Instituto Politécnico Nacional.

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Unidad Legaria.

“Comprobación experimental de un diseño didáctico para la estabilización de la noción de derivada.”

Presenta: Reynario Yudistire Cardona López.

DIRECTORES:
M. C. Mario Sánchez Aguilar.
Dra. María del Socorro Valero Cázarez.

Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa.

Cd. de México Junio de 2009.

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 28 del mes de mayo de 2009 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA Legaria para examinar la tesis de titulada:

"Comprobación experimental de un diseño didáctico para la estabilización de la noción de derivada"

Presentada por el(la) alumno(a):

Cardona	López	Reynario Yudistire
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 5 | 0 | 3 | 9 | 0 |

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

Ma. del Socorro Valero C.

Dra. María del Socorro Valero Cázarez

M. en C. Mario Sánchez Aguilar

CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día _16__ del mes ._______junio__________ del año _2009____, el (la) que suscribe Reynario Yudistire Cardona López__________________ alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro _A050390_________, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de ___Mario Sánchez Aguilar y María del Socorro Valero Cázarez_____ y cede los derechos del trabajo intitulado __Comprobación experimental de un diseño didáctico para la estabilización de la noción de derivada__, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección _cardonarey@hotmail.com__. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Reynario Yudistire Cardona Lopez.
Nombre y firma

Índice Pág.

GLOSARIO

Resignificación de la derivada.

Una noción matemática no puede reducirse a su simple definición y para el caso de esta investigación tiene más que un significado. El término resignificar no solo indica entender una definición, rebasa lo anterior.

Pensar en la derivada como un concepto matemático sujeto a un proceso en el cual se anexan, añaden, enriquecen y asignan significados extras que complementan los significados asignados a través de la instrucción escolar. A ese proceso se le llama resignificación de la derivada.

Tratamiento articulado entre la función y sus derivadas.

Cuando se habla de tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, puede que éste se presente de manera consistente, aunque esto no siempre sucede.

Con tratamiento articulado entre la función y sus derivadas quiero decir que, el estudiante tiene la capacidad para representar y manipular a una función particular y sus derivadas en diferentes contextos de representación (algebraico, numérico, verbal, gráfico, gestual, etc.) como medio o estrategia para la solución de problemas matemáticos. Una forma particular de manifestar esta capacidad se da cuando el estudiante identifica el signo de la derivada sucesiva en función del comportamiento creciente o decreciente de su antecesora, por ejemplo, si $f'(x) > 0$ corresponde a que $f(x)$ es creciente, si $f'(x) < 0$ es que $f(x)$ decrece, para la segunda derivada cuando es positiva se tienen que $f'(x)$ crece y si la segunda derivada es negativa es que $f'(x)$ decrece, para el caso de $f'''(x) > 0$ se da que $f''(x)$ es creciente, y viceversa si $f'''(x) < 0$ se tiene $f''(x)$ decreciente.

Cuando el estudiante emplea esta representación y manipulación de la función y sus derivadas como estrategia de solución, de manera frecuente, es entonces que podemos hablar de consistencia. Entonces decimos que se trata de un tratamiento articulado *consistente* entre la función y sus derivadas.

- **Ejercicio matemático.**

El ejercicio matemático se caracteriza por hacer uso de algoritmos, mnemotecnias, y fórmulas preestablecidas (como, $y = kx$ el resultado es k).

- **Problema matemático**.

El problema matemático quiero expresar que no hay algoritmos directos para resolverlo y la solución no es tan directa como en el ejercicio matemático.

Para el problema matemático el estudiante debe crear sus estrategias de solución en función de su conocimiento matemático.

- **Aparición de la noción de derivada sucesiva.**

La noción de derivada sucesiva aparece en el estudiante en el momento que éste comprende que los crecimientos o decrecimientos de una función están ligados con los signos de las derivadas de orden superior y esto puede ocurrir en un contexto de representación cualquiera (numérico, gráfico, etc.). Enseguida presento un ejemplo donde aparece la noción de derivada sucesiva en un contexto numérico.

- **Teorema factual.**

Se da cuando el estudiante cree que cuando $f(x) > 0$, entonces las derivadas sucesivas también son mayores a cero, ahora también aplica para el caso inverso cuando $f(x) < 0$, entonces las derivadas primera, segunda, tercera, n-ésima de dicha función son menores que cero. En realidad esto no siempre es cierto, dado que una función que es mayor que cero pero si decrece, entonces la primera derivada será menor que cero o negativa. Pero si la función es positiva y crece entonces la primera derivada es mayor a cero.

- **Contextos de representación.**

a) Gráfico: Cuando el estudiante realiza dibujos, esbozos de la función y sus derivadas, expresando aspectos de la relación entre los signos de las derivadas sucesivas y de f, por ejemplo, puede expresar con un signo + donde la derivada es positiva, o por el contrario con un signo – donde la derivada es negativa. Además hace uso de algunas relaciones como: los extremos relativos y el punto de inflexión de la función con los ceros y máximos o mínimos de la derivada, esto se puede extrapolar a las derivadas de órdenes mayores a 1.

b) Verbal: Se da cuando el estudiante se expresa mediante palabras en términos de crecimientos/ decrecimientos de la función y los signos de las derivadas primera, segunda, tercera, n-ésimas y algunos puntos clave, por ejemplo los ceros de la primera derivada son máximos o mínimos de f, también se puede tratar de diferenciar entre tipos de crecimientos de funciones. El estudiante se puede apoyar de gráficos para extraer la información que relacione f y sus derivadas.

c) Algebraico: quiero decir que el estudiante presenta fórmulas matemáticas $f(x)$ para dar solución de los problemas matemáticos. Por ejemplo, cuando el estudiante obtiene alguna derivada y la expresa de la forma $f'(x)$, $f''(x)$, etc.

d) Gestual: Cuando el estudiante hace uso de ademanes ó movimientos corporales como forma de comunicación de un saber matemático, por ejemplo para describir la forma una parábola en el aire, otro ejemplo sería hacer uso de los dedos para esbozar en alguna superficie la curva y encontrar un punto dado.

e) Numérico: Hace referencia a la utilización de números y sus operaciones para dar respuesta a los problemas matemáticos, aquí pueden hacerse uso de tabulaciones, cálculos aritméticos, etc.

RELACIÓN DE FIGURAS Y TABLAS.

Índice de tablas

TÍTULO:

"Comprobación experimental de un diseño didáctico para la estabilización de la noción de derivada"

RESUMEN

El presente trabajo tiene como propósito el comprobar de manera experimental un diseño didáctico para estabilizar la noción de derivada. La estabilización de la derivada es cuando una persona al enfrentar una tarea o problema matemático, hace un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas *consistentemente,* sin importar el contexto de representación que se le presente. La hipótesis que subyace al diseño didáctico es que la noción de derivada se estabiliza en el estudiante, solo hasta que aparece la noción de derivada sucesiva y se establece un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas consistentemente. El resultado de la comprobación experimental es que sólo en ocasiones se llega al tratamiento articulado por parte del estudiante Y, para dos estudiantes W y Z a lo sumo se llega a la aparición de la noción de derivada sucesiva, y por último en el estudiante X no aparece la noción de derivada sucesiva, también se presentan algunos obstáculos que probablemente no dejan acceder a la estabilización de la derivada.

TITLE:

"Experimental Verification of One Didactic Design for the Stabilization of the Derivative Notion"

ABSTRACT.

This work has the intention to verify experimentally one didactic design for the stabilization of the derivative notion. The stabilization of the derivative take place when one person confront one task or mathematical problem, then he/she made an articulate treatment between the function and its derivatives *consistently*, don't matter what representative context would found. The hypothesis that underlies the didactic design is that the derivative notion is stabilized in the student, until the notion of successive derivative appears and establishes an articulate treatment between the function and its derivatives consistently. The result of the experimental verification is that, only in some occasions the student Y reaches the articulate treatment; for students W and Z at the most they reach the notion of successive derivative; finally, for the student X don't appear the notion of successive derivative; also, many obstacles are present that probably don't permit to access to the stabilization of the derivative.

1. INTRODUCCIÓN.

En los cursos de cálculo diferencial la idea central es la derivada, la cual es presentada por medio de límites, fórmulas, reglas de 4 pasos, tangentes a una curva en algún punto, etc. , sin embargo, solo se basa en un contexto algebraico, en muchos libros de texto se utilizan gráficas de secantes y tangentes para explicar las derivadas.

A raíz de lo anterior busqué alguna manera para resignificar a la noción de derivada desde una perspectiva de las derivadas sucesivas, un diseño didáctico para mi punto de vista novedoso que se lleva a puesta en escena y se analizarán los datos qué mas adelante se muestran en los resultados de la aplicación del diseño didáctico, esto se hace por medio de localizar en los datos las definiciones dadas en la teoría (aparición de la noción de derivada , tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, la estabilización de la noción de derivada, así como los contextos: gráfico, verbal, numérico, etc.).

En seguida muestro qué se encontrará mientras se avanza en la lectura de este documento.

En el capítulo 1 introducción se da una descripción general del contenido de la tesis capítulo por capítulo.

En el capítulo 2 denominado antecedentes, se encuentran investigaciones entorno a la derivada, además se explica qué es Pensamiento y Lenguaje Variacional (PLyV) así como sus sublíneas de investigación, se muestra la pregunta de investigación y cuáles son los aportes de este estudio.

En el capítulo 3 llamado teoría se muestran los elementos con los cuales se usarán como lentes para mirar los datos y trazar las conclusiones, que son: resignificación de la derivada, aparición de la noción de derivada sucesiva, tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, contextos: gráfico, verbal, numérico, gestual, algebraico.

En el capítulo 4 denominado método se explica el instrumento aplicado, la población seleccionada, el escenario y modo de aplicación, el registro y selección de los datos.

En el capítulo 5 llamado resultados de la aplicación del diseño didáctico se presentan evidencias donde aparecen los conceptos mostrados en el apartado teórico.

En el capítulo 6 que corresponde a las conclusiones se responde a la pregunta de investigación.

En el capitulo 7 se localizan las referencias bibliográficas.

En el capítulo 8 se encuentran los anexos que son: introducción a la función (Anexo A), introducción a la función derivada (Anexo B), diseño didáctico para el aprendizaje de la noción de derivada (Anexo C), apéndice de las soluciones de los estudiantes (Anexo D).

2. ANTECEDENTES.

El aprendizaje de los conceptos del cálculo, pero especialmente el de la derivada, han sido el punto de atención de una parte de los investigadores en matemática educativa. Un clásico ejemplo es el trabajo de Orton (1983) que reporta algunos de los errores más comunes que los estudiantes frecuentemente experimentan al realizar tareas entorno a la diferenciación y a la razón de cambio. Otra investigación, la de Bingobali y Monaghan (2004), reporta acerca de las concepciones que tienen los estudiantes de ingeniería mecánica y matemáticas, entorno a la derivada y cómo influyen las prácticas departamentales en esas concepciones. Se menciona por parte de los investigadores que los ingenieros mecánicos tienen tendencia a relacionar las concepciones con la razón de cambio, mientras que los matemáticos lo relacionan con la tangente.

Los investigadores Cooley, Baker y Trigueros (2003) reportan algunas dificultades entorno a la derivada, y se basan en aspectos gráficos de las derivadas primera, segunda, el concepto de continuidad, y otros más para formular una explicación a las concepciones que los estudiantes poseen sobre ciertos conceptos del cálculo.

Este tipo de trabajos dieron pié a que se comenzara a elaborar diseños y propuestas didácticas que ayudaran a fortalecer el aprendizaje del concepto de derivada en los estudiantes de matemáticas; por ejemplo Kumar (2007) reporta en su estudio los efectos de usar las capacidades gráficas y numéricas del software llamado *Mathematica* en un curso de cálculo diferencial. La propuesta está basada en la suposición de que esta herramienta tecnológica sirve como suplemento en el desarrollo del conocimiento y habilidades del estudiante de cálculo diferencial. En ésta investigación se presentan actividades con las derivadas de orden uno y dos de una función en contexto gráfico.

Otra propuesta basada en el uso de recursos tecnológicos es la de Kamel, Rustem, Mahendran, Mohd (2008). Ellos reportan cómo mediante la animación se puede aumentar el aprendizaje y motivación de los estudiantes. En este trabajo, por ejemplo, se presenta a la derivada como pendiente de una recta de una tangente a una curva en un punto, crecimientos, decrecimientos, máximos, mínimos, etc. desde un punto de vista dinámico.

También puedo mencionar que hay modelos teóricos para tratar de describir cómo el estudiante va desarrollando ciertos niveles de pensamiento covariacional. Un ejemplo de estos desarrollos teóricos es el trabajo de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2002).

A partir de estos antecedentes se puede argumentar que el panorama del estudio de la derivada va desde la búsqueda de concepciones y errores que los estudiantes manifiestan durante el proceso del estudio de la derivada; hasta propuestas y diseños didácticos que tienen como propósito fortalecer en los estudiantes el entendimiento del concepto de derivada. En el caso de los trabajos mencionados previamente, y que ofrecen algún tipo de propuesta didáctica para el estudio de la derivada, éstos tienen en común el uso de recursos tecnológicos y que sólo abordan a lo sumo al tratamiento de la segunda derivada.

En los países de habla hispana hay una línea de investigación que se aboca al estudio de este tipo de problemas relacionados con el estudio de la derivada. Esta es la línea denominada Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), que de acuerdo a Cantoral, Farfán, Cordero, Alanis, Rodriguez y Garza (2000) “Estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo que le da cabida […] Es una línea de investigación que tiene una triple orientación. Por un lado, se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y epistemológico; en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticas del cambio; en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante estructuras variacionales consideradas en la escuela, el laboratorio y la vida cotidiana” (p.185).

Uno de los trabajos clásicos dentro de la línea de PyLV es el de Cantoral y Farfán (1998), donde se reportan algunas de las estrategias que presentan los estudiantes al abordar el estudio gráfico de una función y enfrentarlos con cuestiones relacionadas a las primeras tres derivadas de dicha función. Dentro de las respuestas es evidente notar que los estudiantes presentan dificultades al tratar a la tercera derivada. Algo que hay que resaltar es que en la actividad matemática que es presentada a los estudiantes, no se muestra expresión algebraica alguna y esto de alguna forma hace que sea un reto resolverla.

En Dolores (1998) se aborda el estudio de las concepciones que los estudiantes se forman en torno a la derivada y en Dolores (2000) se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada basada en la ideas variacionales, donde la base es la razón de cambio.

Una investigación que se enfoca en la búsqueda de la resignificación de la derivada, es la de Testa (2004). Ésta en particular busca resignificar el valor numérico de la segunda derivada.

Otro trabajo dentro del PyLV que plantea una propuesta didáctica para el estudio de las derivadas es el de Sánchez (2006). Aquí se muestra un diseño didáctico para introducir a los estudiantes a la derivada por medio de la articulación de contextos numérico-gráfico-físicos. Su base está en el uso de recursos tecnológicos y la idea matemática de diferencia.

Cantoral, Molina y Sánchez (2005, 2007) basan su trabajo en la idea de cambio y variación (para una definición de variación ver Cantoral, Molina y Sánchez (2005)). Además, en su trabajo son clave las ideas newtonianas sobre el estudio del movimiento de cuerpos celestes y el de diferencia. Cabe hacer mención que el uso de sensores de movimiento y calculadoras gráficas es incluido en su propuesta.

Algunas de las investigaciones mencionadas van orientadas a la búsqueda de estrategias de solución comunes, concepciones, y errores que manifiestan los estudiantes; mientras que, otras buscan desarrollar propuestas didácticas para reforzar la noción de derivada en el estudiante.

A continuación presento al PyLV y sus diferentes sub-líneas de trabajo que se han realizado hasta ahora. Este esquema me servirá para insertar o situar mi propia investigación en alguna de esas sub-líneas:

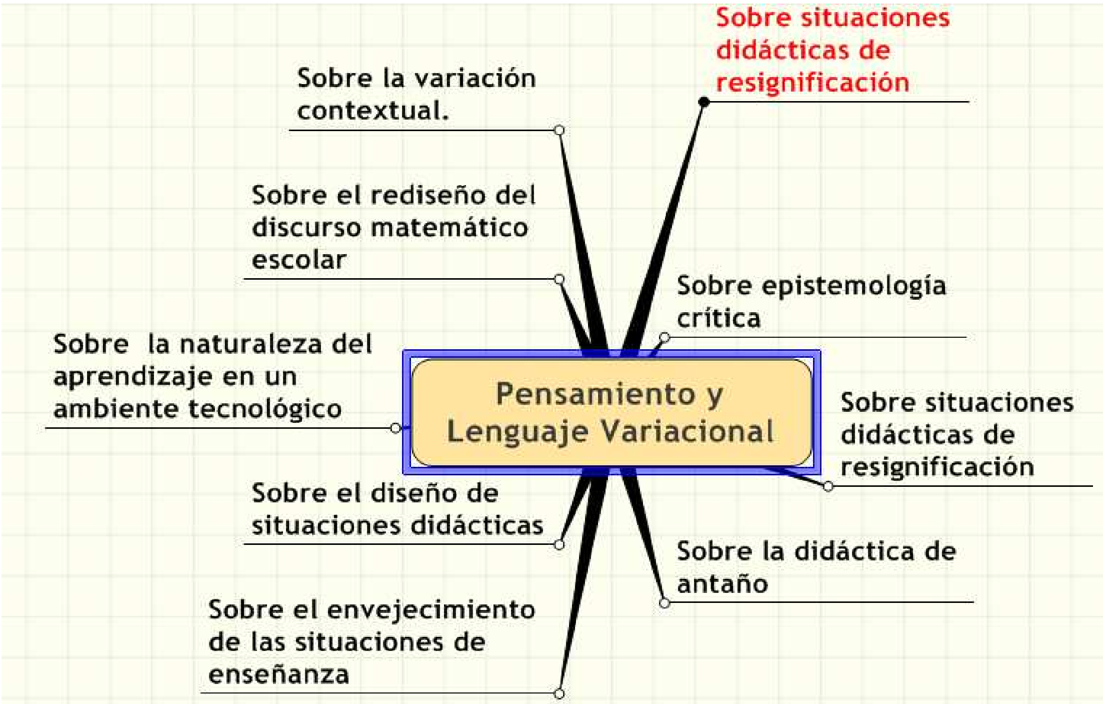


Figura 1.1. Sobre el PyLV y sus sub-líneas de investigación. Valero 2000.

El presente trabajo se inscribe en la sub-línea denominada situaciones didácticas de resignificación. Dado que se busca anexar, incorporar, añadir significados a la noción de derivada, pero no desde un punto de vista tradicional. Entendiendo por esto, que el estudiante abordará problemas matemáticos que requieren para su resolución la creación de estrategias, comprensión de algunas relaciones entre la función y sus derivadas, así como el tránsito entre diferentes contextos de representación, entre otros elementos; a diferencia de simples ejercicios matemáticos, donde las algoritmias para determinar tangentes en un punto a una curva, límites, ó fórmulas parecen ser el único medio para darle sentido a la derivada. No se busca modificar el qué ni el cómo enseñar la noción de derivada, simplemente es una manera alternativa para fortalecer el aprendizaje de esa noción.

Este trabajo está basado en una situación didáctica de resignificación que con anterioridad se ha aplicado y reportado en los trabajos de Gonzáles (1999) y Valero (2000).

He decidido probar si los resultados que se produjeron en esos estudios, al aplicar una situación didáctica determinada (la cual se discutirá con más detalle en la sección 4.1 de este mismo trabajo) pueden ser reproducidos al aplicar la misma actividad en un nuevo contexto. Más particularmente puedo afirmar que el objetivo de este estudio es:

La comprobación, a través de la puesta en escena de una situación didáctica específica, de que la noción de derivada se estabiliza en el estudiante, sólo hasta que la noción de derivada sucesiva aparece y se establece un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas consistentemente.

Como se ha mencionado previamente hay investigadores que enfocan su atención en el aprendizaje de la derivada, algunos centrados en los errores, pero otros en diseños didácticos que lleven a una resignificación de la noción de derivada. Esta última es la dirección en la que este trabajo se desarrolla y pretende aportar.

Posiblemente podría aparecer el cuestionamiento: ¿qué se aporta si ya se hizo esto antes?

Algunas de las aportaciones de este trabajo son el refinamiento de las definiciones de estabilización de la noción de derivada, tratamiento articulado entre la función y sus derivadas consistentemente, aparición de la noción de derivada sucesiva y resignificación de la derivada, aunque estos términos no son nuevos o inéditos se pretende que al extender o modificar los conceptos sirvan como una especie de lentes que le den coherencia al análisis de los resultados que se han obtenido de manera empírica. El refinamiento de las definiciones mencionadas anteriormente se debe a que aparecen de forma implícita en las investigaciones de Gonzáles (1999) y Valero (2000), es decir, no se dice explícitamente en que consiste cada una de ellas.

Sabemos que es una pequeña aportación al PyLV, sin embargo, se espera que sirva para futuras investigaciones que requieran de resignificar a la noción de derivada desde una perspectiva de las derivadas sucesivas.

3. TEORIA

En este apartado de la tesis se encuentran los conceptos teóricos con los cuales se ha estructurado este trabajo y se han analizado los datos empíricos obtenidos después de la aplicación del diseño didáctico.

Como ya se ha mencionado este trabajo de investigación se inserta en la línea de investigación denominada Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), particularmente en una de sus vertientes, llamada situaciones didácticas de resignificación (ver figura 1.1). Afirmo que mi trabajo pertenece a la rama de situaciones didácticas de resignificación porque se trata a la derivada desde una perspectiva no tradicional, es decir, no se busca que el estudiante aborde el diseño didáctico por medio sólo de fórmulas que carecen de otro sentido a no ser que el algebraico, tampoco se busca que se apropie de la noción de derivada desde la perspectiva de las tangentes a una curva o por medio de límites o regla de los 4 pasos; lo que se quiere es que el estudiante se apropie de la noción de derivada desde una perspectiva de las derivadas sucesivas, es decir, donde , por ejemplo, el registro gráfico es vital para darle otro significado a la derivada, donde las raíces de la primera derivada se vean como los máximos y/o mínimos relativos de la segunda derivada, además donde el papel de los crecimientos y/o decrecimientos de la función sean relacionados con los signos de su primera, segunda y n-ésima derivada, pudiendo ocurrir lo anterior en diferentes contextos de representación.

El nombre de la línea de investigación en que se encuentra inscrito mi trabajo, pero particularmente mi pregunta de investigación se encuentran fuertemente ligados a conceptos teóricos (por ejemplo, resignificación, tratamiento articulado, aparición de derivada sucesiva, etc.) algunos de ellos incluso empotrados dentro de otros. De aquí la necesidad de mostrar, de manera explícita, lo que estoy queriendo decir con cada uno de los conceptos involucrados en mi trabajo.

Ciertamente los conceptos teóricos que trataré de explicitar no son conceptos inéditos dentro del PyLV, sin embargo, algunas definiciones se han ampliado y/o modificado, con el fin no sólo de mantener coherencia interna en el sistema de definiciones (es decir, tratar de evitar que los conceptos choquen o se contradigan); sino la conexión entre estos conceptos y el análisis de la evidencia empírica obtenida durante este estudio.

La presentación de los conceptos se hará en el siguiente orden:

- 3.1. Resignificación de la derivada.
- 3.2. Tratamiento articulado entre la función y sus derivadas.
- 3.3. Aparición de la noción de derivada sucesiva.
- 3.4. Estabilización de la noción de derivada.
- 3.5. Teorema factual.
- 3.6. Contextos de representación.
    - 3.6.1 Gráfico.
    - 3.6.2 Verbal
    - 3.6.3 Algebraico
    - 3.6.4 Gestual
    - 3.6.5 Numérico

3.1 Resignificación de la derivada.

Una noción matemática no puede reducirse a su simple definición y para el caso de esta investigación la noción matemática tiene más que un significado. El término resignificar no solo indica entender una definición, rebasa lo anterior.

Pensar en la derivada como un concepto matemático sujeto a un proceso en el cual se anexan, añaden, enriquecen y asignan significados extras que complementan los significados asignados a través de la instrucción escolar. A ese proceso se le llama resignificación de la derivada.

Por ejemplo, pensemos unos instantes ¿qué significados asociados al concepto de derivada tiene un estudiante que acaba de cursar cálculo diferencial sin haber recibido instrucción desde la perspectiva de la derivada como una organización de las derivadas sucesivas?

Es probable que lo interprete como una tangente a una curva en un punto, como la pendiente de esa recta tangente, como la razón de cambio por medio de límites, o como fórmulas de derivación. ¿Acaso estas respuestas son las únicas posibles?

El proceso de resignificación debe aportar más que una sola interpretación al concepto matemático de la derivada. Para aclarar lo anterior, presento un ejemplo basado en mi experiencia como profesor de cálculo y es clásico el cual se desarrolla en un contexto algebraico:

En una clase el profesor pregunta a sus estudiantes:

¿Cuál es la derivada de $f(x) = x^4 - x^2$?

Un estudiante responde $f'(x) = 4x^3 - 2x$.

Parece que aquí termina todo. Es decir, no se tienen más palabras o recursos para abordar a la derivada desde este contexto de representación.

Empero ¿qué resulta si el mismo ejercicio se le presenta en un contexto gráfico con ausencia de lo algebraico? En esta nueva situación se pide determinar al menos los bosquejos de las primeras tres derivadas.

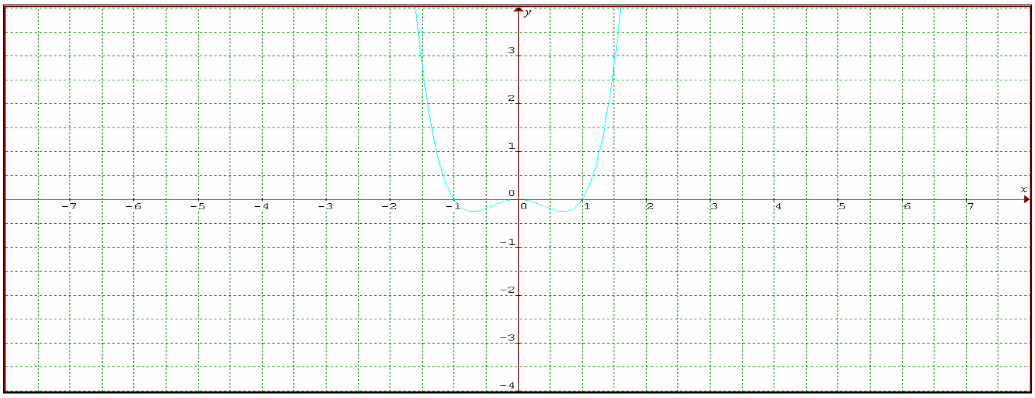


Figura 3.1.: La función f sin fórmula.

Muy probablemente será un problema difícil si el estudiante sólo ha abordado a la derivada desde el punto de vista tradicional en el curso de cálculo diferencial con duración de 48 horas, por tradicional quiero decir que se abordan temáticas como límites, la derivada como razón de cambio, velocidades, diferentes reglas de derivación para funciones polinomiales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc., además se trata la determinación de tangentes, subtangentes, subnormales, aplicaciones de la derivada por medio de criterios de primera y segunda derivada, determinación máximos y mínimos, etc.; sin embargo esta actividad toma otro sentido si el estudiante hace uso de estrategias gráficas para su solución.

Se presenta una posible estrategia desde la perspectiva de la derivada sucesiva y es ver la función f y dividirla en intervalos para ver dónde crece y dónde decrece f (ver figura 3.1). Se puede apreciar que la función viene decreciendo desde el infinito negativo de x desde aproximadamente $x = -0.7$; se puede decir que si hay decrecimiento entonces la primera derivada es negativa.

Continuando con las zonas crecientes o decrecientes, tenemos que de $x = -0.7$ hasta cero de la función tiende a crecer. Mientras tanto en $x = 0$ la gráfica no crece ni decrece, más delante la curva presenta un comportamiento decreciente hasta aproximadamente $x = 0.7$, entonces decimos que la primera derivada es negativa, sin embargo, después de $x = -0.7$ la gráfica tiende a crecer por lo tanto la curva presenta un comportamiento para la primera derivada mayor que cero o positivo.

Resumiendo la información y plasmándola en un gráfico aproximado de lo que sería la primera derivada f' de la función cuártica se obtiene un bosquejo como el mostrado en la figura 3.1. El gráfico en color rojo es una aproximación a la primera derivada de la función f.

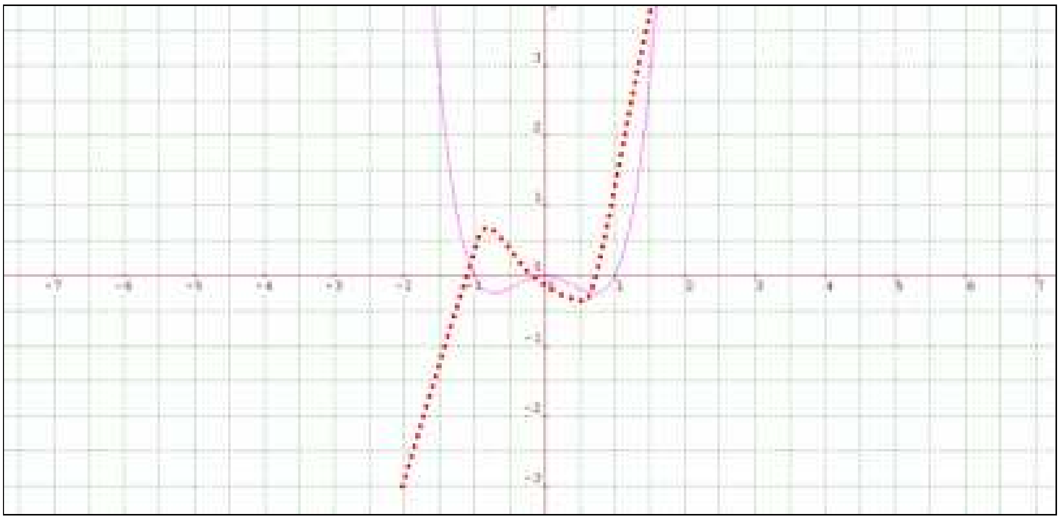


Figura 3.2.: La función f y una aproximación gráfica de la primera derivada.

Este mismo procedimiento puede ser aplicable para las derivadas de órdenes dos y tres. Es importante aclarar que las gráficas producidas con esta técnica son aproximaciones, muy posiblemente no las mejores, sin embargo dan una idea de lo que se puede realizar por medio de las estrategias gráficas como vía para la resignificación de conceptos matemáticos, en este caso el de la derivada.

Las acciones que posibilitan la resignificación son salirse de lo algorítmico dado por la instrucción escolar, no solo repetir lo que dice el profesor en clase de cálculo; los medios usados para resignificar pueden ser buscar o elaborar diseños didácticos que lleven al estudiante a enfrentarse con problemas matemáticos que requieran la producción de estrategias para su solución.

El aprendizaje es que el estudiante se adapte a un problema matemático y adquiere conocimientos matemáticos, mientras la resignificación es asignar nuevos significados a lo ya aprendido.

3.2 Tratamiento articulado entre la función y sus derivadas.

Cuando se habla de tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, puede que éste se presente de manera consistente, aunque esto no siempre sucede.

Con tratamiento articulado entre la función y sus derivadas quiero decir que, el estudiante tiene la capacidad para representar y manipular a una función particular y sus derivadas en diferentes contextos de representación (algebraico, numérico, verbal, gráfico, gestual, etc.) como medio o estrategia para la solución de problemas matemáticos. Una forma particular de manifestar esta capacidad se da cuando el estudiante identifica el signo de la derivada sucesiva en función del comportamiento creciente o decreciente de su antecesora, por ejemplo, si $f'(x) > 0$ corresponde a que $f(x)$ es creciente, si $f'(x) < 0$ es que $f(x)$ decrece, para la segunda derivada cuando es positiva se tienen que $f'(x)$ crece y si la segunda derivada es negativa es que $f'(x)$ decrece, para el caso de $f'''(x) > 0$ se da que $f''(x)$ es creciente, y viceversa si $f'''(x) < 0$ se tiene $f''(x)$ decreciente.

Cuando el estudiante emplea esta representación y manipulación de la función y sus derivadas como estrategia de solución, de manera frecuente, es entonces que podemos hablar de consistencia. Entonces decimos que se trata de un tratamiento articulado *consistente* entre la función y sus derivadas.

Dentro de la recién mencionada definición de tratamiento articulado se menciona el concepto de problema matemático.

El ejercicio matemático se caracteriza por hacer uso de algoritmos, mnemotecnias, y fórmulas preestablecidas (como, $y = kx$ el resultado es k).

El problema matemático quiero expresar que no hay algoritmos directos para resolverlo y la solución no es tan directa como en el ejercicio matemático.

Para el problema matemático el estudiante debe crear sus estrategias de solución en función de su conocimiento matemático.

3.3 Aparición de la noción de derivada sucesiva.

La noción de derivada sucesiva aparece en el estudiante en el momento que éste comprende que los crecimientos o decrecimientos de una función están ligados con los signos de las derivadas de orden superior, esto puede ocurrir en un contexto de representación cualquiera (numérico, gráfico, etc.). Enseguida presento un ejemplo donde aparece la noción de derivada sucesiva en un contexto numérico.

Consideremos una tabla numérica con pares ordenados del tipo $(x, f(x))$ que representan a una función real de una variable. Podríamos asegurar en función de la definición de este apartado, que la noción de derivada sucesiva ha aparecido si el estudiante comprende que si los valores de $f(x)$ aumentan en la tabla, el signo de la primera derivada es mayor que cero, y que cuando esos valores tienden a decrecer el signo de la primera derivada es menor que cero.

Este proceso puede presentarse también de manera inversa, es decir, obtener información de la función original a partir de sus derivadas;

por ejemplo se puede decir que si la primera derivada de una función es mayor que cero o positiva, la función original será creciente. La segunda derivada es positiva si la primera derivada es creciente y así sucesivamente.

Cabe mencionar que en un contexto gráfico, existen puntos clave (como los máximos, mínimos y de inflexión) que son útiles en la determinación de las relaciones entre la función y sus derivadas. Presentaré un ejemplo gráfico para ilustrar lo anterior:

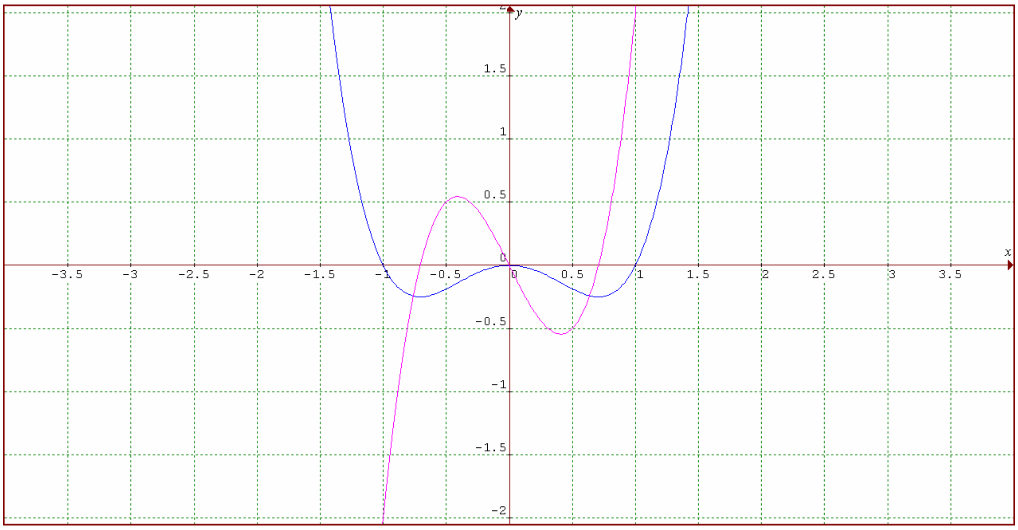


Figura 3.3.: La función f y su primera derivada.

La función en color azul de la figura 3.3 es la función f, mientras que la gráfica en color rosa corresponde a su primera derivada f'. Véase como aproximadamente en $x = 0.75$ hay un mínimo en f y corresponde a un cero o una raíz de la primera derivada. Más a la izquierda se encuentra un punto de inflexión en $x = -0.40$ correspondiente a un máximo local de la primera derivada, luego en x igual a cero (hay un máximo que corresponde con otro cero de la derivada). Mientras avanzamos a la derecha en aproximadamente

$x = -0.40$ hay otra inflexión solo que ahora corresponde a un mínimo local de la primera derivada.

Este tipo de procedimientos más la información de los crecimientos / decrecimientos relacionando a la función con los signos de la derivada, pueden aplicarse para la determinación de las derivadas de orden superior.

3.4 Estabilización de la noción de derivada.

Se dice que la estabilización de la noción de derivada, como una organización de las derivadas sucesivas, se ha dado en una persona cuando ésta, al enfrentar un problema matemático, hace un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas *consistentemente*, sin importar el contexto de representación en que se le presente. Cuando el estudiante representa y manipula la función y sus derivadas como estrategia de solución, de manera *frecuente*, decimos que es *consistente*.

3.5 Teorema factual.

Un teorema de esta naturaleza puede aparecer no sólo en el estudio de las derivadas, pero a continuación muestro como se puede caracterizar.

Se da cuando el estudiante cree que cuando $f(x) > 0$, entonces las derivadas sucesivas también son mayores a cero, ahora también aplica para el caso inverso cuando $f(x) < 0$, entonces las derivadas primera, segunda, tercera,…, n-ésima de dicha función son menores que cero. En realidad esto no siempre es cierto, dado que una función que es mayor que cero puede ser decreciente y entonces la primera derivada será menor que cero o negativa. Pero si la función es positiva y crece entonces la primera derivada es mayor a cero.

Enseguida muestro un ejemplo donde en un intervalo parece tener sentido este teorema factual y otro intervalo que corresponde a un contraejemplo del mismo teorema, ambos en la misma función y sus dos primeras derivadas.

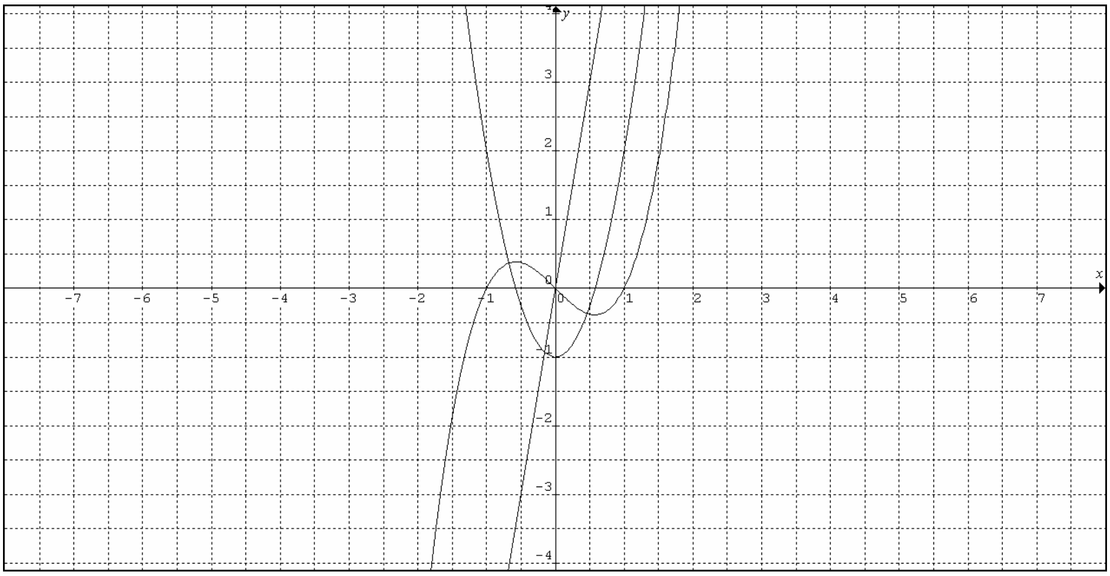


Figura 3.4.: Sobre el teorema factual.

En esta figura podemos ver tres gráficos la función cúbica corresponde a la función $f(x)$, la parábola a la primera derivada y la línea recta a la segunda derivada. En el intervalo de $(-0.5,0)$ para x, la primitiva es mayor que cero pero la primera y segunda derivada son menores que cero, es decir, no es cierta esa creencia del teorema factual para este intervalo. Ahora si vemos el intervalo de $(0,2)$ para x podemos ver que la primitiva, y sus dos primeras derivadas son mayores que cero, parece que aquí sí encaja la creencia de la existencia de ese teorema factual. Sin embargo como se muestra no siempre se cumple.

El teorema factual son creencias que puede tener un estudiante en cuanto al mismo comportamiento de una función y sus derivadas, como por ejemplo: si $f(x) > 0$, entonces $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $f'''(x) > 0$, así con las demás derivadas sucesivas, esto no siempre es cierto.

3.6 Contextos de representación.

3.6.1 Gráfico: Cuando el estudiante realiza dibujos, esbozos de la función y sus derivadas, expresando aspectos de la relación entre f y los signos de las derivadas sucesivas de f, por ejemplo, puede expresar con un signo + donde la derivada es positiva, o por el contrario con un signo – donde la derivada es negativa. Además hace uso de algunas relaciones como: los extremos relativos y el punto de inflexión de la función con los ceros y máximos o mínimos de la derivada, esto se puede extrapolar a las derivadas de órdenes mayores a 1.

3.6.2 Verbal: Se da cuando el estudiante se expresa mediante palabras en términos de crecimientos/ decrecimientos de la función y los signos de las derivadas primera, segunda, tercera, n-ésimas y algunos puntos clave, por ejemplo los ceros de la primera derivada son máximos o mínimos de f, también se puede tratar de diferenciar entre tipos de crecimientos de funciones. El estudiante se puede apoyar de gráficos para extraer la información que relacione f y sus derivadas.

3.6.3 Algebraico: quiero decir que el estudiante presenta fórmulas matemáticas $f(x)$ para dar solución de los problemas matemáticos. Por ejemplo, cuando el estudiante obtiene alguna derivada y la expresa de la forma $f'(x)$, $f''(x)$, etc.

3.6.4 Gestual: Cuando el estudiante hace uso de ademanes ó movimientos corporales como forma de comunicación de un saber matemático, por ejemplo para describir la forma de una parábola en el aire, otro ejemplo sería hacer uso de los dedos para esbozar en alguna superficie la curva y encontrar un punto dado.

3.6.5 Numérico: Hace referencia a la utilización de números y sus operaciones para dar respuesta a los problemas matemáticos, aquí pueden hacerse uso de tabulaciones, cálculos aritméticos, etc.

3.7 Nivel de Pensamiento Y Lenguaje Variacional.

Podría decir que el nivel de PLyV más bajo será la aparición de la noción de derivada sucesiva y el más alto la estabilización de la noción de derivada, esto desde la perspectiva de la derivada como una organización de las derivadas sucesivas. En el nivel intermedio se tendría la articulación entre la función y sus derivadas.

3.8 A manera de reflexión.

En este apartado teórico se trata de explicitar los conceptos clave para la estructura de esta investigación.

La resignificación de la derivada es un proceso que añade significados a ese ente matemático; significados que difícilmente se producen en un curso de cálculo diferencial tradicional, donde se encierran un cúmulo de algoritmias, y conceptos como pendiente de una recta tangente, razón de cambio, entre otras. Sin embargo, creo que sin importar el registro de representación de origen, el estudiante puede hacer uso de argumentos variacionales (una definición de argumentos variacionales se puede encontrar en Cantoral, Molina y Sánchez (2005)) para resolver tareas matemáticas y así mediante la articulación entre la función y sus derivadas dar una estabilización de la derivada. Este trabajo busca aportar evidencias en esta dirección.

Cuando un estudiante identifica las relaciones existentes entre los extremos relativos de la función f y los ceros de la derivada f', los puntos de inflexión de f y los extremos locales de la derivada, así como las relaciones de crecimientos y decrecimientos con los respectivos signos de las derivadas, y además se hace de manera consistente, entonces se estabiliza la noción de derivada.

Un aspecto importante a mencionar, es que un estudiante puede hacer uso del tratamiento de la función y sus derivadas, sin embargo si este no es consistente, entonces se dice que no hay estabilidad en la noción de derivada como una organización de las derivadas sucesivas.

4. MÉTODO.

En este capítulo me refiero al método utilizado para la generación, recolección y análisis de los datos.

Los elementos metodológicos que se abordan en este apartado son:

4.1 El instrumento aplicado.
4.2 La población seleccionada.
4.3 El escenario y modo de aplicación.
4.4 El registro y selección de los datos.

4.1 El instrumento aplicado.

Como he mencionado en el capítulo de Antecedentes, este trabajo está basado en una situación didáctica de resignificación que con anterioridad se ha aplicado en los trabajos de Gonzáles (1999) y Valero (2000). Esta situación didáctica puede ser encontrada en el Anexo C.

Dicho instrumento está formado por dos secciones. Cada una de esas secciones está integrada por problemas denotados de acuerdo al orden y la sección a la que pertenecen. Por ejemplo, en el caso del problema 1.1, el primer número de izquierda a derecha indica la sección y el segundo número indica que se trata del primer problema de esa sección. Así, tenemos que la notación 1.5 indica que ese es el quinto problema de la sección 1.

La primera sección está conformada por 10 problemas.

Enseguida se presenta la sección y los objetivos particulares que se pretende lograr con cada reactivo.

Sección 1.

Se busca que el estudiante al ir resolviendo los distintos problemas, relacione la inclinación de una curva con crecimientos, decrecimientos de la función, también se espera detectar qué tipo de concepciones existen en cuanto al teorema factual, es decir, si la función f es mayor a cero, la primera derivada es mayor a cero, la segunda derivada es mayor a cero, y así sucesivamente hasta la n-ésima derivada que sería también mayor a cero. Lo mismo ocurriría en el caso en que f es menor que cero, sus primera, segunda y tercera derivada también serán menores que cero.

Problema 1.1.

Asociar o no el grado de inclinación de la función con la condición $f'(x) = 0$. Los estudiantes tienen nociones de grados de inclinación.

Problema 1.2.

Detectar si los estudiantes tienen la concepción del teorema factual, ya enunciado.

Problema 1.3.

Se busca trazar las dos primeras derivadas y relacionarlas con sus signos en los puntos A, B, se requiere de la aparición de la derivada sucesiva.

Problema 1.4 y 1.4 bis.

Se da una expresión de un polinomio y se pide calcular la primera y segunda derivada y evaluarlas en dos puntos con las características de que al hacer las evaluaciones correspondientes éstas contradigan el teorema factual.

Problema 1.5.

Se espera que los estudiantes refuten el teorema factual, anteriormente descrito.

Problema 1.6.

Asociar una gráfica a la segunda derivada cuando ésta tiene un determinado signo, que en este caso es negativa.

Problema 1.7.

Asociar la forma geométrica a la segunda derivada. Es decir, el estudiante debe trazar una función cuya segunda derivada sea mayor a cero en el intervalo cerrado $[a,b]$.

Problema 1.8.

Detectar si los estudiantes tienen la concepción del teorema factual.

Problema 1.9.

Identificar si los estudiantes tienen un nivel de desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional.

Problema 1.10.

Las preguntas son de tipo verbal-reflexivo, se dan algunas afirmaciones relacionadas a la función y los signos de las derivadas sucesivas (hasta el orden tres como máximo) con algunos puntos como inflexiones, máximos, mínimos y se pide que el estudiante explique las respuestas. No son simples ejercicios matemáticos, lo que se requiere en estos problemas es que el estudiante haga uso de la aparición de la derivada sucesiva, tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, etc. y sólo pueden contestarse si hay tránsito por los problemas anteriores de manera adecuada. Además la reflexión es un requisito necesario dado que no aparece fórmula para hacer uso de algoritmias y se requiere elaborar estrategias, por ejemplo, gráficas donde aparezca ese comportamiento entre los signos de las derivadas y los crecimientos/decrecimientos de la función primitiva para cada inciso.

Sección 2.

Consiste en ocho reactivos, donde se debe hacer uso de manejo simultáneo de registros de representación y ver los comportamientos de las funciones y sus derivadas; además, observar esos comportamientos en determinados puntos, así como efectuar un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas. No se deja de lado lo visto en un curso tradicional de cálculo, proponiendo la resolución de problemas mediante uso de fórmulas o algoritmia pero tomando en cuenta el teorema factual

Problema 2.1.

Se requiere, trabajar en los registros numérico y gráfico, es decir en lo numérico que el estudiante logre comprender como cambian los valores de las abscisas respecto a las ordenadas y determinar una aproximación a la primera derivada por ejemplo con el cociente de las diferencias $\triangle y/\triangle x$, la idea de la pendiente, etc. En el registro gráfico se requiere observar el comportamiento creciente/decreciente de las dos funciones dadas para trazar las primeras derivadas y comparar esos crecimientos alrededor de los puntos que se pregunta. En seguida muestro una de las preguntas:

¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en el punto $x = 0.25$?

Problema 2.2.

Se requiere que en el estudiante aparezca la noción de derivada sucesiva y diferencie entre grados de crecimiento/decrecimiento de dos funciones distintas en un punto a.

Problema 2.3.

Que los estudiantes reconozcan los comportamientos de las funciones en una vecindad próxima, es decir, se dan tres curvas con diferente grado de crecimiento y se pide encontrar cuál de ellas tiene la derivada mayor en $x = 1$. Esta es la vecindad mencionada.

Problema 2.4.

Observar los comportamientos de la función alrededor de dos puntos dados.

Problema 2.5a y 2.5b.

Trabajar simultáneamente la función, primera y segunda derivada en el registro gráfico.

Problema 2.6.

Manejar simultáneamente la función, la primera y segunda derivada. Se deben establecer comportamientos por intervalos y un tránsito entre el registro simbólico al registro verbal.

Problema 2.7.

Se trata de un proceso complejo de abstracción, dado que para bosquejar funciones que cumplan con la condición $f''(a) = g''(a)$, se debe tener un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, así como, que en el estudiante esté presente la noción de derivada sucesiva.

Problema 2.8.

Su solución requiere lo visto en una clase tradicional, que es un problema de algoritmia, y tiene el propósito de contradecir el teorema factual del problema precedente, para quienes creyeron en él.

Se añade en forma de Anexo A la situación didáctica.

4.2 La población seleccionada.

El estudio se llevó a cabo en la Escuela Preparatoria Federalizada #2, de Ciudad Victoria, Tamaulipas, que se fundó en 1987 para satisfacer la demanda de educación media superior. La institución es relativamente joven, la cual aporta a la sociedad formando bachilleres que deseen trascender en sus metas personales.

Se cuenta con dos turnos, matutino con horario de 7 a.m. hasta la 1:20 p.m., y el vespertino de 1:30 p.m. a 7:40 p.m. La mayor parte de la comunidad estudiantil está situada en el turno matutino.

La institución ofrece capacitación para el trabajo a los jóvenes por medio de especialidades como: informática y contabilidad. Éstas se imparten en los últimos dos semestres de la formación académica.

El plan de estudios se cursa en 3 años es decir en 6 semestres.

En cuanto al currículo matemático: primer semestre álgebra, segundo semestre la trigonometría, tercer semestre la geometría analítica, cuarto semestre introducción al cálculo o precálculo, quinto semestre cálculo diferencial y por último en sexto semestre cálculo integral.

Los estudiantes de las especialidades de contabilidad e informática, en gran proporción van a cursar estudios superiores en la facultad de comercio y administración de la Universidad de Tamaulipas o al Tecnológico de Ciudad Victoria, usualmente seleccionando carreras del área de ingeniería.

Es importante que lleven bien cimentadas nociones como la derivada, dado que es la base de su futura preparación en matemáticas.

La población que se requirió para la experimentación fueron cuatro personas de las especialidades de contabilidad e informática.

La selección se realizó con base en el aprovechamiento académico alto en la clase de cálculo, es decir calificaciones de al menos 9, además de atender libremente a la invitación a formar parte de este estudio y con la disposición de tiempo.

Las edades de los estudiantes fluctuaron entre los 16 a los 18 años, actualmente están cursando el sexto semestre del bachillerato.

Los estudiantes terminaron un curso de cálculo diferencial de manera tradicional, por ello no incorporan ideas de tipo variacional, es decir, el curso que culminaron no cuenta con elementos como la aparición de la derivada sucesiva, ni el tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, solamente se cuenta con un cúmulo de fórmulas de derivación como medio para resolver ejercicios matemáticos entorno a la derivada.

Para que los estudiantes tengan conocimientos básicos para abordar la situación didáctica se trabajó con ellos las siguientes temáticas:

El concepto de función y sus derivadas.

Evaluar una función y sus derivadas sucesivas en diferentes registros (numérico, analítico, gráfico).

4.3 El escenario y el modo de aplicación.

Antes de poner en escena la situación didáctica para el estudio de la noción de derivada, los estudiantes fueron introducidos a un pequeño curso que les facilitara el abordaje de la situación didáctica. En la investigación de la colega Valero (2000) se desarrollan estas actividades.

Las actividades que se emplearon en este curso introductorio pueden encontrarse en los anexos B y C de este trabajo.

Se abordó el estudio de la noción de función desde el contexto gráfico. Se utilizó un material elaborado en el Ithaca College de Nueva York (Hilbert, Maceli,Schwartz y Seltzer, 1994, p.5).

Algunos de los ejemplos son:

Caminando en el salón

El profesor caminará en la clase. Él o ella designará la "línea de partida" enfrente del salón, así que habrá un punto de referencia para el trayecto.

Vas a graficar el desplazamiento, s, de tu profesor, a partir de la línea de inicio, como una función del tiempo, t.

El ejemplo anterior intenta que el estudiante trabaje desde ejemplos cotidianos la noción de función, el desplazamiento s en función del tiempo t.

Otro de los ejemplos es el siguiente:

Examinando recipientes

Para cada una de las siguientes figuras, bosqueja una gráfica del área transversal del recipiente contra su altura (considerar el cero de la altura en la base de cada recipiente).

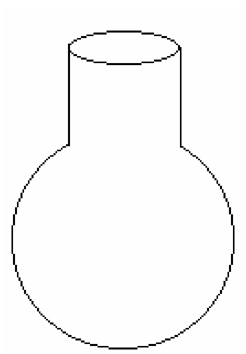
Figura	Gráfica
	

Figura 4.1.: Problema sobre el área transversal del matraz versus altura.

Aquí se trata la noción de función del área transversal contra la altura del recipiente. La noción de función es presentada de manera no tradicional, es decir, no se utilizan fórmulas o algoritmos para dar solución de este problema. Por el contrario el estudiante debe pensar en términos de crecimientos del área en función de su altura.

Para el estudio de la noción de función se dedicaron cuatro horas.

También se abordó el estudio de la noción de derivada desde el registro gráfico. Se aplicó material elaborado en la tesis de maestría de Valero (2000, p.127) y para el caso de la determinación de expresiones analíticas se aplicaron algunos ejercicios de determinación de derivadas de funciones polinomiales, estos son de un curso de cálculo diferencial tradicional de nivel bachillerato. Para esto se dedicaron dos horas.

Con el trabajo anterior se asume que los estudiantes tienen los conocimientos previos para el abordaje de la situación didáctica para el aprendizaje de la noción de derivada.

En cuanto a la organización de la aplicación se prepararon los recursos materiales (cuestionarios con la secuencia didáctica impresa, lápices, etc.) para tres aplicaciones, es decir, para aplicar el mismo diseño didáctico en tres ocasiones distintas. Como parte de la metodología de aplicación se trataron de seguir tres fases que son acción, formulación y validación. Se describen a detalle a continuación:

Acción

Se buscó que el estudiante trabajara de forma individual, se llevó a cabo los días 5 y 6 de mayo de 2008 entre 3 y 6 p.m., aquí la característica fue que no había tiempo límite para la resolución de la actividad y que cuando un estudiante terminara un problema lo entregaba y se llevaba al banco el siguiente para continuar.

El papel del investigador consistió en resolver dudas relativas al contenido de la situación didáctica y no con la solución.

Formulación

Llevada acabo como la anterior los días 12 y 13 de mayo, se trabajó por equipos de dos estudiantes.

Se pusieron a contestar las dos secciones en un horario aproximadamente de 3 a 6 p.m.

El papel del investigador fue igual que en la etapa de acción.

Validación

Realizada el 16 y 17 de mayo de 2008, de 3 a 5 p.m. y de 3 a 6 p.m. cada día respectivamente.

El rol del investigador da un giro respecto a las etapas anteriores, en esta fase el investigador participa como moderador entre los estudiantes. Ellos dan la guía a la charla. Además se buscó crear un espacio rico para la expresión de ideas, impulsando la participación, dialogando con respeto y tratando de ser parte del moderador lo más neutral en sus intervenciones.

4.4 El registro y la selección de los datos.

La recolección de los datos se realizó por medio de las producciones escritas por los estudiantes y material de audio, este último sirvió para transcribir las conversaciones entre y con los estudiantes.

La selección de los datos se da en base empírica, es decir, en función de las definiciones dadas en el apartado de teoría: aparición de la derivada sucesiva, tratamiento articulado entre la noción y sus derivadas, estabilización de la noción de derivada sucesiva.

Las definiciones son como lentes para mirar los datos desde esta perspectiva, es decir, las definiciones antes descritas servirán para ver qué estudiantes encajan en cada una de ellas. El paradigma a seguir en esta selección de datos consiste en buscar en qué estudiante(s) aparece la noción de derivada sucesiva, el tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, además si este último se hace consistentemente y la estabilización de la derivada sucesiva. Además en qué estudiante(s) ni siquiera aparecen la noción de derivada y las demás condiciones.

Más adelante se explica por cada estudiante “hasta donde llegó”, es decir, si en él aparece la noción de derivada sucesiva, el tratamiento articulado entre f y sus derivadas, y si se estabiliza o no la noción de derivada sucesiva. Para ello se toman algunos problemas resueltos que se mostrarán como evidencia.

5. RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL DISEÑO DIDÁCTICO.

En este apartado de la tesis se hace un análisis de los resultados obtenidos en la experimentación, usando como medio las definiciones dadas la sección correspondiente a la teoría (aparición de la derivada sucesiva, tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, estabilización de la noción de derivada, resignificación de la noción de derivada). Las definiciones me sirven para mirar la información y dar coherencia al análisis.

A continuación muestro un esquema teórico de cómo se estabiliza la noción de derivada en el estudiante.

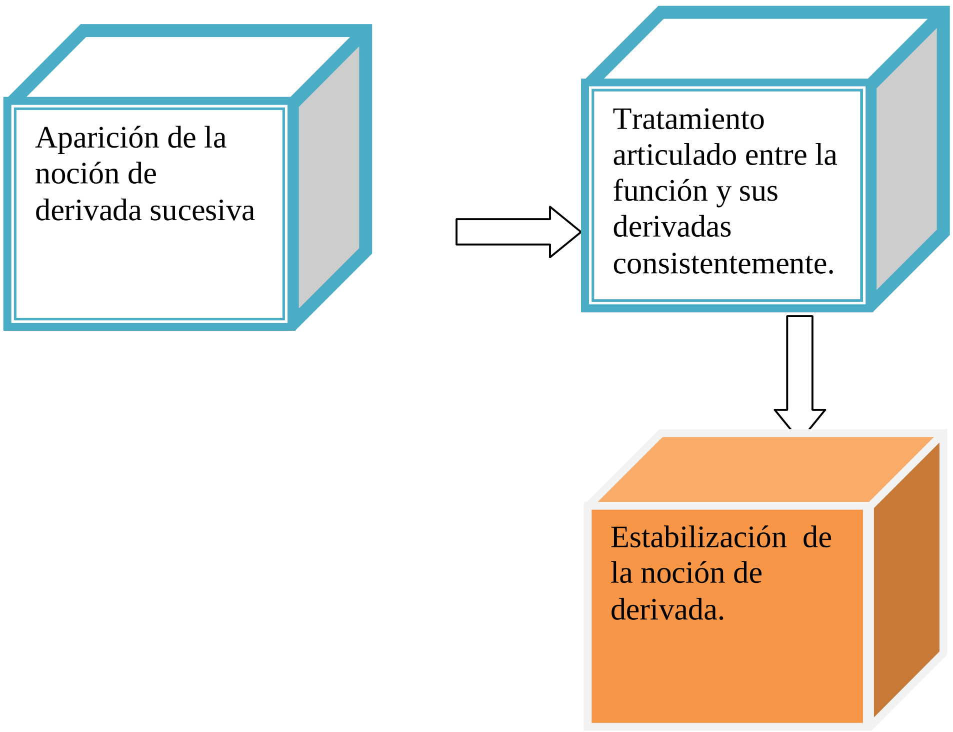


Figura 5.1.: Esquema de la estabilización de la noción de derivada desde una perspectiva de las derivadas sucesivas.

El estudiante debe transitar por varios estadios para acceder a la estabilización de la noción de derivada. Como se muestra en el esquema, la categoría más baja será cuando aparece la derivada sucesiva, después se accede a un tratamiento articulado; si y sólo si éste es consistente se puede pasar a la última categoría que es la estabilización de la noción de derivada.

Como he mencionado, los datos de la experimentación son puestos a la luz de las definiciones del apartado de teoría. Se seleccionaron extractos de los datos que servirán para dar una explicación sobre lo ocurrido en este estudio, estos fragmentos han sido seleccionados dado que en ellos se encuentran elementos como: el cambio de signo la derivada respecto a los crecimientos/decrecimientos de las funciones f, las gráficas que produjeron los estudiantes y cómo se relacionan a la aparición de la derivada en contexto gráfico, los argumentos que dieron los estudiantes para dar explicación de determinada gráfica y están en relación con la aparición de la derivada, cómo en ocasiones se argumenta en las soluciones desde dos contextos, por ejemplo desde gráfico, verbal. De tal forma, que me propongo comentar sobre elementos empíricos que han permitido identificar al estudiante en quien se estabiliza la derivada, en otros los que sólo aparece un tratamiento articulado (pudiendo ser o no consistente), y además en el estudiante en que sólo aparece la noción de derivada sucesiva, y en algo muy extremo, el estudiante que no llegó a ninguna construcción significativa.

Para respetar su identidad, se omiten los nombres de los estudiantes que participaron en la experimentación. Solamente los referiré como W, X, Y, Z, donde cada letra corresponde a un estudiante en particular.

La sistematización de los datos se hará por medio de la presentación de casos y se presentan a continuación:

5.1. El caso del estudiante Y.
5.2. El caso de los estudiantes Z y W.
5.3. El caso del estudiante X.

Cuando se trata de extractos de charlas con y entre los estudiantes, se denota con la letra I la participación del investigador, para los estudiantes W, X, Y, Z sólo se colocará la letra W, que significa que es el estudiante W quien participa.

5.1 El caso del estudiante Y.

Puedo decir que en el estudiante aparece la noción de la derivada sucesiva en diferentes ocasiones, sin embargo no se puede hablar de una estabilización de la noción de derivada, aun y cuando hace un tratamiento articulado entre f y sus derivadas sólo lo realiza en ocasiones, es decir no es consistente.

Enseguida muestro la evidencia empírica que da soporte a la afirmación previa.

En el problema I.3 se pide que a partir de una función donde se marcan los puntos A y B, sean respondidas preguntas relacionadas con los signos de la primera y segunda derivada en los puntos dados(A y B).

El estudiante presenta la siguiente respuesta:

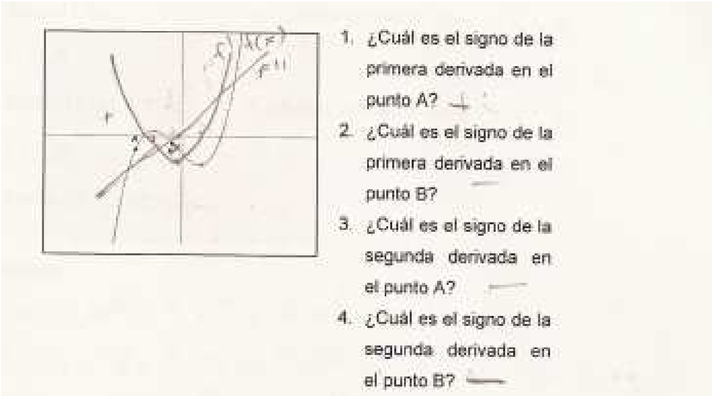


Figura 5.2.: Solución del estudiante Y al problema I.3.

El estudiante expresa la relación de los crecimientos de la función y signo de la primera derivada, como de la segunda, por tanto aparece la noción de derivada sucesiva en contexto gráfico. Se apoya en los esbozos de las dos primeras derivadas para dar solución a este problema matemático.

Problema I.6

Se muestra el gráfico desarrollado por el estudiante y un extracto de la conversación entre los estudiantes donde aparece la derivada sucesiva y se hace un tratamiento articulado entre f y sus derivadas.

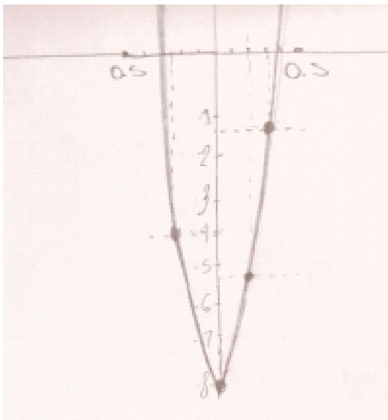


Figura 5.3. Solución del estudiante Y al problema I.6.

La gráfica de la segunda derivada tiene signos negativos en el intervalo de $[-0.3, 0.3]$.

Mientras el estudiante trabajó en equipo produjo la gráfica que se muestra en la figura 5.4. .

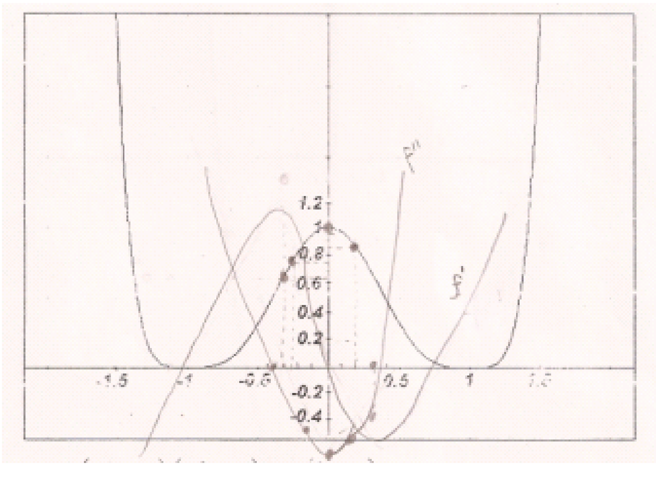


Figura 5.4. Solución del estudiante Y al problema I.6 en la validación.

"El signo es negativo", es la respuesta del estudiante y se interpreta que es el signo de la segunda derivada en el intervalo de $[-0.3, 0.3]$.

Ahora presento un extracto de la plática entre el investigador y los estudiantes.

I: Bueno el equipo 1 pone una parábola como solución para el inciso b, de la sección I.6. Mi pregunta para el equipo 1 es ¿cómo saben que corresponde a una parábola y no a otra gráfica?

Y: Pasa que trazar la gráfica sale abajo del eje de las x, tiene signos negativos en todo el intervalo de -0.3 hasta 0.3, además si nos fijamos en el inciso b todas las evaluaciones son negativas, entonces lo que decimos es que nuestra gráfica es una parábola que sale debajo de las x.

Es evidente que aparece la noción de derivada sucesiva y aparece un tratamiento articulado entre f y sus derivadas. Debido a que el estudiante representa y manipula a la función y sus derivadas en dos registros que son el gráfico y verbal. Por registro verbal, quiero decir que el estudiante se expresa por medio de la palabra en términos como: los crecimientos de f y los signos de sus derivadas de orden superior. En este caso, por ejemplo habla sobre la relación del signo negativo en el intervalo $[-0.3, 0.3]$ y la forma parabólica de la segunda derivada.

Esto indica que comprende la relación entre los signos de las derivadas de orden superior con los crecimientos/decrecimientos de la función, esto se requiere para el esbozo de las funciones derivadas.

Problema I.7.

En esta sección se pide graficar una función que cumpla con la condición $f''(x) > 0$ para toda x en el intervalo (a,b) y explicar la respuesta.

El estudiante al trabajar en equipo hace la siguiente gráfica.

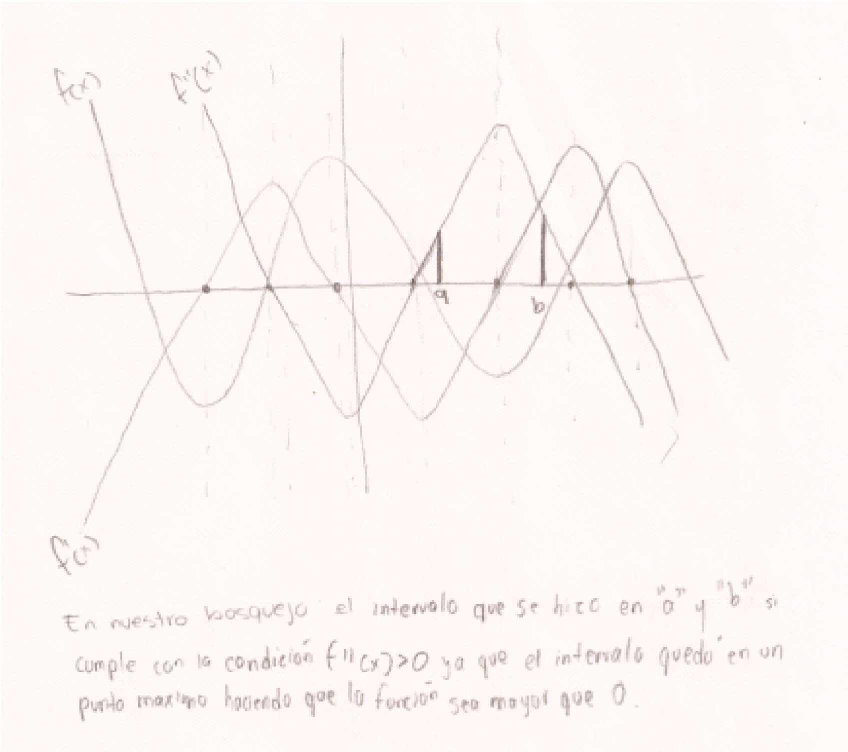


Figura 5.5.: Respuesta del estudiante Y al problema I.7 en la formulación.

Aquí hace aparición la derivada sucesiva en contexto gráfico, ya que es necesario comprender la relación de los crecimientos/ decrecimientos de f con respecto a los signos de las derivadas de orden superior para resolver la actividad.

Véase el intervalo (a,b) la función $f(x)$, dicha función en ese intervalo es negativa, después de a viene decreciendo hasta un punto mínimo y luego crece pasando por b, en el caso de la primera derivada la función es negativa, porque la función f entre a y el mínimo decrece, en el mínimo de f se tiene una raíz de la primera derivada, el comportamiento de f después del mínimo es creciente pasando por b, entonces la primera derivada es positiva después del cero en esta función. Por último, la relación entre la primera y segunda derivada, es que en el punto a la primera derivada aunque es negativa es creciente hasta el cero, entonces esto hace que la segunda derivada sea positiva hasta llegar al máximo de esta función, después la primera derivada tiene un crecimiento menor cada vez, esto hace que la función derivada segunda sea positiva pero venga decreciendo hasta que toca un cero a la derecha del punto b.

Se presenta un pequeño fragmento de la plática con los estudiantes y el investigador.

I: ¿Cómo obtuvieron esas gráficas equipo 1?

Y: Profe pues trazamos una función, y de ahí vimos si crecía la derivada es positiva, si decrecía la derivada es negativa, así lo utilizamos para seguir trazando la primera derivada, además ya teniendo la primera derivada sale fácil la segunda, porque si la primera derivada es creciente, la segunda derivada es negativa. Así fue como le hicimos.

Aquí vuelve aparecer la noción de derivada sucesiva. Dado que para esbozar de la función segunda derivada de f se requiere comprender la relación entre los crecimientos/decrecimientos de f y los signos de sus derivadas de orden superior, esto ocurre en contexto gráfico y verbal.

Además el estudiante puede manipular y representar a la función y sus derivadas en dos distintos contextos gráfico y verbal, y esto se usa como una estrategia para dar respuesta a este problema matemático.

Problema I.10

Se da cierto enunciado y se pide confirmar o refutar. Este tipo de enunciados requieren una amplia reflexión y de la aparición de la derivada sucesiva.

Sólo se selecciona un enunciado, dado que aquí aparecen indicios de la derivada sucesiva, en este caso el inciso d que dice: La derivada de una función después de un punto de inflexión siempre es positiva.

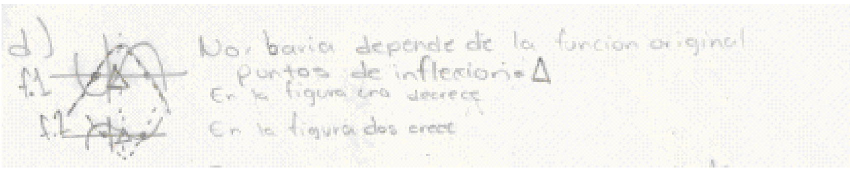


Figura 5.6.: Solución del estudiante Y al problema I.10.

La respuesta del estudiante se interpreta que no siempre la derivada después del punto de inflexión es positiva. Utiliza la frase “baria dependiendo de la función original”. Además presenta dos gráficos correspondientes a dos funciones cúbicas y sitúa el punto de inflexión. Para la primera gráfica f.1 se traza una cúbica y como derivada una parábola que abre hacia abajo, habla de decrecimiento probablemente por la forma de la derivada después de la inflexión, aunque no dice algo sobre el signo de la derivada. Para el segundo caso f.2 presenta una derivada que abre hacia arriba y dice solamente que crece, no especifica sobre el signo de la derivada que para este caso es negativa.

Aparentemente aparece la noción de derivada sucesiva en contexto gráfico y verbal. Las gráficas cúbicas como primitivas y las parábolas como derivadas indican que comprende la relación entre los crecimientos/decrecimientos de f y los signos de la derivada, sin embargo a nivel verbal no aparece evidencia contundente de ello; esto es, en función de la respuesta dada.

Problema II.3

Se presentan tres gráficos con diferentes tipos de crecimiento y se intersecan en el mismo punto $x = 1$. Se pide cuál de ellas tiene derivada mayor en $x = 1$.

Se muestra el siguiente gráfico donde se trazan tres rectas que son las derivadas de las funciones dadas y se ve como la línea A' es más inclinada que las demás líneas, se relacionan los crecimientos/ decrecimientos de las funciones con las derivadas y se discierne entre los mismos. Aparece la noción de derivada sucesiva.

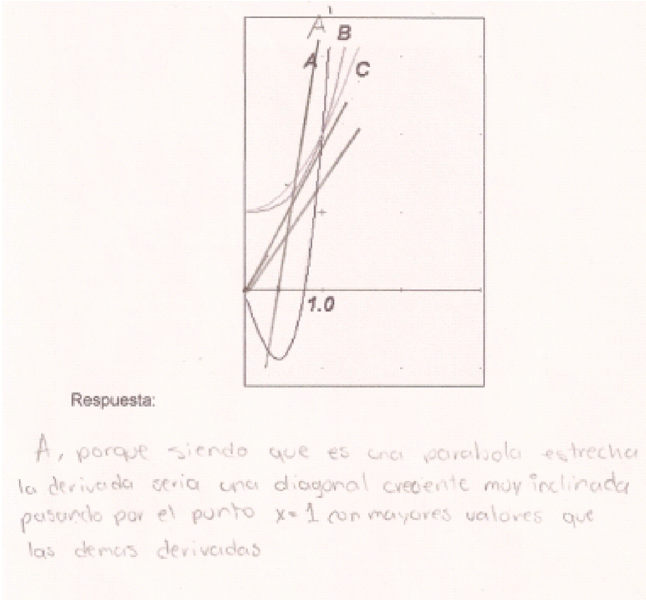


Figura 5.7. Respuesta del estudiante C al problema II.3.

Se transcribe un pedazo de plática de la etapa de validación, donde se muestra de la noción de derivada.

I: ¿Y qué dicen de esa respuesta?

Y: Pues decimos que es la derivada de A, porque es una parábola cuya derivada sería una diagonal creciente y más inclinada que las demás y pasa por 1.

W: ¿Cómo saben que es más inclinada que las demás?

Y: Pues miren como crece la curva crece más que las otras dos, las otras funciones están más anchas pero esta es más estrecha y más alta, por eso crece más siempre.

I: ¿Cómo está eso que crece más siempre?

Y: Si profe, mire la gráfica que hicimos está más inclinada que todas las demás, entonces da valores mayores. Es por la forma de la gráfica.

En este extracto de la conversación claramente se aprecian los comentarios relativos a la aparición de derivada sucesiva en registro verbal.

Problema II.4.

Se muestra una gráfica (creciente) y se hace la siguiente pregunta:

¿$f'(b) > f'(a)$?. Explica tu respuesta.

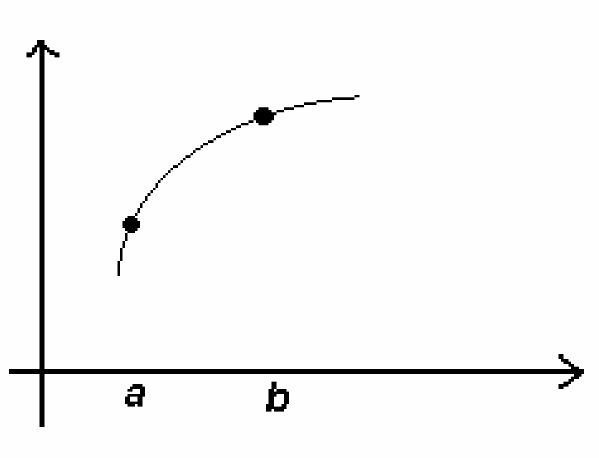


Figura 5.8. Problema II.4.

El estudiante presenta la siguiente respuesta:

"No porque en el fragmento de gráfica es creciente y su derivada decrecería y como b está del lado derecho tendría menor valor que a."

Es evidente que aparece la noción de derivada sucesiva en registro verbal, no hay un tratamiento articulado entre f y sus derivadas. La derivada sucesiva surge dado que el estudiante dice en su solución que aunque es creciente, la derivada decrecería, interpreto que comprende que la función crece pero no de la misma manera, es decir, en el punto a es un valor mientras en el punto b el valor de la derivada es menor, esto no lo grafica solamente lo explica. La no existencia del tratamiento articulado es dado que sólo se limita a un solo registro que es el verbal no aparecen gráficas, ni fórmulas en la solución presentada.

Problema 2.5a.

Se dan las siguientes condiciones:

Supongamos que la función $f(x)$ es un polinomio. Se sabe que tiene como puntos críticos –1, 1, 2 y 3. Además cumple con $f''(-1)=0$, $f''(1)>0$, $f''(2)<0$ y $f''(3)=0$. Haz un bosquejo con todo el detalle posible a partir de la información.

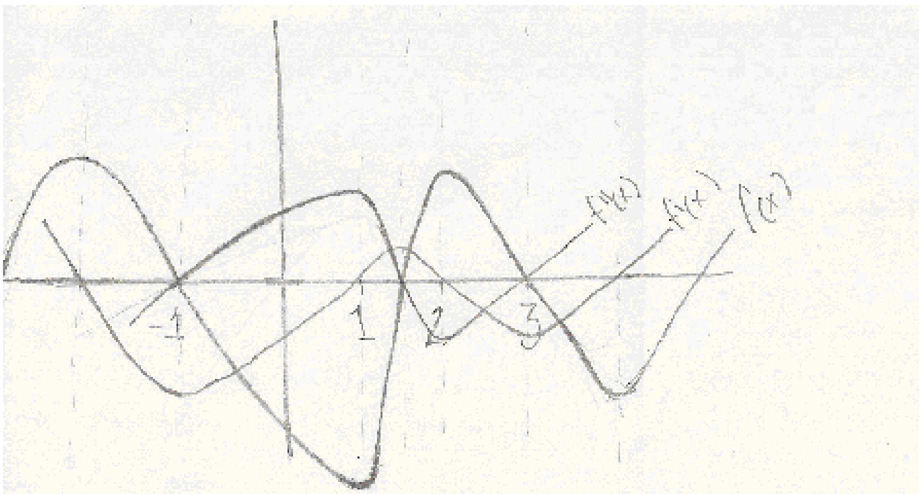


Figura 5.9 Respuesta del estudiante C al problema II.5a.

Aparece la derivada sucesiva en contexto gráfico, ya que para trazar esto se requiere la comprensión de los crecimientos/decrecimientos de f con respecto a los signos de las derivadas.

Para este problema matemático esta relación es en sentido inverso, es decir, a partir de los signos de la derivada se traza la función que le dio origen. Es aquí donde se incrementa el grado de dificultad para la solución.

5.1.1 A manera de cierre: caso del estudiante Y.

He mostrado algunas soluciones realizadas por un estudiante, en las cuales aparece de manera reiterada la noción de derivada sucesiva y un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas.

En seguida muestro una tabulación que contiene los diferentes problemas matemáticos y el avance que se tiene en función del esquema presentado al principio de este capítulo, esto es de manera sintética lo observado hasta el momento. Se coloca una X para indicar que si se llega hasta ese estadio, ejemplo si en el problema 1.3 se coloca una X en aparición de la derivada sucesiva, pero no en las demás significa que se llegó hasta aquí.

Número de problema	**Aparición de la noción de derivada sucesiva**	**Tratamiento articulado entre *f* y sus derivadas.**	**Estabilización de la noción de derivada**
I.3	X		
I.6	X	X	
I.7	X	X	
I.10	X	X	
II.3	X	X	
II.4	X		
II.5	X		

Tabla 5.1. Tabla sintética del avance del estudiante Y en un enfoque de las derivadas sucesivas.

Cabe señalar que el registro gráfico y verbal son en los que se basa para dar respuesta a lo planteado en la secuencia didáctica.

El tránsito entre la aparición de la derivada sucesiva y el tratamiento articulado consiste en que cuando el estudiante ha comprendido la relación de los crecimientos/ decrecimientos de f con los signos de las derivadas de orden superior, puede moverse con soltura entre los diferentes registros de representación, para este caso en el gráfico y verbal.

A pesar de que se ve que en el estudiante aparece la noción de derivada sucesiva, es decir, que expresa en contexto gráfico y verbal las soluciones a los problemas matemáticos planteados y hace un tratamiento articulado entre f y sus derivadas. Esto no aparece siempre, es decir, solo en los problemas I.6, I.7, I.10, II.3. Lo hace, sin embargo como se muestra en la tabla en el resto no lo hay, no se es consistente en su aplicación como medio para dar respuesta a los problemas matemáticos, y por ende se concluye que en este estudiante no se ha estabilizado la noción de derivada sucesiva.

5.2 El caso de los estudiantes Z y W.

Casos donde sólo se llega en ocasiones a lo sumo a la aparición de la noción de derivada sucesiva.

5.2.1 El caso del estudiante Z.

Problema I.3

A continuación se presenta la gráfica de una cierta función y en ella se marcan dos puntos.

Contesta las preguntas ubicadas de la gráfica: ¿Cuál es el signo de la primera derivada en el punto B?

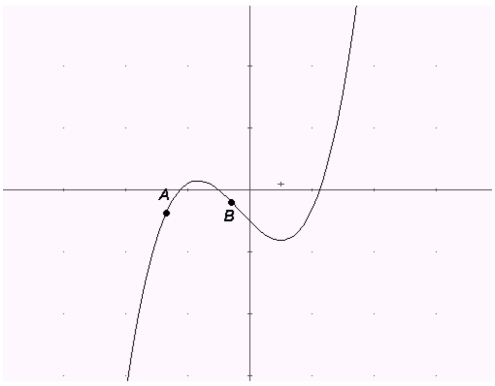


Figura 5.10 Gráfica del problema I.3.

Se presenta un extracto de la charla de los estudiantes donde aparece la noción de derivada sucesiva en contexto verbal. Por contexto verbal quiero decir que el estudiante se expresa en términos de crecimiento/decrecimiento de f y los signos de sus derivadas sucesivas, abajo se expresa en estos términos en una parábola y su derivada primera.

I: ¿Cómo determinaste qué el punto B es mínimo?

W: Porque ahí está la inflexión, bueno eso pensamos.

Z: A ver, enséñame tu gráfica de la parábola que hiciste.

Z: Pero si tu gráfica no está bien, porque la parábola desde A hasta B está en el tercer cuadrante y no puede ser, porque antes del punto A la parábola está creciendo y su derivada es positiva. El punto B está bien su signo es negativo.

Problema I.10

Trata de confirmar o refutar una serie de afirmaciones, que para este caso se seleccionó el inciso d. La derivada de una función después de un punto de inflexión es positiva.

La solución que presenta el estudiante es: "falso, ya que si decrece después de un punto de inflexión siempre es negativa."

Véase que en esta refutación el estudiante habla de la relación del decrecimiento de f con el signo de la primera derivada. Aparece la noción de derivada sucesiva en contexto verbal.

Problema II.1

Se dan dos tablas con f_1 y f_2 y se pide: Graficar $f_1(x)$ y $f_2(x)$.

Además de responder tres preguntas relacionadas con las gráficas de las primeras derivadas de f_1 *y* f_2, sólo seleccionó esta pregunta:

¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en $x = -0.25$?

Es importante que expliques tus respuestas.

Se presenta la gráfica que el estudiante realizó durante el trabajo en equipo y un extracto de la plática con los estudiantes donde aparece la noción de derivada sucesiva.

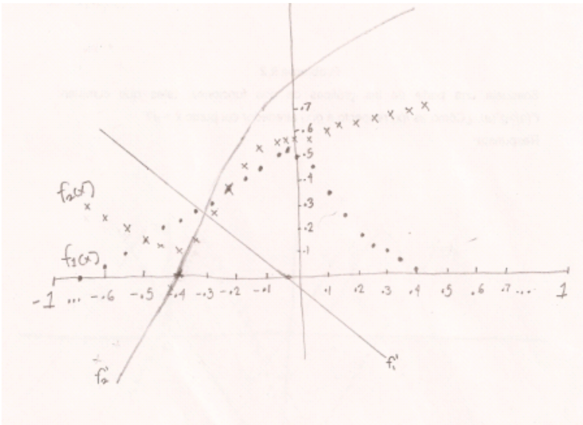


Figura 5.11. Solución al problema II.1 del estudiante Z.

Extracto de comunicación con los estudiantes.

I: ¿Qué pueden comentar de la siguiente pregunta? ¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en $x = -0.25$?

X: Pues dijimos que son iguales, pero ahora vemos que no.

Z: Nosotros decimos que la función f_2 es más grande, por los crecimientos. La otra es también positiva, pero la derivada de f_2 es un poco más positiva.

Aparece la noción de derivada en dos contextos: gráfico y verbal.

Es decir el trazo de las funciones f_1 y f_2 viene dado por las tabulaciones, sin embargo para el trazo de la primera derivada de cada función mencionada se requiere la comprensión de la relación de los crecimientos de f y los signos de las derivadas, después comparar cual de ellas tiene el valor mayor en el punto dado de x. Referente al contexto verbal se logra ver en argumentos sobre los crecimientos, aunque no habla explícitamente el por qué una es más grande que otra solamente dice que “ f_2 es un poco más positiva.”

Problema II.3

Se presentan tres gráficos con diferentes tipos de crecimiento y se intersecan en el mismo punto $x = 1$. Se pide cuál de ellas tiene derivada mayor en $x = 1$.

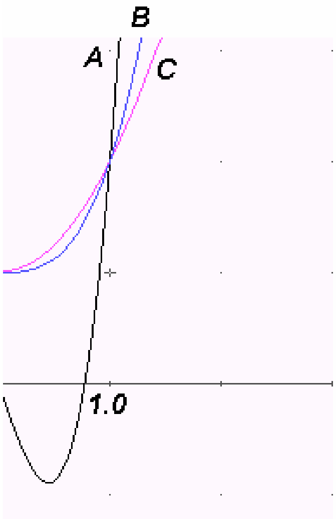


Figura 5.12.: Gráfica del problema II.3.

"La mayor derivada sería la función A porque sería más estrecha al punto de que se deriva y se tiene un mayor valor."

Aparece la noción de derivada sucesiva en contexto verbal de manera escueta.

5.2.1.1 A manera de cierre: Caso del estudiante Z.

Se han mostrado algunas soluciones donde aparece la noción de derivada sucesiva, me refiero a las de los problemas I.3, I.10, II.1 y II.3. En estos ejemplos, se trata la relación entre esos signos de las derivadas y los incrementos o decrementos de la función primitiva, además se discierne de algún modo entre los diferentes valores de la derivada como en el ejemplo II.3. Sin embargo sólo estos ejemplos son muestra del grado de avance que tiene el estudiante, se puede decir que no se establece una articulación entre la función y sus derivadas, dado que la evidencia mostrada es limitada a la derivada sucesiva.

5.2.2 El caso del estudiante W.

Se presentan a continuación algunos datos que muestran la aparición de la noción de derivada sucesiva en el estudiante W.

Problema I.3

Se plantea la gráfica y se pide responder a las preguntas siguientes.

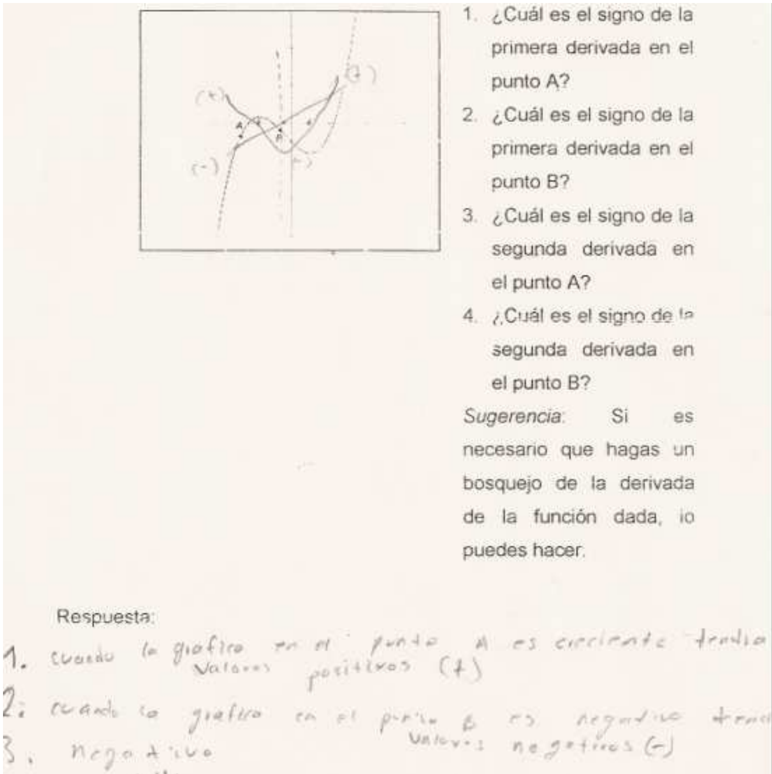


Figura 5.13. Solución del problema I.3 por el estudiante W.

Véase como el estudiante responde relacionando la gráfica con los signos, es decir, puedo decir que aparece la noción de derivada sucesiva en los contextos verbal y gráfico.

Problema II.1

Se dan dos tablas con f_1 y f_2 y se pide: Graficar $f_1(x)$ y $f_2(x)$.

Además de responder tres preguntas relacionadas con las gráficas de las primeras derivadas de f_1 y f_2, solo mostraré las gráficas de las derivadas de f_1 y f_2 para ilustrar la aparición de la derivada sucesiva en contexto gráfico.

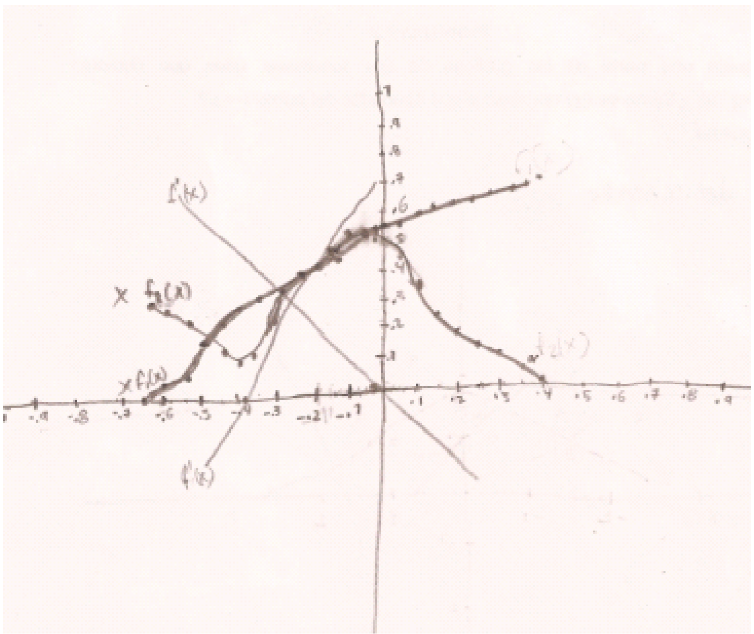


Figura 5.14. Solución del problema II.1.

Véase como aparentemente existe una comprensión de la relación de los crecimientos/decrecimientos de f con los signos de las derivadas. Es decir, el bosquejo de las primeras derivadas de f_1 *y* f_2

se logra hasta que el estudiante entiende los incrementos y decrementos de la primitiva de f_1 y f_2 con relación a los signos de la primer derivada.

Problema II.3

Se presentan tres gráficos con diferentes tipos de crecimiento y se intersecan en el mismo punto $x = 1$. Se pide cuál de ellos tiene derivada mayor en $x = 1$.

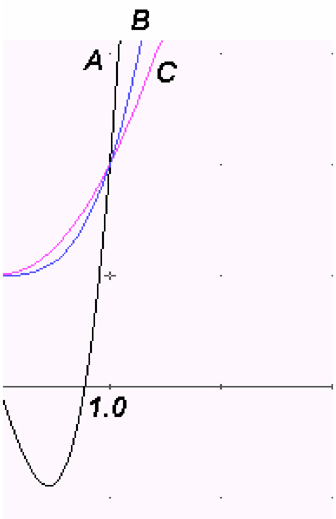


Figura 5.15.: Gráfica del problema II.3.

A continuación aparece escuetamente la derivada sucesiva en contexto verbal. Dado que en las palabras del estudiante sólo habla de crecimiento, pero no detalla más sobre el signo de la derivada o el grado de crecimiento.

La respuesta del estudiante es: “La gráfica de A porque al crecer se acerca más al punto a.”

5.2.2.1 A manera de cierre: caso del estudiante W.

El estudiante escasamente presenta la aparición de la noción de derivada sucesiva en sus producciones, se puede apreciar en las respuestas de los problemas I.3, II.1, II.3, se trazan los gráficos de la primera, segunda derivada f y su signo, se esbozan funciones y sus primeras derivadas y se discierne entre funciones con diferente crecimiento.

Similar al caso del estudiante Z, su grado de avance sólo se encuadra en la aparición de la derivada sucesiva.

5.3 El caso del estudiante X.

En este estudiante no aparece la noción de derivada sucesiva, tampoco un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas y mucho menos se logra la estabilización de la noción de derivada.

El estudiante no responde o no entiende a algunos problemas como II.2 al II.7.

Expongo el problema II.1 y la respuesta planteada por el estudiante.

Se dan dos tablas con f_1 y f_2 y se pide: Graficar $f_1(x)$ y $f_2(x)$.

Además responder 3 preguntas relacionadas con las gráficas de las primeras derivadas de f1 y f2.

¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en $x = 0.50$?

¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en $x = -0.25$?

¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en $x = 0.25$?

El estudiante presenta el siguiente esbozo.

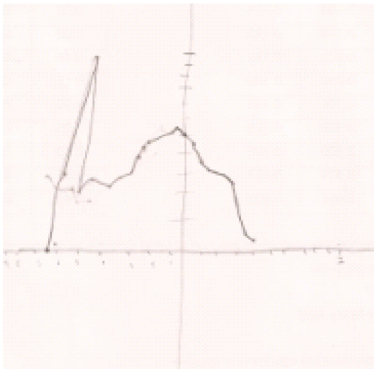


Figura 5.16.: Solución gráfica del problema II.1.

Las respuestas correspondientes con las tres preguntas previas:

"Son iguales".

"Son iguales".

"Es más grande la derivada de la función 2".

La gráfica no corresponde a ninguna función ni tampoco alguna derivada. Confunde el valor de f con el de la derivada.

No aparece la noción de derivada sucesiva ya que no comprende la relación entre los crecimientos/decrecimiento de las funciones y sus respectivas primeras derivadas.

El estudiante X no responde algunos problemas o no los entiende.

Problema II.2

No responde el problema.

Problema II.3

La A porque en ella se encuentra más la curva para derivarla y se seguiría derivando más que las otras.

Problema II.4

“No entiendo”

Problema II.5

“No entiendo el enunciado.”

Problema II.5b

No responde las preguntas.

Problema II.6

No responde el problema.

5.3.1 A manera de cierre: caso del estudiante X.

Los problemas II.4 y II.5 muestran que no comprende lo que se pide hacer por el enunciado, mientras los problemas II.5 y II.6 no son respondidos, en el caso del problema II.1 sus gráficos no corresponden a ninguna función ni sus derivadas, por ende puedo mencionar que no aparece ni siquiera la derivada sucesiva.

6. CONCLUSIONES.

En esta sección se discuten las conclusiones obtenidas mediante el análisis de los datos, es muy importante retomar la pregunta de investigación y es:

La comprobación, a través de la puesta en escena de una situación didáctica específica, que la noción de derivada se estabiliza en el estudiante, sólo hasta que la noción de derivada sucesiva aparece y se establece un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas consistentemente.

En el capítulo anterior se muestran las evidencias empíricas que con base al soporte teórico dan fundamento a las conclusiones siguientes:

Los datos mostrados evidencian la aparición de la derivada sucesiva y un tratamiento articulado entre f y sus derivadas pero no de forma consistente, para el caso del estudiante Y.

Para los casos de los estudiantes W y Z, sólo aparece la noción de derivada sucesiva de forma esporádica.

Y en caso del estudiante X no aparece la noción de derivada sucesiva.

Los estudiantes aún y cuando cuentan con calificaciones de al menos 9 en cálculo diferencial, se encuentran en un proceso rico de aprendizaje, entendiendo por esto, la resignificación de la noción de derivada, donde desde la perspectiva de las derivadas sucesivas no se llega completamente hasta la estabilización de la noción de derivada.

Si bien es cierto, los datos arrojados por el estudio dan evidencia de la aparición de la noción de derivada y de un tratamiento articulado entre f sus derivadas. Es relevante notar que no aparece el contexto algebraico, ni el gestual ni el numérico como estrategia para la solución de problemas matemáticos.

El estudiante Y utiliza los contextos gráfico y verbal como base de sus explicaciones a los problemas planteados por esta situación didáctica, considerando que sólo fueron resueltos parte de ellos.

La aparición de la derivada sucesiva es un requisito fundamental para acceder a la estabilización de la noción de derivada, pasando por un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas de forma consistente.

Los colegas Gonzáles (1999) y Valero (2000) tratan un término denominado estabilización parcial de la derivada, esto es que en las investigaciones realizadas los estudiantes sólo se movían con soltura en problemas donde aparecía hasta la segunda derivada, pero no así en el orden tres de la derivada.

Para nuestra investigación ocurrió algo similar, los estudiantes tienen capacidad de movilizarse de la función f pasar por la primera, segunda derivada.

Por ende puedo decir que se comprueba la veracidad de la pregunta de investigación.

Se presenta una pregunta que pueden servir de semilla para futuras investigaciones:

¿Qué condiciones son necesarias para que el estudiante llegue a la estabilización de la noción de derivada sabiendo que requiere la aparición de la derivada sucesiva y un tratamiento articulado consistente entre f y sus derivadas sucesivas?

Esta es una interrogante que no se puede responder de forma rápida sería necesario hacer otra investigación para determinar su probable respuesta, sin embargo, por medio de los obstáculos podemos ver el porqué probablemente se detiene ese acceso hacia la estabilización de la noción. Menciono algunos de estos presentados en este estudio:

Aparición del teorema factual. En seguida muestro brevemente un ejemplo, de donde aparece este obstáculo en el estudiante W.

El problema I.5, que tiene como propósito que se refute el teorema factual, el estudiante W confirma la respuesta, dice "porque cuando la gráfica muestra que es creciente y la derivada es $f'(x) > 0$, la derivada $f''(x) > 0$ es positiva, porque cuando la gráfica crece la $f''(x)$ es positiva por lo tanto $f''(x) > 0$".

Además el estudiante presenta el siguiente gráfico de donde extrae la información anteriormente presentada.

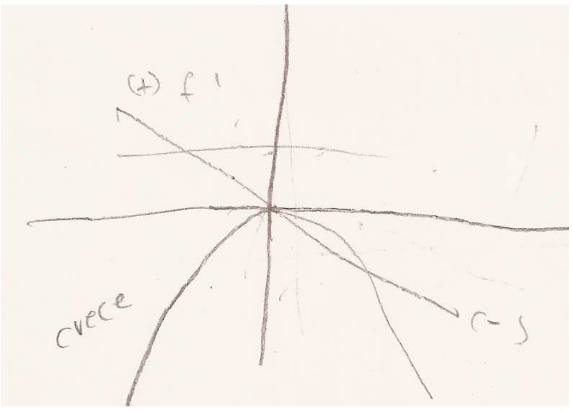


Figura 6.1.: Aparición del teorema factual.

Véase como el estudiante traza una parábola negativa y en el tercer cuadrante dice que crece, en el segundo cuadrante coloca la segunda derivada una línea decreciente y como segunda derivada una recta constante que representa a la derivada de la derivada. El teorema factual hace aparición en esta producción.

Otro obstáculo es el universo de gráficas que se limita solamente a las funciones polinomiales de grados 0, 1, 2, 3. No aparecen exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc., esto depende del orden de los temas de cada libro, en Swokowski (1989), primero se presentan funciones polinomiales y más delante aparece el tema de funciones exponenciales y logarítmicas, en Granville (1997) en el tema de aplicaciones de la derivada solo aparecen funciones polinomiales y más adelante en el tema de derivación de funciones trascendentes aparecen las exponenciales y su primera derivada, estos textos son los que utilizó el profesor de cálculo.

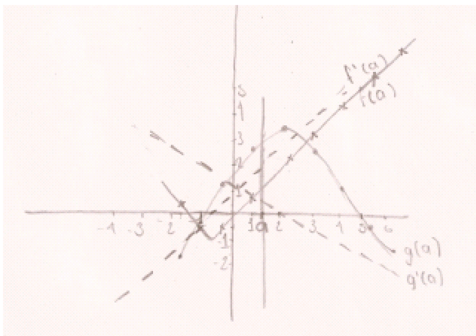


Figura 6.2.: Sobre universo gráfico limitado a funciones polinomiales.

Otro probable obstáculo es que solo se transitan solo en algunos registros de representación en especial el gráfico y verbal.

Como obstáculo menos común pero existente, es el no entendimiento de las instrucciones de cada problema matemático y algunas dificultades a nivel aritmético o algebraico.

Una valoración sobre el proceso de resignificación sería que el estudiante Y, es quién más problemas matemáticos resolvió por medio de la aparición de la derivada sucesiva y en ocasiones el tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, sin embargo no se estabilizó la noción en él, los significados añadidos a su bagage matemático serían la incorporación de estrategias gráficas para la resolución de problemas matemáticos, así como en el contexto verbal expresarse en términos de crecimientos/ decrecimientos de la función y relacionarlos con los signos de las derivadas de orden superior.

En cuanto al tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, el estudiante Y es quién más problemas matemáticos solucionó en los contextos de representación el gráfico y verbal, además el estudiante en mención puede pasar de alguna gráfica de alguna derivada y expresarse en términos de crecimientos/ decrecimientos de la función antecesora, tomar la primera derivada y a partir de sus comportamientos crecientes/decrecientes expresar cómo será la segunda derivada, etc.

7. BIBLIOGRAFIA

Bingobali, E. y Monaghan, J. (2004). Identity, knowledge and departmental practices: mathematics of engineers and mathematicians. En M.J. Høines y A.B. Flugestad (Eds.), *The 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 127-134). Bergen, Noruega: Bergen University College. Obtenido en octubre 20, 2008 de: http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/1b/bc/7d.pdf

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon 42,* 353-369.

Cantoral, R., Farfán, R.M., Cordero, F., Alanis, J.A., Rodriguez, R.A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* México: Trillas.

Cantoral, R., Molina, J.G. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J.G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 18, pp. 463-468). CLAME: México.

Cantoral, R., Sánchez, M. y Molina, J.G. (2007). Aspectos numéricos y gráficos de la derivada de orden superior. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (Volumen 20, pp. 554-559). CLAME.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, T., Larsen, S. y Hsu, "E" (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education 33*(5), 352-378.

Cooley, L., Baker, B. y Trigueros, M. (2003). Thematization of the calculus graphing schema. En N.A Paterman, B.J. Dougherty y J.Zilliox (Eds.). *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA* (Vol 2, pp. 57-64). Honolulú Hawaii: University of Hawai. Obtenido en octubre 21, 2008 de: http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/3d/56/0e.pdf

'Dolores' C. (1998). Capítulo 13. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 257-272). México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

'Dolores' C. (2000). Capítulo V. En R. Cantoral (coordinador), *El futuro del cálculo infinitesimal.* ICME-8. (pp. 155-181). México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gonzáles, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Granville, W (1997).*Cálculo Diferencial e Integral*.México: Limusa.

Hilbert, S., Maceli, J., Robinson, E., Schuwartz, D.D. y Seltzer, S. (1994). *Calculus An Active Approach With Projects*. E.U.A.: John Wiley & Sons.

Kamel, A., Rustem S., Mahendran S., Mohd. S. (2008). Animated introductory calculus: development and perception. *US-China Education Review 5*(3), 1-15. Obtenido en octubre 20, 2008 de: http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/3e/ce/c3.pdf

Kumar, T. (2007). Computer graphics as an instructional aid in an introductory differential calculus course. *International Electronic Journal of Mathematics Education 2*(1), 32-48. Obtenido en octubre 20, 2008 de: http://www.iejme.com/012007/d3.pdf

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics 14*(3), 235-250.

Testa, Y. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar uruguayo.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Sánchez, M. (2006). Introducción a la derivada en un contexto tecnológico-variacional. *Números 64.* Obtenido en octubre 22, 2008 de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/ideas_02.pdf

Swokowsky, E. (1989).*Cálculo con Geometría Analítica.* México: Grupo Editorial Iberoamérica

Valero, S. (2000). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Virtual del ITESM, México.

8. ANEXOS

8.1 Anexo A: Introducción a la función.

1. Caminando en el salón.

El profesor caminará en la clase. Él o ella designará la “línea de partida” enfrente del salón, así que habrá un punto de referencia para el trayecto.

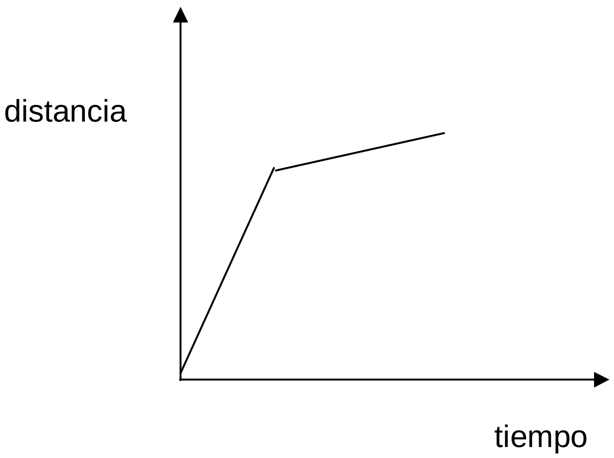
Vas a graficar el desplazamiento, **s**, de tu profesor, a partir de la línea de inicio, como una función del tiempo, **t**.

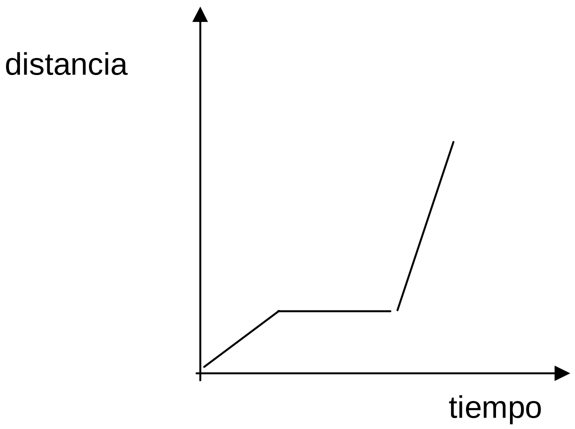
Grafica un segundo trayecto.

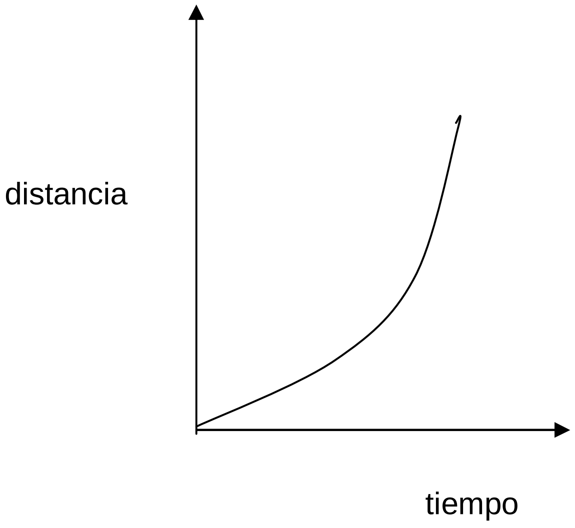
Grafica un tercer trayecto

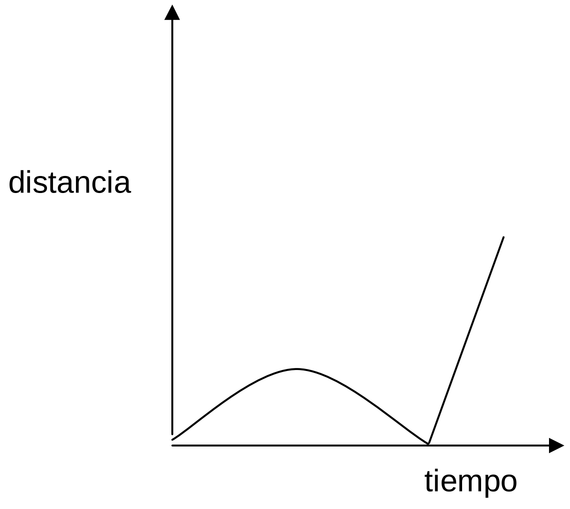
2. Recorrido en bicicleta a la escuela

Teresa usualmente se va en bicicleta a la escuela, sin embargo, no siempre es así. Enseguida se muestran cuatro gráficas y tres explicaciones de los diferentes recorridos que realiza. Relaciona cada explicación con una gráfica, y escribe una explicación en un cuarto párrafo para la gráfica restante.









“Acababa de salir de casa cuando me di cuenta que me tocaba ir al gimnasio, y había olvidado mi ropa de ejercicio. Así que regresé a casa y después me tuve que apresurar para llegar a tiempo.”

“Siempre empiezo muy tranquila. Después de un rato me apresuro, porque no me gusta llegar tarde a clases”

“Salí en mi motocicleta esta mañana muy rápidamente. Después de un rato, me quedé sin gasolina. Tuve que caminar el resto del trayecto y apenas llegué a tiempo”.

4.

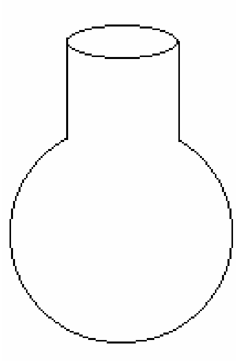
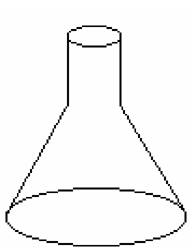
3. Izando la bandera

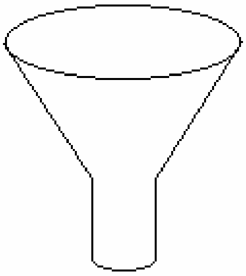
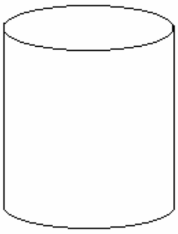
Bosqueja la altura de una bandera como una función del tiempo mientras se está izando

Bosqueja la altura de una bandera como una función del tiempo cuando está siendo bajada

4. Examinando recipientes

Para cada una de las siguientes figuras, bosqueja una gráfica del área transversal del recipiente contra su altura (considerar el cero de la altura en la base de cada recipiente).

Figura	**Gráfica**
	
	

5. Recorrido a la biblioteca

En esta actividad describiremos una situación verbalmente y te pediremos que trates de construir una gráfica que pudiera corresponder a esta situación.

José llegó algo temprano a su clase de Cálculo cuando se dio cuenta que había dejado su cuaderno en la biblioteca. Como no quería perder el principio de la clase, rápidamente fue a la biblioteca, recogió el cuaderno, y regresó rápido y de inmediato a su clase. La *biblioteca está a 500 metros del salón, directamente cruzando la explanada de la escuela, y puedes asumir que al regresar caminó en línea recta. El recorrido completo le tomó 6 minutos.*

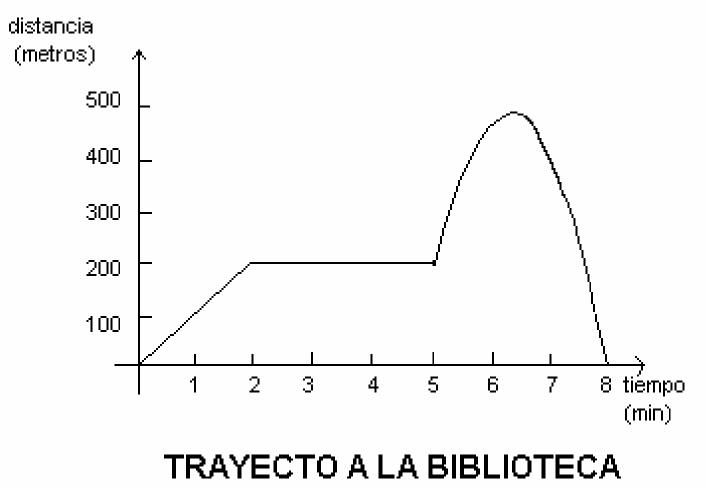
Construye una gráfica describiendo el recorrido de José a la biblioteca y su regreso. La variable independiente es el tiempo **t**, y la variable dependiente es la distancia **s**, entre José y el salón.

Ahora, vamos a embellecer la historia un poco:

En el camino a la biblioteca, José se encontró con Paty y se detuvo a platicar por 3 minutos. Entonces tuvo que apresurarse el resto del camino. Le tomó un total de 8 minutos hacer el recorrido completo.

Ya que hemos visto cómo puede registrarse el movimiento en una gráfica, vamos a revisar algunas de las que ya hiciste, y ver que importante es la información mostrada en ellas.

Primero veamos una gráfica típica para la segunda situación, cuando José interrumpió su recorrido a la biblioteca:



Localiza en la gráfica los siguientes puntos (colocando la letra correspondiente a la pregunta):

a). El periodo de tiempo que corresponde a la conversación de José con Paty

b). El instante que corresponde a la presencia de José en la biblioteca

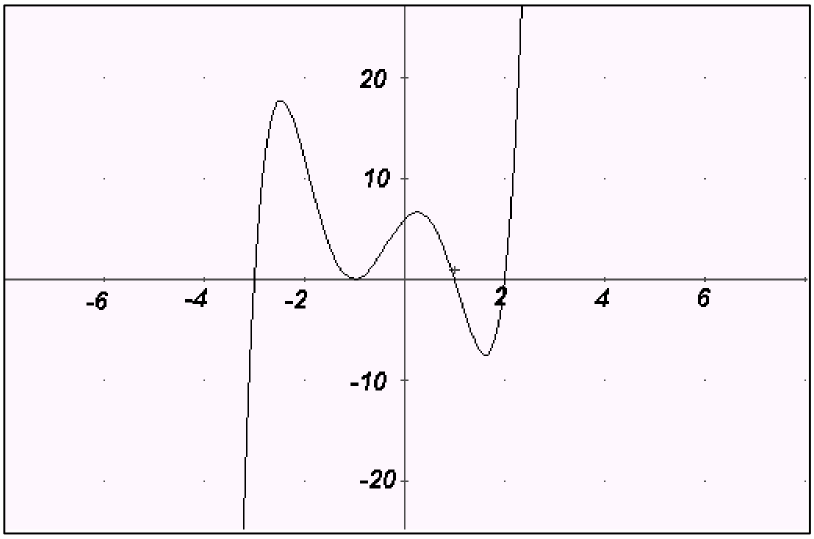
c). El periodo de tiempo cuando la distancia entre José y el salón de clases se está incrementando

d). Un periodo de tiempo en que la distancia entre José y el salón de clases esté disminuyendo

e). Un instante en que la distancia entre José y el salón de clases sea máxima

f). Un momento en que José no se está moviendo en absoluto

8.2 Anexo B: Introducción a la función derivada.

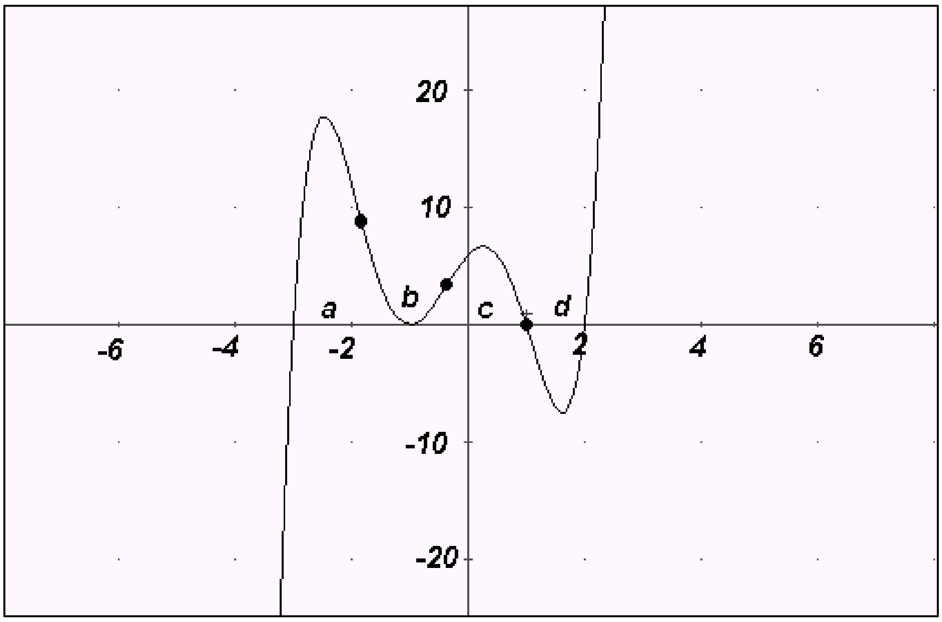


Tenemos la gráfica siguiente

Queremos obtener una nueva gráfica a partir de la anterior que cumpla con los siguientes requisitos:

1. Si la gráfica original es creciente, la nueva tendrá valores positivos
2. Si la gráfica original es decreciente, la nueva tendrá valores negativos
3. Donde la gráfica original tenga un máximo o un mínimo, la nueva será igual a cero
4. Donde la gráfica original tenga un punto de inflexión la nueva gráfica tendrá, un mínimo, si en la original pasamos de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba y si pasamos de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, la nueva tendrá un máximo.

Para la determinación de nuestra nueva gráfica nos conviene identificar los puntos más importantes de la gráfica de partida, sus puntos máximos, mínimos y puntos de inflexión:



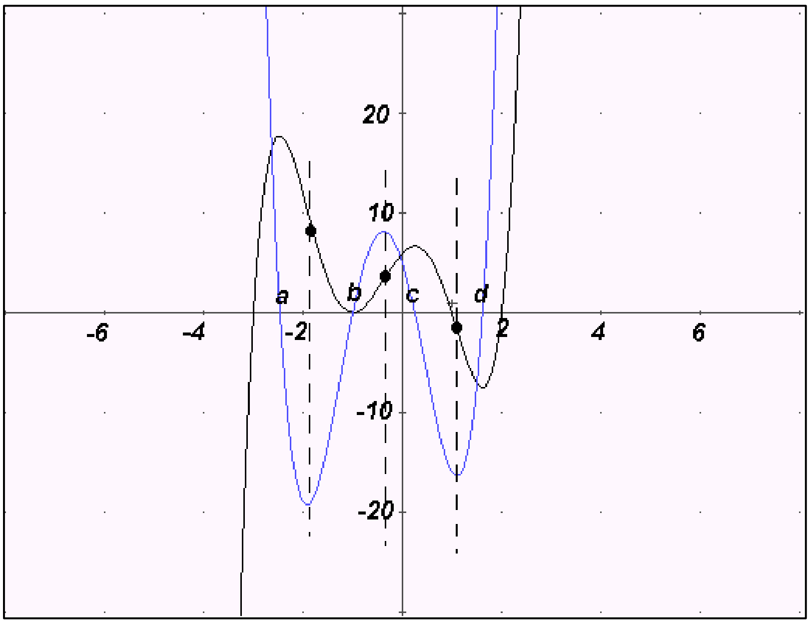
En los puntos **a**, y **c** hay puntos máximos y en los puntos **b** y **d** hay puntos mínimos.

Examinemos pues, el comportamiento de nuestra función original para poder determinar, la gráfica de nuestra nueva función a la que le daremos el nombre de, función “derivada”:

1. Antes del punto **a**, la función es creciente, de ahí que, nuestra nueva función o función derivada en esta parte deberá ser positiva.
2. Si en el punto **a**, la función original tiene un máximo, la función derivada deberá ser igual a cero en **a**.

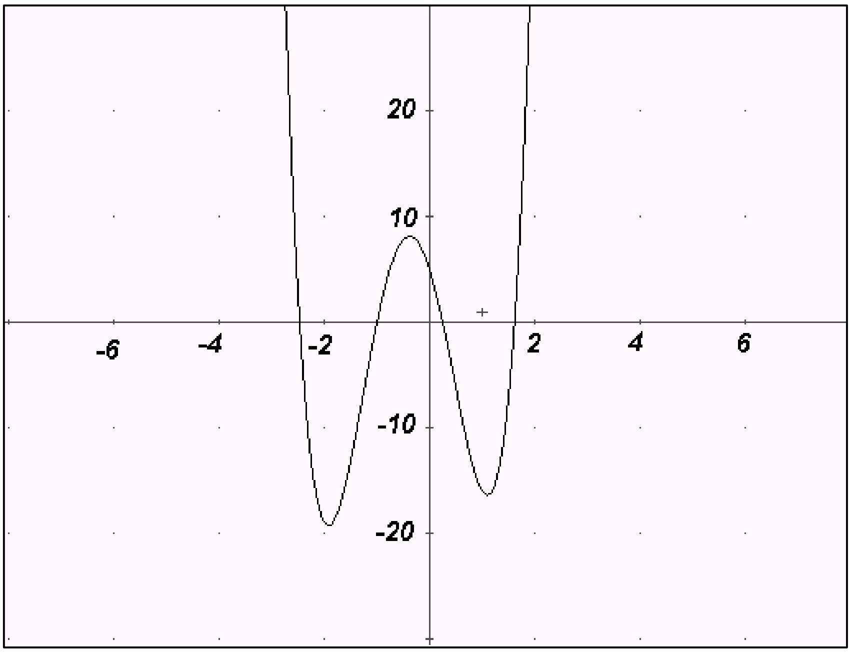
3. Después del punto **a** y hasta el punto **b**, la función comienza a decrecer. En este intervalo entonces nuestra nueva función deberá ser negativa.
4. Aún más, en el intervalo de **a** a **b**, tenemos un punto de inflexión, de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba, de ahí que en este punto nuestra función derivada deberá tener un mínimo.
5. En el punto **b** la función tiene un mínimo. En este punto nuestra función derivada será igual a cero.
6. En el intervalo del punto **b** al punto **c**, la función es creciente, de ahí que en este intervalo nuestra nueva función deberá tener valores positivos.
7. En el punto de inflexión en el intervalo entre **b** y **c**, la función pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, de manera que en este punto nuestra función derivada tendrá un máximo.
8. En el punto **c** la función tiene un máximo por lo que nuestra función derivada será igual a cero en este punto.
9. En el intervalo del punto **c** al punto **d**, la función es decreciente. En este intervalo la función derivada deberá ser negativa.
10. En el punto de inflexión entre **c** y **d**, dado que se pasa de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba la función derivada tendrá un mínimo
11. Si en el punto **d** la función tiene un mínimo, la función derivada será igual a cero en este punto
12. Después de **d** la función es creciente. Después de **d** la función derivada será positiva

Después de todas las consideraciones anteriores la gráfica de nuestra derivada queda en la forma siguiente:



Ejercicio 1

Para la gráfica siguiente,

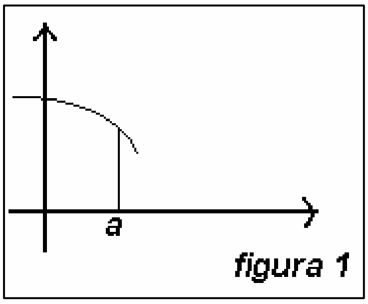


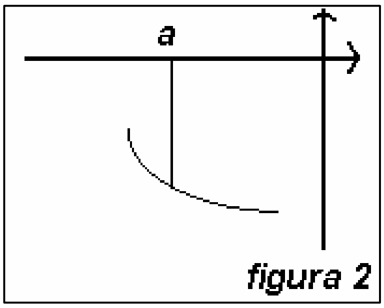
Obtener la gráfica de la función derivada, de acuerdo al ejemplo anterior.

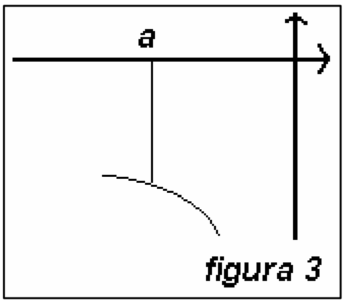
8.3 Diseño didáctico para el aprendizaje de la noción de derivada.

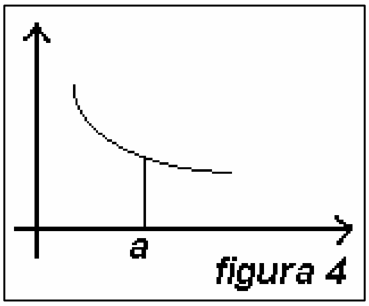
Problema I.1

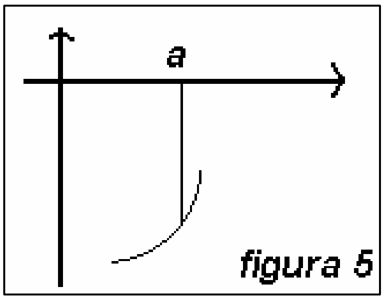
Del siguiente grupo de gráficas de diferentes *f(x)*, elige la o las que cumplan con la condición *f´(a)<0*. Explica tu respuesta.

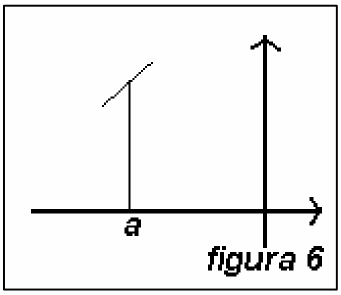








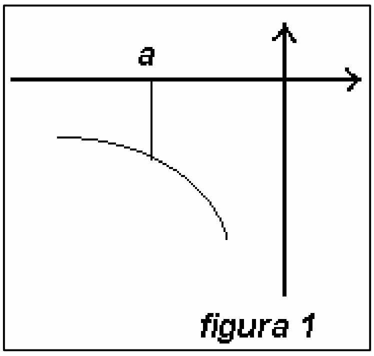


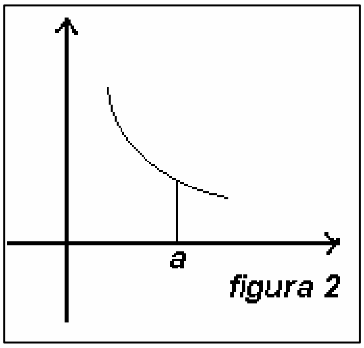


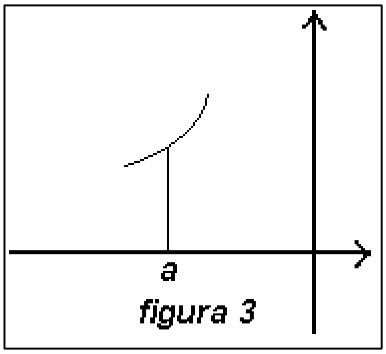
Respuesta:

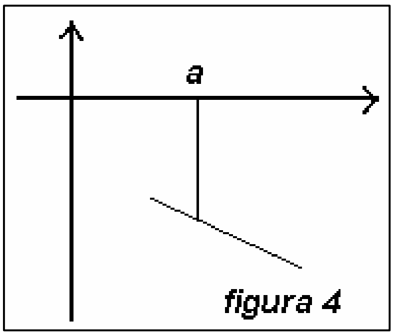
Problema I.2

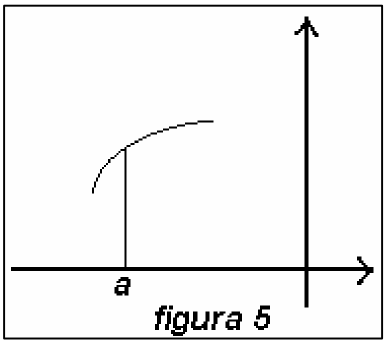
Del siguiente grupo de gráficas de diferentes *f(x)*, elige la o las que cumplen con la condición $f''(a)>0$. Explica tu respuesta.







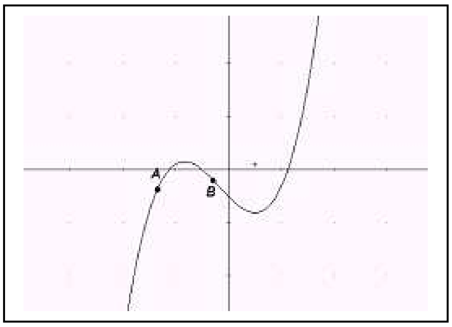




Respuesta:

Problema I.3

A continuación se presenta la gráfica de una cierta función y en ella se marcan dos puntos. Contesta las preguntas ubicadas a la derecha de la gráfica



¿Cuál es el signo de la primera derivada en el punto A?

¿Cuál es el signo de la primera derivada en el punto B?

¿Cuál es el signo de la segunda derivada en el punto A?

¿Cuál es el signo de la segunda derivada en el punto B?

Sugerencia: Si es necesario que hagas un bosquejo de la derivada de una función, lo puedes hacer..

Respuesta:

Problema I.4

A continuación se da la función $f(x) = x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1$

Realiza lo que se pide en cada inciso

Calcula f´(x) Contesta las siguientes preguntas:

Calcula f´´(x) e) ¿Tienen el mismo signo f´($\frac{1}{2}$) y f´($\frac{3}{2}$)?

Evalúa f´($\frac{1}{2}$) y f´($\frac{3}{2}$) f) ¿Tienen el mismo signo f´´($\frac{1}{2}$) y f´´($\frac{3}{2}$)?

Evalúa f´´($\frac{1}{2}$) y f´´($\frac{3}{2}$)

Respuesta:

Problema I.4 bis

A continuación se da la función f$(x) = x^3 - x - 5$

Realiza lo que se pide en cada inciso

Calcula $f'(x)$

Contesta las siguientes preguntas:

Calcula $f''(x)$

e) ¿Tienen el mismo signo $f'(-1)$ *y* $f''(-1)$?

Evalúa $f'(-1)$ *y* $f'(1)$

f) ¿Tienen el mismo signo $f'(1)$ *y* $f''(1)$?

Evalúa $f''(-1)$ *y* $f''(1)$

Respuesta:

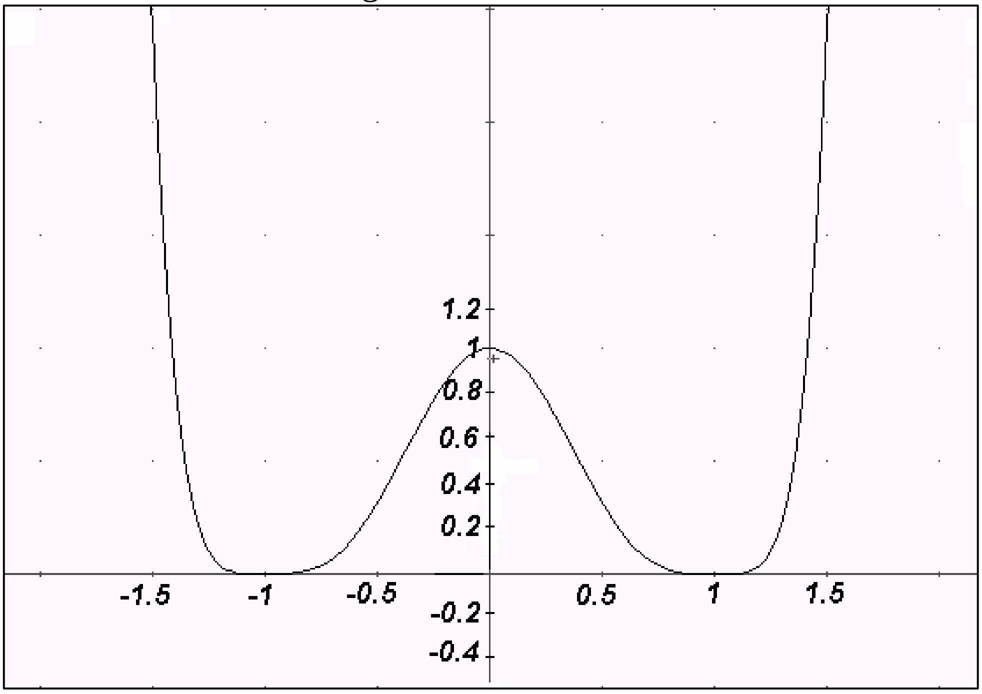
Problema I.5

Confirma o refuta la siguiente afirmación:

Si una función cumple con la condición $f'(a) > 0$ entonces también cumple con la condición $f''(a) > 0$. Explica tu respuesta.

Problema I.6

A continuación se muestra la gráfica de una función



Los puntos $\left(-\frac{1}{3}, 0.62\right), \left(-\frac{1}{4}, 0.77\right), (0,1), \left(\frac{1}{5}, 0.85\right)$ están sobre ella.

Márcalos

Resulta que al evaluar la segunda derivada en x = $-\frac{1}{3}$, x = $-\frac{1}{4}$, x = $\frac{1}{5}$ y x = $\frac{1}{3}$ se obtiene: $f''\left(-\frac{1}{3}\right) = -1.40$ $f''\left(-\frac{1}{4}\right) = -3.95$ $f''(0) = -8$

$f''\left(\frac{1}{5}\right) = -5.30$ $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -1.40$

Haciendo un bosquejo analiza la forma que tiene la gráfica en la ventana desde x = $-\frac{1}{3}$ hasta x = $\frac{1}{3}$ y desde y = 0.4 hasta y = 1.2

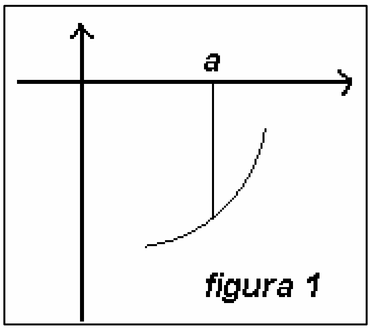
Respuesta:

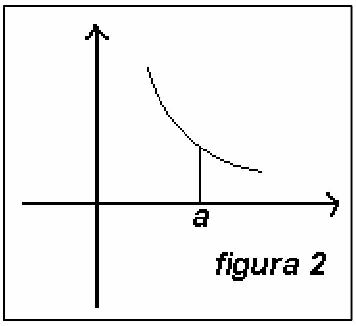
Problema I.7

Dibuja una parte de la gráfica de una función que cumpla con la condición $f''(x)>0$ para toda x en el intervalo (a, b). Explica tu respuesta:

Problema I.8

A continuación se muestran varias gráficas de $f(x)$. Elige la o las que cumplan con la condición $f'''(a) < 0$. Explica tu respuesta.



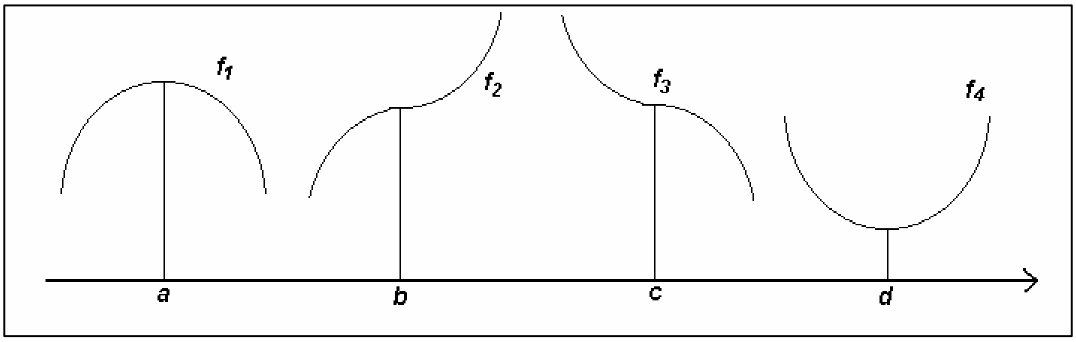


Respuesta:

Problema I.9

A continuación se presentan varias gráficas.

Nota: Es importante que no asocies ninguna fórmula a las formas dadas.



Contesta las siguientes preguntas explicando tus respuestas:

¿Cómo es el signo de f'_1 antes y después de a?

¿Cuál es el signo de f''_1 antes y después de a?

¿Cómo es el signo de f'_2 antes y después de b?

¿Cuál es el signo de f''_2 antes y después de b?

¿Cómo es el signo de f'_3 antes y después de c?

¿Cuál es el signo de f''_3 antes y después de c?

¿Cómo es el signo de f'_4 antes y después de d?

¿Cuál es el signo de f''_4 antes y después de d?

Respuesta:

Problema I.10

Confirma o refuta las siguientes afirmaciones:

La derivada de una cierta función después de un mínimo local es negativa

La derivada de una función después de un punto de inflexión siempre es positiva

La segunda derivada de una función alrededor de un punto de inflexión es positiva

La segunda derivada de una función alrededor de un máximo es negativa

El signo de la primera derivada en el punto $x = a$ siempre es el mismo que el signo de la segunda derivada en dicho punto

La tercera derivada de toda función siempre se anula

Es importante que expliques tus respuestas; para ayudarte, en cada inciso realiza bosquejos.

Respuesta:

Problema II.1

A continuación se muestra una tabla que contiene la tabulación de dos funciones cualesquiera.

X	***F_1(x)***	***f_2(x)***
-0.65	0.000	0.293
-0.60	0.032	0.247
-0.55	0.098	0.201
-0.50	0.173	0.173
-0.45	0.202	0.142
-0.40	0.250	0.100
-0.35	0.301	0.140
-0.30	0.323	0.272
-0.25	0.400	0.400
-0.20	0.423	0.457
-0.15	0.451	0.538

x	***f_1(x)***	***f_2(x)***
-0.10	0.510	0.541
-0.05	0.521	0.552
0.00	0.500	0.560
0.05	0.461	0.568
0.10	0.358	0.600
0.15	0.252	0.618
0.20	0.192	0.622
0.25	0.161	0.650
0.30	0.142	0.673
0.35	0.062	0.682
0.40	0.010	0.701

Nota: Es importante que observes que la tabla derecha es la continuación de la tabla de la izquierda.

1. Grafica $\boldsymbol{f_1(x)}$ y $\boldsymbol{f_2(x)}$

2. Ahora, contesta las siguientes preguntas:

¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en $x = -0.50$?

¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en $x = -0.25$?

¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en $x = 0.25$?

Es importante que expliques tus respuestas.

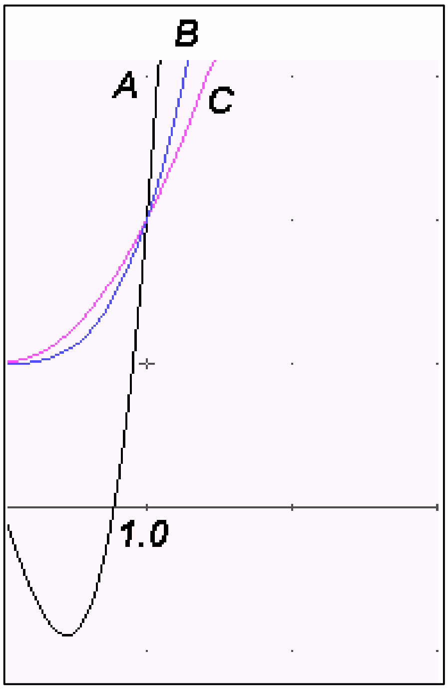
Problema II.2

Bosqueja una parte de las gráficas de dos funciones, tales que cumplan $f'(a)>g'(a)$. ¿Cómo es $f(x)$ respecto a $g(x)$ alrededor del punto $x = a$?

Respuesta:

Problema II.3

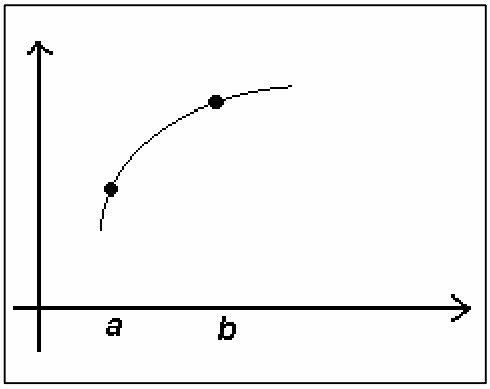
A continuación se muestran las gráficas de varias funciones. Todas se intersecan en el mismo punto. Decide cuál de ellas tiene derivada mayor en el punto *x = 1*. Es importante que expliques tu respuesta.



Respuesta:

Problema II.4

De la siguiente figura contesta la siguiente pregunta: ¿$f'(b) > f'(a)$? Explica tu respuesta.



Problema II.5 a

Supongamos que la función $f(x)$ es un polinomio. Se sabe que tiene como puntos críticos -1, 1, 2 y 3. Además cumple con $f''(-1) = 0$, $f''(1) > 0$, $f''(2) < 0$ y $f''(3) = 0$. Haz un bosquejo con todo el detalle posible a partir de la información.

Problema II.5 b

A partir del bosquejo hecho en el problema **II.5a** contesta las siguientes preguntas:

¿Cómo es la función en el intervalo *(-1, 1)*?

¿Cómo es la función en el intervalo *(1, 2)*?

¿Cómo es la función en el intervalo *(2, 3)*?

¿Cómo es la derivada de la función en el intervalo *(-1, 1)*?

De acuerdo a la forma que tiene la gráfica de la función, ¿cuál es el signo de la segunda derivada alrededor de $x = 2$?

Problema II.6

Haz el bosquejo de las gráficas de dos funciones tales que cumplan con la condición $f''(a) > g''(a)$. Da ejemplos que cumplan con la condición anterior.

Problema II.7

Confirma o refuta las siguientes afirmaciones:

Sean dos funciones f y g que cumplen con la condición $f'(a) < g'(a)$, entonces se cumple con la condición $f''(a) < g''(a)$.

Sean dos funciones que cumplen con las condiciones $f'(x) > g'(x) > 0$ para todo valor de x en el intervalo (a, b), entonces se cumple con la condición $f''(x)>g''(x)$.

Problema II.8

A continuación se dan las expresiones de dos funciones

$f_1(x) = (x + 2)^2$ $f_2(x) = (x - 4)^2 + x^2$

Evalúa $f'_1(x)$ y $f'_2(1)$

¿Cuál de las tres condiciones siguientes se cumple?

a) $f''_1(1) < f''_2(1)$ b) $f''_1(1) = f''_2(1)$ c) $f''_1(1) > f''_2(1)$

Compara tu respuesta con la que diste en el problema **II.7**

8.4 Anexo D: Apéndice de las soluciones de los estudiantes.

Se presentan las respuestas de cada uno de los estudiantes, así como el trabajo desarrollado en equipo y las charlas entre y con los estudiantes. Cabe aclarar que los nombres de los estudiantes son omitidos y en sustitución se nombrará el estudiante W, X, Y y Z.

- ✓ Etapa de acción.

Estudiante W

Sección I.

Problema I.1

Solo selecciona las figuras 1 y 3 sin más argumento.

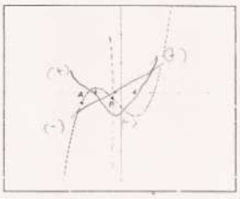
Problema I.2

Para la figura 1 $f(x)$ decrece, derivada mayor a cero y su derivada.

Determina que las figuras que cumplen son 1, 2, 3, 4.

No realiza bosquejo alguno.

Problema I.3



1. ¿Cuál es el signo de la primera derivada en el punto A?
2. ¿Cuál es el signo de la primera derivada en el punto B?
3. ¿Cuál es el signo de la segunda derivada en el punto A?
4. ¿Cuál es el signo de la segunda derivada en el punto B?

Sugerencia: Si es necesario que hagas un bosquejo de la derivada de la función dada, lo puedes hacer.

Respuesta:

1. cuando la grafica en el punto A es creciente tendra valores positivos (+)
2. cuando la grafica en el punto B es negativo tendra valores negativos (-)
3. negativo

Problema I.4

a) $f'(x) = 8x^7 - 24x^5 + 24x^3 - 8x + 1$

b) $f''(x) = 56x^6 - 120x^4 + 72x^2 - 8$

c) $f'(0.5) = 61.75$, $f'(1.5) = 24.4384$,

d) $f''(0.5) = -64.1214$, $f''(1.5) = 172.985$

e) Sí

f) No

Problema I.4 bis

a) $f'(x) = 3x^2$

b) $f''(x) = 6x$

c) $f'(-1) = -3$, $f'(1) = 3$

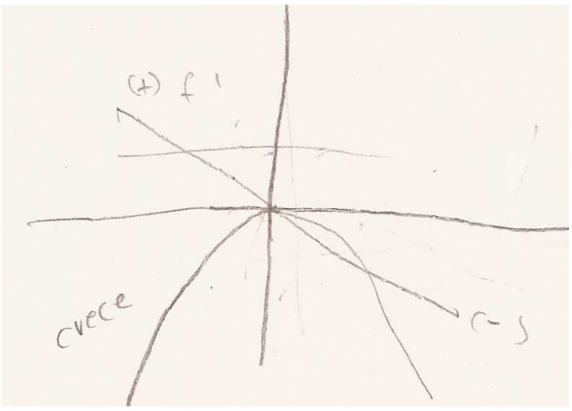
d) $f''(-1) = -6$, $f''(1) = +6$

e) Si

f) No

Problema I.5

El estudiante confirma la respuesta, dice porque cuando la grafica muestra que es creciente y la derivada es $f'(x) > 0$, la derivada $f''(x) > 0$ es positiva, porque cuando la gráfica crece la $f''(x)$ es positiva por lo tanto $f''(x) > 0$. Además el estudiante presenta el siguiente gráfico

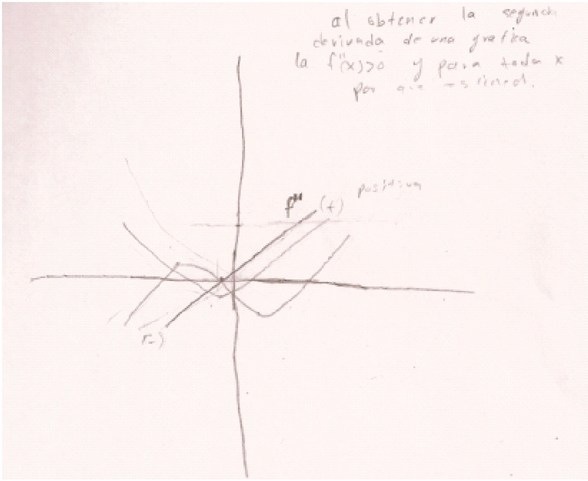


Problema I.6

Dice “no entiendo lo que me piden”.

Problema I.7

Presenta el siguiente gráfico y un breve argumento.



Problema I.8.

Para la fig. 1

Cumple que si la derivada de f es negativa, y la segunda es mayor a cero, entonces la tercera derivada es negativo o menor a cero.

Fig. 2 Si cumple, porque la derivada de f es creciente, la segunda derivada es decreciente, entonces la derivada es negativa.

Problema I.9

a) Positiva a negativa
b) Menos a menos.
c) Positivo a positivo
d) Menos a mas
e) Negativo y positivo
f) Positivo a positivo
g) Menos a mas.

h) Mas a Mas.

Problema I.10

c) No porque cuando la función es creciente después de un mínimo la derivada será positiva.

d) No porque donde la grafica tenga un punto de inflexión al derivar tendrá un mínimo y puede ser negativo.

e) Si porque si la primera derivada de una función en un punto de inflexión es negativa la segunda será positiva.

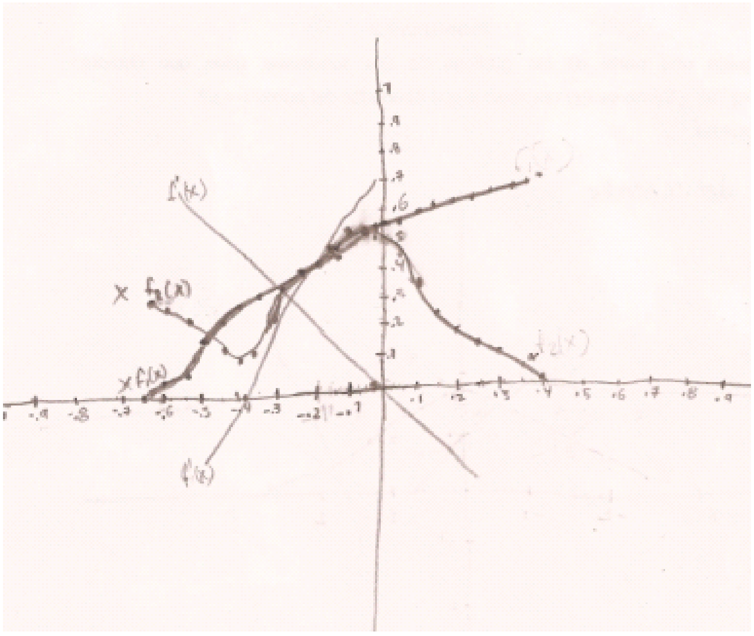
f) No porque al derivar donde la gráfica tiene un máximo es igual a cero y si sacamos la segunda derivada el signo es positivo.

g) No porque si la derivada de un punto es positiva la segunda derivada será negativa y viceversa.

h) Algunas veces porque solo si la gráfica es creciente solo se les da valores positivos y si es decreciente solo tendrá valores negativos.

Problema II.1

Presenta el siguiente gráfico.



Sus respuestas son:

Las gráficas tienen el valor igual de la derivada en $x = -0.50$ que equivale a 0.173 y porqué así.

Son iguales al tener 0.400 cada una para en $x = -0.25$.

La segunda función tiene un valor más grande al tener 0.650 y la primera tiene un valor más chico al tener 0.169.

Problema II.2

No da respuesta a esta sección.

Problema II.3

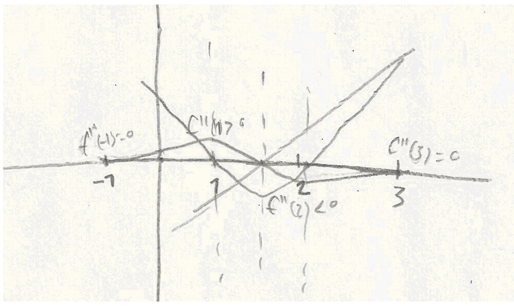
La gráfica A porque al crecer se acerca más al punto a.

Problema II.4

Si, cumple la condición dada porque el valor de b es más alto que el de a.

Problema II.5

Presenta el siguiente gráfico.



Problema II.5 b

a) Creciente.

b) Decreciente.

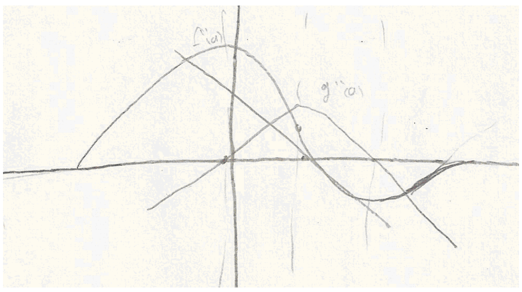
c) Creciente.

d) Decreciente o negativa.

e) Positivo.

Problema II.6

Presenta el siguiente gráfico sin más explicación.



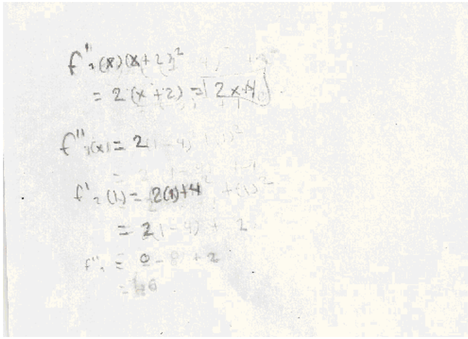
Problema II.7

1. Si porque siempre si se cumple con las primeras derivadas, también con las derivadas que siguen.

2. Si como en la respuesta 1.

Problema II.8

Su solución:



Estudiante X

Problema I.1

Solo selecciona la gráfica 3 y responde que en ella se encuentra que en la derivada están unos puntos menores y se va disminuyendo.

Problema I.2

Son las figuras 2, 3 y 5. Para la figura 2 indica que la derivada esta decreciendo, para la figura 3 en esta figura nos indica que es mayor que cero porque esta creciendo y en la figura 5 en esta gráfica es mayor a cero “a” pero empieza a desplazarse en forma que crece A.

Problema I.3

Para la pregunta 1 es negativa, para la 2 es negativa, para la 3 es negativa y la pregunta 4 es negativa.

Problema I.4

a) $f'(x) = 8x^7 - 24x^5 + 24x^3 - 8x$

b) $f''(x) = 56x^6 - 120x^4 + 72x^2 - 8$

c) $f'(0.5) = -7.9375$, $f'(1.5) = 23.43$

d) $f''(0.5) = -11.375$, $f''(1.5) = 192.375$

e) No

f) No

Problema I.4 bis

a) $f'(x) = 3x^2 - 1$

b) $f''(x) = 6x$

c) $f'(-1) = -4$, $f'(1) = +2$,

d) $f''(-1) = -6$, $f''(1) = +6$,

e) Si

f) Si

Problema I.5

Si sería mayor siempre y cuando no se a un número con exponente, porque cuando se tiene el número se convierte en cero.

Problema 1.6

Es una línea recta que después regresa en forma hacia arriba y se desplaza en dirección recta hacia arriba.

Problema 1.7

Sería si en la anterior la primera derivada es mayor a cero si tendría un exponente en el cual tendría que multiplicar y aumentaría así la segunda derivada es mayor a cero.

Problema I.8

La figura 1 porque en ella se muestra la línea que la divide que es menor que cero es un punto de vista mió.

La figura 2 es que si el exponente de la segunda derivada se disminuye por lógica se disminuye la tercera derivada y no podría ser lo que se pide.

Problema I.9

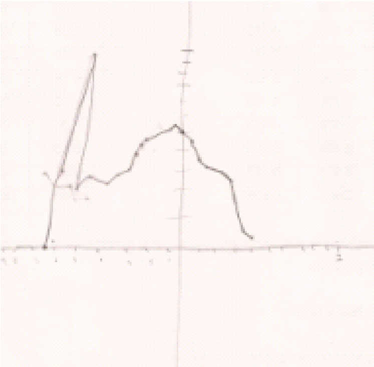
a) Positivo a negativo.
b) Positivo a positivo x
c) No respondió.
d) No respondió.
e) Positivo y negativo.
f) Positivo y Negativo
g) Positivo y positivo.
h) Negativo y positivo.

Problema I.10

c) Refuto
d) refuto
e) refuto
f) refuto
g) refuto
h) refuto

Problema II.1

El estudiante presenta el siguiente esbozo.



Las respuestas son.

Son iguales.

Son iguales.

Es más grande la derivada de la función 2.

Problema II.2

No responde el problema.

Problema II.3

La A porque en ella se encuentra más la curva para derivarla y se seguiría derivando más que las otras.

Problema II.4

No entiendo

Problema II.5

No entiendo el enunciado.

Problema II.5b

No responde las preguntas.

Problema II.6

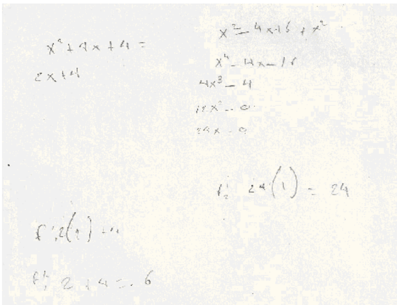
No responde el problema.

Problema II.7

1. Si
2. Si.

Problema II.8

Sus respuestas son:



Estudiante Y

Problema I.1

La figura 1, 2, 3, 4 si cumplen porque decrecen y que la figura 5 y 6 no cumple porque crece. No bosqueja gráficos Solo indica que las gráficas que decrecen su derivada es siempre va ser menor que cero o negativa.

Problema I.2

Las figuras 1, 3, 4, 5 .No cumplen la condición $f''(a) > 0$ porque por más que se derive algo negativo siempre será negativo y tiende a ser menor que cero. La figura 2 si cumple porque la gráfica es positiva.

Problema I.3

Determina las soluciones de esta forma: pregunta 1 positivo, pregunta 2 negativo, pregunta 3 y 4 negativo.

Problema I.4

a) $f'(x) = 8x^7 - 24x^5 + 24x^3 - 8x$

b) $f''(x) = 56x^6 - 120x^4 + 72x^2 - 8$

c) $f'(0.5) = -1.296$, $f'(1.5) = 23.44$

d) $f''(0.5) = 5.696$, $f''(1.5) = 182.72$

e) Si

f) No

Problema I.4 bis

a) $f'(x) = 3x^2 - 1$

b) $f''(x) = 6x$

c) $f'(-1) = -2$, $f'(1) = +2$

d) $f''(-1) = -6$, $f''(1) = +6$

e) No

f) Si

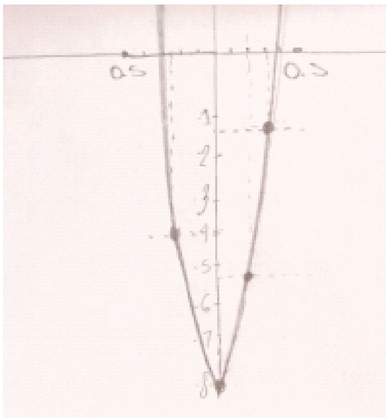
Problema I.5

Depende de la primera y segunda derivada de la gráfica, si la primera derivada crece la segunda si es mayor que cero, pero si la primera derivada es decreciente

La segunda derivada sería menor que cero.

Problema I.6

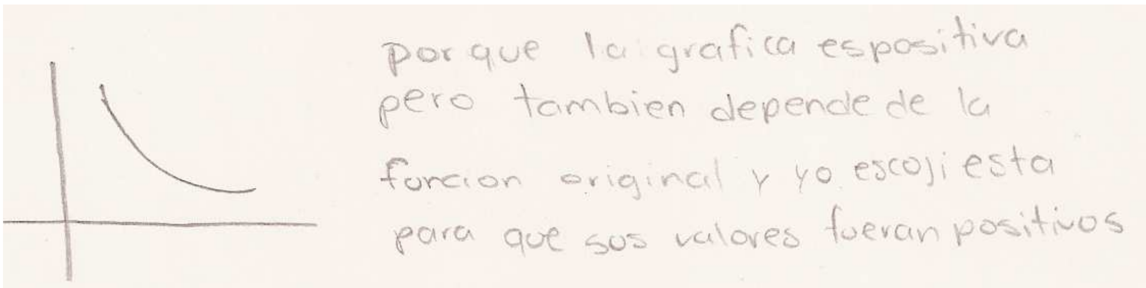
Grafica lo siguiente:



La gráfica de la segunda derivada tiene signos negativos en el intervalo de -0.3 y 0.3.

Problema I.7

Presenta el siguiente gráfico.



Problema I.8

Ninguna de las 2, son iguales porque la tercera derivada de estas funciones son igual a cero.

Problema I.9

a) Positiva a negativa

b) Negativo antes y después de a.

c) Positivos antes y después de b.

d) Negativo a positivo.

e) Negativo antes y después de c

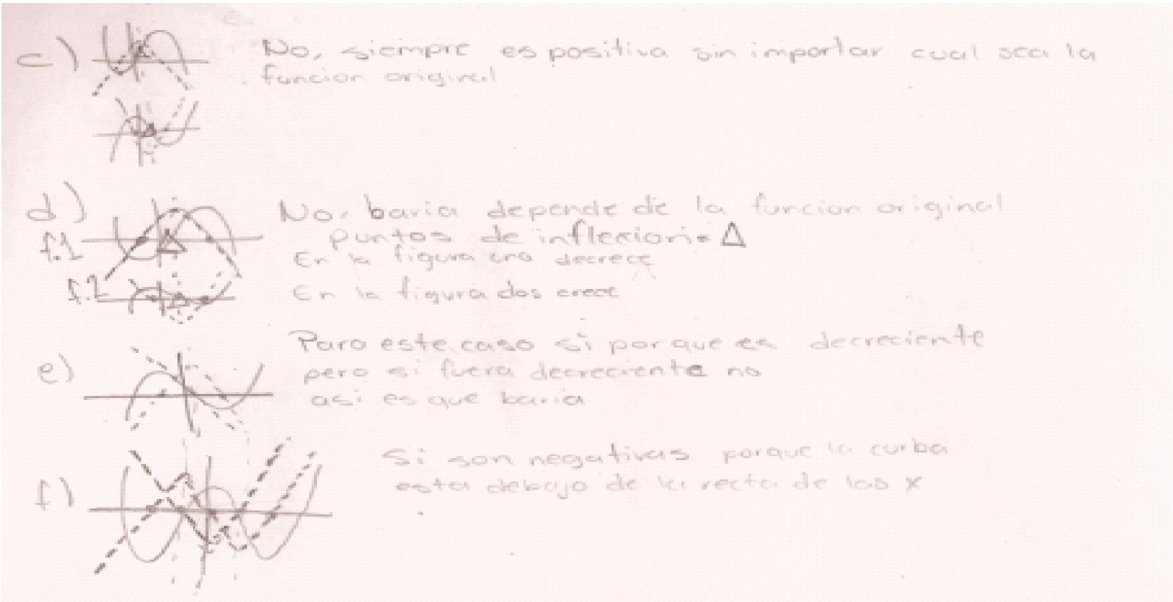
f) De más a menos.

g) De menos a más.

h) No cambia, antes y después son positivos.

Problema I.10

Responde lo siguiente.

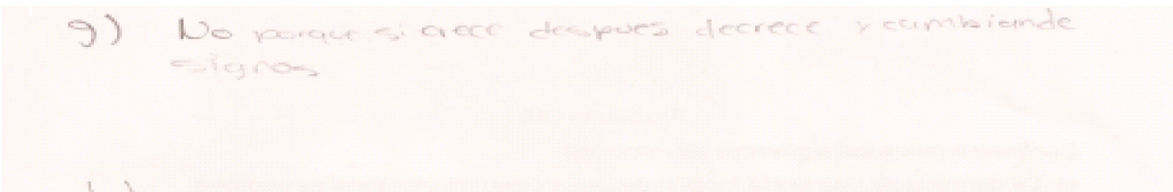


c) No, siempre es positiva sin importar cual sea la funcion original

d) No, baria depende de la funcion original
puntos de inflecion = Δ
f.1
f.2
En la figura uno decrece
En la figura dos crece

e) Para este caso si porque es decreciente pero si fuera decreciente no asi es que baria

f) Si son negativas porque la curba esta debajo de la recta de las x

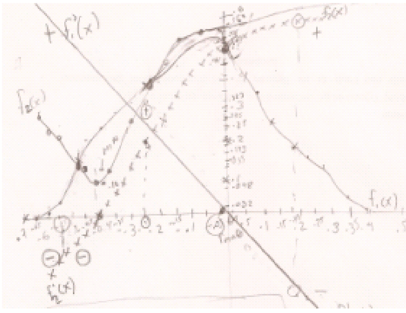


g) No porque si crece despues decrece y cambia de signos

h) No siempre porque algunas se pueden derivar muchas veses y unas no

Problema II.1

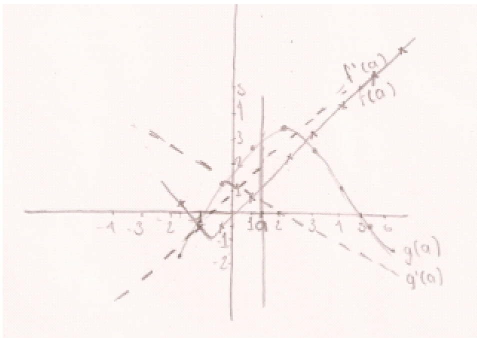
Su solución:



La respuesta es que en -0.5 se ve claramente que es la derivada de f_1, en la segunda pregunta la mayor es la derivada de la f_1 en -0.25 y en 0.5 es la derivada de la función 2.

Problema II.2

Presenta el siguiente gráfico como respuesta.



Problema II.3

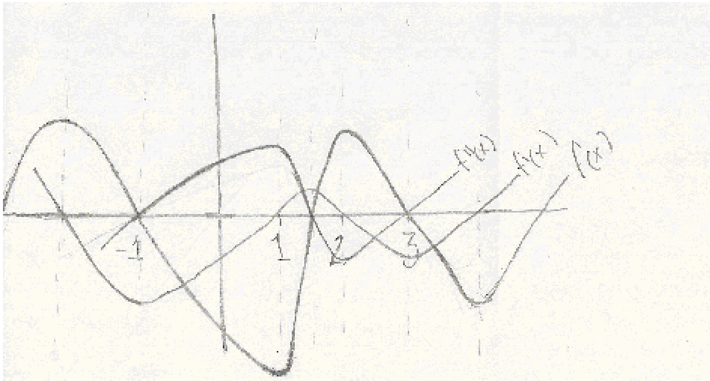
La derivada de a porque es una parábola muy cerrada y su derivada puede ser más vertical porque crece más que las otras dos y tendría mayor valor que las otras en el punto 1, además es una recta.

Problema II.4

No, porque en el fragmento de gráfica es creciente y su derivada decrecería y como b está del lado derecho tendría menor valor que a.

Problema II.5a

Presenta el siguiente gráfico



Problema II.5b

a) Decrece.

b) Crece.

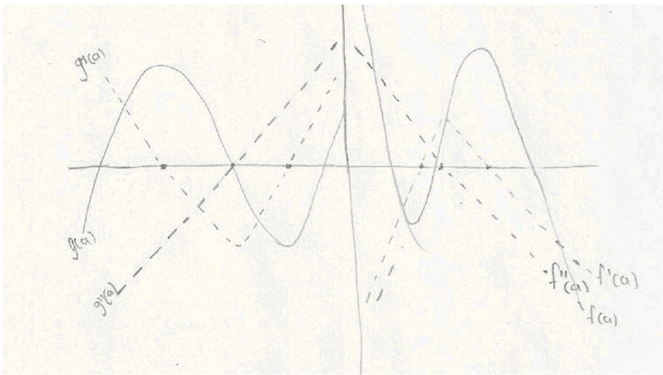
c) Decreciente.

d) Creciente.

e) Antes y después de 2 son negativos.

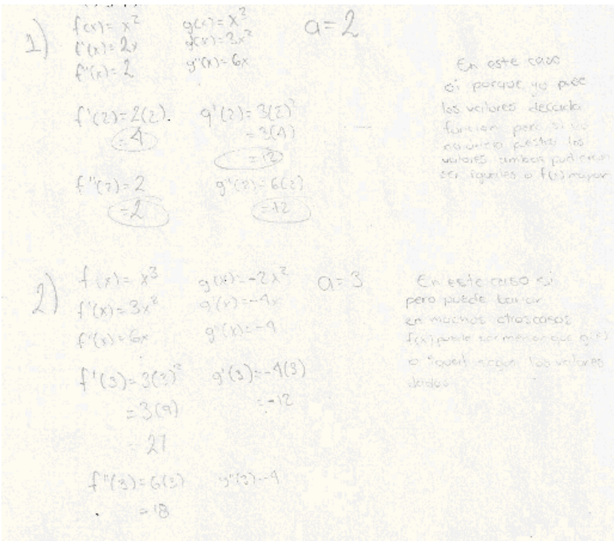
Problema II.6

Se presenta su esbozo.



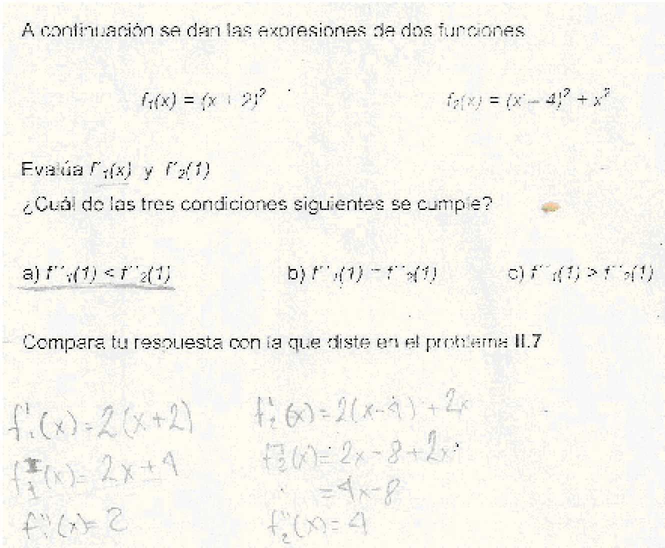
Problema II.7

Sus respuestas son



Problema II.8

Las respuestas son las siguientes:


A continuación se dan las expresiones de dos funciones

$f_1(x) = (x+2)^2$ $f_2(x) = (x-4)^2 + x^2$

Evalúa $f''_1(x)$ y $f''_2(1)$

¿Cuál de las tres condiciones siguientes se cumple?

a) $f''_1(1) < f''_2(1)$ b) $f''_1(1) = f''_2(1)$ c) $f''_1(1) > f''_2(1)$

Compara tu respuesta con la que diste en el problema II.7

$f'_1(x) = 2(x+2)$ $f'_2(x) = 2(x-4)+2x$

$f'_1(x) = 2x+4$ $f'_2(x) = 2x-8+2x$

$=4x-8$

$f''(x) = 2$ $f''_2(x) = 4$

Estudiante Z

Problema I.1

Su respuesta es que las figuras 1, 3, 5 si cumplen ya que están decreciendo y su derivada es negativa.

Problema I.2

La figura 1 la función f'' no cumple ya que es negativa, en la figura 2 la función f'' si cumple ya que es positiva, en la figura 3 la función f'' no cumple ya que es negativa, en la figura 4 la función f'' si cumple ya que es creciente, en la figura 5 la función f'' no cumple ya que decrece

Problema I.3

Para la pregunta 1 positiva porque la función está creciendo, para la pregunta 2 negativo porque la función decrece, para la pregunta 3 negativa ya que decrece y para la cuestión 4 dice que es positiva ya que decrece.

Problema I.4

a) $f'(x) = 8x^7 - 24x^5 + 24x^3 - 8x$

b) $f''(x) = 56x^6 - 120x^4 + 72x^2 - 8$

c) $f'(0.5) = -1.79$, $f'(1.5) = 23.36$

d) $f''(0.5) = 3.36$, $f''(1.5) = 184.63$

e) No, ya que la primera función es negativa y la otra positiva

f) Si, las 2 funciones son positivas.

Problema I.4 bis

a) $f'(x) = 3x^2 - 1$

b) $f''(x) = 6x$

c) $f'(-1) = -4$, $f'(1) = +2$

d) $f''(-1) = -6$, $f''(1) = +6$

e) Si, los 2 signos tienen funciones negativas.

f) Si, los 2 signos tienen funciones positivas.

Problema I.5

No, porque la derivada de la función original es inversa a ella y si la primera es mayor su derivada es menor.

Problema I.6

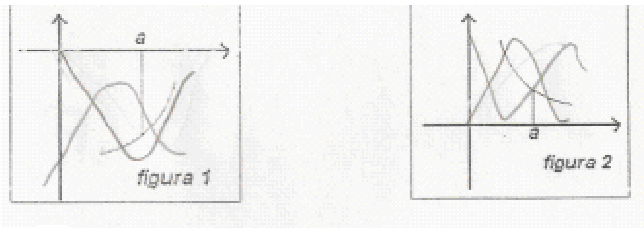
No entiendo el enunciado.

Problema I.7

Deja sin contestar.

Problema I.8

Presenta el siguiente bosquejo.



La primera función si cumple ya que decrece y es menor que cero.

La segunda función no cumple ya que es creciente y por consecuente mayor a cero.

Problema I.9

a) Positivo a negativo.
b) Negativo a negativo.
c) Antes y después positivos.
d) Antes negativo y después positivo.
e) Antes y después negativos.
f) Antes positivo y después negativo.
g) Antes negativo y después positivo.
h) Antes y después son positivos.

Problema I.10

c) Falso, ya que después del mínimo debe ser positivo.

d) Falso, ya que si decrece después del punto de inflexión siempre es negativo.

e) Falso, ya que si crece o decrece f la derivada entorno a la inflexión cambia.

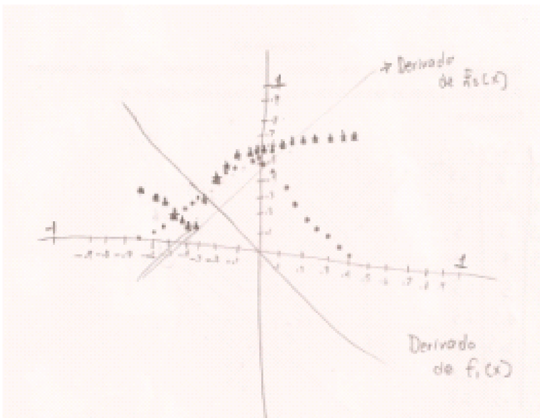
f) Cierta, ya que si la primera derivada tiene máximos, la segunda tendrá mínimos en su lugar.

g) Falso, dependiendo de sus crecimientos y decrecimientos varía su signo.

h) Falso, dependiendo de la función original se pueden sacar varias derivadas.

Problema II.1

Da el esbozo siguiente



Sus respuestas son.

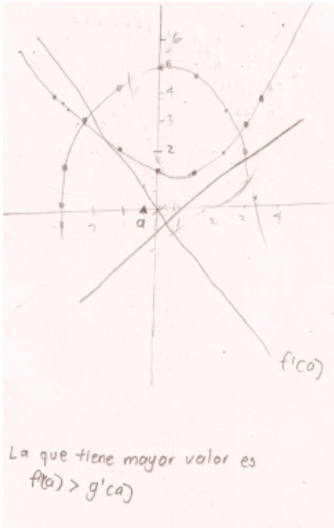
La función f_2.

La función f_2.

La función f_2.

Problema II.2

Esboza



Problema II.3

La mayor derivada sería la función A porque sería más estrecha al punto de que se deriva y se tiene un mayor valor.

Problema II.4

No, porque la derivada de b es menor.

Problema II.5a

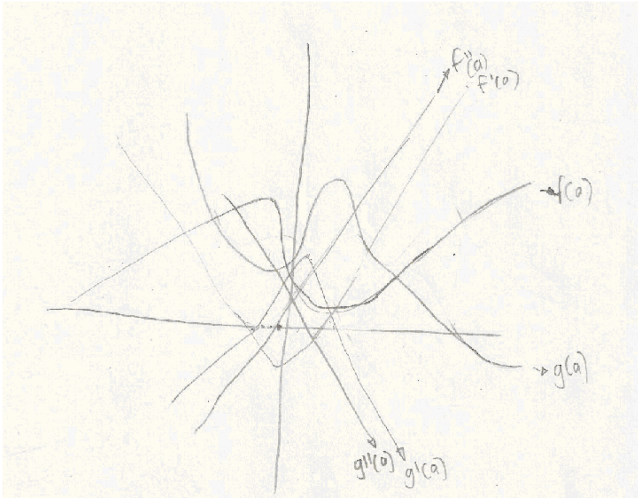
No entendió el enunciado.

Problema II.5b

No responde

Problema II.6

Da la siguiente solución

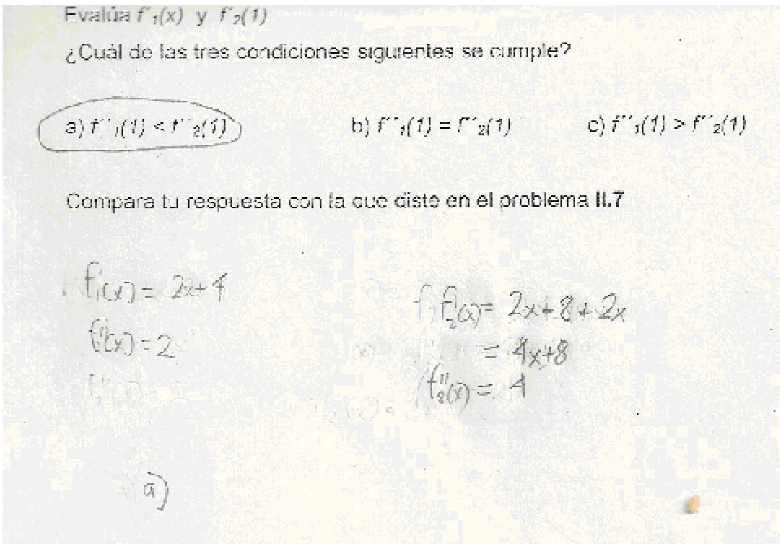


Problema II.7

No entendió el ejercicio.

Problema II.8

Presenta lo siguiente



Evalúa $f'_1(x)$ y $f'_2(1)$

¿Cuál de las tres condiciones siguientes se cumple?

a) $f''_1(1) < f''_2(1)$ b) $f''_1(1) = f''_2(1)$ c) $f''_1(1) > f''_2(1)$

Compara tu respuesta con la que diste en el problema **II.7**

$f_1(x) = 2x+4$

$f_1'(x) = 2$

$f_2(x) = 2x+8+2x$

$= 4x+8$

$f_2''(x) = 4$

a)

✓ Formulación.

Equipo 1: Estudiantes Y y Z.

Problema I.1 Respuesta de Y.

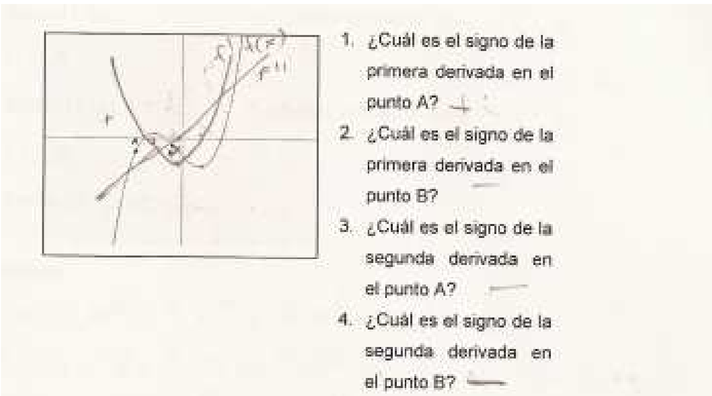
La figura 2, 3 y 5 si cumplen con $f'(a) < 0$, porque siendo graficas negativas cualquier derivada no importa si crece o decrece pasando por el punto “a” tendrá valores menores que cero.

Problema I.2 Respuesta de Y.

Las gráficas que cumplen con la condición $f''(a) > 0$ serían 2, 3, 5 siendo las gráficas positivas las derivadas pasando por el punto “a” serían positivas y como consecuente mayor que cero.

Problema I.3

Y presenta el siguiente gráfico:



Sus respuestas son positivo, negativo, negativo y negativo preguntas 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

Problema I.4

Solución de Y

a) $f'(x) = 8x^7 - 24x^5 + 24x^3 - 8x$

b) $f''(x) = 56x^6 - 120x^4 + 72x^2 - 8$

c) $f'(0.5) = -1.71$, $f'(1.5) = 23.43$

d) $f''(0.5) = 3.375$, $f''(1.5) = 503.3124$

e) No

f) Si tienen el mismo signo que es positivo.

Problema I.4 bis

Solución de Y

a) $f'(x) = 3x^2 - 1$

b) $f''(x) = 6x$

c) $f'(-1) = -2$, $f'(1) = +2$

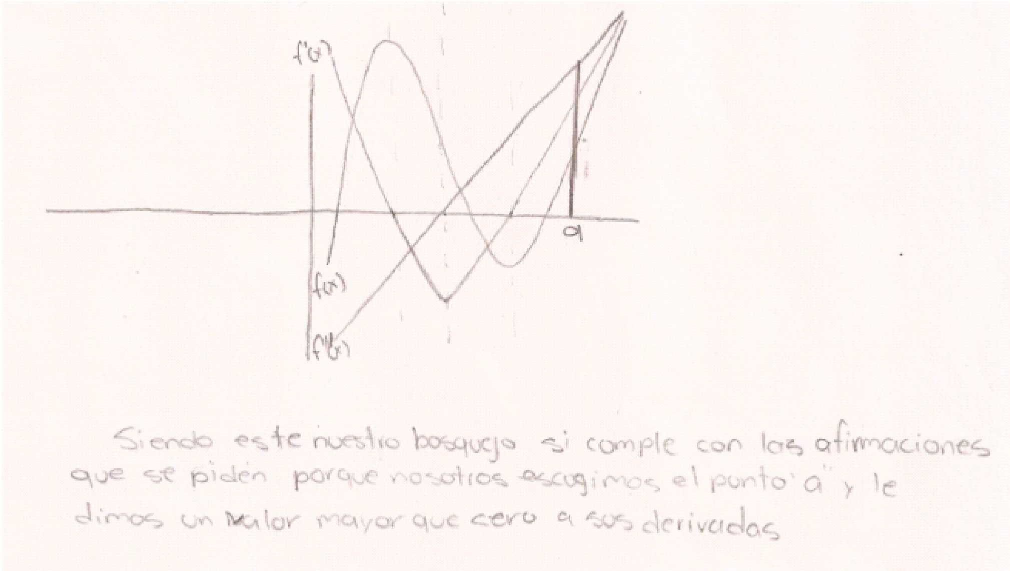
d) $f''(-1) = -6$, $f''(1) = +6$

e) No

f) Si

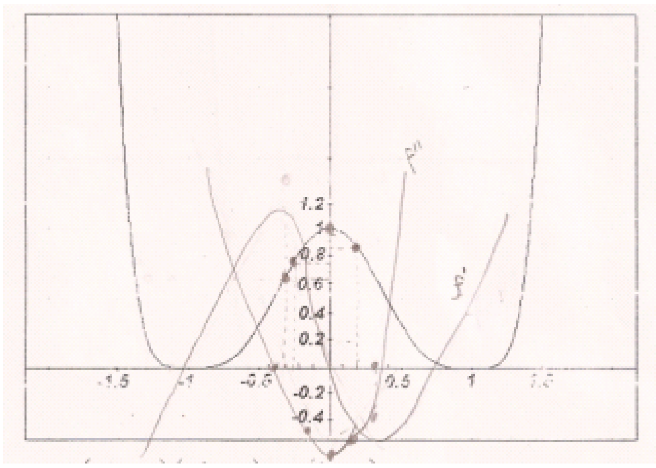
Problema I.5

Presenta Y el siguiente gráfico



Problema 1.6

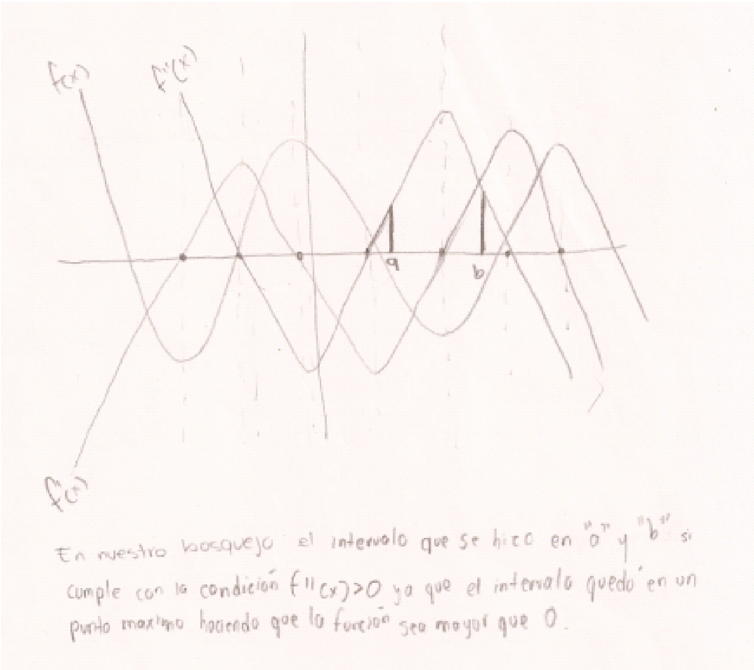
Grafica hecha por Y:



El signo es negativo.

Problema 1.7

Se da el siguiente esbozo de Y.



Problema I.8

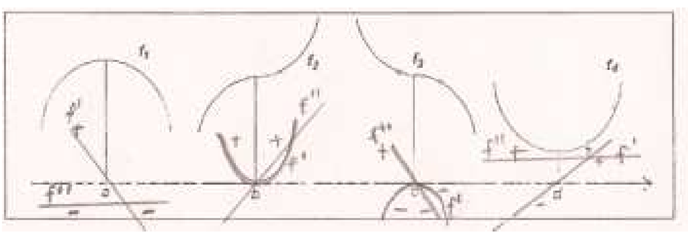
Respuestas de Y.

La figura 1 no cumple porque si la derivada de f es negativa, y la segunda positiva, entonces la tercera derivada es negativa.

La figura 2 Si cumple porque la derivada de f es creciente, la segunda derivada es decreciente, entonces la tercera derivada es negativa.

Problema 1.9

Presenta Y el siguiente bosquejo de graficas.



Además muestran su respuesta es:

a) + a-

b) – a –

c) + a +

d) – a +

e) – a –

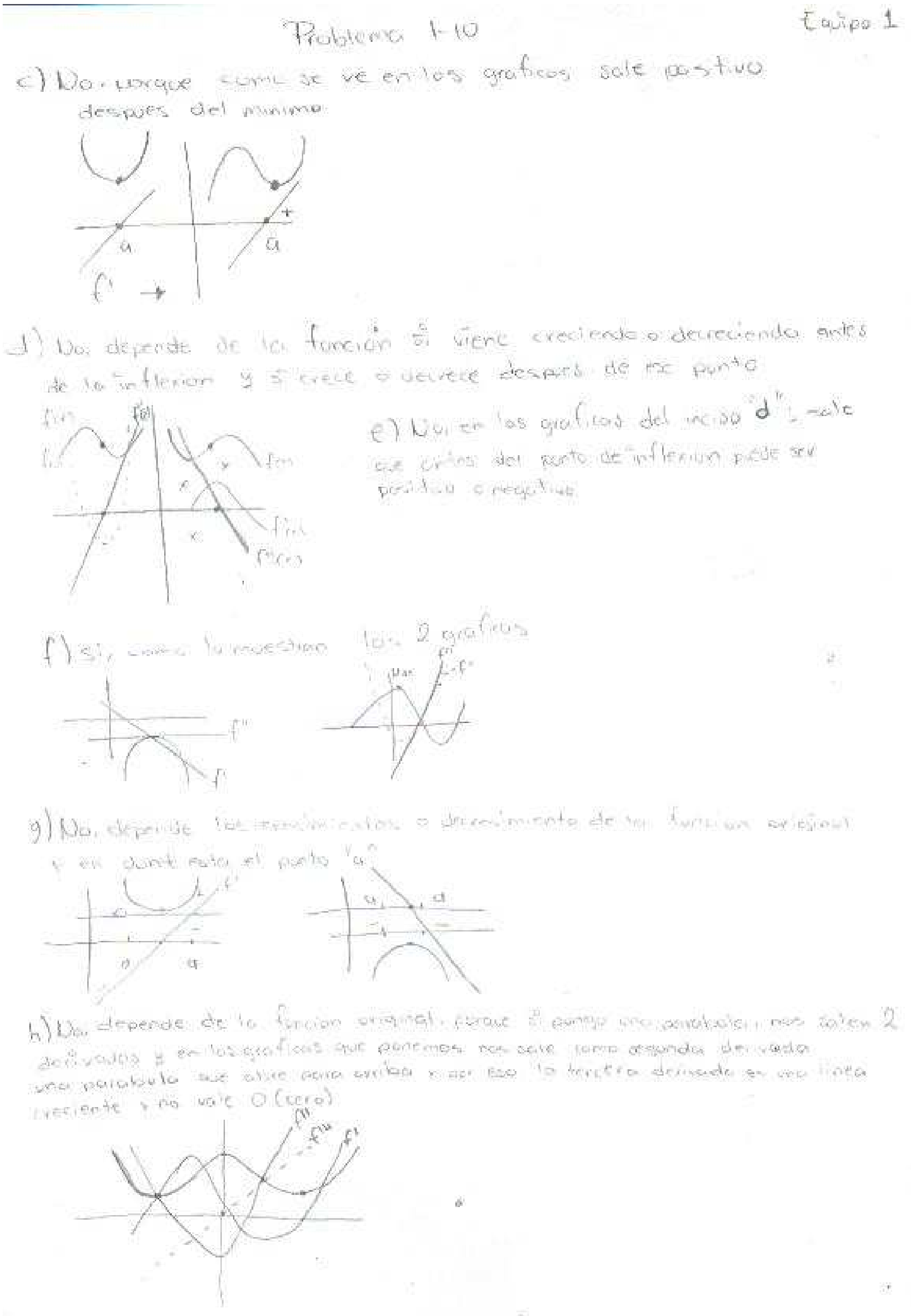
f) + a –

g) – a +

h) + a +

Problema I.10

La solución de Y:


Problema I-10 Equipo 1

c) No, porque como se ve en los graficos sale positivo despues del minimo

d) No, depende de la función si viene creciendo o decreciendo antes de la inflexion y si crece o decrece despues de ese punto

e) No, en los graficos del inciso "d", sale que antes del punto de inflexion puede ser positivo o negativo

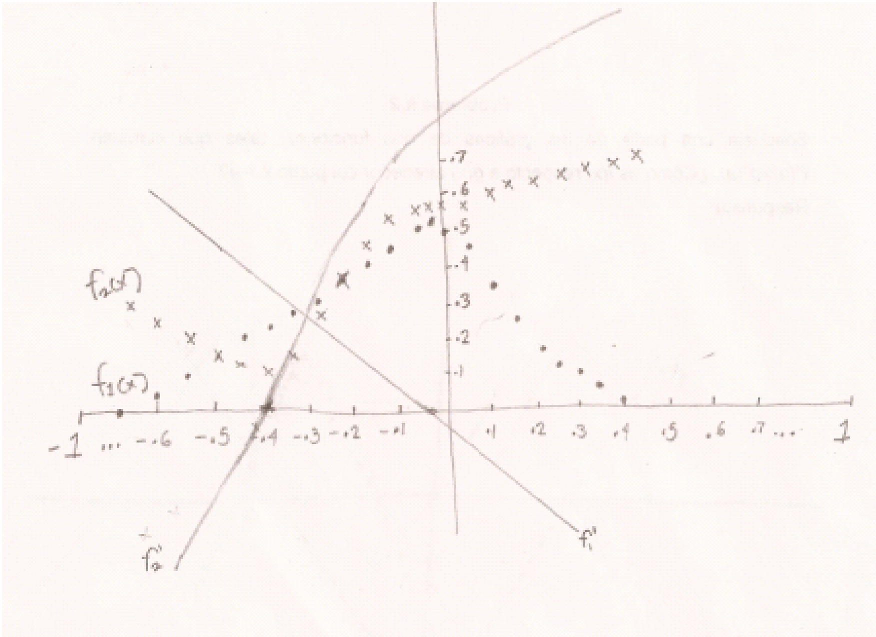
f) Si, como lo muestran los 2 graficos

g) No, depende [illegible] o decrecimiento de la funcion original y en donde esta el punto "a"

h) No, depende de la funcion original, porque si ponemos una parabola, nos salen 2 derivadas y en los graficos que ponemos nos sale como segunda derivada una parabola que abre para arriba y por eso la tercera derivada es una linea creciente y no vale 0 (cero)

Problema II.1

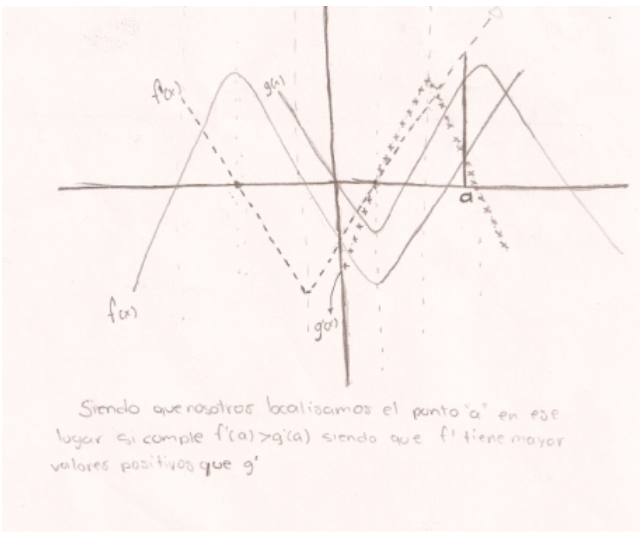
Respuesta de Z:



El mayor valor en -0.5 es la derivada de f_1, en el otro punto -0.25 se da con la derivada de f_2 como se ve en las gráficas y en 0.5 se ve clarito que es la derivada de f_2.

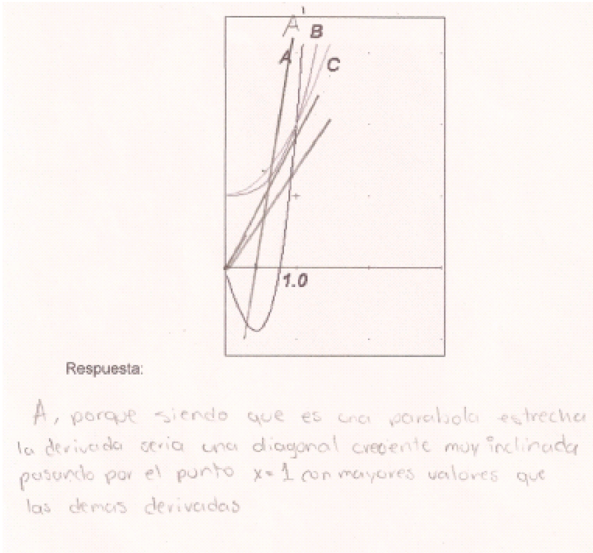
Problema II.2

Su bosquejo es el siguiente.



Problema II.3

Presenta Y la siguiente gráfica y su respuesta.

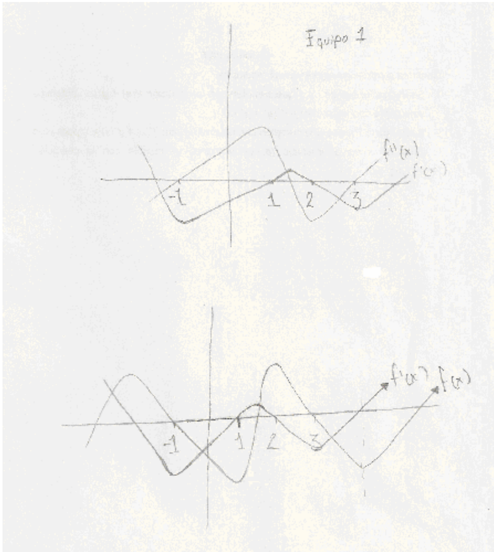


Problema II.4 Solución de Y.

Siendo que la gráfica original es una función creciente su derivada será decreciente teniendo valores mayores en el punto a que en el punto b. Siendo así que la derivada es más grande que en el punto b.

Problema II.5a

Solución de Z.



Problema II.5b

Respuestas de Z.

a) Decreciente.

b) Creciente.

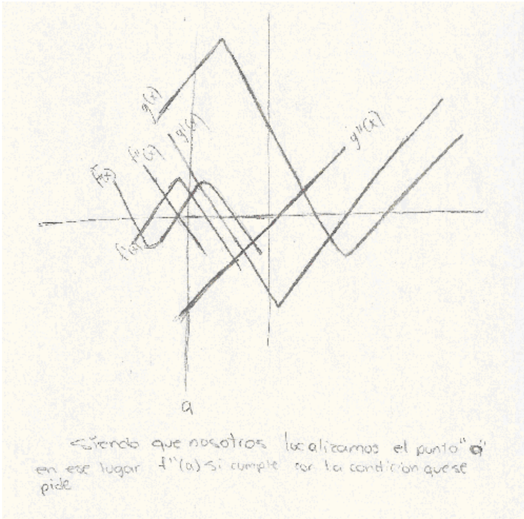
c) Decreciente.

d) Creciente.

e) Antes y después de 2 los signos son negativos.

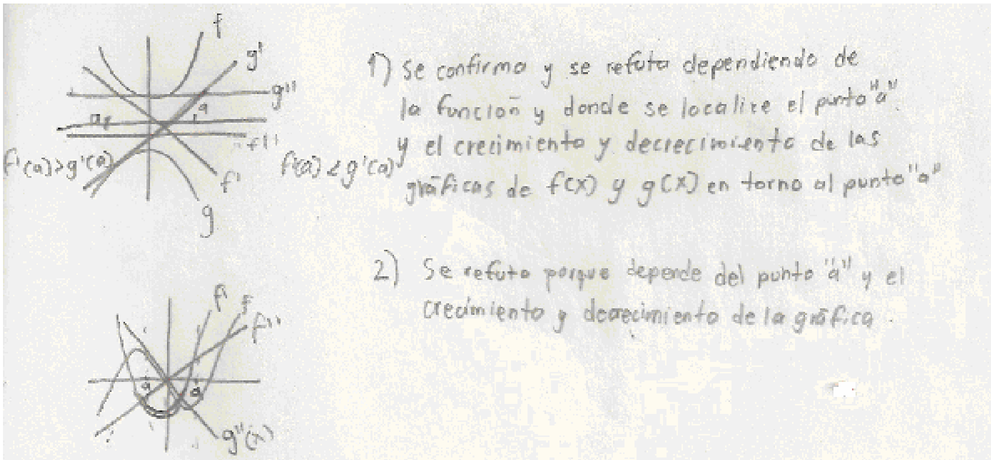
Problema II.6

Esboza Y lo siguiente:



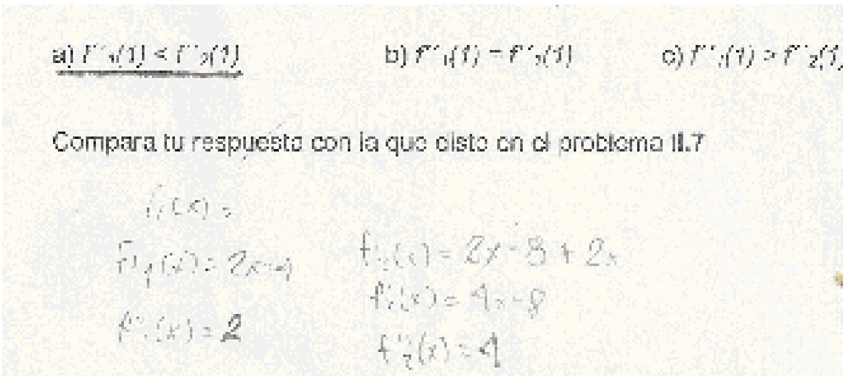
Problema II.7

Presenta Z la siguiente solución:



Problema II.8

La solución que proponen Y es



a) $f''_1(1) < f''_2(1)$ b) $f''_1(1) = f''_2(1)$ c) $f''_1(1) > f''_2(1)$

Compara tu respuesta con la que diste en el problema II.7

$f_1(x) =$

$f'_1(x) = 2x-4$

$f''(x) = 2$

$f_2(x) = 2x^2-8+2x$

$f'_2(x) = 4x-8$

$f''_2(x) = 4$

Equipo 2: Estudiantes W y X.

Problema I.1

Respuesta de W.

Responden las figuras 2, 3 y 5, porque son las que representan en la figura una función que es menor que cero y por lo tanto son valores negativos y no importa si es cóncava o convexa su valor sigue siendo negativo o menor que cero.

Problema I.2

Respuesta de W.

La figura 1 cumple con lo que se pide en la pregunta, porque ella se encuentra como la segunda derivada en un punto positivo es mayor a cero. En la figura 4 como se muestra es una línea no podría cumplir con lo que se pide porque tiene nada más una derivada ya expuesta y no podría encontrar una segunda.

Problema I.3

Solución de W.

En la primera derivada en el punto o tenemos un signo negativo al igual que el signo dela primera derivada del punto B, puesto que en la original puesto que en la original en el punto A y B son signos negativos y tienen que se presenta en una cóncava hacia abajo y al derivar en el punto A y B toman el mismo signo puesto que la cóncava es hacia abajo y el A es decreciente y el B es un punto mínimo.

Las preguntas 3 y 4 ya que en la segunda derivada en los puntos A y B se presentan en una recta creciente y los puntos A y B de la segunda derivada están en el cuadrante 3 y estos son valores negativos menores que cero por ende el signo es negativo.

Problema I.4

Solución de W.

a) $f'(x) = 8x^7 - 24x^5 + 24x^3 - 8x$

b) $f''(x) = 56x^6 - 120x^4 + 72x^2 - 8$

c) $f'(0.5) = -1.680$, $f'(1.5) = 23.43$

d) $f''(0.5) = 11.375$, $f'(1.5) = 192.37$

e) No, son diferentes los signos

f) Si son iguales los signos.

Problema I.4 bis

Solución W.

a) $f'(x) = 3x^2$

b) $f''(x) = 6x$

c) $f'(-1) = -3$, $f'(1) = +3$

d) $f''(-1) = -6$, $f''(1) = +6$

e) Si

f) Si

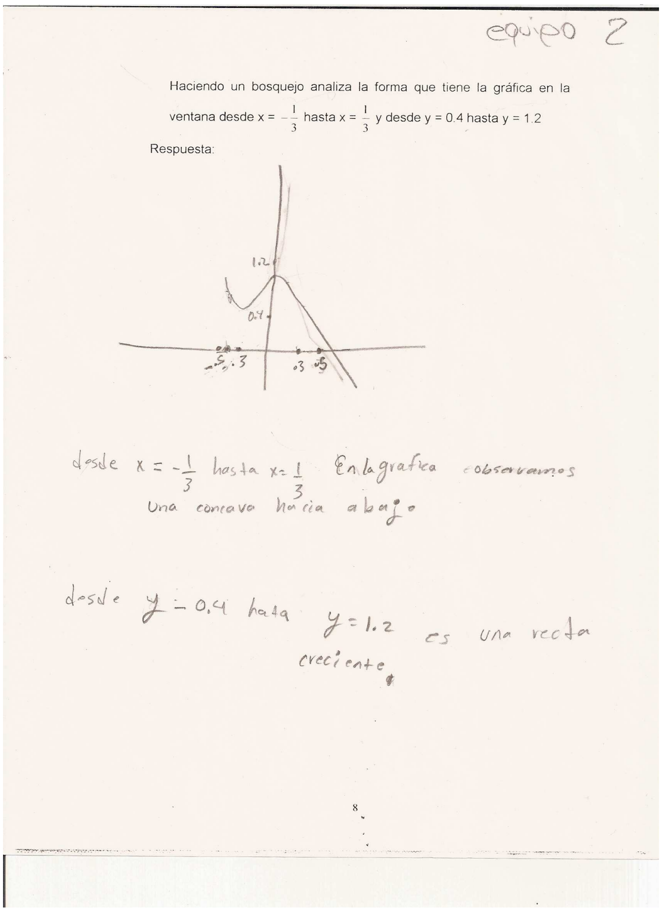
Problema I.5

Solución X.

Refuta sin explicación.

Problema I.6

X presenta el siguiente gráfico


equipo 2

Haciendo un bosquejo analiza la forma que tiene la gráfica en la ventana desde $x = -\frac{1}{3}$ hasta $x = \frac{1}{3}$ y desde y = 0.4 hasta y = 1.2

Respuesta:

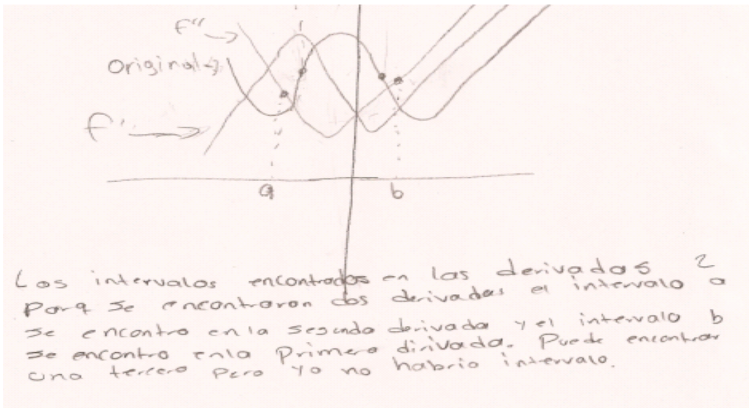
desde $x = -\frac{1}{3}$ hasta $x = \frac{1}{3}$ En la grafica observamos una concava hacia abajo

desde $y = 0.4$ hata $y = 1.2$ es una recta creciente.

8

Problema I.7

A presenta el esbozo



Problema I.8

Respuesta de X.

Ninguna de las dos se cumple.

Problema I.9

Respuesta de W.

a) Positivo a positivo
b) Positivo a positivo
c) Positivo
d) Positivo
e) Positivo
f) Positivo
g) Positivo y positive
h) Negativo y negativo

Problema I.10

Respuestas de W.

Bosquejos:

Respuesta:

c) Refutamos que despues de un minimo local la derivada es negativa puesto que observamos en la grafica que despues del minimo da valores positivos

d) tomando en cuenta el bosquejo anterior observamos que efectivamente la derivada de una función despues de un punto de inflexión si da positivo aunque no sea siempre asi

e). Al trazar la segunda derivada en el bosquejo observamos que si es positiva

12

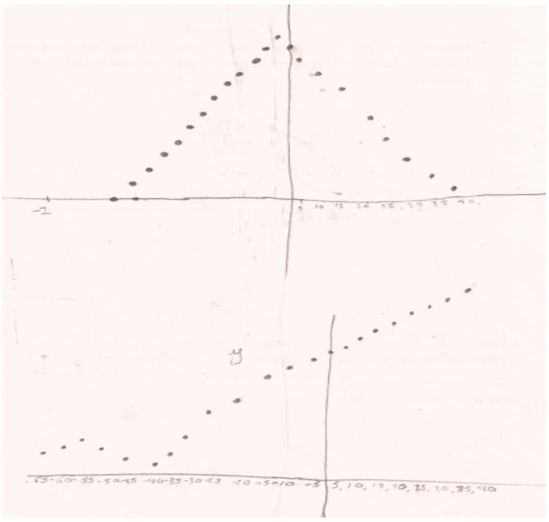
f) refutamos que la segunda derivada de un máximo es negativa como se Observa en el bosquejo

g) Se encuentran en un punto de Coincidencia por lo q se derivo la 2 derivada son iguales Osea son positivos

h) NO Puede ser anulo porq depende de la primera derivada por ejemplo si en la primera derivada sale una recta o linea yo no Podria tener una segunda derivada por eso en este caso no se Puede saber si la tercera derivada Puede ser anulo. como Puede ser o como no Puede ser.

Problema II.1

B presenta los siguientes gráficos



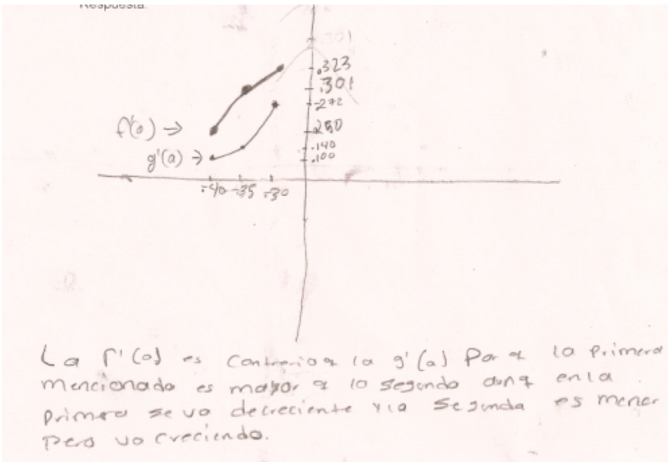
Las dos funciones tienen el mismo valor dado que no existe modificación en el valor de la tabla.

Son iguales como lo explicamos en la pregunta anterior por su valor es de 0.400.

Es más grande f_2.

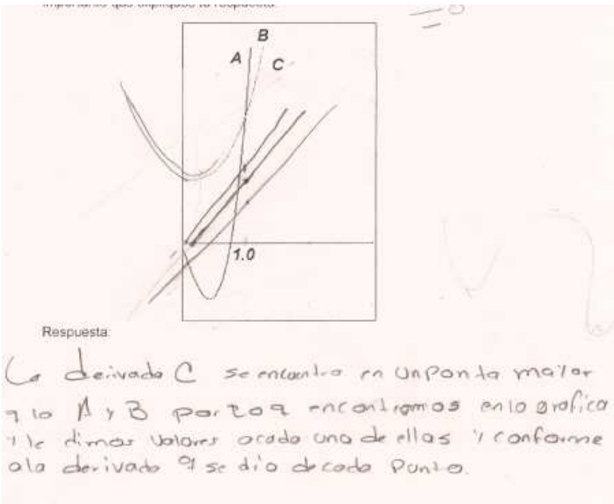
Problema II.2

Se da la gráfica por parte de W



Problema II.3

W presenta el gráfico siguiente



Problema II.4

Solución de X.

La derivada es mayor en b que en a.

Problema II.5a

Solución de X.

No entendimos el enunciado.

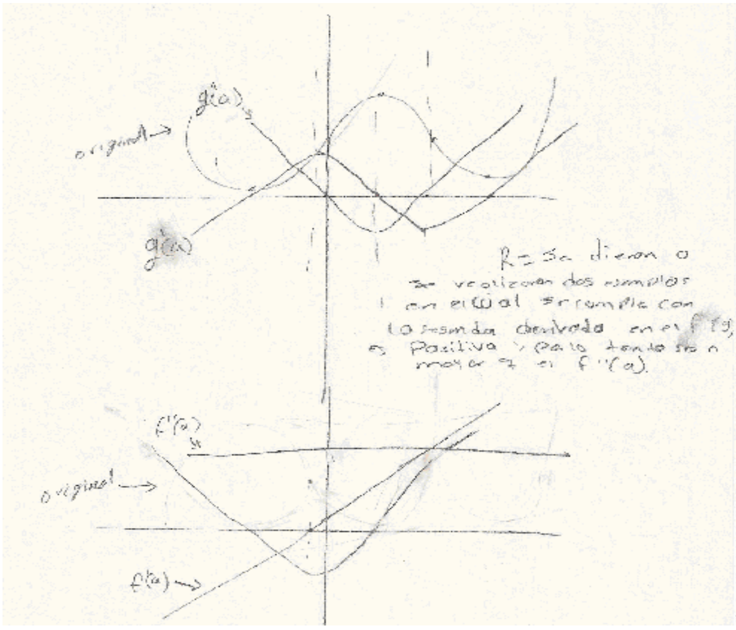
Problema II.5b

Solución de W.

No entendimos el enunciado.

Problema II.6

Solución de W



Problema II.7

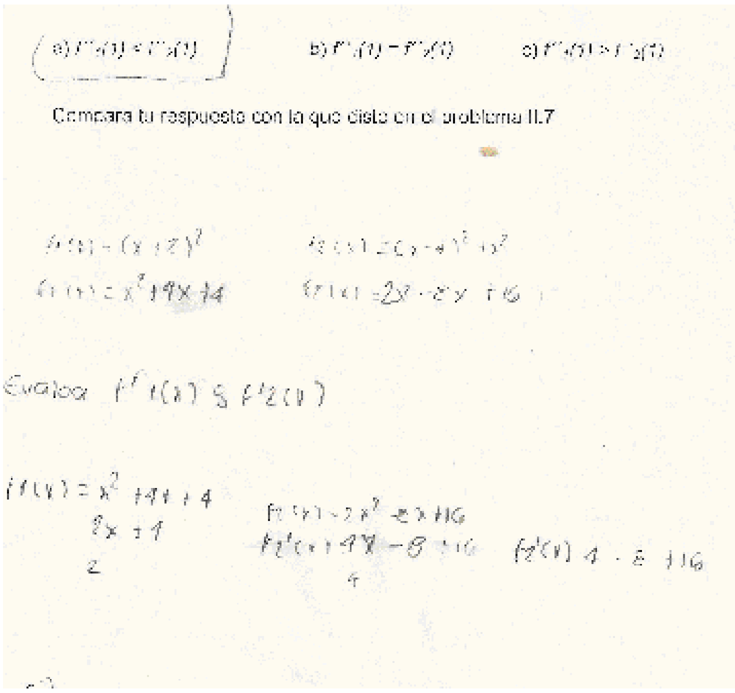
Respuestas de X.

1. Refutamos.

2. Confirmamos.

Problema II.8

X presenta las siguientes respuestas



- ✓ Validación.

Charla con y entre los estudiantes. En cada intervención del estudiante, se usará una abreviado el nombre del estudiante W, solo anteponiendo la letra W, lo mismo para el estudiante X, se coloca solo X y así sucesivamente hasta el estudiante Z y para el caso del investigador la letra I.

Problema I.1.

I: ¿Cuál es la respuesta?

W: Las respuestas son la figuras 2, 3, 5 porque son las que representan una figura de una función que son menor que cero, y no importa si es cóncava o convexa.

Y: Las figuras 2, 3, 5 si cumplen con la condición.

I: ¿Cómo lo podrían demostrar que las graficas 2,3 y 5 cumplen con la condición dada?

X: Porque son las que representan en la figura una función que es menor que cero y por lo tanto son valores negativos y no importa si es cóncava o convexa su valor sigue siendo negativo o menor que cero para las derivadas.

Z: Si las graficas están bajo el eje de las x siempre son negativas y sus derivadas también.

I. Les gustaría agregar algo más.

Z: No

X: No

Problema I.2

I: Dicen que son las gráficas 2,3 y 5.

W: Pero para nosotros es la respuesta 1.

I: ¿Podrías decir porque es la respuesta las gráficas 2, 3 y 5?

Y: Porque la función en la gráfica 2, aunque es positiva viene decreciendo, entonces la segunda derivada es negativa y es una línea que va creciendo, entonces la segunda derivada es positiva. Si hacemos lo mismo para la figura 3, aquí la función es positiva, la derivada es positiva, entonces la segunda derivada también es positiva. Para la figura 5 crece más lento que la 3, pero hacemos lo mismo que la 3.

W: Nosotros estamos mal, ellos tienen razón.

I: ¿Cómo saben que ellos tienen razón?

W: Porque ellos expresan sus ideas de una forma muy clara y entendible.

I: ¿Algo más que decir?

W: No

Y: No

Problema I.3.

I: Equipo 1, ¿cómo es que sus respuestas son positivo, negativo, negativo y negativo mientras que los signos sus compañeros son todos negativos?

Y: Profe, yo grafiqué una parábola y si trazamos una línea paralela al eje y que pase por A, corta a la parábola en el segundo cuadrante, por eso sale positivo. Así le hice para la pregunta 2, y sale negativo.

W: MMMMMMM, Nosotros también hicimos una parábola, pero esta tiene su mínimo abajo en el tercer cuadrante, tiene como mínimo el punto B.

I: ¿Cómo determinaste qué el punto B es mínimo?

W: Porque ahí está la inflexión, bueno eso pensamos.

Z: Haber enséñame tu gráfica de la parábola que hiciste.

Z: Pero si tu gráfica no está bien, porque la parábola desde A hasta B está en el tercer cuadrante y no puede ser, porque antes del punto A la parábola está creciendo y su derivada es positiva. El punto B esta bien su signo es negativo.

W: Si, verdad

I: Pasemos a la pregunta 3 y 4, dice el equipo 2 qué la respuesta es negativa y negativa. ¿Podrían argumentar su respuesta?

X: Pues sí profe, pensamos que es una línea creciente que pasa por B como mínimo, pero ahora vemos que la gráfica está bien solo que no pasa por el punto B.

Y: Su gráfica es correcta, es como la de nosotros pero tiene que pasar en el punto A y en el punto B, en el 3er cuadrante porque la primera derivada decrece y su derivada es negativa. Más adelante corta al eje x, adelantito de B.

W: Silencio…….., profe ya le entendimos más.

I: Pasemos al siguiente.

Problema I.4

I: Sus resultados son para la primera y segunda derivada, $f'(x) = 8x^7 - 24x^5 + 24x^3 - 8x$, $f''(x) = 56x^6 - 120x^4 + 72x^2 - 8$ mi pregunta es ¿Cómo saben que son correctos, ya que ustedes plantean esto?

Y: Por las formulas.

W: Las fórmulas.

I: ¿Cuáles son sus resultados y cómo pueden ustedes argumentar que son los indicados para el inciso c, donde se evalúa $f'(1/2)$ y $f'(3/2)$?

Y: Los resultados son $f'(0.5) = -1.71$, $f'(1.5) = 23.43$

X: Los de nosotros son $f'(0.5) = -1.680$, $f'(1.5) = 23.43$

Z: La soluciones varían muy poco entonces eso nos dice que estamos todos bien.

I: Cuáles son sus resultados y cómo pueden ustedes argumentar que son los indicados para el inciso d donde se evalúa $f''(1/2)$ y $f''(3/2)$?

Z: Las respuestas son $f''(0.5) = 3.375$, $f''(1.5) = 503.3124$

W: Las soluciones son $f''(0.5) = 11.375$, $f''(1.5) = 192.37$

Z: Creo que los dos estamos muy mal y nada se parece ahora. Profe son muchas operaciones, pero por ahí se nos escaparía un signo a cada equipo y luego sale esto.

W: Creo que si profe, algo se nos paso y sale todo mal.

I: ¿Y qué opinan de las respuestas de sus últimos incisos, es decir, del e y f?

Z: No sabemos profe, habría que volver a evaluar para contestar bien.

X: Ya nos revolvimos.

Problema I.4 bis.

Y: Nosotros tenemos la derivada primera y segunda así $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f''(x) = 6x$, pero ustedes la tienen mal porque en la primera derivada les falta un 1.

W: Si ya vimos no usamos bien la fórmula.

I: ¿Cómo saben que esos resultados son los adecuados?

Y: Porque así es profe.

W: Por las fórmulas.

I: Respecto a la evaluación del inciso C, ¿qué opinan?

X: Nos salio -3 y +3, pero esta mal.

Z: Nos dio -2 y 2, esto esta bien.

I: Entonces ¿cómo saben que es -2 y 2 lo correcto?

Z: Profe porque si sustituimos en la primera derivada con -1 sale -2 y hacemos lo mismo pero con 1 sale 2.Por eso.

X: Ellos están bien.

I: ¿Qué pueden decir de sus respuestas del inciso d, argumentando el porqué son de esa manera y no de otra?

X: Nos salió -6 y +6.

Y: Nos sale igual, entonces está bien.

X: Sale así por la sustitución.

Y: Si, es porque se sustituyen los valores de -1 y 1 en la segunda derivada.

I: El equipo 1 dice que las respuesta del inciso e es que no tienen el mismo signo, ¿podrían determinar porqué?

Y: Por los resultados de las evaluaciones de la primera y segunda derivada en -1, son 2 y -6.

W: Nosotros aunque nos equivocamos lo respondimos de forma correcta, porque no importa el valor numérico de la derivada solo nos piden el signo.

I: Para cerrar esta sección, ¿qué me pueden decir de sus resultados del inciso f?

Y: Si tienen el mismo signo y es positivo, porque la primera derivada en 1 es 2 y la segunda derivada en 1 es 6.

W: Si porque la primera derivada tiene signo positivo y la segunda también.

I: ¿Encuentran algo más en estas 2 últimas preguntas?

Y: No profe.

X: No.

Problema I.5

I: El equipo 1, dice que según sus gráficos si se cumple con las condiciones dadas en la sección 1.5, equipo 2 ¿ustedes que opinan?

W: Nosotros refutamos, pero no sabemos porque.

Y: Miren nuestras gráficas y donde está a, todas las funciones son mayores que cero, desde la primera derivada hasta la segunda derivada.

W: Pues parece tener sentido su explicación.

I: Haber hablan de sentido, ¿qué sentido tiene?

W: Si profe, las gráficas están bien y se cumple lo que se pide.

I: Siempre se cumple lo que se indica, es decir, para todas las funciones la primera derivada en un punto es mayor a cero ¿y lo mismo ocurre para la segunda derivada?

Pasan algunos minutos de silencio .

Z: Espere un momento profe, estamos pensando….

No profe, no siempre.

I: Haber ahora me dicen que no, entonces están contradiciendo su respuesta original, ¿entonces?

Z: Profe, depende de las gráficas de las derivadas y de donde esté el punto a.

I: ¿Cómo esta eso de las gráficas de las derivadas y de donde esté el punto a?

Z: Si, mire si en nuestra gráfica donde está la parábola, localizamos el punto a antes del mínimo, la primera derivada es positiva y la segunda derivada es negativa. Entonces aunque sean las mismas derivadas solo depende de donde esté el punto a.

W: Pero, también depende de las gráficas no?

Z: Si.

W: Porque piensen en una parábola que tiene su máximo en x igual a 5, esta es la gráfica de la primera derivada, después de 5 la curva decrece, entonces la segunda derivada es negativa.

I: Algo más que agregar.

Z: No profe, ya entendimos como esta esto.

W: No, es un poco revoltoso.

Problema 1.6

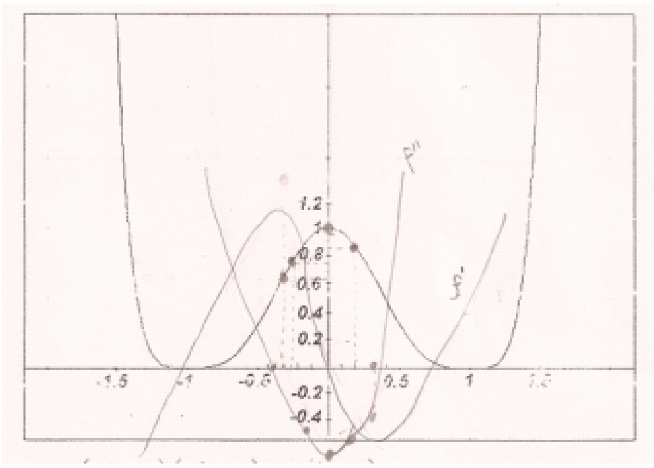
I: Bueno el equipo 1 pone una parábola como solución para el inciso b, de la sección 1.6. Mi pregunta para el equipo 1 es ¿cómo saben que corresponde a una parábola y no a otra gráfica?

Y: Pasa que trazar la gráfica sale abajo del eje de las x, tiene signos negativos en todo el intervalo de -0.3 hasta 0.3, además si nos fijamos en el inciso b todas las evaluaciones son negativas, entonces lo que decimos es que nuestra gráfica es una parábola que sale debajo de las x .

W: Nosotros hicimos otra cosa, confundimos los puntos y no tomamos en cuenta los signos. Está mal.

I: ¿Qué opina equipo 1?

Y: Estamos que la gráfica está bien, además profe si sacamos las gráficas de la primera y segunda derivada, es una parábola como la que hice.



Y mire los puntos que están abajo son más o menos lo que me dicen las hojas, o sea que andamos bien.

I: ¿Qué dicen equipo 2?

X: No hay duda, es correcto.

I: Es muy buena su observación, ¿algo más que agregar?

X: No

Y: No

Problema I.7

I: El equipo 2, plantea una serie de gráficas que les corresponde analizar al equipo 1, para después pasar a lo contrario y opinar al respecto.

W: Creemos que las gráficas que da el equipo 1, son correctas porque se ve que la segunda derivada es positiva en el intervalo que ellos escogieron.

I: ¿Cómo obtuvieron esas gráficas equipo 1?

Y: Profe pues trazamos una función, y de ahí vimos si crecía la derivada es positiva, si decrecía la derivada es negativa, así lo utilizamos para seguir trazando la primera derivada, además ya teniendo la primera derivada sale fácil la segunda, porque si la primera derivada es crece la segunda derivada es negativa. Así fue como le hicimos.

I: O sea que vieron algo en los crecimientos y decrecimientos, que interesante.

W: Ya le entendimos.

I: Piensen en esta pregunta.

¿Qué ocurre si mueves el punto a hacia cero y el punto b antes de que interseque al eje la segunda derivada por primera vez, ahí se cumple también las condiciones de que la segunda deriva es mayor a cero para este nuevo intervalo?

X: Mmmmmm.

Y: Pues sí movemos los puntos hacia donde usted dice, claro que no porque la segunda derivada sería negativa. Y para nuestras graficas se cumple ahí.

I: En algún otro lado también se cumple, si es así ¿donde?

Y: No profe, solo ahí .Pudiendo mover un poco hacia la izquierda o derecha el intervalo, pero debe estar entre las dos intersecciones de la segunda derivada para que sea positiva.

I: ¿Haber que dice el equipo 2 de esto?

X: No entendemos profe lo que quieren decir.

I. Correcto, podemos pasar a la siguiente sección.

Y: Sí

W: Sí

Problema I.8

I: Haber equipo 1, ¿explique como determinaron sus respuestas?

Y: Pues la figura 1, no cumple porque la derivada es negativa.

I: ¿Cuál derivada?

Y: Pues la gráfica profe es la derivada y es negativa.

X: Ninguna, no sabemos porque.

I: Equipo 2, ¿qué no saben porque?

X: Pues no sabemos porqué ninguna cumple, creo que nos hicimos bolas con las gráficas.

I: Pasemos a la siguiente sección.

Problema I.9

I: Haber quién quiere empezar con el argumentar sus respuestas, es decir, el explicar porque son estas y no otras.

Y: Profe nosotros queremos empezar.

I: Adelante equipo 1.

Y: Pues en la figura 1, nosotros trazamos una línea decreciente que pasa por el punto a la primera derivada, por lo tanto la segunda derivada es una línea paralela al eje de las x, corresponde a una constante negativa.

Es por eso que para el inciso a la primera derivada de la función 1, es positiva y luego negativa.

I: ¿Qué dicen equipo 2?

W: Tenemos positivo y positivo. Porque la función que se muestra es así.

I: ¿Qué nos comentan al respecto equipo 1?

Z: Claro que no, porque esta función no es derivada, si no la original. Mejor pasamos al otro inciso al b, como la recta es paralela al eje de las x y pasa en las x negativas.

W: Contestamos que los signos antes y después de a para la segunda derivada son positivos.

I: ¿Porqué?

W: No sabemos.

Y: La respuesta para b es que antes es negativo y después también. Porque la segunda derivada es una recta constante y negativa, depende de la recta que viene decreciendo.

X: Suena bien lo que dicen.

Y: Brínquense hasta la última parábola de las gráficas, es lo mismo pero al revés.

I: ¿Cómo que es lo mismo pero al revés, se refieren a f_4?

Y: Si profe, mire la última parábola antes de a viene decreciendo y su derivada es negativa y despuecito del mínimo empieza a crecer, entonces es positiva, y en el mínimo la recta que es la primera derivada pasa por el origen. Entonces la respuesta del inciso g es que antes de d es negativa y después es positiva.

W: Si, tienen su respuesta bien. Nosotros contestamos para el inciso g que era positivo y positivo. Pero no es buena respuesta, por lo que dicen los compañeros.

I: Entonces, pueden responder ¿que obtuvieron en el inciso h? y ¿porqué?

W: Profe, si la primera derivada es una recta que crece, entonces toda la segunda derivada es positiva. Ya le agarramos la onda.

Z: Esta bien.

I: Bueno, pasamos de las primeras dos preguntas a las últimas 2, que hay de sus resultados de los incisos c, d, e y f?

Y: El inciso c ambos son positivos, porque la parábola que es la derivada de la gráfica original, siempre es positiva. Además se pasa por el punto de inflexión que es por donde pasa la parábola mero abajo pero nunca pasa por los números negativos. Y de una vez, la respuesta del inciso d es de negativo a positivo, pues si la primera derivada es una recta creciente que pasa por cero, antes de cero es viene de los negativos de las y pasando por cero y luego a los positivos.

W: Esta bien profe, este equipo está contestando 2 incisos.

I: Continuemos con el resto de las preguntas, falta el e y f.

Y: La parábola que sale es negativa en todas las x, y pasa por el origen. Porque la curva original viene decreciendo hasta la inflexión y sigue decreciendo. Luego, la primera derivada es esta parábola que abre para abajo siempre. La segunda derivada es una línea decreciente que viene de las y positivas y luego pasa a las y negativas, por eso los signos mas y menos. Ahhh pasa por el origen.

W: Nuestras respuestas no tienen las gráficas que ellos hicieron.

I: ¿Entonces de donde sacaron sus conclusiones?

W: Nos hicimos bolas con las graficas.

I: Si no hay algo que agregar pasamos al último.

Problema I.10.

I: Empezamos con el primer enunciado donde la derivada después de un mínimo local es negativa.

Y: Nosotros pusimos dos gráficas, una parábola que viene decreciendo antes del mínimo y después crece, la derivada es una línea creciente que tiene raíz en el punto a, antes de a es negativa pero después se hace positiva. La otra gráfica pusimos una línea, pero veo que no está bien porque la derivada sería una parábola, pero como quiera da positiva después de mínimo.

W: Graficamos una parábola como la primera derivada y refutamos lo que para esta gráfica sale positiva.

I: ¿Esto aplica para todas las gráficas o solo para algunas?

Y: Pues profe, para que haya un mínimo la función debe primero decrecer y luego crecer, y además el mínimo es la raíz siempre de la derivada, entonces antes de la raíz siempre viene de abajo para arriba, pasa de negativo a positivo. Entonces siempre es así.

W: Qué buena idea, no se nos hubiera ocurrido así.

I: Vamos a continuar con el inciso d, dice que la derivada de una función después de un punto de inflexión siempre es positiva.

Y: No siempre porque en nuestro caso sale una negativa y la otra positiva. Entonces no siempre es positiva, lo refutamos.

W: Nosotros tomamos en cuenta el bosquejo que hicimos observamos que la derivada da positivo, también refutamos.

I: Entonces ambos refutan el enunciado d, pasamos al siguiente que dice que la segunda derivada alrededor de un punto de inflexión es positiva.

W: Si trazamos la segunda derivada en la gráfica que ya teníamos sale una recta y siempre es positiva.

Y: Esperen un momento, enséñame esa línea. No está bien, porque no debe pasar por el punto de inflexión, dices ¿qué es la segunda derivada verdad?

X: Si. ¿Por qué no puede pasar por el punto de inflexión?

Y: Porque la primera derivada es una parábola que abre para abajo, y tiene un mínimo que es la raíz de la segunda derivada y la recta está bien pero debe ir más abajo pegada al eje x, en el mismo valor que le des al punto de inflexión.

X: Si verdad, no pensamos en eso.

Y: Nuestras gráficas son las mismas que las del inciso d, pero ahora solo graficamos la segunda derivada para la primera parábola que abre para arriba y tiene el mínimo en el tercer cuadrante, se tiene una línea creciente como segunda derivada y tiene raíz en el punto de inflexión, los signos alrededor de la inflexión son de menos a más, y para la otra gráfica que es una parábola que abre para arriba, se tiene una línea decreciente donde los signos vienen de más a menos.

X: Su respuesta es muy completa, tienen razón.

Z: Nos falta decir que refutamos el inciso e.

I: Pasamos al inciso f, donde dice que la segunda derivada alrededor de un máximo es negativa.

Z: Confirmamos el enunciado, porque ponemos 2 ejemplos, en los cuales las segunda derivada nos da negativa. Pero para la segunda gráfica el signo menos pasa a más en la inflexión.

W: Refutamos que la segunda derivada de un máximo es negativa.

Z: Pero su gráfica ya les dijimos que era más abajo y luego sería que alrededor de máximo los signos serían más y menos.

W: Si.

I: ¿Entonces refutan o confirman el enunciado equipo 2?

W: Pues lo confirmamos con lo que nos dice el equipo 1.

I: Seguimos con el inciso g dice el signo de la primera derivada en el punto x=a siempre es el mismo que el signo de la segunda derivada en dicho punto.

Y: Pusimos 2 gráficas, ambas son parábolas una que abre para arriba tiene un mínimo y esta tiene una recta creciente que tiene una raíz en el mismo valor de x donde está el mínimo y la segunda derivada es una recta constante paralela a las x y siempre positiva. Si ponemos al punto a antes del mínimo los signos son para la primera derivada negativo y para la segunda positivo, pero si ponemos los a después de a, entonces la primera derivada es positiva y la segunda positiva. Pero con este ejemplo depende de donde esté a y de los signos que tengan las derivadas, y esto depende de si crece o decrece la función original.

Lo mismo pasa con la parábola que pasa para abajo, por todo esto nosotros decimos que refutamos el enunciado de g.

I:¿Qué dicen equipo 2?

W: Nosotros estamos confundidos, porque nuestro esbozo de la segunda derivada está mal.

Y: Pero ya les dijimos como queda la derivada solo más para abajo.

W: Bueno si le hacemos así, y su ponemos el punto a antes de la inflexión de nuestra gráfica, la derivada es positiva y la segunda también, tienen los mismos signos.

Y: ¿Pero que pasa si lo ponen después de la inflexión?

W: Pues la primera derivada es positiva pero la segunda es negativa. Ahhh ya, entonces nosotros también refutamos el enunciado.

I: Continuamos con el último enunciado que dice que la tercera derivada de toda función se anula. Si trazáramos la derivada de la segunda derivada sería una recta constante que no es cero, por eso ahora entendemos que no siempre se elimina o vale cero.

Z: Nosotros pusimos una gráfica que tiene como segunda derivada una parábola y como tercera una línea creciente que pasa por el origen, entonces la tercera derivada tampoco vale cero.

I: ¿Dicen que refutan entonces el enunciado?

W: Si

Z: Si, porque depende de la función de la cuál se trate. Si fuera una parábola la primera derivada es una línea y la segunda una recta paralela al eje x y aquí si la tercera derivada es cero. Pero no todas son cero.

Problema II.1

I: Empezamos con la pregunta que dice ¿cuál de las dos funciones tiene el valor mayor de la derivada en $x = -0.50$?

W: Decimos que son iguales.

Y: Esto no es posible.

W: Si, miren las dos valen 0.173.

Y: No esta bien, porque ustedes graficaron solamente las funciones f_1 y f_2. ¿Donde están las derivadas?

X: Son esas, ¿no?

Z: Nombre, son f_1 y f_2.

W: ¿Cómo sacaron las derivadas?

Y: Miren primero la función f1 empieza en cero cuando con x igual a 0.65 y luego crece hasta x igual a -0.05 donde hay un máximo, después empieza a bajar o a decrecer.

La derivada de esta es una línea decreciente que tiene valores positivos de y antes de -0.05 de x, después tiene valores negativos porque la f1 empieza a decrecer.

La otra función f_2 vean en las tablas como los números empiezan a bajar hasta x igual a 0.04 y después de ahí crece y crece. La derivada de f_2 antes de -0.400 de x es negativa, después se hace positiva.

W: Qué bien.

I: Pero no se ha respondido la pregunta.

Z: Bueno profe, nosotros decimos que la derivada es f_1f1, porque como dijimos antes de -0.05 siempre es positiva y la otra antes de -0.4 es negativa.

I: Qué pueden comentar de la siguiente pregunta, ¿cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en $x = -0.25$?

X: Pues dijimos son iguales, pero ahora vemos que no.

Z: Nosotros decimos que la función f_2 es más grande, por los crecimientos. La otra es también positiva, pero la derivada de f_2 es un poco más positiva.

I: ¿Cómo saben que es un poco más positiva?

Z: Por las gráficas de las derivadas.

I: Por último. ¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en $x = 0.50$?

Y: La derivada de f_2 porque en ese punto ya es positiva y la derivada de f1 es negativa.

W: Dijimos que era f_2, pero nos confundimos.

I: Finalizamos la etapa de validación, continuamos a la siguiente sección II.2.

Problema II.2

I: Vamos a escuchar lo que hicieron, adelante.

W: Hicimos las 2 graficas de las derivadas.

Y: Haber donde están. Pero ustedes hicieron las derivadas, donde están f y g?

W: Solo hicimos las derivadas pero no sabemos como salen las funciones f y g. A ver ustedes.

Y: Miren las gráficas de nosotros véanlas bien. La grafica de f es mucho más grande que la de g en el punto a.

I: ¿Porqué ponen el punto a en ese lugar?

Y: Pues porque aquí si se da lo que nos pide.

I: ¿Y en otro lugar no?

Y: Mmmmm, mire profe si lo ponemos en el punto donde cortan las dos derivadas de f y g, cerca de cero la función de g es más grande que la de f, no se da lo que nos pide.

W: Si verdad, no se da. Entonces también depende de donde este ese punto a.

I: Depende además del tipo de gráficas si crecen o decrecen cerca de a.

¿Qué me pueden decir al respecto de la pregunta que plantea cómo es f respecto a g alrededor del punto a?

X: Pues nosotros no hicimos estas funciones, no tenemos respuesta.

Z: Bueno nosotros se nos paso esa pregunta, pero ahora pensamos que donde pusimos a en las derivadas de f y g, antes de a las funciones son positivas las dos y después también, pero es mayor g en a.

I: ¿Algo más que decir entorno a la sección 2.3?

Z: No profe.

X: No, solo que nos confundimos no supimos poner las gráficas.

Problema II.3

I: Como ya hemos hecho en secciones pasadas, empezamos a escuchar las ideas de cada uno de los equipos. Empezamos.

W: Nosotros decimos que la respuesta correcta es la derivada C porque se encuentra en un punto mayor que las derivadas de A y B.

Z: Haber sus derivadas. ¿Cómo las sacaron?

W: Pues como vimos en las gráficas que C estaba mas arriba de todas entonces pusimos valores y graficamos las líneas.

Y: ¿Cuál es el valor de la derivada de C?

W: No sabemos exactamente.

Y: La respuesta de ustedes no es correcta, miren la nuestra.

I: ¿Y que dicen de esa respuesta?

Y: Pues decimos que es la derivada de A, porque es una parábola cuya derivada sería una diagonal creciente y más inclinada que las demás y pasa por 1.

W: ¿Cómo saben que es más inclinada que las demás?

Y: Pues miren como crece la curva crece más que las otras 2, las otras funciones están más anchas pero esta es más estrecha y más alta, por eso crece más siempre.

I: ¿Como está eso que crece más siempre?

Y: Si profe, mire la gráfica que hicimos está más inclinada que todas las demás, entonces da valores mayores. Es por la forma de la gráfica.

X: Suena bien.

I: ¿Algo más que añadir a la esto?

Z: No profe.

X: Solo que no supimos como hacerle bien.

I: Continuamos respondiendo la sección II.4

Problema II.4

I: ¿Haber que respuesta tienen para la pregunta con esta gráfica?

W: El valor es más grande en b que en a.

Z: Pero esta no es la derivada, ¿es la función o no?

W: Es la derivada, porque dice que de la siguiente figura conteste ¿ $f'(b) > f'(a)$?

Z: No es la función.

W: Entonces no entendemos lo que dice el enunciado.

Y: La derivada sería una grafica decreciente y en el punto b será menor el resultado.

I: ¿Cómo puedes mostrar esto?

Y: Mire profe en el punto a crece mucho y cada vez crece menos hacia b, entonces la derivada es positiva pero va decreciendo.

W: No entendemos eso.

Y: Si, miren vean la curva dada empieza creciendo y crece cada vez menos por eso la derivada mientras más se aleja de a se hace el valor más pequeño.

I: ¿Qué forma tendría esa gráfica?

Y: Pues creemos que seria una línea decreciente en ambos puntos a, b sería positiva pero en b es mas cercana al eje x.

X: El ejercicio se nos hace un poco confuso por el enunciado, no sabemos si es la función o la derivada.

(Silencio un tiempo.)

I: ¿Algún comentario por hacer?

Y: No.

X: No

Problema II.5 a.

I: Bueno como ya hemos hecho, ¿qué equipo empieza a dar sus respuestas?

W: No le entendimos a lo que pide.

Y: La respuesta la hicimos en dos planos cartesianos, en el primero pusimos las condiciones dadas en las hojas para la segunda derivada, y luego vimos que la segunda derivada tiene 3 cortes con el eje de las x en -1, 1.5 y 3. Estos puntos son o máximos o mínimos de la primera derivada.

I: ¿Cómo saben si son máximos o mínimos de la primera derivada?

Y: La grafica de la segunda derivada se ve que en -1 de x, antes esta en las y negativas y después en las y positivas, quiere decir que antes de 1 la curva decrece y luego crece, entonces hay un mínimo en -1. En 1 la segunda derivada tiene un máximo y la primera derivada aquí pasa por el eje de las x, entre 1 a 1.5 la grafica esta en las y positivas, significa que la primera derivada crece y llega a un máximo para luego decrecer la primera derivada, porque la segunda derivada entre 1.5 y 2 decrece y sale un mínimo en 2. La segunda derivada de 2 a 3 crece y toca al eje en 3, la primera derivada en dos esta en cero de x y baja hasta un mínimo en 3 y luego crece.

I: Qué comentario tan más completo, ¿podrían explicar como esbozaron la gráfica de f?

W: No graficamos nada.

Y: Le hicimos igualito que como explicamos antes, pero de repente nos confunde tantas cosas.

I: ¿Qué cosas?

Y: Pues que la grafica crece y luego decrece y las derivadas, pero si le entendemos.

I: Correcto. ¿Algo más que decir?

Z: No.

X: Nada.

Problema II.5b

I: Haber platiquen de sus respuestas.

Y: Pues es más fácil ahora porque en la sección pasada graficamos de la segunda derivada , la primera derivada y la función entonces nada más nos fijamos en cada pregunta y le dimos solución con la gráfica.

X: No le entendimos a la sección pasada y por eso no hicimos esta.

I: Bien, que más pueden comentar.

Y: Pues las respuestas que dimos son.

f) Decreciente.

g) Creciente

h) Decreciente

i) Creciente

j) Antes y después de 2 los signos son negativos.

Porque así nos dice la gráfica.

I: Qué interesante, pasemos a la siguiente sección les parece.

Y: Si

X: Sí

Problema II.6

I: Casi terminamos todo el trabajo solo queda algunas secciones más, que les parece si empezamos charlando de sus respuestas y el porqué de las mismas.

W: Nosotros empezamos porque las graficas están bien.

I: ¿A ver que hicieron?

W: Pues graficamos profe y se clarito que la segunda derivada de f es mayor que la de segunda derivada de f en a.

Y: No vemos el punto a, ¿dónde está?

W: No lo pusimos, se nos olvido. ¿Entonces está mal?

Y: Solo les falta a. Miren nuestra respuesta aquí si se da la condición.

Pusimos una curva como en las equis negativas, esta es f de x, la derivada es una parábola que abre para abajo y la derivada de la derivada es una recta que pasa por la inflexión de f además antes de ella está positiva y luego negativa, el punto a esta despuecito de este punto de inflexión, ahora la derivada de g es una parábola y su derivada es otra línea que va creciendo, pero vean como en a es mayor la segunda derivada de f que la otra derivada de g.

I: ¿Qué dice equipo 2?

X: Pues si se cumple la condición.

I: ¿El punto a puede estar donde sea?

Y: No, solo en algunos lugares porque la condición no siempre se da.

X: ¿Por qué?

Y: Pues depende de las derivadas si son positivas o negativas y compararlas.

I: ¿Cómo compararlas?

Y: Si profe, fijarse en los signos que tengan las derivadas y si las funciones f y g empiezan creciendo o decreciendo, además de donde este el punto a

I: ¿Qué dice equipo 2?

W: Pues entendemos mas o menos.

Y: Creemos que estamos en lo correcto.

I: ¿Algo más por agregar?

W: Para nada

Z: No.

I: Damos fin a esta sección, continuamos con la II.

Problema II.7

I: Empezamos como es costumbre, ¿que pueden decir respecto a sus respuestas?

W: Nosotros en la pregunta 1 lo refutamos.

Y: ¿Por qué lo refutan?

W: Pues no sabemos exactamente.

Y: Miren nosotros no refutamos pero tampoco confirmamos porque depende de las graficas y de donde este el punto a.

Y: Esperen.

W: ¿Qué pasa?

Y: Pues en revisando las primeras derivadas de f y g, se cumple la condición de que la primera derivada de f es menor a la derivada de g, pero también se cumple con las segundas derivadas.

I: ¿Qué quieren decir con eso de se cumple?

Y: Si, mire las gráficas la segunda derivada g es más grande que la de f, porque la segunda derivada de g es una recta constante positiva paralela al eje x, y la otra segunda derivada de g es constante también pero es negativa, gana la de g.

I: ¿Qué pueden decir del enunciado 2?

X: Nosotros lo confirmamos, pero de nuevo no sabemos porque solamente lo contestamos.

Y: Lo refutamos, pero sabe profe, creemos que estamos mal. Porque viendo las gráficas y las derivadas que hicimos se vuelve a cumplir lo que dice el enunciado 2.

I: Correcto, les parece pasar al siguiente y última sección

Problema II.8

I: Ya estamos en la última sección a dar el mejor esfuerzo.

X: Pues la derivada de f_1 es $f'_1 = 2x + 4$, segunda derivada da 2.

Z: Nos da igual, entonces vamos bien todos.

X: La primera derivada de f_2 es $f'_2 = 4x + 8 - 16$ y la segunda sale 4.

Z: Ustedes les da el resultado igualito q a nosotros.

I: ¿Cuánto sale el resultado de evaluar?

Z: No la hicimos, pero esta fácil porque la derivada de f_1 es 6 y la derivada de f_2 es -6. Son signos diferentes.

X: Se nos olvido hacerla.

I: Bueno pasemos a la pregunta que menciona ¿cuál de las condiciones se cumple?

Z: ¿Qué condiciones?

X: Las que dicen las hojas.

Z: Ahhh…

W: Nos salio que el inciso a.

Y: ¿Por qué?

A: Por que la segunda derivada de f_2 es 4 siempre y la segunda derivada de f_1 es 2, por eso es mayor la derivada de f_2.

Y: Pues pensamos que la derivada de f1 es menor que la derivada de f_2, porque la primera vale 2 y la otra cuatro.

W: Es lo mismo, ¿verdad?

Y: Si

I: Qué me dicen de la comparación de lo que obtuvieron en esta sección II.8 con la anterior II.7?

Z: No lo hicimos.

W: Tampoco lo hicimos.

Y: Pero recordamos que en la sección II.7 si la derivada de una función f era menor la derivada de otra función g, las segunda derivada de f es menos que la de g, lo confirmamos. Pero aquí sale al revés

W: Si recordamos esa charla, pero por qué sale aquí así, ¿qué es lo que está mal o que está bien?

Y: No sabemos realmente, pero creemos que depende de las funciones. Porque nuestras gráficas fueron parábolas, pero si no lo fueran habría que checar que si crecen o decrecen y si la derivada es positiva o negativa todo eso y donde ponemos el punto a, porque depende también de esto para que se den las condiciones que piden las hojas.

X: Si esta medio enredoso.

I: Algo que agregar al respecto de esta sección II.8.

Z: No.

A: Nada.

I: Bueno ya concluimos esta etapa, les agradezco su tiempo.