una creación de Dios, a imagen y semejanza, y que el poder de Dios es infinito, entonces resulta complejo entender que nuestros sentidos no nos permitan comprender la extensión de ese poder. El asumirse finito en capacidades y limitado en lo que podemos aprehender, hace que cuestionemos la existencia de aquello que nos es negado.

Pensando en la primera paradoja de Zenón contra el movimiento, aquella que establece que no es posible recorrer una unidad de longitud ya que hay que recorrer antes la mitad, y luego de la mitad de lo que falta, y luego la mitad de lo que falta y así sucesivamente hasta el infinito; resulta claro que la respuesta está en el límite, ya que la serie que describe la situación sí tiene límite en lo finito, igual a 1, con lo cual la distancia puede recorrerse en un período finito de tiempo.

Aún conservando en sí la idea de un proceso y de una potencialidad ilimitada, el límite tiene la capacidad de resolver esa potencialidad en una unidad formal; de manera que resulta cierto lo que afirma H. Weyl: que es engañosa la apariencia según la cual el proceso en último término parece cambiar definitivamente el Ser en un Devenir. (Zellini, 1991, p. 37)

Estas dificultades que se observan en relación a estos dos conceptos son, como ya dijimos, las mismas que se presentan en las aulas, y que han sido reportadas por diversos investigadores, como se analizo en el estado del arte de esta

investigación. Pero a pesar de que el tema ha sido estudiado y analizado desde diversas perspectivas teóricas, no hemos logrado detectar la raíz de la complejidad, más allá de las cuestiones propiamente epistemológicas. De alguna manera, el estudio histórico epistemológico de este concepto debería dar luz a la forma en que habría que impactar el discurso matemático escolar para poder ayudar a la construcción del concepto de infinito, en la búsqueda de que éste sirva de base para tantos otros. Nos proponemos indagar, luego, la evolución de una comunidad científica que logró tomar a ese infinito complejo de los griegos, filosófico y teológico, y transformarlo en un concepto matemático alcanzable a partir de su existencia como propiedad del espacio, sobre todo en la época de Newton y Leibniz. Después de ellos, con Bolzano y Cantor, llega otro período de definición del concepto, en el cual se transforma en objeto, en número transfinito, con el que se opera, y que permite caracterizar conjuntos. Y creemos que es ahí donde estas cuestiones vuelven a complicarse: si lo hacemos asociable a un número, el infinito más cercano al nuestro, al intuitivo, se pierde, se desvanece y la matemática se aleja de nuestras creencias.

## **El infinito y el tamaño del Universo**

La búsqueda del límite del Universo, de la extensión de los cielos y estrellas visibles, llevó, como se presentó anteriormente, a la comunidad científica a la construcción del infinito como concepto físico, así como elemento que debía ser aceptado para poder comprender cuestiones relativas a la astronomía y a los ciclos de movimiento. Pero esa discusión no es nueva, y puede también comprenderse asociada a la potencialidad y actualidad del infinito griego.

En el primer caso, escribe Kant, los elementos sucesivos del conjunto infinito se “encuentran” en un todo preexistente. En el segundo caso, se “buscan” fuera de la totalidad parcial, siempre finita, que no se deja nunca alcanzar. Ambos son infinitos esencialmente potenciales, pero el

“progressus in infinitum” posee el privilegio de admitir un límite que lo envuelve, y en eso se ceta la naturaleza de toda verdadera infinitud, que no es nunca un desarrollo incondicionalmente ilimitado, y es referible siempre a un orden formal, limitador. La otra infinitud, la de la magnitud del Universo, a menudo no fue considerada tal: la repetición de lo infinito, en que consiste, puede ser achacable justamente a lo que es finito, y no a lo que es infinito. (Zellini, 1991, p. 42)

En relación a las concepciones de infinito que se construyen socialmente en la actualidad, es posible encontrar ideas similares a las que se abordaron al respecto a lo largo de la historia. En Lestón (2008) observamos que es la búsqueda del final, la extensión de lo que vemos y sentimos, lo que lleva a la construcción del infinito intuitivo. Eso mismo es lo que promueve a la búsqueda del infinito en la física. Y el recorrido, que inicia con los griegos, sigue con el desarrollo de la ciencia durante muchos siglos. Por ello a continuación se profundiza el análisis de la evolución histórica de estas ideas.

“La actualidad y el límite constituyeron en todo momento el presupuesto irrenunciable de cualquier teoría del conocimiento, la esencia discriminadora misma del pensamiento, el irrenunciable criterio de cualquier ordenación conceptual y actividad de abstracción” (Zellini, 1991, pp. 43-44). Como plantea Zellini en la cita anterior, el proceso de construcción de conocimiento en relación a estos conceptos se ve marcada por el poder de lo que es y la búsqueda de su inicio o fin, de acuerdo a cómo quieran verse las cosas. Es en la búsqueda de la evolución de esos procesos de construcción donde intentaremos encontrar la marcha natural del infinito de idea filosófica a noción científica. La primera no está tan lejos de las aulas y responde a preguntas que se dan de manera intuitiva en el pensamiento humano, pero la segunda es ajena a nuestras aulas, ya que ha sido abandonada por el discurso matemático escolar. Pero ese mismo discurso que no la incorpora, la usa, la necesita, funda conocimiento sobre ella y encuentra

obstáculos tan palpables y universalmente compartidos en su desarrollo que creemos hay que transparentar para poder abordar y comprender.

El estudio socioepistemológico del infinito, sin embargo, resulta sumamente complejo, dado que este concepto es parte no sólo de la evolución de la ciencia matemática sino de diversas ramas del conocimiento humano. Intentaremos entonces tratar de acotar nuestro estudio a los procesos que llevaron a las primeras discusiones sobre la existencia o no de la infinitud del espacio. Desde ese lugar organizaremos esta indagación e intentaremos identificar momentos e hitos que han sido centrales en su posterior formalización. La discusión centrada en la infinitud o no del espacio, nos resulta interesante como eje organizador, ya que, si el espacio es infinito, entonces el infinito también lo es, ya que es propiedad de algo que existe, por lo que podrá luego existir como objeto. En cambio, si el espacio es limitado, entonces el infinito no puede ser, ya que sólo sería propiedad de la divinidad o posibilidad intelectual en que el pensamiento nos permite asumir la continuación de nuestras posibilidades, gracias al libre albedrío. Pero no puede avanzar a la instancia de objeto o propiedad.

Partiendo de los griegos, podemos identificar ideas encontradas. Aristóteles creía, como se ha presentado anteriormente, que no existe el infinito separado de aquello que podemos vincular con él, al igual que el número existe sólo en función de aquello que lo representa. Para él no hay posibilidad de que exista el cuerpo infinitamente grande (De Mora, 2009). Sin embargo, no fue Aristóteles el único que analizó estas cuestiones, y muchos de los griegos que estudiaron el infinito no acordaban con él.

Anaxágoras (500-428 AC) sostiene que aquello que nos parece generación y corrupción, de hecho no es más que agregación o separación de lo que existe desde toda la eternidad. No hay creación de ningún ser a partir del no ser y tampoco hay un elemento primero. Hay infinitos elementos variados y toda la materia es infinitamente divisible,

en esto estaría de acuerdo Aristóteles. Pero además dice que todas las cosas son infinitas tanto en multitud como en pequeñez, pues existe tanto lo infinitamente grande como lo infinitamente pequeño. Anaxágoras defiende a la vez la división infinita de la materia y su extensión infinita. (De Mora, 2009, p. 49)

La cantidad de materia, la existencia del infinito como magnitud de lo que hace a todo, evidentemente justifica que el concepto sea tratado científicamente y no sólo como una manera de acercarse a una manera de hablar o de pensar. Además de Anaxágoras, otros justificaron en la antigüedad la existencia del infinito, ya sea de aquello infinitamente grande, como el espacio, como de lo infinitamente pequeño, como el átomo.

Para Demócrito y Leucipo existe un ser indivisible, el átomo, y hay una infinidad de tales seres que se mueven en el vacío. El vacío, aunque es un no-ser, tiene tanta existencia como el cuerpo lleno. Cuando los átomos se componen hay generación, cuando se separan, hay corrupción. Según la exposición de Simplicio, para Demócrito el movimiento de los átomos requiere un escenario sin límites, un espacio infinito, al que llama vacío, nada o infinito. (De Mora, 2009, p. 50)

El vacío juega un papel más que importante en la evolución de este concepto, en especial en la búsqueda de los límites del espacio. Porque si el espacio es finito, entonces fuera de sus límites, debe haber algo. Y es ese algo lo que está vacío. Ese vacío, en contraposición al espacio, no siempre fue contrapuesto. Se hace necesaria su presencia ya que el uno apoya la existencia del otro. Mirando hacia adelante, lo que para los griegos era el vacío, será a futuro la idea del cero del espacio matemático newtoniano.

Arquitas de Tarento niega de una manera muy gráfica los límites del cosmos y reconoce al espacio infinito en acto, según cita también Simplicio:

Si estoy a la extremidad del cielo de las estrellas fijas ¿podré alargar la mano o un bastón? Es absurdo pensar que no puedo; y si puedo, lo que se encuentra más allá es, sea un cuerpo, sea el espacio. Podremos por tanto ir más allá de eso todavía y así sucesivamente; y si siempre hay un nuevo espacio hacia el que se puede tender el bastón, eso implica claramente una extensión sin límites. (De Mora, 2009, p. 50)

No sólo es el espacio lo que justifica a la necesidad del infinito, sino además otro concepto igual de controvertido, igual de natural y que ha también provocado su estudio desde gran cantidad de ramas del conocimiento: el tiempo. La idea de la eternidad, de inicio y fin de los tiempos hace necesaria la búsqueda de límites, que permitan orden, que nos hagan sentir menos perdidos en la infinitud.

[Epicuro dice] En consecuencia el universo ha existido siempre y siempre existirá tal cual es ahora. Pero, y ahí discrepa de Aristóteles, igual que es eterno, el universo es infinito. Hay una infinidad de átomos en movimiento en un espacio vacío infinito. El universo está constituido por los cuerpos y el espacio vacío, que es donde aquellos residen y se mueven. Los cuerpos y el vacío son las dos únicas sustancias reales. (De Mora, 2009, p. 50)

Estas ideas, sin embargo, serían dejadas de lado durante varios siglos. Se hizo necesario esperar a que llegaran algunos matemáticos de la modernidad para que se viera aceptado este tipo de argumentos para que el espacio y el tiempo tuvieran la propiedad de ser infinitos en acto.

En Anaxágoras ya aparecieron los temas principales de los análisis ulteriores del infinito: el número incalculable de combinaciones de los infinitesimales y las situaciones imponderables que engendran las innumerables diferencias formales aluden sin duda alguna a la

existencia de un principio de continuidad que opera en la naturaleza; Leibniz lo convirtió en uno de los puntos centrales de su propia especulación. La inagotabilidad de lo ilimitado y la imposibilidad de aprehender un absoluto mínimo o un absoluto máximo, además de ser un argumento esencial de meditación permanente, desde las escuelas filosóficas de Oxford o de París en el siglo XIV hasta la metafísica de muchos hombres del Renacimiento y llegando a Leibniz y Newton, constituyó el fundamento de la formulación definitiva que se dio al cálculo infinitesimal en el siglo pasado por obra de Cauchy y Weierstrass. (Zellini, 1991, p. 19)

Desde Anaxágoras hasta Cauchy hay muchos procesos, idas y vueltas, sobre las mismas ideas y discusiones. La búsqueda de explicaciones para la naturaleza de aquello que nos rodea, la aceptación de las limitaciones propias y la necesidad de comprender que aquello que no podemos observar en totalidad en la naturaleza permite explicar el comportamiento de los elementos del cálculo, los cuales fueron ideas germinales dentro de la construcción de un infinito científico. Pero como veremos más adelante, no todos los matemáticos tuvieron la valentía para afirmar a viva voz lo que otros harían: aceptar la infinitud del espacio. Muchos de ellos no harían más que aceptar la indefinición, quedarse en el ilimitado y no cruzar hacia el lado del infinito. Inclusive Descartes que fue uno de los primeros en observar que el infinito debía existir como entidad separada del resto de los conceptos, porque no era posible alcanzarlo desde ningún otro, tuvo en sus primeras discusiones sobre este concepto, la cautela de separar el infinito y el indefinido. Dice Zellini (1991) sobre las ideas de Descartes:

La distinción que establece, a este respecto, entre infinito e indefinido refleja la posición tradicional entre infinitud actual e infinitud potencial, si bien los términos del problema aparecen levemente desplazados: lo “indefinido” no deja nunca de recordar la fatal imperfección del objeto terrestre que en sí aparece carente de límite; pero indefinida será,

ahora, característicamente, la cosa que, aún siendo sin límites bajo cualquier aspecto, no está, pese a todo, exenta de toda limitación, ya que, aunque más no fuere, no puede sustraerse a los confines fijados por su propia existencia particular, por su ser lo que es y no otra cosa. (Zellini, 1991, p. 120)

Pasarían años y discusiones para que se llegara a la construcción de un infinito sin rechazo dentro de la comunidad científica. Enseguida, y desde los griegos, vamos a pasar al siglo XV para identificar las primeras producciones que llevaron a esa construcción.

### **El fin de la Edad Media y el inicio de un espacio infinito**

Es Nicolás de Cusa uno de los primeros a los cuales se le adjudica la declaración de un universo infinito. Sin embargo, no es esto del todo cierto, en alguna medida, tanto él como Descartes, guardan para Dios ese calificativo. Pero a pesar de esto último, hay ideas en de Cusa que permiten vislumbrar la necesidad de romper con los límites del Universo y aceptar que su extensión es infinita, al menos para el entendimiento humano. Dice Koyré (2008) de las ideas de Nicolás de Cusa:

Su universo no es infinito (*infinitum*), sino “interminado” (*interminatum*), lo cual significa no sólo que carece de fronteras y no está limitado por una capa externa, sino también que no está “terminado” por lo que atañe a sus constituyentes; es decir, que carece expresamente de precisión y de determinación estricta. Nunca alcanza el “límite”; es indeterminado en el plano sentido de la palabra. Por consiguiente, no puede ser objeto de conocimiento preciso y total, sino tan sólo de un conocimiento parcial y conjetural. (Koyré, 2008, p. 12)

La idea de no terminación lleva a pensar en un proceso que continúa, aunque según Koyré lo describe, la cuestión está en la imprecisión, la falta de alcance del límite, lo que hace que si el Universo en sí presenta estos problemas respecto a su propia extensión, qué queda para el ser humano que es quien intenta comprenderlo y conocerlo, describirlo a través de lo que podemos aprehender por medio de los sentidos. Ahora bien, si Nicolás de Cusa no nos dice que el Universo es infinito, por qué iniciamos el relato con él. El gran aporte de este matemático fue su ruptura del Universo cerrado, el permiso para poder entender que no hay nada que actúe de límite o frontera; y con eso dio el primer paso para abrir la posibilidad de su real infinitud. Aún así, se cuida de declararlo de manera abierta; “aunque el mundo no es infinito, con todo no se puede concebir como finito, ya que carece de límites entre los que se halle confinado” (Koyré, 2008, p. 16)

Este cambio en el pensamiento, esta “nueva” manera de pensar en los límites de lo conocido podría invitarnos a pensar que de aquí en adelante, esta línea de pensamiento es la que continúa. Sin embargo, como en todo proceso de construcción de conocimiento, las ideas avanzan para luego retroceder y poder avanzar luego con más fuerza. Esto es lo que observamos cuando seguimos una cronología de la sucesión de los eventos que llevaron al infinito a pasar de ser una cualidad divina a una propiedad del espacio.

Un claro ejemplo de las dificultades con las que se encontraron las ideas propuestas por Nicolás de Cusa, queda plasmado en el análisis que del mismo problema (la extensión del Universo) hace Copérnico.

No nos hemos de sorprender, por tanto, de que Copérnico (1473-1543), quien creía en la existencia de esferas planetarias materiales, ya que las necesitaba a fin de explicar el movimiento de los planetas, creyese también en la de una esfera de estrellas fijas que ya no necesitaba. Además, aunque su existencia no explicaba nada, con todo poseía cierta utilidad: la esfera estelar, que “abarcaba y contenía todo en sí

misma”, mantenía unido el mundo y, además, permitía a Copérnico asignar al Sol cualquier posición determinada. (Koyré, 2008, p. 34)

Esa esfera de estrellas que necesitaba le permitía pensar en un universo muy grande, pero no infinito. De hecho, Copérnico hablaba de inmensidad, de un espacio que no podemos medir, inmenso, pero finito. Pero a pesar de esto, el trabajo de Copérnico en relación al movimiento de las estrellas, fue uno de los grandes hitos que permitió el avance hacia la infinitización del espacio.

A pesar de ello, es claro que a veces resulta más fácil, psicológica, si no lógicamente, pasar de un mundo muy grande, inmensurable y creciente a un mundo infinito que realizar este salto partiendo de una esfera más bien grande, aunque determinadamente limitada. La burbuja del mundo ha de hincharse antes de explotar. También es obvio que, mediante su reforma o revolución de la astronomía, Copérnico eliminó una de las objeciones científicas más valiosas en contra de la infinitud del Universo, como es la que se basa en el hecho empírico y de sentido común del movimiento de las esferas celestes. (Koyré, 2008, p. 37)

Este rompimiento con las ideas de la Edad Media provocan una serie de consecuencias que llevarán, eventualmente, a la discusión de un espacio infinito. Es por ello que destacamos que si bien, no es Copérnico quien va en ese sentido, es su obra la que allana los caminos.

Fue necesario esperar a que Giordano Bruno se pronunciara abiertamente la creencia de un espacio infinito. Él no se queda con la dificultad de asignarle límites, sino que afirma sin lugar a duda su infinitud.

Hay un único espacio general, una única y vasta inmensidad que podemos libremente denominar Vacío: en él hay innumerables globos como este en el que vivimos y crecemos; declaramos que este espacio

es infinito, puesto que ni la razón, ni la conveniencia, ni la percepción de los sentidos o la naturaleza le asignan un límite. En efecto, no hay razón ni defecto de las dotes de la naturaleza, de potencia activa o pasiva, que obstaculicen la existencia de otros mundos en un espacio que posee un carácter natural idéntico al de nuestro propio espacio que está lleno por todas partes de materia o, cuanto menos, de éter. (Koyré, 2008, p. 43)

*Ni la razón, ni la conveniencia ni la percepción.* Ese espacio del que nos habla Bruno, que es infinito porque no hay motivo para que no lo sea, es el que dará inicio a un proceso que convierte al infinito en entidad científica, dejando de lado su naturaleza religiosa y casi mágica. Es la “extensión” del espacio en el cual vivimos, y como tal, debe ser considerada parte de aquello que se estudia desde la astronomía, de lo que la matemática intenta modelizar, de lo que la física observa para explicar las leyes de la naturaleza. Ese quiebre de pronunciamiento sin dubitación cambia la historia de la matemática, incorporando a los elementos matematizables al infinito como la verdadera extensión del Universo.

Pero la explicación que este matemático nos da para justificar la infinitud presente en nuestra tarea es tan poética, como todas las demás que se venían asociando con el infinito. No deja afuera de su tratamiento la creación ni las condiciones en que la misma se ha modificando.

No hay confines, términos, límites o muros que nos roben o priven de la infinita multitud de cosas. Por consiguiente, la Tierra y el océano que hay en ella son fecundos; por consiguiente, la hoguera del Sol es perpetua, suministrando eternamente combustible a los voraces fuegos y humedad que rellene los exhaustos mares. De la infinitud nace una abundancia siempre renovada de materia. Así, Demócrito y Epicuro, quienes mantenían que todo sufría restauración y renovación por el infinito, comprendían estas cuestiones mejor que quienes mantienen a

toda costa la creencia en la inmutabilidad del universo, alegando un número constante e inmutable de partículas de idéntica materia que sufren perpetuamente transformaciones de unas en otras. (Koyré, 2008, p. 46)

La revalorización de los atomistas griegos es otro de los grandes aportes de Bruno al reconocimiento del espacio infinito. Cabe preguntarse por qué se perdieron esas ideas, por qué prevalecieron durante tantos siglos las opuestas a las de esos matemáticos de la antigüedad. La filosofía aristotélica que invadió e inundó todo el desarrollo del conocimiento occidental tuvo grandes efectos, pero también provocó grandes pérdidas, y según nos dice Bruno, la aceptación del infinito en acto es una de ellas.

No es fácil explicar estas ideas a los detractores del infinito como noción valedera, pero Bruno, haciendo uso de dos personajes, realiza una construcción dialogada más que interesante.

FILOTEO. –Ningún sentido corporal puede percibir el infinito. Ninguno de nuestros sentidos puede aspirar a suministrar semejante conclusión, ya que el infinito no puede ser objeto de la percepción sensible. [...] Al intelecto le corresponde juzgar, otorgando el peso debido a los factores ausentes y separados por una distancia temporal y por intervalos espaciales. [...]

ELPINO. –¿De qué nos sirven los sentidos? Decidme.

FILOTEO. –Tan sólo para estimular la razón, para acusar, para indicar, para testificar en parte... la verdad tan sólo en una pequeñísima medida deriva de los sentidos, como de un frágil origen, no residiendo en absoluto en los sentidos.

ELPINO. –¿Dónde, entonces?

FILOTEO. –En el objeto sensible como en un espejo; en la razón a modo de argumentación y discusión. En el intelecto ser como principio o

como conclusión. En la mente en su forma propia y vital. (Koyré, 2008, pp. 47-48)

El argumento de Bruno en este diálogo parece comprometer no sólo las ideas de quienes lo precedieron, sino además la manera de entender el conocimiento científico y filosófico de una época: la naturaleza del hombre y de sus sentidos no permiten que éstos últimos sean base para la construcción científica. ¿Alcanza con establecer condiciones a lo que vemos, a lo que es percibido a través de los limitadísimos sentidos del hombre? ¿Resulta tan difícil aceptar que existan, de hecho, moléculas infinitas que forman un espacio infinito, que nos rodea, y que no podemos entender ni absorber a través de los sentidos? No fueron pocos los que criticaron la manera de pensar de Giordano Bruno, principalmente por arrojarse a la comparación de Dios, el único que era infinito hasta el momento, con el espacio, que no deja de ser un objeto, cuestión de la cual se cuidaron con especial interés Nicolás de Cusa, y Descartes posteriormente. Sin embargo, Bruno logró una salida elegante dado dos categorías distintas a esos infinitos, el de Dios (simple e intensivo) y el del mundo, múltiple y extensivo. Además de esto, se destaca que la aceptación del espacio infinito es la única manera de entender el infinito poder de Dios, quien podría haber creado un mundo como el nuestro en cualquier otro espacio distinto del nuestro y no podemos bajo ningún concepto asumir que esto no es posible, ya que sería como colocar limitaciones a Dios.

Pero otros matemáticos encontraron en Dios la excusa para negar en lugar de afirmar la infinitud del universo. Es este el caso de Kepler, quien ve al mundo y al universo como la perfecta representación de la perfección de su Dios, que debe ser entonces ordenada y armónica, cosa que le sería muy imposible ver en el caos que se produce en el infinito.

La multiplicidad de mundos y estrellas fijas alrededor de las cuales Bruno arma sus nuevos mundos hace que Kepler se sienta muy incómodo. Así lo presenta Koyré cuando lo cita: “Ciertamente uno se encuentra errando en esta inmensidad

a la que se le niegan límites y centro y, por ende, también todo lugar determinado.” (Koyré, 2009, p. 63)

Sin embargo, Kepler no se queda simplemente con la justificación relativa a la divinidad, ahonda en su campo de acción y presenta otro argumento estrictamente vinculado con la astronomía. Y allí es donde sus ideas suenan mucho más lógicas que aquellas que se apoyan en Dios. Según Kepler, pensar en una estrella infinitamente alejada resulta ridículo, dado que cualquiera sea su posición existe un número que representa esa distancia, del mismo modo que puede pensarse la distancia entre cualquier número entero y el cero. No importa cuán alejado se esté, sigue siendo una distancia finita. Esto aplicado, evidentemente, a las estrellas que vemos, pues como dice Kepler en relación a las estrellas que podrían estar fuera de nuestra vista, sobre las que no hay evidencia, no es de interés lo que ocurre. “Aquí la astronomía suspende el juicio, pues a tal altura está desprovista del sentido de la vista. La astronomía enseña sólo esto: por lo que atañe a las estrellas que se ven, incluso las menores, el espacio es finito” (Kepler citado en Koyré, 2009, p. 83) El mundo que a Kepler ocupa, el que le es necesario para su trabajo, el mundo óptico, es finito. Y sus argumentos son suficientes para justificar la “limitación” de sus ideas.

Otro de los grandes pensadores de esa época no tuvo siquiera la seguridad suficiente para proclamarse en uno u otro sentido. Galileo, quien fuera uno de los sabios que colaboró con la posterior geometrización del espacio, quien ayudó con su invento a acercar aquellas estrellas que no se veían por la gran distancia a la que se hallaban de nuestro planeta; no toma partido de manera fehaciente ni por la infinitud ni por la finitud del espacio. A lo sumo, arriesga un argumento que lo acerca a pensar que el espacio podría ser infinito.

Tan sólo hay un argumento particular mío que me inclina más a lo infinito e ilimitado que a lo limitado (notad que mi imaginación no me sirve aquí para nada, ya que no puedo imaginar el mundo ni finito ni

infinito). Siento que mi incapacidad para comprender habría que atribuirle con más propiedad a la incomprensible infinitud, más bien que a la finitud, en la que no se precisa ningún principio de incomprensibilidad. Pero se trata de una de esas cuestiones felizmente inexplicables para la razón humana y tal vez semejante a la predestinación, el libre albedrío y tantas otras en las que sólo el Espíritu Santo y la revelación divina pueden suministrar respuesta a nuestras reverentes consideraciones. (Galileo citado en Koyré, 2009, p. 96)

Finalmente, hubo que esperar a Descartes, otro religioso devoto, para que postulara de manera casi indiscutible que el espacio y todo cuanto nos rodea es infinito, aún cuando él usara como término *indefinido* dado que guardaba el calificativo de infinito sólo para Dios. El argumento que Descartes utiliza para explicar las razones que llevan a comprender la infinitud del mundo no tienen bases religiosas, como venían teniendo las de sus colegas. Descartes se plantea la necesidad de matematizar el espacio, de comprenderlo de acuerdo a las leyes de la ciencia, dentro de las cuales la religión no tiene sustento. No ve a Dios en el mundo, ni en ninguna de sus producciones, con excepción del alma humana. Entiende al mundo como una producción perfecta, exacta, sin limitaciones ni errores. Y desde esa concepción el vacío resulta inaceptable. ¿Por qué creer que esa construcción perfecta está rodeada de la nada? ¿Cómo entender que hay espacio vacío entre dos cuerpos? Si lo que separa dos cuerpos es el vacío, que por definición carece de atributos, entonces los cuerpos no estarían separados. Pensar en muchos mundos flotando en el vacío resulta entonces para Descartes inaceptable, dado que para él la materia que forma los planetas y las estrellas es tan materia como la que forma el cielo, el aire y los que otros consideraron vacío. Pensar en que Dios dejó espacios sin poner nada en ellos, sin ocuparlos con alguna materia resulta pensar que Dios no acabó su obra, que es dispareja en cuanto a su composición, como si un pintor dejara espacios en blanco en su lienzo.

Hemos de observar atentamente dos cosas: la primera, que siempre tenemos presente que el poder de Dios y su bondad son infinitos, a fin de que ello nos haga comprender que no hemos de sentir ningún temor de equivocarnos imaginando demasiado grandes, demasiado hermosas o demasiado perfectas sus obras; antes bien, podemos equivocarnos si suponemos que existen en ellas fronteras o límites de los que no tengamos conocimiento cierto. (Descartes citado en Koyré, 2009, p. 105)

A pesar del gran paso que dio Descartes, su indecisión para afirmar la infinitud del universo le valió una fuerte controversia con Henry More, quien criticó duramente esta tibia declaración. More le objeta a Descartes varias cosas, entre ellas:

No entiendo su extensión indefinida del mundo. En realidad, esa extensión indefinida o bien es infinita *simpliciter* o bien sólo lo es respecto a nosotros. Si entendéis la extensión como infinita *simpliciter*, ¿por qué oscurecéis vuestro pensamiento con palabras demasiado bajas y modestas? Si tan sólo es infinita respecto a nosotros, entonces en realidad la extensión será finita, pues nuestra mente no es la medida de las cosas ni de la verdad. Por tanto, puesto que hay otra expansión infinita *simpliciter*, la de la esencia divina, la materia de vuestros vórtices se alejará de sus centros y toda la trama del mundo se disipará en átomos y granos de polvo. (More citado en Koyré, 2009, p. 111).

More no duda en afirmar la infinitud del tiempo y del universo, y por eso reclama a Descartes que corrija sus indefiniciones y justifique la elección de los términos que utiliza, cosa que Descartes no tardó en hacer.

Cuando digo que la extensión de la materia es indefinida, creo que eso basta para evitar que alguien imagine un lugar fuera de ella al que puedan escapar las pequeñas partículas de mis vórtices, pues, allí

donde se conciba ese lugar, en mi opinión ya contendrá alguna materia, porque cuando digo que se extiende indefinidamente, lo que digo es que se extiende más allá de todo lo que el hombre pueda concebir. Más, con todo, creo que hay una diferencia muy grande entre la amplitud de esta extensión corpórea y la amplitud de la substancia o esencia divina, y no diré extensión divina, porque hablando con propiedad no la hay. Por tanto, llamo a ésta infinita *simpliciter* y a la otra, indefinida. (Descartes citado en Koyré, 2009, p. 115)

Visto desde nuestra realidad actual, parece poco importante dado que ambos estaban aceptando la falta de límites y los que los separan es tan sólo una palabra, y como mucho, una visión religiosa mínimamente distinta. Pero en esa época, y en los procesos que cada uno llevaba a cabo, estas cuestiones eran de carácter sumamente relevante. More a través de esta disputa hace posible algo que llevaría a un cambio radical en la ciencia de ese momento “captar el principio fundamental de la nueva ontología, la infinitización del espacio” (Koyré, 2009, p. 122)

Sin embargo, no es hasta que Newton retoma las nociones de Bruno, que finalmente se acepta que el espacio, que nuestro universo, es en sí infinito. La manera en que logra esta empresa es a través de las propias nociones que nos llegan como distinguidas de su obra: la separación de lo relativo y lo absoluto, el principio de inercia como motor del mundo.

De ahí que los movimientos enteros y absolutos no se puedan determinar de otro modo que mediante lugares inmóviles. Por esa razón refería yo antes aquellos movimientos absolutos a lugares inmóviles y los relativos, a lugares móviles. Ahora bien, no hay otros lugares inmóviles que aquellos que, de infinito a infinito, retienen todos la misma posición dada unos respecto a otros y, bajo este supuesto, deben

permanecer siempre inmóviles, constituyendo así el espacio inmóvil.  
(Newton citado en Koyré, 2009, p. 155)

Esos lugares inmóviles de los que Newton habla son lo que Giordano Bruno definía como espacio infinito: es esa extensión completa y absoluta que permite que los lugares móviles (aquellos que ocupan los cuerpos en distintos instantes) sean observables, medidos y distinguidos. Lo que Newton logra con su obra es lograr finalmente la “explosión de la esfera” y la definitiva geometrización del espacio.

Y es subidos a los hombros de Newton que otros matemáticos luego intentarán otras explicaciones para la afirmación newtoniana de un espacio y tiempo verdaderamente infinitos, que cuentan además con infinitos mundos girando alrededor de infinitas estrellas soles, como postulaba Bruno. Raphson, por ejemplo, intenta una justificación axiomática de un espacio infinito, que tal vez, haya permitido hacer sentir esta noción “más científica”, aunque seguramente no hubiera convencido a nadie si no estaban ya convencidos por las ideas de Newton.

1. El *espacio* (o lo *extenso más íntimo*) es por su naturaleza, y absolutamente, indivisible y no se puede concebir como dividido.
2. El *espacio* es absolutamente, y por su naturaleza, inmóvil
3. El *espacio* es infinito en acto
4. El *espacio* es acto puro
5. El *espacio* lo contiene todo y lo penetra todo
6. El *espacio* es incorpóreo
7. El *espacio* es inmutable
8. El *espacio* en uno en sí mismo [y por tanto] es la entidad más simple, no compuesta de cosa alguna y no divisible en cosas cualesquiera

9. El *espacio* es eterno [porque] lo actualmente infinito no puede no ser [...] en otras palabras, que *no pueda no ser* es esencial a lo infinito en acto. Ha sido por tanto siempre.

10. El *espacio* es incomprensible para nosotros [precisamente porque es infinito].

11. El *espacio* es máximamente perfecto en su género [*generus*]

12. Las cosas extensas ni pueden ser ni pueden concebirse sin él. Y por tanto

13. El *espacio* es un atributo (a saber la inmensidad) de la Primera Causa

(Raphson citado en Koyré, 2009, pp. 181-182)

Esta axiomatización puede suponer la conclusión de una aceptación de una comunidad científica que ya había adoptado la idea de un espacio infinito y que necesitaba una organización que permitiera comprenderla de manera inequívoca. Pero no es la axiomatización la que le da entidad a la noción, sino el concepto la que permite lograr la axiomatización.

Fue una de las ideas newtonianas la que desataría con posterioridad los reclamos de Leibniz, no ya sobre la infinitud del espacio, que después de Newton ya no fue discutida, sino sobre la relación directa entre el espacio, el tiempo y Dios. Para Newton, el espacio es Dios, es el órgano sensible de Dios, es lo que ocupa todos los espacios.

Es omnipresente no sólo *virtualmente*, sino también *substancialmente*, pues una virtud no puede subsistir sin substancia. En él están contenidas y se mueven todas las cosas, más no se afectan mutuamente: Dios nada sufre por el movimiento de los cuerpos, y los cuerpos no hallan resistencia por la omnipresencia de Dios. Todo el mundo concede que el Dios Supremo existe necesariamente, y, por la

misma necesidad, existe *siempre y en todas partes* (Newton citado en Koyré, 2009, p. 210)

Leibniz acuerda en la infinitud del universo, pero rechaza fervientemente la postura que sostiene Newton. Para él, Dios no es el Universo, ni el Universo es un todo como sí lo es para Newton.

El universo (...) debiéndolo entender como toda la eternidad futura es un infinito. Es más, hay una infinitud de criaturas en la menor partícula de la materia, a causa de la división actual del continuum al infinito. Y el infinito, es decir el montón de número infinito de substancias, propiamente hablando, no es un todo; no más que el número infinito mismo, del cual no se puede decir si es par o impar. Es lo mismo que sirve para refutar aquellos que hacen del mundo un Dios, o que conciben a Dios como el alma del mundo; el mundo o el universo no puede ser considerado como un animal o como una substancia. (Leibniz citado en Burbage y Chouchan, 2002, p. 22)

Sin embargo y a pesar de los desacuerdos, ya no se discute sobre la infinitud del Universo. Eso ya ha sido establecido y, por ese sólo motivo, el infinito se convierte en un concepto de la matemática, porque si es tarea de la ciencia explicar cómo funciona el mundo, entonces esa ciencia necesita un término que defina la extensión de eso de lo que se habla. Y eso es el infinito.

¿Nos interesan entonces las diferencias teológicas entre estos dos matemáticos? Pues resulta que sí, porque desde esas primeras diferencias teológicas, se desprenden luego otras que los alejan aún más.

Leibniz, cuyas creencias religiosas parten de las mismas bases, entiende de otra manera la vinculación entre Dios y el espacio que ha creado. Y es esa distinción una de las tantas cosas que separaron a estos dos científicos.

Estos caballeros mantienen, por tanto, que el *Espacio* es un *Ser real y absoluto*. Mas eso los envuelve en grandes dificultades, pues tal *Ser* debe ser *Eterno e Infinito*. De ahí que algunos hayan creído que es el *propio Dios* o, uno de sus atributos, su Inmensidad. Mas, dado que el *Espacio* consta de *Partes*, no es una cosa que pueda pertenecer a Dios (Leibniz citado en Koyré, 2009, p. 226)

La función de Dios en este universo también distingue a ambos científicos. “El mundo newtoniano –un reloj que atrasa- exige una renovación constante por parte de Dios, de su dotación de energía, mientras que el de Leibniz, debido a su propia perfección, elimina cualquier intervención de Dios en su movimiento perpetuo” (Koyré, 2009, p. 251)

Sin embargo, estas cuestiones religiosas no influyen en la idea fundamental que se ha logrado.

El Universo infinito de la nueva Cosmología, infinito en Duración así como en Extensión, en el que la materia eterna, de acuerdo con las leyes necesarias y eternas, se mueve sin fin y sin objeto en el espacio eterno, heredó todos los atributos ontológicos de la divinidad. Pero sólo esos; todos los demás se los llevó consigo la divinidad con su marcha. (Koyré, 2009, p. 256)

Pero no sólo es sobre cuestiones teológicas, sutilezas vistas desde nuestra realidad actual, donde estos dos matemáticos se distancian. Surgen otras argumentaciones emparentadas con esta primera discusión, que los alejará aún más a lo largo de las construcciones que cada uno hace de los elementos del cálculo. El tratamiento de los infinitesimales es una de las grandes diferencias entre ambos y es en lo que fundan cada uno de ellos gran parte de su trabajo.

D'Alembert hizo un estudio sobre estas diferencias, que se presentan a grandes rasgos en una investigación de Burbage y Chouchan (2002).

[...] d'Alembert busca establecer una diferencia muy precisa entre Leibniz y Newton, oponiendo al “embrollo” del uno a la determinación esclarecedora del otro. Leibniz se habría “embrollado con las objeciones que sentía se podrían hacer sobre las cantidades infinitamente pequeñas”, allí donde Newton “no ha tomado jamás el cálculo diferencial como el cálculo de cantidades infinitamente pequeñas, sino por el método de las primeras y últimas proporciones, es decir, el método de encontrar los límites de las relaciones” La positividad newtoniana consistiría en haber comprendido, antes de que el concepto mismo fuese plenamente elaborado, que “la teoría de los límites es la verdadera base del cálculo diferencial”. La otra metafísica, aquella de las cantidades “infinitamente pequeñas” vendrá a ser en realidad superflua: de allí que notemos que “la suposición que hacemos de cantidades infinitamente pequeñas no es más que para abreviar y simplificar el razonamiento...”, todos los “misterios” se explican y se desaparecen como tantos otros falsos problemas: “Se puede prescindir muy cómodamente de toda esa metafísica en el cálculo diferencial”. (Burbage y Chouchan, 2002, p. 11)

Newton es pragmático, no precisa el profundo análisis de las cantidades infinitamente pequeñas, que sí necesita Leibniz. Los dos sientan las bases de lo que posteriormente sería el Cálculo, aunque de maneras distintas. Si miramos sus acciones desde lo que se plantearon, ambos están muy alejados de lo que se encuentra en las aulas. Sin embargo, se puede pensar que Newton hace una propuesta más accesible a la escuela. ¿Por qué? Porque no está buscando la consistencia de la ciencia, sino el uso de sus herramientas. Ya que la formalización no le resultaba necesaria, y se animó a creer en lo que le parecía

que funcionaba, aún cuando, como dicen Burbage y Chouchan, los conceptos aún no estaban plenamente elaborados.

A pesar de esto último, la matemática como ciencia necesita la formalización. Es parte de su método, de su modo de validar conocimiento y de universalizar sus resultados, una proposición es verdadera si y sólo si es un teorema, o sea que es demostrable a partir de axiomas. Evidentemente, no eran Newton y Leibniz matemáticos formalistas, aunque el segundo estaba más cerca de serlo que el primero. Aún así, no fueron quienes precisaron del infinito los que llegaron a la formalización. Pasaron muchos años hasta que eso se lograra, y la naturaleza del concepto que se construyó poco tiene que ver con el infinito de Newton, de Leibniz y de todos los otros matemáticos cuyas obras se abordaron antes.

El infinito que Cantor formaliza para la matemática, y que le costara serias oposiciones por parte de sus colegas, es el infinito de la cardinalidad, el que permite caracterizar a los conjuntos infinitos. Ese es el que en la educación superior se construye, en nuestro caso, en el Profesorado. Sin embargo, como se mostrará en los próximos capítulos, poco aporta al infinito involucrado en el estudio del Cálculo.

### **Bolzano y Cantor: el infinito de los conjuntos**

La historia de la matemática llevó en algún momento a los matemáticos a formalizar los conocimientos que se habían ido construyendo a lo largo de muchos siglos, a definirlos y demostrar los teoremas siguiendo una estructura particular de acuerdo al escenario sociocultural en el cual se está trabajando. Estas condiciones vienen dadas por el tipo de cultura en la que se está trabajando y para el caso de los matemáticos de fines de siglo XIX y principio del siglo XX, responde a una estructura lógica deductiva.

La práctica social de la demostración, no es la misma de una comunidad a otra, se ha modificado y evolucionado de una cultura a otra; no es la misma para distintas comunidades matemáticas. Esto es claramente comprensible desde la socioepistemología, ya que en cada escenario sociocultural, refleja las características de éste, pero su finalidad básica ha sido la legitimación del saber matemático, aunque no es esta su única función. (Crespo Crespo, 2007, p. 282)

¿Por qué fue el trabajo de Cantor rechazado con tanto énfasis por muchos de sus colegas? Porque iba en contra de lo construido hasta ese momento, porque fundaba una serie de conceptos absolutamente desconocidos y porque implicaba un cambio conceptual muy fuerte que no era parte de lo que se conocía hasta ese momento. Era un cambio en el escenario, era una modificación en la cultura matemática del momento y eso genera, como mínimo, incomodidad.

No se puede afirmar, por supuesto, que el trabajo de Cantor fue tarea de un sólo hombre. Habían existido previos a su aportación otros intentos de formalización del infinito. Se considera a continuación, como antecedente del trabajo de Cantor, el trabajo de Bolzano, publicado luego de su fallecimiento, *Las paradojas del infinito*. Se analiza en profundidad el capítulo 12 de esta obra y algunas consideraciones generales de la totalidad del escrito, que aunque breve, manifiesta de forma clara, una luz para el camino que luego recorrería Cantor.

## **El trabajo de Bolzano**

La obra de Bolzano, *Paradojas del Infinito*, de 1851, es antecedente de la declaración de la existencia de conjuntos infinitos, caracterizándolos como aquellos conjuntos que pueden ponerse en biyección con un subconjunto propio de sí mismos. Presentó también la relación de “estar contenido en” distinguiéndola de la relación “tener menor tamaño que”. En esta obra, Bolzano afirma que podían atribuirse a los conjuntos infinitos números (lo que Cantor llama números transfinitos) y que habría más de uno de ellos. Este intento, sin embargo, fue fallido, ya que no era clara la noción que se consideraba de cardinal de un conjunto. Debido a eso, Bolzano encuentra paradojas en el tratamiento de estos números, con lo cual asume que no iban a resultar “necesarios para fundamentar el cálculo y abandonó la tarea”. (Corzo, 2001, p. 408)

Sin embargo, la obra sigue resultando de particular interés. Si bien no se logra una definición para el infinito ni para los números transfinitos, que más tarde conseguiría Cantor, aparecen en él algunos argumentos sobre las limitaciones de las definiciones que hasta ese momento se usaban, o al menos, que se proponían.

Es en el Capítulo 12 del trabajo de Bolzano donde se presenta una discusión retórica del autor sobre las definiciones o explicaciones que se habían dado al infinito hasta ese momento dentro de la matemática y la filosofía. Llama la atención que no se presenta en esta sección una definición para el infinito de acuerdo a lo que Bolzano considera, aunque sí puede encontrarse una caracterización que permite argumentar en contra de los problemas que este concepto había presentado a lo largo de la historia.

La primera definición que se presenta es adjudicada a Cauchy y Grunert y es una idea bastante próxima a la que se puede encontrar en las aulas en la actualidad.

Algunos matemáticos [...] han creído ofrecer una explicación del infinito al describir a éste como una cantidad variable; cuyo valor se incrementa sin límite y puede sobrepasar cualquier cantidad dada, independientemente de la magnitud de ésta. El límite de ese crecimiento ilimitado sería una cantidad de magnitud infinita. (Bolzano, 1991, p. 47)

Frente a esta descripción de lo infinito, el autor nos muestra una serie de inconsistencias que hacen que esa definición no sea correcta dentro de la matemática. En primer lugar, existe la cuestión del uso del término *cantidad variable*, ya que según Bolzano esa *cantidad* no es una cantidad sino una noción de cantidad, la idea de una cantidad. Y para comprender esa idea de cantidad, deben aceptarse que existe un conjunto infinito de cantidades que difieren en su magnitud, con lo cual el infinito no puede pensarse como una cantidad determinada. Explica esta dificultad tomando como ejemplo la tangente de un ángulo recto.

Lo que estos matemáticos llaman infinito no es, sin embargo, alguno de los distintos valores que toma, por ejemplo, la expresión  $\tan(\varphi)$  para distintos valores de  $\varphi$ , sino más bien aquel valor individual singular que imaginan (en este caso, sin razón)  $\tan(\varphi)$  que esa expresión tiene para

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ (Bolzano, 1991, p. 47)}$$

Por otro lado, el autor encuentra también un problema al pensar en lo infinitamente pequeño. Si el límite de un crecimiento ilimitado es lo infinitamente grande, entonces, el cero debería considerarse como el límite de un decrecimiento ilimitado, es decir, lo infinitamente pequeño, lo que resulta contradictorio.

La segunda definición que se presenta es la ofrecida por Spinoza y otros filósofos y matemáticos, según comenta Bolzano. Esta definición, a su criterio, contraria a la anterior que caracterizaba como demasiado amplia, le resulta estrecha, además de incorrecta.

Según ellos, sólo es infinito aquello que no es ya susceptible de un incremento adicional o aquello a lo que ya no se puede añadir (adicionar) nada más (Bolzano, 1991, p. 47)

La manera en que Bolzano nos explica la inconsistencia de esta definición es, una vez más, haciendo uso de un ejemplo, muy sencillo de seguir, y lo que es más importante, fácilmente aceptable. Toma como elemento para el ejemplo a una semirrecta, ya de longitud infinita, y a su extensión infinita para convertirla en una recta. El tono en que se presenta esta explicación resulta inclusive desafiante, mostrando la seguridad con que defiende sus ideas.

Los matemáticos consideran natural añadir una cantidad a cualquier otra. Pero la cantidad añadida no tiene que ser necesariamente finita. Lo añadido pueden ser cantidades infinitas, se puede multiplicar una cantidad infinita infinitas veces, etc.

Sin embargo, algunos matemáticos ponen en duda la legitimidad de este procedimiento. Pero, ¿qué matemático que no rechace sin más todo lo que tenga que ver con el infinito no aceptará que la longitud de una recta acotada solamente en una dirección, pero que se extiende al infinito en la otra, es infinitamente grande y, no obstante, al mismo tiempo, que puede prolongarse y hacerse más grande extendiéndola en el sentido de la primera dirección? (Bolzano, 1991, p. 48)

Frente a esta pregunta que hace el autor a quienes sin duda se opondrían a sus proposiciones, queda claro que lo infinito puede ser aún incrementado, aumentado en extensión, como en este caso, o agregando elementos a un conjunto que ya es infinito.

La tercera definición que se presenta en este capítulo se refiere a la composición de la palabra, en donde se afirma *“que es infinito lo que no tiene un fin”* (p. 48). Esta definición, según Bolzano, sigue siendo insatisfactoria. El fin que entiende el autor es un fin en el tiempo, un acabar, por lo cual, lo que no es susceptible a ser ubicado temporalmente, como los entes matemáticos, no podrían caer en la clasificación de finito o infinito.

Otra de las acepciones de la palabra, en un sentido más amplio, es como sinónimo de “sin límite”, donde el autor encuentra otros problemas. Por ejemplo, considera a un punto determinado en el tiempo o el espacio, de los cuales no puede asegurarse que tengan límite y sin embargo, no puede asegurarse la infinitud en un solo punto. Por otro lado, ocurre también lo contrario, hay cosas acotadas, limitadas, y aún así, infinitas.

Este es el caso no solamente de la recta que se extiende al infinito solamente en una dirección, sino también del espacio que se localiza entre un par de paralelas de longitud infinita, lo mismo que de los brazos de un ángulo plano y, en general, de muchas otras cosas (Bolzano, 1991, p. 49)

Y por último considera lo que se plantea dentro de la psicología racional, con una consecuencia interesante respecto al ejemplo que toma.

También en la psicología racional llamamos infinita a una capacidad cognoscitiva si existe un conjunto de verdades infinito (por ejemplo el que contiene a las que enuncian la serie infinita de los dígitos de la representación decimal de la cantidad  $\sqrt{2}$ ), independientemente de que se alcance o no la omnisciencia (Bolzano, 1991, p. 49)

No pueden conocerse los términos de esa serie, aún cuando pueda comprenderse el significado de los mismos y la capacidad de las personas de conocer sea limitada.

Como última definición para infinito, Bolzano presenta la más generalizada según lo que escribe.

La actitud más generalizada consiste en decir que lo infinitamente grande es aquello más grande que cualquier cantidad dada o asignada. Lo que aquí se requiere es, en primer lugar, una determinación precisa del pensamiento que las palabras 'asignada' o 'asignable' sugieren. ¿Significan únicamente que algo es posible, que puede tener realidad o que no es contradictorio? (Bolzano, 1991, p. 49)

Esta distinción del término asignado es la que lo lleva a explicar las dificultades que acarrea la definición. En el primer caso, de lo que es posible o real, toma en consideración lo que dice Fries, entendiendo al infinito como lo *no completable*. Sin embargo, se habla de infinito en relación a cosas que no poseen existencia, como las verdades absolutas. Si en cambio se considera asignable a lo que no resulta contradictorio, entonces surge para el autor otro problema que concluye en el absurdo.

Si, por otra parte, se entiende por assignable sencillamente a todo aquello que no resulta contradictorio, entonces en la definición misma del concepto se sugiere que el infinito no existe, pues una cantidad que ha de ser mayor que cualquiera que no se contradiga debería ser mayor que sí misma, lo que resulta claramente absurdo (Bolzano, 1991, pp. 49-50)

Sobre esta definición Bolzano (1991) encuentra un significado más para el término assignable, que es *“simplemente aquello que, de alguna manera, se presenta ante nosotros; es decir, aquello que puede convertirse en un objeto de nuestra experiencia”* (p. 50). El problema entonces se traslada a la naturaleza de la infinitud de un objeto, si se lo considera una característica interna del objeto, entonces no tiene que ver con que sea o no objeto de nuestra experiencia. El infinito entendido en relación a la posibilidad de ser comprendido o conocido resultaría poco provechoso para la ciencia.

El problema de si un objeto dado es o no infinito no puede, ciertamente, depender de si su cantidad es algo que podamos o no percibir, de si somos o no capaces de tener una visión global de ella (Bolzano, 1991, p. 49)

La percepción de finitud e infinitud, sin embargo, están presentes en el infinito sociocultural del que hablábamos en (Lestón, 2008). Lo que no logramos enumerar, conocer, determinar el fin, resulta infinito, aún cuando se sepa que no lo es. Fuera de la matemática, la clasificación depende de la sensibilidad, de lo que podemos absorber a través de nuestros sentidos.

Bolzano, como se dijo al inicio de este apartado, no propone una definición para este infinito matemático, producto de muchas construcciones que se dieron a lo

largo de la historia de la matemática misma. Sin embargo, al menos aporta condiciones que ajustan la posible definición de este concepto. Plantea qué cuestiones es necesario atender, qué argumentos pueden esgrimirse en contra de aquello que se propone como posible salida para el embrollo en que los matemáticos estaban metidos. Era necesaria una definición, una teoría que explicara cómo tratar al infinito, desde dónde mirarlo, cómo estudiar lo que se hacía y decía sobre él. Es en esas condiciones que el trabajo de Cantor aparece, y aún cuando fue negado en su inicio, logró resolver elegantemente la situación planteada. Queda aún por ver, sin embargo, qué relación existe entre este infinito que Cantor caracteriza tan bien, y aquel que fue respuesta a una pregunta que llegó hasta Newton en relación a la extensión del Universo.

## **El trabajo de Cantor**

¿Cómo llega Cantor a estudiar la teoría de conjuntos y a definir los números transfinitos? Por un lado, como se verá más adelante, era una necesidad de los problemas que se encontraba estudiando, pero además sentía que era necesario organizar el conocimiento matemático, de manera tal que la organización que la matemática proveía sirviera para fundar bases de las ciencias experimentales desde el rigor matemático. En este sentido es que critica las posturas de Spinoza y Leibniz en relación al tratamiento que hacen de la naturaleza.

Pues junto a (o en lugar de) la explicación mecánica de la Naturaleza – que en su dominio propio ha contado con toda la ayuda y las ventajas del análisis matemático, pero cuya unilateralidad e insuficiencia han sido expuestas magníficamente por Kant, no ha habido hasta ahora ni siquiera el inicio de una explicación orgánica de la Naturaleza, que tratara de ir más allá y que estuviera armada con idéntico rigor

matemático. Una tal explicación orgánica sólo podrá iniciarse, según creo, retomando de nuevo y desarrollando la obra y los esfuerzos de aquellos dos pensadores. (Cantor citado en Ferreirós, 2003, p. 177)

No era sólo el trabajo de Leibniz y Spinoza que Cantor criticaba, en una carta a Valson de 1886, afirmaba que los *Principia* de Newton se habían convertido en “la causa real del positivismo y el materialismo actuales, que se han convertido en una especie de monstruo y se pavonean con el brillante ropaje de la ciencia” (Cantor citado en Ferreirós, 2003, p. 177). Y si bien reconocía las “buenas intenciones” de Newton, “los graves efectos metafísicos y las perversiones de su sistema”.

Es dentro de su plan de construir una teoría rigurosa de todo lo orgánico, lo que cuenta con armonía y consonancia, que Cantor se encuentra en la necesidad de la creación de nuevas herramientas matemáticas, lo que hoy conocemos como la teoría de conjuntos.

Cantor empezó estudiando los dos conjuntos de puntos más interesantes: el conjunto de los números racionales y los números reales. Buscaba diferencias entre los dos que fueran relevantes en relación con el hecho de que los números reales son continuos mientras que los racionales no lo son (Lavine, 2005, p. 56).

Su interés provenía del análisis y no conocía ningún conjunto más grande que el conjunto de los números reales.

Precisamente entre 1882 y 1885, años clave por la riqueza y profundidad de las nuevas ideas que publicó, Cantor elaboró algunas

hipótesis sobre la constitución de la materia y del éter, explotando su nuevo análisis conjuntista del continuo, e introduciendo ideas novedosas en teoría de conjuntos de puntos. Su pretensión era desarrollar una gran teoría unificada de fuerzas físicas y químicas, con vistas a aplicarla al reino biológico y así avanzar en el proyecto organicista. (Ferreirós, 2003, p. 177)

El siglo XIX fue un período muy productivo en la historia de la matemática, en el que se vieron avances fundamentales en campos como el de las geometrías no euclidianas y la aritmetización del análisis. Ésta última llevada a cabo por Weierstrass, Dedekind y otros, con el objetivo de quitar a la intuición dinámica y geométrica (que se creía era la causa de las paradojas), reduciendo el campo del cálculo desarrollado en el siglo XVII por Newton y Leibniz, al campo de los números. (Núñez, 2003)

En este proceso, fue esencial contar y ordenar elementos como números y puntos. El desarrollo de una teoría para los números transfinitos tanto en su aspecto cardinal como ordinal debió enfrentarse a visiones fuertemente arraigadas no sólo por resultados que en muchas oportunidades contradecían a la intuición, sino a aquellas que impedían el uso del infinito actual y su consideración como un objeto matemático sobre el que era posible elaborar una teoría científica. Actualmente Cantor es reconocido como el creador de un sistema matemático en el que los números de magnitud infinita definen una jerarquía de infinitos con una aritmética muy precisa, dando un significado matemático a la idea de que hay infinitos más grandes que otros (Núñez, 2003), pero en su época se trató de una tarea sumamente atacada y cuestionada por la comunidad matemática que actuaba en su mismo escenario sociocultural.

La idea de considerar lo infinitamente grande no sólo en la forma de una magnitud que se incrementa ilimitadamente y en la forma

estrechamente relacionada con las series infinitas convergentes [...] sino también de fijarlo matemáticamente por medio de números en la forma definida del infinito absoluto me fue impuesta lógicamente, casi contra mi voluntad puesto que es contraria a las tradiciones que yo había llegado a venerar en el curso de muchos años de esfuerzos e investigaciones científicas. (Cantor, citado por Lavine, 2005, p. 52)

La obra que analizamos en este apartado, *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*, representa gran parte del trabajo de este matemático que se enfrentó a una comunidad por sus ideas.

Este texto inicia en el primer capítulo con una justificación por parte del autor del por qué es necesario adentrarse en el trabajo con el infinito, y en particular con la construcción de los números transfinitos; en la búsqueda de continuar con el desarrollo de la teoría de conjuntos en la que estaba trabajando. La necesidad de justificar su trabajo de la manera en que se hace, puede entenderse como comprensible si se tiene en cuenta la naturaleza de los conceptos con los que está trabajando y que va a terminar por introducir.

La dependencia en que me veo respecto a esta extensión del concepto de un número es tan grande, que sin ésta última apenas me sería posible dar sin violencia el menor paso adelante en la teoría de conjuntos; valga esta circunstancia como justificación, o si es necesario como excusa, por la introducción de ideas aparentemente extrañas en mis consideraciones (Cantor, 2006, p. 85)

El autor reconoce la peculiaridad de lo que se dedica a discutir más adelante en su trabajo, aunque sólo en *apariencia*. Si bien estas ideas son relativamente nuevas,

a poco más de 100 años de existencia, lo que el autor suponía extraño lo sigue siendo a nivel sociocultural y lo que más tarde declaraba, aún no ha sucedido:

Pues se trata de una extensión o prosecución de la serie de los verdaderos números más allá del infinito; por atrevido que esto pueda parecer, estoy en condiciones de expresar no sólo la esperanza, sino la firme convicción de que con el tiempo esta extensión habrá de verse como algo totalmente simple, apropiado y natural. (Cantor, 2006, p. 85)

Se reconoce *atrevido* en el trabajo que propone y podemos afirmar que no se equivoca, sin embargo sus convicciones en referencia a la simplicidad, apropiación y naturaleza no han ocurrido aún. Si bien estas ideas se discuten en los cursos de matemática de nivel superior, aún no han llegado a las escuelas medias, no han permeado al discurso matemático escolar en esos niveles. Y a pesar de eso, sí se han incluido en el discurso escolar de la escuela algunos conceptos que se apoyan en este concepto.

Este trabajo, como ya es sabido, le provocó a Cantor un enfrentamiento con muchos de sus colegas, que desacreditaron no sólo sus producciones sino también su persona. Por lo que dice en este fragmento, estos enfrentamientos no fueron inesperados, aunque tal vez no haya sabido al escribir estas líneas la magnitud del ataque que le esperaba.

Al hacerlo no me oculto en absoluto que con esta empresa me sitúo en una cierta oposición respecto a intuiciones ampliamente difundidas acerca del infinito matemático, y respecto a puntos de vista sobre la esencia de las magnitudes numéricas defendidas a menudo. (Cantor, 2006, p. 85)

Se reconoce la intuición como componente de las ideas que hasta ese momento se aceptaban y sabe que lo está a punto de introducir es contrario a esa intuición. Esas ideas contra intuitivas se siguen manifestando de la misma manera, y la intuición sigue manteniendo su estatus respecto a este concepto, no ya dentro de la comunidad matemática, pero sí a nivel sociocultural.

A partir de aquí, el autor comienza con una distinción entre el infinito matemático que existía hasta ese momento y lo que él considera necesario para poder fundamentar algunos conceptos y construcciones que ya estaban en uso.

Primero distingue al *infinito impropio* como el infinito matemático que hasta ese momento había sido aceptado. Ese infinito tiene como característica *el papel de una cantidad variable que o bien crece más allá de todos los límites o bien se hace tan pequeña como se desee, pero siempre continúa siendo finita* (Cantor, 2006, p. 85). Este infinito puede relacionarse con el infinito potencial de los griegos, que había llegado desde la antigüedad hasta el siglo XX, es algo finito variable.

A continuación, haciendo uso de trabajos dentro del campo de la teoría de funciones y tomando como ejemplo las funciones de variable compleja, define a un *infinito propio* que permite justificar un pensamiento que ya estaba siendo usado: la existencia de un punto en el campo que representa la variable compleja ubicado en el infinito, infinitamente distante de los otros pero determinado; sobre el cual se examina el comportamiento de la función del mismo modo que se hace con el resto de los puntos ubicados en la región finita, encontrándose el mismo tipo de comportamiento. Este tipo de infinito es para Cantor un *infinito determinado*.

En función de esa distinción entre los dos infinitos, propio e impropio, Cantor introduce sus números transfinitos, haciéndolos surgir de la previa existencia que los matemáticos habían utilizado para sus puntos ubicados en el infinito, el infinito

propio de Cantor. Este punto, que hasta ese momento era único, es la base para la fundamentación del conjunto de los números transfinitos, cada uno distinguible de los otros y con relaciones aritméticas regulares entre ellos y con los enteros finitos.

Una de las cuestiones que con más empeño aparecen en este extracto es la necesidad del autor de separar claramente los dos infinitos de los que habla inicialmente: el propio y el impropio. Las funciones de variable real, y el estudio de la variable cuando crece infinitamente o se hace infinitamente pequeña y toma valores finitos, son, de acuerdo a la distinción de Cantor, reducibles a comportamientos finitos, por lo que representan elementos del infinito impropio, ya que esa variable en el infinito se comporta de acuerdo a las relaciones aritméticas del conjunto de los números enteros. Los números propiamente infinitos no actúan bajos las mismas reglas que *reinan en lo finito*.

A partir de estas distinciones, Cantor retoma la idea de potencia, con la cual ya había trabajado y presenta la manera en que esas potencias irán definiendo a esa secuencia de números transfinitos.

Conforme a este concepto, a todo conjunto bien definido le corresponde una potencia determinada, de modo que dos conjuntos tienen la misma potencia si se pueden coordinar uno con otro, elemento a elemento, biunívocamente (Cantor, 2006, p. 88)

Para el caso de los conjuntos finitos, el autor declara la equivalencia entre la potencia y la enumeración que surge de los elementos. Para los conjuntos infinitos en cambio, no tiene sentido hablar de enumeración, pero sin embargo, se puede determinar una potencia en función de la coordinación biunívoca de la que Cantor hablaba anteriormente.

Cantor demuestra que el conjunto de los números racionales es numerable y que el conjunto de los números algebraicos también es numerable. Clasifica los conjuntos en finitos, numerables y no enumerables. (Corzo, 2001, p. 409)

Si bien en esta sección del texto no hay demostraciones sino una presentación de lo que había hecho e iba a explicar en profundidad en otras secciones, se comenta brevemente que la primera potencia será la que se dará a los conjuntos coordinables con el primer conjunto numérico, el de los números naturales. Y que las subsiguientes potencias irán apareciendo de manera tal que cada una podrá ser distinguida de la anterior y de las siguientes.

Cantor demostró que un conjunto  $E$  no puede ser puesto en correspondencia biunívoca con el conjunto de sus partes  $\mathcal{P}(E)$  y por tanto el conjunto  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$  no puede ser puesto en biyección con  $\mathcal{P}(E)$  y así sucesivamente, es decir que dado un cardinal infinito siempre existe uno mayor y en consecuencia hay una infinidad de infinitos diferentes. (Corzo, 2001, p. 410)

Hasta aquí, lo que Cantor logra es caracterizar al infinito no como el resultado de lo finito cambiando, sino como un elemento con entidad, con existencia justificada por el uso previo a su definición, por su coherencia con lo ya existente y aceptado en un cuerpo de conocimiento. Si bien no encontramos aquí una definición de lo que es el infinito sino de los conjuntos infinitos y los números transfinitos, podemos encontrar un sustento para su entidad como objeto de conocimiento.

El viejo infinito de los números infinitesimales e infinitos simplemente fue reemplazado por el nuevo infinito de las colecciones o conjuntos infinitamente grandes. (Lavine, 2005, p. 51)

Creemos a partir del análisis que se acaba de presentar que hay dos infinitos que hay que distinguir y que responden, dentro y fuera de la matemática, a cuestiones diferentes: el infinito como distancia y el infinito como cantidad. Al primero llega Newton mirando el espacio, ese infinito es dinámico, tiene que ver con el movimiento, con el tiempo, con lo que se aleja... El otro, ese es el de Cantor y Bolzano y responde a ¿cuántos? en lugar de ¿hasta dónde? Este infinito, el de la cardinalidad, es estático, ese justifica la existencia de conjuntos que son en sí infinitos, y ese es el que veremos más adelante, se construye en la educación superior. Lo que nos preguntamos es: ¿es éste último el que nos permite entender las cuestiones relativas a los problemas que en las aulas se detectan en la enseñanza del cálculo? La idea de límite, de variación, descansa sobre un infinito, pero no es sobre el de Cantor y Bolzano, sino sobre el de Newton, que se mueve y nos muestra los cambios de lo que varía. El problema es que las funciones que llevamos a las aulas son funciones que responden a las definiciones conjuntistas de Cantor, cuestión que se analizará con mayor profundidad en el Capítulo 6.

Tenemos entonces un infinito que está quieto, que es el cardinal de un conjunto y que se construye en la educación superior. Ese es el que está formalizado y el que nos aseguran en nuestra formación como profesores que es el infinito matemático. Pero encontramos que ese infinito, que los futuros profesores han logrado construir, no es el que usan al momento de pensar en límites o en funciones. ¿Por qué? Porque en el aula no se precisa de ese último concepto sino aquel de Newton, el de quienes entendían a las curvas como representación de lo que cambia. Pero ese infinito no lo tenemos formalizado ni es elemento de construcción en la formación docente, menos aún en la escuela media. ¿Alcanzaría con hacerlo aparecer en las clases de cálculo? Creemos que no,

mientras se mantenga la aproximación que hacemos de las funciones en nuestros cursos. El cambio que necesitamos es mucho más profundo, el infinito no va a surgir sólo porque así lo pretendamos. Como todo, tiene que ser respuesta a una pregunta, idealmente, una pregunta que se hagan quienes pretendamos que lo construyan.

### **Las prácticas sociales asociadas al infinito**

El infinito se convirtió entonces, luego de los problemas que los matemáticos que con él trabajaron y tuvieron que enfrentar, en uno más de los muchos conceptos que hacen a la matemática, para el cual ya no es necesario hacer más aclaraciones, explicar sus peculiaridades ni tener “cuidado” con su naturaleza conflictiva y paradójica. Ha sido explicado a partir de una teoría bien fundamentada que hace de soporte a todo lo que es necesario darle sustento.

Para el matemático de hoy en día, el infinito es sólo un objeto más de la matemática: bien definido, contenido en una estructura axiomático-deductiva, cuyas operaciones y relaciones con otros objetos están perfectamente determinadas. Sin embargo, si el matemático puede trabajar hoy con el infinito de manera tan natural, es gracias a que al “matematizarlo”, ha renunciado al debate milenario sobre las múltiples significaciones, contradicciones y paradojas que han estado asociadas al infinito en la ciencia, la filosofía, la cosmogonía y la teología.  
(Waldegg, 1996, p. 107)

Como afirma Waldegg (1996), la matematización de este concepto ha permitido que no se tenga la necesidad de prestar atención a todos los problemas que el infinito ha provocado a las muchas ciencias que de él se han ocupado. Sin

embargo, en ese proceso de cientifización, se perdió lo particular del concepto, se perdió parte de lo que lo hacía fuerte e interesante para todas esas ciencias. Y es en esa pérdida que quedó oculto el problema que le dio origen, la pregunta de la cual fue respuesta. Se asume que es en la recuperación de esas preguntas que puede entenderse el porqué de su complejidad, y donde pueden encontrarse elementos para su construcción al seno de las escuelas medias.

La construcción de un nuevo concepto dentro de la ciencia no es lineal, no hace falta decir eso luego de haber revisado el ir y venir que llevaron a siglos de trabajo para lograr un infinito que se reconozca hoy como objeto matemático. Y sin embargo, pueden retratarse los procesos a través de dos herramientas de las que provee la socioepistemología y que resultan de gran valor para la sistematización del conocimiento: la práctica social y la práctica de referencia. Puede además agregarse una nueva herramienta descrita por Espinoza (2009) y cuyas características ayudan a comprender la funcionalidad de ese conocimiento en la realidad actual del discurso matemático escolar: el contexto de significación.

Se pueden identificar a lo largo de la historia dos procesos que van apareciendo alternadamente y que buscan dar respuesta a la misma necesidad: definir cuál es la extensión del espacio, o mejor dicho, modelizar el universo. Esa necesidad fue abordada desde Oriente y Occidente, y finalmente se llegó a esclarecer dicha extensión desde esas dos culturas, con el paso de los siglos. El Universo es infinito, pero el cómo es lo que da sentido a la diferencia que aún hoy encontramos en las aulas de matemática.

Se puede asegurar que es Newton el que primero llega a la afirmación de un universo infinito, a partir de la distinción que hace entre espacio absoluto y espacio relativo. Ese infinito del que Newton habla es el infinito físico, que existe en el espacio absoluto para que el otro espacio, el relativo, pueda existir. Lo que logra Newton con esto último es la matematización del espacio desde la

geometría, es decir, se construye la geometrización del espacio, logrando así que ese infinito de la física presente en la extensión real del universo, se transforme en el infinito de la matemática, vinculado al tamaño, lugar o extensión.

Nuestra visión actual del infinito en la matemática distingue dos acepciones: la primera está asociada a la ausencia de límites o de fronteras, a la falta de conclusión o de término de un proceso que se repite o que progresa indefinidamente. Bajo esta significación, el infinito es, literalmente, lo que no tiene fin, lo que siempre (infinito temporal) se puede continuar. A este tipo de infinito lo llamamos infinito potencial, es el único infinito aceptado por Aristóteles y es el único infinito admitido en la ciencia hasta el siglo XIX. [...] (Waldegg, 1996, p. 107)

Ese infinito relacionado con el movimiento, con la posibilidad de variar de posición un objeto a lo largo del tiempo sin que nunca llegue a un lugar donde deba detenerse, es el que puede asociarse con el infinito de la geometría y el estudio de las curvas al modo que Newton las concebía, y con el infinito del análisis, al modo en que está presente en el discurso matemático escolar actual. El contexto de significación en el cual se dan estas caracterizaciones del infinito, es el contexto del análisis, reconocido como una de las producciones en las cuales Newton tuvo más protagonismo. Lo que Newton necesitaba hacer era concebir y explicar el movimiento, poder medirlo, y para eso necesitaba un marco que le quitara los límites. Eso se lo dio el universo infinito otorgando a la matemática un nuevo objeto científico. Es la medida de movimiento, en particular la “noción de cantidad” lo que hace que se dé en la historia de la matemática otra construcción del infinito, una que es concebida desde las cantidades y que es la que ha inundado al discurso matemático escolar del álgebra superior de las instituciones formadoras de docentes en la Argentina. Esa construcción es la que realizó Cantor.

Cantor estaba también intentando realizar una tarea de modelización, no ya del universo sino de todo aquello que fuera conocimiento de las ciencias naturales a partir de un sistema conceptual formalmente matemático. Bajo esa idea, en la búsqueda de ese sistema, es que replantea la modelización del universo, pero no ya desde cuestiones relativas a la física, sino a las cantidades, noción que después de Newton se transforma en eje rector de muchos de los avances de la matemática (Camacho, 2004). Es en la matematización de esas cantidades, relacionadas con la extensión del espacio, que Cantor logra la definición de su infinito, el infinito de la matemática. Las cantidades de las que Cantor se ocupa se vinculan de manera directa con los números y con la acción de contar.

En la segunda connotación, el infinito está asociado a la idea de totalidad, de completez y de unidad. Un proceso (potencialmente infinito en sus orígenes) se considera ahora acabado y los límites, alcanzados. Esta es la forma en la que el matemático piensa hoy en el conjunto de todos los números, sin que tenga la necesidad de nombrar o pensar cada uno de ellos, individualmente. Este infinito se llama infinito actual y ha jugado un papel capital en el desarrollo de la matemática moderna, a partir de la teoría de conjuntos creada por Georg Cantor a finales el siglo XIX. (Waldegg, 1996, p. 107)

En ese contar, se pueden clasificar a las cantidades en contables, incontables, y aquellas que no pueden contarse por su propia naturaleza ontológica y no por la imposibilidad humana de llegar al final antes de que se le acabe el propio tiempo. Así como se dice en el párrafo anterior que Newton logra la geometrización del espacio, puede afirmarse que Cantor logra la aritmetización de las cantidades infinitas, construyendo así un infinito que responde a la noción de cardinalidad y a lo que se entiende es el infinito del álgebra, que se desarrolla dentro de ese contexto de significación.

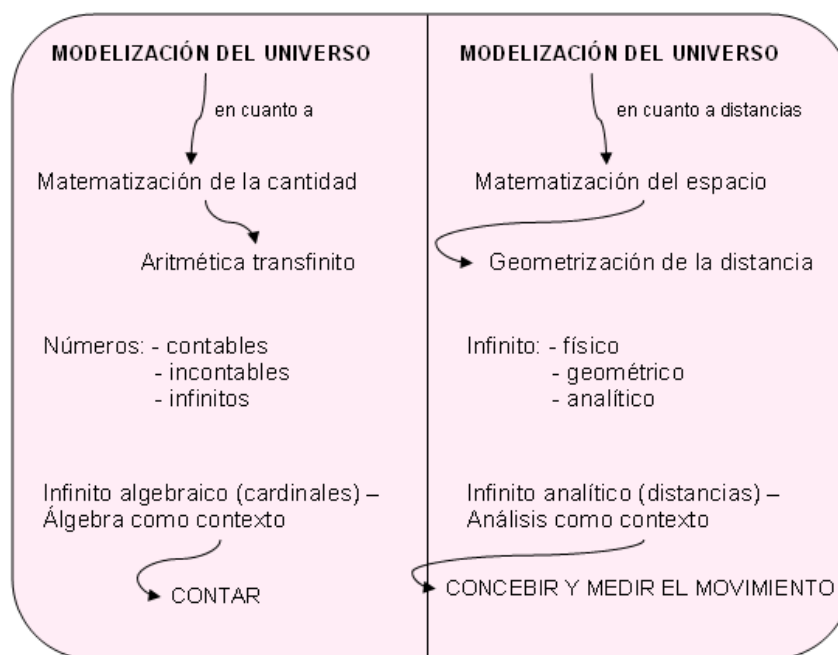


Figura 1 – Comparación del infinito algebraico y analítico de Cantor y Newton respectivamente

Bajo esta lectura hecha del desarrollo socioepistemológico del infinito a lo largo de la historia de la matemática pueden reconocerse algunos elementos que ya han sido mencionados con anterioridad:

- Para el infinito analítico, que es el que está presente en las aulas de escuela media, se reconoce:
  - o Práctica social: Geometrización del Espacio
  - o Práctica de referencia: Matematización del espacio (concebir el movimiento, medir el movimiento)
  - o Contexto de significación: el estudio de curvas (en ese momento), y el análisis matemático (en la actualidad)
  
- Para el infinito algebraico, el que se construye en los Profesorados, se reconoce:

- o Práctica social: Aritmetización de la Cantidad
- o Práctica de referencia: Matematización de la cantidad (contar cantidad de elementos, enumerar los elementos)
- o Contexto de significación: la aritmetización del infinito (en ese momento) y el álgebra (en la actualidad)

Estos dos infinitos, el del álgebra y el del análisis, son parte del discurso matemático escolar, aunque sólo uno de ellos es parte de lo que el discurso quiere construir, aquel que Cantor logró formalizar a través de su aritmética transfinita. El otro, el de Newton, aquel que permite entender las nociones de cálculo, aparece pero es ignorado, aún cuando es evidente que su presencia no transparentada es uno de los grandes problemas de la educación media actual.

Esta distinción entre el infinito del análisis y el infinito del álgebra puede entonces asociarse con el infinito potencial y el infinito actual, tal como se presentara a lo largo de la historia y como aún hoy aparecen en el discurso matemático escolar. Los problemas de aparición y construcción de cada uno, sin embargo, siguen estando presentes.

Según Waldegg (1996), las dificultades asociadas a esas dos formas de ver, entender y estudiar el infinito son una realidad compleja, que requiere de una atención de la escuela más profunda de la que en la actualidad se hace.

El infinito potencial bajo manifestaciones diversas aparece muy temprano, tanto en la evolución histórica de las ideas, como en el desarrollo intelectual del individuo. [...] Más tarde, a partir de las operaciones prácticas de medir, se llega a la idea de aproximación teórica que a su vez, prepara el camino para alcanzar la noción de

variación continua. Este infinito aparece muy pronto en el decurso del desarrollo conceptual sin que se manifiesten conflictos graves con la intuición, y permanece largo tiempo sin evolucionar. No hay experiencias escolares elementales que favorezcan un cambio a una nueva conceptualización. No hay tampoco –aparentemente– necesidades que las demanden. (Waldegg, 1996, pp. 107-108)

Se tiene entonces un infinito, que se construye naturalmente, que aparece temprano en la ciencia y en las culturas actuales, que no contradice lo que se piensa intuitivamente y que durante siglos fue el único aceptado. Pero a pesar de eso, la escuela no lo discute.

El desarrollo conceptual del infinito actual es bastante diferente: se manifiesta muy tardíamente y aparece siempre inmerso en situaciones conflictivas. [...] Pese a ello, no existe en los programas escolares – desde la escuela elemental hasta el fin de los estudios secundarios– ningún capítulo dedicado al tratamiento del infinito que prepare la unificación de ideas y operaciones, y la confrontación de aspectos intuitivos y formales. Continuamente se evitan situaciones que consideren como actual lo no-acabado o como terminada una operación que progresa al infinito. No existe, en suma, una preparación cognitiva para interiorizar el infinito actual. Circunstancias escolares mediocres e intuiciones equívocas, contribuyen a que la cuestión del infinito sea uno de los obstáculos más difíciles de superar en la enseñanza de las matemáticas; esta situación hace crisis en el momento de iniciar el aprendizaje del cálculo. (Waldegg, 1996, p. 108)

Se acuerda con Waldegg (1996) en que es la falta de confrontación la que provoca las crisis que se presentan en los cursos de cálculo. Sin embargo, se presenta en el siguiente capítulo evidencia de que, aún en los estudiantes de

Profesorado, con quienes se construye y confronta el infinito actual de acuerdo al trabajo de Cantor, existen serias dificultades para el tratamiento del cálculo. Se supone que no es sólo la no construcción del infinito actual lo que causa conflictos, sino la falta de consideración absoluta del infinito que interviene en el cálculo, de su significado, de las prácticas que lo han hecho emerger y de los contextos que le otorgan significado.

## **Capítulo 5**

### **El infinito desde la visión de los futuros profesores de matemática**

El proceso de construcción del infinito en la escuela, se ve influido por ideas intuitivas y extraescolares. Estas reaparecen en el aula dando origen a obstáculos epistemológicos que se ponen en evidencia al enfrentar ideas relacionadas al infinito escolar, las concepciones que tienen los estudiantes no siempre coinciden con lo que los docentes esperamos al referirnos al infinito matemático (Lestón, 2008). La investigación que se realizó para la tesis de maestría de referencia mostró que el infinito es un concepto que se construye inicialmente fuera de la institución escolar, siendo utilizado en la vida cotidiana para referirse a distintas cuestiones. Tiene existencia fuera de la escuela y aunque no corresponde de manera completa al infinito matemático que se utiliza en la clase de matemática, se relaciona con él. Por otro lado, la escuela utiliza el concepto de infinito pero no lo define ni caracteriza de manera explícita en los primeros contactos con los alumnos, ni siquiera en la mayoría de los cursos universitarios que lo utilizan. En la investigación mencionada, se hizo evocar las primeras ideas del infinito que tiene un niño a estudiantes de nivel medio. En las respuestas obtenidas, “la

mayoría evoca la búsqueda de dimensiones de grandes extensiones: el cielo, el mar, el espacio, el universo. Sólo una recuerda preguntarse por los números: cuáles es el último, dónde se acaban. Aparecen una vez más asociaciones directas a aquello que no termina o no puede asegurarse dónde termina, lo desconocido en su amplitud se considera infinito” (Lestón, 2008, p. 64). Según los resultados que se obtuvieron, el infinito que se construye fuera de la escuela se relaciona con aquello de lo cual no se puede asegurar dónde termina ni donde comienza, lo que no se puede medir ni contar; aún cuando se sepa que el final existe. Por otro lado, el infinito se relaciona con el amor, los sentimientos, la fe, distinto del infinito matemático. El infinito se asocia de manera tácita a cuestiones como sentimientos, grandes extensiones o tamaños (el mar o el cielo), grandes números (cantidad de granos de arena o de estrellas) o lugares distantes (horizonte).

Ya se ha afirmado con anterioridad en este trabajo que en la escuela no se realiza una construcción del infinito de manera sistemática, sino que el infinito construido fuera de la escuela y que posee carácter intuitivo, penetra en el aula de matemática y es utilizado en ella, como base para el abordaje de otros contenidos matemáticos, provocando en muchas oportunidades la presencia de obstáculos para la construcción de significados. Con la finalidad de comprender la manera en la que los profesores de matemática construyen el concepto de infinito matemático, se decidió analizar qué espacios dentro del Diseño Curricular del Profesorado de Matemática abordaban el estudio de este concepto. No es sino hasta Álgebra III que los estudiantes del Profesorado se encuentran con el infinito (Números Transfinitos en realidad) como contenido conceptual de sus programas. Lo que se estudia principalmente en este espacio curricular es el trabajo de Cantor a lo largo de un cuatrimestre, que junto con Teoría de Números son los contenidos de Álgebra III. En ningún otro espacio curricular de la carrera el infinito es considerado conocimiento que debe ser construido, si bien en Fundamentos de la Matemática se estudia su presencia en la matemática a través del análisis de los obstáculos a que dio origen a lo largo de la historia.

## **Indagación acerca de las concepciones de Bolzano y Cantor sobre el infinito y su presencia en el discurso matemático escolar**

Teniendo en mente esa situación, se decidió junto con la Profesora a cargo de la cátedra Fundamentos de la Matemática (ubicada con posterioridad a Álgebra III) aplicar a los alumnos un examen parcial domiciliario en donde los estudiantes pudieran analizar y comentar algunas de las cuestiones que tratan Bolzano y Cantor en los capítulos que se estudiaron en el capítulo anterior de esta tesis. El objetivo de aplicar esta actividad fue poder detectar cuál es en realidad la construcción que se logra y qué tan fuerte es el impacto por sobre las ideas construidas fuera de la escuela. Respondieron a la propuesta 15 alumnos, todos del mismo curso, las preguntas que se les realizaron. Sabiendo que la actividad correspondía a una instancia de evaluación de la materia, las respuestas que se obtuvieron resultaron reflexivas.

El cuestionario fue de preguntas abiertas, basadas en las lecturas de dos capítulos que se les dieron a leer a los alumnos:

- El Capítulo 1 de *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta* de Georg Cantor (2006) (pp. 85-88).
- El Capítulo 12 de *Las paradojas del infinito* de Bernard Bolzano (1991) (pp. 46-50).

Sobre esos dos textos, se les realizaron a los alumnos 4 preguntas de elaboración, que presentaron por escrito a su profesora y que se analizan a continuación.

Responde leyendo el Capítulo 1 de Cantor (2006):

1. a. ¿Qué tipos de infinitos distingue Georg Cantor en este texto? Define, caracteriza y ejemplifica lo expuesto por Cantor  
b. ¿Qué opinas de esta distinción? Explícala utilizando argumentos de la historia de la matemática y de la matemática involucrada en la misma.
2. a. ¿Cuáles de esos infinitos están presentes en la escuela, y en las instituciones educativas en general?  
b. ¿Cómo consideras que son construidos por los estudiantes?

Responde leyendo el Capítulo 12 de Bolzano (1991)

3. Bernard Bolzano discute algunas explicaciones de diversos autores en relación a lo que es el infinito. Compara éstas con la que da Cantor, analizando la naturaleza de los elementos que se discuten para fundamentarlas.
4. Las características de infinito que se critican en el texto de Bolzano suelen aparecer en la escuela. ¿Podrías pensar en otra forma de presentar el infinito en la escuela para que no cayera en ninguna de las críticas que hace Bolzano?

Cabe destacar que si bien el orden cronológico de la obra de Bolzano y de Cantor es el inverso al que aparece en el cuestionario, se presentaron las preguntas en este orden, pues el único referente teórico que conocían y manejaban los estudiantes en relación al infinito es la teoría de Cantor y por lo tanto, se apuntó a que comenzaran en esta actividad a identificar ideas que ya estudiaron previamente, para luego relacionarlas con otras que aunque anteriores, podían mirar a la luz de los conocimientos que poseen.

## Análisis de las respuestas

1. a. ¿Qué tipos de infinitos distingue Georg Cantor en este texto? Define, caracteriza y ejemplifica lo expuesto por Cantor

Los 15 alumnos reconocen que Cantor presenta en ese capítulo dos infinitos distintos: el propio y el impropio. Un alumno además agrega los “verdaderos números infinitos” como otro tipo de infinito. Estos son los tipos de infinito que Cantor describe en el texto seleccionado.

Las definiciones que presentan los estudiantes para el infinito impropio resultan parafraseo de la definición de Cantor en ese capítulo de su obra, todas relacionadas con lo finito variando y con la posibilidad de aumento o disminución irrestricto, que tiene justificación desde la ciencia y sus usos.

*El infinito impropio es aquel al que se le ha encontrado una aplicación justificada en la ciencia y ha sido utilizado para ella, ha aparecido principalmente en el papel de una cantidad variable que o bien crece más allá de todos los límites o bien se hace tan pequeña como se desee, pero siempre continúa siendo finita. Se presenta como algo finito variable. (Alumno 9)*

Para el caso del infinito propio, los estudiantes también caen en el parafraseo de las características y ejemplos que da Cantor.

*Con respecto al infinito propio, lo define como un infinito completamente determinado. Cita como ejemplo el estudio de una función analítica de variable compleja para la cual es necesario definir un único punto situado en el infinito (punto infinitamente distante pero definido). Puede verificarse que el comportamiento de la función en el entorno de ese punto es igual que en el entorno de otro punto cualquiera. (Alumna 11)*

En el caso del infinito impropio, podríamos decir que se lo puede identificar con el construido a lo largo de la historia de la matemática asociado a la práctica social de la geometrización del espacio y presentado con carácter dinámico relacionado con la variación, mientras que el infinito propio es mostrado con carácter estático.

La alumna que distingue además como un tipo de infinito distinto los “verdaderos números infinitos” dice al respecto de eso:

*Es la secuencia infinita de números claramente diferenciados unos de otros. Los verdaderos números infinitos serán también determinados como el infinito propio, pero ya no un sólo número infinito, sino una secuencia infinita de números claramente diferenciables que determinan un conjunto bien definido, los conjuntos infinitos, que permiten incluso operar con ellos. (Alumna 12)*

Este infinito es visto por Cantor en su carácter de cardinal y con la posibilidad de definir para él una aritmética en la que sea posible operar.

En relación con las características y ejemplos de los distintos tipos de infinitos que se les pedía en la segunda parte de la pregunta, las respuestas de otros alumnos resultan más interesantes:

## Infinito Impropio

*La noción del infinito impropio hace referencia a lo que hoy llamamos infinito potencial. [...] Se centra en la operación reiterada e ilimitada. [...] Fue trabajada en análisis, como el límite al que se tiende, o en geometría, por ejemplo, al concebir a la recta como subdivisibles de manera potencialmente infinita y con la posibilidad de “alargarla” cuanto se quiera hacia ambos sentidos. (Alumno 1)*

*Este concepto de infinito se pone de manifiesto en la idea euclidea de la recta: “siempre es posible alargar la recta hacia ambos lados y el proceso puede repetirse de forma indefinida, pero la recta continúa siendo finita”. También podemos encontrar esta concepción del infinito aplicada en el cálculo de límites. (Alumno 2)*

*El conjunto de los números naturales, infinito en el sentido de que siempre se puede obtener un elemento más grande que otro agregándole la unidad. (Alumno 7)*

*Al estudiar el número real y el concepto de límite aparece el infinito impropio. Weierstrass y sus continuadores dan a este proceso de paso al límite un tratamiento aritmético, que se reduce a establecer un sistema de desigualdades entre números finitos y de esta forma quedan establecidos rigurosamente todos los conceptos del análisis que se relacionan con este infinito. (Alumno 9)*

## Infinito Propio

*En cuanto al infinito propio, es algo determinado “que está allá”. En geometría proyectiva al considerar el punto impropio como punto en el infinito. (Alumna 12)*

*Cantor supone al infinito propio como un valor determinado, es lo que hoy llamamos infinito actual, es el infinito como una totalidad completa. (Alumno 1)*

*Este infinito tiene existencia como unidad y no es un proceso. Por ejemplo: el cardinal de los números naturales. (Alumno 2)*

*No se afirma solamente la posibilidad de extender la enumeración de los puntos de una recta sin límites, sino que se habla de colecciones de elementos dados todos juntos. Los miembros de estas colecciones se conciben como simultáneamente existentes (en la mente, por ejemplo). (Alumno 6)*

*Un intervalo cerrado  $[a;b]$  como conjunto infinito pero que tiene límite por ser un conjunto acotado. (Alumno 7)*

*El infinito algebraico que aparece en las proposiciones y enunciados detrás del símbolo  $\forall$  haciéndose presente mediante el proceso de abstracción. El procedimiento por el cual la Aritmética y el Álgebra justifican la legitimidad del uso del infinito, es el principio de inducción matemática. (Alumno 9)*

Estas respuestas obtenidas permiten caracterizar la naturaleza del infinito propio y el infinito impropio, no sólo en relación a su presencia en acto o en potencia sino a su aparición y tratamiento en distintas ramas de la matemática.

1. b. ¿Qué opinas de esta distinción? Explícala utilizando argumentos de la historia de la matemática y de la matemática involucrada en la misma.

En las respuestas de los alumnos, pueden distinguirse el reconocimiento de algunas ideas que no son habituales, como el estudio del infinito no naciendo en Grecia, sino en Oriente, en la India. Luego retoman las ideas de Aristóteles, las paradojas de Zenón y las que aparecen en la Edad Media y recorren el camino que los lleva a Bolzano y Cantor. Resultan de particular interés algunas de las ideas que surgen de esta mirada global del infinito.

*Podemos ver que hace mucho que está esta distinción entre los dos tipos de infinito y hoy en día se ven como dos caras de una misma moneda. Las líneas que definen a cada una están muy ligadas a la filosofía, pero pueden distinguirse según su utilización en la matemática.*

*El conocimiento de ambas permite la resolución de distintas situaciones. Necesitamos de ambas para poder comprender todos los fenómenos que involucran la noción de infinito.*

*Podemos comparar esta distinción con la que se nos enseñó sobre la naturaleza de la luz: la luz como onda y la luz como partículas en movimiento. Ambas sirven para explicar distintos fenómenos que no logran entenderse a la luz de una única concepción.*

*Puede ser que en esta misma línea de pensamiento terminemos tropezando con algunos rasgos del pensamiento oriental, en donde es necesario, para la comprensión total el conocimiento y comprensión total de ambas caras de la moneda. (Alumno 1)*

*Considero que es correcta esta distinción, entendiendo como infinito impropio al que estudiamos en Análisis Matemático I, en el cálculo de límites, la proximidad de una función a sus asíntotas, etc. Un ejemplo de infinito propio es, entre otros cardinales,  $\aleph$  (aleph) y  $\mathfrak{C}$  (cardinal de los números reales). (Alumno 4)*

*Cantor explicó la diferencia entre el infinito potencial y el actual; el primero se utilizaba en matemática en el cálculo y supone esencialmente la idea de variación, de crecimiento por encima de cualquier cota dada, pero se trata de una situación que nunca se considera como finalizada o completa. (Alumno 6)*

*Cabe pensar la distinción planteada por Cantor como el momento histórico de superación del concepto. Se pasa del miedo clásico de los griegos, al uso aceptado por la ciencia (en el caso del infinito potencial o impropio), para terminar con un infinito totalmente definido del que se pueden estudiar propiedades, sacar conclusiones e incluso comparar con otros infinitos diferentes. (Alumno 8)*

*En la actualidad esa distinción es usada, como Cantor lo predijo, de una manera natural (aunque incompleta), cuando se estudian conjuntos, como los números enteros o para estudiar el comportamiento de una función en un punto del infinito “muy grande” o “muy chico”. (Alumno 15)*

En la respuesta de la primera alumna que se presenta anteriormente se observa que identifica al infinito como un solo concepto que puede ser encontrado con distinta naturaleza en la matemática según las prácticas a las que ha sido asociado durante su construcción. En el resto de los estudiantes la diferenciación

se ve como estricta y aparecen como excluyentes en distintos contextos y no con la posibilidad de ser visiones construcciones distintas del mismo concepto.

2. a. ¿Cuáles de esos infinitos están presentes en la escuela, y en las instituciones educativas en general?

La mayoría de los alumnos encuestados reconocen que el infinito que está presente en la escuela tanto primaria como media es el que corresponde al infinito potencial o impropio, partiendo de lo finito cambiando hasta convertirse en lo infinito. El problema que detectan con esto es que aún así están en las escuela los problemas que ya se conoce aparecen frente al trabajo con las cuestiones relacionadas con el estudio de funciones, que según han dicho, requiere a ese infinito potencial.

*El infinito impropio está presente desde que nacemos. Ya en la escuela primaria, o para muchos chicos antes, el hecho de contar los enfrenta con el infinito impropio. En la escuela media los chicos conciben al infinito como número con el que pueden operar “cualquier número dividido infinito es cero”, y no como la idea de un todo acabado. Está presente cuando el docente explica la noción de límite y dice “bueno... me acerco tanto como yo quiero al cero, tomo números cada vez más chiquitos” o cuando afirma: “esta operación me da un número cada vez más grande, y si pongo un número más chiquito me da un número todavía más grande ¿cuánto me da entonces al final?” y los chicos responden (porque así les ha enseñado) “da infinito”. (Alumno 3)*

*Aparece en la escuela media la construcción, no siempre exitosa, de un infinito impropio, potencial, un infinito que en el fondo no deja nunca su condición de finitud, al ampliar los conjuntos numéricos a los números*

*reales, en las generalizaciones algebraicas, en las series, en los límites, etc. Al preguntar qué es el infinito a alumnos de escuela media, me encontré con respuestas como “todo aquello no se puede expresar”, “el dibujo  $\infty$ ”, “lo que pongo en los extremos de los ejes cartesianos”, respuestas tan alejadas del concepto que me hacen replantear la didáctica actual. Las respuestas me hacen pensar que los alumnos en un principio lo consideran como algo indefinido, por carecer de fin, límite o término, algunos lo ven como un símbolo ( $\infty$ ) para designar a algo que sigue o simplemente para operar con él. (Alumno 12)*

Se podría decir entonces que el reconocimiento que hacen estos alumnos es en relación a lo que la escuela necesita de acuerdo a los contenidos que en ella se trabajan, pero no lo que realmente se construye, principalmente porque no están aún completamente insertados en ese ámbito. La descripción que se hace es desde la mirada externa que asume que todo aquello que la matemática escolar necesita, los docentes lo llevan al aula para que los alumnos lo construyan. Sólo algunos tienen una mirada algo más crítica que les permite ver las fallas de los sistemas educativos en que se van a insertar.

*En geometría, cuando se les explica a los alumnos que la recta que dibujamos es sólo una porción de ella, y cuando afirmamos que la recta está compuesta por infinitos puntos, no vamos más allá de este concepto.*

*En análisis, cuando tratamos la noción de límite, estamos refiriéndonos a un valor al que nos acercamos al tanto como queremos, o consideramos algo que se hace tan grande como se quiere.*

*En conjuntos numéricos, exponemos que un conjunto es infinito pero puede que los chicos adopten una concepción potencial del mismo no pudiendo comprender la idea absoluta de un conjunto que es en sí infinito, sino la posibilidad de encontrar otro mayor que cualquiera dado,*

*o en caso de los racionales o los reales, otro valor entre dos cualesquiera. (Alumno 1)*

*En las escuelas está presente el infinito potencial, lo que se debe al arraigo que provoca su carácter intuitivo en la mente de los estudiantes, a la influencia generada por el trabajo con representaciones de figuras acotadas y a que la concepción que tienen sobre el infinito la mayoría de los docentes es la de infinito en potencia. (Alumno 2)*

b. ¿Cómo consideras que son construidos por los estudiantes?

La construcción que los futuros docentes reconocen por parte de los estudiantes es básicamente la que se construye desde fuera de la escuela, el infinito intuitivo, aquel que responde a muy grande, demasiado grande como para terminar de contar. Saben que la escuela no se dedica a construir al infinito como concepto y frente a eso, sólo se puede contar con lo que cada alumno trae desde antes.

*No es común que se tenga un tratamiento específico del infinito en el aula. El docente lo presenta en el aula ante la necesidad, apelando al conocimiento previo del alumno. No se tiene en cuenta cuál es la noción de infinito que trae el alumno, que en general es errónea matemáticamente.*

*El lenguaje humano tiene la característica de ser abierto y en algunos casos polisémico. De esta forma, se pueden utilizar los conceptos de manera poco precisa y aún así estructurar un argumento de manera que la idea central se comprenda y sea común a los interlocutores aún cuando se esté hablando de forma relativamente ambigua, esto es, no se da una definición precisa de los conceptos utilizados y cada interlocutor hace su propia lectura con base en su experiencia previa y*

*su bagaje cultural. Pero esta concepción de infinito que acarrear los alumnos hace que otros conceptos lleguen a ser difíciles de comprender debido a la falta de precisión. [...] Los estudiantes construyen estos conceptos en un contexto extraescolar y no formalizado, y en la escuela apelan a éstos frente a problemas que les plantea el profesor. No hay un tratamiento específico del concepto infinito ni una comparación profunda con las concepciones cotidianas que los chicos presentan. Al no funcionar sus ideas o al contrastar con las ideas del docente, no terminan entendiendo los conceptos que se explican en el aula.* (Alumno 1)

*Considero que los alumnos construyen el concepto de infinito proyectando el infinito cotidiano que se gesta en función de lo que culturalmente se comparte, en el infinito matemático.* (Alumno 2)

*Construimos la noción de infinito desde la experiencia: son infinitas las estrellas, los granos de arena, etc. No tenemos ningún problema con el infinito potencial, no contradice la realidad; todo aquello que es tangible cumple con el axioma euclídeo que dice que “el todo es mayor que sus partes”.* (Alumno 3)

En las respuestas obtenidas, se hace presente el reconocimiento de la aparición en la escuela del infinito construido fuera de ella que entra tácitamente en el aula de matemática y la no construcción explícita y de manera intencional del infinito matemático sobre la base de las ideas previas intuitivas.

3. Bernard Bolzano discute algunas explicaciones de diversos autores en relación a lo que es el infinito. Compara éstas con la que da Cantor,

analizando la naturaleza de los elementos que se discuten para fundamentarlas.

La mayoría de los alumnos reconocen que existen algunos elementos en común en los argumentos que se presentan en las obras de Cantor y Bolzano, aún cuando no llegan a las mismas conclusiones o construcciones. Logran comprender la presencia del infinito potencial como proceso en algunas de las definiciones que critica Bolzano y al infinito actual como objeto en otras. Se puede observar que les resulta bastante complejo acordar o criticar lo que plantea Bolzano, teniendo en cuenta que ellos formalmente han estudiado el trabajo de Cantor y por lo tanto, lo que desafíe de alguna manera lo que este último plantea es una contradicción con la única construcción formal que han logrado dentro de la institución que los prepara para enfrentar su futura tarea docente.

*Bolzano critica la definición del infinito como aquello que es más grande que cualquier cantidad dada, diciendo que si entendemos por asignable a lo no contradictorio, entonces, en la definición del concepto se sugiere que el infinito no existe. Parece ser contradictorio con la definición de Cantor del infinito actual pues el cardinal de los números naturales existe y es  $\aleph_0$ .*

*Bolzano critica la definición del infinito como una cantidad variable, cuyo valor se incrementa sin límite y puede sobrepasar cualquier cantidad dada, diciendo que una cantidad variable no es, realmente, una cantidad, sino el concepto, la idea de una cantidad, lo que comprende un conjunto infinito de cantidades diversas entre sí en cuanto a valor. Parece que su crítica contradice a la definición de Cantor del infinito potencial, ya que Cantor precisamente define al infinito potencial (o impropio) como una cantidad variable que o crece más allá de todos los límites o se hace tan pequeña como se desee. (Alumno 6)*

*La diferencia principal entre la concepción de infinito de Cantor y la de Bolzano es que, para Bolzano, existe un solo infinito (el potencial o impropio) y este es una idea o una forma de decir; mientras que para Cantor existen dos tipos de infinitos, el impropio y el propio (y dentro del propio existen distintos tipos de infinitos) siendo más real y más determinado el infinito propio. (Alumno 9)*

*Al analizar la primera explicación de infinito que defienden autores como Cauchy, al describirlo como una cantidad variable que se incrementa sin límite y puede sobrepasar cualquier cantidad dada, independientemente de la magnitud de ésta, parece obvia la relación con el infinito impropio de Cantor, pero a la luz de la crítica de Bolzano las cosas no se ven tan claramente. Bolzano afirma que en realidad la explicación citada hace referencia no a una cantidad sino a la idea de cantidad, lo que lleva a la comprensión no sólo de una cantidad dada sino también de un conjunto de cantidades, y en este sentido difiere del infinito impropio de Cantor. (Alumno 12)*

Puede observarse que en la visión de los estudiantes, el infinito que caracteriza Bolzano, es visto como algo que no posee el mismo nivel de evolución que el de Cantor, más bien piensan al de Bolzano como una etapa previa en la construcción del infinito que ellos estudiaron en Álgebra III, una etapa intermedia, no una construcción que posee distintos puntos de partida.

4. Las características de infinito que se critican en el texto de Bolzano suelen aparecer en la escuela. ¿Podrías pensar en otra forma de presentar el infinito en la escuela para que no cayera en ninguna de las críticas que hace Bolzano?

Esta pregunta resultó ser la que más dificultades presentó. Si bien en las anteriores se puede reconocer la manera en que los alumnos distinguen los usos y presencias del infinito como proceso y objeto en la escuela, la complejidad del tratamiento de ellos y de sus definiciones; al momento de pensar que hay que hacer en la escuela caen en la necesidad de llevar al aula el infinito propio que define Cantor a través de los cardinales, aún cuando ellos mismos han dicho que ese no está en la escuela y no es necesario que ahí aparezca. Son pocos los que reconocen que lo importante es profundizar el sentido del infinito presente en las cuestiones relativas al cálculo y proponen algo desde ese lugar.

*Presentaría el concepto de infinito desde el punto de vista conjuntista. Comenzaría con la suposición de que la cantidad de elementos del conjunto de los naturales es  $\aleph$  y a partir de ahí, con una idea intuitiva de bisección, mostraría que el conjunto de los naturales tiene el mismo cardinal que el de los naturales pares o impares, es decir, que un conjunto infinito puede tener el mismo cardinal que un subconjunto propio. Luego propondría algunos ejercicios que involucren operaciones del tipo  $\aleph + 1$ ,  $\aleph + \aleph$ . (Alumno 2)*

*En el caso del infinito, podemos entender que los alumnos presenten menos dificultades para admitir que el total de los números naturales es infinito, o hasta que los puntos de una recta son infinitos. Pero al iniciarse en el estudio del cálculo es donde empiezan a surgir los inconvenientes más marcados. Sería importante tratar de iniciar un análisis particular sobre el infinito antes de iniciar los conceptos clásicos de límite y derivada. Plantearles a los alumnos las paradojas que surgían ante el análisis de cuestiones que incluyen al infinito. Y hasta, por qué no, algunas definiciones que presentaron algunos matemáticos y quizás compararlas con alguna dada por algún alumno. Tratar de traer al aula las concepciones ordinarias que tienen los alumnos del concepto*

y llevarlas a debate. No podemos afirmar ni plantear a modo de regla que  $a/0=\infty$  ó que  $a/\infty=0$ , porque caemos en la concepción errónea que marca Bolzano, del infinito como un valor singular, y los chicos toman al símbolo  $\infty$  como un número y así lo utilizan. Por otro lado, plantear al límite en el infinito es lo que acarrea más inconvenientes porque:

- Se lo compara con la idea de límite de variable finita como “el valor al que me acerco tanto como quiero”, pero el infinito no es un valor fijo.
- Entra en juego la concepción que los alumnos traen del infinito como “algo muy grande” y no se termina de comprender la “inagotabilidad” del proceso de límite.

Y como apreciación personal y final, puedo agregar que la idea gráfica de límite es una gran ayuda para que los alumnos capten la esencia del concepto de límite en el infinito, tratando de lograr un puente entre los gráfico y las cuentas. (Alumno 1)

Luego de presentar al infinito por varios caminos, y para facilitar su uso, acordaría con los alumnos que el infinito que nosotros utilizamos en la escuela es una forma de decir o una idea. Por ejemplo: un conjunto es infinito si puedo tomar un subconjunto de él que tenga tantos elementos como quiera. Una función tiende a infinito en un punto si al acercarme tanto como quiera al punto puedo hacer que la función supere cualquier valor prefijado. Entre dos números racionales distintos hay infinitos números racionales, porque se pueden construir tantos racionales que estén entre ellos como se quiera. (Alumno 9)

Primero, trabajar la idea de infinito intuitivo que trae el alumno. Segundo, graficar con ayuda de la computadora una función holográfica, previa confección de una extensa tabla de valores donde puedan observar qué le pasa a la función cuando la variable  $x$  toma

*valores muy grandes, valores muy pequeños y en un entorno del punto donde se encuentra la asíntota vertical. Tercero, compartir con ellos la paradoja del Hotel de Hilbert. [...] Cuarto, trabajar la biyección entre los números naturales con los pares y luego con los impares para que puedan reconocer que en los conjuntos infinitos el todo puede ser igual a una de sus partes. (Alumno 11)*

Se entiende que es la Teoría de Cantor lo único que formalmente se estudia con relación al infinito en el Profesorado, entonces no resulta casual que sea esa propuesta la que da mayor seguridad a los futuros docentes, aún cuando no puedan justificar la decisión de llevar esto a la escuela media y cuando hayan reconocido que esa teoría que permite el tratamiento de los conjuntos infinitos no aporta demasiado a los problemas que aparecen en el cálculo o en la geometría, que son los temas que más se mencionan relacionados con el infinito en la escuela media.

### **Algunas consideraciones finales en relación a la visión del infinito de los futuros docentes**

Resulta evidente que la Teoría de Cantor, que curricularmente es la instancia en la cual el futuro docente se acerca formalmente al tratamiento del infinito impacta de manera innegable. En un sistema formal y riguroso como el argentino, tener una teoría bien fundamentada que nos permita ver el por qué de la complejidad de lo que no podemos manejar, hace que sea imposible esperar que los estudiantes reconozcan las limitaciones de las definiciones y el trabajo de Cantor, no limitaciones para lo que él hace sino para lo que el discurso matemático escolar requiere. La única construcción formal e intencional que se hace en el discurso matemático escolar del profesorado corresponde a la visión cantoriana del infinito,

y por lo tanto basada en la práctica de referencia de matematizar las cantidades y a la práctica social de la aritmetizar de las cantidades, como se ha visto en el capítulo anterior. Por ello que es desde esa construcción que intentan explicar al infinito y a su introducción en la escuela.

Los futuros docentes pueden entender lo que Cantor hizo, pueden conectarlo con los que ocurrió en la historia, pueden comprender que los alumnos que llegan a las escuelas ya traen sus ideas y esas son las que se usan en las aulas, aún cuando poco tienen que ver con lo que la matemática necesita. Sin embargo, les resulta difícil ver cómo pueden enfrentarse a eso.

La confrontación con las afirmaciones de Bolzano los hace dudar, los hace replantearse qué es lo que realmente construyeron en relación a la Teoría de Cantor, pero al momento de pensar cómo llevar al aula al infinito, vuelven a apoyarse en Cantor. Porque es desde ahí desde donde pueden definir sin dudar, donde pueden apoyarse sin miedo a equivocarse. La idea que tienen de lo que es el rol docente hace que no puedan aceptar que van a equivocarse, que van a dudar, que van a decir cosas que no son totalmente correctas. La formación docente en la Argentina tiene muchas fallas, pero lo que se entiende como la peor es la que hace creer al estudiante de profesorado que lo que dice en el aula es verdad revelada, que la ciencia que ellos presentarán es **la ciencia** y que la duda o el error es lo que hace a un mal docente. No es raro escuchar el relato de los estudiantes que hacen sus residencias en los cuales plantean que el único motivo por el cual un alumno desaprueba su residencia es por tener “errores matemáticos”, como si sólo eso fuera lo que hace a un buen docente. Una de las profesoras de prácticas docentes que más reconocida era dentro de la institución usaba una frase para dar ánimos a sus practicantes que decía “si no pueden convencerlos, confúndalos”.

Frente a esa realidad y a esa manera de entender la educación, la escuela y la matemática, consideramos que no es casual que los alumnos propongan llevar a la escuela lo que les da seguridad desde el punto de vista matemático; aún cuando ellos mismos puedan declarar que no es esa la aproximación que ayuda para la escuela media.

### **Las representaciones sociales del infinito en alumnos del profesorado en matemática**

A partir de los resultados de la etapa experimental anterior, surgió la necesidad de indagar acerca de cómo es visto el infinito por parte de los futuros profesores de matemática, de conocer cuáles son las representaciones sociales que han construido y si son consistentes con la manera en la que el infinito se presenta en el aula.

La idea básica en la teoría de las representaciones sociales es que cada uno construye una representación de un concepto de manera social, o sea que la manera en que se construye conocimiento tiene relación directa con lo que ese elemento del que se está construyendo una representación significa para la comunidad de la que es parte el individuo que construye; así como la manera en que se construye está determinada por la comunidad (Abric, 2001). Esta teoría nace dentro de la Psicología Social. Tomando herramientas de esta última, como los cuestionarios abiertos y la evocación de palabras, es posible acceder a nociones cognitivas en las que lo social tiene gran influencia en su construcción, como el infinito en este caso.

Se utilizaron entonces cuestionarios abiertos y de evocación de palabras, para conocer las características de las concepciones que sobre el infinito y el infinito

matemático tienen estudiantes de la carrera de Profesorado de matemática en los últimos años de su carrera.

Se les pidió a un grupo de alrededor de 30 estudiantes de 3° y 4° año de la carrera de profesorado de matemática, primero que evocaran términos asociados con la palabra infinito, luego se hizo lo mismo en relación con el infinito matemático. Finalmente se les pidió que definieran al propio infinito matemático. La idea de referirse a este concepto se orienta a detectar si al hablar de infinito, es asociado al infinito intuitivo o al infinito matemático, influyendo de esa manera su formación académica.

La idea de recurrir a técnicas de la teoría de las representaciones sociales como herramienta de la socioepistemología, como ya se ha explicado previamente, se fundamenta en intentar comprender las causas por las que en algunas ocasiones, en el aula no se presentan los resultados esperados, por el surgimiento de ideas erróneas y no esperadas que persisten y se sustentan en concepciones que tienen cierta estabilidad y que deben ser tomadas en cuenta pues “de lo contrario se mantienen y el saber propuesto se desliza y no ‘impregna’ a los estudiantes” (Giordan, citado por Sánchez Luján, 2009, p. 57). Intentamos analizar la presencia o no de esa estabilidad en el caso del concepto de infinito.

Para el análisis de los resultados obtenidos, se decidió identificar en las respuestas obtenidas ideas según las cuales se pudiera inferir que la idea de infinito (o infinito matemático) es asociada a una cantidad, un lugar, un tamaño o simplemente una forma de decir, de acuerdo con las concepciones y caracterizaciones que hemos descrito anteriormente al analizar las ideas que surgieron a lo largo de la historia en relación a este concepto. El mismo tipo de agrupación de ideas se realizó a partir de las definiciones de infinito matemático presentadas.

A partir de las evocaciones de palabras obtenidas en relación al **infinito**, el 30% de las ideas que surgieron y la frecuencia de las mismas en los estudiantes, se relacionan con cantidades o números, el 30% con lugares, el 40% con tamaños y no se presentaron evocaciones que lo asimilen a una forma de decir. Algunas de sus expresiones se presentan en la Tabla 1.

| Cantidad                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Lugar                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Tamaño                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Forma de decir |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Número tan grande como se quiera</li> <li>- Cantidad grande</li> <li>- Incontable</li> <li>- Números muy grandes</li> <li>- Cantidad de elementos que no puedo contar</li> <li>- Todas las cosas que existen en el universo</li> <li>- Que no se puede contar</li> <li>- No se puede enumerar</li> <li>- Entre dos siempre hay otro</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Algo muy lejano</li> <li>- Distancia muy grande</li> <li>- Tan lejano como se quiera</li> <li>- Distancia grande</li> <li>- Inalcanzable</li> <li>- Algo inalcanzable</li> <li>- Que está muy lejos</li> <li>- Muy distante</li> <li>- No se puede alcanzar</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Conjunto grande</li> <li>- Sin principio ni fin</li> <li>- Sin límites</li> <li>- Sin terminación</li> <li>- Es inmenso</li> <li>- Que no tiene extremo final</li> <li>- Muy grande</li> <li>- Muy largo</li> <li>- Sin fin</li> <li>- Algo muy grande</li> <li>- No se termina</li> <li>- Inmenso</li> </ul> | -----          |
| <b>30%</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>30%</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>40%</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                |

Tabla 1. Análisis de las representaciones del infinito dadas por estudiantes de profesorado de matemática

Debe tenerse en cuenta que en las tablas que se presentan se han enumerado algunos de los términos y palabras que fueron evocados por los estudiantes, sin embargo la cantidad de palabras distintas que evocaron no coincide con los porcentajes de estudiantes que las utilizaron. Algunas aparecieron con mucha mayor frecuencia que otras. Para comprender cuáles fueron las representaciones más frecuentes, es más claro tener en cuenta el análisis cuantitativo en relación a los porcentajes.

En relación al **infinito matemático**, los términos evocados dieron por resultado un 53% relacionados con cantidades, 9% se relacionan con la idea de lugar, 9% con tamaño y 29% con considerar el infinito como una forma de decir, tal como afirmara Gauss. Algunas de sus expresiones se presentan en la Tabla 2.

| Cantidad                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Lugar                                                                                                                                                | Tamaño                                                                                                                | Forma de decir                                                                                                                                                                                                                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Puntos en el plano</li> <li>- Puntos en la recta</li> <li>- Conjunto de números reales</li> <li>- Numerabilidad de un conjunto</li> <li>- Número con tantas cifras como quiera</li> <li>- Cantidad de números en la recta real</li> <li>- Cardinal de un conjunto</li> <li>- Cantidad de rectas que pasan por un punto</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Sin límite (acercamiento)</li> <li>- Lo inalcanzable</li> <li>- Intersección de rectas paralelas</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Recta R</li> <li>- Algo no acotado</li> <li>- Línea recta o curva</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Límite</li> <li>- Símbolo</li> <li>- Sucesión que diverge</li> <li>- <math>\infty +</math></li> <li>- <math>\infty -</math></li> <li>- Variable que tiende a un valor muy grande</li> </ul> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |           |           |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-----------|------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Dominio de una función</li> <li>- Conjunto R</li> <li>- Conjunto N</li> <li>- Búsqueda del valor más grande</li> <li>- Números</li> <li>- Los distintos infinitos (transfinitos)</li> <li>- Conjuntos numéricos</li> <li>- Conjuntos del mismo cardinal</li> <li>- Serie de números que no termina</li> </ul> |           |           |            |
| <b>53%</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <b>9%</b> | <b>9%</b> | <b>29%</b> |

Tabla 2. Análisis de las representaciones del infinito matemático dadas por estudiantes de profesorado de matemática

Al solicitar a los estudiantes que propusieran una definición **de infinito matemático**, no lograron definiciones, sino que surgieron ideas relacionadas con las posibles caracterizaciones de este último. Al agrupar esas ideas en el análisis, se observa que el 55% de ellas se orientan a la consideración de cantidades grandes, 9% lo relacionan con lugares, 9% con tamaño y 27% con una forma de decir. Si se comparan estos porcentajes con los obtenidos a través de las evocaciones obtenidas a partir del infinito matemático, podemos afirmar que son casi coincidentes. En la Tabla 3, pueden leerse algunas de las ideas surgidas.

| Cantidad                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Lugar                                                                   | Tamaño                                                                             | Forma de decir                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Forma de representar un valor máximo alcanzado por algún conjunto o totalidad</li> <li>- Cantidad de elementos de un conjunto</li> <li>- Conjunto del que siempre existe un elemento más</li> <li>- Lo más grande</li> <li>Infinito de Cantor</li> <li>Relación entre dos conjuntos</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Visión de lo lejano</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Lo que no termina ni tiene fin</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Límite de una función</li> <li>- No finito</li> <li>- Tiende a algo grande</li> </ul> |
| <b>55%</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>9%</b>                                                               | <b>9%</b>                                                                          | <b>27%</b>                                                                                                                     |

Tabla 3. Análisis de las representaciones asociadas a las definiciones de infinito matemático dadas por estudiantes de profesorado de matemática

### **Algunos comentarios finales acerca de las representaciones sociales del infinito en los futuros docentes**

Los estudiantes que intervinieron en esta investigación respondiendo a las preguntas que se les formuló para acceder a las representaciones sociales que poseían acerca del infinito y del infinito matemático, se encuentran ya finalizando su carrera de profesorado de matemática. Por ello se esperaba que su concepción acerca del infinito se encontrara próxima a la del infinito matemático. Sin embargo, a través de sus respuestas es posible observar que el infinito intuitivo, de origen no académico tiene aún presencia en sus representaciones.

Se observa que los alumnos de años superiores del profesorado no logren producir una definición para un concepto que conocen desde la infancia, y sobre el cual han construido conceptos y estudiado varios semestres en el profesorado. Sin embargo, esas dificultades pueden comprenderse si se vuelve a la evolución histórica del concepto que hiciéramos en el inicio: siglos de producción científica, de confrontaciones y de negaciones tuvieron que pasar para que la comunidad matemática aceptara el trabajo de Cantor, que finalmente explica cómo debemos trabajar con los conjuntos infinitos y justifica la existencia de los números transfinitos.

Las ideas de cantidad, lugar, tamaño y forma de decir, son las que hemos identificado a lo largo de nuestro estudio epistemológico del concepto, esas mismas categorías son las que podemos detectar en nuestras aulas. Aristóteles y Proclo podrían hacernos pensar en cantidades y tamaño, Demócrito, Leucipo y Arquitas nos sugieren las ideas de las distancias o lugares, y no es sino hasta Gauss, Descartes y Cauchy, en que se piensa en el infinito como algo separado de las cantidades, algo que hay que tratar con cuidado, que lleva a confusiones, y que no debería considerarse sino como “forma de hablar”, en donde se ve que la intuición es mala guía dentro de la ciencia cuando se analizan conceptos de naturaleza tan peculiar. No es sino hasta Bolzano que se inicia el tratamiento conjuntista del infinito, que finalmente es el que nos lleva hasta Cantor y que es el que tenemos en los planes de estudio de nuestros Profesorados. Y aún así, el 45 % de nuestros alumnos no recurren a esas ideas para definir el infinito matemático.

Evidentemente, las representaciones construidas en la infancia, fuera de la escuela, las adquiridas socialmente, se mantienen por sobre aquellas impuestas en la escuela por el discurso matemático escolar. Si entendemos, como plantea la socioepistemología, que el conocimiento es socialmente construido, debemos

preguntarnos si nuestras aulas y discursos propician escenarios para que ocurra esa construcción.

### **Sobre la visión de los futuros profesores de matemática del infinito**

El infinito es, en la actualidad, una necesidad escolar. No podemos pensar en un programa de estudios de ningún grado de la primaria ni curso de la secundaria en donde no esté de por medio este concepto. Pero vemos a diario que nuestros futuros docentes no pueden enfrentarlo, no saben manejarlo, y seguramente repitan en sus clases los errores de sus propios formadores. Si el resultado de la investigación en Matemática Educativa es el impacto en el sistema educativo, es necesario que miremos sistémicamente nuestras aulas y nuestras clases y encontremos lugares por donde iniciar la reconstrucción del discurso. Para nosotros, el infinito surgió como elemento de discusión por la mirada de la realidad del aula. Pero seguramente haya muchos otros conceptos que es necesario empezar a investigar para cambiar a una escuela que en este momento es, cuando mucho, reproductora de conocimientos.

A través de las experimentaciones reportadas en este capítulo, fue posible verificar la influencia que posee para los estudiantes de profesorado que el único acercamiento formal del infinito que vean en su carrera sea el que corresponde a Cantor y por lo tanto a la visión del infinito en acto y orientada a la cardinalidad de conjuntos. Para ellos esta presentación, realizada desde un contexto de significación algebraica, es muy fuerte y les hace considerar que es la única y por lo tanto que la construcción en un contexto de significación analítico es incompleta. Esto se pone de manifiesto en los intentos de esbozos de propuesta didáctica de introducción al infinito que proponen para el aula, basados en

cardinalidad de conjuntos y en el predominio en sus representaciones sociales de ideas asociadas a la cantidad respecto al infinito.

Por otra parte, en relación al infinito impropio, reconocen su presencia en la escuela con mayor frecuencia que el infinito propio. Considerando los contextos de significación del infinito, podríamos decir que aquel en el cual su visión es más frecuente es el del análisis por encima del algebraico, aunque en pocos casos reconocen a ambos como contextos de significación del mismo concepto matemático.

Retomando esta última idea, es que nos proponemos a continuación realizar un análisis de la presencia del infinito en las funciones, tanto a través de la historia en el discurso matemático como en el discurso matemático escolar actual.

## **Capítulo 6**

### **La función como concepto medular en el discurso matemático escolar actual**

En la introducción de esta investigación se afirma que el infinito es un concepto que recorre a toda la matemática escolar, esta realidad es innegable. Desde pequeños, los alumnos conviven con un discurso que incorpora esta noción dentro y fuera de sus clases. Sin embargo, en esas edades, este concepto no se transluce como algo conflictivo dentro de las instituciones educativas.

De hecho, esa noción de “muy grande” sirve dentro y fuera de la escuela. La recta se extiende hasta donde uno quiera, seguimos contando hasta cansarnos y aún así no habremos terminado, las estrellas, los granos de arena y el amor son tan grandes que parecen infinitos, y si los alumnos afirman sin dudar su infinitud, ninguna maestra se atrevería a discutirlo, porque se entiende, porque alcanza, porque esa noción es suficiente y funcional al discurso matemático escolar de los primeros años de escuela.

Sin embargo, en algún momento esas ideas dejan de ser funcionales, dejan de ser suficientes y se convierten en verdaderos obstáculos, que tratamos de tapar porque aunque las veamos no sabemos qué hacer con ellas. Entendemos que uno de los momentos claves en que empiezan a ocurrir estos problemas es cuando aparecen las funciones en la escuela.

La realidad es que el concepto de función incorpora al aula una serie de nociones que son de una complejidad indiscutible, y sin embargo la escuela las trata como si fueran tan evidentes que es innecesario plantearlas. “¿Unimos los puntos de la tabla cuando los pasamos al gráfico?”, “Sí, unílos, porque lo del medio también sirve”. Y con eso echamos por tierra la definición de continuidad. “¿En la imagen ponemos lo que vemos?”, “No, porque lo que ves es la parte que dibujaste vos, pero la parábola sigue hasta el infinito”. Y nos deshicimos de la dura tarea de discutir que es el  $\infty$  atrás de  $[-1; \infty)$ . Empezamos con estas cosas, al menos en Argentina, cuando los alumnos tienen 14 ó 15 años, y luego, cuando llegan a sus 17 ó 18 nos escandaliza que no puedan entender el significado de  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ .

¿Alguna vez se los dijimos? ¿Alguna vez los dejamos preguntar y discutir y rebatir nuestras ideas y concepciones sobre el infinito, sobre la continuidad, sobre la infinitud de una gráfica o de una función? ¿Alguna vez nos animamos a decirles algo sabiendo que no nos van a entender simplemente para que comprendan que no todo lo que hacemos y proponemos adentro de nuestras aulas está cerrado, terminado, predigerido y envuelto para que ellos lo compren, con los ojos abiertos y sin un dejo de duda en sus cabezas? Presumimos que no, y desde ahí es donde empezamos a tratar de reorganizar un discurso que oculta la naturaleza de los conceptos que en él se tratan y buscar una manera un poco más natural y menos arbitraria de hacer que nuestros alumnos logren construir una aproximación menos contradictoria de infinito matemático.

## El concepto de función

Dentro del sistema educativo argentino, el tratamiento de las funciones se introduce en el discurso matemático escolar alrededor del segundo o tercer año de escuela media (cerca de los 14 años). Por lo general, la introducción se hace desde problemas, tablas, gráficas o fórmulas, intentado mostrar cómo las funciones representan en diversos registros cuestiones relativas a la modelización. Sin embargo, la estructura formalista y rigurosa de la matemática escolar argentina hace que en algún momento se formalice esta noción y que se llegue eventualmente a una definición más o menos similar a la siguiente:

Se dice que  $f$  es una función definida en un conjunto  $S$  de números reales si a cada punto  $x$  de  $S$  se le asocia un único número real que denotamos por  $f(x)$ . (Durán, 1996, p. 43)

Esta definición, presentada de esta manera, o incluso de manera simbólica, llega al aula para mostrarle al alumno que lo que venía entendiendo que era una función tiene reglas y estructura y que no se puede hablar de manera tan airosa de algo tan serio como son las relaciones funcionales. Las características de esta definición, válida desde la matemática, correcta desde la ciencia, no hacen más que ocultar detrás de ella toda una construcción de conocimiento que permitió que se lograra.

Esa misma construcción, que en numerosas investigaciones se ha dicho debe ser llevada al aula (Cantoral y Montiel, 2001; Cordero, 2008, Suárez, 2008; Rosado, 2004) creemos que ha ido avanzando en paralelo con la construcción del infinito como una noción matemática, emparentada con muchas de sus idas y vueltas y surgidas, en muchos casos, de las mismas cabezas.

Es necesario entonces recuperar lo que las funciones intentaban representar inicialmente. Si se acepta que es ésta una de las herramientas más importantes de la matemática como ciencia que describe el funcionamiento del mundo, es necesario volver a esos problemas o necesidades que le dieron origen. Si es en el estudio de curvas donde se afirma que Newton comprende al infinito como un concepto matemático, con entidad dentro de la estructura científica, entonces es indiscutible la importancia de entender lo que Newton estaba tratando de hacer con esas curvas. Para eso, se requiere de una mirada anterior a lo que se quiere observar, para entender la evolución del concepto y ver cómo en esos cambios se encuentran los elementos que le dan sentido.

Las primeras evidencias de lo que hoy conocemos como funciones, pueden rastrearse en la antigüedad, y en los mismos pueblos de los cuales nacen las primeras nociones de infinito.

Así, los babilonios emplean el concepto de función construyendo tablas para facilitar operaciones aritméticas; los griegos, trabajando con proporciones, o, estableciendo relaciones entre medidas de las cuerdas en un círculo; los Hindúes, utilizando colores para denotar los números, etc. Durante este período, el concepto era utilizado en la práctica y no se tenía de él ningún tipo de formulación. (Mora, 2006, p. 23)

Conservamos en las aulas el trabajo con tablas, aunque partiendo de una representación, por lo general asociada a una ecuación, que en la antigüedad no se tenía. Sin embargo, la idea de variable, no se evidencia en esa época.

Según Durán:

Fue importante en relación con el nacimiento del concepto de función el interés que en aquella época suscitó el estudio del movimiento. Este interés queda reflejado en los trabajos de Kepler sobre el movimiento planetario, o en los de Galileo sobre dinámica. Fruto de esos estudios eran unas leyes físicas que se expresaban como una dependencia entre cantidades variables. Justamente en esta idea de dependencia de cantidades variables se encierra la esencia de un primitivo concepto de función. (Durán, 1996, p. 45)

Pero anterior a lo que se plantearon Kepler y Galileo en el siglo XVI, pueden encontrarse nociones que llevan a la noción de función, en particular en el trabajo de Nicolás de Oresme, quien plantea: *“Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento”* (Durán, 1996, p. 45)

Estos nombres son los que aparecen en el capítulo destinado a estudio epistemológico del infinito, y aparecerán aquí también los que ahí ya han sido mencionados, porque resulta ser que de estos últimos surgieron estas ideas que tantas investigaciones han suscitado. Y eso debe ser por algún motivo...

¿Cómo se llegó desde esa primera noción de función a la que mencionamos al inicio? Es necesario pensar en lo que provocó la aparición de la geometría analítica a mediados del siglo XVII en el trabajo de Descartes, con lo cual se logra la asociación de una curva con una ecuación algebraica (Durán, 1996).

Descartes amplía el dominio de las curvas y las acepta también como aquellas que se pueden escribir mediante una ecuación. Es indudable que la representación mediante signos de las cantidades variables y de

las operaciones, facilitó un cambio ontológico en el álgebra, que pasó de ser un campo de la matemática referido a los procesos para encontrar incógnitas, a ser, en una nueva visión, el estudio de las relaciones entre cantidades que cambian, y sus operaciones (Mora, 2006, p. 24)

Este cambio, si bien de un aporte innegable para el posterior desarrollo del cálculo infinitesimal, provocó que se perdiera la sensación de algo que se mueve asociado a la curva entre cosas que varían y se comenzara a pensar en algo acabado, representado prolijamente con una ecuación, que de manera sucinta representa todo lo involucrado en ese proceso.

Si bien luego de Descartes otros matemáticos continuaron hablando de cambios o variaciones, pronto la palabra variable reemplazó a la variación, de manera tal que algo que es variable dejó de comprenderse como aquello que cambia, y comenzó a entenderse como lo que puede tomar todos los valores que se puedan pensar, pero todo hecho en el mismo instante y con existencia simultánea.

Con respecto a la noción de variable, Pierre Fermat (1601-1665), que define lugar geométrico como relación entre dos variables, afirma que “Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva” (Mora, 2006, p. 25)

Fermat habla de la representación de un lugar geométrico, en el cual un conjunto de puntos que verifica una condición permite entender la coexistencia de infinitos puntos que cumplen esa condición. La idea de variación depende entonces de la idea que haya construida para las curvas, tanto puede ser cambio a lo largo del tiempo, como entidad real que existe de forma completa en un momento

determinado. Estas dos maneras de entender a las funciones, dinámica y estática, también tienen un infinito involucrado en ellas que hace que se lo pueda entender de forma distinta

También en el análisis infinitesimal, el infinito se puede presentar en sus dos formas potencial y actual. Puede hablarse de la trayectoria de un punto que, en su movimiento, depende de una variable temporal y considerar como Cauchy que “una cantidad variable deviene infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente convergiendo hacia el límite cero”. En este lenguaje dinámico las cantidades son magnitudes extensas que aumentan o disminuyen.

O utilizar un lenguaje estático, donde lo que ya se tiene dado en acto son los puntos de un intervalo, las expresiones se cambian por conceptos como mayorar, minorar, aproximar. Los intervalos no son magnitudes extensas, que disminuyen o aumentan, sino conjuntos de infinitos puntos dados en acto que pueden considerarse mayores o menores, pero no aumentan o disminuyen dinámicamente; naturalmente que sus elementos no varían. (Corzo, 2001, p. 407)

El problema está entonces en cómo se comprende al infinito y a qué tipo de cuestiones responde. Cuando los estudiantes hablan de tendencia, hablan de “acercarse”, “irse al infinito”, “pegarse cada vez más al valor de  $a$ ” y es en ese lenguaje en donde lo que están pensando choca con la visión estática. El conflicto reside entonces en que esa visión estática la que se formaliza: las funciones son relaciones entre conjuntos y como tales se definen.

Euler en el siglo XVIII presenta una definición para el concepto de función que le permitiría luego abordar los problemas del cálculo moderno. “Una función de una

magnitud variable es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes” (Durán, 1996, p. 48). Esta definición, si bien no la última que propone, es una manifiesta muestra de la manera en que la curva que describe movimiento quedó supeditada a la ecuación algebraica, que aunque elegante, marca una característica estática y garantiza la existencia de la función completa, con todos sus puntos, en cada instante. Y eso es lo que los docentes llevamos al aula. El problema es que ese entendimiento estático va en contra de la manera dinámica en que nuestros alumnos comprenden al infinito “como lo que siempre sigue”. Y entonces, una función estática tiene que dotar de significado a una noción dinámica como es el infinito.

Continuando con la noción de variable como fundamental en la consolidación de la noción de función, Isaac Newton (1642-1727) introduce los conceptos de fluente (cantidad variable en un movimiento continuo) y fluxión (la velocidad de los fluentes) al abordar dos problemas: el primero, encontrar la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito. El segundo, el recíproco del primero. De hecho el concepto de función, si bien no está plenamente definido, está presente en el desarrollo de este trabajo de Newton que dará lugar al TFC. De igual manera, Gottfried Leibniz (1646,1716), trabajaba implícitamente con el concepto de función, al descubrir en sus trabajos la relación inversa entre el problema del trazado de tangentes y el problema del cálculo de cuadraturas (áreas bajo curvas), obteniendo al igual que Newton, pero por métodos diferentes, el TFC. Se puede inferir que la noción de función continúa en un estado operacional en los trabajos de Newton y Leibniz. (Mora, 2006, p.25)

Los problemas que se plantean y trabajan tanto Newton como Leibniz hacen que sus concepciones sean distintas, aunque ambos manejan una concepción

dinámica de las relaciones, que los lleva a resultados semejantes y que les permite realizar aportes muy relevantes a la construcción del infinito como concepto matemático, aún cuando estuvieran en oposición respecto a algunas características de las nociones que discutían.

La definición del cálculo de las fluxiones de Newton tomó sentido a partir de engendrar las cantidades por la permisibilidad que da su naturaleza, cual es la de aumentar o disminuir con movimiento uniforme. Por su parte, Leibniz incorporó a las cantidades una convención de naturaleza no-real, las cantidades infinitamente pequeñas. A pesar de las diferencias en los dominios, en Newton las cantidades se engendran a partir del movimiento uniforme dando lugar a un modelo geométrico, en tanto que en Leibniz esta posibilidad ocurre por los infinitamente pequeños, configurando una propuesta algorítmica. Se puede decir que cada uno habla el lenguaje del otro y pareciera que ambos proyectos solo son traducibles en la estructura notacional del análisis estándar contemporáneo. (Camacho, 2005, p. 3)

¿Cómo se perdió lo dinámico de las funciones? Consideramos las tres últimas definiciones que Mora presenta en su investigación, y que dan clara cuenta de un proceso en el cual se hace necesario que la función se convierta en concepto organizador y ya no herramienta operacional. En ellas se observa cómo la naturaleza de este concepto matemático cambia a través del tiempo, cómo al irse caracterizando y definiendo de distintas maneras, los matemáticos se enfocan más en algunas de sus características en detrimento de las otras:

#### **Peter G. L. Dirichlet (1805-1859)**

“Si una variable  $y$  está relacionada con otra variable  $x$  de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a  $x$  hay una regla

según la cual queda determinado un único valor de  $y$ , entonces se dice que  $y$  es función de la variable  $x$ .

**Edouard Goursat (1858-1936)**

“Uno dice que  $y$  es función de  $x$  si para un valor de  $x$  corresponde un valor de  $y$ . Uno indica esta correspondencia por la ecuación  $y = f(x)$

**Patrick Suppes (1922)**

Definición.  $R$  es una relación  $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(x = y, z))$ .

Escribimos  $yRz$  si  $(y, z) \in R$ .

Definición.  $f$  es una función  $\Leftrightarrow f$  es una relación y  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xfy \text{ y } xfz \Rightarrow y = z)$

(Mora, 2006, pp. 27-28)

En menos de un siglo, las funciones se alejaron de la variación. Dirichlet todavía hablaba de variables, aunque no de variación de modo explícito. El número en lugar de la magnitud no hace pensar en algo que cambia, sino en un objeto matemático estático. Pero puede rescatarse de su definición el permiso para pensar en cambios, en continuidad, en una concepción dinámica de las funciones. No obstante, Goursat ya no nos habla de variables, y cuando Suppes simboliza esa definición, se pierde de forma absoluta el dinamismo. Ya tenemos conjuntos, una relación entre ellos y una visión estática de pares que se corresponden...

En libros de texto más modernos, y que utilizan nuestros alumnos, es posible encontrar las siguientes definiciones, reportadas en Crespo Crespo y Ponteville (2003):

**James Stewart (1994).**

*Una función  $f$  es una regla que asigna a cada elemento  $x$  de un conjunto  $A$ , exactamente un elemento, llamado  $f(x)$  de un conjunto  $B$ .*

### **Demidovich (1973)**

*Si a cada uno de los valores que puede tomar una magnitud variable  $x$  perteneciente a un determinado conjunto  $E$ , corresponde un valor único, finito y determinado de la magnitud  $y$ . Esta magnitud  $y$  recibe el nombre de función (uniforme) de  $x$ , o de variable dependiente determinada en el conjunto  $E$ ;  $x$  se llama argumento o variable independiente.*

### **Rabuffetti (1972)**

#### Aproximación intuitiva

La idea fundamental en el concepto de función es que cada elemento del dominio tiene una y sólo una imagen en el recorrido.

#### Definición

*Una relación  $f$  entre elementos de un conjunto  $A$  y elementos de un conjunto  $B$  es una función de  $A$  en  $B$  si, y sólo si, se cumplen las dos condiciones siguientes:*

- 1.  $\forall x \in A \exists y \in B / (x; y) \in f$*
- 2.  $(x; y) \in f \wedge (x; z) \in f \Rightarrow y = z$*

*Dominio de  $f$  :  $D_f = A$*

*Recorrido de  $f$  :  $R_f = \{y / y \in B \wedge \exists x \in A / (x; y \in f)\}$*

Estas definiciones, propias del discurso matemático escolar actual en nuestro país, parecen dejar la visión de que la teoría de conjuntos es necesaria para definir el concepto de función. Se trata de definiciones completamente estáticas y que en relación al infinito, exigen pensarlo en acto para comprender su significación.

Por otra parte, entendemos que es con el trabajo de Newton y Leibniz que se logra la máxima expresión de curvas como representación de sucesos dinámicos. Y dado que es en el trabajo de Newton que entendemos que el infinito se propone por primera vez como concepto matemático, que permite explicar la naturaleza del Universo y modelizarlo dentro de la matemática, se propone a continuación caracterizar el infinito, dinámico y en movimiento y en función de la manera en que comprendía a las curvas, buscando además una vinculación desde ellos para ambos conceptos.

Como plantea Camacho (2005) en su trabajo, Newton concibe al espacio de acuerdo con una clasificación que ya se ha presentado en el capítulo 4, absoluto y relativo. El espacio relativo que es el que Newton define de manera inequívoca es el que representa “cierta dimensión móvil o medida de los espacios absolutos” (p. 3). Como consecuencia de esa manera de entender al espacio relativo, su extensión y cantidades se pensaron como “crecientes o decrecientes con movimiento continuo, a la manera del espacio que describe un cuerpo en movimiento” (p. 3) Ese pensamiento tiene consecuencias relacionadas con la aparición dentro de la ciencia del infinito, ya que lo llevó a eliminar algunas de las cuestiones que impedían romper con el miedo a la afirmación del infinito.

A tal definición llegó a partir de suprimir de la noción de espacio de una o varias determinaciones, a excepción de la idea de extensión, lo cual le originó una idea genérica a la que ya no respondió el espacio en lo real. Este corte le hizo a determinaciones que conservaban un carácter finito, las cuales al ser suprimidas hicieron que la extensión deviniera en infinita. (Camacho, 2005, p. 3)

Es desde esa afirmación que permite, según Camacho, que el espacio se vinculara con uno de sus atributos, la noción de cantidad, desde donde se logra constituir uno de los procesos que se identifican como medulares en la

construcción del conocimiento matemático. La noción de cantidad se caracteriza por lo que aumenta o disminuye, o lo que “es capaz de aumentar o disminuir y se puede describir con movimiento continuo” (p. 4). Lo que logra Newton con ese aporte es ordenar la totalidad de la ciencia en un sistema textual, que le permite sintetizar el pensamiento newtoniano con el pensamiento clásico de su época, a partir de la propia noción de cantidad (Camacho, 2005).

La gran obra de Newton, a través de la noción de cantidad que obtiene del espacio relativo y de su manera de entender a las curvas, permite entonces sintetizar o enlazar el conocimiento anterior con el pensamiento que resultaba de geometrizar el espacio (Camacho, 2005; 2010). Es la práctica social de la geometrización que lleva a Newton a hacer aparecer al infinito al seno de la ciencia, como elemento que ya no iba a desaparecer del discurso y como objeto que debía aún ser construido de acuerdo a las prácticas de formalización, para las que aún quedaban casi 200 años de evolución epistemológica.

### **Indagación acerca de las concepciones del infinito involucrado en el estudio de las funciones por parte de los alumnos**

De la segunda experiencia que se ha reportado, se entiende que los alumnos de profesorado que ya han estudiado la Teoría de Cantor reconocen que es necesario entender al infinito como proceso al momento de tratar con funciones. Frente a esto último, se realizó una actividad relacionada con distintos aspectos de las funciones que tuvo por objetivo ver si se lograba encontrar este tipo de reflexión frente a la actividad ya planteada.

Esta experiencia se realizó con:

- Un grupo de 16 alumnas de 5º año de Bachillerato en Ciencias, a dos semanas de concluir el ciclo lectivo. La actividad se propuso como un trabajo práctico evaluativo, a resolver de manera individual en clase, haciendo uso de todo el material del que disponen dentro del aula (apuntes, prácticos anteriores, evaluaciones).
- Un grupo de 14 alumnos de 3º año de profesorado, en la anteúltima clase del ciclo lectivo de Álgebra III. Se les explicó a los alumnos que la actividad era parte de una investigación y que no iba a ser evaluada por la docente del curso. Todos los alumnos que resolvieron la actividad habían aprobado ambos exámenes parciales de la asignatura y están en condiciones de rendir el examen final con que se termina de acreditar la materia.

La actividad consistió de tres partes:

- una primera parte, en donde se pedía a los alumnos:
  - o definición de función
  - o análisis de lo que representan las asíntotas y los límites mediante los cuales se obtienen, en base a la gráfica de una función racional con una asíntota vertical en  $x=1$  y una asíntota horizontal en  $y=1$
- una segunda parte, en donde se introducía brevemente la idea dinámica de funciones que utilizaba Newton, y se pedían una serie de explicaciones y definiciones en función de gráficas de distancia en función del tiempo. Una de las gráficas que se incluía era la misma que se presentaba en la primera parte. Lo que se solicitaba era:
  - o En función de una gráfica que representaba la distancia del hogar de un hombre en su día laboral, la descripción de la situación, el análisis de la velocidad en base al gráfico, el significado de un segmento constante en la gráfica

- o En función de una gráfica en el primer cuadrante, con inicio en (0;0) y una asíntota horizontal en  $y = 3$ , la descripción de la situación, el análisis de la velocidad en base al gráfico, el significado de la asíntota horizontal en la gráfica
- o En base al mismo gráfico de la primera parte pero ahora con tiempo en el eje horizontal y distancia en eje vertical, se pedía la interpretación de los valores negativos de los ejes, la explicación de lo que ocurre en  $t = 1$  y  $d = 1$  y una descripción de la situación.
- Una tercera parte, en la cual se les pedía una serie de definiciones y caracterizaciones teniendo en cuenta la representación de las funciones de manera dinámica. Algunas de las preguntas que se hacía era:
  - o Significado de  $t \rightarrow \infty$
  - o Significado de  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x) = a$
  - o Significado de  $\lim_{t \rightarrow a} f(x) = \infty$

## **Análisis de las respuestas**

Una de las cuestiones que más llama la atención de las respuestas obtenidas es la poca diferencia entre lo que se obtiene de las estudiantes de escuela media y los estudiantes del Profesorado. Inclusive frente a algunos de los ítems, las alumnas de escuela media se atreven a contestar sin miedo a equivocarse, mientras que los estudiantes de profesorado prefieren no emitir respuesta.

De la primera parte, las respuestas que se obtienen en general tienen que ver con la definición de funciones que inunda el discurso matemático escolar: la función es vista como una relación entre dos conjuntos numéricos que cumple con las

condiciones de existencia y unicidad. Sólo algunos proponen una explicación que considera otros aspectos de las funciones. A continuación se presentan algunas de las respuestas, en donde se indica con EEM la respuesta de estudiantes de escuela media y EP la respuesta de estudiantes de Profesorado.

En relación a qué es una función, algunas de las respuestas obtenidas fueron:

*Es una relación donde a cada elemento del conjunto de partida (dominio) le corresponde un elemento del conjunto de llegada (imagen)*  
(EP 10)

*Es una relación entre dos o más variables, una de ellas dependiente de la/s demás que son independientes y que verifica las condiciones de existencia y unicidad* (EP 1)

*Es una representación de los cambios en una variable independiente y otra dependiente* (EEM 14)

*Una representación gráfica de un conjunto de puntos en alguno o algunos de los planos en un sistema de ejes. Posee dominio e imagen con propiedades de unicidad y existencia* (EEM 8)

*Es la forma de ordenar ciertos datos poniéndolos juntos para que luego esta situación pueda ser resuelta* (EEM 11)

El tipo de explicación que se encuentra para el cálculo y significado de asíntotas es solamente algorítmico y poco sentido tiene el significado real de lo que ocurre

con la función. Desde la visión estática en que se consideran las funciones, las asíntotas no tienen mayor sentido que el que les da representar la no definición de la función para un punto del dominio o la limitación de los valores de la imagen para los puntos extremos.

[Para obtener los valores de cada una de las asíntotas es necesario]  
*Sacar los ceros [del denominador] de la función y lo reemplazamos luego de hacer el cálculo si te da por ejemplo  $24/0$  es AV,  $0/0$  DP y tenés que buscar la imagen y luego para calcular AH tenés que hacer la división de la función, es decir si tengo  $\frac{2x+3}{5x-2}$ , hacés  $2x+3/5x-2$  y había tres posibilidades (EEM 5)*

[En el cálculo de la AH aparecen tres posibles resultados]

$n^0$ , entonces  $y=n^0$  hay AH

$\infty/\infty$  indeterminación

$\infty$ , entonces, no existe AH (EEM 9)

AV: Buscás los límites de la función, si te da  $\infty$  es AV

AH: buscás la  $m$  (dividiendo la función por el grado de mayor término) y luego reemplazar la  $m$  en el límite para hallar la  $b$  (EEM 9)

[La solución de  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ] Es una asíntota horizontal o una oblicua. Es el valor de la función en el infinito (EEM 14)

AH:  $a/b$

AV: buscar Co,  $0/0$  DP reemplazar

n/O AV (EEM 16)

[Para  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ] cuando el resultado es  $\infty$  quiere decir que no existe AH.

Cuando da un número, hay AH en ese punto (EEM 16)

AV: hallar los puntos (el punto) que no pertenecen al DM y verificar que los límites laterales resulten infinitos.

AH: reescribir la  $f(x)$  como una función +/- un  $C$  real y verificar que el límite en  $+\infty$  y en  $-\infty$  de la función sea  $C$  (EP 1)

[En el cálculo de la AV se observa]

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -\infty$$

No existe límite (EP 2)

Si existe es una asíntota horizontal (en el gráfico  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ ) es el valor al que tiende y a  $x$  grandes (tendiendo a  $\infty$ ) (EP 6)

[En el cálculo de la AV se observa]

El resultado es  $\infty$ . En  $x=1$  hay una asíntota vertical mientras más se acercan a 1 por derecha los valores de  $x$  mas crecen los de las ordenadas y viceversa (EP 7)

En la segunda parte, se obtuvieron respuestas semejantes en relación al relato que hacían en relación a la situación, aunque hubo diferencias que se detectaban

en relación con el significado de una parte de la gráfica que era constante, que no es comprendida como función por parte de las alumnas de nivel medio. Las otras dos gráficas presentaron más dificultad y gran cantidad de las actividades quedaron sin responder al momento de tener que proponer una situación o el sentido que tienen las asíntotas bajo esta concepción. Se evidenció en casi todas las respuestas una visión completamente algorítmica, puesta de manifiesto en la enumeración de pasos a seguir para determinar cada tipo de asíntotas.

Del relato del trayecto no hay nada inesperado, todas las respuestas fueron similares y se presenta una respuesta como modelo de lo que se dijo en relación a la pregunta.

*Un hombre sale de su casa y tarda 3 hs en llegar a su trabajo. Allí se queda 5 hs y vuelve a su casa, empleando 6 hs (EP 13)*

En relación a la velocidad, llama la atención que son pocos los estudiantes que responden apoyados en la gráfica. La mayoría de los estudiantes recurren a las fórmulas de velocidad para dar respuesta, y aseguran que la velocidad no puede verse en la gráfica.

*Puede observarse al ver el tiempo que tarda en hacer determinada cantidad de km. Cuando va hacia el trabajo, va a mayor velocidad que cuando vuelve a su casa (EEM 13)*

*Cuando la recta es más empinada hay mayor velocidad. Cuando es constante la velocidad es 0 y cuando está decreciendo menos empinada es menor. (EEM 14)*

No puede observarse directamente pero a partir de los datos puede averiguarse ya que la velocidad es igual a  $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ . Se divide la distancia recorrida y el tiempo que tardó. El desplazamiento es a mayor velocidad a la ida y a menor cuando está en el trabajo (está en reposo,  $vel=0$ ). (EEM 16)

Sí, la velocidad es la pendiente de la recta tangente. En realidad es una velocidad media la que puedo calcular y es mayor en el primer tramo y nula en el segundo. (EP 3)

No se puede observar explícitamente pero se ve que tardó menos tiempo en ir al trabajo que en volver por lo cual el desplazamiento es a mayor velocidad entre  $t=0$  y  $t=3$  que entre  $t=8$  y  $t=14$ . (EP 5)

Tramo 1:  $[0;3]$   $V=d/T=2\text{km/h}$

Tramo 2:  $[3;8]$   $V=0 \text{ km/h}$

Tramo 3:  $[8;14]$   $V=-1 \text{ km/h}$  (EP 13)

Para ir al trabajo tarda menos pues recorre los 6 km en 3 hs

Para volver del trabajo a su casa, tarda más, recorre los 6 km en 6 hs

Quiere decir que a mayor pendiente mayor velocidad (EP 14)

En relación a lo que ocurre respecto de la presencia de asíntotas en las gráficas de curvas entendidas como representación de distancia en función del tiempo, no se logra una respuesta en ninguno de los dos grupos más allá de “no se alcanzan los 3 metros” o “la velocidad disminuye pero no se anula”.

La tercera parte de la encuesta quedó en su mayoría sin resolver. Los alumnos con los que se trabajó tienen muy arraigada la concepción estática de las funciones por lo cual la reinterpretación de lo que conocen bajo otra concepción les resulta más que complicado. Incluso uno de los futuros profesores de matemática muy próximo a recibirse y que ya se encuentra con cursos de escuela media a su cargo desde hace años, manifestó que pensar las funciones de manera dinámica a partir del movimiento y de la consideración de curvas productos de trayectorias, era algo muy complejo y no aceptó que esto fuera posible.

Las respuestas más interesantes que se encontraron tienen que ver con el significado de las asíntotas y del infinito en general.

Significado de  $t \rightarrow \infty$

*Que el tiempo es infinito (EEM 1)*

*Es que se le puede dar cualquier valor, es infinito (EEM 5)*

*Todos los reales (EEM 10)*

*$t \rightarrow \infty$  significa tiempos cada vez “más grandes”, “a medida que pasa el tiempo”, “cuanto más tiempo pasa” (EP 1)*

*Que el tiempo es muy grande (EP 4)*

*$T \rightarrow \infty$  lo puedo interpretar como que es un acontecimiento que se repetirá siempre (EP 14)*

En relación al significado de  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x) = a$ , algunas de las respuestas obtenidas, fueron las siguientes:

*El valor a es el tiempo cuando tiende a  $\infty$  (EEM 12)*

*Que en algún momento la función deja de variar y llega al infinito (EEM 16)*

*Que se llega hasta la posición a y no se desplaza más, permanece ahí para siempre (EP 1)*

*Que si tomo un tiempo lo suficientemente grande, la función se aproxima a a pero nunca toma ese valor (EP 5)*

Sobre el significado de  $\lim_{t \rightarrow a} f(x) = \infty$ , los estudiantes interrogados dieron las siguientes respuestas:

*Significa que encontramos o un punto donde la función no existe o donde se acerca infinitamente en puntos de x (EEM 3)*

*No existe el límite (EEM 5)*

*Significa que en a hay una AV, la función se dispara (EEM 16)*

*Que la velocidad se hace infinitamente grande (o chica) en un entorno del instante  $a$  (EP 1)*

*Que el espacio recorrido en  $t=a$  es inmenso, infinito (EP 4)*

*Que aumenta la distancia, pero no fluye el tiempo (EP 11)*

Algunos de las respuestas anteriores, muestran nuevamente que los conceptos de análisis en los que se involucra el límite terminan siendo aprendidos de manera operatoria y algorítmica, sin hacer hincapié en los significados que están entrando en juego. Como puede apreciarse en las respuestas mostradas, el nivel educativo de los estudiantes no influyó en el tipo de respuestas obtenidas.

### **Algunos comentarios finales**

Resulta evidente que el estudio de funciones que se logra tanto en la escuela media como en el Profesorado, está determinado por el lenguaje y tratamiento conjuntista. Las funciones son así entes estáticos, que no permiten manifestaciones de variación ni representaciones de lo que cambia. Esa visión hace que quede oculto el sentido potencial del infinito que interviene en el discurso del cálculo.

Los alumnos de Álgebra III que han construido ideas asociadas a la teoría de transfinitos de Cantor, tampoco puede ver en las funciones representaciones del discurso variacional, con lo cual la seguridad que les da el conocimiento de una teoría que fundamenta el tratamiento del infinito se transforma en obstáculo para

reconocer las limitaciones que ese infinito, propio y actual de Cantor, tiene frente al tratamiento de funciones.

### **Estudio de casos: entrevistas en profundidad con futuros docentes sobre el infinito que detectan en el estudio de funciones**

Luego de haber visto que el estudio de la teoría de conjuntos y números transfinitos de Cantor no modificaba las ideas fuertemente arraigadas por años de tradición conjuntista del discurso matemático escolar, se decidió hacer entrevistas en profundidad con tres alumnos de Álgebra III, para observar si podían llegar a reconocer las dificultades del propio discurso y de las construcciones logradas desde las preguntas pensadas en torno a los distintos infinitos que otros grupos de alumnos habían manifestado en la segunda experiencia.

Se realizaron *entrevistas semiestructuradas centradas* en ciertos aspectos de interés para esta investigación, que permitirían tener acceso a esos significados que han construido los futuros profesores en relación al infinito. Los temas que guiaron las indagaciones fueron los siguientes:

- Asociación libre frente al infinito y al infinito matemático
- Definición de infinito
- Definición de infinito matemático
- Presencia del infinito en la escuela media y en el Profesorado
- Construcciones que los estudiantes hacen del infinito
- Significado del infinito como resultado de cociente de denominador nulo
- Significado del infinito como cualidad de aquello que ya no puede ser incrementado

Las entrevistas se hicieron a dos alumnas (Gabriela y Giselle) y un alumno (Ezequiel), los tres con sus exámenes parciales de Álgebra III aprobados, los tres se desempeñan, entre otras ocupaciones laborales, como profesores particulares de escuela media.

Estas características parecieron importantes en la selección de los alumnos a los que se les haría la entrevista, ya que por una parte han accedido al abordaje formal que se da en su carrera en relación al infinito y, por otra, al tener experiencia en el dictado de clases particulares, conocen las problemáticas que los estudiantes de escuela media enfrentan en relación al infinito. Su acercamiento al infinito corresponde, por lo tanto, no sólo a lo que han encontrado como alumnos, sino que también en alguna oportunidad han tenido que acercarse al concepto para hacerlo comprender a sus alumnos. Los tres habían formado parte del grupo que respondió el cuestionario que se acaba de reportar en relación a las funciones y el infinito, y a través de las entrevistas se buscó indagar con mayor profundidad acerca de algunas de las respuestas obtenidas y comprender cómo era su visión del infinito.

## **Análisis de las respuestas**

### **- *Asociación libre frente al infinito***

Los tres alumnos responden de acuerdo a la primera concepción que uno tiene, lo que es muy grande para poder ver su final.

Gabriela

*Algo que no se termina*

*Algo muy grande*

Giselle

*Horizonte*

Ezequiel

*Algo muy grande, muy muy muy grande. Algo que no se puede pensar.*

En estas asociaciones, surgió que su representación del infinito está asociada a tamaño. Este hecho era esperable según el estudio realizado anteriormente en relación a las representaciones sociales que tienen los estudiantes sobre el infinito, ya que las representaciones más frecuentes eran las que correspondían a tamaños. Indudablemente en estas respuestas se pusieron en juego las ideas relacionadas con el infinito intuitivo, no aparecieron ideas relacionadas con la matemática en las respuestas obtenidas.

- ***Asociación libre frente al infinito matemático***

Es notable frente a este tema la fuerza con la que resurge lo estudiado en Álgebra III. El impacto del trabajo de Cantor asombra y hace que los estudiantes queden prendidos fuertemente de los conceptos y definiciones que en ese espacio se discutieron.

Gabriela

*Ahora pienso en Cantor porque estudió conjuntos infinitos. Hace un año, depende qué esté haciendo en matemática lo pienso de la misma manera. Si calculo un límite cuando  $x$  tiende a infinito pienso en tomar valores muy grandes para ver a dónde se acerca la función. Una recta tiene infinitos puntos.*

Giselle

*Límite, que es lo primero que se ve con infinito. Después, conjuntos. Un puente infinito, reales, continuo. Geometría, el punto impropio, en álgebra, las generalizaciones.*

Ezequiel

*Límite. Asíntotas. Comportamiento de una función más allá, cuando la variable crece mucho. En conjuntos, cardinales. La distinción de un conjunto finito y el conjunto infinito que es el que no es finito.*

En estas repuestas se pone de manifiesto que las representaciones que tienen acerca del infinito matemático se ven influidas por las ideas de Cantor. Ellos mismos lo reconocen aún sin preguntárselo: hacen una diferenciación entre el infinito que han construido antes de estudiar la teoría de Cantor y luego de ella. La idea de cardinales transfinitos se “filtra” en las respuestas de manera natural y los estudiantes son concientes de ello.

- **Definición de infinito**

Esta es tal vez una de las partes que más silencio genera en las tres entrevistas. Resulta muy complejo pensar en una definición cuando uno nunca se enfrentó

con una. En dos de los tres casos, se recurre a cuestiones matemáticas para poder perfilar una definición.

Gabriela

*No sé si es algo, tal cosa. Es una idea abstracta que representa a algo inacabado, que no se termina. A la gente le cuesta lidiar con el infinito, porque es algo que es abstracto, en la realidad no tenés conjuntos infinitos. Le cuesta por una cuestión de la vida, pensar que la vida es infinita, o que el universo es infinito es algo que se te escapa un poco. En algún punto también le cuesta lidiar con lo finito, no quiere pensar que la vida se termina. Los pensamientos son infinitos.*

Giselle

*Algo que no es finito, que tiene muchos elementos, más de los que te podés imaginar.*

Ezequiel

*Algo que yo no lo puedo alcanzar.*

Definir el infinito; sabíamos de la complejidad de esta pregunta antes de formularla, pero previo a pedir que definieran el infinito matemático, pareció interesante analizar de qué elementos hacían uso para intentarla. La respuesta de Gabriela se torna filosófica; la de Giselle hace uso de la definición dada por Cantor para los cardinales infinitos; y la de Ezequiel se orienta al infinito como lugar.

- **Definición de infinito matemático**

Igual que en el ítem anterior, no es una de las preguntas que tiene respuesta inmediata, hay silencios, pensar, dar vueltas frente a la situación. Es aún peor que en el caso anterior, ya que ahora siendo el término del todo matemático es necesario tener más cuidado, ser más formal y más riguroso.

Gabriela

*No puedo definir el infinito, puedo decir que algo es infinito.*

Giselle

*No te puedo dar una definición porque hay muchos tipos de infinitos. Depende la materia en la que esté. En la geometría, el punto impropio. En el análisis, es cuando la variable toma valores cada vez más grandes. En el álgebra, cuando un conjunto tiene muchos elementos que no puedo contar. El infinito de los cardinales.*

Ezequiel

*Es todo aquello que no es finito.*

Gabriela expresa que aunque no pueda definir qué es el infinito puede determinar cuando algo es infinito, piensa sin duda en conjuntos infinitos, en conjuntos que no puede poner en correspondencia con intervalos naturales iniciales. Una vez más en la respuesta de Giselle aparece la influencia de las ideas cantorianas que han estado estudiando. Pero también en ella se pone en evidencia la reflexión acerca de que el infinito se puede manifestar en la matemática de diferentes maneras, según las ramas en las que aparece y sin saberlo ella, según las prácticas

sociales a las que se lo asocia. Ezequiel, directamente define el infinito como lo haría Cantor.

- ***Presencia del infinito en la escuela media y en el Profesorado***

Los tres entrevistados reconocen que en la escuela media aparece el infinito en distintos momentos, asociado a diferentes ramas de la matemática, pero en ningún momento explicitado. No hay necesidad de definirlo ya que se cuenta con un significado para ese término que ya viene desde fuera de la escuela y los docentes descansan sobre esas ideas.

Gabriela

*Cuando se ve la geometría, la recta con infinitos puntos. En funciones también. Todos los conjuntos numéricos que ven son infinitos, naturales, enteros, racionales, reales. Las funciones son relaciones entre conjuntos y son infinitos, en límite. En sistemas de ecuaciones también se ve que pueden tener infinitas soluciones.*

Giselle

*En mi escuela media, el infinito eran las puntas de los ejes. No vimos nada que tuviera que ver con límites, ni conjuntos, ni nada. La función lineal sí como recta infinita. De mis alumnos, en la mayoría de los colegios tampoco se ve nada que tenga que ver con infinito. En el secundario no se define, es axiomático, es como la palabra conjunto o pertenencia. Vimos como vas probando valores, cada vez más grandes y eso es infinito. Y acá en el profesorado, tampoco sé si define. En análisis I tampoco lo definimos. En álgebra III sí se define, pero no me acuerdo. Era como que los*

*conjuntos infinitos son los que no son finitos. No es una definición, tipo el infinito es.*

*El límite cuando  $x$  tiende a infinito es pensar en una  $x$  cada vez más grande y voy viendo qué le pasa a la función. Este infinito también es distinto al que me da como resultado de  $a/0$ . Porque en cada caso miro en ejes distintos, en el caso de  $a/0$  es como que explota la función.*

Ezequiel

*En la escuela secundaria, aparece primero con el concepto de límite, a mí al menos. Pero debería hablarse antes, antes de hablar de límites, para que tengan una base más visual. En el Profesorado, de la misma manera. Con los conjuntos numéricos, a mí me daban por ejemplo para los números enteros  $0; 1; 2; 3...$  Esos puntos suspensivos querían decir que sigue. Yo me daba cuenta que eso llegaba al infinito pero creo que es porque a mí me gustaba la matemática. En educación superior, también lo ves en la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones.*

*En las funciones, cuando pensás en  $x$  tendiendo a infinito, pensás en distancia, lo vas haciendo variar. Con los conjuntos, la cantidad de elementos de un conjunto infinito no cambia. El problema es que las funciones son conjuntos de pares ordenados y entonces no debería cambiar pero desde el lado del análisis se ve cambiando. Después de Álgebra III es muy difícil verlo cambiando desde otro lado.*

En la actualidad son capaces de identificar la presencia en el discurso matemático escolar, aunque de manera tácita y reconociendo que no se “blanquea” su presencia. Sin embargo al mirar su propia experiencia como alumnos en la

escuela, lo han encontrado de manera tan tácita que pueden llegar a no reconocerlo, como en el caso de Ezequiel o reconocerlo sólo como la punta de las flechas de los ejes cartesianos. Estas respuestas son muy interesantes pues muestran cómo ese objeto construido fuera de la escuela entró a ella sin que los estudiantes fueran concientes, cómo nunca apareció en el discurso matemático escolar de manera formal y manifiesta.

- ***Construcciones que los estudiantes hacen del infinito***

Las construcciones que reconocen no se verbalizan como construcciones en sí, sino como ideas que van apareciendo en los distintos momentos que se tratan cuestiones relacionadas con el infinito.

Gabriela

*Lo que más me impactó del infinito fue lo que vi en Álgebra III, no sé si antes me había cambiado la idea de infinito. Si me cambió, fue ver que existen distintos tipos de infinito.*

Giselle

*Hay muchas construcciones depende de dónde se mire, porque si bien no hay una definición, se lo trabaja desde el álgebra, desde el análisis, desde la geometría. Pero son distintos, el punto de vista varía.*

Ezequiel

*Creo que hay que construirlo, desde todos los puntos de vista. Que recuerden lo que saben de geometría, de sistemas de ecuaciones. Y después hay que caer en el análisis.*

En los casos de Gabriela y Giselle, el impacto del estudio del infinito algebraico vuelve a manifestarse. Giselle y Ezequiel, además reconocen su presencia en el análisis. Ezequiel propone su construcción a través de distintos tipos de registros, desde distintas áreas de la matemática, pero finalmente reconoce que donde mayor aplicación va a encontrar un alumno, donde sin duda tendrá que lograr una construcción para poder encontrarlo y aplicarlo, es en el análisis.

**- *Significado del infinito como resultado de cociente de denominador nulo***

La dificultad frente a este uso del infinito que es muy habitual es llamativa. No es casual que ocurra y que lo sientan como algo declarado como verdadero, aún cuando no pueden hacerlo explícito. A lo sumo, lo que se logra es pensarlo como una forma de decir.

Gabriela

*Significa que yo estoy haciendo el denominador cada vez más chico y no sé.*

*Cuando pienso que  $x$  tiende a infinito pienso que a  $x$  le doy valores cada vez más grandes.*

Giselle

*Yo a mis alumnos les explico que divido cada vez por un número más chiquitito, entonces el resultado es cada vez más grande.*

*Entonces cuanto más chiquitito lo hago, más grande me da el resultado. Pero ese infinito es distinto del de los conjuntos infinitos. Uno es valor, el otro es cantidad.*

Ezequiel

*Creo que para verlo hay que hacer una tabla de valores, pero ¿significado? No sé. Creo que es un procedimiento, una definición,  $1/\infty=0$  y  $1/0=\infty$*

En las respuestas de Gabriela y Giselle, se encuentran descripciones de estrategias didácticas a las que sin duda han recurrido para lograr comprender o hacer comprender los límites de cocientes de funciones que involucran el infinito. Ezequiel, en cambio, lo expresa como una regla, como un procedimiento algorítmico que incluso manifiesta que puede ser carente de significado si es aprendido y aplicado como tal.

- ***Significado del infinito como cualidad de aquello que ya no puede ser incrementado***

La negación de esa definición, una de las que Bolzano criticaba, pueden justificarla desde el estudio de los conjuntos infinitos de Cantor. Ninguno de ellos puede producir una explicación externa a esa teoría.

Gabriela

*No es el de Cantor, porque hay infinitos más grandes que otros. Es medio básica esa definición ¿no? Por ejemplo, si al conjunto de los naturales le agrego algún intervalo real por ejemplo, no funciona.*

Giselle

*Para mí no es así, porque tenés distintos tipos de infinitos, el de los naturales, que ya es infinito, le puedo agregar otros números y llegar a los reales que también es infinito.*

Ezequiel

*Para mí no es válida, si es infinito yo le puedo agregar algo más y va a seguir siendo infinito.*

Los tres entrevistados diferencian este infinito del que ellos han construido, no lo aceptan, identifican que según Cantor, siempre a todo conjunto infinito puedo agregarle otro de mayor cardinalidad y que la cardinalidad del primero aumenta.

### **Comentarios finales en relación a las representaciones del infinito que tienen los futuros profesores**

Los alumnos con los cuales se realizaron las entrevistas no fueron elegidos al azar. Los tres son alumnos con los cuales existe un vínculo de confianza suficiente como para que supieran que podían hablar con libertad. Por otro lado, son alumnos cuyo pensamiento suele ir un poco más allá de lo que se espera de ellos, algo críticos de su formación y de la educación en general y que se permiten dudar, preguntar y decir, aún sabiendo que el resto puede no estar de acuerdo.

Aún así, fue difícil lograr que dijeran lo que sentían. Que se manifestaran con libertad en relación a aquello que saben y lo que no saben. Fue sumamente notable que sintieran la necesidad de apoyarse continuamente en lo que habían aprendido en Álgebra III cuando hablaban del infinito. En parte, se entiende que es por la proximidad entre el tema que se abordaba y la asignatura que se ocupa de su construcción, y en parte por la fuerza innegable y el impacto de las ideas de Cantor, que yendo en contra de todo lo que se intuye y se conoce, hace que se puedan comprender procesos y objetos que explican muchas más cuestiones de las que se espera comprender.

La perspectiva que tienen sobre la propia formación hace que inicialmente necesitan segmentar los infinitos de acuerdo a la asignatura frente a la cual se encuentran con este último. Luego de conocer el trabajo de Cantor, intentan que todo se junte nuevamente y funcione a la perfección. Les resulta muy difícil aceptar que esas asignaturas que abordan distintos conocimientos requieren de infinitos diferentes, que se construyen desde lugares diversos y en respuesta a preguntas que son de distinta naturaleza. El problema está en que el Profesorado le da entidad a uno sólo de ellos, al de Cantor. El otro se ignora, se sobreentiende construido y se oculta detrás de procesos que no le dan una significación real.

## Capítulo 7

### Conclusiones

A continuación se presentan algunas de las conclusiones a las que se arriba luego de finalizar esta investigación. Si bien inicialmente el problema era evidente pero no el camino que había que seguir, con el proceso el camino se fue aclarando en función de las actividades que se fueron desarrollando. Una de las primeras razones que nos llevaron a intentar abordar este tema, estuvo relacionada con la familiaridad del concepto. Pero resultó ser que esa cercanía con la noción no es un beneficio, sino en muchos casos una complicación. Y no sólo por eso, sino por la abstracción que se requiere para poder entender de qué se trata el infinito.

El defecto es aquí, en principio, del lenguaje común, que deja las significaciones en una gran indeterminación. Pero nuestra relación habitual con el lenguaje es implicada tanto o más: frente a las palabras, sobre todo cuando se trata de “substantivos”, partimos inmediatamente a la búsqueda de un referente – como si debiese haber “alguna cosa” que responda al término “infinito” de la que se intentara adquirir conocimiento. ¿Qué hay sino una creencia naïve (ingenua) e irreflexiva acerca de la “realidad” de las palabras? Si la vía propuesta por d’Alembert es interesante, es porque ella exige antes que nada resistir

a ese realismo naïve que nos hace tomar las palabras por las cosas o por los signos de las cosas (Burbage y Chouchan, 2002, p. 11)

No hay cosas que sean infinitas en la vida real, fuera de la escuela, fuera de la matemática, pero es ahí donde primero construimos el infinito. ¿Por qué? Porque hay aspectos que exceden nuestra comprensión que el infinito resulta de una amplia utilidad. Pero ahí se acaba la sencillez del infinito, en la vida real. En la escuela y en la matemática, nadie sabe de qué se habla. Y es ese infinito, que se llama igual que el otro, el que se miró en esta investigación.

### **Lo que saben y piensan los estudiantes en relación al infinito**

El objetivo de la presente investigación fue planteado en dos sentidos, y es de ese modo que se pretenden analizar los resultados: por un lado, detectar las características que tienen el infinito que está presente en el discurso matemático escolar de la escuela media; y por otro, analizar cuáles son las construcciones que del infinito se hacen en la formación docente. Desde el conocimiento personal de la carrera de Profesor de Matemática, se sabe que el infinito como objeto a ser construido (al menos en una de sus manifestaciones) es parte del discurso matemático escolar del Profesorado. Y por otro lado, desde el conocimiento de lo que ocurre en la escuela media en la Argentina, se sabe que el infinito no es ni siquiera discutido tangencialmente en ese nivel educativo. El problema que se detectó tiene que ver, entonces, con las causas que hacen que esa noción, que sí es parte de lo que el futuro docente construye, no llegue a las aulas de escuela media.

Ese problema fue, como ya se dijo anteriormente en este trabajo, cambiando a medida que iban planteándose preguntas en función de las respuestas obtenidas.

Resulta evidente frente a las primeras indagaciones, que el infinito de Cantor, el que responde a la cardinalidad, el que se construye en el Profesorado; no es el que resulta de utilidad en la escuela media. Los futuros docentes con los que se analizó la obra de Cantor y Bolzano lo declaran sin lugar a dudas. Reconocen que esa construcción resuelve la manera de ver al infinito vinculado con los conjuntos infinitos, entienden que ese infinito es el infinito en acto de los griegos, y el propio infinito actual de Cantor. Sin embargo, puestos a responder sobre el infinito que aparece en el discurso matemático escolar de la escuela media, reconocen que no es ese el que se necesita para comprender los conceptos y herramientas del cálculo, alrededor de las cuales gira la mayoría de los contenidos de los diseños curriculares de matemática.

A pesar de eso, puestos a proponer una manera de revertir los problemas que son capaces de detectar, sienten la necesidad de recurrir a lo construyeron en relación al trabajo de Cantor, aún cuando al analizar lo hecho por Bolzano, se quedan con pocos argumentos. La naturaleza de la formación docente de Argentina lleva a los alumnos a pensar que lo que no se puede definir correctamente no puede ser parte de lo que se hace en el aula. La búsqueda continua de rigurosidad y formalismo hace que los alumnos caigan en propuestas que ellos reconocen no puede ayudar a lo que los alumnos de escuela media necesitan.

Cantor construyó un infinito sustentado por una teoría de conjuntos que permite explicar la naturaleza de los conjuntos infinitos. Y no sólo eso, sino que logró la definición de los números transfinitos, de la manera de operar con esos números, y de la demostración de distintos tipos de infinito. Ese infinito, algebraico, asociado a las cantidades, que permite responder a la acción de contar, no es el infinito que permite explicar lo que ocurre con lo que varía, que es finalmente lo que se encuentra en las escuelas secundarias.

Es Newton el que logra caracterizar el infinito asociado a lo que varía, ya que la construcción del infinito que él hace nace desde el movimiento, desde la propia variación de posición de lo que se desplaza. Ese infinito, vinculado con la física y el análisis, es el que la escuela necesita para comprender las cuestiones relacionadas con el cálculo, con los límites, con los cambios y la variación.

El problema es que la manera en que la escuela media presenta a las funciones no está sustentada por un discurso de lo dinámico, de las relaciones entre conjuntos. Y es ahí, en esa pérdida del discurso variacional, donde se perdió la posibilidad de ver al infinito vinculado con el movimiento. El discurso matemático escolar del cálculo en las escuelas medias de la Argentina define y trata a las funciones como subconjuntos de productos cartesianos entre conjuntos. Desde ese lugar, la coherencia debería estar dada por la inclusión del infinito de los conjuntos en el mismo discurso. Pero resulta que, de esa manera, la idea que sustenta el estudio de límites y derivadas, la de cambio, queda oculta atrás de lo estático y acabado de la teoría de conjuntos.

Esta visión aparece de forma manifiesta en el estudio que se realizó alrededor de las representaciones sociales de los alumnos vinculadas con el infinito. Los alumnos con los que se trabajó el cuestionario de evocaciones libres en relación lo que es el infinito, resulta revelar que lo pueden responder está vinculado de manera directa con las ideas de cardinalidad, con aquello que han estudiado de libros, en lo que han sido evaluados y que está escrito en el lenguaje que eligen para expresar la matemática. No pueden pensar en un infinito analítico para el cual no tienen una definición y, peor aún, nadie se las puede proponer de manera rigurosa. El infinito analítico, que aparece como noción asociada con lo que piensan cuando lo hacen con el infinito matemático, es sólo un término, no una idea, no un concepto. El vacío detectado en relación a las respuestas que pueden dar a aquello que reconocen como un problema del discurso matemático escolar de la escuela media, hizo necesario el estudio del infinito en el contexto en que los

estudiantes lo reconocen en ese discurso, como noción que aparece fuertemente asociado a las funciones. Es el análisis lo que le da al infinito un contexto de significación en la escuela secundaria actual, y fue ese contexto el que se consideró al momento de intentar descubrir qué ideas comunes hay compartidas en relación a este término. Esta tarea se realizó en los dos ámbitos en que se desarrolla este trabajo: la escuela media y el instituto de formación docente. Las respuestas, sin embargo, no marcan la distancia de formación matemática entre ambas. Las funciones están tan vacías de significado en uno como en otro escenario.

El estudio epistemológico que se hizo de las funciones dio evidencia de las dificultades que esta noción ha acarreado. Su tratamiento de origen, instrumental, se convirtió en algo tan relevante para el desarrollo del conocimiento matemático, que los propios matemáticos del siglo pasado sintieron la imperiosa necesidad de definirla de manera formal y rigurosa. Esa definición, en la cual se describe a las funciones con base en las relaciones entre conjuntos, que es la que es propuesta dada en las aulas por los docentes, escondió la naturaleza variacional de las funciones y con eso al infinito que se define en relación al movimiento.

Los alumnos que respondieron al cuestionario han construido un discurso conjuntista para las funciones, pueden explicar los procesos de cálculo de límites y velocidad de cambio. Sin embargo, no pueden darle sentido a lo que significa lo que hacen o los resultados a los cuales llegan. No pueden presentar un discurso coherente en relación a lo que representa una gráfica, que pueden construir sin ningún problema cuando se les haya dado una fórmula que la representa. Resulta ser que el análisis, que es el contexto de significación del infinito de la variación, no es contexto de significación para ninguna de las nociones del análisis: ni las funciones, límites y derivadas, tienen significado, no hay un contexto de significación para ellas, sino una serie de algoritmos que se reproducen a la perfección para lograr superar lo que el contrato didáctico demanda.

Una situación similar pudo detectarse en las entrevistas en profundidad realizadas con tres estudiantes del Profesorado. El impacto que les produjo el estudio del trabajo de Cantor es innegable, y es ese tratamiento del infinito el que inicialmente creen va a ayudarlos a enfrentar su tarea como docentes de la escuela media. Pero al indagar y enfrentarlos con sus propias concepciones y lo que saben de análisis, así como lo que recuerdan de su formación en la escuela media, aparece el vacío, la dificultad para aceptar que eso que los impactó, los convenció e hizo asombrarse por el descubrimiento de lo inesperado. Y el único infinito que pueden reconocer con relación a la variación es el que tenían antes de llegar al Profesorado, ese que como vimos se construye de pequeños y que no tienen manera de fundamentar desde lo que les han enseñado es el conocimiento matemático.

Aún cuando los alumnos pueden ver los problemas de la educación secundaria, no tienen forma de enfrentarlos. En toda su formación no hay espacios en que se les enseñe a cuestionar lo que se hace en la escuela. Y la realidad es que cuando son puestos en evidencia, la sensación de vacío que sufren es mayor que lo que pueden manejar. No pueden aceptar que el infinito que han construido no alcance, no sea suficiente para algo que, peor aún, ya han estudiado y aprobado en los primeros cursos de su formación. Es necesario darles herramientas para poder enfrentar los cursos en los cuales van a trabajar, porque los próximos treinta años de educación de escuela media van a estar sujetos a lo que los egresados logren construir. No alcanza modificar lo que ocurre en una clase o en una escuela, es necesario llegar a los institutos de formación docente y cambiar esa formación, anquilosada y enquistada en viejas prácticas, que colocan al conocimiento en una posición donde el alumno no puede más que *comprarlo*, y a la ciencia en un lugar donde lo que importa es que sea formal y rigurosa, aún cuando eso no permita comprender lo que realmente se está haciendo.

## **Las respuestas a las preguntas que guiaron esta investigación**

En el primer capítulo de este trabajo se plantearon dos preguntas que fueron las que se intentó responder a lo largo del desarrollo de la investigación. Estas últimas giran en torno a una noción que es parte de la matemática, sin embargo no especifican la mirada que se tuvo sobre las personas que están (o estuvieron) comprometidos en los procesos de construcción de estas nociones. Todas las respuestas que se dan a continuación deben ser, entonces, pensadas desde el lugar de una comunidad que responde a sus necesidades a través de la construcción de conocimiento.

La primera pregunta que nos planteáramos se refería al infinito que el discurso matemático escolar de la escuela media necesita, y el que está presente en el Profesorado en el estudio que los futuros docentes hacen de la obra de Cantor. La respuesta a esta pregunta se sustenta en diversas cuestiones, por un lado, la experiencia en la propia tarea como docente de escuela media desde hace casi diez años y, por otro, lo que declaran los futuros docentes, que han pasado por esa escuela media y que están inmersos en un proceso de formación que los hace revisar para poder describir lo que en la propia escuela media se hace.

El infinito que se detectó es necesario para la escuela secundaria, resulta ser entonces el que nace de la visión dinámica de lo que se mueve, el que se construye en la búsqueda de los límites del espacio, el que llega a Newton habiendo nacido de la contemplación de los pueblos más antiguos. Ese infinito, que está más próximo que cualquier otro al que todos construimos desde la intuición, es el que los alumnos precisan para entender lo que sustenta a las funciones. Sin embargo, el infinito sólo no alcanza. El discurso matemático escolar hace uso de una forma de entender las funciones que están enfrentado con ese

infinito. Si el infinito que tiene sentido para el análisis es dinámico, entonces el registro en que presentan las funciones debería también ser dinámico. Mantener a las funciones en un registro estático e intentar construir un infinito dinámico sería introducir otro objeto de conflicto en la escuela. Es tan profundo el cambio que se necesita, que sólo la identificación del tipo de infinito involucrado resulta insuficiente.

La segunda parte de esta primera pregunta que se presentaba en la introducción de esta investigación se relacionaba con el infinito que se construye con el estudio de lo realizado por Cantor. Esta pregunta nace de la necesidad de reconocer lo que el discurso matemático escolar del Profesorado da como herramientas al futuro docente para enfrentar la tarea que tendrán que realizar cuando salgan a las escuelas. Se entiende que hay que saber qué se les está dando para poder comprender por qué si en el Profesorado se construye una noción de infinito matemático, eso nunca ha llegado a la escuela. Lo interesante es que los estudiantes del Profesorado proponen acercar este infinito que han construido a la escuela. Se cree que tal vez esto haya pasado por la mente de muchos de los profesores que hoy están en las aulas. Sin embargo, no se ha hecho. Posiblemente porque resulta que la naturaleza del infinito de Cantor no es coherente con los contenidos de los programas de matemática de la secundaria. El infinito de Cantor es estático, responde a cardinalidad de conjuntos y desde ese lugar es contradictorio con la continuidad que se necesita para el tratamiento de las funciones. Es el infinito que caracteriza a los conjuntos que son infinitos en sí mismos, que responden al infinito propio, en acto y que no permite establecer un puente con la noción de variación que se mencionaba en la respuesta de la pregunta anterior. El contexto de significación de ese concepto, que es el álgebra y la teoría de conjuntos, no tiene lugar en la escuela media como tal. El discurso matemático escolar es un híbrido que no se define por ningún registro, que se mueve entre el álgebra y el análisis pero no se “casa” con ninguno. Las funciones son relaciones entre conjuntos y, sin embargo, cuando hablamos de límite, hablamos de “moverse hacia” o “aumentar” o “acercarse a”. Y ese lenguaje que

usamos hace pensar en movimiento. Pero no construimos las funciones desde el movimiento. Las contradicciones del discurso son enormes. Y es en función de esas contradicciones que se piensa la respuesta a la segunda y última pregunta.

La segunda pregunta que nos planteamos al inicio de este trabajo estaba asociada a la búsqueda de una estrategia para poder acercar a la escuela media un infinito funcional al discurso matemático escolar que respete lo que los alumnos traen construido intuitivamente. Resultó de esta investigación que lo menos complicado será lo último que nos planteábamos en la pregunta, ya que el infinito que necesita la escuela media es el más cercano a aquel que se construye en escenarios no escolares. De hecho, esa construcción que culmina con la obra de Newton es la que se entiende se desprende de manera natural de lo que la intuición lleva a todos a preguntarse: dónde está el final de aquello que nos rodea y se aleja de nuestro alcance. La primera parte de la pregunta es la que resulta de mayor complejidad, ya que concluimos que no es suficiente la introducción de una nueva noción de infinito, hay que cambiar la forma en que la escuela habla de los conceptos que mayor importancia ocupan en los diseños curriculares. La manera de presentar las funciones debe ser modificada de raíz, es necesario incluir lo dinámico en el tratamiento de las funciones. Pero no sólo es necesario acercar lo dinámico a las funciones, hay que realizar un rediseño del discurso teniendo en cuenta primordialmente la **coherencia** de lo que se hace, se define y se dice. El infinito del álgebra que se construye en las instituciones de formación docente, el que responde a la cardinalidad y el que se muestra antiintuitivo, creemos debe mantenerse en el Profesorado, porque es indiscutible el importante rol que ocupa, así como el impacto que tiene para uno de los campos del conocimiento matemático. Además porque la fuerza con la que permea el pensamiento de los futuros docentes sugiere que no deberíamos perder lo que conmueve de esa manera, y que resulta de una belleza innegable.

El rediseño que se hace necesario es muy complejo, profundo, y lamentablemente en el sistema educativo argentino los cambios se hacen alejados de la investigación educativa, ya que quiénes los hacen lejos están de la tarea educativa. Creemos que el lugar donde podemos impactar es en el Profesorado y cambiar las nociones que los futuros docentes construyen en esa institución; porque de esa manera ellos cambiarán el discurso de las aulas cuando estén desenvolviéndose como docentes. El impacto será entonces en las mentes y manos de los docentes y no en los papeles, que para los que están inmersos en el sistema, poco importan.

### **Las representaciones sociales como herramientas de la socioepistemología: aportes**

En el segundo capítulo de este trabajo se realizó la presentación del marco teórico bajo el cual se proponía la investigación. Ese marco que es la socioepistemología, permite la concreción de una serie de tareas que son fundamentales de aquello que lleva a responder las preguntas que al inicio se proponen: la mirada en lo didáctico, el reconocimiento de la comunidad construyendo conocimiento, la identificación de las prácticas sociales y las prácticas de referencia que dan cuenta de los procesos y situaciones que provocaron la emergencia de conocimiento matemático. También se consideraron los escenarios socioculturales en los cuales se construyó y se construye conocimiento, así como los contextos de significación, del pasado y del presente.

Sin embargo, la necesidad de poder reconocer lo que las instituciones logran en la actualidad con los estudiantes, resulta complejo de ver, más aún cuando no se cuenta con una teoría que presente herramientas para lograr ver el conocimiento vivo en una comunidad actual. Fue para eso que se hizo uso en esta investigación

de la Teoría de las Representaciones Sociales, dado que el reconocimiento de los elementos compartidos en las respuestas de los futuros docentes dan cuenta, de acuerdo a esta teoría, de aquellas nociones que son centrales en el conocimiento construido por una comunidad que se ve en la necesidad de construir un objeto para poder comunicarse para dar respuesta a algo. Si bien se entiende que los resultados de una investigación educativa no tiene por qué ser generalizables, si creemos que es importante poder identificar ideas en común dentro de un mismo escenario, ya que eso es lo que debería hacer la educación: ayudar a construir un discurso que permitiera el reconocimiento de un grupo como parte de una comunidad y una cultura.

La teoría de las representaciones sociales se ocupa del reconocimiento de las construcciones sociales de diversas ideas, pero no se ocupa de las construcciones al seno de las instituciones educativas. No reconoce la intencionalidad de la construcción de conocimiento como se da en las escuelas, por lo cual como teoría para esta investigación, que tuvo la mirada puesta en las aulas en cada paso, resulta insuficiente. Pero sí aporta herramientas para preguntar, para mirar y para indagar, sin tener que caer en una herramienta cognitiva que pierda lo social y que haga la tarea del investigador que reconoce lo social, aún más complicada.

Si la investigación tiene por objetivo impactar en el sistema educativo, entonces es necesario mirar el sistema educativo de manera sistémica, igual que se mira la construcción de conocimiento en escenarios históricos. Creemos además que es necesario comenzar a evaluar lo que se logra con la entrada de los resultados de la investigación en las escuelas, y para eso se precisa una herramienta que permita ver lo que está ocurriendo al tiempo que ocurre, ver si las concepciones iniciales cambian, si las ideas centrales de los conceptos que se intentan construir se manifiestan de manera generalizada o es sólo algo que se ha agregado al

sistema de concepciones iniciales sin modificar su naturaleza original. Pensamos que las representaciones sociales pueden aportar también en ese sentido.

### **Las prácticas sociales asociadas al infinito**

A lo largo del cuarto capítulo de esta investigación se presenta un recorrido por la historia de los sucesos que llevaron a la construcción del infinito matemático como objeto. Esa construcción que se realizó resultó indicar un camino en dos sentidos: por un lado el infinito de los conjuntos, por otro, el infinito del espacio. Uno representa la necesidad de contar elementos, el otro, de entender el movimiento. Uno es estático y entiende a lo que es infinito como lo que ya estando acabado o bien no puede ser representado por cantidades finitas. El otro es dinámico y permite explicar la posibilidad de continuación ilimitada de un proceso.

Partiendo de esas dos miradas fue posible reconocer dos prácticas sociales que llevaron a la emergencia del infinito como concepto científico: la aritmetización de las cantidades por un lado, y la geometrización del espacio, por otro.

Son esas las prácticas que es necesario recuperar para la escuela media, para el infinito de la escuela media, para el rediseño del discurso matemático escolar. Sin embargo las prácticas solas no serán suficientes. Es necesario además recuperar el contexto de significación de cada una de ellas, ya que sin un escenario sociocultural redimensionado que permita que las nociones tomen significado en el sentido con que se las requiere, el cambio resultaría en la inserción de nuevas actividades que caerían en terreno seco. Hay que preparar el discurso para que en él puedan insertarse y crecer las prácticas que llevan a la construcción real y significativa de conocimiento matemático.

Los escenarios donde se realizaron las indagaciones de esta investigación responden a necesidades sociales distintas, la escuela secundaria como institución de formación de la ciudadanía, y el Profesorado como institución que prepara docentes con la experiencia suficiente para desenvolverse en las escuelas. En esos escenarios, las necesidades de los estudiantes son distintas, porque la sociedad necesita egresados de esas instituciones con un bagaje de conocimiento diferente. Sin embargo, de las dos instituciones sólo una incluye al infinito en su diseño curricular, y sólo se incluye a uno de ellos, pero sin atender al contexto de significación de ese infinito, por lo cual los estudiantes que han logrado construir esas nociones terminan por suponer que es ese **el infinito** de la matemática y no uno de los dos tipos de infinito que hemos señalado, definido de forma que permita comprender las características de algunos objetos. Sin contexto, lo que se hace no alcanza porque este último, además de dar significado, creemos que otorga límites de aplicación.

### **Aportes de esta investigación para el rediseño del discurso matemático escolar**

Como ya se ha dicho, creemos que el impacto que es necesario lograr en la escuela se va a lograr en la medida que logremos afectar la visión que de lo antes descrito construyen los futuros profesores. La política educativa argentina está tan alejada de las instituciones que, lamentablemente, nadie le presta atención. Las instituciones diseñan sus proyectos educativos, que son individualmente evaluados y que por lo general son tan flexibles, que permiten que cada docente haga en sus clases lo que su criterio le dicte. Es por eso que no creemos que, en la cultura educativa actual de nuestro país, el objetivo deba ser lograr el impacto en los diseños de las escuelas sino en las visiones que se construyen en el Profesorado de matemática.

No se consideró la presentación de una secuencia didáctica como conclusión de esta investigación, ya que creemos que las limitaciones de una secuencia impedirían que se pudiera abarcar todo lo que creemos que es necesario modificar. La modificación, como ya se dijo, es más profunda y debe ser iniciada en la introducción de las funciones en la escuela media y continuada hasta el final de ese nivel. Recién ahí podrá evaluarse si los cambios propuestos permiten una construcción de una serie de conocimientos fundamentados, coherentes y funcionales a la educación de la ciudadanía.

### **Maneras en que podría continuarse esta investigación**

Las siguientes son formas en que creemos podría continuarse esta investigación:

- Análisis de los resultados de la implementación de una serie de cursos de cálculo fundamentados sobre el estudio dinámico de las funciones
- Propuesta de cambio curricular en los planes del Profesorado donde se proponga un curso o seminario que contemple las diversas aproximaciones en relación al infinito
- Evaluación de los aportes de las representaciones sociales como herramientas de la socioepistemología en base a investigaciones de corte cognitivo





## Referencias bibliográficas

- Abric, J. (2001). Las representaciones sociales: aspectos teóricos. En J. Abric (Ed.), *Prácticas sociales y representaciones*. (pp. 11-32). México: Ediciones Coyoacán.
- Albert, J., Cazáres, M. y Castañeda, A. (1999). Construcción del infinito a través de fractales en estudiantes de secundaria. En R. Farfán (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 12 (1), 1-6. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Arrigo, G. y D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática* 16, (2), 5-19.
- Ávila Storer, A. (2001). Los profesores y sus representaciones sobre la reforma de las matemáticas. *Perfiles educativos* 23 (93), 59-86.
- Biedma, J. (2004). *La madre de las ideas: a vueltas con el infinito*. Recuperado el 17 de mayo de 2007 de <http://www.aafi.filosofia.net/NOCTUA/index.html>
- Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito*. México: Mathema.

- Buendía, G. y Ordóñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12(1), 7-28.
- Burbage, F. y Chouhan, N. (2002). *Leibniz y el infinito*. Paris: Presses Universitaires de France
- Camacho, A. y Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite finito. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4 (3), 237-265.
- Camacho, A. (2005). Sistemas sintéticos. Lo inteligible en los manuales para la enseñanza. *Revista Cinta de Moebio*, Universidad de Chile. Marzo, núm. 022.
- Camacho, A (2010). Geometrización del espacio real. Memorias de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Monterrey, México.
- Cantor, G. (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*. J. Ferreirós (Ed.), Barcelona: Crítica.
- Cantoral, R. (2001) Sobre la articulación del Discurso matemático escolar y sus Efectos Didácticos. En G. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 14. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. (2007). La Relme a sus veinte años. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20, 325-331. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cantoral, R. (2007). Tendencias de la investigación en matemática educativa: del estudio centrado en el objeto a las prácticas. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20, 1043-1053. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Cantoral, R., Farfán, R.; Lezama, J. y Martínez Sierra, G. (2006). Sociología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial, 83-102.
- Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. México: Pearson Education.
- Castañeda, A., Sánchez, M. y Molina, J. G. (2006). Estudio del pensamiento del profesor en un curso de formación docente a distancia. *Memorias del 22 Simposio Internacional de Computación en la Educación*. SOMECE: México.
- Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – Díaz de Santos
- Cordero, F., Cen Che, C. y Suárez Téllez, L. (2010). Los funcionamientos y las formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13 (2), 187-214
- Corzo, M. (2001). Georg Cantor y el infinito. *Memorias XII Encuentro de Geometría y sus aplicaciones*, 401-415. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional
- Crespo Crespo, C. (2002). La noción de infinito a través de la historia. En Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 15 (1), 529-534. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Crespo Crespo, C. (2006). Un paseo por el Paraíso de Cantor: Problemas y reflexiones sobre el infinito. En G. Martínez Sierra, (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, 28-34. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.
- Crespo Crespo, C. (2009). El aula de matemática, hoy: una mirada desde la docencia y la investigación en Matemática Educativa. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1145-1153. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2003). El concepto de función: su comprensión y análisis. En R. Delgado Rubí (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16 (1), 235-241. Santiago de Chile: Ediciones Lorena.
- De Mora Charles, M. (2009). Finito o infinito: una cuestión de gusto. *Ontology studies* 9, 43-54
- Díaz Moreno, L. (2003). Construyendo relaciones benéficas entre imaginarios culturales y aprendizajes matemáticos. En J. R. Delgado Rubí (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16 (1), 10-20. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Díaz Navarro, P. (2007). Reflexiones sobre el concepto de infinito. *Revista Digital Matemática Educación e Internet* 8 (1). Recuperado de <http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/infinito/index.html>
- Dreyfus, T. y Tsamir, P. (2002). Comparing infinite sets – a process of abstraction – The case of Ben. *Journal of Mathematical Behavior*, 21 (1), 1-23.
- Dreyfus, T. y Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structure about infinite sets. *Journal of Mathematical Behavior*, 23 (3), 271-300.
- Durán, A. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza.

- Espinoza Ramírez, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV del IPN, México.
- Ferreirós, J. (2003): Del neohumanismo al organicismo: Gauss, Cantor y la matemática pura. En J. Montesinos, J. Ordóñez y S. Toledo (Eds.), *Ciencia y Romanticismo*. Tenerife: Fundación Orotava de Historia de la Ciencia
- Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the learning of Mathematics* 9 (2), 9 – 14
- Garbin, S. (2003). Incoherencias y conexiones: el caso del infinito actual con estudiantes universitarios. Primera fase del estudio. En J. Delgado Rubí, (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16 (2), 406-414. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa* 8 (2), 169-193.
- Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de los alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias* 20 (1), 87-113.
- Homilka, L. (2008). *Influencia de las prácticas docentes en la visión de estudiantes y profesores de matemáticas en el aula y las decisiones didácticas*. Tesis de maestría no publicada. CICATA del IPN, México
- Imaz Jahnke, C. (2001). ¿Qué pasa con el infinito? *Avance y Perspectiva* 20, 305-311.
- Jahnke, H. N. (2001). Cantor's Cardinal And Ordinal Infinities: An Epistemological And Didactic View. *Educational Studies in Mathematics*. 48, 175-197

- Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics* 48, 137-174
- Koyré, A. (2008). *Del mundo cerrado al universo infinito*. Buenos Aires: Siglo XXI editores.
- Lavine, S. (2005). *Comprendiendo el infinito*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito de escenarios no escolares*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA del IPN, México.
- Lestón, P. y Veiga, D. (2004). Introducción al infinito. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17 (1), 404-410. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Lomelí Plascencia, M. (2009). Como intervienen las estructuras del lenguaje en la resolución de problemas matemáticos escritos verbalmente. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 327-335. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational studies in Mathematics* 48, 239-257.
- Montoro, V. y Scheuer, N. (2004). ¿Cómo piensan el infinito los estudiantes universitarios de distintas carreras? *Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales* 20 (3), 435-447.
- Montoro, V. y Scheuer, N. (2006). Distintas formas de pensar el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios. En G. Martínez (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, 156-161. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Mora, H. (2006). *Concepción proceso-objeto de función en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo*. Tesis de maestría no publicada. CICATA del IPN, México.
- Núñez, R. (2003). Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Imagination. En B. Baaquie y P. Pang (Eds.) *Metaphor and Contemporary Science*, (pp. 49-72). Singapur: National University of Singapore.
- Ortiz, J. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana. Boletín volumen 1 (2)*, 59-81.
- Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav del IPN. México
- Sánchez Luján, B. (2009). *El concepto de función matemática entre los docentes a través de representaciones sociales*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.
- Solaeche, M. (1995). La controversia entre L. Kronecker y G. Cantor acerca del infinito. *Divulgaciones matemáticas 3 (1/2)*, 115-120.
- Suárez, L. (2008). *Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológica*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav del IPN. México
- Tsamir, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics 38*, 209- 234.
- Tsamir, P. y Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education 30 (2)*, 213-219.

- Valdivé Fernández, C. (2006). Una experiencia en investigación-acción técnica: “el paso del infinito potencial al infinito ‘como un todo’ para comprender la construcción de los conjuntos infinitos”. En Martínez, G. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 19, 544-550. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Vergara Quintero, M. (2008). La naturaleza de las representaciones sociales. *Revista latinoamericana de Ciencias sociales de la niñez y juventud* 6 (1), 55-80
- Vita, V. (1992). El infinito matemático en Aristóteles y en su tiempo. *Mathesis* VIII (2), 115-140.
- Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa* 1 (1), 107-122
- Zellini, P. (1991). *Breve historia del infinito*. Madrid: Ediciones Siruela