Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada

Instituto Politécnico Nacional

Análisis de los obstáculos en la construcción del concepto de Dependencia Lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad

Tesis que presenta

Daniela Inés Andreoli

para obtener el grado de Maestra en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa

México, D.F.

Dirigida por

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Corrientes

Argentina

2009

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 18 del mes de septiembre de 2008 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Análisis de los obstáculos en la construcción del concepto de dependencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la Universidad"

Presentada por la alumna:

ANDREOLI	DANIELA INÉS
Apellido paterno	nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 1 | 0 | 7 | 0 | 5 |

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dra. Gisela Montiel Espinosa

CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

31/03/09

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

No entiendes

realmente algo a menos

que seas capaz de explicárselo a tu abuela

Albert Einstein (1879-1955)

Agradecimientos

A mi familia, que ha sufrido mis obsesiones y mi 'ausencia'.

A mis compañeros de trabajo, que hicieron el trabajo en mi reemplazo.

A Cerutti, Beltrametti, Porcel y Saiz, por contestar pacientemente mis preguntas.

A Jean Luc Dorier, por la gentileza de enviarme sus separatas dedicadas y en original.

A mi Facultad, por concederme licencia especial para concretar la escritura de esta tesis.

A CICATA, a J. Lezama, R.M. Farfán y a México, que hicieron posible que llegara hasta aquí.

Análisis de los obstáculos en la construcción del concepto de Dependencia Lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad

RESUMEN

Esta tesis tiene como propósito dar a conocer el desarrollo y los resultados de un trabajo de investigación realizado en Facultades de la Universidad Nacional del Nordeste de la República Argentina, en particular, en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura.

La búsqueda surge de la necesidad de dar explicación a serias dificultades que se perciben en los estudiantes de primer año en la apropiación del concepto de dependencia lineal de vectores, consecuentemente, de la independencia lineal, y de la importancia intrínseca de estas ideas, que subyacen a otros no menos fundamentales conceptos.

Luego de fundamentar la pertinencia del trabajo, se define el problema en estudio a través de una cuestión central que se desglosa en una docena de interrogantes que operan de guía para la exploración, indicando, para cada uno, el sitio de la tesis donde se lo trata, las unidades de análisis, los métodos, las técnicas y los instrumentos que se utilizan. Se define además el marco metodológico que avala el estudio mixto descriptivo-explicativo basado en la observación, recolección de datos, análisis historio-gráfico y análisis de contenido. El enfoque predominante es el cualitativo, combinado, en algunos casos, con métodos cuantitativos.

Más tarde se introduce el marco teórico de referencia, donde se precisan los principales conceptos teóricos específicos del campo de investigación de la Matemática Educativa, y que permiten explicar tanto las indagaciones como el abordaje del problema planteado.

Seguidamente, se encara un análisis histórico-epistemológico de los conceptos involucrados y de las investigaciones en Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra Lineal, que abordan los autores más destacados en el tema.

Con el objeto de captar el estado de la enseñanza de estos conceptos en nuestro medio, se encaran diversos estudios con relación a su estatus en la Escuela Media, en la Universidad Nacional del Nordeste y en los libros de texto de Educación Superior. Asimismo, se formulan consideraciones sobre la Dependencia e Independencia Lineal, desde la Matemática y desde la Matemática Educativa, analizando en profundidad los conceptos y definiciones, su operatividad, su incongruencia semántica, su campo conceptual y dos praxeologías puntuales, necesarias para la exploración posterior.

Se describen luego los instrumentos, aspectos metodológicos y la manera en que se analizan los datos recogidos en la fase empírica, que abarcó cuatro momentos.

Finalmente, se brindan las conclusiones organizadas en seis secciones que sintetizan las razones de atascamiento que se han encontrado en el proceso de construcción de los conceptos citados.

Analysis of the obstacles in the construction of the concept of Linear Vectors Dependence in university freshmen

SUMMARY

The purpose of this thesis is to communicate the development and results of a research conducted in Faculties of the "Universidad Nacional del Nordeste" (UNNE), Argentina, particularly in the "Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura".

The present work was motivated by the need to give an explanation to serious difficulties perceived in first year students in the appropriation of linear vectors dependence and linear vectors independence concepts and the intrinsic importance of these ideas, which underlie to others no less fundamental concepts.

After substantiating the relevance and pertinence of this work, the problem under study is defined by means of a central question that in turn is broken down into a dozen of other questions that lead the exploration. For each of these questions the place in the thesis where it is answered, the elements of analysis, methods, techniques and tools used in the development of this answer are indicated. It is also defined the methodological framework that supports this mixed descriptive-explicative study based on observations, data collection, historical-graphical analysis and content analysis. Although the main approach is qualitative, in some cases quantitative methods are also used.

The next step is the introduction of the theoretical framework of reference. It specifies the major theoretical concepts of the Educative Mathematics research field that explain not only the inquiries but also how to approach the posed problem.

What follows is a historical-epistemological analysis of the involved concepts and a review of the research conducted by the most recognized authors in Teaching and Learning Linear Algebra.

With the purpose of investigating the state of how those concepts are taught in our country, a number of studies regarding their status in High Schools, the UNNE and higher education textbooks is conducted. Considerations about linear dependence and independence from the Mathematics and Educative Mathematics perspectives are also posed, discussing in depth concepts and definitions, their capability, semantic incongruity, conceptual field and two specific praxeologies needed for further exploration.

The resources, methodological aspects and the data analyzing process collected in the empirical stage which took four moments are described.

Finally, conclusions are organized in six sections that synthesize the reasons of the obstructions found in the building process of the concepts already mentioned.

GLOSARIO

Conceptos Matemáticos y no Matemáticos
Abreviaturas

Álgebra lineal (AL): Rama de la Matemática, y más precisamente del Álgebra, que se ocupa del estudio de “lo lineal”, y por lo tanto, de lo proporcional, abarcando todas las relaciones matemáticas que asuman la forma de una suma de productos de escalares por elementos llamados vectores. Los conceptos matemáticos con los que trabaja son los Espacios Vectoriales, y sus elementos, los vectores, subespacios, generadores, bases, dimensión, rango, determinantes, matrices, sistemas de ecuaciones lineales, funciones, n-úplas reales, polinomios, complejos, transformaciones lineales, autovalores y autovectores, todas nociones centrales que resuelven diversos problemas en el campo de las Ciencias Experimentales y Sociales.

A priori: Independiente de la experiencia y previo a la misma.

Base (BA): (Del AL) Se denomina base de un espacio vectorial a todo subconjunto generador y linealmente independiente de ese espacio.

Campo conceptual: (De la TCC) Conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica esquemas, conceptos y teoremas en estrecha relación, así como las representaciones lingüísticas y simbólicas que pueden utilizarse para simbolizarlos. Descansan sobre las situaciones que permiten resolver y que le dan sentido a un concepto y dependen de la transposición y contrato didácticos adaptados por las instituciones educacionales (Vergnaud, coord., 1994/1997).

Cognición: Acción y efecto de conocer.

Combinación lineal (CL): (Del AL) Toda suma finita de productos de escalares por vectores.

Combinación lineal nula (CLN): (Del AL) Toda combinación lineal que da por resultado el vector nulo.

Combinación lineal nula no trivial (CLNNT): (Del AL) Toda combinación lineal nula con algún escalar no nulo.

Combinación lineal nula trivial (CLNT): (Del AL) Toda combinación lineal con todos los escalares nulos.

Concebir: Formar ‘algo’ en la mente.

Concepción: Sistema de creencias, consistente o no, que construye el intelecto alrededor de un concepto o conjunto de conceptos y que se manifiesta en la acción. Las concepciones pueden ser ciertas o erróneas. (Ej. Yo creo que la potenciación es distributiva con respecto al producto; del mismo modo creo que lo es hacia la suma, entonces concibo al concepto “potenciación” de manera tal que me conduce a distribuir los exponentes a los sumando).

Concepto matemático: Conjunto de ideas consistentes que forma o concibe el intelecto respecto a un objeto matemático, con cierto grado de aceptación universal. Los conceptos no son ni verdaderos ni falsos, simplemente son. (Si bien no existe una equivalencia absoluta, en algún pasaje de esta tesis, se utiliza como sinónimos de 'concepto', los vocablos 'noción' e 'idea'). En la TAD, se define como una terna compuesta por el referente, el significado y el significante.

Congruencia semántica: (De la TRS) Dos representaciones son congruentes cuando hay correspondencia semántica entre sus unidades significantes (a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental), univocidad semántica terminal (a cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una única unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada) y el mismo orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones (las unidades semánticas en correspondencia son aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones, lo cual sólo es posible si tienen el mismo número de dimensiones).

Contrato didáctico: (De la TAD y TSD) Conjunto de comportamientos, explícitos o implícitos, del maestro que son esperados por el alumno y conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro, que varía, no sólo con el conocimiento matemático en juego, si no también con la situación, según sea ésta, de enseñanza, evaluación, o exploración. Opera en las instituciones educacionales, junto al contrato pedagógico y el contrato escolar (Brousseau, 1980); (Chevallard et al., 1997).

Contrato escolar: (De la TAD) Conjunto de comportamientos que gobierna a las instituciones sociales particulares llamadas escuelas y que abarca al contrato pedagógico.

Contrato pedagógico: (De la TAD) Conjunto de comportamientos que regula las interacciones entre alumnos y profesores, que no dependen del contenido de estudio.

Creencia: Convicción fuerte, interna, mental y subjetiva que genera el intelecto cuando se piensa que se ha salido de la duda, con la pretensión de evocar a un concepto ya establecido. Porque se 'cree', se 'concibe' al 'concepto' de determinada manera y se actúa en consecuencia.

Definición de un concepto matemático: Es un enunciado que identifica las relaciones existentes entre objetos matemáticos definidos previa e independientemente a partir de los términos primitivos o axiomas de una cierta teoría.

Dependencia lineal (DL): (Del AL) Lo que caracteriza a los conjuntos de vectores linealmente dependientes.

Determinante: (Del AL) Función que asigna a cada matriz cuadrada un elemento, en general un escalar, que se halla mediante un algoritmo que consiste en efectuar la suma de todos los productos de los elementos de la matriz, de modo que en cada producto haya uno, y sólo un elemento de cada fila y de cada columna; esos productos conservan su signo si el número de inversiones de la permutación de los segundos subíndices, respecto a una ordenación principal, es par, y lo cambian, si es impar.

Didáctica Fundamental (DF): Disciplina científica de la escuela francesa que se interesa por elaborar modelos teóricos, descriptivos y explicativos, de los fenómenos didáctico-matemáticos, partiendo de modelos epistemológicos explícitos sobre la naturaleza de las matemáticas y de los procesos de difusión del conocimiento matemático.

Dimensión (DI): (Del AL) Cardinal de todas las bases de un espacio vectorial.

Ecuación lineal: (Del AL) Aquella cuyas variables son de primer grado.

Efecto de analogía: (De la TSD) Ruptura en el contrato didáctico que tiene lugar cuando el docente, en caso de fracaso, vuelve a dar a sus alumnos una 'nueva' actividad, en la que disimula su similitud con las anteriores, pero que los alumnos resuelven porque han reconocido índices, quizá completamente exógenos y no controlados, que el profesor quería que produjeran.

Efecto de deslizamiento metadidáctico: (De la TSD) Ruptura en el contrato didáctico que tiene lugar cuando el docente, en caso de fracaso, toma una heurística en la resolución de un problema y la asume como el objeto de estudio, en lugar del verdadero conocimiento matemático.

Efecto Jourdain: (De la TSD) Forma del efecto Topaze que tiene lugar cuando el docente reconoce, como muestra de conocimiento en el alumno, una producción que sólo comporta causas triviales, desprovistas de valor, incluso a veces, de sentido.

Efecto Topaze: (De la TSD) Ruptura en el contrato didáctico que tiene lugar cuando el docente, en caso de fracaso, da información al alumno modificando el problema, para hacer más fácil la respuesta, sin que éste tenga que invertir el menor compromiso con la situación.

Enseñanza Media: En la Argentina, período de enseñanza que tiene lugar entre los 13 y los 18 años de edad, que abarca los dos últimos años de la Educación General Básica y los tres años de la Educación Polimodal y que habilita a los Estudios Superiores.

Espacio vectorial (EV): (Del AL) Objeto matemático básico de estudio del Álgebra Lineal. Estructura matemática que consiste en un conjunto no vacío, en el que están definidas dos operaciones, una interna, la 'suma', y otra externa, el 'producto por un escalar', de modo que se cumple: 1) el conjunto de escalares es un cuerpo con la suma y producto ordinarios; 2) el conjunto forma un grupo conmutativo con respecto a la suma (la suma es cerrada, asociativa, conmutativa, posee neutro y opuestos); 3) el producto es distributivo respecto a la suma de vectores y de escalares, se cumple la asociatividad mixta y el neutro del cuerpo de escalares es el neutro para el producto. Cuando todas estas condiciones se cumplen, los elementos del conjunto reciben el nombre de vectores.

Esquema: (De la TCC) Organización invariable de la conducta para una clase de situación dada.

Estudios Superiores: En la Argentina, estudios que se llevan a cabo luego de cumplida la Educación Polimodal y cuya duración está determinada por las Instituciones Universitarias o no Universitarias, según el caso.

Fenómeno didáctico: Todo hecho que tiene lugar en el seno de las clases de Matemática, que se presenta con cierta regularidad, y que es de interés explorar con la finalidad de conocer sus orígenes y explicaciones.

Generador (GE): (Del AL) Todo subconjunto de un espacio vectorial cuyos vectores son tales que permiten expresar a todos los vectores de ese espacio como combinación lineal de los vectores de aquel.

Independencia lineal (IL): (Del AL) Lo que caracteriza a los conjuntos de vectores linealmente independientes.

Ingeniería didáctica: Metodología específica acuñada en la Escuela Francesa de Didáctica de las Matemáticas que se basa en un análisis y control *a priori* de las situaciones que se ponen en juego dentro del proceso experimental y cuyas hipótesis serán confirmadas o rechazadas en contraste con la realización efectiva de la experiencia; se trata de una forma de trabajo didáctico que pone el acento en el estudio de procesos constructivos, que cumple también la función de producir material para la enseñanza.

Invariantes operatorias: (De la TCC) Conocimientos matemáticos implícitos (conceptos y teoremas en acto) en los cuales se apoya el proceso de conceptualización de lo real. Aluden a los conocimientos contenidos en los esquemas.

Lineal: (Del AL) Proporcional.

Linealidad: (Del AL) Proporcionalidad.

Linealmente dependiente (LD): (Del AL) Se dice del conjunto de vectores que contiene al menos un vector que puede expresarse como combinación lineal de los otros. Por extensión también se aplica a los sistemas de ecuaciones lineales.

Linealmente independiente (LI): (Del AL) Se dice del conjunto de vectores que no contiene algún vector que pueda expresarse como combinación lineal de los otros. Por extensión también se aplica a los sistemas de ecuaciones lineales.

Matemática Educativa: Disciplina científica autónoma que emergió en México con la pretensión de impactar positivamente en los sistemas educativos; que pone el acento en el estudio de los procesos de pensamiento propios del quehacer matemático, más bien que en la mera transferencia de contenidos y que se cuestiona sobre cómo aprenden Matemática los estudiantes. Este objetivo la ha llevado a plantearse sus propios interrogantes y a estructurar sus propios constructos teóricos, desde una postura epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural, respecto a cómo construyó el conocimiento matemático la humanidad a lo largo del devenir histórico; cuál es el significado que los alumnos atribuyen a los términos, símbolos, conceptos y proposiciones de las obras matemáticas y cuáles son las actividades que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático en los alumnos.

Matriz (MA): (Del AL) Llamamos matriz a todo cuadro de elementos dispuestos en filas y columnas.

Noesis: (De la TRS) Acto cognitivo que permite la aprehensión conceptual de un objeto. Visión intelectual, pensamiento, representación mental que se efectúa como interiorización de las representaciones semióticas.

Noosfera: (De la TAD) Ámbito donde se piensa el funcionamiento didáctico, integrado por las fuerzas políticas, didactas en la especialidad, autoridades educacionales, docentes, agrupaciones de padres, autores de libros de texto, editores.

Objeto matemático: Todo producto de la mente humana que resulte de interés ser manipulado por algún integrante de la comunidad matemática.

Obstáculo didáctico: (De la TSD) Obstáculo cognitivo que parece depender sólo de una elección o de un proyecto dentro de un sistema educativo, por ejemplo la presentación elegida para un determinado contenido.

Obstáculo epistemológico: (De la TAD y TSD) Concepción, conocimiento válido en un cierto contexto, que produce respuestas falsas fuera de ese contexto; que se presentan muy frecuentemente; que se resiste al establecimiento de un conocimiento mejor; que parecen pertenecer al significado de los conceptos en sí mismos, no depender de una manera particular de instrucción y que se los puede encontrar en la génesis histórica de las nociones. Esta noción, que constituye una categoría de los obstáculos cognitivos junto a los obstáculos de origen didáctico y ontogénico, fue incorporada en el seno de la epistemología de las ciencias experimentales en 1938, por G. Bachelard y recreada por G. Brousseau en 1976.

Obstáculo ontogénico: (De la TSD) Obstáculo cognitivo que sobreviene debido a las limitaciones del individuo, neurofisiológicas entre otras, en un momento de su desarrollo.

Praxeología matemática: (De la TAD) Descripción de una actividad matemática y del saber que de ella surge, con relación al significado institucional de un objeto matemático. Se compone de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Rango (RA): (Del AL) Máximo número de vectores fila (o columna) linealmente independientes de una matriz.

Referente del concepto: (De la TAD) Conjunto de situaciones que da sentido al concepto.

Registro de representación semiótica: (De la TRS) Sistema semiótico que posibilita tres actividades cognitivas: representar, transformar y convertir (Duval, 1995; 1996).

Resiliencia: [resilencia] Del latín, *resilio* 'volver atrás', 'volver de un salto', 'resaltar', 'rebotar'. En Ingeniería: "capacidad de un material de recobrar su forma original después de someterse a una presión deformadora". En Psicología Social: "capacidad humana para hacer frente a las adversidades, superarlas y salir de ellas fortalecido o incluso transformado".

Semiosis: (De la TRS) Proceso o acto que realiza un individuo como medio de expresión de las representaciones mentales para hacerlas visibles a si mismo o a otros individuos a través de la utilización de un sistema semiótico. La semiosis precede a la noesis (R. Duval).

Semiótica: Teoría general de los signos y símbolos, en este caso, matemáticos.

Sentido del concepto: (De la TCC) Relación del sujeto con las situaciones y con los significantes a través de los esquemas que evoca el sujeto individual.

Significado del concepto: (De la TAD) Conjunto de invariantes que pueden ser reconocidos y usados por los sujetos para analizar y dominar las situaciones del referente.

Significante del concepto: (De la TAD) Conjunto de representaciones simbólicas que pueden ser usadas para indicar y representar los invariantes.

Sistema de ecuaciones lineales (SI): (Del AL) Conjunto de dos o más ecuaciones cuya solución, si existe, es común a todas ellas.

Sistema semiótico: (De la TRS) Conjunto de signos y símbolos que tienen reglas claras de significancia y de funcionamiento.

Situación adidáctica: (De la TSD) Parte de la situación didáctica en que la intención de enseñanza no aparece explícita para el sujeto, si no como una interacción con un medio no didáctico, que da lugar a la producción de un saber específico, pero en el cual las decisiones del sujeto se guían por la lógica de la situación y no por la lectura de las intenciones del profesor.

Situación didáctica: (De la TSD) Conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidas entre los alumnos, algún entorno y el profesor, con el fin de permitir a los alumnos aprender algún conocimiento específico.

Situación fundamental: (De la TSD) Conjunto mínimo de situaciones adidácticas que de alguna manera representa la problemática que permite la emergencia de un conocimiento matemático específico, es decir que, el conocimiento en cuestión aparece como la estrategia óptima para resolver el problema involucrado. Brousseau (1986) postula que para todo conocimiento matemático existiría al menos una 'situación fundamental', sin embargo, las investigaciones muestran la dificultad para encontrarla, en el caso de nociones generalizadoras, unificadoras y formalizadoras, como la que aquí nos ocupa.

Tareas: (De la TAD) Son labores específicas inherentes al quehacer matemático escolar; 'artefactos', 'obras', 'construcciones institucionales', cuya reconstrucción en tal institución, y por ejemplo en tal clase, es el objeto mismo de la Didáctica. Se agrupan en tipos de tareas y género de tareas.

Técnicas: (De la TAD) Distintas maneras de realizar las tareas.

Tecnologías: (De la TAD) Discursos racionales que justifican, describen, explican y aclaran las técnicas, para asegurarse de que permiten realizar las tareas que se pretende.

Teorías: (De la TAD) Fundamentan y organizan los discursos tecnológicos. Las teorías tienen, en relación a las tecnologías, el mismo rol que las tecnologías tienen respecto a las técnicas.

Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD): Teoría debida a Chevallard, que sitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio en Matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales y describe estas actividades, y el saber que de ellas emerge, en términos de organizaciones o praxeologías matemáticas.

Teoría de las Representaciones Semióticas (TRS): Enfoque cognitivo acuñado por R. Duval, que se interesa en el funcionamiento del conocimiento bajo el ángulo de los mecanismos y de los procesos que lo permiten en cuanto actividad de un individuo. Pone el acento en la hipótesis de que la comprensión de un objeto matemático se alcanza cuando se diferencia el representante del objeto representado, lo que se manifiesta en la coordinación, rápida y espontánea, de al menos dos registros de representación semiótica.

Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD): Teoría nueva e innovadora desarrollada por G. Brousseau, que introduce múltiples constructos teóricos que permiten analizar los fenómenos didácticos, modelizando y clasificando las interacciones entre un saber concreto, el alumno y el docente, en una determinada institución escolar.

Teoría de los Campos Conceptuales (TCC): Teoría cognitiva introducida por G. Vergnaud en 1990, que pone el acento en los procesos de conceptualización desarrollados en un área determinada y durante un largo período, lo cual obliga a analizar las filiaciones y rupturas entre las competencias desarrolladas progresivamente por los alumnos, así como las concepciones asociadas a estas competencias, ya sean explícitas o implícitas, lo que puede lograrse estudiando un conjunto diversificado de situaciones, esquemas, representaciones simbólicas, lingüísticas y no lingüísticas para comprender los vericuetos de aquellos procesos.

Transposición didáctica: (De la TAD) Trabajo o proceso de adaptación que transforma un saber sabio o saber científico en un saber objeto de enseñanza. Se desarrolla en gran parte en la comunidad científica y se prosigue en los medios cultos, más precisamente en la noosfera.

Validación: Considerar la validez, la factibilidad de una solución. En fases experimentales, análisis al que se somete un instrumento o dispositivo de recolección de datos, con relación a su potencialidad predictora de comportamientos o resultados.

Variable didáctica: (De la TSD) Todo elemento de una actividad que puede ser modificado por el enseñante, de modo de provocar un salto cognitivo, un cambio en la estrategia que pone en funcionamiento el alumno, con el objeto de que alcance el saber deseado. En Matemática, puede tratarse de un número, una función, una restricción, la organización de la clase, un instrumento tecnológico, etc.

Vector: (Del AL) Todo elemento de un espacio vectorial.

Índice

Análisis de los obstáculos en la construcción del concepto de Dependencia Lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad

Capítulo I

Introducción

I.1 ¿Por qué esta tesis?

Encaramos este trabajo, a la luz de la idea de que "El primer paso que debe dar un docente, para encontrar el camino hacia una enseñanza de calidad, es reconocer que la persecución de la excelencia en la instrucción, es una meta digna." (Cowen, 1997). Esta concepción, guiará de aquí en adelante nuestra labor.

En segundo lugar deseamos clarificar las razones que movilizaron el abordaje del análisis de los obstáculos que subyacen a la apropiación de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la Universidad. Esas razones están vinculadas, tanto a la *importancia* intrínseca que estos conceptos aportan al seno del quehacer matemático y fuera de él, como a las serias *dificultades* detectadas en nuestros estudiantes de primer año, durante décadas de docencia universitaria.

Asimismo, y más allá de la relevancia que logren alcanzar los resultados obtenidos, intentamos esclarecer, aunque sea mínimamente, las razones que ocasionan la carencia de comprensión de estas nociones, de modo de convertirnos, quizá algún día, en mejores acompañantes de los procesos internos que construyen nuestros estudiantes en su camino hacia el conocimiento.

A continuación, nos explayaremos en las dos cuestiones que hemos apuntado y que avalan la pertinencia del presente trabajo.

I.1.1 La importancia de los conceptos en la formación matemática

El título de este apartado sugiere que pretendemos argumentar que los conceptos que nos ocupan son importantes porque su aprendizaje permite a los estudiantes el entendimiento de otras nociones matemáticas, y lo más 'lamentable', que es cierto. Pero, esta declaración requiere una suerte de explicación, de lo contrario corremos el riesgo de que se interprete legítimamente que su importancia recae únicamente en el contexto intramatemático[1]. Veamos:

[1] Si un ejercicio hace referencia únicamente a estructuras, símbolos y objetos matemáticos y no alude a cuestiones ajenas al universo matemático, el contexto del ejercicio se considera *intramatemático*; por el contrario, si la situación no se plantea en términos matemáticos explícitos, sino que hace referencia a objetos del mundo real, se dice que su contexto es *extramatemático*.

Los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores están inmersos en el tópico de Espacios Vectoriales del dominio del Álgebra Lineal y constituyen ideas que subyacen a otros no menos fundamentales conceptos como generador, base, dimensión, rango, determinante, matrices, sistemas de ecuaciones lineales, funciones, n-úplas reales, polinomios, complejos, transformaciones lineales, autovalores y autovectores, todas nociones centrales que resuelven diversos problemas en el campo de la Física, la Química, la Ingeniería, la Economía, la Ecología, la Informática.

Por lo tanto, si bien es cierto que aquellos conceptos son buenas herramientas para hacer 'más matemática', la existencia de estas 'nuevas matemáticas' están sobradamente justificadas por sus múltiples aplicaciones, de las que damos a continuación, una lista no exhaustiva ni demasiado ordenada.

Las nociones del Álgebra Lineal son empleadas:

- por los buscadores de Internet para ofrecer al usuario una lista ordenada de sitios;
- para desplegar un gráfico sobre la pantalla de una computadora;
- en muchos algoritmos de compresión de la información que son imprescindibles para hacer posibles las comunicaciones modernas, por ejemplo en un archivo .jpg;
- en codificación, criptografía y para proteger la integridad de la información cuando se la almacena en un disco compacto o se la transmite por cualquier canal;
- para analizar cómo se distribuyen los esfuerzos en cualquier estructura sometida a cargas;
- para describir los movimientos del brazo de un robot para controlarlo y ponerlo a realizar alguna tarea;
- para describir el esquema de conexiones en cualquier red de cualquier naturaleza;
- para ordenar la información de muchos problemas combinatorios para tratarlos;
- para resolver problemas de optimización insumos-producción en economía;
- como algunas de las herramientas necesarias para ajustar un conjunto de observaciones a los modelos teóricos disponibles;
- en los procesos de optimización necesarios para una gestión eficiente;
- en el balance de compuestos químicos;
- en Oceanología, para estudiar la erosión de la arena, las mareas, los huracanes, el oleaje, el movimiento de tiburones, etc.;
- para estudiar la dinámica de poblaciones;
- en la estimación por mínimos cuadrados;
- en cómputos tomográficos;
- en Teoría de Juegos;
- en Teoría de la Información Genética;
- en Teoría de Fractales.

(Listado adaptado y ampliado de *Geometría y álgebra lineal*, 2005)

A este cúmulo de aplicaciones, nada triviales por cierto, nos parece oportuno agregar la opinión de destacados investigadores en el tema, acerca de la trascendencia de los conceptos que estamos trabajando:

> "Querríamos en este texto argumentar nuestro punto de vista general sobre el ejemplo de dos nociones que están entre las más elementales del álgebra lineal, las de independencia y dependencia lineales. No hace falta decir que un buen aprendizaje de estas nociones es indispensable para un entrenamiento satisfactorio en la teoría de los espacios vectoriales." (Dorier, 1996, p. 151).

> "A nuestro parecer, los principales conceptos del curso de álgebra son los conceptos de grupo (representando más la idea general de un sistema algebraico), de un Anillo Euclídeo (junto con las ideas del algoritmo Euclídeo y la factorización única), de relación de equivalencia (junto con la idea de partición sobre clases) y de dependencia lineal." (Safuanov, 2003, p. 4).

> "Uno de los conceptos fundamentales del álgebra lineal es la noción de dependencia lineal de un conjunto de vectores." (Muench, 1990, p. 1).

Y respecto al Álgebra Lineal toda:

> "Estoy muy feliz porque la necesidad del Álgebra Lineal es ampliamente reconocida. Es absolutamente tan importante como el cálculo. No cedo nada al respecto, cuando miro cómo se usa actualmente la matemática. Muchas aplicaciones son hoy discretas más que continuas, digitales más que analógicas, linealizables más que erráticas y caóticas. Entonces los vectores y las matrices son el lenguaje a conocer." (Strang, 1998, p. v).

En general, consideran que el Álgebra Lineal es una piedra angular en la Educación Matemática por cuanto desarrolla un idioma general e interdisciplinario, usado por todas las ciencias.

I.1.2 Las dificultades observadas en el primer año de la Enseñanza Superior

Basándonos en la teoría psicológica de la actividad, una de cuyas tesis defiende que "No se puede separar el saber del saber hacer, porque siempre saber es saber hacer algo, no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer." (Talizina, 1985), deberíamos poder esperar que los alumnos respondieran, sin dificultad alguna, preguntas que requieren un dominio básico de los conceptos y que presuponen la construcción de una mínima red interna entre los mismos. Sin embargo, es muy frecuente constatar que los estudiantes, luego de la instrucción y la ejercitación tradicional, en general de corte netamente algorítmico y cuyo montaje describimos en el subapartado IV.1.2.1, pp. 65-70, son incapaces de responder, en forma inmediata, preguntas como las que se exhiben:

1. *El conjunto A de vectores, ¿es linealmente dependiente o independiente?*

$$A = \{(-1,2,4,-3)\ ,\ (2,-4,-8,6)\}$$

2. *¿Cuál es el rango de la matriz* $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$*?*

3. *¿Cuánto vale el determinante* $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & -8 & 6 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{vmatrix}$ *?.*

4. *¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema* $\begin{cases} -x + 2y + 4z = -3 \\ 2x - 4y - 8z = 6 \end{cases}$ *?.*

Como puede apreciarse, la respuesta a estas preguntas puede suministrarse luego de sólo mirarlas, debido a que requieren únicamente haber comprendido el sentido de la dependencia lineal de un conjunto de *dos* vectores de R^4, esto es, la dependencia vía la proporcionalidad de las respectivas componentes, a la que podríamos denominar la más 'obvia' de las dependencias. No obstante, nuestros alumnos utilizan en sus respuestas los algoritmos tradicionales que se derivan de las definiciones y teoremas.

Ante esta situación nos preguntamos: ¿puede suponerse que el alumno comprendió lo que significa ser o no ser, linealmente independiente? ¿Encuentra alguna relación entre las definiciones dadas y la posibilidad de contestar 'al toque', las cuatro preguntas del cuadro anterior, donde la dependencia 'salta a la vista'? ¿No se deduce acaso, que solamente ha sido capaz de retener procedimientos, sin alcanzar a otorgar sentido ni significado a sus acciones?

Estos resultados nos proveen evidencias claras sobre la existencia de una 'dislexia' entre el discurso matemático escolar y el conocimiento aprendido por lo alumnos, es decir, una ruptura que se percibe entre la *presentación* en las aulas universitarias de los conceptos de dependencia e independencia lineal y lo que se pretende que los alumnos sean *capaces de resolver*, a partir de la adquisición de aquellas nociones.

En este apartado sólo pretendimos mostrar una suerte de 'fotografía' de la realidad de nuestras aulas, sin embargo, el testimonio que sigue, y que corresponde al reporte de un comentario vertido por un profesor durante un Seminario de Álgebra Lineal para docentes de Educación Superior desarrollado en una universidad colombiana, es una de las tantas muestras de que el conflicto no es tan solo nuestro, ni tampoco está en la imaginación de los investigadores:

> "Otra cosa que dijeron los profesores de Ingeniería Industrial es que para ellos es necesaria la noción de *independencia lineal* a la hora de resolver problemas de optimización y también la noción de base de un espacio vectorial, pero *no solamente los algoritmos* para calcular, por ejemplo, una base de un espacio vectorial; sino principalmente la *comprensión clara de estos conceptos*. Y relató que los profesores de Ingeniería dijeron que a ellos *les tocaba volver a enseñar estos conceptos* en los cursos de Optimización pues *parecía que los estudiantes no los llegaban a entender en los cursos de Álgebra Lineal*." (Venegas, 2005. La cursiva es nuestra).

Este comentario alude obviamente a las dos aristas, que no casualmente, constituyen los ejes de estos dos apartados, es decir, la importancia y las dificultades.

En fin, restan muchas cuestiones a explorar y corresponde a las investigaciones en matemática educativa atender a esta necesidad de desentrañar la complejidad de estos fenómenos didácticos[2].

I.2 Planteamiento del Problema. Marco metodológico

La necesaria delimitación que requiere un trabajo con profundidad, nos ha conducido a plantear la cuestión central del análisis que pretendemos abordar, y que se halla fuertemente sugerida por su título, dicha cuestión es:

¿Cuáles son los obstáculos con los que tropiezan los alumnos de primer año de la Universidad Nacional del Nordeste, en la construcción del concepto de dependencia lineal de vectores?

La respuesta a este primer interrogante, permitirá el análisis de dichos obstáculos, lo que constituye el objetivo del presente trabajo. A su vez, este cuestionamiento de partida nos ha llevado a establecer otras preguntas de base, que asumen la función de mediadoras, y que estructuran las distintas fases de la investigación, justificando cada uno de los capítulos, secciones y apartados que más adelante se desarrollan.

El tipo de trabajo que abordamos se enmarca en un estudio mixto descriptivo[3]-explicativo[4] según la clasificación Dankhe (1986, en Hernández, Fernández y Baptista, 1994, p. 58), basado en la observación y recolección de datos; en algunos casos, a través del análisis historio-gráfico, y en otros, del análisis de contenido[5]. El enfoque predominante es el cualitativo hermenéutico-interpretativo combinado, en algunos casos, con métodos cuantitativos.

---

[2] Entendemos por *fenómeno didáctico* a todo hecho que tiene lugar en el seno de las clases de Matemática, que se presenta con cierta regularidad, y que es de interés explorar con la finalidad de conocer sus orígenes y explicaciones.

[3] "*Los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que sea sometido a análisis*. (...) Desde el punto de vista científico, describir es medir. (...)." (Dankhe, 1986, en Hernández et al., 1994, p. 60).

[4] "*Los estudios explicativos* van más allá de la descripción de conceptos o fenómenos o del establecimiento de relaciones entre conceptos; *están dirigidos a responder a las causas de los eventos físicos o sociales*." (Hernández et al., 1994, p. 66).

[5] En la aproximación historio-gráfica "se hace un esfuerzo para ilumninar situaciones actuales a partir de analizar con profundidad las situaciones del pasado." El análisis de contenido "es usado para investigar preguntas orientadas al presente analizando las situaciones actuales." (Farfán, 2001, p. 10).

A continuación, exponemos mediante un cuadro las nuevas preguntas, el lugar de este trabajo donde se tratan, las unidades de análisis, los métodos, las técnicas y los instrumentos.

Nº	Pregunta	Sección Ap/Sub	Unidad de análisis	Método	Técnica/ Instrumento
1	*¿Cuál es el origen histórico y epistemológico de los conceptos involucrados?*	III.1	Documento. Artículo. Libro	Descriptivo/ Análisis historio-gráfico	Revisión de la Literatura
2	*¿Cuáles son las dificultades y propuestas que surgen de las investigaciones existentes en el tema?*	III.2	Documento. Artículo. Tesis	Descriptivo/ Análisis historio-gráfico y de contenido	Revisión de la Literatura
3	*¿Qué contacto tuvieron los alumnos en sus estudios secundarios con los conceptos en cuestión?*	IV.1.1	Currículo. Programa. Docente de Nivel Medio	Descriptivo/ Análisis de contenido	Revisión de Documentos oficiales. Entrevistas informales.
4	*¿Cuál es la organización del proceso didáctico que de este tema se hace en la UNNE?*	IV.1.2.1	Currículo. Programa. Guía. Nota didáctica	Descriptivo/ Análisis de contenido	Revisión de Documentos Oficiales. Información obtenida en 4. Entrevista estructurada.
5	*¿Qué presentación muestran los libros de texto utilizados en la UNNE?*	IV.1.2.2	Libro de texto obrante en UNNE	Descriptivo/ Análisis de contenido	Revisión bibliográfica
6	*¿Qué dificultades intrínsecas plantean los objetos matemáticos en estudio?*	IV.2.1, IV.2.2, IV.2.3	Concepto. Definición.	Descriptivo/ Análisis de contenido	Conocimientos propios. Revisión de la Literatura. Información obtenida en 2.
7	*¿Cuál es el campo conceptual de la DL en la UNNE?*	IV.2.4	Currículo. Programa. Guía. Nota didáctica. Clases	Descriptivo/ Análisis de contenido	Información obtenida en 4 y 5
8	*¿Cuáles son las posibles técnicas, tecnologías, teorías y registros disponibles en la UNNE, para resolver dos tareas específicas del tema?*	IV.2.5	Currículo. Programa. Guía. Nota didáctica. Clases	Descriptivo/ Análisis de contenido	Información obtenida en 4, 5, 6 y 7
9	*¿Cuáles son las técnicas que utilizan los estudiantes de la UNNE, para resolver las dos tareas analizadas en 8, cuáles son sus errores, cuál es su rendimiento?*	V.1.1	Alumno de la UNNE	Descrip/Expl Análisis cuanti-cualitativo de contenido	Resolución de dos tareas/ formato papel
10	*¿Qué conocimiento tienen sobre el tema los Profesores de Nivel Medio?*	V.1.2	Profesor de Enseñanza Media	Descrip/Expl Análisis cualit. de contenido	Resolución de un problema/formato papel
11	*¿Cuál es la concepción que tienen los profesores de la UNNE en relación con la enseñanza y aprendizaje del tema?*	V.1.3	Profesor de la UNNE	Descrip/Expl Análisis cualit. de contenido	Entrevista estructurada/formato electrónico
12	*¿Construyen los alumnos la red interna que subyace a las definiciones de DL e IL?*	V.1.4	Alumno de la UNNE	Descrip/Expl Análisis cualit. de contenido	Entrevista clínica semi-estructurada de debate grupal/ grabación video-audio

Como puede observarse, se prevé que la información obtenida en algunas de las etapas sea utilizada en las fases posteriores en que resulte pertinente.

En el Capítulo V, describimos con más detalle los aspectos metodológicos de la fase experimental, esto es, el diseño de los instrumentos, el objetivo que persiguen, el perfil de los personajes intervinientes y la forma en que se analizan los datos recogidos.

Con el propósito de situar nuestro problema y los interrogantes que lo conforman, dentro de un conjunto de conocimientos que permita orientar nuestra búsqueda, nos ofrezca una conceptualización adecuada de los términos que utilizamos y nos brinde normas no ambiguas de correspondencia entre la teoría y los hechos observables; describimos previamente el *Marco Teórico* de referencia, a lo largo de los seis ejes del Capítulo II.

Asimismo, debido al carácter descriptivo y explicativo del trabajo que reportamos, deseamos dejar en claro que no planteamos *hipótesis* alguna, más que el *supuesto de la existencia de obstáculos en la construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la UNNE*.

Capítulo II

Un Marco Teórico para el desarrollo del presente trabajo

Este capítulo tiene como propósito establecer un corpus mínimo de conceptos teóricos específicos del campo de investigación en el que se desarrolla el presente trabajo, a fin de dotarlo de un sistema coordinado y coherente de nociones y proposiciones desde las cuales explicar, describir, justificar, analizar, fundamentar y argumentar, tanto las indagaciones como nuestras interpretaciones, en el abordaje del problema planteado.

Es así que, en las secciones que siguen, describimos las herramientas o constructos que constituyen el marco teórico de referencia, con el que se pretende dar luz sobre las preguntas de investigación que sustentan la etapa empírica, comenzando con el esclarecimiento de lo que se entiende por esta relativa nueva ciencia que se interesa en el juego que se realiza entre el docente, los alumnos y un saber, cuya apropiación deviene problemática.

II.1 Matemática Educativa - Didáctica de la Matemática - Educación Matemática

Nuestro trabajo se enmarca en el dominio de la Matemática Educativa, Didáctica[6] de la Matemática o Educación Matemática. Esta cadena de disyunciones, que puede apreciarse como poco prolija y que parece proclamar algún tipo de indecisión o desencuentro en relación con la denominación que damos a esta disciplina, responde a las distintas culturas que la han tomado como objeto de estudio. Cantoral y Farfán (2000) lo expresan de la siguiente manera:

> "Durante las últimas décadas hemos visto aparecer al seno de la comunidad de educadores matemáticos, didactas de la matemática o de los matemáticos educativos (según se trate de la tradición de escuela[1] que les cobije), sectores académicos universitarios que se ocupan del estudio de los procesos (…)." (p. 1).
>
> "[1] El nombre de Matemática Educativa da a nuestra disciplina una ubicación geográfica y conceptual; en el mundo anglosajón, el nombre que le han dado a la práctica social asociada es el de *Mathematics Education*, mientras que en la Europa continental le han llamado Didáctica de las Matemáticas*, Didactique des Mathématiques, Didaktik der Mathematik*, por citar algunas de las escuelas más dinámicas (pie de p. 1).

Farfán (2001) completa la idea agregando:

[6] Nos referimos a la didáctica fundamental que nació cuando Brousseau vislumbró por primera vez la necesidad que tenía la didáctica de utilizar un modelo propio de la actividad matemática, dado que los modelos epistemológicos usuales no habían sido construidos para responder a los mismos problemas que se plantea la didáctica, y que, históricamente se corresponde con las primeras formulaciones de la teoría de las *situaciones didácticas*. (Gascón, 1998)

> “El término matemática educativa, al parecer, se acuñó en México. La matemática educativa en tanto una disciplina del conocimiento es, a todas luces, una disciplina emergente y, como tal, ha desarrollado sus paradigmas mucho más recientemente de lo que podría creerse.” (pie de p. 1).

Sin embargo, no todos los investigadores consideran como sinónimos a estos términos; por ejemplo, basándose en el hecho obvio de que el término ‘educación’ es más amplio que el término ‘didáctica’, Godino (2003), refiriéndose a Rico, Sierra y Castro (2000, p. 352), reporta que:

> “(…) entienden a la Educación Matemática como «todo el sistema de conocimientos, instituciones, planes de formación y finalidades formativas» que conforman una actividad social compleja y diversificada relativa a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La Didáctica de la Matemática la describen estos autores como la disciplina que estudia e investiga los problemas que surgen en educación matemática y propone actuaciones fundadas para su transformación.” (p. 2).

No obstante ello, casi la totalidad de los investigadores, comprendido entre ellos el mismo Godino (2003), utiliza indistintamente las tres denominaciones y esa es la postura que adoptamos a lo largo del presente trabajo.

También existe una gran gama de definiciones de los objetivos y del campo de estudio de esta disciplina; muy lejos de pretender ser exhaustivos, agregamos a la de Rico et al. (2000), unas pocas más, algunas de las cuales fueron completadas y ampliadas por los mismos autores en publicaciones posteriores:

Brousseau (1989):

> “(…) ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos”, indicando como los objetos particulares de estudio:
>
> * Las operaciones esenciales de la difusión de los conocimientos, las condiciones de esta difusión y las transformaciones que produce, tanto sobre los conocimientos como sobre sus usuarios.
>
> * Las instrucciones y las actividades que tienen por objeto facilitar estas operaciones. ” (p. 3).

Chevallard (1980):

> “El verdadero objetivo de la Didáctica es la construcción de una teoría de los procesos didácticos que nos proporcione dominio práctico sobre los fenómenos de la clase.” (p. 152).

Gascón (1998):

> "El enfoque antropológico toma como objeto primario de investigación el *proceso (institucionalizado) de estudio de una obra matemáti*ca. Abreviadamente podemos decir que, desde este punto de vista, la Didáctica es la ***ciencia del «estudio»***[7] (incluyendo la *ayuda al «estudio»)* de las matemáticas. Su objetivo es llegar a describir, caracterizar y explicar (pero también diseñar, ayudar a gestionar y evaluar) los procesos de estudio de las comunidades que se ven llevadas a estudiar matemáticas en el seno de ciertas instituciones.
>
> [7] Para entender el alcance de la noción de *«estudio»* tal como aquí se utiliza, no hay que olvidar que en los últimos desarrollos del enfoque antropológico, toda actividad matemática institucional se modeliza mediante la noción *de proceso de estudio de una obra Matemática (en el seno de dicha instrucción.* (pp. 18-19).
>
> (…)
>
> En adelante la didáctica de las matemáticas puede seguir siendo considerada como la *ciencia de los fenómenos y los procesos didácticos,* con la condición de que ***«didáctico»*** se entienda como ***«relativo al estudio de las matemáticas»***." (p. 20).

Godino (2003):

> "Consideramos que la Educación Matemática es un sistema social, heterogéneo y complejo en el que es necesario distinguir al menos tres componentes o campos:
>
> * La acción práctica y reflexiva sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
>
> * La tecnología didáctica, que se propone desarrollar materiales y recursos, usando los conocimientos científicos disponibles.
>
> * La investigación científica, que trata de comprender el funcionamiento de la enseñanza de las matemáticas en su conjunto, así como el de los sistemas didácticos específicos (profesor, estudiantes y conocimiento matemático).
>
> Estos tres se interesan por un mismo objeto –el funcionamiento de los sistemas didácticos-, e incluso tienen una finalidad última común: la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (…)." (p. 38).

Steiner (1985, p. 11, en Godino, 2003), fue uno de los que reclamó al respecto, y en forma vehemente, la necesidad de:

> "(…) una base teórica que nos permita una mejor comprensión e identifique las diversas posiciones, aspectos e intenciones que subrayan las diferentes definiciones de Educación Matemática en uso, para analizar las relaciones entre estas posiciones y conjuntarlas en una comprensión dialéctica del campo total." (p. 29).

En su tesis doctoral, Grecia Gálvez (en Parra y Saiz (comps.), 1994) sostiene que:

> “[La didáctica] se plantea, en otros términos, la investigación científica de los procesos que tienen lugar en el dominio de la enseñanza escolar de las matemáticas.”
> (...)
> “Se parte de la base de que el conocimiento de los fenómenos relativos a la enseñanza de las matemáticas no es un resultado de la simple fusión de conocimientos provenientes de dominios independientes, como son las Matemáticas, la Psicología y la Pedagogía, sino que requiere de investigaciones específicas.” (pp. 40-41).

Aquí convendremos que se trata de una disciplina científica autónoma que emergió en la década de los setenta, con la pretensión de impactar positivamente en los sistemas educativos; que pone el acento en el estudio de los procesos de pensamiento propios del quehacer matemático, más bien que en la mera transferencia de contenidos y que se cuestiona sobre cómo aprenden Matemática los estudiantes. Este objetivo la ha llevado a plantearse sus propios interrogantes, desde una postura epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural, respecto a cómo construyó el conocimiento matemático la humanidad a lo largo del devenir histórico; cuál es el significado que los alumnos atribuyen a los términos, símbolos, conceptos y proposiciones de las obras matemáticas, y cuáles son las actividades que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático en los alumnos. Si bien recibe aportes de otras disciplinas, ha estructurado sus propios constructos teóricos como ‘la transposición didáctica’, ‘los obstáculos epistemológicos’, ‘el contrato didáctico’, ‘las variables didácticas’, ‘la institucionalización’, ‘la ingeniería didáctica’, etc.

Finalmente, queremos expresar que concebimos a la Matemática como la Ciencia de la cantidad, entendiendo a ésta como todo aquello que admite ser sometido a transformación, ya sea un objeto o fenómeno, ya sea un número, un signo o un símbolo, siempre que la significación de éstos sea perfectamente definida. Esta ciencia descansa en verdades necesarias, evidentes y universales de las que se deducen, por el procedimiento de la demostración, otras verdades que tienen los mismos caracteres de necesidad, universalidad y certidumbre que las primeras nociones de que parten. Su etimología (*Mathesis-Ciencia*) manifiesta el justo aprecio, la distinguida consideración y la elevada importancia que, como la ciencia por antonomasia mereció de los antiguos, el conjunto de conocimientos que tal nombre recibiera. La Matemática busca las relaciones que determinan las leyes inmutables que rigen el mundo, y sus objetos, enteramente creados por el espíritu, se imponen a la experiencia material en virtud de una misteriosa concordancia entre el pensamiento y la realidad exterior. Su importancia se reconoce *a priori*, en la índole trascendental de su objeto, y *a posteriori*, en la aplicación universal de su fin. No sólo es una ciencia de razonamiento puro, sino que es el modelo de esta clase de ciencias, y su conjunto, forma el sistema de verdades más bello y completo que ha podido constituir la razón humana.

II.2 Los obstáculos epistemológicos

Brousseau en 1976, y más tarde, todas aquellas teorías sustentadas en el `significado´, incorporaron a la Didáctica de la Matemática la noción de *obstáculo epistemológico* creada en 1938, en el seno de la epistemología de las ciencias experimentales, por el filósofo y epistemólogo Gastón Bachelard, quien expuso su idea así:

> "Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción de que *hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos*. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el mismo acto de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia a las que llamaremos obstáculos epistemológicos." (Bachelard, 1938, p. 187. Destacado en la traducción del original).

También es Brousseau (1983) quien redefine los obstáculos epistemológicos, en términos de la Teoría de Situaciones Didácticas, cuyo análisis retoma en un texto del año 1988 donde precisa particularmente que el trabajo de búsqueda de dichos obstáculos consiste primero en:

a) Encontrar los errores recurrentes, mostrar aquellos que se reagrupan alrededor de concepciones.
b) Encontrar obstáculos en la historia de las matemáticas.
c) Confrontar los obstáculos históricos con los obstáculos de aprendizaje y establecer su carácter epistemológico (Brousseau, 1988, en Artigue, 1990, p. 259).

A su vez, Duroux (1982, en Brousseau, 1983) precisa las condiciones que deberá satisfacer un conocimiento para poder ser declarado un 'obstáculo' en el sentido de Bachelard, y en franca oposición a Glaeser, lo distingue de una 'dificultad', ya que es en las dificultades donde se pueden encontrar las indicaciones de un obstáculo.

Brousseau (1988, en Artigue, 1990) recrea las características enunciadas por Duroux, de la siguiente manera:

a) Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad o una falta de conocimiento.
b) Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto encontrado frecuentemente.
c) Pero ellos engendran respuestas falsas fuera de este contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.

d) Además, este conocimiento resiste a las contradicciones a las cuales es confrontado y al establecimiento de un conocimiento mejor. No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca (lo que distingue el franqueamiento de obstáculos de la acomodación de Piaget). Es pues indispensable identificarlo e incorporar su rechazo al nuevo saber.
e) Después de la toma de conciencia de su inexactitud, continúa manifestándose de modo intempestivo y obstinado (p. 259).

Los obstáculos epistemológicos constituyen entonces, a criterio de Brousseau (1983), una categoría de obstáculo cognitivo junto a los llamados de *origen ontogénico*, que sobrevienen debido a las limitaciones del individuo, neurofisiológicas entre otras, en un momento de su desarrollo; y de *origen didáctico*, que identifica como aquellos que parecen depender sólo de una elección o de un proyecto dentro de un sistema educativo, por ejemplo la presentación elegida para un determinado contenido.
También Sierpinska (1992), en el contexto del entendimiento del concepto de función, dirige su mirada a la noción de obstáculo epistemológico. Se refiere a éstos señalando que parecen pertenecer al significado de los conceptos en sí mismos, no depender de una manera particular de instrucción, afectar a muchos individuos y haber sido generales alguna vez o en alguna cultura. Cuestiona que la historia de los conceptos matemáticos sea generalmente presentada como si el desarrollo del concepto siguiera una curva uniforme con pendiente positiva y que no puede ser modelado de esa manera. Que a mayor profundidad cognitiva ocurren catástrofes, actos cruciales de comprensión que consisten en rupturas abruptas con una cierta clase de conocimiento superando un obstáculo y no en un desarrollo uniforme de antiguos conocimientos a nuevos. Finalmente, concluye con un pensamiento de Byres: "no hay un camino sin dolor para aprender" […] "la verdadera tarea educativa consiste en manejar la tensión, no en eliminarla."

El investigador mexicano Albert Huerta (2000) describe los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico, sus características y sus orígenes, confiriendo el estatus de 'dificultad intrínseca' a los obstáculos epistemológicos de un objeto o procedimiento matemático. Además de señalar el rol del profesor, esboza las condiciones que deberían poseer las situaciones didácticas para permitir la construcción de un nuevo conocimiento a partir de la superación de aquellos obstáculos. El autor se ocupa y preocupa por dejar en evidencia la importancia de incorporar, de manera efectiva a la Enseñanza de la Matemática, los resultados de las investigaciones de índole epistemológico, esto es, la relevancia que tiene el conocimiento de los obstáculos epistemológicos y su propio origen, en el diseño de las Ingenierías Didácticas[7].

[7] La Ingeniería Didáctica es una metodología específica acuñada en la Escuela Francesa de Didáctica de las Matemáticas que se basa en un análisis y control *a priori* de las situaciones que se ponen en juego dentro del proceso experimental y cuyas hipótesis serán confirmadas o rechazadas en contraste con la realización efectiva de la experiencia; se trata de una forma de trabajo didáctico que pone el acento en el estudio de procesos constructivos, que cumple también la función de producir material para la enseñanza.

Son ejemplos clásicos de obstáculos epistemológicos, los siguientes:

- La incorporación de los números irracionales al campo numérico que implica un rompimiento con los racionales y la idea de conmensurabilidad;
- la visión global de la tangente a una curva, contra la local que se hace necesaria para adquirir la noción de derivada en un punto;
- el modelo aditivo $a+a+...+a=na$ para el modelo multiplicativo. Esta adición repetida no puede ser generalizada para introducir multiplicaciones en otros campos, por ejemplo 3,5x1,3;
- el usar la palabra 'veces' para dar significado al signo x, que pierde sentido en el producto 3x4 cuanto éste quiere significar, por ejemplo, la cantidad de maneras en que puede vestirse María, si tiene 3 camisas y 4 polleras (¿3 veces 4 polleras ó 4 veces 3 camisas?)[8].
- la creencia de que todas las funciones son continuas y diferenciables en todos sus puntos;
- identificar la noción de función con sus expresiones analíticas o sus gráficas;
- trasladar la suma de enteros a la suma de fracciones 3/4+5/3=8/7;
- la afirmación $a^0 = 0$ que proviene de considerar a multiplicada por sí misma 0 veces;
- la afirmación $(a+b)^3 = a^3 + b^3$ que proviene de trasladar a la suma, la distributividad de la potenciación hacia el producto.

Muchos autores otorgan a los obstáculos epistemológicos aspectos positivos y negativos a la vez. Nuestro aporte en este sentido viene de la mano de la psicología social a través de la llamada *resiliencia*. "El vocablo resiliencia [también resilencia] tiene su origen en el idioma latín, en el término *resilio* que significa volver atrás, volver de un salto, resaltar, rebotar" (Kotliarenco et al., 1997, p. 5), y ha sido adaptado a la psicología para caracterizar la '*capacidad humana para hacer frente a las adversidades, superarlas y salir de ellas fortalecido o incluso transformado*'. En algunos países el término se emplea únicamente en el campo de la ingeniería para describir la '*capacidad de un material de recobrar su forma original después de someterse a una presión deformadora*'.

Si bien no se adjudican los obstáculos epistemológicos a las metodologías de enseñanza ya que son inherentes a un estado *a priori* del nuevo cuerpo de conocimientos, entendemos que la resiliencia es el término más adecuado para designar la capacidad de los estudiantes, cuyo desarrollo recaería en los educadores, a través de los resultados de las investigaciones, para hacer frente a aquellos obstáculos. Esta afirmación se sustenta en la idea de que la resiliencia, que no debe confundirse con la invulnerabilidad, "distingue dos componentes: la *resistencia* frente a la destrucción, esto es, la capacidad de proteger la propia integridad bajo presión; y por otra parte, más allá de la resistencia, la *capacidad para construir* un conductismo vital positivo pese a circunstancias difíciles" (Vanistendael, 1994, en Kotliarenco et al., 1997, p. 6).

---

[8] Ejemplo tomado de Saiz (1995).

Esta capacidad dual, de resistir y construir a la vez, estaría presente en el alumno, al momento de ser enfrentado a un obstáculo que ha sido identificado como epistemológico. Cuando un aprendiz afirma que $(a+b)^3 = a^3+b^3$ está resistiendo, 'protegiendo su propia integridad', ajustando su respuesta a conocimientos anteriores, vuelve de un salto, vuelve hacia atrás. Se trata de una solución de compromiso, "una negociación que las personas hacen frente a las situaciones de riesgo" (Rutter, 1986, en Kotliarenco et al., 1997, p. 3). Cuando logra superar ese estado, es que puede construir el nuevo conocimiento, cuando *aumenta la resiliencia, la fragilidad decrece.*

II.3 La Transposición Didáctica. Praxeologías Matemáticas

Sin pretender agotar todos los adjetivos posibles, diremos que 'el saber' puede ser producido, transformado, comunicado, enseñado, aprendido, utilizado, ignorado, resistido o rechazado. En este apartado, nos ocuparemos de los cinco primeros.

El saber producido por un miembro de una comunidad científica es, en general, el resultado de un trabajo lento y prolongado, caracterizado por avances y retrocesos, pausas y fracasos, conjeturas, afirmaciones y refutaciones, alegrías e insatisfacciones, y en muchos casos, empapado de una gran dosis de intuición. Así describe Hamilton, en 1858, su hallazgo de los cuaterniones[9]:

> "Mañana será el quince aniversario de los cuaternios. Vinieron a la vida, o a la luz, completamente maduros, el 16 de octubre de 1843, cuando paseaba con la señora Hamilton hacia Dublín, al llegar al puente de Brougham. Allí, y en aquel momento, sentí que el circuito galvánico del pensamiento se cerraba, y las chispas que saltaron de él fueron las ecuaciones fundamentales que ligan *i, j, k* [los nuevos números que hacen el papel de *i* de los complejos], exactamente tal como los he usado siempre desde entonces... Sentí que en aquel momento se había resuelto un problema, que se había satisfecho una necesidad intelectual que me había perseguido por lo menos quince años." (Hamilton, 1858, en Guzmán, 2001) (Lo indicado entre corchetes pertenece al autor).

Cuando un matemático desea comunicar el saber que ha producido, se desencadena un proceso de análisis reflexivo de conceptualización que supone la desnaturalización de ese saber que consiste en desprenderse de los contextos que lo han llevado en cierta dirección y de sus motivaciones personales, en ocultar sus reflexiones inútiles, los errores cometidos y los procederes erráticos y a su vez, en encontrar la teoría más general en la que el nuevo saber que ha creado, son valederos. Este proceso se sintetiza afirmando que el productor del conocimiento despersonaliza, descontextualiza y destemporaliza lo más posible sus resultados.

[9] En el subapartado III.1.2 de este trabajo, se describe el contexto histórico-matemático en el cual Hamilton crea los cuaterniones.

De la misma manera, cuando el conjunto de todas las personas o instituciones que participan en el diseño de la ciencia que hay que enseñar, conjunto al que Chevallard (1985/1991, p. 28) denomina *noosfera*[10], deciden que un cierto contenido debe ser incorporado al *sistema didáctico* (inmerso en el *sistema de enseñanza* y a su vez, en el *sistema político*), ese saber:

> "(...) sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los *objetos de enseñanza*. El «trabajo» que transforma un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la *transposición didáctica*[11]." (*op. cit.*, p. 45).

Aquella noosfera de la que hablamos, que es la esfera donde se piensa el funcionamiento didáctico, está constituida por integrantes de las fuerzas políticas, didactas en la especialidad, autoridades educacionales, docentes, agrupaciones de padres, autores de libros de texto, editores.
Esta *reconstrucción escolar de las matemáticas*, que integra las *actividades matemáticas institucionales*, y que tiene su origen en la propia institución de producción del saber, pero prosigue en los medios cultivados, se inscribe en la llamada Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), debida al francés Yves Chevallard, que propone un modelo epistemológico caracterizado fundamentalmente por tres elementos: el *sistema didáctico* como marco sistémico de referencia; la *transposición didáctica*, como la teoría en la que enmarcar los fenómenos de tránsito del saber entre instituciones; la noción de *praxeología*, como marco conceptual que estructura la noción de saber.

La TAD (Chevallard, 1999/2002, pp. 1-6) sitúa la actividad *matemática*, y en consecuencia la actividad del *estudio* en Matemáticas, *en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales* y describe estas actividades, y el saber que de ellas emerge, en términos de *organizaciones* o *praxeologías matemáticas* que son entidades compuestas por:

a) las *tareas,* que generalmente se expresan a través de un verbo y se refieren a una labor específica [p. ej. demostrar que el conjunto de vectores $\{(1,2), (3,5), (-2,3)\} \subset R^2$ es linealmente dependiente], *tipos de tareas* relativas a un objeto preciso [p.ej. demostrar que un conjunto de vectores es linealmente dependiente] y *género de tareas* que requiere un determinativo [p. ej. demostrar]. Tanto las tareas, como los tipos de tareas y los géneros de tareas son "artefactos", "obras", *construcciones institucionales*, cuya reconstrucción en tal institución, y por ejemplo en tal clase, *es el objeto mismo de la Didáctica*.

---

[10] Según Dorier (2000, pp. 23-24), Chevallard, tomó el término 'noosphère', que literalmente significa "el lugar donde se piensa", de Teilhard de Chardin, para referirse a los diferentes lugares donde se prepara un saber con vistas a ser enseñado.

[11] Según Vergnaud et al. (coord.) (1994/1997, pp. 64, 65) el término 'transposición didáctica' fue acuñado simultanea e independientemente en Francia por Chevallard (1985), quien puso el acento en el conocimiento por enseñar, y en Suiza, por Conne (1981), que se interesó más por el conocimiento realmente enseñado, que está determinado en parte por las reacciones de los alumnos.

b) los *tipos de técnicas* (del griego *tekhnê*, saber hacer) que son las distintas maneras de realizar las tareas [p. ej. demostrar que aquel conjunto de vectores es linealmente dependiente a partir de observar que contiene más de dos vectores de R^2]. Una técnica puede no tener éxito para la totalidad de tareas de un cierto tipo, de lo cual surge cierta *jerarquía* entre las mismas. Las técnicas no son necesariamente de naturaleza *algorítmica*, aunque en determinadas instituciones, y en relación con cierto tipo de tareas, puede observarse una fuerte tendencia a la algoritmización, de la misma manera que existe un pequeño número de técnicas *institucionalmente reconocidas* en tal o cual institución.

c) las *tecnologías* que son los discursos racionales (el *logos*) sobre las técnicas, las justifican, describen, explican y aclaran para asegurarse de que permiten realizar las tareas que se pretende, esto es, las hacen inteligibles y dicen por qué la técnica es correcta [p. ej. observar que el número de vectores de nuestro conjunto es superior a dos para demostrar que se trata de un conjunto linealmente dependiente, es una técnica que queda justificada por la proposición: "en R^2, no existen más de dos vectores linealmente independientes"]. En numerosos casos, algunos elementos tecnológicos están *integrados en la técnica* (hacen y explican a la vez), como así también, hay *tecnologías potenciales* a la espera de técnicas.

d) las *teorías* (del griego *theôros*: espectador que miraba la acción sin participar) que fundamentan y organizan los discursos tecnológicos, y a la que hoy día se le asigna el sentido de "especulación abstracta". Las teorías tienen, en relación a las tecnologías, el mismo rol que las tecnologías tienen respecto a las técnicas [p. ej., la proposición "en R^2, no existen más de dos vectores linealmente independientes" puede surgir como consecuencia de la noción de cardinal de cualquiera de las bases de R^2, es decir, de su dimensión, y de la definición de independencia lineal, todo ello inmerso en la teoría general del AL].

La cuaterna compuesta por un único tipo de tareas, por al menos una técnica, una tecnología y una teoría, ha recibido el nombre de *praxeología puntual*, constituyendo el tipo de tareas y las técnicas, un bloque *práctico-técnico*, y las tecnologías y la teoría un bloque *tecnológico-teórico*. A las organizaciones centradas en una tecnología determinada, se las ha denominado *locales* y las formadas alrededor de una teoría, *regionales* (*op. cit.*).

Respecto al saber, Bosch (2000) agrega:

> "Los tipos de problemas y los tipos de técnicas constituyen el «saber-hacer» matemático, mientras que los discursos tecnológicos y teóricos conformarían el «saber» matemático propiamente dicho." (p. 2).

II.4 El Contrato Didáctico. Las Variables Didácticas

En este apartado nos referimos a dos constructos teóricos de la didáctica fundamental que permiten interpretar, analizar y explicar los fenómenos didácticos, en relación directa con el conocimiento matemático involucrado, en los procesos de gestión del estudio.

El contrato didáctico

Es muy conocido el hecho de que un grupo de investigadores franceses decidió recorrer las escuelas de Francia suministrando el problema:

"En un barco hay 7 cabras y 5 ovejas ¿Qué edad tiene el Capitán?",

y que 67 de 97 estudiantes, entre 7 y 10 años, respondieron la edad del capitán realizando operaciones con los números del enunciado, y tan sólo unos pocos dijeron que la pregunta era 'absurda' porque no tenía relación con los datos que proveía el enunciado.

Este hallazgo, que en un análisis apresurado puede apreciarse como un caso más de constatación de ausencia de razonamiento en los pequeños estudiantes y pasar a engrosar las ya numerosas estadísticas de fracaso en la enseñanza de las matemáticas, es interpretado por Brousseau como 'la respuesta a lo que el docente espera de él', ya que los alumnos presuponen que 'si el docente ha dado esa tarea, entonces esa tarea tiene sentido y es posible hallar una respuesta'. Esta situación debe enmarcarse en una distorsión de lo que se ha dado en llamar el *contrato didáctico*. Brousseau (1980, en Sarrazy, 1996, p. 86) concibió inicialmente al contrato didáctico como: "El conjunto de comportamientos (específicos de los conocimientos enseñados) del maestro que son esperados por el alumno y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro."

En el seno de la negociación del contrato didáctico tiene lugar la llamada *devolución* que es el acto mediante el cual el docente (emulando al rey que da poder a las cámaras, de donde se supone, surgió el término) transfiere a sus alumnos la responsabilidad de la resolución de un problema, a partir del cual intenta alcanzar ciertos objetivos, a la vez que transmite implícitamente: "Ya no se trata de mi voluntad, sino de lo que ustedes deben querer, pero yo les otorgo este derecho porque ustedes no pueden tomarlo por sí solos." (Brousseau, 1988, pie de p. 68). Por ejemplo, el fenómeno didáctico de la "irresponsabilidad matemática de los alumnos", que consiste en la dificultad que tienen éstos para 'hacerse cargo' de las respuestas que dan a las cuestiones matemáticas que resuelven, puede ser analizado, en lugar de buscar argumentos de origen psicológico, psicoafectivo o pedagógico, en términos de la devolución y del contrato didáctico, que asigna, casi exclusivamente al profesor, la responsabilidad de la validación[12] (Chevallard et al., 1997, p. 77; Gascón, 1998, p. 15).

[12] En este contexto, el término 'validación' es utilizado en el sentido de considerar la validez, la factibilidad de una solución. Más adelante, en la fase experimental, recurrimos a este mismo término para referirnos al análisis al que se somete un instrumento o dispositivo de recolección de datos, con relación a su potencialidad predictora de comportamientos o resultados.

Recapitulando, entre el docente y el estudiante se establecen, aunque no lleguen a explicitarse ("el maestro intenta obtener algo que no puede decir por medios que no puede enunciar" (Brousseau, 1988, p. 71)), un conjunto de cláusulas, con carácter de provisorias (pues dependerán del saber matemático en juego), donde ambos "(…) aceptan responsabilidades sobre acciones que no están en condiciones de controlar (…)" (quedando en "irresponsabilidad jurídica") (Chevallard et al., 1997, p. 220) y cuyo éxito descansa más en sus rupturas que en su cumplimiento a rajatabla. Estas son las curiosas paradojas del contrato didáctico, sin mencionar que "La negociación, por parte de los maestros, de la comprensión y el sentido plantea un verdadero problema didáctico: problema técnico y teórico del contrato didáctico." (Brousseau, 1988, p. 76). La primera paradoja a la que se enfrenta un estudiante que concibe que 'enseñar' significa que el docente le muestre cómo se resuelven las tareas que le plantea es, justamente, que el docente no satisfaga esa expectativa, pues de lo contrario, el estudiante no habrá tenido que hacer una opción entre varias estrategias, ni una interpretación, entre varias interpretaciones, con la consecuente ausencia de aprendizaje (Sierpinska, 1999, Week 3, p. 3).

El contrato didáctico se hace evidente cuando se lo quiebra; ejemplos de estas rupturas han conducido a la identificación de los fenómenos denominados por Brousseau (1990, p. 9) como efectos 'Topaze', 'Jourdain', 'de deslizamiento metadidáctico' y 'de analogía'. Abreviando, diremos que el efecto *Topaze* tiene lugar cuando el docente, en caso de fracaso, da información al alumno para hacer más fácil la respuesta, sin que éste tenga que invertir el menor compromiso con la situación. El efecto *Jourdain*, que es una forma del Topaze, se presenta cuando el profesor reconoce como muestra de conocimiento una producción que sólo comporta causas triviales, "(…) desprovista de valor, incluso a veces, de sentido." (*op. cit.*, p. 9). El efecto *de deslizamiento metadidáctico* es descripto por Brousseau (1986/2001, p. 7) así:

"Cuando una actividad de enseñanza ha fracasado, el profesor quizás intente justificarse, y para continuar su acción, toma sus propias explicaciones y sus medios heurísticos como objetos de estudio en lugar del verdadero conocimiento matemático." El ejemplo más conocido de este efecto, por su universalidad, se dio con la llamada Teoría de Conjuntos con la que se decidió "(…) enseñar el medio de enseñanza como si fuera el objeto de enseñanza (…)." (Brousseau, 1990, p. 9). Finalmente, el efecto *de analogía* se hace presente cuando, ante el fracaso en el aprendizaje, el profesor vuelve a dar a sus alumnos una 'nueva' actividad, en la que disimula su similitud con las anteriores, pero que aquél resuelve "(…) porque han reconocido índices, quizá completamente exógenos y no controlados, que el profesor quería que produjeran." Brousseau (1986/2001, p. 8).

El contrato didáctico varía, no sólo con el conocimiento matemático en juego, sino también con la situación, ya sea ésta, de enseñanza, evaluación, o exploración. Por ejemplo, mientras en el proceso de aprendizaje, el profesor interviene con aclaraciones, gestos o preguntas complementarias; en las situaciones diseñadas con la finalidad de recavar información para la evaluación de los conocimientos o las investigaciones experimentales en didáctica, existen restricciones obvias relacionadas con aquella intervención docente.

Ahora bien, el contrato didáctico no es el único que opera en las instituciones educacionales; al respecto, Chevallard et al. (1997) expresan:

> "Existe, primero, un contrato más general y visible, el contrato *pedagógico*, que regula las interacciones entre alumnos y profesores que no dependen del contenido de estudio. A su vez, el contrato pedagógico aparece como una parte específica de un contrato más amplio, el contrato *escolar*, que gobierna estas instituciones sociales particulares que llamamos *escuelas*." (p. 203).

Los mismos autores explican los marcos en que se moviliza cada uno de estos contratos, a través de un único ejemplo de situación de 'alboroto en una clase', que puede responder a distintas causas: podría tratarse de alumnos que rehuyen a la instrucción escolarizada quebrando el contrato escolar; puede ser que se revelen ante un profesor que los menosprecia o no tiene autoridad, rompiendo el contrato pedagógico; o bien, puede deberse a la ruptura del contrato didáctico por parte del profesor, que resuelve un problema con un procedimiento desconocido para ellos (*op. cit.* p. 205).

Entonces, el contrato didáctico se pone de manifiesto a través de sus rupturas y es mediante la evolución del conocimiento matemático que se reestablece, siendo una pieza fundamental en ambos momentos, ruptura y reestablecimiento, la gestión de las llamadas 'variables didácticas' que identificamos a continuación.

Las variables didácticas

Una situación de clase depende de muchas variables: las características personales del profesor, las de los estudiantes, el entorno físico e instrumentos de que se dispone, las tareas propuestas por el docente, las relaciones entre los estudiantes, la relación de los estudiantes con las tareas, las intervenciones del docente, etc.; pero, ¿cuáles pueden ser controladas por el profesor? y más aún ¿cuáles comportan un avance en el conocimiento, cuando se las manipula inteligentemente? Estas son las *variables didácticas* sobre las cuales Brousseau (1982a, en Bessot, 2003, p. 15) reporta que: "sólo a las modificaciones que afectan a las jerarquías de las estrategias las podemos considerar como variables pertinentes, a aquellas que puede manipular un profesor y que son particularmente interesantes: estas son las variables didácticas."

Las variables didácticas asumen variadas formas; puede tratarse de un dato numérico en el enunciado de un problema, de una ecuación, de una función, de una restricción en las reglas de un juego, de la organización de la clase, de un instrumento tecnológico, etc.

Por ejemplo, no es lo mismo requerir a un estudiante que "encuentre los mínimos de la función $f(x) = x^4 - 2x + 1$", que solicitar que "encuentre los mínimos de la función $g(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|$ donde $a < b < c < d$" o de la función $h(x) = e^x + x^2$".

Mientras el caso de la función *f* puede resolverse ejecutando un conjunto de reglas que arrancan anulando la primera derivada, este primer paso se torna ineficaz en el caso de la función *g*, que debe ser previamente trabajada por intervalos, para luego derivar por tramos y evaluada globalmente para detectar los mínimos; en el caso de la función *h*, si bien es eficaz la regla de la derivada primera, el hallazgo de sus raíces no es inmediato, y este nuevo desafío puede constituir una buena oportunidad para explorar métodos de separación, acotación y aproximación de raíces reales, si no se los conoce con anterioridad. Este hecho permitiría incluso dar categoría de *ejercicio de aplicación* al primero de los casos, y de *problemas*, a los dos restantes, aunque lo que nos interesa aquí es destacar que, en nuestra comparación, el cuerpo de la consigna no ha variado y que la variable didáctica es la función.

Entonces, una variable es didáctica en tanto su manipulación, no sólo permite, sino también asegura, un salto cognitivo que transita previamente por la desestabilización del estudiante que se ve obligado a ponerse a pensar cómo ha de resolver la nueva tarea.

De acuerdo a lo expresado por Ruiz Higueras (2001, p. 125), las variables didácticas constituyen en la enseñanza *elecciones fundamentales* y al respecto agrega:

> "La construcción de situaciones de enseñanza-aprendizaje en la que se determinen variables didácticas que, controladas por el profesor, permitan a los alumnos realizar elecciones y anticipaciones, tomar decisiones, llevar a cabo acciones, comunicaciones, etc. que, posteriormente puedan probar y validar, es una tarea compleja, fruto de un serio análisis didáctico y de una elaborada ingeniería didáctica." (*op. cit.*, p. 126).

II.5 La Teoría de los Campos Conceptuales

Consistentemente con su propia teoría, el investigador francés Gérard Vergnaud parece lograr completar la construcción de la *Teoría de los Campos Conceptuales* (TCC), a través de un extenso y pausado proceso que abarca un período de más de veinte años, durante el cual ha refinado y ampliado las ideas que estructuran esta teoría cognitiva que rescata de la epistemología genética de Piaget las ideas de adaptación, desequilibración, re-equilibración, y el concepto de esquema, y de Vygotski, su enfoque sociocultural que le otorga al lenguaje y a la comunicación un lugar fundamental en la construcción de los conocimientos, y por ende, en las investigaciones en didáctica de las ciencias. Es una teoría psicológica porque se ocupa de los procesos mismos que el individuo pone en juego para aprender.

La TCC pone el acento en los procesos de conceptualización desarrollados en un área determinada y durante un largo período, lo cual obliga a analizar las filiaciones y rupturas entre las competencias desarrolladas progresivamente por los alumnos, así como las concepciones asociadas a estas competencias, ya sean explícitas o implícitas, lo que puede lograrse estudiando un conjunto diversificado de situaciones, esquemas, representaciones simbólicas, lingüísticas y no lingüísticas para comprender los vericuetos de aquellos procesos (Vergnaud, coord., 1994/1997, pp. 74-75).

Por otra parte, Vergnaud (1981/1991, pp. 10-13) explica que para conducir un estudio científico de los problemas de la enseñanza de las matemáticas, es necesario encarar un análisis profundo de las nociones y de su complejidad creciente, de las labores escolares y de los procedimientos, involucrando estos últimos al análisis de los aciertos y errores de los estudiantes. Sin embargo, también advierte que tanto las nociones, como los caminos y los medios están profundamente enraizados en la *representación* que el estudiante se hace de la situación, y que esta noción de representación no se reduce a un sistema simbólico que remite al mundo material, sino que los *significantes* (símbolos o signos) representan *significados*, que encierran en sí mismos, un carácter cognoscitivo y psicológico, lo que sintetiza así:

> "El símbolo no es más que la parte directamente visible del *iceberg* conceptual; la sintaxis de un sistema simbólico no es más que la parte directamente comunicable del campo de conocimiento que él representa. Esta sintaxis no sería nada sin la semántica que la produjo; es decir, sin la actividad práctica y conceptual del sujeto en el mundo real." (p. 13).

Campo Conceptual

Una de las tantas definiciones de la noción de *campo conceptual* que podemos encontrar es la siguiente: "Llamamos campo conceptual a un conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica esquemas, conceptos y teoremas en estrecha relación, así como las representaciones lingüísticas y simbólicas que pueden utilizarse para simbolizarlos." (Vergnaud, coord., 1994/1997, p. 75).

Consideramos pertinente brindar, a continuación, las respectivas interpretaciones que Vergnaud confiere a las ideas que componen la definición anterior.

Esquema

Es ésta la pieza vital en el andamiaje de la teoría que el mismo Vergnaud (*op. cit.*) define así: "Llamamos *esquema* a la organización invariable de la conducta para una clase de situación dada."

Se trata de un concepto general, que opera como una totalidad dinámica funcional modelada por la intención del sujeto y estructurada por los medios que éste emplea para alcanzar su objetivo y que atañe a la vez, a la organización de los gestos de la vida cotidiana y de los gestos profesionales, a la organización de las formas lingüísticas y enunciativas del diálogo o a las operaciones mentales que permiten tratar problemas científicos o técnicos de cierta clase.

El autor distingue cuatro tipos de elementos organizadores, constitutivos de los esquemas:

- el objetivo y las anticipaciones;
- las reglas de acción y de encadenamiento condicional de las operaciones, cuya función propia es generar la conducta;
- las invariantes operatorias, que le permiten al sujeto seleccionar la información pertinente y tratarla;

- las inferencias, cuya efectuación es función de las características particulares de la situación hallada; a partir de los datos y del objetivo, se opera un cálculo en situación que determina, en especial, las reglas de acción utilizadas (p. 68).

A modo de ejemplo, el autor brinda las dos grandes categorías de esquemas que pueden distinguirse en álgebra: los "esquemas de ecuación" que le permiten al alumno producir la representación algebraica de un problema y que consisten en seleccionar la información, retener sólo las relaciones numéricas pertinentes y codificarlas en forma algebraica; y los "esquemas de tratamiento", que le permiten tratar las formas algebraicas en sí mismas y consisten en escribir ecuaciones equivalentes, gracias a manipulaciones legítimas de las igualdades (*op. cit.*, p. 72).

Conceptos en acto y teoremas en acto: Se designan en forma global como *invariantes operatorias* y aluden a los conocimientos contenidos en los esquemas. Se trata de conocimientos matemáticos implícitos en los cuales se apoya el proceso de conceptualización de lo real. La expresión "en acto" pretende significar que, no por ser captados y utilizados por los alumnos, éstos son necesariamente capaces de explicarlos o justificarlos. Se reservan, así, los tradicionales términos *concepto y teorema* para designar conocimientos explícitos y demostrados. Los "conceptos en acto" no son ni verdaderos ni falsos, sino sólo pertinentes o no. Su función es, ante todo, una función de selección: retener de la situación presentada lo que es necesario y suficiente para alcanzar el objetivo; los "teoremas en acto" son proposiciones aceptadas como verdaderas en la realidad. Ambos, progresivamente, pueden convertirse en verdaderos conceptos y teoremas científicos (*op. cit.*, pp. 69-70).

Hacemos aquí un 'paréntesis', con el objeto de explicitar un punto de coincidencia que Godino (2001) señala, salvo sutiles divergencias, que existiría entre la Teoría de las Funciones Semióticas (TFS) que él propone, la TCC y la TAD. Al analizar la noción de esquema de la TCC, dice:

> "La noción de esquema incorpora elementos actuativos (técnicas o modos de actuar) y elementos discursivos implícitos (conocimientos en acto); pero además un esquema está asociado a una clase de situaciones, entendidas como tareas. Nos parece que este constructo puede desempeñar un papel similar a la noción de «sistema de prácticas personales ligadas a un tipo de problemas» (Godino y Batanero, 1994), y por tanto, también a lo que podría denominarse una «praxeología personal» de carácter puntual o local." (p. 9).

Dado que la noción de praxeología es un constructo teórico básico de la TAD, Godino está estableciendo en este párrafo un paralelo entre el "sistema de prácticas personales" de la TFS, los "esquemas" de la TCC y las "praxeologías puntuales o locales", en este caso, calificadas como "personales", de la TAD. Tampoco se nos escapa la equivalencia que encuentra entre la noción de campo conceptual y la de praxeología matemática global, y así lo reporta:

> “(...) la noción de campo conceptual, que de una manera implícita también incluye los algoritmos y procedimientos de resolución de los tipos de problemas que se incluyen en los campos conceptuales, podría asimilarse a la noción de «praxeología matemática global».” (*op. cit.*, p. 13).

De la misma manera, asimila las “situaciones” de Vergnaud a las “tareas” de Chevallard cuando sostiene: “Es claro que la noción de situación que usa Vergnaud es la misma que la noción de tarea que se usa en la TAD.” (*op. cit.*, p. 13), apreciación con la que coincide Moreira (2002) cuando expresa: “El concepto de situación empleado por Vergnaud no es el de situación didáctica, pero si el de tarea (…).” (p. 5).

Más adelante, en nuestro trabajo, explicitaremos el uso que daremos a estas observaciones.

Concepto

La noción de ***concepto*** es definida por Vergnaud (1983a, p. 393; 1988, p. 141; 1990, p. 145; 1993, p. 8; 1997, p. 6, en Moreira, 2002, p. 5) como una terna de conjuntos, **C = (S, I, R)** donde:

S (*referente* del concepto) es un conjunto de situaciones que da sentido al concepto;

I (*significado* del concepto) es un conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones) sobre las cuales reposa la operacionalidad del concepto, o un conjunto de invariantes que pueden ser reconocidos y usados por los sujetos para analizar y dominar las situaciones del primer conjunto;

R (*significante* del concepto) es un conjunto de representaciones simbólicas (lenguaje natural, gráficos y diagramas, sentencias formales, etc.) que pueden ser usadas para indicar y representar esas invariantes y, consecuentemente, representar las situaciones y los procedimientos para lidiar con ellas.

Pero ¿qué es el *sentido* para Vergnaud?:

> "El sentido es una relación del sujeto con las situaciones y con los significantes. Más precisamente, son los esquemas, es decir los comportamientos y su organización, evocados en el sujeto individual por una situación o por un significante, lo que constituye el sentido de esta situación o de este significante para este sujeto. El sentido de la adición para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que puede poner en práctica para tratar las situaciones con las cuales es confrontado, y que implican la idea de adición; y es también el conjunto de esquemas que él puede accionar para operar sobre los símbolos numéricos, algebraicos, gráficos y lingüísticos que representan la adición.” (Vergnaud, 1990, p. 158).

Más aún, Vergnaud (coord., 1994/1997, p. 73) incorpora un nuevo matiz al hablar de dos componentes que considera indisociables, el *script-algoritmo*, donde *script* designa el componente del esquema que atañe a los *significantes* y los juegos de escritura; *algoritmo* designa el componente del esquema que atañe a los *significados* matemáticos y que controla el progreso del proceder. La expresión *script-algoritmo* permite llamar la atención sobre el hecho de que, en ciertos esquemas, los significantes tienen un papel protagónico, ya que constituyen la materia sobre la que operan las reglas, por ejemplo, las cuatro operaciones de la aritmética en su forma escrita y los esquemas de tratamiento de las ecuaciones, son scripts-algoritmos.

Asimismo, describe tres funciones de los significantes, la que concierne a la comunicación, la de organizar el cálculo y mantener disponibles resultados intermedios y la función de acompañamiento del pensamiento.

II.6 Los Registros de Representación Semiótica

> "La comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de, al menos, dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión." (Duval, 1998, p. 186).

Es este uno de los pensamientos más divulgados del investigador Raymund Duval en el seno de su Teoría de las Representaciones Semióticas. A continuación, aclararemos las nociones en que esta afirmación se basa y el alcance de su significado.

Los objetos matemáticos, como un número, un cuadrado, una operación, una función, no son objetos físicos ni reales, sino mentales e ideales, creados por el hombre para modelizar la realidad, y por lo tanto, no son directamente accesibles por la percepción. Los seres humanos, al tomar 'contacto' con ellos, construimos una *representación mental* de cada objeto, que varía fuertemente de persona a persona, que depende del contexto, y que se corresponde con las concepciones que ese individuo se ha formado del mismo, es decir, con el *significado* que asume ese objeto para él. Cuando las concepciones construidas en relación con un objeto son compatibles con las intenciones matemáticas de su creador, puede decirse que el individuo lo ha aprehendido, se ha apropiado del mismo. El significado de un objeto se amplía y enriquece a través del tiempo y a medida que se pueden concebir otros objetos matemáticos vinculados de algún modo, a aquél.

Sin embargo, ese acto cognitivo que permite la aprehensión conceptual de un objeto, es decir, la *noesis*, no es posible si las representaciones mentales no son precedidas por *representaciones semióticas* que consisten en "producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…) (…)" (Duval, 1995/1999, p. 14).

Estos signos o símbolos pertenecen a *sistemas semióticos de representación* que tienen reglas claras de significancia y de funcionamiento. De esta manera, los *significantes* (símbolos) evocan o sustituyen a los *significados* (entidades conceptuales) para hacerlos presentes, ya sea con la finalidad de manipularlos para nosotros mismos o para comunicar una idea a un semejante[13,14].

Resulta entonces que la noesis y la *semiosis* no son independientes, ni es la noesis la que precede a la semiosis, más aún, "(…) no hay noesis sin *semiosis*; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la *noesis*." Ésta constituye otra importante conclusión a la que arriba Duval (*op. cit.*, p. 15), a través de postular la existencia del mundo de las representaciones mentales y el de las representaciones semióticas y sosteniendo que el desarrollo de aquellas se efectúa como una interiorización de estas últimas.

Pero, al decir del mismo Duval (*op. cit.*, p. 29), un sistema semiótico es considerado pertinente en relación con la dupla conocimiento-representación si permite cumplir tres actividades cognitivas fundamentales:

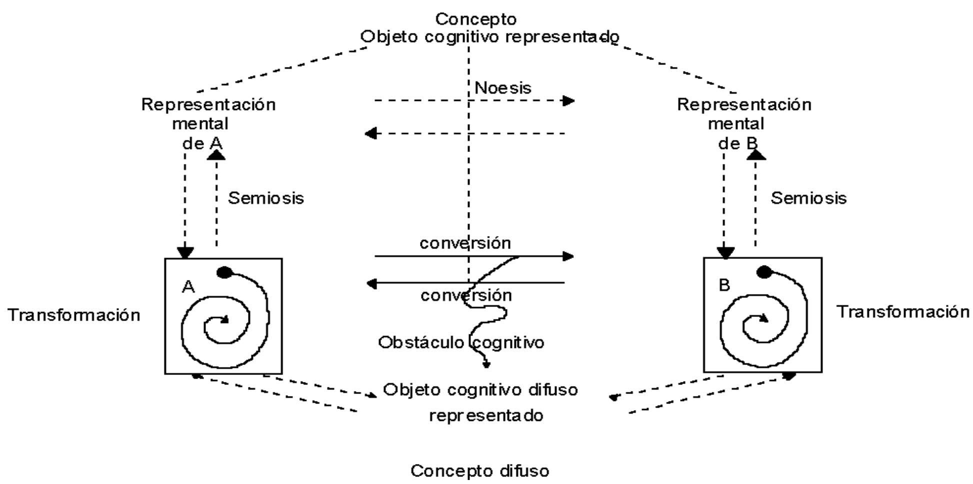
- Constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una *representación de alguna cosa* en un sistema determinado.
- *Transformar* las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimientos en comparación con las representaciones iniciales.
- *Convertir* las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

En este sentido, son sistemas semióticos: el lenguaje natural, las lenguas simbólicas, los gráficos, las figuras geométricas, etc.; y no lo son: el lenguaje morse y la codificación de tránsito. Para distinguirlos, este autor, denomina *registros de representación semiótica* a aquellos sistemas semióticos que posibilitan las tres actividades descriptas (p. 29). También aclara que la "distinción mental/externo se refiere a su modo de producción y no a su naturaleza o a su forma." (Duval, 1999, p. 5), y que "no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación" (…) "un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes." (*op. cit.*, p. 13).

[13] En realidad, según Duval (1995/1999, p. 63) la cuestión es más compleja, existen estructuras *diádicas* y *triádicas* de representación. La diádica sólo conserva dos elementos constitutivos de la significancia de los signos, el objeto y el significante (notaciones de funciones, vectores, operadores); la triádica maneja el objeto, el significante y el significado (escritura decimal, fraccionaria).
[14] Chevalard (1996) introduce la noción de *instrumentos semióticos*, que puede aparecer como complementaria de las representaciones, distinguiendo, en los objetos ostensivos (aquellos que se pueden manipular como las notaciones y los gráficos), su valencia *semiótica*, que permite ver lo que se ha hecho, y su valencia *instrumental*, que permite ver lo que se puede hacer.

Ahora, el pensamiento de Duval, que encabeza este apartado, toma sentido, y se refuerza con el de Hitt (1998), que siguiendo esta línea expresa:

> "(…) un concepto se va construyendo mediante tareas que impliquen diferentes sistemas de representación y promuevan la articulación coherente entre representaciones (ver diagrama de la Figura 5). Desde esta orientación teórica, el conocimiento de un individuo sobre un concepto es estable si él o ella es capaz de articular diferentes representaciones del concepto libre de contradicciones. Así, en la resolución de problemas, las representaciones están en el corazón mismo de la actividad matemática."



"Figura 5. Esquema general sobre la construcción de conceptos"

Lo que hemos mostrado hasta aquí, no es más que la punta del iceberg que conforman las numerosas investigaciones que tratan las representaciones semióticas y que, debido a su complejidad, han originado importantes discusiones entre los que las dirigen.

Uno de los nodos de controversia es casualmente: ¿qué se entiende por *visualización* en matemática? Zimmermann & Cunningham (1991, p. 1) utilizan el término visualización para "describir el proceso de producir o usar figuras geométricas o gráficos en representación de conceptos matemáticos, principios o problemas, ya sea a mano o por computadora." Solano & Presmeg (1995, p. 2) definen *imagen* como toda construcción mental de un objeto a través del uso de uno o más sentidos, donde la mente juega un rol activo; la *imaginaria*, como la colección de una o más imágenes; y la visualización como la *relación entre imágenes*. Bishop (1989, p. 7, en Arcavi, 1999, p. 55) afirma que una manera de caracterizar la visualización y su importancia es interpretarlos respectivamente, como un 'nombre' (el producto, la imagen visual) y como un 'verbo' (el proceso, la actividad); McCormick et al (1987, p. 3, en Arcavi, p. 55) opinan que "La visualización ofrece un método de ver lo no visible". Para el mismo Arcavi (1999), que admite haber combinado las definiciones de Zimmermann et al. (1991. p. 3) y Hershkowitz (1989, p.75):

> “La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo de y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento.” (p. 56).

Duval (1995/1999) distingue enfáticamente entre visión (no más ver) y visualización (ver para entender). Ésta presupone identificar en una *imagen* (p. ej. en un conjunto trazo-ejes que representa a un “objeto” descrito por una expresión algebraica), las *variables visuales* que entrañan a la vez, una modificación en la escritura algebraica y una modificación en la imagen; el reconocimiento de las *unidades significativas* que se corresponden con cada símbolo del registro algebraico y su correspondencia con aquellas variables. Estas discriminaciones le permiten realizar lo que él llama “*análisis de congruencia*[15] entre dos registros de representación de un objeto o de una información.” En este análisis “se trata de poner en correspondencia las variables visuales pertinentes de la gráfica y las unidades significativas de la escritura algebraica.” (Duval, 1988/1992, p. 127-128).

Para aclarar ideas, Duval distingue en la dupla ‘trazo recta-y=*ax*+*b*’, tres variables (omitiendo los casos de rectas paralelas a los ejes): 1) *el sentido de la inclinación del trazo* (que se corresponde con la unidad significativa ‘signo del valor a’, que asume dos valores); 2) *los ángulos del trazo con los ejes* (que se corresponde con la unidad significativa *a*, en comparación tricotómica con el 1) y 3) *la posición del trazo respecto al origen del eje vertical* (que se corresponde con la unidad significativa *b*, en comparación tricotómica con el 0) (Duval, 1988/1992, p. 128-129).

A pesar de las aparentes diferencias, todos los investigadores coinciden en que la visualización está al servicio de la resolución de problemas matemáticos; que ocupa un papel central en la inspiración creativa de las soluciones; que acompaña eficazmente a los desarrollos simbólicos[16]; que compromete a los estudiantes con los significados; que permite resolver los conflictos entre las soluciones simbólicas, posiblemente correctas, y las intuiciones, posiblemente incorrectas; en fin, coadyuva fuertemente a la construcción del conocimiento matemático, pero a la vez, puntualizan que la visualización requiere de un entrenamiento específico para que resulte posible y eficaz, sin dejar de advertir sus serias limitaciones[17].

---

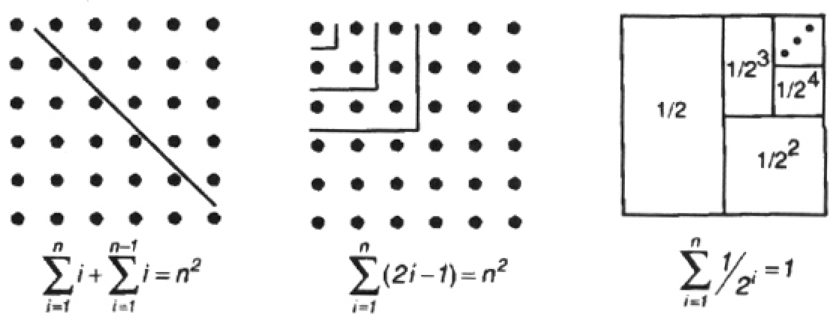
[15] Describiremos con más detalle este análisis en el subapartado IV.2.3.2.

[16] Ver, a modo de ejemplo, el artículo de Cantoral y Farfán (1998) *Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Introducción al Análisis*, ganador del Premio Internacional de Investigación en Educación Matemática organizado por la Sociedad Thales en España, donde se explica cómo, la visualización de las gráficas de las funciones involucradas, permite orientar la búsqueda de la solución de desigualdades complejas tales como $\left(\left|x-a\right|+\left|x-b\right|\right)/\left(\left|x+b\right|+\left|x+a\right|\right)\leq kx$

[17] Nos referimos a la necesidad de trabajar con los alumnos qué información provee un dibujo y cuál, no. A modo de ejemplo casi anecdótico y que llama a la reflexión, comentamos el caso de la respuesta de un niño de 10 años, durante una prueba de conocimiento que nos tocó en suerte evaluar. Ante una consigna que contenía un dibujo geométrico y que, entre otros datos decía textualmente: “Si el segmento AB mide 3 cm, entonces halla el área del triángulo ABC”; su respuesta fue: *“como el segmento AB no mide 3 cm, entonces no hallo nada”*.

Sin embargo, nuestra historia docente, la de nuestros colegas, y los trabajos de investigación nos dan cuenta de la renuencia de nuestros estudiantes a considerar las representaciones visuales como un excelente complemento en los procesos de resolución de problemas. En este sentido, resulta interesante revisar el aporte de Eisenberg y Dreyfus (1991, p. 30) que identifica tres tipos de razones por las cuales se supone que los estudiantes evitan la visualización: la *cognitiva* (lo visual es más difícil de comprender); la *sociológica* (lo visual es más difícil de enseñar); y la tercera, relacionada a la creencia sobre la *naturaleza de la matemática* (lo visual no es matemático)[18]. La segunda de las razones apunta casualmente al docente, en una supuesta actitud de no favorecer el uso de la visualización en las clases, aunque paradójicamente, esos mismos docentes, y por supuesto, los matemáticos, basan sus deducciones analíticas en abundantes representaciones visuales. Nuevamente estamos en presencia del fenómeno de la *transposición didáctica* introducido por Chevallard, que hemos presentado en la sección *II.3* del presente trabajo, y debido al cual el conocimiento sufre una transformación para ser enseñado, de lo que resulta un saber linealizado, compartimentado y libre de los elementos cruciales que ayudaron a construirlo (*op. cit.*, p. 32).

No obstante este escenario desfavorable ¿quién puede negar la potencia de las configuraciones que siguen "para crear [en los alumnos] la sensación de auto evidencia e inmediatez" (Fischbein, 1987, p. 101) de las propiedades que evocan, y animarlos a intentar una gélida demostración por inducción?



Extraído de Eisenberg et al. (1991, p. 31)

> "*Pero a pesar de la importancia obvia de las imágenes visuales en las actividades cognitivas del ser humano, la representación visual sigue siendo un 'ciudadano de segunda clase', tanto en la teoría como en la práctica de las matemáticas*." (Arcavi, 1999, p. 65).

[18] Esta creencia, que tiene sus raíces en la llamada era Bourbaki, no es obviamente compartida por didactas como Guzmán (1996), que afirma: "Que la visualización constituya un aspecto extraordinariamente importante de la actividad matemática es algo totalmente natural si se tiene en cuenta la naturaleza misma de la matemática." (Cap. 0, p. 1)

Capítulo III
El estado del conocimiento

III.1 Análisis histórico-epistemológico del concepto de Dependencia Lineal. Reseña histórica del Álgebra Lineal

El objetivo de la presente sección es dar respuesta a la pregunta 1, planteada en la sección I.2, p. 6, llevando a cabo aquello cuya necesidad y pertinencia se ha expuesto en el apartado II.2, pp. 12-15 de este trabajo, acerca de la identificación de los nodos de conflicto cognitivo que hubieron de superar los matemáticos en su camino hacia el logro del conocimiento científico de los conceptos que nos ocupan, para luego confrontar dichos obstáculos históricos con los del aprendizaje actual.

En este contexto, indagamos respecto a qué problemas han generado la necesidad de aquellos conocimientos y los momentos cruciales de ruptura que marcan el tránsito de viejas a nuevas formas de conocimiento.

Consideramos al investigador Jean Luc Dorier, de la Universidad de Grenoble, Francia, como uno de los más proficuos estudiosos de la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal. Entre sus numerosos trabajos puede encontrarse el artículo *A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory*, publicado en 1995 en la Revista Historia Mathematica, en el que presenta una visión general sobre la génesis de los conceptos elementales de la teoría de los espacios vectoriales, los principales trabajos que se han desarrollado en este sentido y en el cual se analizan sus interacciones y las grandes líneas de evolución. También tiene publicada, en 1996, en las Actas de la Séptima Conferencia del Sudeste Asiático, la comunicación titulada *Sur les concepts d'indépendance et de dépendance linéaires, Approches didactique et épistémologique*. Ambos escritos, constituyen la fuente principal de la reseña que presentamos a continuación.

III.1.1 De los determinantes al rango, pasando por la dependencia

En el primero de los artículos citados, el autor reporta (p. 228) que si bien Leibniz [1] en 1693, en una carta dirigida al Marqués de l'Hospital y que se dio a conocer en 1850, había dado la primera anotación con índice doble de un sistema de ecuaciones lineales y una regla para calcular el determinante, fue Gabriel Cramer [2] en 1750 quien preparó el marco para esta teoría, y recién en 1815, Carl Friedrich Cauchy [3] quien introdujo el término ‘determinante’. Es por ello que normalmente se hace referencia al texto de Cramer como el punto de partida de la teoría de determinantes[19].

[19] Muchos historiadores coinciden en que fue el japonés Takakasu Seki Kôwa (1642–1708) quien utilizó por primera vez los determinantes en un escrito del año 1683 intitulado *Métodos de solución de problemas simulados* y que incluso, sus desarrollos fueron más generales que los de Leibniz.

Casualmente, es en el contexto de la llamada paradoja de Cramer relacionada con las curvas algebraicas, identificada por MacLaurin en 1720, y reformulada por el mismo Cramer [2] en 1750, que Euler [4] describe, también en 1750, que “n ecuaciones podrían no ser suficientes para determinar n valores”, lo que a criterio de Dorier (1995a, p. 229), constituye uno de los primeros vestigios en los que la cuestión de la *dependencia de ecuaciones lineales* es vinculada a la solución de los sistemas de ecuaciones. En épocas donde la única preocupación de los matemáticos consistía en resolver estos sistemas, Euler brindó algunos ejemplos para mostrar que una ecuación podría estar ‘comprendida’ en una o algunas otras, dando así un acercamiento más cualitativo a la cuestión.

Euler relata el caso de dos ecuaciones afirmando que:

> “No es posible determinar las dos incógnitas x e y, pues al eliminar x, la otra desaparece también y queda una ecuación idéntica (identidad 0=0) de la cual no puede ser deducida. La razón para tal incidente es en principio muy obvia. Como la segunda ecuación puede ser escrita en la forma $6x - 4y = 10$, que no es más que el doble de la primera $3x - 2y = 5$ y que de ésta no difiere en nada.” (Euler [4, 226], en *op. cit.*, p. 229).

Luego de tratar un ejemplo de tres ecuaciones con tres incógnitas y otro, de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, Euler concluye con una declaración general:

> “Cuando uno dice que para determinar *n* incógnitas, es suficiente tener *n* ecuaciones que dan sus relaciones mutuas, debe ser añadida la restricción que ellas son todas diferentes o que ninguna es limitada [*enfermée* (encerrada)] en las demás.” (Euler [4, 228], en *op. cit.*, p. 230).

Varias cuestiones del escrito de Euler sorprenden a Dorier:

1. que no defina claramente el alcance de las palabras ‘comprendidas’ o ‘limitadas’ en términos de combinaciones lineales;
2. que aparentemente identifique al proceso final de eliminación y sustitución como causa del ‘incidente’ de que una o varias incógnitas queden indeterminadas;
3. que si bien la situación describe, en un contexto moderno, una o más relaciones lineales entre las ecuaciones, que a la sazón no pudieron pasarle desapercibidas, no sea éste el significado dado por Euler, es decir, en su escrito, no hay nada lineal *a priori*.

No obstante a que Euler no define a la dependencia lineal tal como la conocemos hoy en día, Dorier reconoce en sus argumentos:

1. que su *acercamiento es altamente intuitivo* y satisfizo su objetivo;
2. una aproximación a lo que él denomina la *dependencia inclusiva* que queda amarrada al contexto de las ecuaciones lineales y que considera difícilmente transferible a otros contextos, como las n-úplas;

3. una intuición empírica de la noción de *rango*.

Según relata Dorier (1996, p. 153), durante casi un siglo, las preguntas relacionadas con los sistemas de ecuaciones lineales indeterminados e incompatibles fueron descuidadas, mientras que es sólo a través de estas preguntas que uno puede acercarse a las nociones de dependencia y rango. Es así que esta concepción de la dependencia inclusiva dominó hasta el final del siglo XIX y constituyó un freno para el estudio teórico de los sistemas de ecuaciones lineales, y en particular para la explicitación del concepto de rango, a la vez que se articula con el auge de los determinantes, que se convirtieron en una potente herramienta para resolver problemas lineales.

Es en este contexto en que, tiempo después, la idea de la dependencia inclusiva se conecta a la nulidad del determinante principal de un sistema cuadrado de ecuaciones lineales y se enfoca la mirada hacia el orden del máximo menor no nulo, vinculado con el 'tamaño' del conjunto solución del sistema en relación con el número máximo de ecuaciones independientes. En este sentido, el acercamiento de Stanley Smith [6], en 1861, marcó un paso fundamental cuando demostró que aquel orden máximo también está relacionado con el número máximo de soluciones independientes (Dorier, 1995a, p. 231).

Desde una aproximación epistemológica, el mismo autor lista tres fuentes principales de obstáculos y dificultades para concebir el concepto de rango:

1. el reconocimiento de su invarianza que era, si no inadvertida, por lo menos se asumió sin necesidad de prueba,
2. la posibilidad de definir de la misma manera la dependencia lineal entre las ecuaciones y las n-úplas y
3. la anticipación del concepto de dualidad y la consideración de todos los sistemas de ecuaciones que tienen el mismo conjunto de soluciones.

Frobenius [7], en 1875, logra superar estos obstáculos en un texto en el que comienza dando la definición moderna de la independencia lineal (para ecuaciones y n-úplas) sin uso de determinantes y donde brinda una explicación muy completa del rango, que se convertirá, rápidamente, en un concepto central en todas las cuestiones lineales y que fuera desarrollado a su vez, entre 1840 y 1880, por varios matemáticos de la época como Sylvester, Cayley, Baltzer, Trudi, Dodgson, Rouché y Fontené. Fue también Frobenius [8] quien, en un artículo de 1879, además de introducir la idea de 'sistema asociado' a uno dado, según si los coeficientes de sus ecuaciones constituyen una *base* de las soluciones del sistema original, usó por primera vez el término de *rango* y lo definió así:

> "Cuando en un determinante, todos los menores de orden (m+1) desaparecen, pero aquellos de orden m no son todos cero, yo llamo rango [Rang] del determinante al valor de m." (Frobenius [7, 1], en Dorier, 1995a, p. 232).

Ante esta evolución de las ideas, Dorier (1996) enuncia lo que, a nuestro entender, constituye un elemento más que otorga sentido y avala la pertinencia de nuestro trabajo:

> "Uno puede concluir por consiguiente, que la definición formal de la dependencia lineal, que es el único medio para entender de la misma manera a todos los objetos bajo la mirada de sus relaciones lineales, es un punto fundamental en la génesis del álgebra lineal." (p. 153).

Continuando con la reseña histórica, Dorier (1995a, p. 233) reporta que entre 1886 y 1891 Alfredo Capelli y Giovanni Gabrieri complementaron estos resultados demostrando que:

1. Cualquier sistema de rango r es equivalente a un sistema triangular de *r* ecuaciones.
2. El rango de las columnas de una matriz es el mismo que el rango de sus filas.
3. Un sistema de ecuaciones es consistente si y sólo si el rango de la serie de sus coeficientes es el mismo que el rango de la serie aumentada con la columna de los segundos miembros.

Asimismo puntualiza que, si bien en la teoría axiomática de espacios vectoriales el concepto de rango es inseparable del concepto de *dimensión*, que es una síntesis de las relaciones entre los conceptos de *generador* y dependencia, el rango es importante, aún hoy, en muchos problemas del álgebra lineal, a pesar de que los determinantes mantuvieron su protagonismo durante dos siglos y le brindaron su soporte[20].

Apartándonos por un momento del autor Dorier y con el objeto de ampliar los resultados de la exploración de la génesis de las ideas centrales de este trabajo, diremos que también en el contexto de las ecuaciones lineales simultáneas, existen hallazgos de antecedentes que se remontan alrededor del año 300 a. c. Los chinos, entre 200 y 100 a. C., se aproximaron mucho más que los babilonios a las matrices y a los determinantes. De hecho, en el Capítulo 8, bajo el título "Cálculo por tablas cuadradas", del libro *Nueve Capítulos de Arte Matemático* (en O'Connor, J. & Robertson, E., 1996a, 1996b), conocido también como *Jiuzhang suanshu* y escrito durante la dinastía Han, los chinos dan el primer ejemplo de la utilización de las matrices y su manipulación. Puede verse en las tablillas que se encontraron, el enunciado del problema:

> *Hay tres tipos de maíz de los cuales, tres paquetes del primero, dos del segundo, y uno del tercero, hacen* 39 *medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero, hacen* 34 *medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero, hacen* 26 *medidas. ¿Cuántas medidas de maíz contienen los paquetes de cada tipo?*

O'Connor (1996a) sigue relatando que el autor de tales tablillas hace algo absolutamente notable. Instala los coeficientes del sistema de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas en forma de tabla (que Sylvester, en 1850, denominaría matriz, por primera vez):

[20] En la actualidad, el valor matemático, y por ende didáctico, de los determinantes, se debate entre sus vehementes detractores y defensores, lo que puede apreciarse en Axler (1995) y Tee (2004).

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Pero más notable aún para la época, es que el autor manda al lector a multiplicar la columna del medio por 3 y restar la columna de la derecha *tantas veces como sea posible*. Luego, a partir de 3 veces la primera columna, restar tantas veces como sea posible, la columna de la derecha, con lo que se obtiene:

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

Manda ahora multiplicar la primera columna por 5 y entonces restar la columna del medio tantas veces como sea posible, con lo que se obtiene:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Luego de lo cual afirma que, a partir de allí, se puede encontrar la solución para el tercer tipo de maíz, luego para el segundo, luego para el primero, por sustitución posterior.

En el mismo Capítulo 8 y junto al problema de los tipos de maíz, pueden encontrarse otros 17 que se reducen a resolver sistemas de ecuaciones lineales simultáneas, de hasta seis ecuaciones con seis incógnitas, haciendo uso del método de la matriz aumentada, y cuya única diferencia con el método ahora conocido como eliminación gaussiana, que no llegó a ser difundido hasta principios del siglo XIX, es que los coeficientes se alistan por columnas en lugar de filas, ya que también incluyeron números negativos en sus tablas, lo que no se observa en las que aquí exhibimos.

III.1.2 La búsqueda de un análisis geométrico intrínseco

Reporta Dorier (1995a) que el advenimiento del método analítico, presentado por separado por René Descartes en su *Géométrie* [9] y Pierre de Fermat en *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* [10], organizó la geometría según un criterio diferente, pero este método no convenció a Leibnitz, que en 1679 escribió una carta a Christian Huygens, que fue publicada recién en 1833, en la que expresaba:

> "Todavía no estoy satisfecho con el álgebra porque esto no proporciona los métodos más cortos o las construcciones más hermosas en geometría. Por eso creo que, por lo que a la geometría concierne, necesitamos todavía otro análisis que es claramente geométrico o lineal y que expresará la situación directamente como el álgebra expresa magnitudes." (Leibnitz [1, 2:18-19], en *op. cit.*, pp. 233-234).

Si bien Leibniz fracasó en su intento, su preocupación fue compartida por varios matemáticos que, desde principios del siglo XIX, comenzaron afanosamente la búsqueda de un *análisis geométrico intrínseco*, en franca crítica a los métodos analíticos que permitían, en una demostración geométrica, por ejemplo, la elección arbitraria de un sistema de coordenadas, lo cual constituía un verdadero problema filosófico.

Los primeros acercamientos a un análisis bidimensional geométrico, que ciertamente se tropezaron con el escollo de la multiplicación, se gestaron en la necesidad de legitimar los números complejos, que han sido tratados, en al menos, cinco trabajos históricos de matemáticos prácticamente desconocidos, y que finalmente fueron aceptados entre los matemáticos luego de conocerse los escritos de Carl Friedrich Gauss alrededor de 1831 [11] y Cauchy, en 1849 [13] (*op. cit.*, pp. 234-235).

Algunos de aquellos autores no dejaron de intentar la generalización a la geometría espacial, que fue lograda al mismo tiempo por Ferdinand Möbius y Giusto Bellavitis, sentando así la base de la geometría vectorial. Möbius, que a la sazón fue uno de los primeros que definió la noción de segmento de recta orientado, escribió en 1862, publicado en 1887 [15], *"Über geometrische Addition und Multiplication"*, donde definió la adición de segmentos no colineales, la multiplicación por cualquier número y dos clases de productos de segmentos. De hecho, en su Teorema Central del Baricentro, Möbius utiliza *combinaciones lineales* que arrojan un punto al infinito, cuando la suma de sus coeficientes son cero; esta situación, que no mereció ningún comentario de su parte, fue la que inspiró más tarde a Christian von Staudt en la invención de las coordenadas proyectivas. A su vez, Bellavitis, que nunca aceptó a los números complejos como parte de las matemáticas y que fracasó en su intento de generalizar el producto de vectores en el espacio, tiene el mérito de ser el primero que definió, en 1833 [16], a través de su *"Calcolo delle Equipollenze"*, los vectores equipolentes como entes puramente geométricos, y la suma de vectores en el espacio que, curiosamente, lo llevaba de manera irremediable a los números complejos (Dorier, 1995a, p. 236).

Fue William Rowan Hamilton el matemático que por más tiempo buscó ternas dotadas de la adición y la multiplicación, que verificaran las propiedades de un campo, y que constituyeran el equivalente del número complejo en la dimensión tres. Sólo cuando logró cambiar su mirada, de las propiedades algebraicas hacia la naturaleza geométrica de la multiplicación en la dimensión dos, advirtió que esta operación en la dimensión tres, que representaría finalmente el producto escalar y vectorial al mismo tiempo, debería tener en cuenta las longitudes (unidimensional) de los vectores, la rotación entre sus dos direcciones (bidimensional) y el ángulo que ellos forman (unidimensional), lo que arrojó por resultado, en 1843 [17, 1:106-110], su invento de los *cuaterniones*. Si bien esta nueva entidad tuvo más influencia sobre el desarrollo del análisis vectorial que en la teoría de los espacios vectoriales, la posibilidad de una interpretación geométrica de resultados algebraicos marcó la importancia histórica de las relaciones privilegiadas entre la geometría y el álgebra lineal (*op. cit.*, pp. 236-237).

III.1.3 La dialéctica entre la geometría y el álgebra

Justamente, fue la búsqueda de un análisis geométrico intrínseco el que dio origen a un proceso dialéctico entre la evolución del álgebra y la de la geometría. La aparición de las sustituciones lineales, concepto similar al que hoy se conoce con el nombre de *transformaciones lineales*, tiene su origen, tanto en los métodos analíticos, a través del cambio de coordenadas, como en el estudio de formas cuadráticas con coeficientes enteros en problemas de aritmética, y en la solución de ecuaciones diferenciales. De hecho, el mismo Euler en 1770 [18], si bien no menciona la cuestión de la independencia y su acercamiento es esencialmente algebraico, realiza manipulaciones en el contexto de los cuadrados de números que pueden ser interpretadas como sustituciones lineales ortogonales concluyendo que para cualquier n, pueden ser representadas por $n(n\text{-}1)/2$ parámetros y que sus n^2 coeficientes dependen de $n(n+1)/2$ relaciones. En forma similar, Lagrange, entre 1773 y 1775 [19, 3:695/795] y Gauss, en 1798 [20], estudiaron el efecto de las sustituciones lineales con coeficientes enteros en una forma cuadrática de dos variables, y de dos y tres variables respectivamente, lo que condujo a este último a una notación muy similar a la que hoy conocemos como matriz, para caracterizar tal sustitución, y también, la multiplicación. Sin embargo, por cierto tiempo, los determinantes fueron confundidos con las matrices, que sólo alcanzaron su estatus actual a mediados del siglo XIX, cuando se las logró vincular a otros objetos. Incluso, la multiplicación, cuya no conmutatividad no había sido advertida al principio, no era considerada una operación algebraica, sino, un proceso local. La Escuela Alemana, a través de Eisenstein, y en particular Sylvester y Cayley de la Escuela Inglesa de Álgebra, hizo grandes progresos en esta dirección, que alcanzó su etapa de maduración con la publicación de Cayley, en 1858 [22] *"A Memoir on the Theory of Matrices"*, trabajo en el cual dio un informe detallado de los resultados de las últimas dos décadas, aún para matrices no cuadradas (Dorier, 1995a, pp. 237-240).

En el campo de la geometría, el encierro en el 'reino de lo posible', fue un obstáculo en el avance hacia espacios de más de tres dimensiones. Tanto es así que Möebius, en su *"Der Barycentriche Calcul"*, definió lo que hoy llamamos congruencia de figuras en el mismo plano, comentando que ello no es verdadero para figuras tridimensionales, lo que explicó así:

> "(...) para la coincidencia de dos sistemas iguales y similares A, B, C, D y A', B ', C ', D ', … en el espacio de tres dimensiones, en los cuales los puntos D, E... y D ', E ', … están sobre los lados opuestos de los planos ABC y A'B'C', será necesario, debemos concluir por analogía, que nosotros deberíamos ser capaces de dejar a un sistema hacer media revolución en un espacio de cuatro dimensiones. Pero ya que tal espacio no puede ser pensado, entonces esa coincidencia, en este caso, es también imposible." (Möbius [24, 526] en *op. cit.*, p. 240).

Fue Cayley, en 1846 [26], uno de los primeros en dar un paso decisivo en esta dirección al mostrar cómo puede obtenerse la geometría tridimensional trabajando en un espacio de más de tres dimensiones:

> "Uno puede, *sin usar ninguna noción metafísica hacia la posibilidad de un espacio cuadridimensional*, razonar así (todo fácilmente puede ser traducido también en la lengua puramente analítica): asumiendo cuatro dimensiones en el espacio, uno puede considerar *líneas* determinadas por dos puntos, *semiplanos* determinados por tres puntos, *planos* determinados por cuatro puntos (la intersección de dos planos es por lo tanto un semiplano, etc.). El espacio ordinario puede ser considerado como un plano, y su intersección con otro plano, es un plano ordinario, con un semiplano, una línea ordinaria, y con una línea, un punto ordinario." (Cayley [26, 217-218] en Dorier, 1995a, pp. 240-241).

Dos tipos de acontecimientos en el siglo XIX fueron fundamentales en la justificación del empleo de los espacios de más de tres dimensiones: 1) Las discusiones de los fundamentos de la geometría, con el descubrimiento de la geometría no euclideana y el desarrollo de geometría descriptiva y algebraica; 2) El descubrimiento de los cuaterniones por Hamilton que aniquiló el principio de Jorge Peacock de formas equivalentes, que declaraba que cualquier álgebra debería tener a la aritmética como fundamento. Es así que la geometría analítica y la teoría de determinantes y matrices fueron la base para el desarrollo de una geometría en la dimensión n, cuyas ramas más productivas fueron la continuación de los trabajos de Lagrange y Gauss sobre el estudio de las formas cuadráticas. Sin embargo, a pesar de esta importante evolución, la segunda mitad del siglo XIX, no encontró aún al Álgebra Lineal como un campo unificado (*op. cit.*, p. 241).

III.1.4 El Álgebra Lineal como elemento unificador y generalizador

Los aportes de Hermann Grassmann

> "En mucho, la teoría de Grassmann deja una singularidad. Incluso, si bien todos sus resultados corresponden a conceptos y teorías modernos, esto contribuyó a la creación de muy pocos de ellos. Para la teoría de Espacios Vectoriales, esto jugó un papel importante en el descubrimiento de la teoría axiomática, pero la mayor parte de los conceptos de esta teoría fueron reestablecidos independientemente del trabajo de Grassmann. Aún así, debido a su acercamiento original, la versión 1844 permanece única y ofrece una alternativa a la teoría de Espacios Vectoriales, que brinda un análisis rico de las relaciones entre los conceptos formales del Álgebra Lineal y la intuición geométrica que no puede ser encontrada en otra parte." (*op. cit.*, p. 246).

Con estas palabras cierra Dorier su importante análisis sobre los trabajos que Hermann Grassmann publicara en 1844 [27] y 1862 [28], a los que caracteriza y distingue muy especialmente por la originalidad de su presentación y por los conceptos que en ellos introduce. Mientras que la versión de 1844 se debate en la dialéctica entre lo matemático y lo filosófico, postura que no convenció a sus contemporáneos, la versión de 1862, en la cual la mayor parte de las consideraciones filosóficas habían sido suprimidas, no encontró más éxito que la primera.

A continuación sintetizamos la caracterización que Dorier (1995a, pp. 241-246) hace de cada una de las versiones.

Versión 1844

- Grassmann anuncia que brinda la primera parte de una teoría general que nunca completó, a la que denomina Teoría de Extensión y en la que la geometría y la naturaleza del espacio representan sus fuentes importantes de reflexión.
- Su trabajo fue original para su tiempo, lo es aún hoy, y no podía y todavía no puede ser totalmente apreciado, si uno no hace el esfuerzo para entender la filosofía sobre la cual está basado.
- Su teoría es auto-contenida e independiente del resto de las matemáticas, en el sentido que confió sólo en las reglas elementales del razonamiento matemático.
- Comienza con una introducción filosófica en la que explica qué son para él las Matemáticas, comparadas a la Filosofía y a otras ciencias, y describe las raíces de su inspiración en la combinación del producto en la geometría con la introducción de negativos en este campo, considerando, no sólo las longitudes, sino también los desplazamientos.
- Continúa con un capítulo introductorio sobre la “Teoría de las Formas” en el que intenta formalizar los conceptos de las operaciones algebraicas, lo que podría ser interpretado como una presentación axiomática de las estructuras pero que, según su estudioso, Lewis, no es exactamente lo que reproduce. Este capítulo da la regla para la investigación del aspecto formal de la Teoría de Extensión en la que la generación es un concepto importante, ya que las entidades son creadas por la "evolución" o la conexión con otras entidades.
- No usó la noción de número hasta el cuarto capítulo, donde lo dedujo a partir del concepto de división de magnitudes colineales extensivas, lo cual le impidió utilizar la multiplicación por un escalar, y por lo tanto cualquier combinación lineal existente hasta entonces, escenario que complicó su lectura.
- La presentación consiste en una dialéctica basada en los contrastes: igual-diferente, discreto-continuo, general-particular, real-formal pero, en cada paso de la teoría, el lector puede ser capaz de ver la situación concreta de la cual y por medio de la cual, la teoría general procede.
- Sus más fervientes críticos indicaban a menudo su carencia de claridad, debido a una tendencia aplastante a mezclar bien resultados matemáticos con consideraciones filosóficas oscuras, como también le reprochaban el dar usos sólo después de resultados generales, que hicieron sus ideas muy difíciles de seguir.

- Sostenía que la Geometría no debería ser parte de la Matemática y que la Teoría de Extensión es el modelo para interpretarla.
- Da las nociones equivalentes a los conceptos modernos de *base* y *dimensión*, según su modelo original de generación, haciendo uso del contraste entre aspectos formales y reales de la adición de desplazamientos (los equivalentes de nuestros vectores), estableciendo como resultado final que: un sistema de orden *m* es generable por cualquier conjunto de *m* métodos fundamentales de evolución mutuamente *independientes* (ninguno es incluido en un sistema generado por algunos de los demás). A pesar de que además plantea lo que hoy llamamos el Teorema de cambio, y del cual podría ser deducido, no demuestra que menos métodos de evolución que *m* no pueden generar el sistema.
- Aún con su base intuitiva, demostró su eficacia en la generación de un modelo rico para la *linealidad* y logró definir los objetos esenciales y demostrar la mayor parte de las propiedades elementales de los *espacios vectoriales de dimensión finita*.

Versión 1862

- Adoptó una presentación matemática más clásica y un marco teórico de trabajo muy diferente donde los objetos están dados *a priori* o definidos a través de operaciones.
- Casualmente, la desaparición de cualquier fondo filosófico, en lugar de evitar un superficial obstáculo de la versión 1844, hizo del contenido matemático algo difícil de aceptar, de lo cual se deduce que la nueva versión no podía ser leída independientemente del trabajo original.
- El Teorema de cambio y sus consecuencias fueron dados explícitamente en una serie de seis teoremas (la mayor parte de sus lectores no vieron la importancia de este resultado).
- Algunos conceptos introducidos han sido una fuente de inspiración para teorías recientes, como el Álgebra exterior de Elie Cartan o más recientemente, el cálculo exterior del Gian-Carlo Rota.
- Definió un sistema de orden *m* como el sistema de todas las *combinaciones lineales* de *m* unidades (p. ej. *m* magnitudes lineales independientes) y brindó una lista 'de propiedades fundamentales' para las cuatro operaciones, afirmando que todas las leyes algebraicas de las mismas, se deducirán de esas propiedades. Éstas son:

  Para magnitudes extensivas a, b, c:
  (1) $a+b=b+a$; (2) $a+(b+c)=(a+b)+c$; (3) $a+b-b=a$; (4) $a-b+b=a$.....

  Para la multiplicación y división de magnitudes extensivas a, b, para números β, γ:
  (1) $a\beta=\beta a$; (2) $(a\beta)\gamma=a(\beta\gamma)$; (3) $(a+b)\gamma=a\gamma+b\gamma$; (4) $a(\beta+\gamma)=a\beta+a\gamma$
  (5) $a.1=a$; (6) $a\beta=0$ *if and only if* $a=0$ *or* $\beta=0$; (7) $a:\beta=a(1/\beta)$ *if* $\beta\neq 0$

Estas propiedades, que pueden ser vistas como una especie de axiomatización *a posteriori* de la estructura lineal., son casi las mismas que los axiomas de la estructura moderna de espacio vectorial, excepto (1) y (7) sobre la multiplicación, que son meras convenciones; (6), que es una propiedad redundante; y el empleo ambiguo de substracción, que hizo algo confuso los concepto de cero y opuesto (lo que había sido ampliamente analizado en la versión de 1844).

- A pesar de la carencia de éxito, la teoría de Grassmann *contuvo las bases para una teoría unificada de la linealidad*, ya que ésta introdujo, con gran exactitud y en un contexto muy general, conceptos elementales como la dependencia lineal, la base, y la dimensión.

  En ambas versiones él dio una prueba elegante de un resultado equivalente a la fórmula $\dim(E+F)+\dim(E\cap F)=\dim(E)+\dim(F)$ sobre la dimensión de la suma y la intersección de dos subespacios. La dependencia lineal y la dimensión son conceptos centrales de la teoría de Grassmann, como lo son hoy en la teoría de Espacios Vectoriales moderna.

Los Accesos Axiomáticos de Peano, Burali-Forti y Marcolongo

Peano, publicó en 1988 [30] su propia interpretación del Ausdehnungslehre de Grassmann, donde definió, recién en el último capítulo, lo que él llamó un *sistema lineal*, y que constituye en términos modernos, la *primera definición axiomática de un espacio vectorial*. Peano, no sólo definió claramente los conceptos de cero, elementos opuestos y eliminó la convención y la redundancia introducidas por Grassmann, sino que además marcó una diferencia fundamental con su antecesor al proponer las propiedades de las operaciones que definen la estructura, en lugar de deducirlas de la definición de las operaciones sobre las coordenadas. En 1897 [31] Burali-Forti, en un libro sobre Geometría Diferencial, si bien menciona la contribución de Peano respecto a haber hecho más accesible el trabajo de Grassmann, no cita su acercamiento axiomático; sin embargo, en 1909 [32], junto al italiano Marcolongo publica en la introducción del libro, lo cual marca una significativa diferencia, una presentación axiomática de los sistemas lineales, colaborando en la difusión de estas ideas, tanto en Italia, como en Francia.

No obstante este importante aporte, Dorier señala que en cierto sentido, los tres italianos fueron menos precisos que Grassmann, por cuanto pasaron por alto la cuestión de la minimalidad de un sistema de generadores, que es necesario para la prueba de la unicidad del número de elementos de una base, ni tampoco citaron el Teorema de cambio, de lo que se deduce que la dimensión era para ellos, una medida del grado de libertad; mientras que para Grassmann, una medida de extensión (Dorier, 1995a, pp. 246-247).

Los acercamientos de Weyl y Dedekind

Hermann Weyl, en 1918 [33], dio también una definición axiomática de lo que él denominó vectores-colectores lineales, en la que añadió un *axioma dimensional,* que si bien hace que su presentación no difiera en mucho de la de Peano en cuanto al concepto de dimensión, llama la atención respecto a su preocupación por la invarianza del número dimensional, al que muestra como una característica del colector, independiente de la base que se considere. Esta cuestión de la invarianza, que para muchos matemáticos era simplemente una obviedad, fue trabajada con mucho cuidado por Richard Dedekind en 1893 [34], en una presentación en la que comienza dando la definición y las propiedades de la ***IL***, a la que él llama 'irreducibilidad', para definir luego la idea de un espacio Ω como el conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto irreducible de n números de un campo A; al conjunto de esos n elementos llamó base de Ω, de cuyos elementos definió a su vez, las coordenadas. Luego, presentó las tres propiedades siguientes:

I. Los números de Ω se reproducen ellos mismos por la adición y la sustracción, p. ej., la suma y la diferencia de cualquier par de números están en Ω.
II. Cualquier producto de un número de Ω por un número de A es un número de Ω.
III. Hay n números independientes en Ω, pero cualquier n+1 de tales números son dependientes.[21]

De estas propiedades se deduce que la dimensión es una característica de Ω (Dorier, 1995, pp. 247-249).

Las pruebas de Dedekind, que no se basan en la teoría de ecuaciones lineales, pero sí, en la representación con coordenadas muestran, entre otros resultados, que: 'cualquier sistema irreducible de n números es una base de Ω', y relacionado con el cambio de base, que 'un sistema de n números es irreducible si y sólo si el determinante de sus coordenadas, en la base original, no es cero'; sin embargo, no trabaja explícitamente la minimalidad de los generadores. Finalmente, echa su mirada al caso de una extensión de campo, p. ej., cuando el espacio es cerrado en la multiplicación, y en este contexto demostró importantes resultados que acercan el trabajo de Dedekind a una presentación moderna de los espacios vectoriales de dimensión finita (Dorier, 1995a, p. 249).

Los trabajos de Steinitz, van der Waerden y Sperner

> "Sea R un subcampo de L, se dirá que L es finito respecto a R y de orden n –lo que será designado por: $[L:R]=n$- si hay en L, n elementos linealmente independientes sobre R, mientras cualquier conjunto de L de más elementos que n es linealmente dependiente sobre R." (Stenitz, 1910 [35, 198] en Dorier, 1995a, p. 250).

[21] Dedekind demostró por inducción la segunda parte de la propiedad III.

De esta manera, Ernest Steinitz define clara y precisamente la dependencia lineal sobre un campo *R* y una extensión finita de orden *n* (que coincide con la dada por los italianos para el número de dimensiones de un espacio lineal, aunque no parece haber tenido su influencia), luego de lo cual mostró que en una extensión de orden *n*, para cualquier conjunto de *n* elementos, la IL es equivalente al hecho de que cualquier elemento de la extensión no puede ser expresado de más que de un modo como una combinación lineal de estos *n* elementos. Steinitz se propuso demostrar que cualquier base tiene *n* elementos y que cualquier conjunto de *n* elementos independientes es una base de *L*, para lo cual tuvo que conectar un resultado acerca de la generación con una característica de dependencia; asimismo, su definición de base está dada en términos del sistema de coordenadas, y por lo tanto su prueba quedó instalada dentro del contexto de las n-úplas y las ecuaciones lineales.

Después de la versión de Grassmann de 1862, Steinitz es el primero que explícitamente prueba la minimalidad de los generadores; también usa algo muy próximo al Teorema de cambio pero al seno de las de extensiones transcendentales donde la dependencia algebraica incluiría a la dependencia lineal. Él define sistemas equivalentes e irreducibles, conceptos que llevados al contexto de la linealidad le permiten enunciar que 'dos sistemas equivalentes irreducibles corresponden a dos bases del mismo espacio lineal', luego de lo cual da tres teoremas a partir de los que obtiene otros resultados generales en los espacios de dimensión finita (Dorier, 1995a, pp. 250-251).

Si bien los resultados de Steinitz eran fácilmente transferibles al contexto lineal, él no mencionó esa posibilidad y fueron sus sucesores Van de Waerden [36] y Sperner en el trabajo de Schreier [37], los que luego de veinte años usaron el teorema de cambio, con ese nombre, por primera vez. Ambos autores citan a Steinitz, que aparentemente nunca habría utilizado el teorema de cambio en el contexto de la dependencia lineal, pero no hacen referencia a Grassmann, que era bien conocido entre los algebristas alemanes, probablemente porque sus accesos están integrados en contextos matemáticos y filosóficos muy diferentes (*op. cit.*, pp. 251-252).

Los trabajos de Lagrange, Cauchy, Fourier y Banach

En la mitad del siglo XVIII D'Alembert, Lagrange [19, 4:151-165] y Euler ya habían notado, sin dar una prueba rigurosa ni exactamente con estos términos, que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden *n* podría ser expresada como una CL de un conjunto de *n* soluciones "fundamentales", a pesar de que la independencia de estas últimas no había sido trabajada. La solución fue considerada como una serie de potencias en la vecindad de cada punto, y sus derivados fueron obtenidos tomando el derivado de cada término de la serie, entonces, la adición término a término, condujo a una ecuación lineal recurrente que determinó los coeficientes de la serie como las funciones de los *n* primeros, según un método bien establecido.

El mismo Lagrange, en dos oportunidades, en 1762 y 1776, utilizó métodos similares que implicaron la búsqueda de lo que hoy llamamos '*valores propios de una matriz*', en el contexto de la solución de sistemas de ecuaciones simultáneas diferenciales, pero él no mencionó la semejanza de los dos problemas. Ello constituye sólo una muestra de que la solución de ecuaciones lineales diferenciales jugó un rol importante en la teorización de la linealidad, y por lo tanto, de los componentes esenciales del álgebra lineal pero, a la vez, evidenció que los conceptos y métodos permanecieron implícitos y no unificados, por casi un siglo, hasta que Cauchy clarificó estas nociones y dio pruebas rigurosas de las mismas (Dorier, 1995a, p. 252).

Fourier, en 1822 [38, 169 ó 212], en el contexto de la solución de ecuaciones diferenciales por serie de potencias, usó métodos para resolver infinitas numerables ecuaciones en infinitas numerables incógnitas, pero la carencia de entendimiento de la convergencia de la serie de potencias no le permitió dar una solución correcta a su problema, aunque sentó las bases para un nuevo método. Debió pasar más de medio siglo hasta que aparecieran trabajos sólidos en este sentido, tales como el de Poincaré, que se refirió a un texto de Hill, y luego Hilbert, Tiesz, Schmith, Hadamard y Fréchet, que se basaron en las ideas de Fourier, pero consideraron diferentes condiciones límites restrictivas en la serie de potencias, restando aún el hallazgo de la situación más general. Gradualmente, los matemáticos fueron cambiando sus acercamientos al problema, considerando los espacios vectoriales de funciones cada vez más generales; esto conduciría finalmente a la axiomatización del *análisis funcional*, donde se destaca, en 1916 [39], el aporte de Riesz-Fredholm, en el que se ve por primera vez una definición general de un *subespacio vectorial de funciones* normal y cerrado, lo que dio origen a lo que hoy denominamos, Teoría de los operadores compactos de Riesz (*op. cit.*, pp. 252-253).

> "El presente libro sigue el objetivo de establecer unos teoremas válidos para varios campos funcionales, que especificaré. Sin embargo, de modo que yo no los demuestre separadamente para cada campo, que sería doloroso, he escogido un método diferente, que es: consideraré en un sentido general los conjuntos de elementos en los cuales he postulado ciertas propiedades, deduciré algunos teoremas y luego demostraré para cada campo específico funcional que los postulados escogidos son verdaderos." (Banach [41, 2:308] en Dorier, 1995a, pp. 254).

Así introdujo en la disertación de su tesis, en 1920, Stefan Banach, lo que hoy se conoce con el nombre de 'espacios de Banach', donde abordó, en forma paralela e independiente al trabajo de Hahn, los espacios funcionales de dimensión infinita no numerable y que constituyó un paso decisivo hacia la axiomatización. En 1932, Banach publicó el tratado *Théorie des opérateurs linéaires* [42], en el cual dio el marco general y la mayor parte de los resultados del *análisis axiomático funcional* y del *álgebra lineal infinito-dimensional*. Este texto, y la publicación casi simultánea de la primera edición de Van der Waerden *Moderne Algebra* (1930), marcaron dos acontecimientos que resultarían esenciales en la unificación de una teoría axiomática de los espacios vectoriales de dimensión finita o infinita (Dorier, 1995a, pp. 254, 256).

En concordancia con la creciente popularidad del AL, aparecen los tres primeros libros que presentan las nuevas teorías con objetivos educativos y que han tenido una notable y larga influencia sobre la teoría axiomática de los espacios vectoriales, tanto en su empleo en matemáticas como en su enseñanza. En efecto, en 1941, Garrett Birkhoff y Saunders MacLane [43] publican *Survey of Modrn Algebra*; en 1942, Paul R. Halmos [44] publica *Finite Dimensional Spaces*; y en 1947, Nicolas Bourbaki [45] publica el segundo capítulo de libro II de *Eléments de mathématique* bajo el título *Algèbre linéaire* (Dorier, 1995a, p. 256).

III.2 Investigaciones en enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal

Las investigaciones que abordan temas de enseñanza del Álgebra y el Análisis Matemático han ocupado el centro de atención de la Matemática Educativa desde sus inicios, sin embargo, en las últimas dos décadas se percibe un interés creciente en enfocar también la mirada hacia el dominio del Álgebra Lineal. Asumiendo el riesgo de ignorar resultados interesantes, exponemos a continuación los aportes más relevantes que estas investigaciones han generado, tanto en relación con las dificultades detectadas en los estudiantes, como con las propuestas didácticas que promueven, en concordancia con la pregunta 2, formulada en la sección I.2, p. 6.

III.2.1 Según Dubinsky y Carlson

En el artículo *Some Thoughts on a First Course in Linear Algebra at College Level*, Dubinsky (2001) realiza un doble análisis crítico, por un lado, a las recomendaciones que el Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG)[22] plasmó en el texto editado por Carlson et al. (1993), y por otro, al contenido del artículo *Teaching Linear Algebra: must the fog always roll in?*, que el mismo Carlson publicó, también en 1993.

Dificultades

Aunque en este artículo Dubinsky reconoce que, a diferencia del Cálculo, no existe un cuerpo de investigaciones que documente la insuficiencia de los actuales cursos de álgebra lineal, afirma que existiría "una creencia convencional" respecto a que el plan de estudios vigente (en ese momento) no es acertado en términos de lo que los estudiantes aprenden en esos cursos, y que las principales dificultades se encuentran en las ideas de subespacio, conjunto generado por un subespacio, dependencia e IL, base, dimensión, espacios fila y columna de una matriz, el rango y la nulidad de un matriz y su relación con los espacios fila y columna, y los espacios vectoriales de matrices y funciones, a las cuales, él mismo agregaría la interpretación geométrica de una transformación lineal (pp. 2,4).

[22] El LAGSG, Grupo de Estudio del Curriculum de Álgebra Lineal, fue formado en 1990 por David Carlson, Carlos Johnson, David Lay y Duane Porter, para iniciar un sustancial y sostenido interés nacional en el mejoramiento del Plan de Estudios de Algebra Lineal. Sus recomendaciones, que incluyeron un programa para un primer curso de Algebra Lineal, fueron compiladas en 1997 por la Asociación Matemática de América (MAA) en el texto “Recursos para la enseñanza del algebra lineal”, Volumen 42. Guershon Harel habría pertenecido al grupo, pero nosotros no encontramos antecedentes respecto a la época de su separación.

Dubinsky hace una interpretación de lo que Carlson describe como los cuatro motivos que originan las dificultades con subespacios, generadores y dependencia e IL:

1. El curso es impartido tempranamente y los estudiantes son demasiado inmaduros.
2. Las dificultades tienen que ver con los conceptos por cuanto los estudiantes tienen poca experiencia con el estudio de ideas, a diferencia de lo que sucede con los algoritmos computacionales, con los que tienen menor dificultad.
3. Los estudiantes no son experimentados en la utilización -mucho menos en la determinación- de algoritmos diferentes para trabajar con un concepto, en ajustes diferentes.
4. Los conceptos son presentados sin la conexión sustancial con la experiencia previa de los estudiantes (p. 5).

Si bien Dubinsky no niega la posibilidad de que estos motivos sean ciertos, señala que son demasiado generales y que no indican claramente los caminos mediante los cuales las dificultades pueden ser vencidas. Respecto al primer punto, que a su entender sugiere que un curso previo mejorará la sofisticación del pensamiento matemático de los estudiantes, alude a los informes de estudios nacionales que reportan que esta situación sólo genera que "menos estudiantes tomen cursos de matemática y, para los que permanecen, la convicción de que las matemáticas consisten, según palabras de Ed Moise, en un repertorio de modelos de comportamiento imitativo." (p. 5). Asimismo, y en relación con las dificultades vinculadas al entendimiento de los conceptos y su falta de conexión con las experiencias previas de los estudiantes, manifiesta rotundamente que esa situación solamente tiene lugar en los acercamientos estándar, los que no permiten a los alumnos construir sus propias ideas, y que si bien, tanto el artículo de Carlson, como el texto del LACSG aconsejan una participación más activa de los estudiantes, entiende que no señalan una dirección correcta de cómo lograrla. Por otro lado, percibe en los estudiantes la gran dificultad de tratar con los cuantificadores existencial y universal (*op. cit.*, p. 10).

Propuestas

A pesar de que Dubinsky (2001) advierte que el grupo RUMEC al que pertenece no ha comenzado un trabajo sistemático en temas de álgebra lineal[23] y que sus opiniones están basadas en experiencias en otras áreas del conocimiento matemático, expresa un fuerte disentimiento con el LACSG en cuanto éste propone que un primer curso de AL debería poner el acento en las representaciones cartesianas de vectores y en las transformaciones lineales de n-úplas y matrices.

[23] El grupo RUMEC colaboró en la redacción de la tercera versión preliminar de *Learning Linear Algebra with ISETL* Research in Undergraduate Mathematics Education Community, 389 págs., publicada en julio de 2002, donde desarrollan ampliamente el tema, con soporte tecnológico computacional.

En relación con la recomendación del LACSG y de Carlson de que el curso debería ser reconocido como un curso de servicio, menos abstracto y relacionado estrechamente con los usos prácticos del álgebra lineal, enfatiza que él no observa el acercamiento a lo concreto[24] ni tampoco conexión alguna, directa o implícita, entre los problemas propuestos y sus aplicaciones (pp. 4, 6).

Asimismo, este investigador propone abordar la enseñanza del AL (y de la Matemática toda) desde el marco de la teoría APOE[25] que parte de la hipótesis de que:

> "El conocimiento matemático es la tendencia de un individuo a responder, en un contexto social, a una situación percibida como un problema construyendo, reconstruyendo y organizando, en su mente, acciones matemáticas, procesos, objetos y esquemas para tratar con la situación." (*op. cit.* p. 12), a través de abstracciones reflexivas de interiorización, encapsulación, coordinación, inversión y generalización, para lo cual sugiere construir, y ajustar, un conjunto de 'descomposiciones genéticas'[26] de los principales conceptos del AL (*op. cit.*, pp. 17-18).

Dubinsky pone en el centro de un diseño de instrucción eficaz la formulación, por parte de los estudiantes (haciendo uso del software ISETL), de programas que permitan comprobar, por ejemplo, el cumplimiento de los axiomas de espacio vectorial, o si un vector es o no, combinación lineal de otros dos; a la vez que destaca la potencia adicional de la visualización gráfica en el caso de las funciones. También sugiere que ese diseño incluya un curso previo sobre la cuantificación, e insiste enfáticamente en la necesidad de desarrollar aplicaciones de los conceptos, en otras disciplinas y cursos, a través de trabajos con ecuaciones diferenciales (con múltiples usos en las ingenierías y en las ciencias), los espacios vectoriales Z_p (con aplicaciones en las comunicaciones y la codificación) y el abordaje del estudio de espacios vectoriales de dimensión no finita (*op. cit.*, pp. 17-24). En ***An Abstract Algebra Story*, **Leron *&* Dubinsky (1995, p. 27) fundamentan ampliamente los beneficios de la enseñanza del AL a través de experiencias utilizando ISETL.

III.2.2 Según Dorier

En el artículo *Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire. Perspectives théorique sur leurs interactions*, el investigador Dorier (2000a) hace una síntesis de todos los documentos presentados a fin de obtener la autorización como director de investigación.

---

[24] Puntualizamos que la tercera versión preliminar de *Learning Linear Algebra with ISETL* ofrece tan solo dos actividades en el contexto extramatemático, una de las cuales incluimos en el apartado IV.2.4, p. 88.

[25] En inglés APOS, que es una sigla formada por las primeras letras de las palabras: action, process, object, scheme.

[26] Una descomposición genética consiste en el análisis teórico de un concepto matemático en términos de las construcciones mentales que un estudiante debería hacer para desarrollar su comprensión del concepto.

El autor describe los principales nodos de conflicto cognitivo en temas de AL, a través de una reflexión de índole epistemológica, en una relación dialéctica entre la génesis histórica de los conceptos y las herramientas didácticas de las que dispone, como la transposición y la antropología didácticas de Chevallard, y los obstáculos epistemológicos que Brousseau recoge de Bachelard. Aquél, y otros artículos del mismo autor, son tomados en cuenta en el diagnóstico y propuestas que siguen.

Dificultades

> "Las principales críticas de los estudiantes en relación al álgebra lineal tienen que ver con la preocupación que provoca el uso del formalismo, la cantidad aplastante de nuevas definiciones y la falta de conexión con lo que ellos ya saben en matemática. Está bastante claro que muchos de los estudiantes tienen la sensación de haber desembarcado en un nuevo planeta y no pueden encontrar su camino en este nuevo mundo. Por otro lado, los profesores normalmente se quejan de sus estudiantes respecto al uso errático de herramientas básicas de lógica o teoría de conjuntos. Ellos también se quejan de que los estudiantes no tienen habilidades en Geometría Cartesiana elemental y, por consiguiente, no pueden usar su intuición para construir representaciones geométricas de los conceptos básicos de la Teoría de Espacios Vectoriales." (Dorier, 1996, p. 150; 1998, p. 103; 2000b, p. 28; 2002, p. 875-876).

Ante esta situación, el mismo autor postula que el estudio de una nueva teoría formal requiere un gran esfuerzo que muchos estudiantes no están preparados para hacer, si no se les muestra, cuanto antes, lo que ellos ganarán con el cambio. Sin embargo, el análisis histórico ha permitido ver que el acercamiento axiomático de la Teoría de los Espacios Vectoriales no se impuso esencialmente porque haya permitido resolver nuevos problemas (salvo el caso Banach, en 1920), sino como un elemento unificador y generalizador de métodos diferentes ya vigentes en distintos contextos (Dorier, 1995b, p. 180; 2000a, p. 35 ; 2000b, p. 28; 2002, p. 876). Este contraste entre las necesidades de los estudiantes y la génesis histórica plantea un verdadero desafío a los didactas, ya que las investigaciones han demostrado que los errores cometidos por muchos estudiantes pueden interpretarse como resultado de una *falta de conexión* entre los nuevos conceptos formales y las concepciones previamente adquiridas por los estudiantes en áreas más restringidas, pero con base más intuitiva (Dorier, 1996, p. 150; 2002, p. 876).

Dorier (2000a, p. 33; 2000b, p. 28) afirma que a las presentaciones estándares de los espacios vectoriales, es decir, aquellas que arrancan con un listado de sus axiomas y terminan con la diagonalización de operadores lineales, a menudo sigue una práctica que se limita a tareas de tipo algorítmico en las que los estudiantes tienen 'éxito', por ejemplo, en encontrar la forma reducida de una matriz con el método de Jordan, o la resolución de sistemas de la ecuaciones lineales, pero tienen severas dificultades para comprender las nociones de dependencia lineal, generadores, o subespacios complementarios.

En palabras de Chevallard (1991, pp. 67-68, en Dorier, 2000a, p. 33) esta algoritmización es una respuesta clásica cuando el objeto de enseñanza aparece como demasiado novedoso. Pero, paradójicamente, las cuestiones que el alumno aprende a resolver, son casualmente aquellas que ya sabía resolver, quizá con otros métodos, y sin necesidad de sumergirse en "la inmensa batería de los espacios vectoriales". Esta situación, a la que denomina 'el obstáculo del formalismo', conduce irremediablemente al autor, y por qué no decirlo, también a nosotros, a la pregunta ¿hay que desechar la enseñanza de la Teoría de los Espacios Vectoriales en primer año de la universidad y esperar a que la necesidad aparezca en los estudiantes? A pesar de ello, muchas personas encuentran importante su inclusión desde el inicio de los estudios universitarios (Dorier, 2002, pp. 876-877).

En cuanto a los conceptos cuyo estudio es el objeto del presente trabajo, Dorier (2000a, p. 59) se refiere al hallazgo de un obstáculo epistemológico relacionado con la dificultad que presentan los estudiantes para comprender el aspecto *global* de la dependencia lineal, que se pone en evidencia cuando se pasa de dos, a más de dos vectores (extrapolando la proporcionalidad), al responder afirmativamente a la pregunta: "Sean u, v y w tres vectores en R^3, si cualquier par de ellos no son colineales ¿son independientes?" y que forma parte de la experiencia que llevaron a cabo Robert y Robinet (1989, en Dorier, 1998, p. 108).

Asimismo, se refiere a que una de las principales dificultades del aprendizaje del Álgebra Lineal es la escasa movilidad que invierten los estudiantes en la diversidad de registros de representación semiótica (en el sentido de Duval), los diferentes lenguajes (en el sentido de Hillel), los modos de pensamiento (en el sentido de Sierpinska), la flexibilidad cognitiva (en el sentido de Alves Dias), los cambios de marcos (en el sentido de Douady), que no son, ciertamente, equivalentes entres sí (Dorier 2000a, p. 71; 2002, p. 877). A esta compleja situación, se suma la incongruencia semántica de la definición de la IL, punto sobre el que volveremos en el Capítulo IV, y respecto a lo cual, él expresa:

> "La independencia es el punto más difícil porque la formalidad de la definición es casi imposible de traducir al idioma natural de manera que conserve la sintaxis (…). Por consiguiente, en el sentido de R. Duval, no hay ninguna congruencia semántica entre las dos formulaciones. En los dos casos, él actúa bien en la negación de la definición en idioma formal, y en idioma natural de la dependencia (que son semánticamente congruentes) (…)." (Dorier, 1996, p. 151; 2000a, pp. 55-56).

A todo lo antes dicho, debemos agregar las serias dificultades que presentan los estudiantes en relación con el concepto de vector geométrico (sin involucrarnos con el vector algebraico o físico) y que Lê Thi Hoai (1997, en Dorier, 2000a, p. 81) reporta en su tesis. Él destaca dos dificultades, la primera ligada al concepto de sentido, y la segunda, vinculada a la reducción de la idea de vector, a la sola característica de su longitud.

Propuestas

Dorier (1995b, p. 180; 2000a, p. 37) reconoce que las dos principales herramientas teóricas de la didáctica, esto es, “la Teoría de Situaciones" de Brousseau” y la dialéctica “herramienta-objeto" de Douady tienen en común el hecho de que el objeto de enseñanza debe aparecer como una herramienta eficaz para resolver un problema accesible a los estudiantes, al que Brousseau denomina, ‘situación fundamental del concepto’. Aunque Dorier no afirma que no pueda encontrarse tal situación, percibe que en este caso, en que el concepto encierra como idea principal, su función unificadora y generalizadora, la búsqueda se torna francamente difícil. Luego de experimentar algunas ingenierías didácticas, basadas en los cuadrados mágicos o las series de Fibonacci, los resultados mostraron que no respondieron a sus expectativas.

Sin embargo, basándose en un análisis epistemológico, Dorier (1995b, p. 188) plantea un acercamiento a la estructura de espacios vectoriales, a través de presentar a los estudiantes una secuencia de clases que crea un contexto artificial que motiva la ‘génesis’ de los axiomas por ellos mismos. Estas actividades arrancan con la pregunta: Siendo $a, b, x, x_o \in E$ ¿cuáles son las propiedades que deben verificarse para resolver las ecuaciones en x: $a.x = b.x_o \ (a \neq 0)$ y $a.(a + x_0) = b.x \ (a \neq b)$? En sus respuestas, los alumnos obtienen un listado de propiedades respecto del cual el profesor hará notar que posiblemente existan propiedades redundantes y les solicita que obtengan el conjunto más pequeño posible.

En relación con la propuesta de un programa más abarcativo postula, como primera hipótesis, que la enseñanza del Álgebra Lineal debe componerse de varias estrategias entretejidas y a largo plazo (contrapuesto a la linealidad de la instrucción), utilizando lo que llaman el ‘*meta lever*’, así como el cambio de ajustes y de puntos de vista, para obtener modificaciones sustanciales para un número suficiente de estudiantes. El término ‘meta’ debe ser entendido como la actitud reflexiva que se espera de los alumnos y ‘lever’ señala algo que tiene que ser usado, por parte del profesor, en el momento oportuno y en el lugar correcto, para ayudar a que los estudiantes logren esta actitud reflexiva, mientras resuelven una tarea matemática que se ha preparado cuidadosamente para ellos (Dorier, 2000b, pp. 29-30).

En el programa que proponen, organizan la enseñanza global en cuatro pasos:

Primer paso: Se compone de fases preliminares que incluyen la organización de los cambios de escenas para facilitar la convergencia de puntos de vista diferentes. Para lograrlo, se proponen actividades relacionadas con ‘circuitos eléctricos’ de la lógica formal, con el lenguaje de la teoría de conjuntos, y experiencias con geometría espacial. Luego introducen la eliminación gaussiana para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales usando R^n. Estas actividades allanan el camino a los conceptos de subespacios de R^n, de rango, y al doble punto de vista ecuaciones-parámetros.

Esto se realiza a través de preguntas básicas, con las que tratan de inducir a los estudiantes a reflexionar y que justificarán la introducción de los conceptos de Álgebra Lineal, tales como: ¿tengo demasiadas, solamente las justas, o no alcanzan las ecuaciones? ¿cuántos parámetros necesito para describir el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales? Luego la instrucción se centra en la enseñanza de la Geometría Cartesiana en tres dimensiones.

Segundo paso: Comienza con una presentación explícita de todas las preguntas comunes que pueden formularse a partir de la fase precedente. Luego se definen la IL y el rango, mostrando su invarianza, a través de combinaciones lineales y también del rango fila y columna. Esto es seguido por la descripción, con los parámetros, de subespacios de R^n inicialmente definidos por sus ecuaciones y viceversa. Más tarde, se exploran las nociones de dimensión y de bases de subespacios. Se hacen las pruebas de resultados fundamentales con el uso de formulaciones abstractas y evitando el uso de coordenadas, lo que se justifica a los estudiantes por un uso sistemático de pensamiento algebraico. Finalmente, se brindan algunos elementos metodológicos acerca de cómo resolver problemas sobre subespacios en R^n: inclusión, igualdad, intersección, parámetros y ecuaciones de subespacios. Durante esta fase se utilizan también métodos lineales en otros campos: polinomios, series lineales recurrentes y ecuaciones diferenciales lineales.

Tercer paso: En esta fase se trabajan los axiomas de la Teoría de Espacios Vectoriales de dimensión finita y su uso como un modelo dentro de las matemáticas, al mismo tiempo que se ensayan varios métodos y se encaran algunos problemas prototípicos que fueron resueltos durante las fases anteriores, pero que ahora se abordan desde Algebra formal. Estos problemas deben ser bastante ricos, de modo que su generalización haga casi obligatorio el empleo de los conceptos formales, bajo el ‘contrato' con los estudiantes, de modelarlos en términos de Álgebra Lineal, por ejemplo, el problema debe ser expresado en términos de una ecuación lineal 'T(u)=v'.

Cuarto paso: En esta fase, que es más técnica y más corta, se presentan las matrices, las técnicas asociadas con el cambio de base y la inversión de matrices cuadradas. El instrumento 'matriz', introducido en relación con operadores lineales, es usado en varios problemas en relación con diferentes campos de las matemáticas, pero el cálculo con matrices no es un objetivo importante en el programa (Dorier, 2000b, pp. 31-32).

Se desconoce, pues el autor no indica que así sea, si en el tercer paso se invita a los estudiantes a encontrar los axiomas de un espacio vectorial, mediante el contexto artificial detallado más arriba.

En relación con las ideas centrales de nuestro trabajo, Dorier (1998, pp. 109-110) muestra un camino mediante el cual los estudiantes pueden enunciar por sí mismo, las definiciones formales de la dependencia e independencia lineal. Él propone, luego de las definiciones de espacio y subespacio vectorial, combinación lineal y generador, plantear la pregunta ¿cuándo es posible eliminar un vector, siendo todavía, los vectores restantes, generadores para el subespacio entero?, a lo que los estudiantes responden sin conflictos, que la ‘condición necesaria y suficiente consiste en que el vector que debe ser eliminado es una combinación lineal de los demás’.

Esto provee una definición provisional de la dependencia lineal, esto es, ‘un vector es linealmente dependiente de otros si y sólo si éste es una combinación lineal de ellos’, y por negación, obtienen otra definición para la independencia. Cuando se les vuelve a preguntar: ¿estos vectores son independientes o no? y notan la poca practicidad de la definición encontrada, logran formalizar finalmente otra definición de la independencia lineal, en la búsqueda de una definición donde intervengan todos los vectores.

Finalmente, queremos resaltar la importancia que este investigador otorga al concepto de rango por tratarse ‘del número máximo de elementos independientes en un subespacio, y el número mínimo de generadores’ [generador mínimo o independiente máximo, por lo tanto estamos hablando de una base]. Dicha noción se constituye así en el lazo entre los conceptos de dependencia lineal y generador, a la vez que afirma que la idea de rango puede interpretarse como una sofisticación de la noción de dependencia, de lo que es natural desprender que su comprensión depende, por consiguiente, del entendimiento de esta última noción (2000a, p. 55).

Por otra parte reporta que el ‘accidente’ [recordando la palabra utilizada por Euler] de la posible desaparición de una ecuación (una fila nula en la forma triangular de la matriz) al hacer uso del método del pivote de Gauss, permite un análisis reflexivo de las operaciones realizadas y ofrece la posibilidad de interpretar la dependencia inclusiva en términos de dependencia lineal, sobre la que hablamos en el apartado III.1 del presente trabajo (2000a, p. 66).

III.2.3 Según Harel

Guershon Harel fue miembro del LACSG mencionado en este mismo apartado, e hizo su propia interpretación de las recomendaciones del grupo en el capítulo 5 del libro *L'algèbre linéaire en question* (Dorier (ed.), 1997, en Grandsard, 1998), en la que pone énfasis en la introducción de nociones elementales de AL en la escuela secundaria, relacionadas con la Geometría, y la incorporación del software MATLAB, o similar, en los cursos de AL.

Tal como lo señala Dorier (2002, p. 879), que comparte el acercamiento de Harel, el trabajo de éste inspiró la reforma del plan de estudios en EE.UU, así como a autores de manuales. Sus últimos trabajos se orientan a temas vinculados con la ‘prueba en matemática’, en el marco del proyecto PUPA[27].

Dificultades

Este investigador sostiene que una gama sustancial de procesos debe ser encapsulada en objetos conceptuales cuando los estudiantes abordan el AL y agrega:

[27] PUPA es la sigla formada por las primeras letras de las palabras Proof, Understanding, Production, and Appreciation, y se trata de un proyecto apoyado, en parte, por una subvención de la Fundación de Ciencia Nacional a Larry Sowder de Universidad Estatal de San Diego (Harel, 2001, p. 1).

> “La dificultad de pensamiento en el nivel de objeto de transacción conduce a algunos estudiantes a desarrollar 'mecanismos de defensa' (para 'sobrevivir' al curso), consistiendo en la tentativa de producir un discurso escrito formalmente similar al del manual o de una conferencia, pero sin comprender el significado de los símbolos y la terminología.” (Harel, 2000, en Dorier, 2002, p. 879).

Asimismo, ha advertido que el Cálculo descansa sobre una fundación de varios años de estudio de base en el nivel secundario, mientras que el álgebra lineal exige el dominio de un número de ideas críticas con poca o ninguna fundación previa (en Day & Kalman, 1999, p. 5).

Propuestas

Harel (1997, en Grandsard, 1998) postula, inspirado en la teoría psicológica de Piaget, tres principios para la enseñanza del Álgebra lineal: el *Principio de Concretitud*, el *Principio de Necesidad* y el *Principio de Generalisabilidad*.

El Principio de Concretitud se basa en la premisa de que los estudiantes construyen el entendimiento de un concepto en un contexto que es concreto para ellos, y si bien sostiene que un acercamiento geométrico a los conceptos abstractos del AL produce una base bastante sólida para la comprensión de los estudiantes, en otros textos señala que muchos de ellos permanecen en el mundo restringido de los vectores geométricos y no ascienden al caso general (Harel, 2000, en Dorier, 2002, p. 880).

El Principio de Necesidad se funda en que, para aprender, los estudiantes deben ver una necesidad intelectual que justifique la aparición del nuevo conocimiento, es decir, que el conocimiento se desarrolle como solución a un problema[28].

El Principio de Generalizabilidad, establece que cuando la instrucción está preocupada por respetar el primer principio, las actividades, dentro de este modelo, deberían permitir también animar la generalidad de los conceptos. Este principio está más vinculado con decisiones didácticas en cuanto a la opción del material de enseñanza, que con el proceso de estudio en sí mismo.

Asimismo, a propósito de los principios de Harel, Dorier (2002, p. 880) da tres ejemplos de violaciones en correspondencia con cada uno de ellos. Al primero, cuando se enseña el concepto general de Espacio Vectorial como una generalización de estructuras menos abstractas, a los estudiantes que aún no han construido los elementos de estas estructuras como entidades mentales sobre las cuales otras operaciones mentales puedan ser realizadas. Al segundo, cuando se extrae la definición de Espacios Vectoriales en una presentación de las propiedades de R^n. Al tercero, cuando la noción de dependencia lineal es introducida en un contexto geométrico definido por colinealidad o coplanaridad, que no es fácilmente generalizable a todos los espacios vectoriales.

[28] Este supuesto, basado también en Piaget, es el adoptado por Brousseau en la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Sintéticamente, la propuesta de Harel implica una abstracción gradual que se desarrolla en tres fases. La primera, trata con los modelos visuales geométricos de nociones de espacio vectorial como subespacio, base y dimensión, en dos y tres dimensiones. En la segunda fase, los modelos de coordenadas, primero en R^1, R^2, y R^3 y luego en R^n, son usados para redefinir los conceptos considerados en la primera fase. La tercera, trata con espacios vectoriales cuyos elementos son indefinidos, pero sus dimensiones son uno, dos y tres (Dubinsky, 2001, p. 9).

Con respecto al tema específico de nuestro trabajo, Harel (2001, p. 9) propone una actividad, que se funda en las raíces históricas del AL, esto es, los sistemas de ecuaciones lineales, y a través de la cual los estudiantes pueden ver la necesidad de formalizar el concepto de combinación lineal para, más tarde, construir las nociones de dependencia e independencia lineal. La actividad consiste en solicitar a los alumnos la expresión que permitiría hallar *b*, suponiendo que exista, en el sistema $A.X = b$ (incluso sugiere comenzar con un sistema homogéneo, es decir *b*=0). Algunos estudiantes, habituados a la notación que usaron en la multiplicación de matrices, dan la respuesta correcta: $x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + ... + x_n A^{(n)} = b$ donde $A^{(k)}$ representa la columna de *A* que ocupa el lugar *k*. Los estudiantes, con ayuda del profesor, entienden que la relación encontrada entre *b* y las columnas de *A*, merece un nombre, 'combinación lineal'. Luego, en el análisis de la unicidad, o no, de la solución, surge la afirmación 'una de las columnas de *A* es una combinación lineal de las otras columnas' y su 'negación', situaciones que se designan, respectivamente, con los nombres de dependencia e independencia lineal.

III.2.4 Según Artigue y Alves Dias

La mayoría de los trabajos de Michèle Artigue están vinculados a la enseñanza del Cálculo, pero también ha incursionado en el dominio del AL, donde sus aportes operan a modo de síntesis de las herramientas didácticas descriptas por otros investigadores, muy particularmente, en el campo de las representaciones y los modos de pensamiento.

Dificultades

Desde el punto de vista epistemológico, Artigue (2003, p. 127) opina, en coincidencia con Dorier, que el advenimiento, a la escena matemática, del concepto abstracto de Espacio Vectorial comparte características comunes con el concepto de límite, en el sentido de que no fue fácilmente aceptado por los matemáticos debido a que su carácter generalizador, unificador y formalizador fue mucho más fuerte que su potencial para resolver nuevos problemas, sensación que se repite en los estudiantes, quienes no necesitan esta construcción abstracta para resolver la mayoría de los problemas de un primer curso de AL.

Artigue etiqueta bajo el dominio de la *flexibilidad cognitiva*[29] a los acercamientos que cada perspectiva teórica hace respecto a la articulación entre los niveles de lenguaje, entre los modos de pensamiento, entre los registros de representación y entre los diferentes puntos de vista, e insiste en que esta complejidad no aparece en los manuales y que se confía en que la capacidad de esta articulación sea asumida automáticamente por los estudiantes, una vez que tengan disponibles las respectivas técnicas (Artigue, 1999, pp. 1383-1384).

Alves Dias y Artigue (1995) mostraron que las tareas que se ofrecen a los estudiantes, tanto en los manuales como en las clases, son muy limitadas en términos de flexibilidad. Por ello diseñaron ejercicios para movilizar estos cambios alrededor del concepto de rango, que les ayudó a identificar nuevas dificultades, tales como la identificación de un tipo de representación, exclusivamente por características semióticas, así como los escasos medios de control sobre la validez de las declaraciones de los estudiantes y la anticipación de resultados.

Propuestas

Artigue se ocupa de recalcar que el camino del conocimiento al AL está plagado de rupturas y reconstrucciones, y para darle fuerza a este pensamiento recurre a otro del matemático Poincaré (1904, en Artigue, 2003, p. 126) que, al comienzo del siglo XX, ya afirmaba que “necesariamente los conceptos no pueden enseñarse desde el principio en su forma definitiva”. Ella remite a los trabajos específicos de Dorier et al. (2000b) en Francia, que intentan posibilitar que los estudiantes realicen un trabajo reflexivo y cultural en relación con los conceptos del AL; también menciona la propuesta de Carlson et al. (1993) para reducir los tópicos de AL en un primer curso en EE.UU y la reacción, a esta propuesta, de Hillel y Sierpinska (1994), en Canadá, a la que nos referiremos a continuación.

También toma en cuenta el análisis de las relaciones entre dos puntos de vista, que Alves Dias (1998, en Artigue, 2003, p. 129) considera fundamentales en el tratamiento del AL: los puntos de vista paramétrico y cartesiano[30], cuyo antecedente puede encontrarse en varios trabajos de Rogalski (en Dorier, 2002, p. 877).

III.2.5 Según Sierpinska, Oktaç y Hillel

Dificultades

> “Vivir en un mundo de Álgebra Lineal construido a partir de la estructura de $\mathbf{R}^n$ hace difícil diferenciar vectores y transformaciones de sus representaciones canónicas y puede inducir nuevos obstáculos.” (Hillel y Sierpinska, 1994, en Artigue, 2003, p. 128).

[29] El término ‘flexibilidad cognoscitiva’ es introducido al ámbito de la didáctica por Alves Dias (1993, en Dorier, 2000a, p. 71), en su tesis doctoral, y retomado en Alves Dias y Artigue (1995), para designar la movilidad entre diferentes marcos, registros o puntos de vista.

[30] “Se adopta un punto de vista *paramétrico* con un subespacio vectorial, por ejemplo, si el subespacio viene caracterizado por algún conjunto de generadores. Un punto de vista *cartesiano* consiste en caracterizar un subespacio como las soluciones de un sistema lineal o como el espacio anulador de un operador lineal.” (Artigue, 2003, p. 129)

Así opinan estos investigadores respecto a limitar los primeros cursos de AL a los espacios isomorfos a R^n, dando énfasis al cálculo matricial y sus aplicaciones, tal como propuso Carlson et al. (1993) en el seno del grupo LACSG.

Asimismo, asocian la dificultad para comprender la estructura algebraica de los Espacios Vectoriales, a la complejidad de las interacciones entre diversos tipos de lenguajes propios del Algebra Lineal, el *lenguaje geométrico* de los espacios en dos y tres dimensiones (segmentos orientados, puntos líneas, planos y transformaciones geométricas), el *lenguaje aritmético* de la teoría más específica de R^n (n-úplas, matrices, rango, solución de sistemas de ecuaciones) y el *lenguaje abstracto* de la teoría general (espacios vectoriales, subespacios, dimensión, operadores, base) (Dreyfus, Hillel y Sierpinska, 1998, p. 209-210).

La Dra. Asuman Oktaç, que en la actualidad dirige un grupo de estudio que explora los conflictos cognitivos del Álgebra Lineal, llevó a cabo, junto a Anna Sierpinska y Alfred Nnadozie (2002), una investigación cuya pregunta central es ¿El pensamiento teórico es necesario para el éxito de los estudiantes en un curso de AL? Concretamente, se interesaron por conocer si los estudiantes que alcanzaron niveles altos de calificación en un primer curso de AL, poseían también una disposición elevada al pensamiento teórico, para lo cual entrevistaron, en el año 2000, a 14 estudiantes que se encontraban en esas condiciones, mediante siete preguntas diseñadas de modo que provocarían en los alumnos conductas bien diferentes que permitirían distinguir cuándo el entrevistado está haciendo uso de pensamiento teórico, o práctico, según un modelo teórico inicial, y en términos de 18 clasificaciones jerárquicas de conducta teórica, descriptos por los autores. Dos de las siete preguntas están vinculadas a la DL. El análisis de los dichos de los alumnos les permitió concluir, entre otros resultados interesantes, que seis estudiantes se comportaron teóricamente consistentes en la primera pregunta, y tan sólo tres, en la segunda. Asimismo, y a modo de enunciado más general, sostienen que los estudiantes encuestados se ven inclinados a un pensamiento 'definicional' de los significados, que es un instrumento muy común en la retórica. Además, revalorizan el rol del prensamiento práctico como un obstáculo epistemológico al pensamiento teórico, es decir como una manera de pensamiento contra el cual el pensamiento teórico se construye, y por consiguiente, sin el cual no podría construirse (pp. 43-55).

Joel Hillel (1997, en Gransard, 1998, p. 209) explica cómo las dificultades de los estudiantes americanos y canadienses, en su primer curso de AL al nivel de la universidad, son en parte debidas a su primer encuentro con pruebas y con una teoría general formal. Sin embargo, también sostiene que deben existir otras razones conceptuales inherentes a este dominio por cuanto los estudiantes franceses, que cuentan con una formación mucho más formal en matemática, también encuentran dificultades en los primeros cursos. Él proporciona detalles respecto a la dificultad de los estudiantes para identificar un vector con sus representaciones en bases diferentes, y más aún, cuando se trata de operadores lineales representados por su matriz normal o por matrices en otras bases.

Propuestas

Anna Sierpinska, Astrid Defence, Tsolaire Khatcherian y Luis Saldanha (1997, en Gransard, 1998, p. 209) distinguen tres modos de pensamiento en AL: el *sintético-geométrico*, *analítico-aritmético* y el *analítico-estructural*[31], que se corresponden respectivamente con los tres niveles de representación introducidos por Hillel y mencionados más arriba. Respecto a estos modos, los autores afirman que los estudiantes los utilizan espontáneamente, pero no siempre en su forma pura, sino que, a menudo usan una mezcla de ellos. Es así que sugieren tratar de usar la creatividad y las preferencias de los estudiantes por los cómputos para dirigir al razonamiento analítico, su pensamiento numérico.

Dreyfus et al. (1998, p. 211) destacan la necesidad de que el acercamiento geométrico al AL debe contemplar también los contraejemplos, esto es, transformaciones no lineales, de modo de facilitar la comprensión del concepto de linealidad, para lo que proponen un conjunto de actividades a realizar con Cabri II.

Respecto a los pensamientos teórico y práctico, Sierpinska (2004) reporta:

> "El pensamiento teórico es, sin duda, necesario para entender aún los conceptos más básicos del álgebra lineal. Pero no es suficiente para solucionar los problemas que no son justamente las versiones ligeramente diferentes de ejemplos resueltos de manuales, y seguramente no suficientes para aplicar o desarrollar el álgebra lineal. «Un entendimiento práctico» de la teoría es necesario para encontrar los accesos simpáticos rápidos, «los caminos fáciles» de hacer cosas." (pp. 21-22).

Vinculado con esta conclusión, y con experiencias que dan cuenta de que muchos estudiantes logran calificaciones altas en un curso sin entender sus ideas principales, Sierpinska et al (2002) vuelven a formularse la pregunta que guió su trabajo:

> "Si el álgebra lineal no puede ser entendida bastante bien sin el pensamiento teórico, y el pensamiento teórico no es necesario para el éxito en un curso de álgebra lineal, entonces ¿cuál es el sentido de hacer este curso obligatorio para tantos estudiantes?" (p. 166).

[31] Artigue (2003, p. 129) aclara estas ideas diciendo: "En el modo *sintético*, los objetos matemáticos son dados directamente a la mente, que intenta asimilarlos y describirlos. En el modo *analítico*, son dados indirectamente, construidos a través de definiciones y propiedades de sus elementos. Este modo analítico es dividido por los investigadores en dos sub-modos distintos: el analítico-aritmético, donde los objetos vienen dados por una fórmula que hace posible calcularlos, y el analítico-estructural, donde los objetos se definen por un conjunto de propiedades." Más aún, Artigue (1999, pp. 1382-1383) proporciona ejemplos al respecto cuando sostiene que: "Si uno piensa en las soluciones posibles de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas imaginándose el posicionamiento respectivo de tres planos en el espacio, está en el modo *sintético-geométrico*. Si uno piensa en este problema en términos de los resultados posibles de reducir una matriz de 3x3, está en el modo *analítico-aritmético*. Uno está en el modo *analítico-estructural* si, por ejemplo, piensa en términos de matrices singular y regular."

III.2.6 Otros

Dubinsky (2001) da varias alternativas a la propuesta del LACSG describiendo las de otros investigadores:

1) Gerald Porter presenta un acercamiento pedagógico en un curso de AL para estudiantes no matemáticos, usando un texto de desarrollo eminentemente práctico, pero menos cuidadoso en el soporte teórico. Para complementar el texto, él asigna a cada estudiante la tarea de escribir un capítulo que explique los conceptos de subespacio, base y dimensión, tomado como punto de partida el espacio de solución de un sistema de ecuaciones lineales y relacionando dicho material con la dimensión, líneas, planos e hiperplanos (*op. cit.*, pp. 8-9).

2) Banchoff y Wermer publican un nuevo manual que apoya un acercamiento curricular que tiene muchas semejanzas con el programa de Harel y que también trata con transformaciones lineales (*op. cit.*, p. 9).

3) Hern y Long, más que una propuesta pedagógica, hacen una descripción muy cuidadosa del efecto de las transformaciones lineales sobre varios objetos geométricos en dos y tres dimensiones, tales como círculos, esferas, rectángulos, paralelepípedos, triángulos y tetraedros; y cómo estos objetos se relacionan con conceptos principales del AL como valores propios, subespacios invariantes, formas canónicas de matrices y cadenas de Markov. Si bien no parece aplicable directamente en un primer curso de AL, resultaría interesante que algún didacta retomara estas ideas (*op. cit.*, pp. 9-10).

Otro trabajo sobre el que parece interesante detener la mirada es el de Hamdan (2003), en el que se propone organizar la enseñanza del AL alrededor de la técnica común de escalonar matrices, de modo que los estudiantes alcancen el conocimiento de los eslabones que enlazan las estructuras isomórficas. Con este propósito, él muestra una docena de situaciones en las que el procedimiento de reducir una matriz, es una técnica eficaz (p. 33).

También consideramos pertinente mencionar el trabajo, en el tema específico que nos ocupa, llevado a cabo por Donald Muench (1990), donde se proponen actividades a ejecutar con el lenguaje ISETL. Muench fundamenta su labor así:

> "Uno de los conceptos fundamentales del álgebra lineal es la noción de dependencia lineal de un conjunto de vectores. A menudo, los estudiantes tienen dificultad para comprender este concepto. Sin embargo, si ellos mismos tienen una posibilidad para formular la definición exacta, ellos asumen la custodia cognoscitiva del concepto. Si este concepto es resultado de su inversión en la expresión exacta, ellos deberían tener un mejor asimiento y una idea más clara de cómo demostrar declaraciones sobre la IL. Mostramos que el empleo de ISETL, naturalmente, requiere que los estudiantes sean aún más exactos y exigentes que el manual." (p. 1).

Finalmente, no podemos dejar de citar el libro "*Learning Linear Algebra with ISETL*", publicado por los investigadores norteamericanos y mexicanos Weller, Montgomery, Clark, Cottrill, Trigueros, Arnon y Dubinsky, inspirado en los trabajos de Muench, y que recibiera la colaboración de los integrantes del grupo RUMEC. Este libro aborda la enseñanza de un curso completo de AL con el uso del lenguaje mencionado.

Capítulo IV

La Enseñanza de la Dependencia Lineal en el Medio

Este capítulo tiene como propósito, por una parte, llevar a cabo un examen exploratorio que permita obtener información significativa respecto a ¿cómo 'viven' los conceptos de dependencia e independencia lineal? tanto en las instituciones del Polimodal, como del Nivel Superior, en el medio en el que hemos trabajado; y por otro parte, encarar un análisis disciplinar de tales conceptos, todo ello, bajo la mirada de los constructos de la Matemática Educativa.

IV.I La transposición y el contrato didácticos

Consistentemente con las preguntas 3, 4 y 5, formuladas en la sección I.2, p. 6, en este apartado, intentamos identificar las primeras aproximaciones al concepto de dependencia, sea lineal o no, que han experimentado los estudiantes que ingresan a la universidad. También efectuamos una exploración de los currículos, programas, guías de trabajo, notas didácticas, puestas en el aula y métodos de evaluación, que incluyen los tópicos de Espacios Vectoriales; y un análisis del abordaje que los libros de texto obrantes en las bibliotecas de las facultades, hacen de los temas involucrados en el presente trabajo. En otras palabras, indagamos acerca de ¿cómo fueron adaptados estos conceptos a estas instituciones didácticas? esto es, su transposición didáctica, y en lo posible, el contrato didáctico que rige en las clases, para más tarde analizar en qué medida éstos permiten detectar posibles obstáculos en la construcción, o bien, facilitan el aprendizaje significativo de los conceptos en cuestión.

IV.1.1 La Dependencia Lineal en la Escuela Media

La exploración de los currículos y competencias del Nivel Polimodal, indagaciones no estructuradas en el seno de las instituciones y nuestra propia experiencia, nos cuentan que la idea de la *dependencia lineal* no es trabajada, al menos en estos términos, en ese nivel; sin embargo, aún con este escenario, nos parece pertinente analizar los vínculos que sea posible establecer entre algunos acercamientos a la noción de dependencia, y muy particularmente, la compatibilidad de las concepciones que los estudiantes pudieran haberse formado de aquella, con el nuevo concepto por asimilar. Dicho de otra manera ¿qué puede rescatarse de aquellas ideas, concebidas en la escuela media, para coadyuvar a la construcción del concepto de dependencia lineal, en el primer año de los estudios universitarios? ¿qué marcas pueden dejar esos aprendizajes? ¿cuál es su influencia? ¿juegan un rol en contra? o bien ¿son inexistentes?

IV.1.1.1 La Dependencia entre los fenómenos del cotidiano

Con frecuencia, en su vida cotidiana, nuestros estudiantes han escuchado o utilizado la secuencia de palabras "depende de", por ejemplo cuando alguien afirma: "el lugar que elija para mis vacaciones *depende* del dinero que logre ahorrar este año", "la nota que obtengas en tu examen *depende* del tiempo que dediques al estudio". Dejando de lado la carga subjetiva que pueden tener estos enunciados, los mismos sugieren que existe un vínculo forzoso entre los pares de magnitudes que involucran, dinero-lugar, tiempo-nota; es decir que la aparición de *una variación en una de ellas, provoca una variación en la otra*. En el campo de las ciencias, también conocen que "la presión atmosférica *depende* de la altura" o que "la longitud de una circunferencia *depende* de su diámetro", y que en muchos casos, es posible asociarles una 'fórmula' que les permite visualizar aquella variación, manipulando las variables.

Ahora bien, cabe la pregunta ¿qué contacto tiene esta idea de la dependencia con la dependencia lineal de los espacios vectoriales? Veamos:

Supongamos un conjunto LD de *n* vectores, esto es, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de un espacio vectorial *V*. Como el conjunto es LD se sabe que al menos uno de los vectores es combinación lineal de los restantes; sea éste, por ejemplo, el vector no nulo $v_1 = a_2 v_2 + a_3 v_3 + ... + a_n v_n$, expresión que también puede ser escrita: $0 = (-1)v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + ... + a_n v_n$. Salvo en el caso de los vectores con coeficientes nulos, *cualquier variación de los vectores* $v_2, v_3, ..., v_n$ *producirá una variación en el vector* v_1. En este contexto, podemos también interpretar que v_1 'no depende' de aquellos vectores cuyos coeficientes son ceros (porque sus variaciones no lo modifican, no influyen sobre el mismo), aunque la definición formal es más general en este sentido, y en particular, por la necesidad de poder admitir que el vector nulo, es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores.

Pero este es sólo un punto de vista de la cuestión, que puede traer poco significado en el seno de los espacios vectoriales, por cuanto la dependencia está vinculada a la variación de los vectores de un conjunto de vectores, supuestamente dado; pero adquiere sentido, cuando se tratan las expresiones de un mismo vector en distintas bases. Aún así, podemos concebir la situación de modo de involucrar la variación de los escalares, en lugar de la de los vectores. Supongamos tener un conjunto $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ LI, simplemente por comodidad, de *n* vectores de un espacio vectorial *V* de dimensión *n*. Un vector cualquiera $v_{n+1} \in V$ es CL de los vectores de *A*, y por lo tanto puede escribirse, de manera única como $v_{n+1} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + ... + a_n v_n$. Cualquier variación en el conjunto de escalares generará un vector distinto, cuyo conjunto, como se sabe, recibe el nombre de *envolvente lineal* de *A*, o bien *cápsula* de *A*.

Vemos entonces que en ambos casos el contacto al cual nos referimos, aunque con ciertas adaptaciones, es bastante obvio y simple, es el de la variación ligada a la dependencia, ya sea lineal, o no.

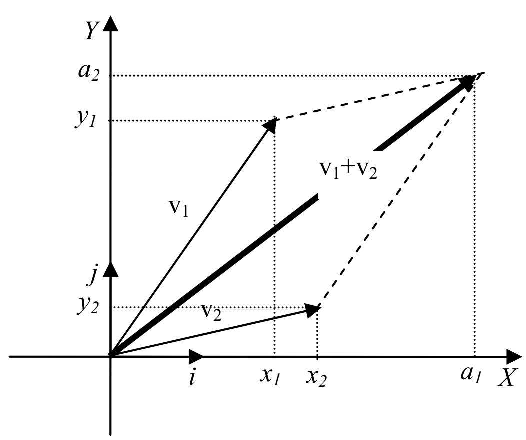
Respecto a las preguntas que guían este apartado, podemos agregar que la idea de la dependencia, en este sentido que hemos apuntado, debería quedar bien establecida en el Nivel Medio y que, al menos, cumpliría el rol de justificar, debido a su consistencia, uno de los términos con que se ha decidido denominar a aquel concepto, ciertamente más complejo, de la dependencia lineal.

Entonces, no podemos negar la existencia de estos conocimientos previos, pero su impacto en los nuevos, lejos de resultar negativos, no parecerían ser retomados en la enseñanza superior, tal vez, justamente, por su supuesta obviedad, quedando a cargo del aprendiz la responsabilidad de establecer tal conexión. Volveremos a trabajar este punto, más adelante.

IV.1.1.2 La Dependencia entre los sumandos y la suma de vectores

El tratamiento de los vectores, tanto en el plano como en el espacio, ocupa un lugar en los Contenidos Básicos Comunes del Nivel Polimodal (CBC) (1997). En este documento se propone trabajarlos desde sus aplicaciones (como representativos de fuerzas, traslaciones, velocidades, aceleraciones, etc.), desde la geometría (como generadores de rectas) y recuperar las nociones de distancia y ángulo. En este marco se introducen las nociones de producto escalar y vectorial.

En la práctica se observa el uso exclusivo de las representaciones cartesianas en base canónica (por supuesto, evitando mencionar estos términos) y su suma, apoyada fuertemente en la regla del paralelogramo, tal como se muestra en la figura que sigue. No se menciona la noción de dependencia lineal de los tres vectores en juego, y mucho menos, el concepto de espacio vectorial.



$$v = v_1 + v_2 = (x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j}) + (x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j})$$

$$\Downarrow$$

$$v = (x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j}$$

$$\Downarrow$$

$$v = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j}$$

La última expresión muestra claramente al vector suma como una combinación lineal de los vectores de la base.

El desarrollo de este tema debería dejar una marca bien visible en los estudiantes, al menos respecto a que, dados dos vectores no colineales de un plano, un tercer vector de ese plano puede expresarse siempre como combinación lineal de aquellos dos. Sin embargo, nada de eso se percibe en el primer año de la universidad.

IV.1.1.3 La Dependencia entre las variables en las funciones lineales

Las funciones lineales asumen dos aspectos en la Escuela Media: la forma explícita $y=mx+n$, que es la más propicia para la representación manual y cartesiana de la recta, o bien, la implícita $ax+by+c=0$, en las que la variable *y* suele denominarse dependiente y la *x*, independiente. No se perciben tratamientos vectoriales ni paramétricos de la ecuación de la recta. Por lo tanto, se trata nuevamente de un contexto de dependencia vinculado ahora a una ecuación, en la que haciendo variar *x*, a través de infinitos valores, se obtienen los infinitos valores correspondientes de *y*. Aquí podría quedar en evidencia la noción de 'grados de libertad' o de 'grado de indeterminación' de una ecuación como 'el número de variables a las que es lícito asignar valores arbitrarios'.

Sin embargo, curiosamente, la cuestión de la dependencia en este contexto no parecería ser retomada a la hora del aprendizaje de la dependencia lineal en el nivel superior. Tampoco los grados de libertad, no serían mencionados al tratar la ecuación lineal con dos variables.Ambos representan casos muy raros por cierto, en el Nivel Medio, al menos en las instituciones en las que hemos trabajado. Esta situación coincidiría con lo que reportan Panizza, Sadovsky y Sessa (1999) en relación con una experiencia en la cual el 90% de los alumnos no pudo obtener ninguna solución de la ecuación $3x+2y=7$, y el 10% restante utilizó un procedimiento, en ese momento sorprendente para ellas, esto es, agregar otra ecuación lineal y resolver el sistema resultante, obstáculo que les impediría hacer confluir en este objeto matemático las nociones de *variable* y de *dependencia* para obtener soluciones. Este resultado encontraría fundamento en que:

> "(…) la escuela considera el objeto «ecuación lineal con dos variables» en dos situaciones específicas: o bien como ecuación de la recta, donde la misma aparece entonces como «la etiqueta del dibujo de una recta» o bien como una de los componentes en los sistemas lineales." (*op. cit.*, p. 454).

Tal vez esta expresión sea un poco exagerada para los tiempos que corren ya que el tópico figura expresamente en los CBC (1997), pero nos consta que los pocos ejemplos que se exploran en la escuela media, se llevan a cabo como breve preludio del abordaje de los sistemas de ecuaciones lineales, que a la sazón tienen casi siempre solución única, y luego, quedan absorbidos por éstos. Finalmente, las autoras concluyen que:

> "(…) la ecuación lineal con dos variables no es reconocida por los alumnos como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números.";
>
> y que,

> "Cualquiera haya sido el trabajo realizado alrededor de «ecuación de la recta», éste no parece suficiente para que los alumnos puedan establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente." (*op. cit.*, p. 459).

IV.1.1.4 La Dependencia entre las ecuaciones de un sistema lineal

Los CBC también contemplan la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales propiciando, tanto las resoluciones analíticas como las gráficas, la comparación de los distintos métodos y la discusión del número de soluciones. Sin embargo, la observación de las prácticas docentes nos dice que los profesores no se sienten inclinados a presentar a sus alumnos los sistemas que aquí llamamos 'impertinentes'[32], y tienden a proveer sistemas compatibles y determinados, tal como lo reportan Panizza et al. (1999, p. 459): "(...) como producto de que la mayor parte de los sistemas que los alumnos resuelven tienen solución única (...)."

Curiosamente, según hemos podido constatar en la génesis histórica del concepto que consignamos en la sección *III.1*, p. 31, del presente trabajo, son los sistemas impertinentes, y muy en particular, aquellos que derivan en identidades tales como 0=0, los que brindan un acceso privilegiado a la noción de dependencia lineal, como así también a:

> "(...) los determinantes, las matrices, las rectas, la naturaleza de las soluciones, los vectores, las combinaciones lineales, y muy especialmente, los cambios de registro semiótico, que si bien operan en este contexto como mediadores, se convierten en potentes herramientas en la formación matemática posterior." (Andreoli, 2003, Resumen).

Dentro de la predilección de proveer sistemas con solución única, existiría también la preferencia respecto a la utilización de la técnica de resolución por determinantes, que deriva, en el caso de los sistemas indeterminados, en expresiones ${}^{0}\!/_{0}$, y en los sistemas incompatibles, en expresiones ${}^{a}\!/_{0}$ con $a \neq 0$; mientras que cualquier otro método, aplicado en su estado puro[33], recae en identidades $0 = 0$ o equivalente, y en contradicciones $0 = 1$ o equivalente, respectivamente. Es en este punto que cabe la pregunta ¿qué interpretación pueden dar nuestros estudiantes a esos resultados? si no es, por un lado, la de *dependencia lineal*, y por el otro, la de *contradicción*, de dos o más ecuaciones del sistema. Estas ideas no serían levantadas por los docentes de la Escuela Media y las interpretaciones hechas por los alumnos, nos recuerdan al 'accidente' mencionado por Euler, que le provocara a éste, que una o más incógnitas quedaran indeterminadas.

---

[32] Adoptamos el término 'impertinentes' (también 'inoportunos') introducido por Fraile (1977, en Mora, 2000) para referirnos a los sistemas indeterminados. En este escrito extenderemos también el término a los sistemas incompatibles.

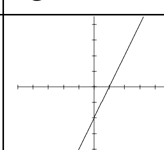
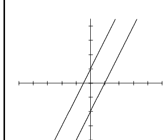
[33] Nos referimos a los métodos denominados de 'sustitución', 'igualación', y en particular al método llamado de 'reducción o sumas y restas', que no conserva la traza de las ecuaciones (como sí lo hace la eliminación gaussiana) arrojando, como único resultado, la expresión 0=0 o equivalente.

Un ejemplo de lo que describimos es lo que reportan Panizza et al. (1999, p. 456) al sostener que los estudiantes tienden a invalidar la ecuación como modelo del problema: "*«Para mí hay soluciones (del problema), pero esta ecuación no sirve.»*"[34]

Recapitulando, ante los sistemas impertinentes, el método de los determinantes (Regla de Sarrus) sólo nos provee información suficiente para clasificar el sistema según el cardinal del conjunto solución, lo que dicho sea de paso, es más que suficiente en el caso de los sistemas incompatibles; pero se convierte en un camino fallido cuando se está en presencia de sistemas indeterminados, si lo que se pretende es conocer, al menos, alguna de sus infinitas soluciones. Cumplir con éste objetivo requiere, cambiar la técnica y comenzar de nuevo.

Veamos, a través de un problema (con una variante que se indica entre paréntesis), cómo lograría abrirse el debate, y dar lugar a algunas de las interacciones que pueden establecerse entre los distintos registros:

> *"Jorge y Camilo son dos docentes argentinos que, a pesar de que ya es día 10 del mes, todavía tienen algún dinero en el bolsillo. Acerca de este milagroso suceso, se conocen los siguientes datos: i) se obtiene $236 si se suman el doble del dinero de Jorge y el triplo del dinero de Camilo; ii) si se suma las tres cuartas partes del dinero que tiene Camilo y la mitad del que tiene Jorge, entre ambos juntarían $59 ($40) ¿Cuánto es lo que atesoran en sus envidiables faltriqueras estos afortunados trabajadores de la tiza?."*[35]

Modelización del problema	**Registro algebraico**		**Registro vectorial**		**Registro geométrico**[36]
	Sarrus	**Otro método**	**Matrices**	**Combinación lineal**	
$\begin{cases} 2J+3C=236 \\ \frac{1}{2}J+\frac{3}{4}C=59 \end{cases}$	$J=\frac{0}{0}$ $C=\frac{0}{0}$ infinitas soluciones	0 = 0 o equivalente	$\left[\begin{array}{cc\|c} 2 & 3 & 236 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	(2,3,236) = 4(1/2, 3/4, 59) o sea 1(2,3,236)+(-4)(1/2,3/4,59)= =(0,0,0)	 rectas coincidentes
$\begin{cases} 2J+3C=236 \\ \frac{1}{2}J+\frac{3}{4}C=40 \end{cases}$	$J=\frac{57}{0}$ $C=\frac{-38}{0}$ no admite solución	236 = 160 o equivalente	$\left[\begin{array}{cc\|c} 2 & 3 & 236 \\ 0 & 0 & -76 \end{array}\right]$	(2,3,236)≠*a*(1/2,3/4, 40) o sea no existen reales *b* y *c*, no nulos a la vez, tales que: *b*(2,3,236)+*c*(1/2,3/4,40)= =(0,0,0)	 rectas paralelas

Finalmente, como habíamos anticipado, la noción de la dependencia lineal no está instalada en el Nivel Polimodal, tal como la concebimos en el seno del AL.

[34] Cabe aclarar que estos dichos fueron vertidos en el contexto de la resolución de una ecuación lineal con dos variables, al practicar los alumnos, lo que las autoras denominan 'sustitución en sí misma', y que nosotros extrapolamos, por similaridad, a la situación que nos ocupa.

[35] Adaptado de un problema propuesto en una Guía de Trabajos Prácticos de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta. Argentina.

[36] Las rectas que se muestran son sólo ilustrativas y no responden a los datos del problema, ni a su contexto.

Lo que hemos encontrado es, por una parte, interesantes aproximaciones al concepto general de dependencia, y por otra, situaciones que permitirían la génesis de importantes nociones en aquel nivel, o bien, merecerían ser retomadas, como el lugar desde donde los estudiantes puedan desplegar algún procedimiento de base para los nuevos conceptos.

Es por ello que, en términos de transposición didáctica, estamos en condiciones de afirmar que la idea de la DL es inexistente, en tanto y en cuanto no se aborda ni se menciona en el Nivel Medio; no obstante, lo realmente significativo es que los estudiantes acepten, sin explicación alguna, el hecho de que la aplicación de la Regla de Sarrus arroje tan extraño resultado, como lo es la expresión $0/_0$. Pero, revisando la literatura, esta situación no debería sorprendernos debido a que encuadra perfectamente en lo que reportan Gascón et al. (2004, p. 19), bajo el título: "Aplicar una técnica en Secundaria no incluye la interpretación del resultado", en relación con lo que acontece en la ESO[37] y que puede extrapolarse, sin temor a equivocarse, a nuestra comunidad:

> "En la enseñanza secundaria no se suele exigir, porque no forma parte del *contrato didáctico* vigente en dicha institución, que los alumnos interpreten el resultado de aplicar una técnica para considerar si dicha técnica ha estado «correctamente» utilizada. Así, por ejemplo, el uso escolar de la resolución de ecuaciones no suele incluir ninguna «interpretación» de los resultados obtenidos. En la enseñanza universitaria esta interpretación se da por supuesta y se trabaja sobre dicho supuesto."

Esta aseveración parece sugerir que la responsabilidad de la búsqueda del sentido de los resultados quedaría a cargo del docente; sin embargo, en esta ocasión, no la lleva a cabo ninguno de los personajes que participan en la escena didáctica.

IV.1.2 La Dependencia Lineal en la Universidad Nacional del Nordeste

IV.1.2.1 El escenario didáctico

Del análisis de los currículos de las distintas carreras que se imparten en la Universidad Nacional del Nordeste de la República Argentina, resulta que se dictan temas de Álgebra Lineal en ocho asignaturas cuatrimestrales de los Planes de Estudio, cuatro de las cuales se cursan en la FaCENA, en la ciudad de Corrientes, tres en la FAI, en la ciudad de Saenz Peña y la restante, en la FI, en la ciudad de Resistencia. Una de estas asignaturas forma parte del segundo año de la carrera, por lo tanto, no será objeto de estudio en este apartado.Además, analizadas ciertas similitudes entre las restantes, las hemos reagrupado en cinco.

A través del siguiente cuadro, se muestra el lugar que ocupan los conceptos de DL e IL en los programas de cada asignatura, indicando los tópicos que le preceden y los que le siguen, las carreras para las cuales se imparten y sus respectivas cargas horarias semanales.

[37] Enseñanza Secundaria Obligatoria que tiene su origen en la Ley Orgánica 1/1990 del 3 de octubre para la Ordenación General del Sistema Educativo, conocida como LOGSE.

Parte de la información de este cuadro, y de la que le sigue, fue provista por los propios docentes a través de la entrevista estructurada que se describe y analiza en el apartado V.1.3, pp. 112-117, del presente trabajo, y confrontada con documentación obrante en las Facultades.

En primer lugar, queremos establecer la principal diferencia que observamos entre la asignatura C1 (también C2) y las restantes. Éstas se imparten a alumnos que han decidido estudiar Matemática, ya sea a través del Profesorado o la Licenciatura; mientras que a las demás asignaturas se las considera de ‘servicio’ en otras carreras profesionales. Las diferencias a las que aludimos, es posible analizarlas desde tres ángulos:

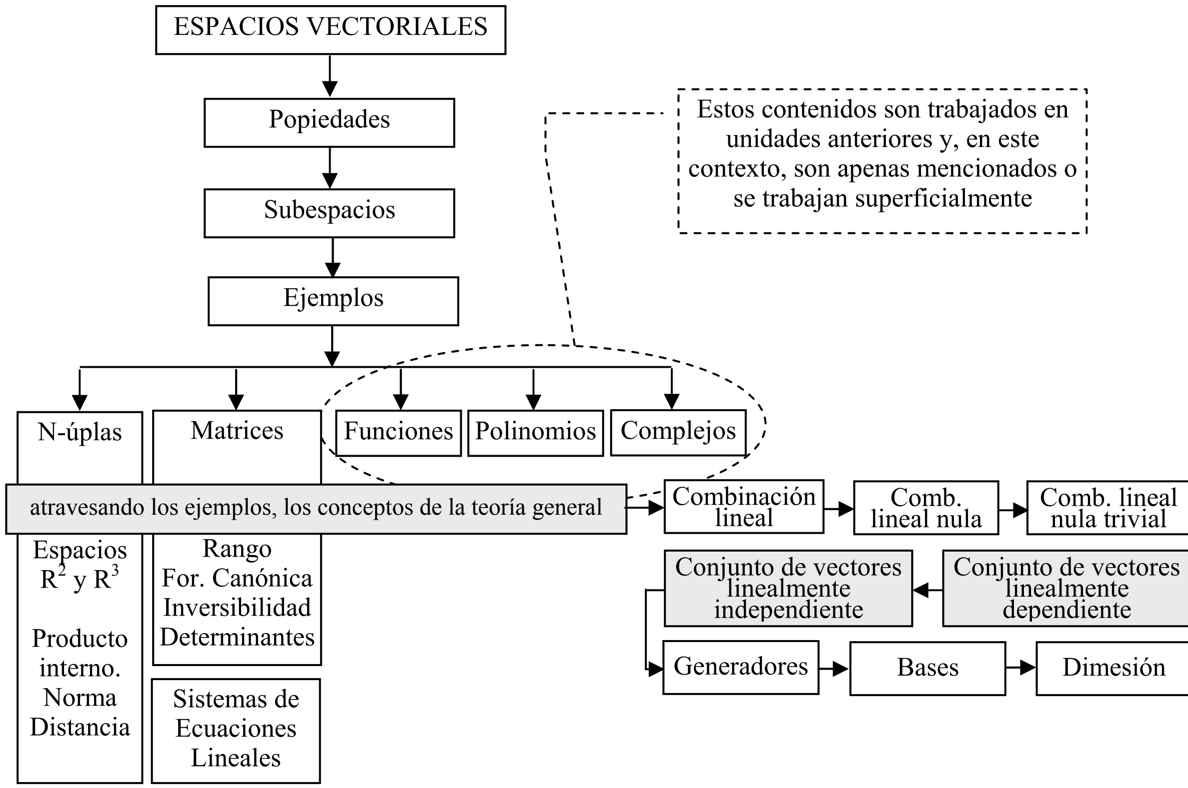
1. Los tópicos del AL se desarrollan en las carreras del Profesorado y Licenciatura en Matemática a través de dos asignaturas cuatrimestrales completas con una carga horaria de 10 horas semanales; mientras que en las demás, abarca una única unidad de una sola asignatura que, en algunas circunstancias, tiene carga horaria semanal inferior.
2. La matrícula estudiantil promedio, tanto del Grupo Teórico como del Práctico de la asignatura C1 es de 60 alumnos, contra 900, 430 y 120, respectivamente, en las restantes.
3. Se supone que la formación, predisposición y vocación matemática de los estudiantes que cursan C1 es de nivel superior que en las demás.

Por las razones mencionadas, vamos a situarnos en el caso más desfavorable, lo que significa concentrar nuestra atención en las asignaturas de servicio, que dicho sea de paso, atienden al 80% de la matrícula estudiantil de la FaCENA. Por otra parte, se observa que, salvo algunos detalles que puntualizamos, las asignaturas C3, C4 y C5 muestran, no sólo una organización curricular, sino también un montaje didáctico y prácticas docentes similares; es por ello que tomaremos a C3 como asignatura testigo, representante de todas ellas, con el objeto de llevar a cabo el análisis de la transposición y contrato didácticos que las modela.

<u>De la secuenciación y temporalización de contenidos</u>

- La organización de los contenidos del tema “Espacios Vectoriales” consiste en:
- Se trabajan superficialmente, a través de uno que otro ejemplo, los subespacios generados, y las transformaciones lineales, y no se tratan los temas, subespacios fila, subespacio columna, envolvente, autovalores, autovectores, diagonalización, etc.
- El tiempo que se dedica al tema EV y a la DL e IL es, en promedio, de 8 horas y 2 horas respectivamente aunque, éstos últimos, atraviesan toda la unidad.

Cá-te-dra	Carreras	Unidad del programa que incluye los temas de DL e IL	Temas que se dictan antes	Temas que se dictan después
C1 10 hs	Profesorado y Licenciatura en Matemática	**U4: Dimensión de un espacio vectorial:** Combinación lineal de vectores Dependencia e Independencia lineal. Sistema de Generadores. Base de un EV. Dimensión de un EV. Coordenadas de un vector. Vectores aplicados en coordenadas.	Sistema de abscisas en la recta. Vectores aplicados. Vectores libres. Espacios vectoriales. Matrices y Determinantes Sistemas lineales.	Coordenadas en el plano y en el espacio. Subespacios. Transfor. lineales. Álgebra Vectorial. Recta y Plano. Ecuación general de segundo grado en dos variables. Ecuación general de segundo grado en tres variables. Curvas Gausas.
C2 10 hs	Profesorado y Licenciatura en Matemática	Esta asignatura, que complementa los temas faltantes de EV de C1, se imparte en el segundo año de estudios y por lo tanto se la excluye del presente análisis.		
C3 8 hs	Bioquímica Licenciatura en Cs. Químicas Profesorado en Cs. Químicas y del Ambiente Ingeniería Eléctrica Ingeniería en Electrónica Licenciatura en Ciencias Físicas Profesorado en Física	**U7: Nociones de AL** Espacio Vectorial. Definición. Propiedades. Vectores en R^n. Igualdad y norma en R^n. Combinaciones lineales de vectores. Dependencia e Independencia lineal. Base de un espacio vectorial. Versores. Bases canónicas. Coordenadas. Dimensión. *Álgebra vectorial.* Producto escalar. Producto vectorial. Producto mixto. Ángulos y cosenos directores en R^2 y R^3. Vectores paralelos en R^2 y R^3	Nociones de Lógica Proposicional. Elementos de Teoría de Conjuntos. Conjuntos Numéricos Análisis Combinatorio. Relaciones y Funciones. Polinomios a una indeterminada Funciones y Ecuaciones Polinómicas. Funciones y Ecuaciones no Polinómicas.	Nociones de Geometría Analítica. Matrices y Determinantes Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones Lineales
C4 10 hs	Licenciatura en Sistemas de Información	**U7: Nociones de AL** Espacios Vectoriales. Ejemplos: R^n. Matrices. Subespacios. Combinaciones lineales. Dependencia e independencia lineal. Sistemas de generadores. Base y dimensión de un EV. Rango de una matriz.	Fundamentos de Lógica Proposicional. Teoría de Conjuntos Relaciones y Funciones. Estructuras Algebraicas. Álgebra de Boole Polinomios. Nociones de complejidad computacional Raíces de un polinomio.	Matrices y sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales Combinatoria. Nociones de Geometría Analítica.
C5 10 hs	Ingeniería Electromecánica Ingeniería Civil Química Alimentos	**U3: Estructura de EV** Definición de EV. Subespacios. Ejem. (R^2,+,R,.) Combinación Lineal. Conjunto generador. Vectores LI y LD. Base. Dimensión. Coordenadas. Base canónica. Componentes. Paralelismo. Algoritmos.	Lógica Proposicional Estructuras Algebraicas	Matrices y Det. Ecuac y Sist. L. Calculo vectorial. Recta en el plano y espacio. Cónicas. Tr. Lin. Autoval. y autove.



De la modalidad de las clases teóricas:

- Se caracterizan por tratarse de clases expositivas cuasi-magistrales, con la sola diferencia de que se producen pausas debidas a preguntas que formula el docente, y en pocos casos, el alumno.
- El profesor utiliza el pizarrón, a veces filminas, en su exposición de las definiciones y teoremas y recurre a unos pocos y sencillos ejemplos, emulando una clase teórico-práctica.
- No se exige, aunque a veces se recomienda, la lectura previa de los temas a desarrollar.
- Las clases teóricas no son obligatorias y a ellas asisten el 40% de los alumnos inscriptos.

De la modalidad de las clases prácticas

- El docente intenta que los alumnos resuelvan por sí mismos, o en grupos, las actividades que se plantean en las guías, pero esta estrategia siempre le insume más tiempo del que él está dispuesto a dedicarle al tema, y tiende a resolver en el pizarrón, en la mayoría de los casos, la actividad que propuso.
- Si bien se cuenta con un laboratorio informático, resulta insuficiente para atender grupos tan numerosos, y en consecuencia, no se utiliza este recurso en ninguna clase práctica.
- Se exige la asistencia al 75% de las clases prácticas, de modo que si no se alcanza este porcentaje, el estudiante pierde la regularidad en la asignatura y en tal caso puede optar entre rendir en condición de alumno libre, o bien, recursar la materia en el próximo ciclo lectivo.

De las actividades de las guías de trabajos prácticos

- o De corte predominantemente algorítmico. En C3, a diferencia de las otras asignaturas, se nota la intención de proponer, en cada trabajo práctico, situaciones integradoras, que generalmente consisten en cuestionarios que permiten al estudiante manipular cada objeto matemático puesto en relación con otros a través de la red interna que subyace a los mismos, y a la vez diluir, de modo de hacerla casi imperceptible, la frontera entre la teoría y la práctica.
- o Se observan escasas situaciones en contextos extramatemáticos; generalmente puede encontrárselas en los tópicos que tratan los sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales. Paradójicamente, estas actividades son las primeras candidatas a suprimirse cuando el tiempo apremia. Las prácticas relacionadas con la DL e IL, se reducen a trabajar en el contexto de las n-úplas.
- o No se plantean problemas abiertos a la investigación a cargo de los estudiantes.

De las notas didácticas

- o Son elaboradas por los profesores y auxiliares de cada asignatura, y en algunos casos son adoptadas por alumnos y docentes de materias afines, quienes las incluyen en sus bibliografías recomendadas.
- o Contienen desarrollos teóricos y ejemplos resueltos que siguen la secuenciación propuesta en el programa. El tema específico de la DL e IL, de forma similar que en las prácticas, transcurre en el campo de las n-úplas, con algunos pocos ejemplos en otros espacios.
- o En las versiones más modernas, se observa una especial preocupación por publicar notas que reflejen un acercamiento más acorde a las últimas tendencias en educación y que incluyen una breve reseña de las génesis histórica de los conceptos, que tienden a la integración de la teoría y la práctica; que son auto-contenidas en el sentido de que pueden ser leídas en forma autónoma al resto de las notas, si bien es necesario contar con conocimientos de unidades anteriores; contienen situaciones resueltas y propuestas que intentan favorecer la construcción de las nociones por parte de los alumnos y, en algunas, se incorporan instrucciones para realizar tareas en el ordenador.

De la modalidad de la evaluación

- o La evaluación de los aprendizajes está lejos de ser continua, dado que consiste en la recepción de dos o tres exámenes parciales vinculados a los conocimientos prácticos, cada uno con derecho a un recuperatorio, y otro adicional, extraordinario. Además del porcentaje de asistencia ya citado, los estudiantes deben aprobar el 100% de los exámenes parciales para obtener la condición de regulares, y así tener derecho a rendir el examen final que, en ese caso, versa sobre temas teóricos.

- El examen final consiste en general en el requerimiento de definiciones, teoremas y propiedades escritos, seguidos de preguntas verbales que, se supone, apuntan a detectar la verdadera comprensión de lo plasmado en el papel. En la asignatura C3 se observa una variante sustancial en este sentido, respecto a las demás asignaturas, y acorde a lo realizado en la práctica; el instrumento de evaluación, que consiste en un cuestionario cuidadosamente diseñado, arrojaría una calificación más crítica y justa, de acuerdo a un saber comprobable, a la vez que disminuye el grado de subjetividad del agente evaluador y desanima el aprendizaje memorístico por parte de los alumnos.

De la actitud de los estudiantes

- Tal como indica Gascón (2004), se trabaja con el supuesto de que el alumno gestionará su propio estudio, sin embargo, esta presunción no encuentra eco, salvo en algunas excepciones.
- La preocupación mayor de los estudiantes es la de tomar apuntes que se reducen a lo que el profesor escribe en el pizarrón, denotando, mayoritariamente, una actitud pasiva.
- Centran su atención en la reproducción de técnicas utilizadas por el docente, y tienden fuertemente a la retención memorística, como recurso alternativo a la falta de comprensión.

IV.1.2.2 La Dependencia Lineal en los libros de texto

En este apartado analizamos algunos libros de texto obrantes en la Biblioteca de la FaCENA que tratan los conceptos de DL e IL de vectores. Casi todos los que se citan se encuentran recomendados en la bibliografía de al menos uno de los programas de las asignaturas descriptas en el apartado anterior.

Albino de Sunkel, M. (1984). *Geometría analítica en forma vectorial y matricial*. Ed. Nueva Librería S.R.I, 467 págs.

> Luego de trabajar los conceptos de segmento y recta orientados, define CL de vectores geométricos en el plano y el espacio, etc., EV reales, e introduce la noción de DL, a la vez que da el significado de CLN, CLNT y CLNNT. Continúa con las definiciones de base, dimensión, coordenadas, etc., para finalmente desarrollar temas de geometría analítica y transformaciones lineales. No contiene situaciones extramatemáticas.

Cotlar, M. y Ratto, C. (1963). *Introducción al algebra. Nociones de algebra lineal*. Ed. Universitaria. Buenos Aires.

> Inicialmente trabaja los conjuntos numéricos, estructuras algebraicas y álgebra proposicional, para luego sumergirse en la teoría de matrices y transformaciones lineales, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, etc. Introduce la noción de EV y define vectores de los espacios euclídeos ordinarios y EV abstractos y numéricos. Se apoya fuertemente en los vectores en R^2 para introducir la DL. Da las ideas de generador, base, cápsula lineal, etc. No contiene situaciones extramatemáticas.

Grossman, S. (1996). *Álgebra lineal*. Quinta edición. Traducción M. González Osuna, México. Ed. McGraw Hill, 634 págs.

Comienza desarrollando los sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes, para luego encarar el estudio de los vectores en el plano y en el espacio. Introduce los EV, subespacios, CL, DL (donde propone un problema relacionado con mezclas de concreto) e IL, base, dimensión, rango, nulidad, espacio fila y columna, transformaciones lineales, etc. Contiene interesantes aplicaciones a la economía.

Hoffman, K. y Kunze, R. (1973). *Álgebra lineal*. Traducción y adaptación Hugo E. Finsterbusch. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., 400 págs.

En primer lugar encara los sistemas de ecuaciones lineales matricialmente y en segundo, los EV. Luego las transformaciones lineales, polinomios, determinantes, etc. Resulta interesante destacar la opinión del autor cuando afirma que "(...) el AL es aquella rama de la matemática que trata de las propiedades comunes de los sistemas algebraicos, que constan de un conjunto, más una noción razonable de CL de los elementos del conjunto."

Lang, S. (1990). *Introducción al álgebra lineal*. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana S.A., Wilmington, Delaware, E.U.A. Impreso en EE.UU., 265 págs.

Presenta los vectores geométricos, las matrices y los sistemas de ecuaciones lineales, y luego los EV, CL en el seno de las n-úplas, conjuntos convexos, IL, dimensión, rango, aplicaciones lineales, etc. No presenta aplicaciones en contextos reales, salvo las cadenas de Markov al trabajar con matrices.

Lipschutz, S. (1970). *Teoría y problemas de álgebra lineal*. Serie de compendios Schaum. Traducción y adaptación Hugo Paredes Manchola y Luis R. Jiménez Becerra. Ed. McGraw Hill. Impreso en Colombia, 334 págs.

Trabaja previamente vectores en R^n y C^n, ecuaciones lineales, matrices, y luego, los EV, donde provee ejemplos en R^n, matrices polinomios, funciones, complejos, etc. Luego sigue con subespacios, CL, subespacios generados, DL e IL, base, dimensión, etc. No presenta aplicaciones en contexto extramatemático.

Noble, B. y Daniel, J. (1989). *Álgebra lineal aplicada*. Traducción V. González Pozo. Impreso en México. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.

Comienza su libro desarrollando temas de álgebra matricial, planteando preguntas y aplicaciones simples. Luego aborda la solución de ecuaciones y cálculo de inversas. Más tarde trabaja con vectores geométricos para finalmente encarar el estudio de los EV. Propone aplicaciones en contextos reales, pero no en el caso específico de la DL.

Rojo, A. (1972). *Álgebra II*. Ed. El Ateneo. Buenos Aires.

Presenta en primer término la estructura de espacio vectorial; define subespacio, CL, DL e IL, basándose en ejemplos en R^2, funciones y matrices. Luego define sistema de generadores, base, dimensión, y aborda las transformaciones lineales, matrices, determinantes, sistemas lineales, etc. No presenta aplicaciones en contexto extramatemático.

Strang, G. (1986). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Versión española de M. López Mateos. UNAM. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana S.A. Impreso en EE.UU., 454 págs.

> Inicialmente, aborda la eliminación gaussiana; luego, la teoría de las ecuaciones lineales, donde define los EV y subespacios. Define antes la IL afirmando que tiene lugar "si todas las CL no triviales de los vectores son distintas de cero". Luego desarrolla proyecciones ortogonales y mínimos cuadrados, determinantes, etc. Presenta aplicaciones en contextos reales, pero no en el tema específico de la DL.

Villamayor, O. (1976). *Álgebra lineal*. O.E.A., Washington D.C, 128 págs.

> Trabaja inicialmente ejemplos introductorios (fuerzas, desplazamientos, pares, n-úplas, polinomios, funciones) donde muestra las propiedades comunes, para luego abstraerse de la naturaleza de los elementos. Define EV, IL, base, dimensión, coordenadas, etc.; luego, transformaciones lineales, determinantes, etc. Plantea originales situaciones intramatemáticas.

Las diferencias que notamos entre los distintos libros de texto revisados consiste, no precisamente en las definiciones de la DL e IL que, a lo sumo, son permutadas, sino en los conceptos que desarrollan previamente, y que se supone que el autor ha considerado como base de los que le siguen. En este sentido, se observan importantes disparidades. En general, no contienen situaciones en contextos extramatemáticos, salvo aquellos libros que expresamente indican en su título, que contienen 'aplicaciones'.

IV.2 Consideraciones desde la Matemática y la Matemática Educativa

En este apartado pretendemos realizar un análisis disciplinar –no exento de implicancias didácticas- de los conceptos y definiciones de la dependencia e independencia lineal de vectores y de sus ideas conexas, con el objeto de obtener un cuerpo ordenado de saberes relativos a tales conocimientos, dando respuesta a las preguntas 6, 7 y 8, que nos hemos planteado en la sección I. 2, p. 6, de este trabajo.

A efectos de abordar la problemática específicamente matemática que plantean estas nociones a nuestros estudiantes, intentamos identificar las componentes de esta obra, atendiendo a la estructura interna y a las interrelaciones de esas componentes. Es por ello que recreamos aquí lo que entendemos por definición y concepto de un objeto matemático; exploramos qué concepciones puede otorgársele al término 'vector' al interior del AL; construimos dos organizaciones o praxeologías matemáticas de dos tareas, de las que serán analizadas las respuestas de los estudiantes, en el subapartado V.1.1.3, pp. 102-108; y finalmente, describimos un campo conceptual, acorde a los fenómenos de la transposición y contratos didácticos identificados en la sección anterior.

IV.2.1 Concepto y Definición matemáticos

Un *concepto* matemático es el conjunto de ideas consistentes que forma o concibe el intelecto respecto a un objeto matemático.

La *definición* de un concepto matemático es un enunciado que identifica las relaciones existentes entre objetos matemáticos definidos previa e independientemente a partir de los términos primitivos o axiomas de una cierta teoría.

Desde una mirada comparativa tenemos que:

- Una definición es una proposición que describe los caracteres genéricos y determinantes de una idea; un concepto es la representación mental de dicha idea, que a su vez se plasma en distintas representaciones semióticas.
- Una definición puede enunciarse o no, un concepto existe, independientemente de nuestra voluntad de evocarlo.
- Una definición puede aprenderse de memoria, un concepto, no.
- Definir consiste básicamente en delimitar; poner fines o límites a un pensamiento para encontrar su verdadera esencia. Las definiciones forman parte de la esencia del concepto.
- Un individuo no puede apropiarse o dominar una noción o concepto sin que haya mediado el entendimiento.
- Una definición siempre tiene asociada un concepto y un concepto puede tener asociadas varias definiciones equivalentes según determinen el mismo conjunto de ejemplos.

En relación con las definiciones, Gascón, Lecanda, Sales y Segura (2004) señalan el cambio de rol, de descriptivo a constructivo, que sufren aquellas en la transición de la Enseñanza Media a la Universidad; es así que reportan:

> "El papel de las *definiciones* cambia radicalmente al pasar de Secundaria a la Universidad. Mientras que en Secundaria las definiciones hacen un papel esencialmente *descriptivo,* con la finalidad de precisar ciertas características de objetos supuestamente conocidos; en la Universidad las definiciones sirven para *construir objetos nuevos,* en el sentido de que, en adelante, cada vez que aparezca uno de esos objetos, habrá que apelar obligatoriamente y estrictamente a su definición. En la enseñanza secundaria el alumno tiende a considerar cualquier definición matemática como una precisión innecesaria y, por tanto, prescinde de ella en la práctica." (p. 20).

Sierpinska (1992) se aventura aún más al considerar a la dificultad de la interpretación del rol de las definiciones en la actividad matemática como un obstáculo epistemológico, a lo que agrega:

> "Definición es la descripción de un objeto conocido de otra manera por los sentidos o por el discernimiento, no es la definición quien determina al objeto sino el objeto el que determina a la definición. Una definición nos es valedera lógicamente."

IV.2.2 ¿Qué es un vector?

Si lleváramos a cabo la experiencia de preguntar a quien se nos cruce delante ¿qué es un vector? es muy probable que obtengamos muy variadas respuestas. Si se trata de un *biólogo* nos contestará que es 'un agente huésped portador del germen de una enfermedad'; si es un *diseñador gráfico*, nos dirá que es 'un medio para definir una imagen en términos de formas geométricas'; si es un *programador*, contestará que 'es un array o arreglo de una dimensión, es decir, un conjunto de variables o registros del mismo tipo' (a los de dos o más dimensiones, los denominan matrices); si es un *estadístico*, responderá que se trata de 'un conjunto de valores, en una secuencia algebraica ordenada de menor a mayor'; si es un *genetista* dirá que consiste en 'un agente, que puede ser un virus o un pequeño fragmento de ADN, que porta un gen extraño o modificado'; si es un *físico*, responderá que se trata de 'un concepto que permite describir magnitudes direccionales tales como velocidad, aceleración o fuerza y que se representa mediante un segmento con una flecha, del que se definen: punto de aplicación, módulo, dirección y sentido'; si se trata de una *persona común con cierta instrucción*, responderá, de forma similar al físico, que es 'un segmento de recta dirigido en el espacio del cual se pueden determinar aquellas características', o bien, 'un conjunto ordenado de cantidades con determinadas reglas para su utilización'; si es un *matemático*, contestará que 'es todo elemento de un espacio vectorial'.

Alguien podría cuestionar esta última definición afirmando que 'no tiene gracia' y hasta que es 'ilícita' por cuanto no explica qué es un vector, sino que se limita a señalar el conjunto en el que 'viven' los vectores, y es en este punto donde cabe la pregunta ¿qué proceso de pensamiento puede guiar a nuestros estudiantes, al inicio de sus estudios universitarios, para asimilar semejante definición?, cuando ello sólo pareciera posible si se posee un cabal entendimiento de qué significa 'hacer matemática'. Todos esperamos que les sea suficiente mostrarles que la definición es consistente y no viola los principios de las Matemáticas, por cuanto se vale de la suposición de la existencia de espacios vectoriales, que a la sazón, no son definidos como conjuntos de vectores, sino en base a nociones conjuntistas y algebraicas, y que, por lo tanto, no existe circularidad alguna en la misma. Sin embargo, el hecho de que los vectores surjan como elementos de una cierta estructura, definida previamente, y no al revés, y más aún, que cualquier propiedad de los vectores deberá ser deducida a partir de su pertenencia a dicha estructura, pareciera contradecir el pensamiento de Sierpinska (1992), que hemos citado en la sección anterior, y que presupone un conocimiento, al menos intuitivo, del concepto que se pretende definir. Y decimos 'pareciera' por dos razones que consideramos fundamentales:

1) que la evolución histórica, hasta alcanzar la creación de la noción de Espacio Vectorial, tal como la hemos descripto en el apartado III.1, nos muestra que los vectores preexisten, ya sea como n-úplas, vectores geométricos, matrices, funciones o polinomios, a la idea unificadora y generalizadora de los espacios vectoriales;

2) que los alumnos que cursaron el Nivel Polimodal habrían experimentado un primer acercamiento, no sólo a un concepto de vector (nos estamos refiriendo obviamente a los vectores geométricos) que les permitiría al menos imaginar algunos habitantes de aquellas nuevas estructuras llamadas espacios vectoriales, sino también a otros objetos como las funciones y los polinomios, a los que ni remotamente hubieran pensado como vectores.

Estas digresiones explicarían que la idea del objeto 'vector' es previa a la definición, lo cual no significa que el concepto de vector algebraico, más amplio y abarcativo, no plantee profundos conflictos cognitivos a nuestros estudiantes de primer año de la Universidad. Por una parte, hemos percibido que el proceso mental que se exige a un alumno ingresante no difiere considerablemente de su correlato histórico, pero sí se diferencia abismalmente en relación con el tiempo en que deberá producirse dicho proceso. En otras palabras, *lo que insumió dos siglos a los matemáticos, nuestros estudiantes deben asimilarlo en apenas unos días*.

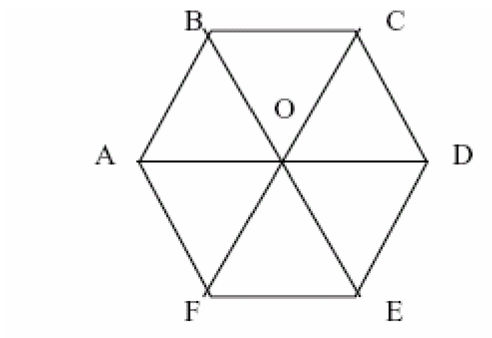
Por otro lado, el fenómeno de la *transposición didáctica*, al cual nos hemos referido en general, en el apartado II.3, y en particular, en el apartado IV.1, se hace presente en el hecho de que, el momento de incorporar la definición axiomática de los espacios vectoriales y todos los conocimientos derivados de la misma, implica tres categorías de abstracción:

- incorporar como espacios vectoriales a los conjuntos de los vectores geométricos;
- reconocer e incorporar a los espacios vectoriales, los conjuntos de complejos, funciones y polinomios;
- conocer, reconocer e incorporar a los espacios vectoriales, los conjuntos de las n-úplas y las matrices.

De últimas, también deseamos puntualizar que la definición de vector algebraico que acabamos de analizar abona el pensamiento de Gascón et al. (2004) cuya cita obra en el apartado anterior, por cuanto no es más que un ejemplo del rol constructivo que asumen las definiciones en la universidad.

Por cuerda separada a la definición del objeto 'vector', nos parece pertinente ampliar algunos detalles de la experiencia llevada a cabo por Lê Thi Hoai (1997, en Dorier, 2000a, pp. 81-82) a la que ya nos hemos referido en el apartado III.2. Thi Hoai proveyó a alumnos franceses y vietnamitas de segundo año de secundaria, el siguiente ejercicio:

> *Sea un hexágono regular ABCDEF cuyo centro es O. Entre todos los vectores cuyo origen y extremo se toman del conjunto de puntos {A,B,C,D,E,F,O}, indique todos aquéllos que son iguales al vector* $\overrightarrow{AB}$.



Un tercio de los alumnos franceses responden correctamente, a la vez que un cuarto toman en cuenta, en sus respuestas, sólo la longitud de los vectores de manera que llegan a obtener hasta 24 vectores idénticos.

Algunos estudiantes consideran que $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$ porque tienen la misma longitud y sentido, mientras afirman que $\overrightarrow{CB}\neq\overrightarrow{AB}$ porque tienen igual longitud, pero distinto sentido.

Resulta innecesario profundizar en los orígenes de estas respuestas, pues saltan a la vista. Sin embargo, aunque con mucha cautela, Dorier (2000a, p. 82) destaca un fuerte paralelismo entre lo que él considera un obstáculo epistemológico que surge del análisis de la génesis histórica (en la búsqueda de un análisis geométrico intrínseco), al que nos hemos referido en el apartado III.1, y las dificultades de los alumnos, vinculada al hecho de que la idea de vector geométrico no se introduce en la enseñanza como una herramienta para resolver cálculos geométricos. También señala la dificultad para pasar de la noción de segmento orientado a la de vector libre como clase de equivalencia.

Estas disquisiciones nos parecen relevantes, ya que de algún modo estamos considerando a los espacios vectoriales de los vectores geométricos como un importante, por no decir el único, conocimiento de base que permite encarar los temas del Álgebra Lineal.

IV.2.3 Las definiciones de dependencia e independencia lineal[38]

La definición de Dependencia Lineal

Según hemos logrado constatar a lo largo del análisis que desarrollamos en los subapartados IV.1.2.1 y IV.1.2.2, tanto los libros de texto como los docentes adoptan la siguiente definición:

> "*Se dice que el conjunto de vectores* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *incluido en un espacio vectorial es linealmente dependiente si, y sólo si, existen combinaciones lineales nulas no triviales de esos vectores*" (1)

Esto es: $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *es LD* $\Leftrightarrow$ $\exists\, a_1, a_2, ..., a_n$ *no todos nulos* / $\sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i = 0$ (2)

[38] Estamos suponiendo aquí que el lector conoce y comprende los conceptos: CL, CLN, CLNT y CLNNT, etc. Sin embargo, puede revisarlos, más adelante, en la sección IV.2.5, pp. 89-91.

que puede presentarse en esta otra versión:

$$\{v_1, v_2, ..., v_n\} \ es \ LD \ \Leftrightarrow \ \exists i \in \{1,2,...,n\} / \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \, v_i = 0 \wedge a_i \neq 0 \right) \qquad (3)$$

También es posible definir la DL de la siguiente manera (la que es presentada generalmente como una propiedad luego de brindar la definición (1) y sobre la que volveremos más adelante):

> "Un conjunto de vectores es LD si, y sólo si, *al menos uno* de los vectores es combinación lineal de *los restantes*" (4)

Esto es:

$$\{v_1, v_2, ..., v_n\} \ es \ LD \ \Leftrightarrow \ \exists j : 1,2,...,n / v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i v_i \qquad (5)$$

Queda claro que la 'dependencia' ('independencia') recae en el objeto matemático 'conjunto de vectores'; sin embargo, es muy frecuente, y seguramente con el deseo de expresar más brevemente la idea, que los docentes, los alumnos e incluso algunos libros de texto, se refieren a que tal o cual 'vector' es LD (LI) de otros dados, adjudicando esta característica a uno o más vectores, en lugar de al conjunto de todos ellos.

Tal como hemos visto en el subapartado IV.1.2.1, pp. 65-70, al describir las características de la asignatura C3, la definición de la DL es precedida por las definiciones de CL (donde se especifica claramente el cuerpo de escalares), CLN y CLNT, quedando a cargo del alumno la obtención, por negación, de la definición de CLNNT, que generalmente no se hace explícita más que a través de ejemplos en el seno de algún ejercicio.

La definición de Independencia Lineal

La primera definición de IL con la que tienen contacto los estudiantes, surge por la negación de la definición de DL, en lenguaje natural, es decir:

> "*Se dice que el conjunto de vectores* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *incluido en un espacio vectorial es linealmente independiente si, y sólo si, no es linealmente dependiente*" (6)

No obstante a que esta definición es suficiente, por tratarse de la negación de la DL, es usual que la IL sea institucionalizada, debido a la complejidad que presentan estos conceptos, exhibiendo la negación de la definición (1) así:

> "*Se dice que el conjunto de vectores* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *incluido en un espacio vectorial es linealmente independiente si, y sólo si, la única combinación lineal nula de esos vectores, es la combinación lineal nula trivial*"[39] (7)

[39] Como mediadora entre las definiciones (6) y (7), puede aparecer aquella cuyo consecuente expresa "no existen combinaciones lineales nulas no triviales de esos vectores".

Esto es: $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *es LI* $\Leftrightarrow$ $\forall i \in \{1,2,...,n\}: \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i = 0 \;\Rightarrow\; a_i = 0 \right)$ (8)

Obviamente, tanto en la definición de DL como de IL, puede optarse por la escritura extendida $a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$ en lugar de la abreviada $\sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i$, por la cual los estudiantes sienten un rechazo general, casi inexplicable.

Operando en forma dual a la utilizada para obtener la definición (7), podemos deducir por negación de la definición (4), la siguiente:

> "*Un conjunto de vectores es LI si, y sólo si, ninguno de sus vectores puede expresarse como CL de los demás*" (9)

A continuación analizamos algunos aspectos de las definiciones precedentes.

IV.2.3.1 Su operatividad

<u>*Respecto a la DL*</u>

En su tesis doctoral Calvo Pesce (2001), aludiendo a los factores *estéticos*, *operativos* o *didácticos* tomados en cuenta por el matemático, el autor de un texto o el profesor, como criterios para la elección de una u otra definición, brinda como ejemplo, para ilustrar el criterio *operativo*, el caso de definir cuándo un subconjunto de un espacio vectorial es LD diciendo:

> "(...) aunque parecería más natural definir que eso sucede cuando *alguno* de los vectores que lo conforma depende linealmente de los *otros*, resulta más eficiente definirlo a partir de la existencia de combinaciones lineales no triviales que permitan obtener el vector nulo." [la cursiva es nuestra][40] (p. 31).

En efecto, esta última definición es más *operativa* que la primera, por cuanto encontrar 'el o los vectores que son combinación lineal de los restantes' consiste en un proceso tedioso que obliga a revisar 'uno a uno', o bien se convierte en un acto de adivinación, a menos que las combinaciones lineales 'salten a la vista', es decir, sean muy evidentes, en cuyo caso la escritura formal de esas relaciones pierde su sentido exploratorio y sólo cumple el rol de convencer a aquellos que no las percibieron. Paradójicamente, el planteamiento de una combinación lineal nula genérica de todos los vectores del conjunto que arroja soluciones no triviales, si bien constituye una demostración formal sencilla e indubitable de su dependencia lineal, no muestra explícitamente las combinaciones lineales, a menos que se continúe trabajando algebraicamente la expresión, con el objeto de hacerlas explícitas. A esta cuestión le dedicaremos unos párrafos más adelante.

[40] Incorporamos en cursiva las palabras 'alguno' y 'otros' a efectos de llamar la atención sobre las mismas por cuanto queremos analizar, más adelante, su significado al seno de esta definición.

Finalmente, la definición (1) de la DL es eficiente, pues habilita a estructurar una demostración, por cuanto muestra, de alguna manera, la *técnica* que permite decidir si un conjunto es o no LD; pero, ¿es didáctica? ¿cómo elabora el estudiante la transición de una definición a otra? ¿logra una dialéctica natural entre las mismas? Intentaremos contestar estas preguntas a lo largo del presente trabajo, sin embargo, podemos aquí dejar sentadas las relaciones matemáticas que vinculan ambas definiciones, es decir la (1) y la (4).

Al mismo tiempo, intentamos analizar los significados de las expresiones "*al menos uno*" (*alguno* en la cita) y "*los restantes*" (*otros* en la cita).

Convengamos que la estrategia de base a la que nos estamos refiriendo, consiste entonces en formar, con todos los vectores del conjunto dado, una combinación lineal con coeficientes desconocidos e igualarla al vector nulo, resolver el sistema homogéneo que surge, y de resultar indeterminado, afirmar que el conjunto de vectores es LD, y si resulta determinado, afirmar que no lo es. De esta secuencia se deriva que, en realidad, para decidir si el conjunto es o no LD, no es necesario resolver el sistema, sino solamente analizar el cardinal de su conjunto solución, para lo cual es suficiente utilizar la eliminación Gaussiana y contrastar el número de ecuaciones con el de variables; aunque, en los casos de sistemas sencillos, es más rápido resolverlos y a veces basta con sólo mirarlos. Independientemente de ello, intentaremos responder acerca de cómo elabora el estudiante la transición de una definición a otra. En el supuesto de que hayamos determinado que un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es LD, la dialéctica entre ambas definiciones se logra aislando, en los *casos en que sea posible*, cada uno de los vectores del conjunto, a partir de *alguna* de las infinitas combinaciones lineales no triviales que arroja el sistema. Pero, aquí surgen nuevas preguntas: ¿por qué decimos en '*los casos en que sea posible*'? o mejor ¿por qué en algunos casos no sería posible? ¿por qué decimos '*alguna* de las infinitas soluciones' en lugar de '*cualquiera* de las infinitas soluciones'? Es obvio que ambas preguntas están fuertemente vinculadas a través de una primera aproximación: 'si tomamos *cualquiera* de las infinitas soluciones tal vez *no sea posible* expresar *todos* los vectores como combinación lineal de los restantes'. Veamos cuáles son las restricciones matemáticas que rigen el caso en que pretendamos aislar el vector v_1:

$$0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{-a_2}{a_1} v_2 + \frac{-a_3}{a_1} v_3 + ... + \frac{-a_n}{a_1} v_n \qquad (10)$$

Esta última escritura pone luz sobre nuestros interrogantes, y a la vez, permite esclarecer el sentido de los términos "*al menos uno*" y "*los restantes*" en la definición dada.

Por un lado, deducimos que la escritura del vector v_1 sólo es posible si $a_1 \neq 0$. El mismo razonamiento es válido para los vectores restantes, por lo tanto, para que *todos* los vectores puedan expresarse como combinación lineal de los *demás*, deberíamos poder encontrar al menos una n-úpla solución para cada uno de ellos, no necesariamente la misma, pero tampoco *cualquiera*, en la que el coeficiente del vector que pretendemos escribir, no sea nulo.

Aquí surge una nueva pregunta: ¿es eso siempre posible? La respuesta es 'no' y para argumentar en este sentido resulta sencillo analizar el siguiente contraejemplo:

Sea el conjunto $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0)\}\subset R^3$. Una CLN genérica de esos vectores está dada por $a_1(0,0,0)+a_2(1,0,0)+a_3(0,1,0)=(0,0,0)$, de la que se deduce que el conjunto solución es $\{(a_1,0,0)\}$ donde a_1 es cualquier real, lo que significa que existen infinitas soluciones no triviales, lo que a su vez permite afirmar que el conjunto dado es LD –hecho que es conocido desde el principio-. Como los coeficientes a_2 y a_3 son siempre nulos, se deriva que los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ no pueden escribirse como CL de los *otros*.

Esto prueba, en general, que no siempre es posible expresar *todos* los vectores de un conjunto LD como CL de los vectores *restantes*, pero ¿cómo se tiene la certeza de que *al menos uno*, sí es posible?

Veamos. Como el conjunto $\{v_1,v_2,...,v_n\}$es LD, entonces existe algún a_i no nulo, tal que $0=a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n$. Pues entonces, el vector que corresponde a ese coeficiente puede expresarse como CL de los demás. Queda así esclarecido el significado de la expresión "*al menos uno*" en la definición en cuestión.

Por otra parte, de (9) se deduce que $v_1=0v_1+\frac{-a_2}{a_1}v_2+\frac{-a_3}{a_1}v_3+....+\frac{-a_n}{a_1}v_n\,(11)$

que, si bien no agrega ninguna nueva restricción a la que ya hemos analizado, autoriza a afirmar que el vector v_1 puede expresarse como CL de *todos* los vectores del conjunto, y no solamente de los *restantes*, o los *otros*, o los *demás*.

Resumiendo, se tiene que, en la definición (4), la expresión "*al menos uno*" cumple una función limitadora, pues significa uno o más, acaso todos, pero no necesariamente "*todos*"; pero la expresión "*los restantes*" no tiene el mismo estatus, porque se la puede reemplazar por el término "*todos*", aunque sea suficiente chequear con los restantes. ¿Perciben estas diferencias nuestros alumnos? ¿Cuál es el montaje didáctico que favorece tal comprensión?

Ahora bien, luego de todas estas disquisiciones, podemos concluir que la transición de una a otra definición de la DL es suficientemente conflictiva. Sin embargo, aún cabe una pregunta más, a la que consideramos central en esta cuestión que estamos trabajando: ¿por qué insistimos en la necesidad de esa transición? Nuestra insistencia se fundamenta en la hipótesis de que la definición que resultó *más operativa* es la *menos didáctica*, pues la definición (1) no da cuenta de las posibles *razones* de la DL, o lo que es lo mismo, no revela las *causas* que originan tal dependencia (sólo la existencia de una CLNNT de los vectores que poco dice). Mientras, la menos operativa (4) da clara evidencia de la existencia de al menos un vector (metafóricamente: enfermo, defectuoso) que es CL de los demás. Entendemos que este hecho otorga un valor agregado a la dimensión cognitiva, por cuanto el estudiante puede conferirle algún sentido a la DL.

Cabe aclarar que en las deducciones que hemos realizado, pasamos de la primera definición a la segunda con operaciones algebraicas que son reversibles y por lo tanto, está garantizado el camino inverso.

<u>*Respecto a la IL*</u>

La definición de IL no aporta nada nuevo al campo operativo pues la estructuración del razonamiento deductivo, para determinar si un conjunto es LI, se basa en la misma técnica que para determinar si es LD, variando únicamente en la conclusión: si el sistema homogéneo resulta determinado, entonces la única CLN es la trivial y el conjunto es LI. Curiosamente, el hecho de que la misma técnica sea aplicable a ambos casos, no surge precisamente de la similitud de las definiciones (la IL contiene una implicación de la que carece la DL) sino del hecho de que una es la negación de la otra y de que hay sólo dos situaciones posibles: los escalares son todos nulos o alguno no lo es (quizá ninguno).

En el apartado IV.2.5, pp. 89-98, analizaremos otras técnicas, tecnologías y teorías que pueden desplegarse cuando se supone conocido un campo conceptual de estas nociones, lo que describiremos en el apartado IV.2.4, pp. 83-88.

IV.2.3.2 Su incongruencia semántica

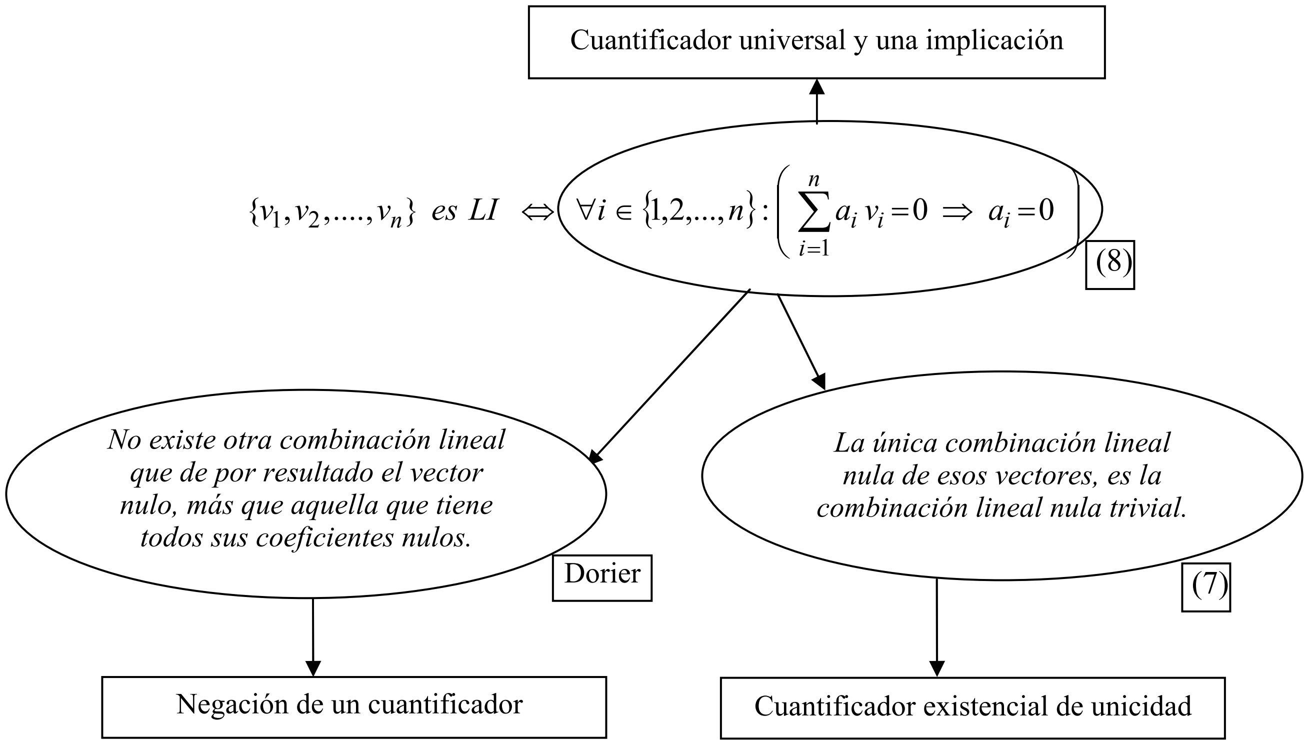
En la sección *II.6*, pp. 25-29, hemos enfatizado el valor cognitivo de la conversión entre registros semióticos; pero, la actividad de conversión no siempre es inmediata, ello dependerá de la congruencia o no de las representaciones de que se trate. Recordemos que Duval (1995/1999, p. 51) sostiene que "dos representaciones son congruentes cuando hay correspondencia semántica entre sus unidades significantes[41], univocidad semántica terminal[42] y el mismo orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones[43].".

Tal como lo hemos señalado en el apartado III.2.2, p. 48, de este trabajo, Dorier (1996, p. 151) afirma que, en el sentido de Duval, no existe ninguna *congruencia semántica* entre la definición simbólica de la IL y la definición en lenguaje natural, más aún admite que es casi imposible de traducir de manera que conserve la sintaxis. También asegura que mientras la definición formal se expresa con ayuda de un cuantificador y una implicación, la definición en lenguaje natural establece "*no existe otra combinación lineal que de por resultado el vector nulo, más que aquella que tiene todos sus coeficientes nulos*", a la que en este trabajo hemos dado otro giro: "*la única combinación lineal nula de esos vectores, es la combinación lineal nula trivial*".

Analicemos la existencia de tal incongruencia semántica entre la definición simbólica y las dos expresiones en idioma natural.

---

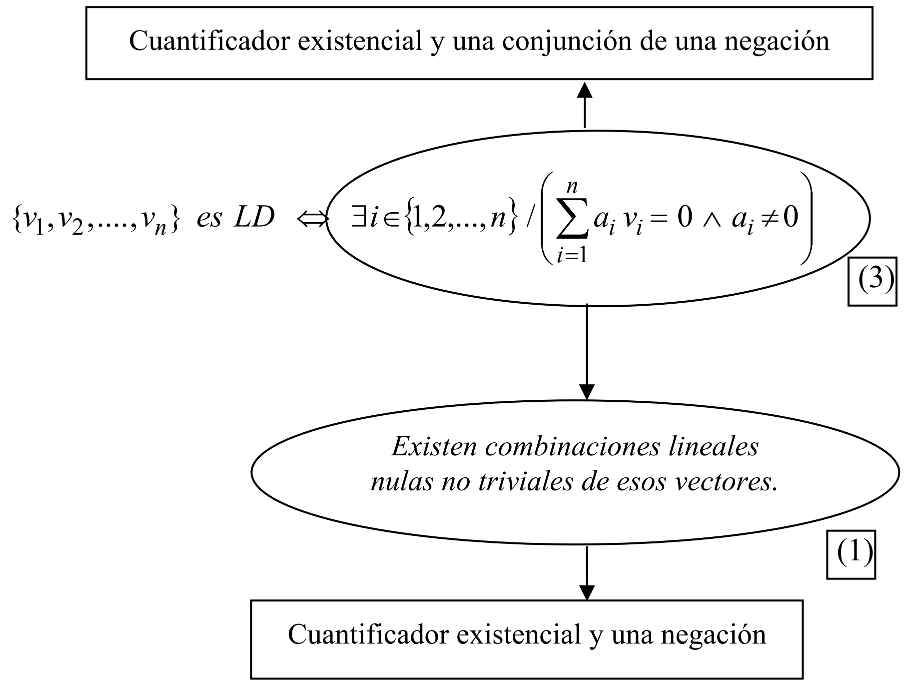
[41] A cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental.
[42] A cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una única unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada.
[43] Las unidades semánticas en correspondencia son aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones. Esto es posible si tienen el mismo número de dimensiones.



De aquí surge que no puede establecerse correspondencia alguna entre las unidades significantes de las definiciones comparadas.

Aunque no provee mayores explicaciones, esta incongruencia no estaría presente, según Dorier (*op. cit.*), en la definición de DL. Sin embargo, nosotros no encontramos una correspondencia absoluta entre las definiciones simbólicas y verbales de este concepto.

Como la definición (2) es seudo-simbólica, evitaremos utilizarla en este análisis. En cambio, el consecuente de la definición (3) de la DL, que responde al esquema proposicional $\exists x / (p \wedge - q)$, constituye la negación lógica del consecuente de la definición (8) de la IL que se corresponde con el esquema $\forall x : (p \Rightarrow q)$. Es por esta razón que contrastamos la definición simbólica (3) con la definición verbal (1), análisis del cual puede deducirse que si bien coinciden en el cuantificador existencial, éste recae en proposiciones de estructura semántica bien diferentes, tales como una negación y una conjunción que contiene una negación, lo que puede observarse en el esquema que sigue:



Entonces, si bien la incongruencia no es absoluta, tampoco lo es la congruencia.

Finalmente, deseamos destacar la importancia de estas cuestiones en el marco de lo que Duval (1995/1999, p. 51) sostiene respecto a que las dificultades debidas a la no-congruencia de los registros son independientes de la complejidad conceptual del contenido de las representaciones que se deben convertir y que, en general, los fracasos debidos a la no-congruencia revelan un *encerramiento de los registros de representación* que persiste aún luego de que la enseñanza los haya movilizado.

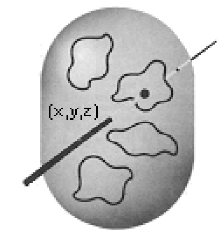
IV.2.4 Un Campo Conceptual de la Dependencia Lineal

En primera instancia deseamos clarificar las razones por las cuales el título de este apartado se refiere a "un", en lugar de a "el" campo conceptual y con ese objetivo, recordemos que en la sección *II.5*, p. 22, se dijo que: "Llamamos campo conceptual a un conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica esquemas, conceptos y teoremas en estrecha relación, así como las representaciones lingüísticas y simbólicas que pueden utilizarse para simbolizarlos." (Vergnaud, coord., 1994/1997, p. 75). A continuación, describimos las dos razones que nosotros hemos encontrado y que justifican la elección de tal pluralidad.

1) Los campos conceptuales descansan sobre las situaciones que permiten resolver y que le dan sentido a un concepto. En consecuencia, se trata de una idea *dinámica* y no estática, en tanto y en cuanto, no es posible delimitar ni describir *a priori* el cuerpo de problemas en las que un concepto será una herramienta eficaz en el futuro.

A efectos de que sea comprendida esta idea, recurrimos a un ejemplo que incumbe a todo ser humano:

> El matemático alemán J. Radon (1917, en Santaló, 1989, Sección 3) nunca imaginó que su estudio sobre las trayectorias de las rectas, interceptando un cuerpo sólido convexo, que derivó en el hallazgo de la llamada "transformada bidimensional de Radon"[44] (emparentada con la de Fourier) pudiera ser rescatado del 'sueño de los justos' por el físico A. M. Cormack, en 1963, para dar origen a la *tomografía computada* que diez años después, perfeccionó el ingeniero inglés G. N. Hounsfield.[45]



2) El conjunto de situaciones que componen un campo conceptual, requiere de esquemas, objetos, teoremas, propiedades, representaciones semióticas, etc. para su tratamiento, y es por ello que dicho campo dependerá fuertemente de la transposición y contrato didácticos, es decir, de la *reconstrucción institucional* que de una cierta obra matemática, haya realizado la Institución en la cual se lleva a cabo el análisis didáctico, fenómeno que hemos descripto en la sección *II.3*, p. 15, de este trabajo.

En efecto, no es casual que la sección que estamos desarrollando integre el capítulo "La Enseñanza de la Dependencia Lineal en el Medio". Nos anticipamos así al hecho de que un campo conceptual está estrechamente vinculado al *sistema didáctico*, que es uno de los elementos que caracteriza al modelo epistemológico de la TAD, en relación con la TCC, a través de las 'praxeologías matemáticas globales', tal como hemos puntualizado en la sección *II.5*, p. 23.

[44] La creación de Radon, que consistió en determinar la distribución $f(x,y,z)$ a partir de $F(G)$, que se supone conocida para todas las rectas G que atraviesan un cuerpo K, permitió, por un lado, una generalización a cuerpos de más de tres dimensiones y la sección de los mismos por variedades lineales o no lineales de cualquier dimensión dando origen a la Geometría Integral; y por otro, reconstruir el interior de K a partir de los datos proporcionados por los rayos que lo atraviesan, lo que posibilitó la invención de la tomografía computada, que ya hemos comentado. (*op. cit.*)

[45] El haber tomado conocimiento de estos hechos, hace muchos años, nos ha permitido revalorizar el potencial de las investigaciones en la llamada 'matemática pura' y originado la reflexión: *"Dejemos al calor del abrigo los miles de volúmenes de matemática 'inútil', pues tan solo un único descubrimiento útil para la humanidad, los justifican."* (Andreoli, 2002)

Por ejemplo, un campo conceptual que se construye en el seno de una asignatura del Profesorado en Matemática, en una institución en particular, tal como hemos podido observar en el subapartado IV.1.2.1, difiere considerablemente del que se diseña, en la misma institución, para una asignatura de servicio. Mientras en el primer caso aquel abarca un espectro de temas generalmente más amplio -quizá la asignatura completa-, en el cual abundan justificaciones y demostraciones, en contextos extra e intramatemáticos, como así también, supuestamente, el abordaje didáctico de los conceptos involucrados; en el segundo caso, los tópicos se comprimen y reducen a una o dos unidades, de corte netamente instrumental y que, se estima, apuntan al perfil del profesional que se pretende formar.

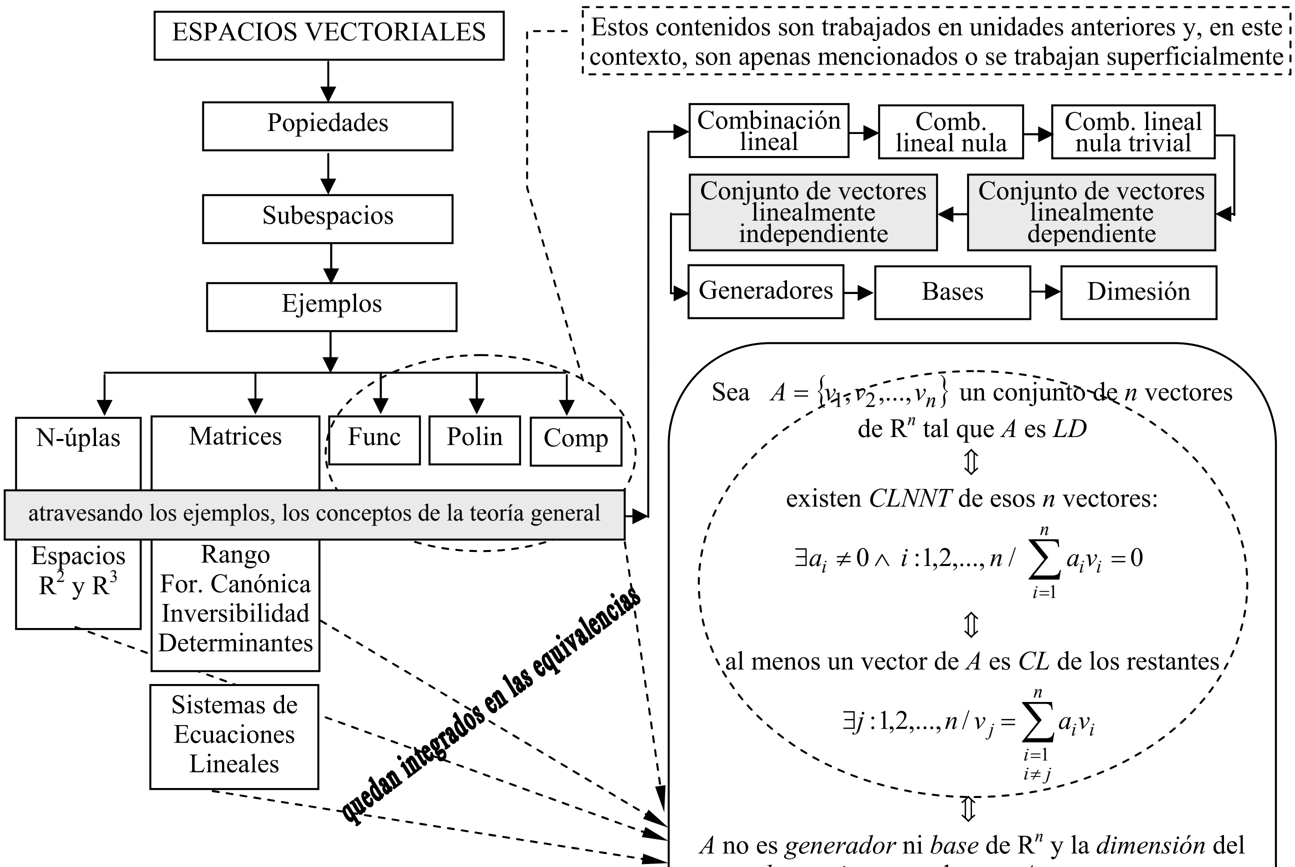
Entonces, podemos decir que encontramos dos razones para delimitar nuestro campo conceptual, que tienen que ver con lo *espacial* y lo *temporal*, con el *aquí* y con el *ahora*. Esto nos obliga a revisar la transposición y contratos didácticos vistos en el subapartado IV.1.2.1, pp. 65-70, por lo que tomaremos como esquema de trabajo el montaje que figura en la página 67, de la cátedra C3 y que operará de referente; aunque somos conscientes de que con esta inevitable restricción, estamos excluyendo importantes conceptos vinculados a la DL, tales como las transformaciones lineales, autovalores, autovectores y de hecho, el estudio más profundo de los Espacios Vectoriales de las funciones y los polinomios.

Para abordar el estudio de un campo conceptual debemos en primer lugar identificar y clasificar situaciones, más precisamente, *tipos de tareas*, con el objeto de determinar las posibles *técnicas*, *tecnologías* y *teorías* que integrarán una praxeología matemática global de la DL. Esta labor nos permite establecer los niveles de objetos, las relaciones que los vinculan y los registros semióticos que los representan.

Con el fin de evitar reiteraciones, en este apartado, y a partir del esquema citado en el párrafo anterior, solamente nos ocuparemos de los niveles de los objetos matemáticos en la secuencia en que aparecen en el programa; de la red interna que los aglutina y de los tipos de tareas que constituyen el *referente*[46] del concepto, y que por lo tanto, le dan *sentido* al mismo –en el sentido de Vergnaud- tal como se definió en la sección *II.5*, p. 24, del presente trabajo. Las técnicas, tecnologías, teorías y registros serán analizados en el apartado que sigue, a través de la construcción de dos praxeologías matemáticas puntuales en las que se encuentran involucradas tanto la DL como la IL.

A continuación nos ocuparemos, a modo de ejemplo, de un campo conceptual de la DL, en el marco del espacio vectorial $(R^n,+R,.)$, a través de establecer qué se puede afirmar cuando el conjunto de n vectores de R^n es LD.

[46] Recordemos que en la sección *II.5*, esta componente de todo concepto, según Vergnaud, ha sido anotada **S**.



Sea $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un conjunto de n vectores de R^n tal que A es *LD*

$\Updownarrow$

existen *CLNNT* de esos n vectores:

$$\exists a_i \neq 0 \wedge i:1,2,...,n \,/\, \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

$\Updownarrow$

al menos un vector de A es *CL* de los restantes

$$\exists j:1,2,...,n \,/\, v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i v_i$$

$\Updownarrow$

A no es *generador* ni *base* de R^n y la *dimensión* del *subespacio* generado por A es menor que n

$\Updownarrow$

el *rango* de la matriz cuadrada A_{nxn} cuyas filas son los vectores de A, es menor que n:

$$r(A_{nxn}) < n$$

$\Updownarrow$

la *forma canónica* de A_{nxn} *no* es la Identidad:

$$FC(A_{nxn}) \neq I_n$$

$\Updownarrow$

A_{nxn} no es *inversible*:

$$\pm A^{-1} \,/\, A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

$\Updownarrow$

el *determinante* de A_{nxn} y de su adjunta es nulo:

$$|A_{nxn}| = 0$$

$\Updownarrow$

el *sistema homogéneo de ecuaciones lineales*

$A^t_{nxn}\,[a_i]_{nx1} = [0]_{nx1}$ es indeterminado

$\Updownarrow$

el *sistema no homogéneo de ecuaciones lineales*

$A_{nxn}\,[a_i]_{nx1} = B_{nx1}$ no es compatible determinado

$\Downarrow$

si $n = 2$
los vectores v_1 y v_2 de E^2 son *colineales* y sus componentes son *proporcionales*

si $n = 3$
los vectores v_1, v_2 y v_3 de E^3 son *coplanares*

La veracidad de la cadena de equivalencias que figura en el cuadro de la derecha, nos permite suponer que existe igual nivel jerárquico entre aquellas afirmaciones y que cualquiera de ellas puede constituirse en generadora de las restantes. Sin embargo, ninguna tiene el carácter unificador y generalizador de las primeras, que hacen referencia a la dependencia lineal, generador, base y dimensión. Difícilmente podamos encontrar, en el seno de las mismas Matemáticas, otra idea que esté inmersa en semejante cantidad de imbricadas relaciones y ocupando el rol central de todas ellas.

Por otra parte, estas equivalencias posibilitan la identificación de tipos de tareas, no exhaustiva por cierto, a las que clasificamos en una primera aproximación, en tareas en

Contexto intramatemático[47]	*Contexto extramatemático*[48]
Determinar: 1. si un conjunto de vectores es o no LD 2. si un vector es CL de otros. 3. si un conjunto de vectores es generador. 4. si un conjunto de vectores es base. 5. las coordenadas de un vector en otra base 6. la dimensión de un espacio vectorial. 7. el rango de una matriz. 8. la forma canónica de una matriz. 9. la inversa de una matriz, si existe. 10. el determinante de una matriz. 11. la matriz adjunta de una matriz. 12. la compatibilidad o no de un sistema de ecuaciones lineales. 13. el cardinal del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. 14. si el conjunto de dos vectores de un plano son colineales. 15. si el conjunto de tres vectores del espacio son coplanares.	16. Identificar Vectores, CL y DL en contextos físicos, biológicos, etc. 17. Plantear, analizar y resolver problemas de aplicación que conducen a la consideración de sistemas de ecuaciones o inecuaciones lineales. Ejemplos: a. Analizar flujos en una red de distribución de corriente. b. Descifrar reglas criptográficas. c. Hallar las componentes de las fuerzas que actúan sobre un nodo. d. Optimizar modelos económicos. 18. Asociar una matriz a un grafo y viceversa. 19. Determinar la matriz de contacto indirecto para hallar la dispersión de una enfermedad contagiosa. 20. Estudiar la evolución de genotipos y fenotipos o variaciones poblacionales a través del modelo probabilístico llamado Cadenas de Markov.

También estamos obligados a distinguir entre aquellos tipos de tareas en las que la DL es el objeto directo de la cuestión que se plantea, de aquellas situaciones en las que la DL o la IL subyacen como ideas causales no explícitas. Con esta distinción, sólo los tipos de tareas 1, 2 y 16 quedan enmarcados en el primer tipo.

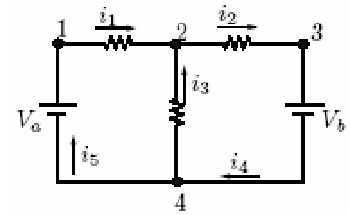
Asimismo, podemos clasificar los tipos de tareas listados arriba, en aquellos que aluden exclusivamente al *lenguaje abstracto* de la teoría general de los Espacios Vectoriales, y que se corresponden con los numerados del 1 al 6 y 16, y aquellos que operan en el marco de los *lenguajes específicos* de ciertos Espacios –que hemos llamado 'ejemplos'- y se corresponden con los restantes. A su vez, y acerca de los registros de representación semiótica que pueden desplegarse en las soluciones, cuya identificación implicaría desarrollar una praxeología puntual para cada una, es susceptible distinguir *a priori*, entre el verbal, el aritmético, el algebraico, el geométrico y el aritmético-matricial.

[47] Por comodidad, a los tipos de tareas que se listan en el contexto intramatemático las hemos englobado en el *género de tareas* "determinar", pero, algunas de ellas puede ser reemplazada, por "decidir", "demostrar", "hallar".
[48] Recordemos que estamos estudiando un campo conceptual muy limitado, en el marco de la cátedra C3. El cuerpo de situaciones posibles se enriquece considerablemente cuando nos encontramos habilitados a utilizar los conceptos de transformaciones lineales, diagonalización, autovalores y autovectores. El lector puede revisar algunas de las aplicaciones listadas en el Capítulo I, Introducción, p.2.

A modo ilustrativo, transcribimos a continuación unos pocos ejemplos de tareas en el contexto extramatemático[49]:

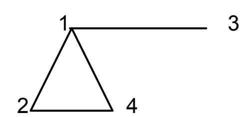
I) En un bar al paso se ofrecen, entre alimentos y bebidas, 10 posibilidades. Luego de tomar un pedido, la camarera le pasó por escrito al preparador, la secuencia (0,0,1,2,0,3,0,1,0,1).
a) ¿Qué significado puede Ud. adjudicarle a la información que proveyó la camarera?
b) Escriba de otra forma el mismo pedido.

II) Se dispone de huevos, harina, leche, manteca y azúcar. Escriba, utilizando un esquema aditivo, la composición de 5 masas que contengan esos ingredientes, de modo que todas tengan el mismo sabor.
a) Fundamente por qué está seguro de que tienen el mismo sabor.
b) ¿Con qué ideas, entre las que estamos trabajando, está asociada esta 'operación' y todo lo que pueda derivarse de la misma?
c) Si decide no incorporar alguno de los ingredientes a las masas, por ejemplo el azúcar ¿se produce alguna variación en su respuesta a la pregunta del ítem b? (Andreoli).



III) Tomando $V_a = V_b = 12V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$ y $R_3 = 3\Omega$, determinar voltajes e intensidades en el circuito de la figura. Interpretar los resultados (Geometría y álgebra lineal, 2005).

IV) Un departamento gubernamental de pesca proporciona tres tipos de alimentos (a,b,c) a un lago en el que habitan tres especies (I,II,III).
Cada pez de la especie I consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento a, 1 unidad del alimento b y 2 unidades del c. Cada pez de la especie II consume, por semana, un promedio de 3 unidades del alimento a, 4 del b y 5 del c. El consumo semanal promedio por ejemplar de la especie III es de 2 unidades del alimento a, 1 del b y 5 del c. Cada semana se vierten en el lago 25.000 unidades del alimento a, 20.000 del b, y 55.000 del c. Si se supone que toda esta comida se consume, ¿puede conocerse exactamente la cantidad de ejemplares de cada especie que coexisten en el lago?; de no ser así, puede contestar ¿cuál es el número máximo y mínimo de peces que puede haber en ese lago? (Arya & Lardner, 1992, p. 140).



V) El siguiente grafo representa las líneas telefónicas tendidas entre cuatro ciudades 1, 2, 3 y 4. Asóciele una matriz $A = [\, a_{ij} \,]_{4x4}$ tal que $a_{ij} = 1$, cuando las ciudades i y j están comunicadas, y $a_{ij} = 0$, en caso contrario.
(Nota: cada ciudad tiene líneas urbanas) (Arya & Lardner, 1992).

VI) Suponga que tenemos dos ciudades adyacentes A y B para las que se desea predecir tendencias de largo plazo en el movimiento de sus poblaciones. Corrientemente, el 70 % de las personas vive en A, mientras el 30 % vive en B. En un año típico, el 20 % de las personas de A se mueve hacia B y el 80 % de las personas queda en A, mientras el 10 % de la gente de B se mueve hacia A, y el 90 % permanece en la Ciudad B. Si un 0.5% de aumento por año se espera para las dos ciudades combinadas ¿Cuál será la población de cada ciudad en 30 años, en la población combinada corriente? ¿Es 150,000 personas? (Weller et al., 2002, pp. 384-385).

VII) *Suponga que un grupo de personas ha contraído una enfermedad contagiosa. Esas personas tienen contacto con un segundo grupo que a su vez tiene contacto con un tercer grupo. Sea A la matriz de contacto directo entre el grupo contagioso y los miembros del segundo grupo y B la matriz que representa los contactos directos entre los integrantes del segundo grupo y el tercero:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $x_{ij} = 1$, si la i-ésima persona del grupo con posibilidad de contagiar estuvo en contacto con la j-ésima persona del grupo con posibilidad de contagiarse. (P.ej., la segunda persona del primer grupo estuvo en contacto con la tercera del segundo grupo pues $a_{23} = 1$, y esta a su vez tuvo contacto con la primera del último grupo pues $b_{31} = 1$, pero no tuvo contacto con la tercera pues $b_{33} = 0$. a) ¿Cuántas personas hay en cada grupo?; b) Para hallar la dispersión de esa enfermedad contagiosa, determine la matriz de contacto indirecto entre el primer grupo y el tercero. Interprete sus elementos.

[49] Aclaramos que solamente los problemas IV, V y VII forman parte de las prácticas de la asignatura C3.

IV.2.5 Dos Praxeologías Matemáticas para dos tareas

En la sección *II.3*, pp. 16-17, del presente trabajo, hemos detallado lo que Chevallard (1999) entiende por *praxeología matemática*, y por otro lado, en la sección *II.5*, p. 22, describimos el concepto de *esquema* según Vergnaud (coord., 1994/1997, pp. 68-72), y que Godino y Batanero (1994) asimilan a las praxeologías puntuales o locales, como así también, las *situaciones* de Vergnaud a las *tareas* de Chevallard.

A continuación, y en este marco, construimos las praxeologías de dos tareas muy simples, con el objeto de establecer un análisis comparativo con las respuestas brindadas por los estudiantes, en una institución y contexto específicos, proceso que describimos en el Capítulo V. Es por ello que, en este apartado, se distinguen las componentes de dichas praxeologías, esto es, las tareas, tipo de tareas, género de tareas, las técnicas, las tecnologías y las teorías. Todo ello en concordancia con el campo conceptual o praxeología matemática global, establecidas en el apartado anterior.

Asimismo, en virtud del papel esencial que desempeñan los medios de expresión en los procesos de pensamiento como significantes de los conceptos, se identifican los registros de representación semiótica que despliegan las técnicas. De la misma manera, se distinguen las invariantes operatorias que subyacen a los esquemas como reglas que orientan la acción del sujeto que ejecuta las técnicas.

Por razones prácticas, listamos a continuación, el cuerpo de definiciones y propiedades[50] que constituyen las teorías en el marco de la asignatura C3, para luego indicar en qué momento operan como tales.

Dentro de la Teoría de los Espacios Vectoriales se definen los conceptos y demuestran las siguientes propiedades:

Dado $(V, R, +, \cdot)$ espacio vectorial y un conjunto de vectores $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$:

CL: Decimos que el vector $v \in \mathrm{V}$ es *combinación lineal* de los vectores de A si, y sólo si, existe un conjunto de escalares (coeficientes de la CL) $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset R$ tales que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$.

CLN: Llamamos *combinación lineal nula* de los vectores de *A*, a aquella combinación lineal que da por resultado el vector nulo. Esto es: $a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0$

CLNT: Llamamos *combinación lineal nula trivial* de los vectores de *A*, a aquella combinación lineal nula que tiene todos sus coeficientes nulos $(a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0)$. Esto es: $0 v_1 + 0 v_2 + ... + 0 v_n = 0$

[50] Con el ánimo de abreviar este listado, evitamos citar algunos conceptos que forman parte de la teoría, por ejemplo, las operaciones elementales de filas de una matriz, su forma escalonada, etc.

CLNNT: Llamamos *combinación lineal nula no trivial* de los vectores de *A*, a cada una de las combinaciones lineales nulas que tienen al menos un coeficiente no nulo. Esto es: $0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$ con algún $a_i \neq 0$ (Es la negación de CLNT)

LD: Decimos que el conjunto de vectores *A* es *linealmente dependiente* si, y sólo si, existen combinaciones lineales nulas no triviales de esos vectores. Esto es:

$$\{v_1, v_2, ..., v_n\} \ es\ LD \iff \exists i \in \{1,2,...,n\} / \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i = 0 \wedge a_i \neq 0 \right)$$

LD': Decimos que el conjunto de vectores *A* es *linealmente dependiente* si, y sólo si, alguno de los vectores de *A* es combinación lineal de los restantes. Esto es:

$$\{v_1, v_2, ..., v_n\}\ es\ LD \iff \exists j : 1,2,...,n / v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i v_i$$

(Si se adopta la definición LD, la LD' puede ser interpretada como propiedad)

LI: Decimos que el conjunto de vectores *A* es *linealmente independiente* sí, y sólo si, la única combinación lineal nula de esos vectores es la combinación lineal nula trivial (Es la negación de LD). Esto es:

$$\{v_1, v_2, ..., v_n\} \ es\ LI \iff \forall i \in \{1,2,...,n\} : \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i = 0 \Rightarrow a_i = 0 \right)$$

GE: Decimos que el conjunto $G = \{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset V$ es un *generador* de *V* si, y sólo si, todo vector $v \in V$ es combinación lineal de los vectores de *G*. Esto es:

$$\{v_1, v_2, ..., v_k\}\ es\ un\ GE\ de\ V \iff \forall v \in V : v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i$$

BA: Decimos que el conjunto $B = \{v_1, v_2, ..., v_p\} \subset V$ es una *base* de *V* si, y sólo si, es generador de *V* y además linealmente independiente.

P1: Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo cardinal.

DI: Llamamos *dimensión* de un espacio vectorial *V* al cardinal de cualquiera de sus bases y anotamos *Dim*(*V*); además, es el máximo número de vectores LI de *V*.

CO: Dos o más vectores geométricos tienen componentes proporcionales si, y sólo si, son colineales.

Dentro de la Teoría de Matrices y de Sistemas de Ecuaciones Lineales, se definen los conceptos y demuestran las siguientes propiedades:

MA: Llamamos *matriz* cuadrada de orden *n*, y anotamos A_{nxn} al conjunto de *nxn* escalares ordenado en *n* filas y *n* columnas que son vectores de R^n.

RA: Llamamos *rango* de una matriz A_{mxn} al máximo número de filas (o columnas) linealmente independientes de dicha matriz y anotamos $r(A)$.

P2: El rango de una matriz cuadrada es menor que su orden si, y sólo si, alguna de sus filas es combinación lineal de las restantes.

DE: Si A es una matriz de orden 2, su determinante es: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

P3: El determinante de una matriz es nulo si, y sólo si, una de sus filas es combinación lineal de las restantes.

SI: Al conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas, llamamos sistema de ecuaciones, el que se escribe analítica y matricialmente así:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad ; \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A_{mxn}} . \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X_{nx1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B_{mx1}}$$

o más brevemente: $A_{mxn}.X_{nx1} = B_{mx1}$

Si $m = n$ el sistema se dice *cuadrado*. Si $B_{mx1} = [0]_{mx1}$ el sistema se dice *homogéneo*

RF: El Teorema de Roché-Frobenius establece que: Un sistema de ecuaciones lineales $A_{mxn}.X_{nx1} = B_{mx1}$ es compatible (el conjunto solución $S \neq \Phi$) si, y sólo si, el rango de la matriz principal es igual al rango de la matriz orlada con la columna de los términos independientes. Esto es:

$$A.X = B \text{ es compatible } \Leftrightarrow r(A) = r(A|B)$$

CRF: Las consecuencias del Teorema de Rouché-Frobenius establecen:

1 $A.X = [0] \Rightarrow S \neq \Phi$ *Todo sistema homogéneo es compatible*.

2 $r(A) \neq r(A|B) \Rightarrow S = \Phi$ El sistema se dice *incompatible*.

3 $r(A) = r(A|B) \wedge n = r(A) \Rightarrow \# S = 1$ El sistema se dice *compatible determinado*.

4 $r(A) = r(A|B) \wedge n < r(A) \Rightarrow \# S = \infty$ El sistema se dice *compatible indeterminado*

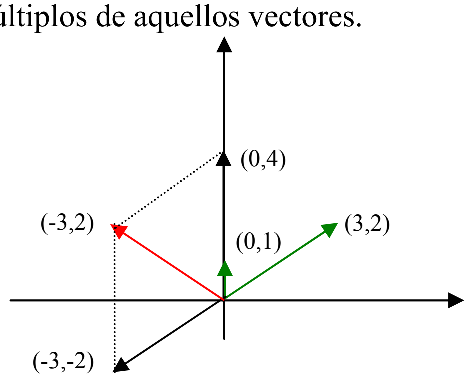
5 Si un sistema homogéneo es indeterminado, entonces admite *soluciones no triviales.*

Dentro los conocimientos básicos y previos, se consideran conocidos:

PR: El concepto de proporción y sus propiedades.

ALG: El algoritmo de la división que excluye la división por 0.

RP: La Regla del Paralelogramo para la suma geométrica de vectores, en los espacios euclídeos E^1, E^2, y E^3, afines a R, R^2, R^3.

<table>
<tr><td colspan="4">TAREA A</td></tr>
<tr><td colspan="4">Establecer la verdad o falsedad de la siguiente afirmación, justificando la respuesta:
El vector (-3,2) es combinación lineal de los vectores (0,1) y (3,2)</td></tr>
<tr><td colspan="4">TIPO DE TAREA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Demostrar que un vector de R^2 es o no combinación lineal de otros dos vectores de R^2.</td></tr>
<tr><td colspan="4">GÉNERO DE TAREA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Demostrar</td></tr>
<tr><td></td><td>TÉCNICA</td><td>TECNOLOGÍA</td><td>TEORÍA[51]</td></tr>
<tr><td>A1</td><td>Exhibir la CL
$4\,(0,1)+(-1)(3,2)=(-3,2)$ y concluir que la afirmación es verdadera.
....
A1’
Verificar además, representando geométricamente en el espacio euclídeo E^2, que el vector (-3,2) puede ser obtenido como la suma de esos múltiplos de aquellos vectores.

</td><td>Encontrar, a simple vista o por tanteo, los escalares que multiplican a los vectores para obtener el tercero y mostrar la CL en cuestión. Ello es condición suficiente para admitir su existencia.
....
La suma del cuádruplo del vector (0,1) y el opuesto del vector (3,2) debe resultar el vector (-3,2), que es la CL que se pretende poner en evidencia.</td><td>CL
.
RP</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>Presentar una CLN de los tres vectores de modo que el coeficiente del vector (-3,2) no sea nulo, por ejemplo:
$4\,(0,1)+(-1)(3,2)+(-1)(-3,2)=(0,0)$
deducir que
$4\,(0,1)+(-1)(3,2)=(-3,2)$
y concluir que la afirmación es verdadera.
Ídem A1’</td><td>Encontrar, a simple vista o por tanteo, tres escalares, de manera de obtener una CLN de los tres vectores, en la cual el coeficiente de (-3,2) no sea cero, equivale a demostrar, mediante transposición de términos, que ese vector es CL de los restantes.
NOTA: a esta misma conclusión puede arribarse pasando por la idea de la DL que es ciertamente no forzosa, tal como se explica en A4.</td><td>CL
CLN
AL</td></tr>
</table>

[51] En esta columna incluimos los conceptos que fundamentan las tecnologías, pero además, aquellos que les anteceden en el listado y de los cuales se deducen.
Por otra parte, hacemos la aclaración respecto a que en los casos en que se presentan sistemas de ecuaciones lineales, dada su simplicidad, no recurrimos a RF ni a sus consecuencias, pero lo citamos en la Teoría por tratarse de un recurso generalmente utilizado en sistemas de mayor complejidad.

A3	Presentar una CL genérica de los vectores (0,1) y (3,2) que dé por resultado el vector (-3,2); encontrar los escalares correspondientes y concluir que la afirmación es verdadera. Esto es: $a_1\,(0,1)+a_2\,(3,2)=(-3,2)$ $\Downarrow$ $(0,a_1)+(3a_2\,,2a_2)=(-3,2)$ $\Downarrow$ $(3a_2\,,a_1+2a_2)=(-3,2)$ $\Downarrow$ $\begin{cases} 3a_2=-3 \\ a_1+2a_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2=-1 \\ a_1=4 \end{cases}$ $\Downarrow$ $4\,(0,1)+(-1)\,(3,2)=(-3,2)$ y la afirmación es verdadera Ídem **A1’**	Encontrar, a través de plantear una CL genérica, el conjunto de escalares de los dos vectores dados para obtener el tercero, resolver el sistema compatible determinado obtenido, y exhibir dicha combinación, es condición suficiente para admitir su existencia. NOTA: a igual conclusión se arriba si el sistema resultara indeterminado.	**CL** **SI** **RF** **CRF3**
A4	Presentar una CLN genérica de los vectores (0,1), (3,2) y (-3,2), verificar que el sistema obtenido es indeterminado, encontrar tres escalares, no nulos a la vez, de modo que el correspondiente al vector (-3,2) no sea 0 y concluir que la afirmación es verdadera. Esto es: $a_1\,(0,1)+a_2\,(3,2)+a_3\,(-3,2)=(0,0)$ $\Downarrow$ $(0,a_1)+(3a_2\,,2a_2)+(-3a_3\,,2a_3)=(0,0)$ $\Downarrow$ $(3a_2-3a_3\,,a_1+2a_2+2a_3)=(0,0)$ $\Downarrow$ $\begin{cases} 3a_2-3a_3=0 \\ a_1+2a_2+2a_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2=a_3 \\ a_1=-4a_2 \end{cases}$ $\Downarrow$ supongo $a_3=1 \Rightarrow a_1=-4 \wedge a_2=1$ $\Downarrow$ $-4\,(0,1)+1\,(3,2)+1\,(-3,2)=(0,0)$ $\Downarrow$ $4\,(0,1)+(-1)\,(3,2)=(-3,2)$ y la afirmación es verdadera Ídem **A1’**	Encontrar tres escalares, no nulos a la vez, de manera de obtener una CLN de los tres vectores, equivale a demostrar que el conjunto de esos tres vectores $\{(0,1),(3,2),(-3,2)\}$ es LD y, por lo tanto, alguno de los vectores es CL de los restantes. Eso sucede cuando el sistema homogéneo obtenido resulta indeterminado, lo que significa que existen soluciones no triviales del mismo y si el escalar correspondiente al vector (-3,2) no es 0, se lo puede expresar, por transposición de términos, como CL de los otros dos a partir de alguna de aquellas CLs.	**CL** **CLN** **CLNT** **CLNNT** **LD** **LD’** **SI** **RF** **CRF1** **CRF4** **CRF5** **AL**

A5	Observar que el cardinal del conjunto de los tres vectores de R^2 dados, supera la dimensión del espacio y que los vectores (0,1) y (3,2) no son múltiplos entre sí, y concluir que la afirmación es verdadera. Ídem **A1'**	En un espacio vectorial de dimensión *n* ($Dim(R^2)=2$), no existe ningún conjunto de cardinal mayor que *n*, que sea LI, lo que es suficiente para afirmar que el conjunto $\{(0,1),(3,2),(-3,2)\}$ cuyo cardinal es 3, es LD y algún vector del mismo puede expresarse como CL de los otros dos. Como los vectores (0,1) y (3,2) no son múltiplos entre sí, es decir, ninguno es CL del otro, debe ser el vector (-3,2), CL de ellos.	**GE** **BA** **P1** **DI** **CL** **LD'**

Observaciones sobre la Tarea A

La técnica más habitual entre los estudiantes, por ajustarse estrictamente a la definición CL, sería la A3.
La técnica más breve, la A5, exceptuando la A1 que requiere cierta intuición y habilidad, se sustenta en la teoría más compleja, en relación con la variedad de conceptos involucrados, lo cual es propio del quehacer matemático. A la sazón, agreguemos, que la técnica A5 constituiría la más frecuentemente elegida por los expertos.
También podemos distinguir, entre aquellas técnicas que permiten responder a la pregunta y que además proveen los coeficientes de la CL cuya existencia, o no, se pretende demostrar, y aquellas en que esto no sucede. Entre estas últimas, se encuentra la A5.

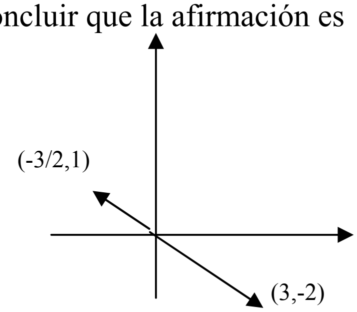
Respecto a los *significantes*[52] del concepto, pueden distinguirse varios registros de representación semiótica. Operan en el registro aritmético: las técnicas A1 y A2; en el registro algebraico: las técnicas A3 y A4; en el registro geométrico: la técnica A1' y en el registro verbal: la técnica A5.

En relación con la identificación de las *variables didácticas* que hemos descripto en la sección *II.4*, p. 20, son tres: el número de vectores, sus componentes y la dimensión del espacio vectorial al que pertenecen los mismos. Como resulta complicado considerar el tratamiento de todos los casos posibles, nos limitaremos a mencionar el caso hipotético de tener como datos, tres vectores de R^3. En tal situación, la técnica A1 no variaría considerablemente, si bien se tornaría más complejo 'atrapar' los escalares que deben cumplir un número mayor de relaciones; la técnica A1' se desarrollaría en el espacio, y en el caso de resultar LD, debería obtenerse tres vectores coplanares (nada fácil de visualizar manualmente); la técnica A2 sufriría variaciones similares a la A1; las técnicas A3 y A4, en las que se presentan sistemas 3x2 y 3x3 respectivamente, invitarían al escalonamiento de la matriz ampliada y al análisis mediante CRF; la técnica A5 se tornaría ineficaz, pero se serían útiles las técnicas B7 y B8 de la Tarea B.

[52] En la sección *II.5*, p. 24, esta componente de todo concepto, según Vergnaud, ha sido anotada **R**.

<table>
<tr><td colspan="4">TAREA B</td></tr>
<tr><td colspan="4">Establecer la verdad o falsedad de la siguiente afirmación, justificando la respuesta:
Los vectores (3,-2) *y* (-3/2,1) *son linealmente independientes*[53]</td></tr>
<tr><td colspan="4">TIPO DE TAREA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Demostrar que el conjunto de dos vectores de R^2, es o no, linealmente independiente</td></tr>
<tr><td colspan="4">GÉNERO DE TAREA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Demostrar</td></tr>
<tr><td></td><td>TÉCNICA</td><td>TECNOLOGÍA</td><td>TEORÍA</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>Exhibir la CL $(-2)(-3/2,1)=(3,-2)$ y concluir que la afirmación es falsa.
Verificar además aplicando B5.</td><td>Encontrar, a simple vista o por tanteo, el escalar que multiplica a uno de los vectores para obtener el otro, es condición suficiente para afirmar que cada uno de los vectores es una cierta CL del otro, y por lo tanto el conjunto formado por ambos es LD y, en consecuencia, no es LI.</td><td>CL
LD’
LI</td></tr>
<tr><td>B2</td><td>Presentar una CLNNT de los dos vectores, por ejemplo:
$$\frac{1}{2}(3,-2)+(-3/2,1)=(0,0)$$
o cualquier otra
$$(-1)(3,-2)+(-2)(-3/2,1)=(0,0)$$
y concluir que la afirmación es falsa.
Ídem B5.</td><td>Encontrar, a simple vista o por tanteo, dos escalares no nulos a la vez, de manera de obtener una CLN de los dos vectores, equivale a demostrar que el conjunto de esos dos vectores es LD, y por lo tanto, no es LI.</td><td>CL
CLN
CLNNT
LD
LI</td></tr>
<tr><td>B3</td><td>Presentar una CL genérica de cualquiera de los vectores dados para obtener el otro; encontrar el escalar correspondiente y concluir que la afirmación es falsa. Esto es:
$$a\,(-3/2,1)=(3,-2)$$
$$\Downarrow$$
$$(-3/2\,a,a)=(3,-2)$$
$$\Downarrow$$
$$a=-2$$
$$\Downarrow$$
$$(-2)\,(-3/2,1)=(3,-2)$$
y la afirmación es falsa.
Ídem B5.</td><td>Encontrar un escalar, a través de plantear una CL genérica de uno de los vectores, de manera que al multiplicar por ese escalar a uno de los vectores, se obtenga el otro, es condición suficiente para afirmar que cada uno es CL del restante y entonces, el conjunto formado por ambos es LD y por lo tanto, no es LI.</td><td>CL
LD’
LI</td></tr>
</table>

[53] En la consigna: “*Los vectores* (3,-2) *y* (-3/2,1) *son linealmente independientes.*” se considera equivalente a “*El conjunto* $\{(3,-2),(-3/2,1)\}$ *es linealmente independiente*”

B4	Presentar una CLN genérica de los vectores (-3/2,1) y (3,-2); verificar que el sistema obtenido es indeterminado y concluir que la afirmación es falsa. Esto es: $a_1(-3/2,1)+a_2(3,-2)=(0,0)$ $\Downarrow$ $(-3/2\,a_1,\ a_1)+(3a_2,-2a_2)=(0,0)$ $\Downarrow$ $(-3/2a_1+3a_2, a_1-2a_2)=(0,0)$ $\Downarrow$ $\begin{cases}-3/2a_1+3a_2=0\\ a_1-2a_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_1=2a_2\\ a_1=2a_2\end{cases}$ el sistema es indeterminado y la afirmación es falsa. Ídem **B5**.	Verificar que el sistema homogéneo que se obtiene al plantear una CLN genérica de los dos vectores dados, es indeterminado, es suficiente para afirmar que el sistema admite soluciones no triviales y por lo tanto el conjunto formado por ambos vectores es LD y, en consecuencia, no es LI.	**CL** **CLN** **CLNT** **CLNNT** **SI** **RF** **CRF1** **CRF4** **CRF5** **LD** **LI**
B5	Observar, representando geométricamente en el espacio euclídeo E^2, que el vector (3,-2) es colineal al vector (-3/2,1) y concluir que la afirmación es falsa.  Verificar además aplicando **B1**.	Encontrar que dos vectores del espacio afín E^2 son colineales es condición suficiente para afirmar que cada uno es múltiplo del otro y, entonces, cada uno es CL del restante, y por lo tanto el conjunto formado por ambos es LD y, en consecuencia, no es LI. La colinealidad sólo queda demostrada si se aplica además la técnica **B1**.	**CO** **CL** **LD'** **LI**
B6	Exhibir la proporcionalidad de las respectivas componentes de los dos vectores, por ejemplo: $\dfrac{3}{-\frac{3}{2}}=\dfrac{-2}{1}=-2$ y concluir que la afirmación es verdadera. Ídem **B5**.	Demostrar que las respectivas componentes de los dos vectores forman una proporción es condición suficiente para afirmar que uno es múltiplo del otro, entonces cada uno es CL del restante y, por lo tanto, el conjunto de ambos es LD, es decir, no es LI. Esto es: dados los vectores: (a,b) ; (c,d) $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}=x \Rightarrow a=xc \wedge b=xd$ $\Downarrow$ $(a,b)=x(c,d)$	**PR** **CL** **LD'** **LI**

B7	Construir la matriz cuadrada cuyas filas son los vectores dados, hallar su rango y observar que es menor que 2, y luego concluir que la afirmación es falsa. Esto es: $\begin{bmatrix} -3/2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \approx_f \begin{bmatrix} -3/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ su rango es 1 y la afirmación es falsa. Ídem **B5**.	Encontrar que el rango de una matriz cuadrada de orden 2 no es 2 es suficiente para afirmar que dicha matriz contiene algún vector fila que es CL del otro y por lo tanto, el conjunto de ambos es LD y en consecuencia, no es LI.	**MA** **RA** **P2** **CL** **LD'** **LI**
B8	Construir la matriz cuadrada cuyas filas son los vectores dados, calcular el determinante y observar que es nulo, y luego concluir que la afirmación es falsa. Esto es: $\begin{vmatrix} -3/2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-3/2).(-2) - 1.3 = 0$ y la afirmación es falsa. Ídem **B5**	Encontrar que el determinante de una matriz cuadrada de orden 2 es nulo es suficiente para afirmar que dicha matriz contiene algún vector fila que es CL del otro y, por lo tanto el conjunto de ambos es LD y en consecuencia, no es LI.	**MA** **DE** **P3** **CL** **LD'** **LI**

Observaciones sobre la Tarea B

La técnica más habitual entre los estudiantes, por ajustarse estrictamente a la definición LI, sería la B4.
La técnica más breve, la B1, aunque puede considerarse equivalente, en ese sentido, a la B6 y B8.

Con respecto a los *significantes*, podemos agregar que operan en el registro aritmético: las técnicas B1, B2 y B6; en el registro algebraico: las técnicas B3 y B4; en el registro geométrico: la técnica B5; y en el registro aritmético-matricial: las técnicas B7 y B8.

Con relación a las *variables didácticas*, nuevamente son tres: el número de vectores, sus componentes y la dimensión del espacio vectorial al que pertenecen los mismos. Si se tratara de un conjunto de dos vectores de R^3, la técnica B6 es factible, pero se tornaría ineficaz la técnica B8 por cuanto la matriz no resultaría cuadrada.

Observaciones comparativas de la Tareas A y B

Si bien las dos tareas no se consideran equivalentes, comparten:

- la idea central de la dependencia lineal debido a que el conjunto de los tres vectores de la Tarea A y el conjunto de los dos vectores de la Tarea B son linealmente dependientes, de lo que se deduce que ambas tareas forman parte del contexto intramatemático del *campo conceptual* de la Dependencia Lineal, en el sentido aceptado en el apartado IV.2.4, p. 86.

- o las *variables didácticas*, esto es, el número de vectores, sus componentes y la dimensión del espacio vectorial al que pertenecen los mismos. Hemos visto cómo incide el número de vectores en la Tarea A, y también cómo influye la dimensión del espacio, en la Tarea B. Con respecto a la naturaleza de las componentes de los vectores, resulta obvio deducir que, si en lugar de tratarse del vector (-3,2), proponemos en la Tarea A, por ejemplo, el vector (3,3) que es la suma de los otros dos, la técnica A1 sería la predilecta. Del mismo modo, si en lugar de tratarse del vector (-3/2,1), proponemos en la Tarea B, por ejemplo, el vector (6,-4) que es el duplo del otro, la técnica B3 resulta de aplicación inmediata. De igual manera, la inclusión del vector nulo en cualquiera de las tareas, determinaría fuertemente la elección de la técnica.
- o algunas *técnicas* que son eficaces en ambos casos, tales son: A1-B1, A2-B2, A3-B3, A4-B4; aunque no exactamente, sus respectivas tecnologías y teorías. Por ejemplo, las técnicas B1, B2 y B3, contrariamente a sus emparentadas, requieren tener presente LD o LD' y LI; las técnicas A4 y B4 difieren fundamentalmente en el orden del uso de las herramientas y que A4 recurre a AL, mientras B4 no, y B4, a LI, mientras A4, no.

Los registros geométricos de las Tareas A y B, que bajo una rápida mirada pueden parecer equivalentes, resultan poseer naturaleza bien distinta en relación con su eficacia para responder a las cuestiones que se plantean. Es bastante poco probable que, a partir de la observación de la representación geométrica, en el espacio afín E^2, de los vectores de la Tarea A, puedan surgir los escalares de una cierta CL, ni siquiera, intuirse su existencia. Por el contrario, la colinealidad, aceptada como cierta, de los vectores de la Tarea B, no sólo es suficiente para responder la pregunta, sino que además anima la búsqueda mental de dicho escalar, técnica de verificación de uso habitual. Estas son las razones por las cuales, el registro geométrico aparece como complementario en A1 y a la inversa, en B5, lo que no es óbice para que sea utilizado como complementario en las restantes técnicas de B.

Por otro lado, tanto en la Tarea A como en la B, la utilización de los registros geométricos que se describen, requerirían del ejecutor de las técnicas tener bien en claro la diferenciación entre los espacios R^2 y E^2, que ciertamente parecen iguales a los observadores casuales, y que el cambio de registro es posible, por cuanto comparten sus registros aritméticos y algebraicos.

Acerca de las *invariantes operatorias*[54], esto es, los conceptos y teoremas en acto que aluden a los conocimientos matemáticos implícitos contenidos en los esquemas, forman parte en esta ocasión, de nuestro bagaje de prácticas personales y, salvo que se nos haya escurrido algún error, son pertinentes.

Tal como anticipamos, las dos praxeologías locales que hemos desarrollado, servirán de referencia en el análisis que llevamos a cabo en el apartado V.1.1, pp. 100-108, del capítulo siguiente.

[54] En la sección *II.5*, p. 24, esta componente de todo concepto, según Vergnaud, ha sido anotada **I**.

Capítulo V
Parte Experimental

V.1 Los instrumentos. Aspectos metodológicos. Análisis de datos

En este capítulo reportamos, en orden cronológico, la fase empírica de nuestro trabajo que abarcó cuatro momentos; dos de éstos involucran a alumnos de la FaCENA, otro, a docentes de nivel medio, y el restante, a docentes de la UNNE.

Debemos aclarar que parte de estas experiencias se implementaron en el marco de un proyecto afín que se desarrolla desde el año 2002, en la FaCENA de la UNNE. Nos estamos refiriendo a las experiencias que se describen en los apartados V.1.1 y V.1.2.

En cada una de las etapas, que se corresponden con cada apartado que sigue, se describe el objetivo, el instrumento, el perfil de los participantes, el método de recolección de datos y el procedimiento seguido en el análisis de la información.

Asimismo, dejamos en claro que en el trabajo de campo que hemos realizado se cumplió con las normas éticas de privacidad, confidencialidad y reserva de la identidad de los informantes.

Cabe también aclarar enfáticamente que ninguna de las experiencias que se describen tuvieron lugar en escenarios de enseñanza; por el contrario, la mayoría fueron rescatadas de instancias de evaluación. Sin embargo, mediante una adecuada interpretación y adaptación al caso, ello no nos impide pensar en la posible *reproducibilidad*, en otro tiempo y lugar, de los resultados que en este capítulo se reportan. Con respecto a este fenómeno, resulta interesante reflexionar sobre lo que afirman Lezama y Farfán (2001, p. 184):

> "El diseño de ingenierías con fines de investigación o bien de elaboración de dispositivos didácticos, enfrenta la problemática de poderlos compartir o llevar dichos dispositivos a la escuela. Los estudios de reproducibilidad, nos enseñan a no trivializar tal actividad. Los diseños pensados por los investigadores, deberán hacer consideraciones basadas en los estudios de reproducibilidad ya que estos nos muestran los múltiples aspectos que hay que tomar en consideración."

Esta postura no es incompatible con la opinión de Marton (1994, ii, 6) cuando afirma:

> "Sin embargo, el análisis no es una medida sino un procedimiento del descubrimiento. Investigar las maneras diferentes en las que un fenómeno puede experimentarse es tanto un descubrimiento como el hallazgo de algunas nuevas plantas en una isla distante. *El descubrimiento no tiene que ser replicable*, pero una vez que el espacio del resultado de un fenómeno se ha revelado, debe comunicarse de semejante manera que otros investigadores pudieran reconocer casos de las maneras diferentes de experimentar el fenómeno en cuestión. Después de haber estudiado la descripción del espacio del resultado otro investigador debe poder juzgar qué categorías de descripción se aplican a cada caso individual en el material en el que se encontraron las categorías de descripción ¿Hasta dónde semejante juicio implica que debe haber un grado razonable de acuerdo entre dos investigadores independientes y competentes? Nosotros aceptamos que la expresión «grado razonable de acuerdo» refiérase, algo arbitrariamente, a los casos donde dos investigadores están de acuerdo en por lo menos 2/3 de los casos al comparar sus juicios y donde ellos alcanzan acuerdo en los 2/3 de los casos restantes después de la discusión." (La cursiva es nuestra).

V.1.1 Dos preguntas formuladas a alumnos de FaCENA

Esta etapa empírica toma como eje de referencia el análisis de las respuestas a las dos tareas cuyas praxeologías hemos presentado en el apartado IV.2.5, pp. 89-98 y que además se agregan como apéndice VIII.1 de este trabajo.

El propósito primario de esta exploración es dar respuesta a la pregunta 9, formulada en la sección *I.2*, p. 6, es decir *¿Cuáles son las técnicas que utilizan los estudiantes de la UNNE, para resolver a esas dos tareas, cuáles son sus errores, cuál es su rendimiento?* para luego analizar los obstáculos que sea posible identificar.

V.1.1.1 Descripción. Perfil de los encuestados

La muestra abarcó a la totalidad de los 81 alumnos que se presentaron a rendir examen final, en la asignatura C3, cuyo escenario didáctico se describió en el subapartado IV.1.2.1, pp. 65-70, y que se llevó a cabo en instalaciones de la FaCENA, en el mes de agosto de 2002. Sesenta y ocho alumnos evaluados cursan Bioquímica y 13, las restantes carreras. Los encuestados tienen, en promedio, edades entre 18 y 21 años.

Como ya anticipamos, el instrumento consiste en dos preguntas, no consecutivas en este caso, y que forman parte del cuerpo del examen, que abarcó un total de 25, tanto de carácter teórico como práctico, entre las cuales pueden apreciarse ocho de opción 'verdadero'-'falso', con pedido de justificación de respuestas, donde fueron ubicadas las dos a las que nos estamos refiriendo.

En esta oportunidad los estudiantes no fueron advertidos respecto a que sus respuestas serían procesadas en este trabajo, a efectos de no interferir con la ejecución normal del examen, desviando la atención de los alumnos hacia aquellas dos preguntas en particular, lo que hubiera creado un ambiente ficticio no deseable.

La documentación que avala la veracidad de los datos recogidos, se encuentra archivada en la cátedra C3.

V.1.1.2 Comentarios sobre el guión del cuestionario

La decisión de implementar un instrumento de evaluación en una instancia de examen final obedeció a la intención de obtener información de alumnos que hubieran completado, no sólo el cursado de la asignatura, sino también, el estudio posterior que se supone, precede a toda prueba de conocimiento. Además, se seleccionó una mesa examinadora en la que se sabe que los alumnos acostumbran a presentarse masivamente, lo que permitiría estudiar un buen número de casos para llevar a cabo un análisis, tanto cualitativo como cuantitativo de los datos recogidos.

No obstante las ventajas que señalamos, esta modalidad constituyó una seria limitación a la hora de diseñar este primer dispositivo, y en consecuencia, requirió de nuestra parte un cuidado y precaución muy especiales, de modo de preservar a los alumnos de un fracaso seguro.

Algunas de las restricciones que surgen del análisis llevado a cabo en el subapartado IV.1.2.1, pp. 65-70, están vinculadas a que las preguntas:

- no podían exceder a dos, para dar lugar a la evaluación de las unidades restantes del programa;
- debían ajustarse al estilo habitual del examen que consiste en preguntas de respuesta breve, que en general no contienen subítems.
- no debían requerir conocimientos de complejidad superior a la que se desprende del análisis de las guías de trabajos prácticos, es decir, respetar la transposición y contratos didácticos de la asignatura, en esta institución (Esta consideración también hubiera sido tomada en cuenta si la experiencia se llevaba a cabo durante la etapa de instrucción).

Si bien el cuestionario no lograba responder a nuestras aspiraciones indagatorias, se trató de formular dos preguntas, aunque muy directas, pero que igualmente permitieran un primer acercamiento a la problemática de la construcción de los conceptos que estamos tratando, a través de observar ciertas variables como los tipos de errores que se presentan, la eficacia y/o pertinencia de las técnicas utilizadas, la movilidad entre registros. Por comodidad, recordamos aquí ambas preguntas:

> Establecer la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta:
> A. *El vector (-3,2) es combinación lineal de los vectores (0,1) y (3,2)*
> B. *Los vectores (3,-2) y (-3/2,1) son linealmente independientes*.

Como se señaló en el apartado IV.2.5, p. 95, al construir las praxeologías de estas dos tareas, ambas comparten la DL (no de la misma manera por cierto) y algunas de las técnicas posibles. Una de las intenciones que persigue la pregunta A, es justamente analizar si existe encerramiento de la noción de DL, en la proporcionalidad pues, como puede apreciarse, si la pregunta A tratara con dos vectores en lugar de tres, ambas cuestiones serían casi equivalentes. Sin embargo, nuestra exploración se centrará principalmente en las técnicas utilizadas por los estudiantes para responder las dos preguntas, postura que justificamos a continuación.

La validación a través del grupo de expertos, reveló que la combinación de técnicas[55] utilizadas por éstos, es la A5 y B1, que no requieren siquiera hacer uso de papel y lápiz y, dada la simpleza de ambas preguntas, un análisis a priori nos permite afirmar que esa combinación debería también estar disponible en cualquier alumno que haya cursado C3 en la FaCENA.

[55] Para indicar las técnicas utilizaremos los mismos códigos que en el apartado IV.2.5, pp. 92-97.

Ahora bien ¿qué interpretación cabe en el caso de que los estudiantes optaran por la utilización de otras técnicas? Justamente, la elección de la técnica, que en otra circunstancia puede no ser relevante, según nuestro modo de ver, se torna aquí en una pieza vital que nos revelará una primera aproximación al grado de flexibilidad de los conocimientos de los alumnos, vinculado a su fragmentación o no, a su posibilidad de movilizarlos o no, y ponerlos en relación cuando resulta económico y eficaz.

V.1.1.3 Análisis de los datos recogidos en el cuestionario

Dado que el tamaño de la muestra es pertinente, además de un análisis cualitativo de las respuestas, se llevó a cabo un análisis cuantitativo que se centró, tanto en los aciertos, como en la técnicas utilizadas.

De los errores cometidos

Los errores que surgieron con mayor frecuencia están vinculados a la no comprensión de los conceptos y a la operatoria algebraica, con el agregado de la carencia de verificación de los resultados.

En un principio se detectaron una veintena de errores en las producciones de los estudiantes al resolver la Tarea A que luego de analizados más profundamente, fueron agrupados en las siguientes categorías, de las que se indica además, su frecuencia de aparición:

1) Sumar o multiplicar los vectores (0,1) y (3,2), y como no les resulta el vector (-3,2), contestar que la proposición es Falsa [Frec. 7].
2) Plantear correctamente la combinación lineal genérica de acuerdo a la técnica A3, e incluso el sistema, y por dificultades vinculadas al manejo algebraico, no lograr avanzar; o hallar un solo escalar y detenerse sin concluir, o uno de los escalares es erróneo y no verificar sus resultados, y si lo hacen, volver a cometer error; o bien, no lograr extraer ninguna conclusión a partir de los resultados correctos obtenidos [Frec. 12].
3) Justificar su respuesta incorrecta exclusivamente en el contexto verbal a través de expresiones tales como: Falso porque “no existen los escalares”; “porque no coinciden los cálculos”; “para ser CL tiene que ser CL de los demás vectores”; “efectuando operaciones elementales no se halla que el vector (-3,2) sea CL de los restantes”; “(-3,2) puede ser CL de sus opuestos, pero no de los vectores (0,1) y (3,2)” [Frec. 5].
4) Emular la utilización de la técnica A1; imponer cualquier par de escalares que no satisfacen la igualdad y contestar que la proposición es Falsa, y en al menos una oportunidad, también la aceptarla como verdadera [Frec. 3].
5) En el intento de utilizar la técnica A3, plantear incorrectamente el sistema [Frec. 3].

6) Intentar encontrar proporcionalidad entre las componentes de cada uno de los vectores, con el tercero dado [Frec. 3].

7) Igualan la CL genérica de los vectores (0,1) y (3,2) al vector nulo, confundiendo claramente las definiciones de CL e I [Frec. 3].

No se observa, en esta tarea, encerramiento del concepto de la DL en la proporcionalidad de las componentes (error 6), ya que solamente tres alumnos toman aisladamente los vectores (0,1) y (3,2) para estudiar una posible proporcionalidad con el vector (-3,2).

Se percibe, en los alumnos, la intención de justificar la DL exclusivamente vía la suma de los vectores o cualquier otra operación arbitraria previamente concebida por ellos (error 1, con frecuencia 7).

El error que se presenta con mayor frecuencia (12) es el 2, lo que evidencia el encerramiento en el uso exclusivo de la definición (1), a través de la aplicación de la Técnica A3, pero carentes de la necesaria comprensión acerca de qué están buscando y de cuáles son las conclusiones correctas que deben extraer de sus resultados.

Los errores detectados en las respuestas de la pregunta B, resultaron más confusos para agrupar que los descriptos para la pregunta A, por cuanto los estudiantes que justificaron su respuesta en el contexto verbal, mostraron grandes dificultades, incluso en el caso de respuestas correctas. Este hecho pareciera corresponder a algún saber que se moviliza a nivel de intuición, pero que no logra formalizarse.

Algunos de los errores más frecuente que logramos agrupar son:

1) Exhibir la combinación lineal nula trivial de los vectores dados y concluir que son linealmente independientes.

2) Exhibir la combinación lineal nula genérica de los vectores de acuerdo a la Técnica B4, resolver el sistema obtenido, conseguir la expresión 0=0, o cualquier otra indeterminación y concluir que son linealmente independientes.

3) Plantear correctamente la combinación lineal nula genérica de los vectores de acuerdo a la técnica B4, e incluso el sistema, y por dificultades vinculadas al manejo algebraico, no lograr avanzar; o hallar un solo escalar y detenerse sin concluir, o uno de los escalares es erróneo y no verificar sus resultados, y si lo hacen, volver a cometer error; o bien, no lograr extraer ninguna conclusión a partir de los resultados correctos obtenidos.

4) Intentar aplicar la Técnica B4 utilizando un vector genérico en lugar del vector nulo.

5) Lograr expresar uno de los vectores como múltiplo del otro y, sin embargo, concluir que son linealmente independientes.

Algunas de las justificaciones verbales insuficientes o que contienen expresiones descabelladas, en respuestas correctas son:

- "porque existen los escalares"
- "porque son linealmente independientes (3,-2) y (-3,2)"
- "porque teniendo estas ecuaciones la solución trivial el sistema resulta incompatible"
- "ya que las combinaciones lineales independientes son todas cero"
- "porque el valor de uno de ellos depende del otro" (sin más agregado)

Algunas de las justificaciones verbales insuficientes o que contienen expresiones descabelladas, en respuestas incorrectas son:

- "porque su resultado único es el trivial" (sin más agregado)
- "porque no se cruzan en el plano"
- "pues tiene una solución nula"
- "porque dos vectores LI no están en la misma recta" (sin más agregado)
- "pues el sistema es homogéneo independiente trivial"
- "porque el primer vector es CL del segundo vector" (sin más agregado)

No se observan diferencias sustanciales de rendimiento entre alumnos que cursan diferentes carreras; ni entre los que cursaron en el presente ciclo lectivo o en uno anterior; ni entre los alumnos que se presentan por primera vez y los que rindieron en mesas pasadas.

Del análisis cuantitativo de las respuestas y sus técnicas

Con el objeto de cuantificar las observaciones, hemos definido las variables Res A, Res B, Téc A y Téc B.

La variables **Res A** y **Res B** están vinculadas a las respuestas correctas, incorrectas o ausentes y asumen los valores:

0: el alumno contestó incorrectamente el ítem.

1: el alumno contestó correctamente el ítem.

2: el alumno no contestó el ítem, o bien, contestó 'verdadero' o 'falso', sin justificación.

Las variables **Téc A** y **Téc B** están referidas a las técnicas utilizadas y asumen los valores:

1, **2**, **3**, **4** , **5** para la Téc A, de acuerdo a la praxeología detallada en IV.2.5, pp. 92-94.

1, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8** para la Téc B, de acuerdo a la praxeología detallada en IV.2.5, pp. 95-97.

99: se corresponden con técnicas 'no identificables'

casillas vacías: corresponden a los alumnos que no respondieron el ítem.

En los casos en que resultó posible identificar alguna técnica, aún en respuestas incorrectas, se colocó el código correspondiente.

Las preguntas que guiaron nuestro análisis son:

1) ¿Se resolvieron ambos tareas con similar éxito?

2) ¿Está asociado el éxito en la resolución de la Tarea A al éxito en la resolución de la Tarea B?

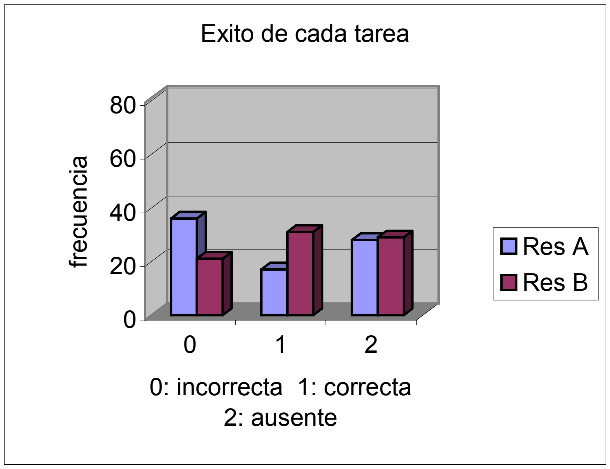
3) ¿Existen diferencias en los porcentajes de éxito según la técnica elegida?

En el cuadro que sigue, se muestra la distribución de aquellas variables, según las respuestas de cada uno de los estudiantes encuestados.

Alu	Res A	Téc A	Res B	Téc B	Alu	Res A	Téc A	Res B	Téc B
1	1	3	1	1	**42**	2		1	6
2	0	99	0	4	**43**	0	99	0	99
3	2		1	4	**44**	1	1	0	4
4	0	3	0	4	**45**	2		2	
5	1	3	1	4	**46**	0	99	1	1
6	0	3	0	99	**47**	0	1	2	
7	0	3	2		**48**	0	99	2	
8	2		2		**49**	1	3	0	4
9	2		2		**50**	1	3	0	4
10	1	1	1	1	**51**	2		2	
11	2		2		**52**	2		1	1
12	2		1	7	**53**	2		2	
13	2		2		**54**	0	3	2	
14	2		0	99	**55**	2		1	5
15	2		2		**56**	0	3	2	
16	0	99	1	6	**57**	1	3	1	4
17	0	3	1	1	**58**	0	3	2	
18	1	3	0	4	**59**	1	3	1	8
19	0	1	1	1	**60**	0	99	2	
20	0	3	1	4	**61**	0	99	0	4
21	0	99	1	8	**62**	2		1	1
22	1	3	1	1	**63**	0	3	2	
23	0	3	0	4	**64**	0	99	1	8
24	0	3	1	4	**65**	2		1	6
25	1	3	0	4	**66**	0	3	2	
26	2		2		**67**	1	3	1	4
27	0	3	1	4	**68**	2		2	
28	0	3	2		**69**	2		2	
29	0	99	0	99	**70**	2		1	1
30	2		2		**71**	0	1	1	1
31	0	3	2		**72**	2		2	
32	1	3	0	4	**73**	2		0	99
33	0	3	0	99	**74**	1	3	1	8
34	2		0	99	**75**	0	99	0	99
35	2		2		**76**	1	3	2	
36	0	3	1	2	**77**	0	99	1	4
37	0	3	0	4	**78**	0	3	1	7
38	1	3	1	4	**79**	1	1	0	4
39	0	99	0	99	**80**	0	3	1	4
40	2		2		**81**	2		2	
41	2		2						

Con el objeto de dar respuesta a las tres preguntas que nos hemos formulado, procesamos los datos a través de software estadístico SPSS 9.0, obteniendo los siguientes resultados:

1) Aproximadamente el 21% de los alumnos resolvió correctamente la tarea A, el 38,3%, la tarea B, en tanto que sólo el 11% resolvió correctamente ambos tareas, mientras que el 21% figura con respuesta ausente en ambas. Dado que ambos porcentajes son bajos, podría afirmarse que la diferencia de éxito entre ambas tareas no es significativa.



Sin embargo, el éxito en la tarea B, que es casi el doble que el éxito en la tarea A, supera a la cantidad de respuestas incorrectas y ausentes, por separado, lo que no sucede con la A.

Cuadro resumido de datos cruzados

A \ B	0	1	2	TOTAL	
0	11	14	11	36	44,4%
1	7	**9**	1	17	21,0%
2	3	8	17	28	34,6%
TOTAL	21	31	29	81	100%
	25,9%	38,3%	35,8%	100%	

RESA * RESB Crosstabulation

			RESB			Total
			0	1	2	
RESA	0	Count	11	14	11	36
		% within RESA	30,5%	38,9%	30,5%	100,0%
		% within RESB	52,4%	45,2%	37,9%	44,4%
		% of Total	13,6%	17,3%	13,6%	44,4%
	1	Count	7	9	1	17
		% within RESA	41,2%	52,9%	5,9%	100,0%
		% within RESB	33,3%	29,0%	3,4%	21,0%
		% of Total	8,6%	11,1%	1,2%	21,0%
	2	Count	3	8	17	28
		% within RESA	10,7%	28,6%	60,7%	100,0%
		% within RESB	14,3%	25,8%	58,6%	34,6%
		% of Total	3,7%	9,9%	21,0%	34,6%
Total		Count	21	31	29	81
		% within RESA	25,9%	38,3%	35,8%	100,0%
		% within RESB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		% of Total	25,9%	38,3%	35,8%	100,0%

2) La resolución de la tarea A no es independiente de la resolución de la tarea B según indican los índices ($r_s = 0,265$, $p=0,009$).

Correlations

			RESA	RESB
Spearman's rho	RESA	Correlation Coefficient	1,000	0,265
		Sig. (2-tailed)	,	0,009
		N	81	81
	RESB	Correlation Coefficient	0,265	1,000
		Sig. (2-tailed)	0,009	,
		N	81	81

** Correlation is significant at the 0,01 level (2-tailed).

3) No se percibe, en la tarea A, diferencia en los porcentajes de éxito, según la técnica elegida; en cambio, en la tarea B, existe tal relación; por ejemplo, la técnica 4 fue menos exitosa que las demás (le ahorramos al lector la lectura de las tablas que reflejan estos últimos resultados).

Del análisis cualitativo de los resultados y técnicas utilizadas

La combinación de técnicas utilizadas con más frecuencia por los estudiantes es la A3-B4. No casualmente, estas técnicas consisten en la aplicación lisa y llana de la definición de CL e IL, lo que permite inferir, sin lugar a dudas, que los alumnos que cursan y rinden la asignatura C3 sufren un encerramiento en el tipo de pensamiento que hemos citado en el apartado III.2.5, p. 55, y que Sierpinska et al. (2002) denominan ‘definicional’. Pero este hecho no puede reducirse a su sola identificación, debemos bucear en su significado.

En efecto, en la respuesta a la pregunta A, la no elección de la técnica A5, que involucra el concepto de dimensión de un EV, denota que los alumnos no han logrado movilizar la idea de la DL, al hecho de que el conjunto de tres vectores de R^2 siempre son LD, y por lo tanto, al enunciado que vincula aquella noción con el ‘número mínimo de generadores y máximo de independientes’. La importancia de construir un puente entre estos conceptos ya fue citada en el apartado III.2.2, p. 51 de este trabajo, y constituye uno de los *obstáculos* más relevantes que surgen de la génesis histórica del AL y del análisis del campo conceptual de la DL.

La no elección de la técnica B1 puede interpretarse, en este caso, como una carencia de habilidad en el cálculo mental para encontrar el escalar que multiplica a un vector para obtener el otro, pero también puede obedecer al desconocimiento de que esa búsqueda es un recurso eficaz en este caso tan especial en que la pregunta involucra a tan sólo dos vectores, y en el cual la DL se presenta, vía la proporcionalidad de las componentes. Nosotros argumentamos en favor de que se trata se está presentando la segunda dificultad pues, de conocer el estudiante que el ejercicio se resuelve a través de demostrar la existencia, o no, de una proporcionalidad, y ésta no le salta a la vista, hubiera recurrido a la técnica B3 (frecuencia 0) o a la B6 (frecuencia 2).

Aunque nos veamos inclinados a otorgar el beneficio de la duda, no puede soslayarse el hecho de que la técnica B4 es, sin vacilación, la menos económica de las ocho que se muestran en el apartado IV.2.5, pp. 95-97, lo que evidencia que los estudiantes no han logrado vincular la DL con la colinealidad de los vectores (B5), ni con el hallazgo de una constante de proporcionalidad (B3-B6), ni con el rango de una matriz (B7), ni con la nulidad del determinante (B8), conceptos que conforman gran parte del campo conceptual de la idea central que nos ocupa, y que hemos construido en el apartado IV.2.4, p. 86-88, del presente trabajo.

En conclusión, los únicos recursos disponibles en estos alumnos, salvo algunas honrosas excepciones, son las definiciones primarias de los conceptos involucrados en las preguntas, y por añadidura, muestran serios inconvenientes en la manipulación algebraica que les impide alcanzar el resultado correcto.

También es pertinente insistir en que los alumnos no fueron encuestados cuando solamente disponían de las definiciones de DL e IL, lo que de hecho hubiera justificado en parte la aparición de aquellos *esquemas*[56] predominantes en estos estudiantes, y a los que se refiere Vergnaud como la *organización invariable de la conducta*, sino que se supone que conocían el campo conceptual descripto en el apartado recientemente citado.

Asimismo, entendemos que los resultados obtenidos en la experiencia que acabamos de describir y analizar, junto a los reportes de las investigaciones en el tema que consignamos en la sección *III.2*, pp. 44-58, constituyen suficientes elementos para sostener que hemos confirmado la única hipótesis que planteamos en la introducción de este trabajo, esto es: *existen obstáculos en la construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la UNNE*.

V.1.2 Un problema formulado a Profesores de Nivel Medio

En esta etapa, de carácter empírico, describimos las características y los resultados obtenidos en la experiencia de solicitar la resolución de un problema a un grupo de profesores de nivel medio, cuyo enunciado se agrega como apéndice en la sección VIII.2, aunque por comodidad, también lo transcribimos aquí.

Este abordaje tiene como propósito dar respuesta a la pregunta 10, formulada en la sección I.2, p. 6, esto es *¿Qué conocimiento tienen sobre el tema los Profesores de Nivel Medio?* a través de lograr una aproximación al modo en que la noción de la dependencia lineal 'vive' en los docentes e imaginar cómo transmitirían la idea a los alumnos que ingresarán a la universidad.

[56] Ver sección *II.5*, p. 22.

V.1.2.1 Descripción. Perfil de los encuestados

El instrumento utilizado consistió en el enunciado escrito de un problema propuesto a un pequeño pero heterogéneo grupo de 15 docentes diplomados del nivel medio, y de muy variadas edades, que ejercen en la Capital e interior de Corrientes, Chaco, Formosa y Misiones, provincias que componen el Nordeste argentino.

Cabe mencionar que la resolución del problema se llevó a cabo en una instancia de evaluación de un curso, lo que imprime un compromiso particular de los encuestados con el resultado.

La muestra, que forma parte de un total de 125 docentes, no fue el resultado de una selección aleatoria ni voluntaria, sino que abarcó la totalidad de la población de profesores que tenían pendiente la aprobación de un examen recuperatorio debido a que no asistieron a la versión original del examen, sin embargo, este hecho le otorga cierto carácter azaroso a la muestra, y en consecuencia, hace significativos los resultados que surgen de tal exploración.

La experiencia se llevó a cabo en instalaciones de la FaCENA, en agosto de 2003, y la documentación que la acredita, se encuentra archivada junto al resto de la documentación del curso.

V.1.2.2 Comentarios sobre el problema propuesto

El problema que se propuso a los docentes fue diseñado con un doble objetivo. Por una parte, en virtud de su pertinencia en relación con temas que se habían desarrollado durante el curso; por otra, la intención de utilizar este dispositivo de modo de convertirlo en un instrumento de evaluación razonable de conocimientos vinculados a las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, tales como la incompatibilidad, y en particular, la indeterminación, ligada a la proporcionalidad de dos ecuaciones.

Debido a su simpleza, advertimos que el dispositivo utilizado no fue sometido a proceso de validación alguno.

Más abajo, y con el objeto de facilitar la interpretación al lector, transcribimos el enunciado del problema y una posible solución del mismo.

Claramente, el ítem ii) apunta a detectar si el docente maneja con solvencia el concepto de indeterminación del sistema de dos ecuaciones lineales a través de provocar la aparición de una cierta proporcionalidad entre aquellas. Ahora bien, como no es la proporcionalidad el saber en el que estamos interesados, podemos preguntarnos ¿por qué afirmamos que este ítem permite indagar respecto al conocimiento que el docente posee, en relación con la DL? Simplemente, porque quien maneja con solvencia la noción de la DL, sabe que la *información* que provee la ecuación $c+b=60$ (o el vector (1,1,60)), es la misma que la que proporciona cualquier 'múltiplo' de la misma y que, en realidad, dispone de una única ecuación con dos variables, que arroja infinitas soluciones en R^2.

Por lo tanto, en el caso de estar ausente aquel conocimiento, es válido inferir que también se encuentra ausente el significado de la DL. Como habrá notado el lector, estamos recurriendo a una deducción obtenida por el método llamado del 'contrarrecíproco'.

ENUNCIADO

Un espía sabe que en cierto aeropuerto secreto hay estacionados 60 aviones, entre cazas y bombarderos. Hay un tipo de cohete que es transportado por ambas clases de aviones; el caza porta seis de esos cohetes y el bombardero sólo dos. El agente sabe que con 250 cohetes quedaron pertrechados por completo todos los aviones que se hallan en el aeropuerto. Además, se entera que en esa base el número de aviones caza es el doble del número de bombarderos.

a) Calcule el número de aviones caza y bombarderos que hay en el aeropuerto o bien demuestre que la información del agente debe ser incorrecta, ya que es inconsistente.

b) Si la información resultó inconsistente, modifíquela de manera tal que:

i) pueda determinarse con certeza el número de aviones de cada tipo;

ii) sea imposible afirmar con certeza el número de aviones caza y bombardero pues solamente se obtienen algunas cantidades posibles de aviones de cada tipo que pudieran estar estacionados en el aeropuerto.

UNA SOLUCIÓN

Las ecuaciones simultáneas que modelan el problema son:

$$\begin{cases} c + b = 60 \\ 6c + 2b = 250 \\ c = 2b \end{cases}$$

donde c es el número de aviones caza y b, el de bombarderos

a) No es necesario aplicar ninguna técnica sofisticada para probar que la información *es inconsistente*. En efecto: Si $c = 2b$ entonces $c + b = 2b + b = 3b = 60$ y por lo tanto $b = 20$. Como $6c + 2b = 6c + 2.20 = 6c + 40 = 250$ entonces $6c = 210$, y por lo tanto, $c = 35$.
Pero entonces $c + b = 35 + 20 = 55$, cuando debería ser 60.

b) i) Eliminamos la información "el número de aviones caza es el doble del número de bombarderos" y cambiamos 250 cohetes por 272. De esto resulta el sistema $\begin{cases} c + b = 60 \\ 6c + 2b = 272 \end{cases}$ que arroja como única solución: $c = 38$ y $b = 22$.

ii) Cambiamos, p. ej. la información por: "los cazas y los bombarderos portan 6 cohetes cada uno. El agente sabe que con 360 cohetes quedaron ...", de donde resulta: $\begin{cases} c + b = 60 \\ 6c + 6b = 360 \end{cases}$

que es un sistema indeterminado y, por lo tanto, admite soluciones múltiples.

V.1.2.3 Análisis de los datos recogidos en las soluciones

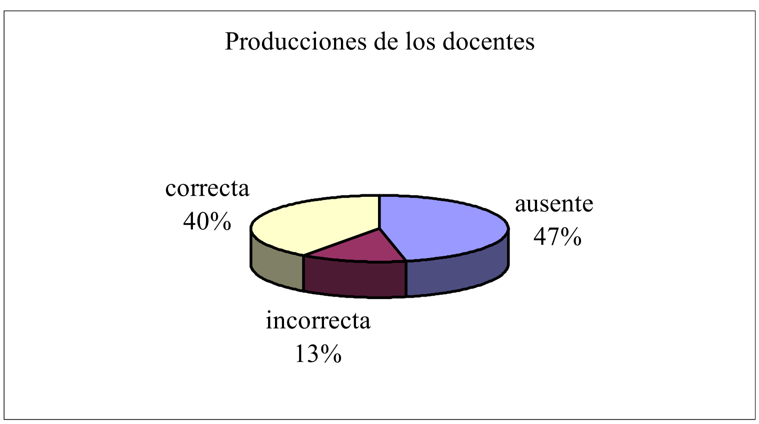
Como es conocido, la cantidad de individuos de la muestra no resulta suficiente para llevar a cabo un análisis cuantitativo de relevancia, y menos aún, uno que pretenda inferir tendencias a la población de todos los docentes de nivel medio del nordeste argentino. Es por ello que nos limitamos a hacer una síntesis descriptiva-explicativa de carácter cualitativo de las producciones de los profesores.

Vamos a concentrar nuestro análisis en las respuestas dadas al ítem ii). De éstas surge que siete docentes evitan contestarlo; de los ocho restantes, cinco lo responden correctamente, dos incorrectamente, y uno plantea de forma incorrecta las ecuaciones de partida pero responde coherentemente el ítem ii), respuesta que consideramos correcta, a efectos del cómputo.

A continuación mostramos las producciones de los últimos tres casos y su interpretación.

	Producción escrita	**Interpretación**
1	ii) $\begin{cases} c+b=60 \\ 3c+b=250 \end{cases}$ $\begin{cases} 2c+b=60 \\ 3c+b=250 \end{cases}$ $b=60-2c$	Modifica un sistema incorrecto, pero tampoco logra el efecto solicitado. El sistema que propone es determinado y además arroja resultados no posibles en el contexto del problema.
2	$x+y=130$ $6x+2y=250$	Conserva la segunda ecuación del sistema, pero es incapaz de modificar la primera, de modo de conseguir lo que se solicita. El que propone es determinado y halla un único par de valores no naturales imposibles en el contexto del problema.
3	$\begin{cases} 2c+b=45 & (1) \\ 4c+2b=90 & (2) \end{cases}$	Plantea incorrectamente la primera ecuación del sistema pero responde de acuerdo a ella el ítem ii).

En términos de porcentajes, los resultados vinculados a la categoría de las respuestas son:



No deja de ser preocupante el hecho de que sólo el 40% de los profesores evidencian tener idea de cómo inventar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de modo que resulte indeterminado, conocimiento que constituye una piedra angular en la construcción del concepto de dependencia lineal de vectores.

A partir del significado de los resultados recogidos en esta experiencia, que no ameritan mayores explicaciones para su comprensión, obtenemos un acercamiento a la respuesta de la pregunta que encabeza este apartado, y además, una apreciación del calibre de la contribución que estos docentes están en condiciones de llevar a cabo, en el marco de la cuestión trabajada en el apartado IV.1.1, pp. 59-65, asociada a la idea de la enseñanza de los conceptos que nos ocupan, en el Nivel Medio de nuestra comunidad.

V.1.3 Entrevista a Profesores de la Universidad Nacional del Nordeste

La pregunta central que guió esta etapa es la que hemos indicado con el número 11 en la sección I. 2, p. 6, de la introducción de este trabajo, esto es *¿Cuál es la concepción que tienen los profesores de la UNNE en relación con la enseñanza y aprendizaje del tema?* información que recogimos a través del dispositivo que pasamos a describir.

V.1.3.1 Descripción. Perfil de los entrevistados

El instrumento seleccionado en esta oportunidad fue una entrevista estructurada, remitida y receptada a través de correo electrónico. Varias fueron las razones que nos condujeron a esta decisión y aquí señalamos algunas de ellas:

- No resulta sencillo encontrar en la UNNE algún docente desocupado durante todo el lapso de tiempo que duraría la entrevista.
- Si bien el cuestionario no contiene preguntas comprometedoras, entendemos que una entrevista cara a cara, podía constituir un obstáculo para que el docente se explayara a su antojo, y revisara y corrigiera sus propias declaraciones.
- Priorizamos las respuestas reflexionadas a las espontáneas y quizá de compromiso.
- Las respuestas a algunas preguntas requerían tener presente ciertos datos numéricos y de organización de la asignatura para las cuales los docentes quizá necesitaran consultar la documentación obrante en la cátedra.
- Evaluamos que el número de docentes que tal vez no contestaran la encuesta electrónica podría resultar similar a la cantidad de aquellos que no aceptaran ser entrevistados y grabados.

Esta etapa del trabajo se desarrolló en varias fases. En la primera, se procedió al diseño del instrumento, cuya versión definitiva fue el resultado de sucesivas correcciones, que surgieron de recomendaciones del grupo de expertos que lo validó; la segunda, consistió en el estudio de los distintos programas de las carreras que se cursan en la UNNE, a fin de detectar aquellos que incluyen el tema DL e IL de vectores; la tercera, la indagación acerca de la identidad de los docentes que imparten clases en esas asignaturas; la cuarta, la averiguación de sus respectivos correos electrónicos; la quinta, la remisión, la sexta la recepción, y finalmente, el análisis.

Entonces, la muestra seleccionada consistió en la totalidad de profesores y auxiliares de la UNNE que prestan servicio en aquellas asignaturas, sin embargo, como se verá, la muestra analizada fue inferior, debido a que no todos contestaron a la misma. En efecto, se remitió el guión a 17 docentes, en diciembre de 2004, y se recibieron en devolución diez, acorde a nuestras expectativas, entre diciembre de 2004 y febrero de 2005.

V.1.3.2 Comentarios sobre el guión de la entrevista

Las preguntas que conforman la entrevista, y que obran en el apéndice VIII.3, p. 163, se estructuran de modo de recavar información que nos habilite a reconstruir, lo más cercanamente posible, los escenarios en que tienen lugar los procesos didácticos. Es por ello que se indaga en variadas direcciones. Por un lado, en relación con la categoría y dedicación del profesor dentro de la cátedra, asignatura que imparte, carrera para la cual se dicta, matrícula estudiantil, régimen de cursado y ubicación curricular, tipo y modalidad de la clase y carga horaria semanal. Por otra parte, recoge datos vinculados a la organización didáctica de los temas que nos ocupan, la importancia que le otorgan, las estrategias de enseñanza, el porcentaje aproximado de alumnos que considera que se apropian de los conceptos de DL e IL, las horas de clase que le dedican al tema, si las consideran suficientes, y cuáles son las dificultades que encuentra en sus alumnos. Además, se incluyó una única pregunta vinculada al conocimiento disciplinar del tema con la intención de aproximarnos a las creencias de los docentes acerca del significado de la DL.

También cabe recordar que gran parte de la información obtenida en la primera categoría, operó de fundamento en el desarrollo del subapartado IV.1.2.1, pp. 65-70, al describir el montaje didáctico en la UNNE. Nos referimos a los datos generales sobre las asignaturas y a las respuestas de las preguntas uno y dos.

V.1.3.3 Análisis de los datos recogidos en las entrevistas

Es importante destacar, ya que sobre ellos recae la gestión de la organización de la enseñanza, que entre los diez docentes que devolvieron la entrevista, figuraron los cinco profesores responsables de las asignaturas que caracterizamos en el apartado recientemente citado.

Dada la característica de la experiencia, nuestro análisis consistirá en una síntesis descriptiva-explicativa de carácter cualitativo de las respuestas de los profesores.

Con relación a la pregunta tres del guión de la entrevista acerca de la *importancia* que le confieren los informantes a la ideas de DL e IL para la formación matemática de los estudiantes, todos opinan, ya sea enfocando a la carrera específica para la cual se dicta la materia, o bien, en términos más generales, que las nociones son de sumo valor, dentro y fuera de la matemática. Algunos de sus argumentos[57] se exponen a continuación:

[57] Estas opiniones dan fuerza a las que anticipamos en el apartado I.1.1, pp. 1,2, del presente trabajo.

> “Para mí, la potencia de este tema es que permite sistematizar los conocimientos mostrando que no son temas dispersos. (...) la utilidad del cálculo vectorial se debe a que no introduce elementos extraños, es decir sus elementos y operaciones tienen carácter *intrínseco* e *invariante.”*

> “Son muy importantes en un doble sentido, creo que es un tema que exige un grado de abstracción interesante para un alumno que se inicia en las matemáticas, es decir que trabajar con este tema es hacer un poco de matemáticas. Por otro lado es un tema que tiene infinidad de aplicaciones en otros temas de la matemática (matrices, geometría, sistemas de ecuaciones) y en otras áreas como pueden ser física, biología, computación, etc.”

> “Creo que son importantes en la formación matemática de mis alumnos, porque es un tema que permite representaciones algebraicas, geométricas y gráficas interdependientes, que permiten su transposición a otros temas, tanto dentro de la matemática, como de un espectro muy amplio de aplicaciones, algunas de las cuales los futuros Licenciados en Sistemas de Información deben conocer e interpretar correctamente.”

> “Los conceptos de DL e IL son importantes en la formación de los alumnos, no solo dentro del álgebra lineal sino también dentro de las matemáticas en general, porque tienen una cierta universalidad y siempre los encontrarán en diversos contextos.”

> “Naturalmente que sí, la idea es importante en la formación matemática del alumno, tanto como que esa idea le facilite al alumno la “manipulación” de estos “modelos que le aporta matemática” como herramienta de trabajo.”

> “Creo que son fundamentales para las ingenierías, ya que todos los problemas de mecánica (Física) y Mecánica aplicada (en Ingeniería Civil) y cálculo de circuitos (eléctricos o electrónicos), se pueden reducir a resolver operaciones con matrices, esto es, transformar la complejidad de la geometría, del análisis y de la topología a cálculos algebraicos.”

Con respecto a las *estrategias* que utilizan para transmitir las nociones CL, DL e IL, que se corresponde con la pregunta 4 del guión de la entrevista, en casi todos los casos se apoyan fuertemente en los espacios R^2 y R^3, y las representaciones geométricas, para más tarde alcanzar por abstracción, la idea de vector algebraico, haciendo hincapié que esta noción amplía y se ‘escapa’ de la noción geométrica de ‘vector flecha’. Un sólo docente, además de trabajar en los espacios euclídeos, alude al tratamiento de DL en el estudio de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales; otro, recurre a problemas de física; otro, recuerda la definición de DL e IL, y luego presenta aplicaciones de la guía. A modo de ejemplo, transcribimos dos de las respuestas, que corresponden a dos profesores responsables de cátedra y que tiene a su cargo las clases teóricas:

> “Comienzo casi siempre con ejemplos, los que se analizan desde distintas representaciones. Luego intento construir una definición, con análisis de las imprecisiones de los pasos que vamos siguiendo. Luego se dan otros ejemplos, en distintas representaciones y se los analiza desde la definición. Se plantean problemas de índole teórica, para derivar el enunciado de propiedades. Se completa con una exposición teórica ordenada, y se complementa con más ejercicios en clase práctica. Están a su disposición las guías de trabajos prácticos que utilizamos.”

> "Primero intento que logren apropiarse cabalmente de la idea de CL a través de metáforas que involucran preparados culinarios o de colores primarios y luego, químicos, insistiendo que a los ingredientes, los vamos a llamar vectores, y que el 'preparado', también será un vector (por tratarse de suma de múltiplos de vectores). Dedicamos un rato a observar que también podemos expresar cada uno de los ingredientes-vectores, en función de los demás. Luego aislamos en un miembro al vector nulo a cuya expresión llamo CLN, lo que permite comenzar a desprenderse de la metáfora y pensar que las cantidades (tazas-coeficientes) pueden asumir cualquier valor. En este momento introduzco la idea de que el conjunto de los vectores primarios (ingredientes), junto al 'preparado', forman un conjunto LD, justamente porque entre ellos existe un 'preparado', haciendo notar que se obtiene el vector nulo sin que los coeficientes sean todos ceros (porque ese preparado no tiene gracia). Más tarde, reproducimos los mismos pasos con vectores en el plano. Luego, comenzamos a formalizar la definición de DL e IL, etc."

Las respuestas a la pregunta cinco, a propósito del *porcentaje* de estudiantes que los docentes creen que alcanzan la comprensión de aquellos conceptos, son muy variadas, y recorren un rango del 10% a 50%, en las asignaturas de servicio. En este sentido, un docente agrega que, entre un 80% y 90% logra captar la totalidad de su riqueza, luego de cursar materias específicas de Física. Por otro lado, se percibe una diferencia muy importante en la asignatura que se imparte para el profesorado y la licenciatura, donde el porcentaje alcanza el 80%.

Respecto a la *dedicación horaria*, tanto para el tema 'espacios vectoriales' como para los conceptos que nos ocupan, y que se consulta en la pregunta seis del guión, los docentes también reportan en forma diversa, entre 4 y 20 para el primero, y entre 2 y 10, para los segundos, aunque la mayoría coincide que estos últimos, son conceptos que se construyen a lo largo de todo el tópico de EV. En relación con la apreciación si consideran suficiente o no, aquella dedicación, también muestran opiniones divididas, con predominancia de las negativas. Ahora transcribimos algunas de las justificaciones:

> "Son suficientes para desarrollar los ejercicios previstos, pero no asegura la comprensión del tema."
> "No, pero no tengo alternativa. Porque me gustaría que se dieran mas horas de Álgebra ya que los temas son muchos y todos muy importantes y el nivel de ingreso es malo."
> "No son suficientes porque no se puede madurar en una unidad lo que debería ser una materia."
> "Son suficientes, porque para el alumno, es suficiente conocerlo como herramienta de su futura profesión y no desea ni necesita teorizar."

Como dato curioso podemos señalar que uno de los profesores que reporta que el promedio del porcentaje de alumnos que evidencia comprensión del tema es el 30%, es uno de los que juzga que la dedicación horaria es suficiente, de lo que se desprende que no adjudica el fracaso al tiempo en que se desarrolla el tema.

En relación con las *dificultades* que encuentran sus alumnos en la construcción de las nociones de DL e IL, y sobre las que se indaga en la pregunta siete del guión, algunos docentes reportan concretamente que las confunden; otros las adjudican a la pobreza de los conocimientos previos; otros, a la falta de dedicación, y otros, a la formalización, la abstracción y el lenguaje simbólico que requieren. Algunas de sus expresiones son:

"Al principio cometen errores groseros como decir que son LI porque la transformación trivial les da nula. Por ejemplo, ejercicios como determinar si cuatro ternas son LI o LD, los resuelven con el procedimiento rutinario y no son capaces de contestar directamente. Lo mismo si se nota que dos vectores son múltiplos uno del otro o si está el vector nulo les cuesta darse cuenta que son LD. No se dan cuenta que los vectores que forman una base del espacio V tienen que pertenecer a V. (...). Si en las fila de una matriz uno realiza operaciones elementales, les cuesta ver que esas filas que quedaron, si se las piensa como vectores, generan el mismo espacio que al principio (¿que es mejor dar primero sistema de ecuaciones y después espacios vectoriales o al revés?). (...)."

"La falta de conocimientos previos, no sólo en este tema. Pretendemos que lo que la humanidad tardó 2000 años en construir, nuestros alumnos lo construyan en 6 horas reloj. Creo que es imposible. Son conceptos profundos, que requieren más tiempo para madurarlos (...)."

"No advierto dificultades en la construcción de las nociones, los casos que se revelan como no suficiente ó incorrectamente aprendidos, están asociados a falta de dedicación al tema (...)."

"El principal inconveniente es la formalización, el uso del lenguaje simbólico y su interpretación."

"Creo que una de las mayores dificultades con que se encuentran los alumnos principiantes, es el manejo del lenguaje técnico y/o simbólico. También creo que tienen obstáculos, en la comprensión misma de las operaciones de suma y producto, y en muchos casos, me parece que la ruptura aritmética-álgebra no ha sido debidamente completada."

"Algunos de los alumnos terminan el cuatrimestre con la certeza de que han aprendido operatoria pero la parte conceptual no la manejan, por ello la forma de resolver los problemas planteados es mecánica y memorística, lo que sin duda los conduce a fracasar en los exámenes."

"La dialéctica entre lo general y lo particular deriva en un proceso que requiere varios niveles de abstracción, para los cuales, entiendo, los alumnos no están preparados. Además, sólo logran un conocimiento frágil de la equivalencia: «un conjunto de vectores es LD sí, y sólo si, al menos uno de ellos es CL de los restantes», y tampoco consiguen ligar la idea de la DL a otras nociones."

Finalmente, la pregunta ocho, que indaga acerca de *qué pueden afirmar los docentes*, a partir de conocer que un conjunto de *n* vectores es LD, se percibe en algunas respuestas la misma dificultad que presentan los estudiantes, esto es, el encerramiento, sin supuesto previo, en el EV de las n-úplas, y más aún, en la DL ligada a la proporcionalidad de las componentes, sin aclarar que se trata de dos vectores. Además, en algún caso, se nota que responden a la pregunta "¿qué podría suceder?" y no a "¿qué pueden afirmar?". Como es conocido, esta última pregunta involucra una implicación lógica, que tiene carácter de forzosa. A su vez, dos docentes contestan "Lo que se encuentra en cualquier texto corriente de Álgebra Lineal." Transcribimos, a continuación, algunas de las expresiones:

"(...) Dos o más de los vectores tienen la misma dirección (o direcciones paralelas) o recta de acción. Dos o más vectores son proporcionales o coincidentes."

"No puede ser base. En los espacios numéricos, la DL está ligada a la proporcionalidad de las componentes."

"Por ejemplo que un vector es combinación lineal de los demás; puede suceder que el vector nulo pertenezca a ese conjunto, en R^2 podemos hablar de vectores paralelos, vectores colíndales, vectores paralelos a un plano en R^3."

"Que al menos uno de ellos es combinación lineal de los demás. La dimensión del espacio vectorial que generan es menor que n. Existen infinitas combinaciones lineales nulas de dichos vectores. Se puede encontrar dentro de ese mismo conjunto un conjunto de vectores LI que genere el mismo espacio que generan estos vectores."

Convengamos que, aún situándose en el espacio vectorial (R^n, +, R, .), podemos proponer más de una docena de afirmaciones a partir de la situación planteada, de acuerdo al campo conceptual que hemos construido en el apartado IV.2.4, pp. 83-88.

V.1.4 Entrevista a alumnos de la Facultad de Ciencias Exactas

Esta cuarta y última etapa de recolección de datos tiene como eje la pregunta que hemos indicado con el número 12 en la sección *I.2*, p. 6, de la introducción de este trabajo, esto es *¿Construyen los alumnos la red interna que subyace a las definiciones de la DL e IL?*, la que intentamos responder a través del dispositivo que pasamos a describir, y que agregamos como Apéndice VIII.4, p. 164.

V.1.4.1 Descripción. Perfil de los entrevistados

Si bien la técnica dominante para recoger datos es la entrevista individual, en esta oportunidad se implementó una *entrevista clínica semiestructurada de debate grupal*, que como se sabe, se trata de una charla que tiene lugar en el seno de un pequeño grupo de individuos que expresan su pensamiento en voz alta, como respuesta a un cuerpo de preguntas organizadas por el entrevistador, y que varía según las respuestas de los entrevistados.

La utilización de esta variante de las técnicas de encuestas permite un proceso de comunicación específico, coloquial y recíproco en un marco relativamente abierto, que resulta menos indiscreto y comprometido para los entrevistados, y donde éstos pueden formular preguntas, tanto al entrevistador, como a los otros participantes, estimulando la interacción social entre los sujetos intervinientes. Como consecuencia de ello, no se descarta que parte de la información que se recava se derive de esta interacción y no precisamente de los conocimientos y concepciones que los estudiantes traen al encuentro.

En general, la información obtenida en las entrevistas semiestructuradas posibilita confirmar lo que ya es conocido, pero también ofrece la oportunidad de conocer, no solamente las respuestas, sino también las razones de las respuestas. Por supuesto que este tipo de técnica no está a salvo del dilema de la contaminación del entrevistador, tanto durante la entrevista propiamente dicha, como en la interpretación de lo que en ella sucede.

Se reclutaron siete alumnos, tres mujeres y cuatro varones, que ingresaron, en el año 2004, al primer año de la carrera Bioquímica que se cursa en la FaCENA y que de acuerdo al Currículo vigente, cursaron la asignatura C3 en el primer cuatrimestre. Los alumnos citados se presentaron voluntariamente, no sin insistencia de nuestra parte, a la convocatoria verbal llevada a cabo durante el examen final de la materia, que tuvo lugar en febrero de 2005, cuyos resultados fueron entregados pasados dos días, oportunidad en que se realizó la entrevista en instalaciones de la misma facultad. Estos estudiantes, que tienen edades entre 18 y 21 años, fueron comunicados respecto a cuáles eran las intenciones, alcances y finalidad de la entrevista, logrando su consentimiento para su registro en video.

Tanto los registros en papel, como los de video y audio, se encuentran en nuestro poder.

V.1.4.2 Comentarios sobre el guión de la entrevista

De la experiencia que describimos en el apartado V.1.1, surge claramente que los estudiantes se aferran a las definiciones como único recurso para decidir si un vector de R^2 es combinación lineal de otros dos, o si un conjunto de dos vectores del mismo espacio, es LI. Por otro lado, de los datos recogidos en la entrevista a docentes de la UNNE, sobre la que se reporta en el apartado V.1.3, pp. 112-117, se asoman, entre otras dificultades que ellos perciben en los estudiantes en el proceso de construcción de estos conceptos, la ausencia de conexión con otras nociones, la formalización, la confusión de las ideas de DL e IL y la fragilidad en la comprensión de la equivalencia entre las dos definiciones de la DL.

Estos resultados nos condujeron a meditar sobre la necesidad de explorar más profundamente qué nivel de comprensión poseen los estudiantes en relación con el significado de las definiciones centrales, cómo las movilizan y cómo las vinculan, es decir, cuál es la dialéctica que logran construir entre las definiciones que hemos consignado y analizado en el apartado IV.2.3, pp. 76-83, de este trabajo. Asimismo, se pretende examinar cómo ligan estas ideas, a otras que componen su campo conceptual, como por ejemplo, el rango, la base y la dimensión. Esta introducción pretende clarificar al lector acerca de qué entendemos por '*red interna que subyace a las definiciones de DL e IL*' y que aparece como idea central de la pregunta 12, de la sección *I.2*, p. 6, que estamos intentando responder.

Con este objetivo, dividimos nuestra agenda para la entrevista en dos partes, en las que se prefijan preguntas al sólo efecto de contar con una guía temática de discusión que opere como disparador de otras cuestiones que pudieran perfilarse durante el desarrollo del debate. Estas preguntas, que fueron validadas por un grupo de expertos, son entregadas por escrito a cada uno de los entrevistados al inicio del encuentro.
A continuación transcribimos cada una de esas partes, ofrecemos una posible resolución de las mismas y encaramos un análisis a priori de la interpretación que puede dársele a posibles respuestas incorrectas de los estudiantes.

Parte 1

Escriba 4 conjuntos de 3 vectores de R^3 en los cuales exactamente ninguno, 1, 2 y 3 vectores, respectivamente, sean CL de los demás.

Esta primera tarea que involucra al EV específico R^3, pretende explorar cuáles son las concepciones que los alumnos ponen en juego, al construir los conjuntos que se solicitan. Esta actividad, que difiere fuertemente de la situación de tener que reconocer combinaciones lineales o dependencia o independencia lineal a partir de la aplicación de las definiciones, implica provocarlas, y tener bajo control cada una de las consecuencias de tal manipulación, sin perder de vista aquellas definiciones. Como puede apreciarse, tiene como objetivo primigenio, explorar el esquema conceptual que construyen alrededor del concepto de CL, vinculado a la dependencia y a la dimensión. A modo de variable didáctica, la restricción de la cantidad de vectores que pueden ser CL de los demás en cada uno de los conjuntos, obliga a cambiar de estrategia en cada ítem.

Asimismo, intentamos indagar durante la entrevista, qué entienden los estudiantes por la expresión '*los demás*', o '*los restantes*', o '*los otros*', interrogante que quedó planteado en el subapartado IV.2.3.1, pp. 78-80, del presente trabajo.

Por comodidad, separamos la consigna en cuatro ítems:

a) Escriba un conjunto de 3 vectores de R^3 donde ninguno de los vectores sea combinación lineal de los demás. → Basta tomar un conjunto de tres vectores de R^3 que sea LI, lo que se logra fácilmente tomando, por ejemplo, la base canónica de ese espacio.

La respuesta a esta tarea vincula las definiciones (7) y (9), de la p. 77, y los conceptos de dimensión y base. Dada la posibilidad de recurrir a la base canónica[58], se espera que este ítem sea respondido sin mayores dificultades por aquellos estudiantes que conocen, no sólo su existencia, sino también sus propiedades tan particulares. Por lo tanto, la imposibilidad de contestar al mismo, está asociada a la carencia de esta idea, y de cualquier otra que se considere eficaz en este caso, como por ejemplo, la incapacidad de recurrir a tres vectores que, dispuestos en tres filas, formen una matriz triangular superior.

[58] Dejamos en claro que nos referimos a la base canónica solamente por cuestiones de 'popularidad', por cuanto la tarea puede responderse correctamente exhibiendo cualquier otra base.

b) Escriba un conjunto de 3 vectores de R^3 donde uno, y sólo uno de los vectores sea combinación lineal de los demás.

La única forma de lograr lo que se pide, es a través de un conjunto que contenga el vector nulo y que además, entre los otros dos, no exista proporcionalidad, lo que se consigue tomando, por ejemplo, dos vectores de la base canónica de R^3.

En la validación llevada a cabo en el seno del grupo de expertos, si bien no se cuestionó ninguno de los enunciados, hubo coincidencia en que este ítem podía constituir un conflicto cognitivo en los alumnos y en varias direcciones. Por un lado, la necesidad de incluir el vector nulo en el conjunto, para evitar las CL mutuas que se presentarían entre los tres. Por otro, que este hecho obliga a revisar la propia definición de CL, con relación a si tal combinación, es o no, una CL admitida. La duda surge porque esa combinación, es justamente la trivial, hecho que, en el pensamiento de los estudiantes, queda asociado a la IL, que no es el caso del conjunto que estamos construyendo. Entonces, la inclusión de este ítem obedece a la intención de esclarecer si existe o no, en los estudiantes entrevistados, aquel conflicto entre la CLNT que permite expresar al vector nulo como el único vector que es CL de los demás vectores del conjunto (p. ej.: $(0,0,0) = 0.(1,0,0) + 0.(0,1,0)$), y la CLNT de todos los vectores del conjunto (p. ej.: $(0,0,0) = 0.(0,0,0) + 0.(1,0,0) + 0.(0,1,0)$), que no es única por cierto, ligada a la definición (7) de la IL que hemos consignado en el apartado IV.2.3, p. 77. Si el alumno se ve inmerso en esa confusión, significará que no tiene claridad en los conceptos que aquí intervienen.

c) Escriba un conjunto de 3 vectores de R^3 donde dos, y sólo dos de los vectores sea combinación lineal de los demás.

Una forma de lograr lo que se pide, es plantear un conjunto que contenga dos vectores de la base canónica y un tercer vector que sea múltiplo de uno de aquellos.

A través de este ítem se intenta explorar con qué recursos cuentan los estudiantes para la construcción del vector que no debe ser CL de los otros dos, sino, tan sólo, de uno de ellos, bajo el supuesto de que la escritura de los dos primeros no les acarrea conflicto alguno. En esta ocasión, casualmente, provocar la proporcionalidad de las componentes de uno de ellos, es la técnica correcta, y no lo es, por ejemplo, recurrir a la suma de ambos vectores. Entendemos que reconocer esta situación tan particular, significa tener bajo control las nociones de CL y DL.

d) Escriba un conjunto de 3 vectores de R^3 donde los tres vectores sean combinación lineal de los demás.

Una forma sencilla de lograr lo que se pide, es plantear un conjunto que contenga tres vectores de modo que uno de ellos sea la suma de los otros dos; o bien, un vector, y dos de sus múltiplos.

Queda claro que en esta tarea la idea central es la DL, pero no una DL cualquiera. Por ejemplo, resultaría incorrecto provocar la aparición de una DL que configure las situaciones de los ítems *b* o *c*. La inclusión de este ítem obedece, no sólo a la intención de analizar las estrategias que despliegan los alumnos en la construcción de tal conjunto, sino que se espera, a través de preguntas suplementarias, explorar cuál es su modo de acercarse a las ideas de dimensión y rango, con el pretexto de la dependencia, dado que, según los vectores elegidos, se puede obtener un subespacio de dimensión dos o bien uno.

Parte 2

Investigue si son verdaderas o falsas las siguientes implicaciones:

Esta segunda parte se desenvuelve en un EV abstracto y a través de consignas dadas en lenguaje natural, de manera de excluir las dificultades ligadas a la simbología y concentrar nuestro análisis en los significados que los alumnos otorgan a cada una de las implicaciones que se presentan, íntimamente relacionadas con las definiciones, propiedades, y conceptos, pero desvinculadas ahora de la forma que presentan estos objetos matemáticos, salvo por el hecho de que se trata de vectores algebraicos, reunidos en conjuntos o espacios vectoriales.

Los principales objetivos de esta exploración obedecen, no sólo a evaluar el rendimiento de los estudiantes entrevistados, sino además, al intento de encontrar categorías que permitan agruparlos de acuerdo a sus concepciones y creencias, ya sean pertinentes o no, lo que nos proporcionará de alguna manera una idea de cómo se distribuyen sus modos de pensamiento.

A continuación se transcriben y analizan las catorce implicaciones propuestas:

a) Si en un conjunto de vectores, uno de ellos no es CL de otros, entonces el conjunto es LI → F

Los estudiantes que no logran contestar correctamente este ítem conciben a la IL como una característica que se detecta con sólo revisar ‘uno’ de los vectores del conjunto, evidenciando dificultad en la comprensión del significado de la definición (9), que expresa ‘ninguno’. Si asumen lícitamente a la definición de la IL como la negación de la definición (4) de la DL, el nodo de conflicto proviene del rol y significado que adjudican a la expresión ‘al menos uno’, y su correspondiente negación ‘ninguno’, que en la lógica del lenguaje matemático significa ‘no existe’, obviamente vinculado a la problemática de la cuantificación de proposiciones.

b) Si existe una CLN de todos los vectores de un conjunto, entonces ese conjunto es LD.	F

La aparición de respuestas incorrectas a este ítem está vinculada al desconocimiento de que el antecedente de esta implicación es siempre verdadero, lo que a su vez implica carencia de comprensión respecto a que el sistema homogéneo que surge de plantear una CLN genérica de los vectores, siempre admite, al menos una solución. Obviamente, tampoco resultaría verdadera la implicación cuyo consecuente fuera *‘ese conjunto es LI’*. Una concepción errónea encontraría terreno fértil en estudiantes que asocian la expresión ‘*si existe una CLN*’, a la existencia de CLNNT, concluyendo que la implicación es verdadera por cuanto el conjunto es LD. Sin embargo, otra concepción errónea podría llevar al alumno a una respuesta acertada. Nos referimos a aquellos que interpretan la expresión ‘*si existe una CLN*’, que en la lógica del lenguaje matemático significa ‘*existe por lo menos una*’, como ‘*existe una única CLN*’, que asocian a la trivial, concluyendo que la implicación es falsa por cuanto el conjunto es LI. Nuevamente, adjudicamos esta última situación a la problemática de la cuantificación de las proposiciones.

c) Si existe la CLNT de todos los vectores de un conjunto, entonces ese conjunto es LI.	F

Compartiendo parte del análisis anterior en tanto y en cuanto el antecedente vuelve a ser verdadero, situación que obliga a la inspección cuidadosa de la veracidad del consecuente, la presencia de la palabra ‘trivial’ resultaría automáticamente ligada a la independencia, en las respuestas desacertadas. Los estudiantes no incluirían la solución trivial, entre las infinitas soluciones de un sistema homogéneo indeterminado. En este caso entendemos que no se presentarían aciertos, a través de razonamientos erróneos.

d) Si existe una CLNNT de todos los vectores de un conjunto, entonces ese conjunto es LI.	F

Un análisis a priori nos indica que esta proposición tiene un alto grado de aceptación intuitiva entre los estudiantes pues se trata de una implicación cuyo consecuente es la negación de una de las implicaciones de la equivalencia que plantea la definición (1), dada en el apartado IV.2.3, p. 76. Además, refleja exactamente la operatoria que los alumnos ponen en práctica para decidir si un conjunto es LD ó LI, y que el docente le ha transmitido, esto es, 'si existen CLNNT', entonces es LD, de lo contrario, es LI.

e) Si un conjunto de vectores es LD, entonces uno de sus vectores es múltiplo de otro.	F

Respuestas incorrectas a este ítem se relacionan con el encerramiento del significado de la DL a la aparición de vectores múltiplos entre sí, contrariamente al sentido global que posee. Esta tarea está íntimamente vinculada a la siguiente.

f) Si un conjunto de vectores es LI, entonces ninguno de sus vectores es múltiplo de otro.	V

De la misma manera que en *d*, se espera en este ítem un alto grado de acierto que, paradójicamente, en este caso puede provenir no sólo de la correcta apropiación de estas nociones, sino de la concepción errónea con respecto a que la DL está ligada unívocamente a la existencia de vectores múltiplos de otros, así como la IL está vinculada a su no existencia. Esta última interpretación, en la cual un error reforzaría un acierto proviene a su vez de concebir una implicación lógica como una equivalencia. Resumiendo, un acierto en este ítem, sólo es plausible, en tanto y en cuanto, se presente un acierto, también en el anterior. Un fallo en *e*, acompañado de un acierto en *f*, debería ser interpretado desde el encerramiento al que aludimos en el análisis de *e*. Cualquier otra combinación de respuestas, revela inconsistencia en el conocimiento.

g) Si un conjunto de vectores es LI, entonces todo subconjunto del mismo, es LI.	V

Una respuesta incorrecta a este ítem, emparentado con el siguiente pues comparten su estructura sintáctica, aunque no su valor de verdad, está ligado a la incapacidad de efectuar el siguiente razonamiento: "si fuera posible que un conjunto LI contuviera un subconjunto LD, existiría en ese subconjunto, al menos un vector que es CL de los demás, por lo cual, es imposible que sea LI". De allí se deduce que no se ha logrado la dialéctica entre los significados de las definiciones (4) y (9), del apartado IV.2.3, pp. 77-78, que hacen al sentido mismo de la IL.

h) Si un conjunto de vectores es LD, entonces todo subconjunto del mismo, es LD.	F

La imposibilidad de aceptar que un conjunto LD pueda contener un subconjunto LI, estaría vinculada a la idea de que si es LD, entonces 'todos' los vectores son CL de los restantes, y no es posible encontrar 'algunos' que no lo sean, y que, en la mayoría de los casos pueda aislarse, por ejemplo, un singulete, cuyo único vector no sea el nulo, obteniendo así un subconjunto LI. Este conflicto surgiría de la no comprensión de la equivalencia entre las definiciones (1) y (4) del apartado citado. Además, esta concepción resultaría contradictoria, con la que guía a los alumnos a responder incorrectamente el ítem *a*, de lo cual se deduce que estos alumnos deberían adjudicar distintos valores de verdad a ambas respuestas.

i) Si a un conjunto de vectores LI se le agrega otro vector, entonces el nuevo conjunto es LI.	F
j) Si de un conjunto de vectores LI se quita un vector, entonces el nuevo conjunto es LI.	V
k) Si de un conjunto de vectores LD se quita el único vector que es CL de los restantes, el nuevo conjunto es LI.	V
l) Si a un conjunto de vectores LD se le agrega un vector que no es CL de aquellos, el nuevo conjunto es LI.	F

Los cuatro ítems anteriores intentan explorar cuán flexibles son los conocimientos de los alumnos en relación con el significado de la DL e IL, esto es, si tienen bajo control y conservan la traza de sus manipulaciones, al agregar y quitar vectores de un conjunto dado, con ciertas características. La idea es descubrir si en los estudiantes está disponible el conocimiento acerca de que la IL puede 'perderse' al agregar vectores, pero no al quitarlos; y puede 'ganarse' al quitar vectores, pero no al agregarlos. Por otro lado, cabe aquí establecer algunos contrastes entre las respuestas, por ejemplo, en virtud de la equivalencia de las implicaciones g y j, los alumnos deberían adjudicarles el mismo valor de verdad a ambas.

m) Si un subconjunto de V cuya dimensión es 3, tiene 4 vectores, entonces ese conjunto es LD.	V
n) Si un subconjunto de V cuya dimensión es 3, tiene 3 vectores, entonces ese conjunto es LI.	F

Estos dos últimos ítems apuntan, por un lado, al conocimiento de la maximalidad del número de vectores LI de un EV de dimensión conocida; por otro, a la observación de la posible reducción de la IL, por parte de los alumnos, a la constatación de la igualdad del número de vectores del conjunto y la dimensión del espacio. Esta última concepción errónea está vinculada a la falta de conocimiento del número mínimo de vectores como condición necesaria, aunque no suficiente, para generar un espacio de dimensión conocida. Cabe recordar que las ideas de 'generador mínimo e independiente máximo' fueron las más tardías en la génesis de los conceptos que integran el Álgebra Lineal.

V.1.4.3 Análisis de los datos recogidos en las entrevistas

En primer lugar debemos dejar en claro que, si bien la entrevista comenzó con la participación de los siete estudiantes, una de las señoritas solicitó permiso para retirarse luego de haber transcurridos los primeros quince minutos. Dado que en ese lapso no tuvo participación alguna en la charla, sólo quedó registro de su presencia en el video, no así en el debate que transcribimos en la sección *VIII.5*, p. 165, donde, para facilitar las referencias al mismo, hemos enumerado cada una de las intervenciones y nombrados A, B, C, D, E y F, a los seis alumnos restantes.

Solamente la primera parte de la entrevista cubrió el espacio de más de una hora de interacción, lo que impidió que sea tratada la segunda con la misma modalidad. Ante esta situación, que fue prevista como factible, se optó por cambiar de técnica recurriendo a la modalidad de cuestionario cerrado, de cuyas respuestas conservamos registros escritos.

A continuación, analizamos los datos recavados en cada una de esas partes.

Análisis de la Primera Parte

Como decíamos, la primera tarea generó una amplia discusión, que en gran parte ofició de puesta en común de algunos conceptos que servirían de base para facilitar las respuestas (2-91).

Los alumnos quedaron en libertad de contestar en el papel, en el orden en que prefirieran, los ítems de la primera parte. Si bien comenzaron a escribir en la hoja provista algunas producciones que luego transcribimos y analizamos, inmediatamente se inició una charla que concentró su atención.

A continuación, y con el objetivo de llevar a cabo un análisis cualitativo de las concepciones y conductas de los entrevistados, hacemos una síntesis de la evolución del contenido del debate que generó la resolución de esta primera parte.

- 1 Se procede a presentar la tarea.
- 2-25 Se discute y aclara qué se entiende por vectores concurrentes, término introducido por la señorita E.
- 26-28 Se discute y aclara qué se entiende por vectores colineales, término introducido por el entrevistador, para distinguirlos de los concurrentes.
- 28-35 Se debate respecto a la dependencia vinculada a la colinealidad y a la concurrencia.
- 36-91 Se intenta que los alumnos digan que el conjunto {u,v,w} es LD, donde asoma con frecuencia la idea de que la DL está ligada únicamente al paralelismo.
- 92-94 Se sitúa a los alumnos nuevamente en la tarea.
- 95-271 Se discute, teniendo como partida, la producción del alumno C que escribe en su hoja, tres vectores de una recta en el espacio, tomando tres vectores de componentes proporcionales del plano xy, como respuesta al ítem *d*.
  - 95-118 El alumno C argumenta a favor del enunciado “el caso de la IL se reduce a que el cardinal del conjunto de vectores sea igual a la dimensión del espacio”
  - 119-129 Se discute con el fin de determinar a qué ítem responde su propuesta.
  - 130-194 Se debate sobre cómo escribir cada vector como CL de los demás.
    - 132-146 Se discute sobre la necesidad o no de tomar, además de vectores en el plano xy, vectores de componentes proporcionales. El alumno C, duda de su teoría.
  - 147-202 En el intento de escribir uno de los vectores como CL de los demás, se discute sobre si es correcto decir que es CL de los restantes, aún cuando en la escritura, uno de los vectores no aparezca, lo que no encuentra aceptación entre los estudiantes.
    - 175-194 Se conversa sobre la propuesta de E, respecto a usar las razones entre las componentes para detectar un escalar. La señorita E entra en conflicto con los ceros de las terceras componentes y propone eliminarlos.
  - 203 Se decide la DL del conjunto propuesto por C.
  - 204-250 Se indaga respecto a cómo resultaría si en lugar de tomar vectores múltiplos entre sí, se hubieran tomado otros cualesquiera, siempre en el plano xy. El conjunto es propuesto por el entrevistador.
    - 204-209 El alumno C argumenta más confiado su adhesión basándose en la regla del paralelogramo.
    - 210-213 Se intenta vincular estas ideas con las nociones de base y dimensión, las que parecen estar claras en los estudiantes.
    - 214-239 Se discute sobre cómo puede convencerse a otra persona sobre la DL del conjunto propuesto por el entrevistador. La señorita E introduce la idea de utilizar la eliminación gaussiana y el determinante que luego relaciona con el rango. Surge la imposibilidad de E de reconocer la nulidad del determinante, por la sola existencia de una columna nula.
    - 240-250 En el seno de la observación de que el rango es menor que n, E afirma que esa comparación sólo sirve para clasificar los sistemas en determinados o indeterminados. Se discute si tiene sentido este recurso para el análisis de la DL.
  - 250-267 Se vuelve a analizar el conjunto propuesto por C con la intención de que los estudiantes, que se están manejando en el contexto aritmético, logren identificar que la dimensión del conjunto es uno, debido a que son vectores de una recta, y que la DL va de suyo, sin necesidad de recurrir al rango ni al determinante.
  - 267-272 Se concluye que hasta el momento, sólo se ha dado respuesta al ítem *d*.
- 272-276 Se comienza a pensar en cómo responder el ítem *c*. Se discute la propuesta de D, respecto a formar un conjunto con dos múltiplos y el tercero, con componentes de números coprimos.
- 277-375 Se deja en suspenso el ítem *c* para comenzar a discutir el *b*, por cuanto el alumno C, se muestra muy interesado y dudoso en su respuesta a este ítem.

277-303 Se debate sobre la duda planteada por C respecto a que, si uno es CL de otro, éste, lo será del primero, que no es comprendida por algunos de los otros estudiantes. A propone usar vectores unitarios.

304-307 El alumno C propone incluir al vector nulo.

308-318 Se discute la imposibilidad de la propuesta de A, en relación a incluir tres vectores iguales.

319-367 Se discute la propuesta de C que consiste en incluir dos vectores canónicos y el vector nulo.

342-357 Se analiza la confusión de F respecto a que si se ponen ceros para escribir al vector nulo, se tiene la CLNT y por lo tanto el conjunto sería LI.

358-367 Se trabaja en el intento de escribir los otros dos vectores como CL de los demás.

376-419 Se retoma y discute el ítem *c*.

376-386 Se enuncia a modo de conclusión la idea de que, en estos casos, la DL de dos vectores está vinculada a la proporcionalidad de las componentes.

387-418 Se discute sobre cómo verificar que el tercer vector no es CL de los demás, y si puede hacerse intervenir a los tres vectores. El alumno D, defiende su postura de incluir números coprimos.

404-415 Se trabaja la imposibilidad de escribir uno de los vectores como CL de los otros dos. Se concluye que el impedimento radica en que su coeficiente es 0 y que no se puede dividir por 0.

419-425 Se discute el número de vectores LI en función del número de vectores que se pueden escribir como CL de los demás.

425-435 Se debate sobre la construcción del conjunto para el ítem *a*.

429-435 Se intenta sin éxito, que los alumnos reconozcan como posible, además de proponer la base canónica, recurrir a cualquier matriz escalonada de 3x3 para encontrar un conjunto de tres vectores LI en R^3.

436 Se invita a los alumnos a resolver la segunda parte de la tarea en la hoja que le fue entregada al inicio.

De la interpelación de las intervenciones de los alumnos se revelan ciertas concepciones erróneas que pasamos a identificar a través de la trascripción del intervalo de la entrevista en que fueron detectadas y, en el caso que corresponda, una reformulación del teorema o definición en acto que se supone, están utilizando. Estas concepciones oficiarían de obstáculos en la construcción de los conceptos que estamos estudiando.

1

Teorema en acto: *El caso de la independencia lineal se reduce a que el cardinal del conjunto de vectores sea igual a la dimensión de un espacio.*

95. **N** [Dirigiéndose a **C** y en relación con lo que escribió] Con esta tercera componente 0 quiere decir que no se mueve en el eje z, se mueve sólo en xy …
96. **C** Es un vector del plano ....
97. **N** Es un vector del plano … Es cierto … pocas veces lo representamos así …. Pero, cambia mucho la cosa para la tarea esta …. Necesitás que aparezca ese 0.
98. **C** Lo que pasa es que yo leí en la teoría que si yo tengo … por ejemplo en R^2, el caso de IL se reduce a que el cardinal del conjunto de vectores sea igual a la dimensión de un espacio, por eso yo entonces … yo justamente le dije que son LI si están en distintas direcciones…

99. **N** Esperá… vamos a rearmar lo que dijiste porque no se si todos lo aceptan … El dijo que la IL en R^2 se reduce a tener dos vectores …
100. **C** Claro
101. **N** De alguna manera eso es lo que dijo **E** hoy …
102. **C** Y en R^3 se reduciría a tener tres vectores ... y en R^4 …
103. **N** ¿Cualesquiera?
104. **C** Si cualesquiera … creería que menos el nulo del plano …
105. **N** A ese lo quitarías …. Es el único que nos estropea la dependencia …
106. **C** Si
107. **N** Así que el nulo es el único que nos estropea la independencia …. perdón …

…………..

116. **C** Justamente por eso es que yo le había dicho que si tengo dos vectores en R^2 serían LI, pero si tengo tres, entonces el cardinal supera a la dimensión, entonces uno de ellos se va a poder escribir como CL de los otros dos.

Debido a esta concepción, el alumno **C**[59] decide proponer un conjunto con tres vectores del plano para provocar una DL argumentando que el cardinal del conjunto supera a la dimensión, lo cual es correcto. Sin embargo, le es imposible comprender que finalmente tiene tres vectores no nulos de R^3, y que según su teoría, deberían ser LI, lo que el entrevistador intenta hacer notar durante las intervenciones 113-117. Esta situación revela, no sólo una concepción errónea, sino además una inconsistencia en sus propias creencias, máxime, si se tiene en consideración que responde correctamente el ítem *n* de la segunda parte, vinculado casualmente a la no forzosa IL de un conjunto de tres vectores, en un espacio de dimensión tres. No se descarta, en esta última elección, la adquisición de saberes durante la entrevista.

2

Teorema en acto: *La comparación del rango con el orden de una matriz sólo es eficaz en la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales, no así, para la determinación de la DL de tres vectores de R^3.*

240. **N** Ahora, él [refiriéndose a **C**] en un momento se paró y dijo algo de que el rango era menor que n. En este momento, n es 3, el rango es menor que 3 en esta matriz de la que estamos hablando. Pero ¿eso es suficiente para hablar de qué? ¿me permite decir algo sobre la DL también?
241. **C** No.
242. **E** No, eso es para determinar si es indeterminado o no …
243. **N** El rango lo asocian sólo con los sistemas, con los sistemas de ecuaciones …
244. **E** Para la clasificación …
245. **N** Es cierto que están muy asociados pero ¿puedo hablar de rango sin sistema, o no? ¿Puedo hablar del rango de una matriz sin que existan los sistemas?

[59] A pesar de esta circunstancia, puede observarse que el alumno **C**, es el que cuenta con el mayor número de respuestas correctas en la Segunda Parte de esta experiencia.

430. **N** A ver , díganme, según ustedes, el rango de una matriz ¿tiene alguna vinculación con la IL en este caso?
431. **D** Si, por la definición … porque es el máximo número de vectores LI …
432. **N** Y ¿cómo lo hallan?
433. **D** Escalonando y contado las filas no nulas.
434. **N** Y esa idea ¿no la podemos usar para construir este conjunto?
435. **Todos** [Silencio largo]

Esta creencia de la alumna **E** se generaliza al resto de los estudiantes. Queda en evidencia la incapacidad de recurrir a tres vectores que formen una matriz triangular, con la finalidad de construir un conjunto LI de tres vectores de R^3, lo que se interpreta como un encerramiento en el contexto de las n-úplas y constituye un obstáculo en la construcción de la red interna del campo conceptual de la DL. Independientemente de la definición de rango, los alumnos no logran visualizar que el procedimiento que realizan para escalonar una matriz, es equivalente a resolver un sistema homogéneo para decidir la DL o IL de un conjunto de vectores del espacio R^n. Entendemos que esta comprensión es un puente privilegiado que les permitiría movilizar los conocimientos a los distintos registros.

3

<u>Teorema en acto</u>: *Toda CLNT de vectores determina un conjunto de vectores LI.*

342. **F** Pero … ese conjunto es LD porque tiene el vector nulo …. y poniendo todos ceros … tenemos la solución trivial …
343. **N** ¿Solución de qué?
344. **F** Esta, es la CLNT…. Y cuando eso pasa … son LI [Algunos asienten con la cabeza].
345. **N** ¿Vos te referís a la CLNT que surge cuando resolvemos un sistema homogéneo?
346. **F** Si, a esa.
347. **N** Y ¿cuál es el sistema que estamos resolviendo aquí? [Silencio de todos]
348. **N** ¿Los ceros surgieron de resolver algún sistema o los pusimos nosotros?
349. **C** Los pusimos nosotros.
350. **N** Y … cuando decidimos que un conjunto es LI ¿los ceros los ponemos nosotros?
351. **C** Saltan como la única solución [Silencio de los demás].

Salvo el caso del participante **C**, que parece notar el error, esta concepción, que también tuvo presencia en la experiencia que se reporta en el apartado V.1.1, pp. 100-108, tiene raíces en la no comprensión de la definición (7) de la IL. La dificultad provendría de la imposibilidad de reconocer que el consecuente de la equivalencia que conforma a tal definición, es una implicación y que los ceros deberían surgir como la única y forzosa CLN por tratarse del consecuente de aquella implicación. Este obstáculo se vincula a la incongruencia semántica entre la expresión simbólica y el lenguaje natural de la definición citada, y que hemos descrito en el subapartado IV.2.3.2, p. 82, del presente trabajo.

4

Definición en acto: *El número de vectores LI de un conjunto, es igual a la resta entre el cardinal del conjunto y el número de vectores que se pueden escribir como CL de los demás*.

419. **N** … Les quiero preguntar, a ver qué opinan … En este conjunto, donde hay dos que son CL de los demás ¿cuántos vectores LI hay?
420. **Todos** Uno
421. **N** Y … ¿dónde teníamos uno sólo que era CL de los demás?
422. **Todos** Dos.
423. **N** ¿Y ninguno?
424. **Todos** Tres
425. **N** Claro, restan ¿no? Y para tres, van a decir, ninguno ¿no? [asienten con la cabeza] Bueno, ya no tenemos tiempo para trabajar esta idea …

Nosotros no habíamos previsto indagar respecto a la posible existencia de esta creencia en los estudiantes, que tiene un cierto vínculo con algunas respuestas incorrectas al ítem *h* de la segunda parte de esta experiencia, sin embargo, la pregunta espontánea del entrevistador, permitió constatar su presencia. De ello se deduce que los alumnos conciben a los vectores de un conjunto como la reunión de los que son LI y de los que se pueden escribir como CL de los restantes, a los que adjudicarían la DL. Mediante esta concepción, nunca estarían en condiciones de admitir, por ejemplo, que un conjunto que contiene un vector no nulo y un múltiplo de éste, contiene dos subconjuntos unitarios LI, lo que va en contra, no sólo del significado de la IL, sino también, del rango.

Además, se observan en general las siguientes dificultades, de las que se indican los momentos de la entrevista donde fueron recogidas:

- Para concebir una terna de vectores geométricos concurrentes. La idea se limita a pares de vectores (9-13).
- Para adjudicar la DL a un conjunto de vectores y no a vectores aislados. Esta situación queda en evidencia en la imposibilidad de escribir "{u,v,w} es LD", en el caso en que se trabajó con dos vectores de R^2 y su suma, expresión que finalmente, fue escrita por el entrevistador, y cuyo intento requirió más de cincuenta intervenciones (36-91).
- Para concebir la idea de que un vector que es combinación lineal de otro, lo es de todo el conjunto. Es rechazada la posibilidad de incluir en la CL, a los demás vectores con escalar cero, lo que obviamente no está reñido con la definición de CL (157-161), (169-178), (192-203).
- Relacionado con la observación anterior, y una vez aceptada la idea de que un vector puede ser escrito con coeficiente cero en una CL, pretender despejar de esa expresión, a aquel vector (404-415).
- Escasa movilidad entre los distintos registros de representación semiótica de la misma idea, que se pone en evidencia cuando los alumnos dudan en decir la dimensión del espacio que generan los vectores de un conjunto, de los cuales se dijo en reiteradas ocasiones, que su representación se ubicaba en una recta (253-267).

- Impedimento para reconocer que, salvo el caso del vector nulo, las CL se presentan al menos, en parejas (285-297).
- Cierto encerramiento en las estrategias utilizadas por cada alumno. El estudiante **A** se siente cómodo interpretando todo desde la noción de base; el alumno **C**, desde la dimensión, el **D**, desde los coprimos, el **B**, desde los sistemas, etc..
- Otras, que se evalúan como circunstanciales y no específicas del tema que se está tratando:
  - Referirse al rango fila y columna como si se trataran de números distintos (227).
- Necesidad de desarrollar por los elementos de una fila, el determinante de una matriz que tiene una columna nula (231).
  - Relacionar el rango de una matriz con el cardinal de un conjunto (248 y 252).
  - Proponer un conjunto con tres vectores iguales (308-318).

A continuación se transcriben las producciones que los estudiantes dejaron escritas en el papel y a las que adjudicamos tan sólo una importancia relativa pues no estamos en condiciones de precisar si responden a sus primeras intuiciones, o bien, al resultado de la interacción que se originó casi inmediatamente. Todas las respuestas son correctas.

	Ninguno CL de los demás	**Uno CL de los demás**	**Dos CL de los demás**	**Tres CL de los demás**
A	$\vec{u}=(4,1,2)$ $\vec{v}=(-2,1,8)$ $\vec{w}=(1,4,1)$ no se reconoce estrategia	No contesta	$\vec{u}=(3,1,0)$ $\vec{v}=(-3,-1,0)$ $\vec{w}=(1,0,1)$ dos múltiplos y un canónico	$\vec{u}=(2,0,0)$ $\vec{v}=(0,2,0)$ $\vec{w}=(2,2,0)$ dos múltiplos de canónicos y su suma
B	$\vec{u}=(1,0,3)$ $\vec{v}=(4,2,5)$ $\vec{w}=(3,5,4)$ no se reconoce estrategia	No contesta	$\vec{u}=(1,2,3)$ $\vec{v}=(2,4,6)$ $\vec{w}=(3,5,1)$ dos múltiplos y un 'coprimo'	$\vec{u}=(2,3,1)$ $\vec{v}=(4,6,2)$ $\vec{w}=(8,12,4)$ tres vectores colineales
C	$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base canónica	$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,0)\}$ dos canónicos y el nulo	$\{(2,2,2),(-4,-4,-4),(1,2,3)\}$ dos múltiplos y un 'coprimo'	$\{(2,5,6),(-4,-10,-12),(1,5/2,3)\}$ tres vectores colineales
D	$\vec{u}=(1,2,3)$ $\vec{v}=(4,5,7)$ $\vec{w}=(9,3,8)$ no se reconoce estrategia	No contesta	$\vec{u}=(1,2,3)$ $\vec{v}=(2,4,6)$ $\vec{w}=(5,7,1)$ dos múltiplos y un 'coprimo'	$\vec{u}=(1,2,3)$ $\vec{v}=(2,4,6)$ $\vec{w}=(4,8,12)$ tres vectores colineales
E	$\vec{u}=(1,2,3)$ $\vec{v}=(2,5,4)$ $\vec{w}=(1,4,3)$ no se reconoce estrategia	No contesta	No contesta	No contesta
F	No contesta	$\{(0,1,0),(0,0,1),(0,0,0)\}$ dos canónicos y el nulo	$\{(1,4,2),(2,8,4),(3,1,5)\}$ dos múltiplos y un 'coprimo'	$\{(1,2,0),(2,4,0),(-1,-2,0)\}$ vectores colineales del plano xy

Pareciera no estar presente la idea de conjunto, o al menos, le restan importancia. Sólo dos alumnos encerraron los vectores entre llaves, mostrando evidencias que son conscientes de que están construyendo un conjunto, tal como indica la consigna. Este hecho no se desvincula a lo acontecido durante la entrevista en relación con la imposibilidad de los estudiantes de escribir "{u,v,w} es LD", y que se mencionó más arriba. Asimismo, vuelve a confirmarse el diagnóstico respecto a que los estudiantes no logran construir el lazo entre la DL en R^n y el proceso de escalonamiento de una matriz, pues salta a la vista que ningún alumno utilizó como estrategia, proponer en el ítem *a* los vectores fila de una matriz triangular diferente de la canónica.

Tal como surgió en el grupo de expertos el ítem *b* fue el que presentó más dificultad a los participantes por cuanto es necesario y suficiente incluir el vector nulo para responderlo correctamente. Incluso, sorprendió al entrevistador que uno de los alumnos (**C** en 304) haya introducido la idea, que luego generó una proficua discusión para el presente trabajo, pero que no fue suficiente para convencer a sus compañeros (sólo dos respondieron este ítem).

Por último, sentimos la obligación de admitir que durante el transcurso de la entrevista, como bien puede apreciar el lector, no hemos sido inmunes a rupturas del contrato didáctico a través de la aparición de los efectos Topaze, Jourdain, etc., que hemos descrito en la sección *II.4*, p. 19, del presente trabajo, y que entendemos, no afectan a nuestras conclusiones.

Análisis de la Segunda Parte

Con el objeto de interpretar los resultados de esta experiencia, que consistió en un cuestionario cerrado[60] y de opción verdadero-falso, llevaremos a cabo un análisis de carácter cualitativo.

En primer lugar, transcribimos en el cuadro que sigue, las respuestas correctas de cada una de las preguntas y las opciones elegidas por cada uno de los seis estudiantes. Las referencias que permiten la lectura del cuadro son:

PR:	Preguntas	**0:**	Respuesta incorrecta
AL:	Alumnos	**1:**	Respuesta correcta
RC:	Respuestas Correctas	$\square$	Respuesta ausente
V:	Verdadero	$\mathbf{T_a}$:	Frecuencia de éxito por alumno
F:	Falso	$\mathbf{T_p}$:	Frecuencia de éxito por pregunta

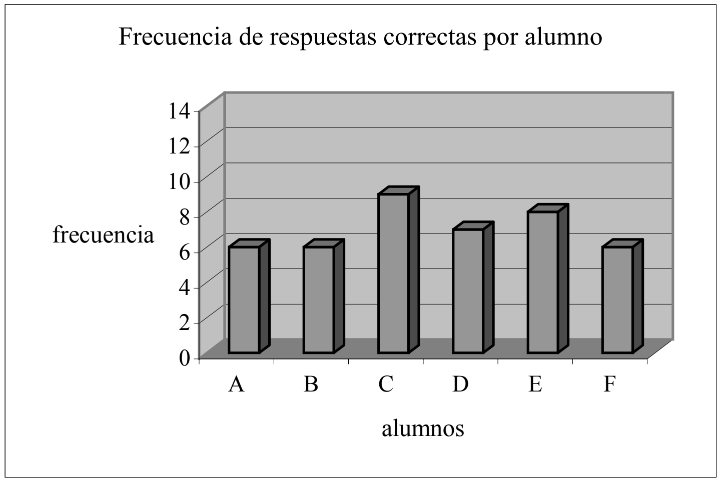
[60] El cambio obligado de estrategia nos privó de evaluar las justificaciones de cada una de las respuestas, sin embargo, entendemos que la información recavada es suficiente para extraer conclusiones relevantes.

PR / RC / AL	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	T_a
	F	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	
A	V	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V	V	V	F	
	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	**6**
B	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	F	V	F	V	
	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	**5**
C	V	V	V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	F	
	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	**9**
D	V	V	V	F	F	V	F	V	F	V	V	F		V	
	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	**7**
E	F			F	F	V	V	V		V	V		V	V	
	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	**8**
F	F	V	V		F	V	F	V	F	F	V	F			
	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	**6**
T_p	**2**	**1**	**0**	**5**	**4**	**6**	**1**	**1**	**5**	**3**	**5**	**3**	**3**	**2**	

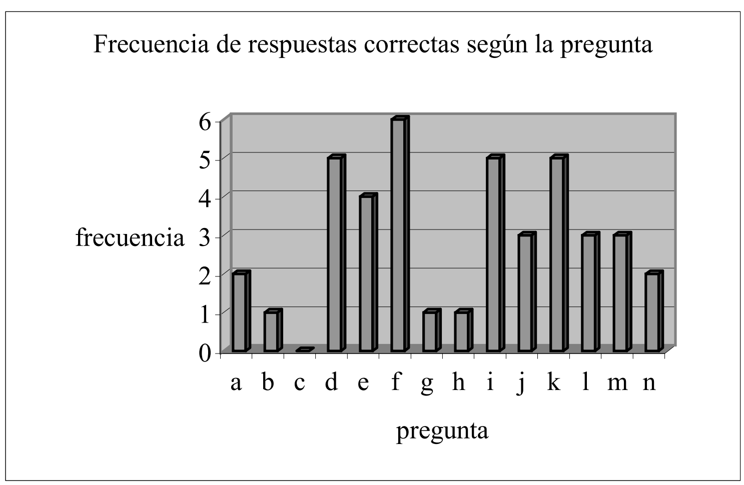
Por comodidad, acomodamos los datos de esta grilla en 6 vectores de dimensión 14.

$$\begin{array}{c c c}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & m & n \end{array} & \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right] & \begin{array}{c} 6 \\ 5 \\ 9 \\ 7 \\ 8 \\ 6 \end{array} \\
 & \begin{array}{cccccccccccccc} 2 & 1 & 0 & 5 & 4 & 6 & 1 & 1 & 5 & 3 & 5 & 3 & 3 & 2 \end{array} &
\end{array}$$

Como parte de nuestro análisis, y de acuerdo a los datos que surgen de esta matriz, observamos que el número promedio de respuestas correctas por alumno es aproximadamente 6,8 lo que equivale a poco menos del 50% del total de preguntas. Si bien este porcentaje supera al de los aciertos alcanzados en la experiencia que se reporta en el apartado V.1.1, pp. 100-108, no deja de ser desalentador. El gráfico que sigue, permite visualizar este escaso rendimiento al que aludimos.



Con el ánimo de no caer en repeticiones tediosas, invitamos al lector a revisar los significados que hemos asignado a las repuestas incorrectas, en oportunidad de realizar el análisis previo de las tareas propuestas en esta segunda parte de la experiencia, en el subapartado V.1.4.2, p. 121-125. Es por ello que a continuación, en lugar de referirnos a cada una de aquellas interpretaciones, centramos nuestra atención en observaciones puntuales o globales que, por una u otra razón que explicitaremos, nos parece pertinente explorar. Una de estas cuestiones es, por ejemplo, conocer qué pregunta tuvo menor frecuencia de acierto, y cuál, la mayor. Con este objetivo, mostramos en el gráfico que sigue los casos de éxito, según la pregunta de que se trate.



Como puede observarse, la pregunta *c* no fue respondida correctamente por ninguno de los entrevistados (frecuencia 0); y la *f*, correctamente por todos (frecuencia 6), tal como lo habíamos anticipado. Es por ello que suponemos que estos alumnos habrían construido una congruencia semántica errónea entre la palabra *trivial* y la *independencia lineal*, así como una congruencia pertinente, entre la *independencia lineal* y la *no existencia de múltiplos*.

No queda otra opción que interpretar que, en el caso de la pregunta *c*, estos estudiantes no incluirían la solución trivial entre las infinitas soluciones de un sistema homogéneo indeterminado, particionando las soluciones posibles en dos conjuntos disjuntos, por un lado, la trivial; por otro, las no triviales. Esta concepción constituye un fuerte obstáculo para comprender la necesidad de distinguir si se trata o no, de la única solución, tal como expresa la definición de la IL.

No obstante a que la elevada frecuencia de respuestas correctas en el ítem *d* (5) resulta apreciable, entendemos que este resultado debe ser contrastado con la frecuencia 0 del ítem *c*. Esta situación refuerza el planteo desarrollado en el párrafo anterior acerca de que los estudiantes asocian, en cualquier contexto, la palabra 'trivial' a la 'independencia', y las palabras 'no trivial', a la 'dependencia'.

También adelantamos que un acierto en *f*, sólo es plausible, si se presenta un acierto en *e* (C, D, E y F), y un fallo en *e*, acompañado de un acierto en *f*, debería ser interpretado desde el encerramiento de la DL únicamente en la existencia de múltiplos (A y B). No se presentan otras combinaciones inconsistentes en estos ítems.

También es interesante destacar que la mitad de los alumnos (A, C y D) responden incorrectamente las tres primeras preguntas (*a*, *b* y *c*) y que, si los consideramos a todos ellos, las respuestas correctas a estos ítems alcanzan tan sólo al 16,6%. Estos resultados abonan la idea de la ausencia de comprensión de las definiciones de la DL e IL. En particular, la dificultad estaría vinculada a la noción de CL, tanto trivial como no trivial.

Asimismo, atento a que un sólo estudiante contestó correctamente el ítem *b* (B), es poco probable que se hayan presentado aciertos a través de razonamientos erróneos, tal como anticipamos su posible ocurrencia, en el análisis *a priori*.

Por otra parte, habíamos supuesto que de existir consistencia en sus concepciones erróneas, los estudiantes no deberían responder incorrectamente y a la vez, las preguntas *a* y *h*. Esta 'coherencia' se verifica en la mitad de los casos.

Es preocupante el hecho de que sólo un alumno esté convencido de que un conjunto LI no puede contener un subconjunto LD; y que sólo un alumno, distinto de aquel, esté persuadido de que un conjunto LD puede contener un subconjunto LI. Nos estamos refiriendo a las respuestas dadas en los ítems *g* y *h*, respectivamente.

Asimismo, por cuestiones de coherencia, las respuestas a los ítems *g* y *j*, debían coincidir en su valor de verdad, situación que se presenta en cuatro casos.

Visto la frecuencia de respuestas correctas (5, 3, 5 y 3) a los ítems *i*, *j*, *k* y *l*, respectivamente, pareciera estar clara, en los estudiantes, la idea de que la IL puede 'perderse' al agregar un vector y puede 'ganarse' al quitarlo (frecuencia 5 en ambos); pero no tan clara la noción de que no puede 'perderse' al quitar un vector, ni 'ganarse' al agregarlo (frecuencia 3 en ambos).

Por último, con relación al rendimiento en las respuestas de los ítems *m* y *n*, la mitad de los alumnos parece desconocer, por una parte, la vinculación entre la dimensión de un EV y el máximo número de vectores independientes; y por otra, que no es suficiente que el cardinal de un conjunto de vectores, coincida con la dimensión, para afirmar que el conjunto es LI.

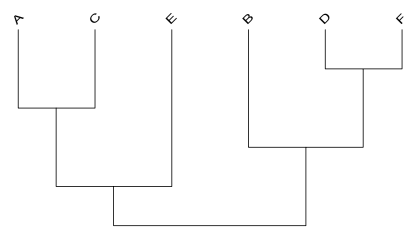
Otro aspecto que nos interesó explorar es la similitud entre las respuestas de los distintos alumnos, ya sean correctas o no, lo que llevamos a cabo a través del software CHIC (Classification Hierarchique Implicative et Cohésitive) *Méthode d'analyse implicative des donnés de Régis Gras: IRESTE Nantes. Versión 3.1 (Demo)*, que proporciona una clasificación jerárquica, implicativa y cohesitiva a partir de los datos introducidos.

En lugar de estudiar la similitud entre las preguntas propuestas, nos hemos centrado en el comportamiento de los estudiantes, con el fin de conocer cómo se distribuyen sus modos de pensamiento. A pesar de que el número de alumnos entrevistados se considera pequeño para este tipo de análisis, el diagrama de semejanza que arroja el software, muestra cómo aquellos son agrupados en base a la similitud de sus elecciones.

Índice de similitud

	A	B	C	D	E	F
A	1.00	0.72	0.86	0.72	0.62	0.61
B	0.72	1.00	0.45	0.83	0.53	0.46
C	0.86	0.45	1.00	0.76	0.47	0.72
D	0.72	0.83	0.76	1.00	0.69	0.88
E	0.62	0.53	0.47	0.69	1.00	0.72
F	0.61	0.46	0.72	0.88	0.62	1.00

Árbol de similitud



Clasificación por niveles

Clasificación a nivel : 1 : (D F) similitud: 0.875893
Clasificación a nivel : 2 : (A C) similitud: 0.862383
Clasificación a nivel : 3 : (B (D F)) similitud: 0.686593
Clasificación a nivel : 4 : ((A C) E) similitud: 0.385877
Clasificación a nivel : 5 : (((A C) E) (B (D F))) similitud: 0.0848414

Estos niveles de similitud nos permiten afirmar, por ejemplo, que los estudiantes D y F comparten el 88% de sus concepciones, de la misma manera que los alumnos A y C, a pesar de la diferencia considerable en sus rendimientos, lo hacen en un 86%, mientras el nivel de similitud conjunta, esto es, de los seis alumnos, es de tan solo el 8%. Estos resultados nos proporcionan evidencias sobre la existencia de ciertos patrones de respuestas, y a la vez, de ciertas divergencias vinculadas a las interpretaciones dadas en la Parte 2 de este subapartado.

Capítulo VI
Conclusiones

Creemos oportuno recordar que en el trabajo que hemos abordado no establecimos más que una sola hipótesis, esta es: "*Existen obstáculos en la construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la UNNE*".

Los distintos capítulos que estructuran esta tesis han conformado una base, suficientemente robusta, que nos permite sostener, tanto la pertinencia de nuestra tarea, como la autenticidad de aquella única afirmación que nos hemos aventurado a formular al comienzo de nuestra labor.

Es por ello que en este capítulo intentamos resumir las razones de atascamiento que hemos encontrado en el proceso de construcción de los conceptos citados, organizados de tal modo que permitan al lector seguir el rastro de las bases en que se fundamentan.

Asimismo, solicitamos nos dispensen algunas reiteraciones forzosas que seguramente haremos, con el fin de destacar los resultados más relevantes.

VI.1 De los antecedentes históricos y de investigación

- Del *análisis histórico-epistemológico*, desarrollado en la sección *III.1*, pp. 30-44, se desprende que la construcción y organización de las ideas que estructuran el Álgebra Lineal no fue ni rápida, ni sencilla, ni lineal. Lo más notable es que, en el transcurrir del tiempo hasta alcanzar la unificación y generalización en el siglo XIX, "el mismo autor podía usar la misma idea dos veces (en términos de la teoría del AL) en contextos diferentes, sin notar la semejanza de los métodos." (Dorier, 1995a, p. 254).

  Este lento proceso que unificó las ideas de linealidad, que han penetrado cada rama de la Matemática, en particular la geometría y los determinantes, muestra cómo aquella teoría fue el resultado de una síntesis de estas dos y que luego se extendió a n-úplas y matrices.

  Aquella unificación y esta síntesis, que insumió dos siglos a los matemáticos, no constituyen logros fáciles de conseguir por parte de nuestros alumnos de primer año.

  Las nociones de DL e IL alcanzan su status actual, luego de nacer -al parecer de la mano del 'accidente' de Euler-, al corazón de los sistemas lineales y atravesar todos los Espacios Vectoriales (p. 31). No es casual que la invarianza del rango (p. 32) y las ideas de 'generador mínimo e independiente máximo', que constituyen el lazo entre los conceptos de DL y generador (p. 51), fueran la más esquivas en la génesis que se ha descrito. Estos momentos de estancamiento, estas causas de inercia son las que configuran, claramente, un obstáculo epistemológico intrínseco al concepto que los estudiantes deberán enfrentar (pp. 12-15).

- De las *investigaciones en enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal*, analizadas en la sección *III.2*, pp. 44-58, no surgen enunciados esperanzadores. Al respecto, no deja de impactarnos la cita (anónima) en Leron et al. (1995, p. 1): "La enseñanza del álgebra abstracta es un desastre, y esto permanece verdadero casi independientemente de la calidad de las conferencias.". A esta afirmación los autores agregan, "estamos de acuerdo" para, seguidamente, dejarnos algunas expresiones más alentadoras.

  Salvo algunas excepciones, los investigadores han analizado las dificultades generales que presenta el aprendizaje, y por lo tanto la enseñanza, del AL. Sólo unos pocos se han dedicado a tópicos específicos como el que nos ocupa, sin embargo, la mayoría coincide en que se trata de las nociones más complejas y escurridizas para asir.

  En general, la preocupación se ve centrada en el formalismo y la generalización que es intrínseca al Álgebra Lineal (pp. 45, 47). Las grandes discusiones están vinculadas a la conveniencia o no de la reducción de los tópicos en un primer curso de la universidad (pp. 48, 54, 55, 56); a cómo se encara la entrada a ese estudio (pp. 45-57); a que los primeros acercamientos deberían convencer a los alumnos sobre la ganancia que obtendrán –en el sentido de posibilitar resolver problemas nuevos- al desafiar el estudio de semejante 'batería' de definiciones y conceptos (pp. 47, 48, 53, 54). Todos coinciden en la dificultad que plantea la diversidad de representaciones, lenguajes, modos de pensamiento, ajustes, puntos de vista, etc., que han quedado abarcados por el término de 'flexibilidad cognitiva'.

  Respecto al enfoque que sugieren para un primer curso de AL, no podemos dejar de señalar una aparente contradicción, no solamente entre distintos investigadores, sino, a veces, en un mismo autor. Por una parte se insiste en que el abordaje de un tema tan abstracto, como lo es el de Espacio Vectorial, debería asentarse en una base intuitiva sólida. Sin embargo, no se deja de advertir el peligro del encerramiento en un contexto geométrico, por ejemplo, los vectores en el plano y en el espacio, o en el contexto algebraico de la n-úplas de R^n, que consideran difícilmente generalizables a los espacios de los polinomios, matrices o funciones.

  Por otro lado, se percibe con fuerza la relevancia que otorgan a la introducción de lenguajes computacionales para favorecer la apropiación de los conceptos del AL, muy particularmente los que constituyen el objeto de nuestro trabajo (pp. 47, 57, 58).

  A modo de síntesis, en términos generales, y sin arriesgar ningún tipo de clasificación, los obstáculos que citan los investigadores como más significantes son: el formalismo y la generalización; la gran cantidad de nuevas definiciones; la inmadurez de los estudiantes; la falta de conexión entre los nuevos y viejos conceptos; el trabajo de un concepto en diferentes ajustes; la escasa movilidad entre los registros; el escaso tiempo; el manejo errático de la cuantificación, la lógica y la teoría de conjuntos; la incongruencia semántica de las definiciones con el lenguaje natural; el encerramiento en la retórica 'definicional'; el no hallazgo de una 'situación fundamental del concepto'; la imposibilidad de concebir a la teoría toda, como una herramienta eficaz para resolver nuevos problemas.

VI.2 De la transposición y contratos didácticos

- Del estudio de los antecedentes de la *Dependencia Lineal en el Nivel Medio* que hemos llevado a cabo en el apartado IV.1.1, pp. 59-65, se deduce que esta noción no es tratada en esos términos en las aulas de educación secundaria.

  Sin embargo, encontramos y describimos ciertas aproximaciones no explícitas al concepto, tales como la dependencia presente en situaciones de la vida cotidiana, en las funciones lineales, en los vectores geométricos (por analogía, en los números complejos) y en los sistemas de ecuaciones lineales. Prueba de que estos objetos matemáticos no son percibidos bajo la mirada de la dependencia lineal es, por ejemplo, el hecho de que en la Universidad, los estudiantes sólo puedan interpretar como errores propios, a los resultados que arrojan los sistemas que hemos llamado 'impertinentes' (pp. 63-65), tales como las expresiones 0=0 y 0/0.

  Esta ausencia justifica suficientemente las palabras de Dorier cuando expresa que los alumnos tienen la sensación de haber desembarcado en un nuevo plantea, no encuentran conexión con lo que ellos ya saben en matemática y no pueden encontrar su camino en este nuevo mundo (p. 47).

  Entendemos que las situaciones que hemos mencionado, y muy particularmente, el trabajo con los vectores geométricos y los sistemas lineales, podrían constituirse en eficaces mediadores entre lo conocido y lo nuevo, siempre y cuando se haya construido ese vínculo en el Nivel Medio y retomado en el Nivel Superior.

- Del análisis del *escenario didáctico* montado alrededor de la DL en la UNNE surge que, si nos referimos únicamente a una reorganización temporal y lineal de los temas que abarcan el tópico de los Espacios Vectoriales, que no es ciertamente el objetivo específico de la Matemática Educativa, cualquier ordenamiento que se sugiera contiene nodos de conflicto cognitivo inherentes al concepto, esto es, su función unificadora, globalizadora y generalizadora, que ha sido señalado como uno de los obstáculos epistemológicos en las secciones III.1 y III.2 de este trabajo ¿Por qué esperar que a nuestros alumnos les resulte un salto cognitivo fácil de superar?

  Al tratarse de una idea globalizadora, es forzosamente compleja, y la primera pregunta que surge es ¿qué es lo que globaliza? Se supone que reúne, bajo el techo de un conjunto de axiomas, a todos los conjuntos que los verifican, pero, ¿se conocían previamente esos conjuntos? La respuesta también es complicada, pues nos vemos tentados de responder a la vez, sí y no. Se conocían algunos de los conjuntos que finalmente cubrirá ese techo, pero no todos, menos aún, bajo esa nueva mirada. Lo que cambia fundamentalmente los procesos de pensamiento es la mirada. Verse obligado a observar aspectos nuevos de un viejo concepto matemático, no deja de ser una cuestión de cuidado, pero, se supone, que más complejo resulta tener que observar aspectos nuevos en nuevos objetos.

Desde una perspectiva institucional, la situación que acabamos de describir configura la transposición y contrato didácticos que de estos tópicos se percibe en la UNNE (pp. 65-72). Los vectores geométricos, las funciones y los polinomios son trabajados operativamente en la escuela media e incluso, los dos últimos, en los primeros temas de la asignatura que incluye los temas de espacios vectoriales en la universidad; las n-úplas, las matrices y los vectores geométricos se presentan como ejemplos de estas nuevas estructuras, para más tarde estudiarlos más profundamente, y en otros aspectos.

Esta organización didáctica, que se replica con leves diferencias en la mayoría de las universidades del país, no es azarosa ni arbitraria, responde a una solución de compromiso que, desde un enfoque institucional, hace de estos contenidos una secuencia relativamente cómoda y ordenada. Las funciones, los polinomios y los números complejos, que proveen mucha matemática rica para 'hacer' y no requieren de los conceptos de EV para ser comprendidos, se trabajan con anterioridad; las matrices, los determinantes y los sistemas de ecuaciones lineales, cuya presentación se ve facilitada cuando los alumnos cuentan con las ideas 'globalizadas', se tratan más tarde; y entre estos dos grandes grupos de contenidos, oficiando de mediador suficientemente comprensible, hacen su aparición las n-úplas de reales (pp. 66-68).

Decimos que se trata de una solución de compromiso pues pretende colocarse en el centro de dos situaciones extremas: 1) la que entra de lleno con la generalización, que es económica, por cuanto requiere definir una sola vez todos las conceptos comunes de los espacios vectoriales y sus propiedades, para luego trabajar los ejemplos; 2) la que estudia los objetos matemáticos, prescindiendo del concepto de vector algebraico, pero que posee la gran desventaja de requerir, para cada uno de los objetos, la tediosa repetición de las definiciones y propiedades que le son comunes, a riesgo de que la semejanza no sea percibida, tal como sucedió a los matemáticos (pp. 43, 137).

Ambos enfoques presentan nodos de conflicto cognitivo. En el primero, los ejemplos pierden su rol de *clarificadores*, pues se tratan de *nuevas teorías* a desarrollar, con sus nuevas definiciones, símbolos, representaciones, operatoria específica y los ejemplos de los ejemplos de los ejemplos. Es así que comienza un tramo de la enseñanza que se debate entre las cuestiones *generales* de los espacios vectoriales y las cuestiones *particulares* de los 'ejemplos', que ha sido señalado por los investigadores del tema, como uno de los obstáculos epistemológicos intrínseco al concepto de EV (p. 54). En el segundo enfoque, además de resultar *antieconómico*, la misma repetición de las ideas, como la noción de DL, en tan diferentes contextos y distanciadas en el tiempo, paradójicamente, puede hacer que aparezcan ante los alumnos como inconexas. Pareciera no existir salida de este círculo vicioso; sin embargo, a nuestro humilde entender, nos encontramos ante el obstáculo más relevante al que se enfrentan los estudiantes, pero a la vez, ante el mejor ejemplo de la necesidad de la no linealidad de la enseñanza y de una genuina reconstrucción de la obra matemática que nos ocupa.

Por otro lado, y con relación a los cursos previos de lógica matemática y teoría de conjuntos que reclamarían los docentes, sobre los que reporta Dorier (p. 46), queremos puntualizar que aquellos contenidos ocupan las dos primeras unidades, en el curso que hemos tomado como objeto de análisis, y sin embargo, ya nos fue posible observar su escaso beneficio al analizar los resultados de las experiencias descriptas en los subapartados V.1.1.1, pp. 100-108, V.1.4.3, pp. 125-136.

- *Del análisis de los libros de texto* obrantes en la biblioteca de la FaCENA, y que hemos presentado en el subapartado IV.1.2.2, pp. 70-72, surge que sus autores, en consonancia con las reflexiones realizadas en el punto que precede y también con las opiniones de los investigadores, no son ajenos a las grandes controversias que genera la decisión respecto del lugar que debe ocupar el estudio de los Espacios Vectoriales. Esta situación se torna evidente al observar las múltiples y diferentes formas de organizar los contenidos previos y posteriores a su desarrollo, algunos de los cuales guarda similitud con la secuenciación y temporalización puesta en marcha en la cátedra testigo que hemos analizado (pp. 65-68).

  Paradójicamente, no se observan novedades en cuanto a las definiciones de la DL e IL que, a lo sumo, aparecen permutadas; no obstante, las disparidades que señalamos precedentemente, le imprimen a estos conceptos sentidos bien diferentes.

  Asimismo, como ya lo anticipamos, a pesar del amplio campo conceptual que abarcan las ideas que hemos trabajado (pp. 83-88), los libros de texto presentan escasas situaciones extramatemáticas y tareas a realizar con ordenador.

VI.3 De las consideraciones matemáticas y didácticas

- La estructura del cuerpo de *definiciones* de CL, DL e IL, que hemos analizado en el apartado IV.2.3, pp. 76-83, constituiría el obstáculo más relevante del tema que hemos trabajado. La mayoría de las confusiones provendrían de la falta de comprensión de las condiciones "sólo necesarias", "sólo suficientes" y de las condiciones "necesarias y suficientes".

  El hecho de que las definiciones más *operativas*, (1) de la DL y (7) de la IL, sean casualmente las *menos didácticas*, coloca en serios aprietos a nuestros estudiantes, que a la sazón, se caracterizan por tener un manejo errático del Álgebra y de la Lógica.

  También hicimos hincapié en la importancia, y a la vez, en la dificultad de construir una *transición* viable entre las definiciones (1) y (4), por un lado, y (7) y (9), por otro. A propósito de la definición (4), recordemos aquí algunos de sus nodos de conflicto:

  > La expresión "*al menos uno*" cumple una función limitadora, pues significa uno o más, acaso todos, pero no necesariamente "*todos*"; pero la expresión "*los restantes*" no tiene el mismo estatus, porque se la puede reemplazar por el término "*todos*", aunque sea suficiente chequear con los restantes. ¿Perciben estas diferencias nuestros alumnos? ¿Cuál es el montaje didáctico que favorece tal comprensión? (p. 80).

No estamos en condiciones de afirmar que todos los estudiantes comprenden que la expresión "*los restantes*" puede ser reemplazada por "*todos*", pero sí hemos tenido contacto con alumnos que interpretan a la expresión "*al menos uno*" como "*todos*"[61], error que los conduce a afirmar, mediante una negación correcta[62], que un conjunto es LI, cuando encuentran un primer vector que no es CL de los restantes[63]. Obviamente, estos obstáculos están vinculados a las dificultades que derivan de la cuantificación de proposiciones.

Las incongruencias semánticas, entre el lenguaje natural y el simbólico, de las definiciones de la DL e IL descriptas (pp. 81-83), colaboran con la ya abultada confusión reinante.

Para continuar con el escenario de dificultades, deberíamos agregar la que plantea la casi 'inaceptable' definición del concepto de '*vector*' como '*todo elemento de un espacio vectorial*', viéndose además, el alumno, impedido de visualizar a la mayoría de los vectores, con la clásica 'flecha de los indios' a la que estaba acostumbrado.

- Del análisis del *campo conceptual* actual de la DL en la UNNE, que llevamos a cabo en el apartado IV.2.4, pp. 83-88, surge claramente su complejidad.

El conjunto de situaciones que aquel concepto permite resolver y cuyo tratamiento implica la aparición de múltiples definiciones, esquemas, conceptos, teoremas, representaciones lingüísticas y simbólicas, en estrecha relación entre sí, conforman un entretejido mayúsculo, que se torna frágil cuando el montaje didáctico no es el adecuado y los estudiantes no logran hacerlo suyo.

Basta recordar que, a partir de la simple proposición "*Sea* $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *un conjunto de n vectores de* R^n *tal que A es LD"*, hemos logrado escribir una docena de equivalencias que atraviesan otros tantos objetos matemáticos (p. 86).

- Las *praxeologías matemáticas* que construimos en el apartado IV.2.5, pp. 89-98, para las Tareas A y B, que luego conformaron uno de los cuestionarios de la parte experimental que se les ofreció a los alumnos, avalan nuestras afirmaciones de los dos párrafos anteriores, en el sentido de que permiten 'ver funcionando' aquella maraña de definiciones, esquemas, conceptos, teoremas, etc. No es despreciable el hecho de que existan cinco técnicas para resolver la Tarea A y ocho, para la Tarea B, teniendo en cuenta su extrema simplicidad.

---

[61] Según este reemplazo, una versión falsa de la definición (4) de la DL resulta "Un conjunto de vectores es LD si, y sólo si, *todos* los vectores son combinación lineal de los restantes"
[62] Según esta negación, una versión falsa de la definición (7) de la IL resulta "Un conjunto de vectores es LI si, y sólo si, *al menos uno* de los vectores no es combinación lineal de los restantes".
[63] La operatoria que surge de esta falsa definición contradice claramente a la definición (9) que afirma: "Un conjunto de vectores es LI si, y sólo si, *ninguno* de sus vectores puede expresarse como CL de los demás"

VI.4 De las dificultades, creencias y concepciones de los docentes

- Con respecto a la experiencia llevada a cabo con *docentes del Nivel Medio*, y sobre la que se reporta en el apartado V.1.2, pp. 108-112, ya hemos manifestado la preocupación que despierta el hecho de que sólo el 40% de los profesores encuestados muestran poseer el saber específico que consiste en inventar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de modo que resulte indeterminado. El horizonte es más desalentador aún, cuando reflexionamos acerca de que la actividad propuesta involucra al concepto de dependencia lineal de vectores en el más sencillo de los contextos, el de la proporcionalidad de las ecuaciones.

  Si bien, la situación es alarmante, no debería sorprendernos. Esos docentes no han trabajado estas ideas cuando fueron alumnos del Nivel Medio, en consonancia con el contrato didáctico subyacente en nuestra comunidad educativa, mediante el cual, los problemas que se proponen en las aulas, tienen siempre solución y esta solución es única. En consecuencia, tampoco gestionan estas nociones al momento de ser docentes en dicho nivel, respetando, obviamente, el mismo contrato. Sólo el recuerdo leve de haber trabajado estos conceptos en el Nivel Terciario o Superior, no ha sido suficiente.

- De la entrevista que involucra a *docentes del Nivel Superior*, cuyos resultados se describen en el apartado V.1.3, pp.112-117, se desprende que la mayoría de los docentes otorgan *importancia* a los conceptos de DL e IL, en la formación matemática de los estudiantes, por "su carácter intrínseco e invariante"; por "el grado de abstracción que exige"; por "sus aplicaciones a otras ciencias"; porque "favorece el uso de distintos registros"; por "su universalidad"; como "herramienta de trabajo".

  Con relación a las *estrategias*, casi todos los docentes utilizan como base los espacios euclídeos para alcanzar la idea de vector algebraico; algunos recurren además, a los sistemas lineales, a problemas contextualizados y a metáforas. Salvo el caso de los alumnos de carreras en Matemática, los porcentajes de estudiantes que logran comprender los conceptos, según reportan sus docentes, varía entre 10% y 50%. En general consideran escasa la *carga horaria* que deben dedicarle a estos temas.

  Los docentes adjudican a diversas causas las *dificultades* con las que tropiezan sus alumnos: "confunden las nociones de DL e IL; "no poseen los conocimientos previos necesarios"; "se aferran a las definiciones"; no intentan otras técnicas"; "la formalización"; la "abstracción"; el lenguaje simbólico; "la falta de dedicación". Un docente preocupado por el orden de los contenidos, se pregunta: ¿hay que dar los sistemas, antes o después que los espacios vectoriales?

  Acerca de *qué pueden afirmar los docentes*, a partir de conocer que un conjunto de *n* vectores es LD, se percibe en algunas respuestas la misma dificultad que presentan los estudiantes, esto es, el encerramiento en el EV de las n-úplas, y en este contexto, en la DL ligada a la proporcionalidad de las componentes.

VI.5 De las dificultades, creencias y concepciones de los alumnos

En el último párrafo de la sección *VI.1*, p. 137, de estas conclusiones hemos sintetizado los obstáculos más relevantes que surgieron del análisis de la génesis histórica de los conceptos y de la investigaciones en enseñanza del Álgebra Lineal. Luego, expusimos las limitaciones de los conocimientos de base que el Nivel Medio brinda a los alumnos que ingresan a la Universidad y las dificultades que plantea el escenario didáctico que se presenta en la UNNE. Más tarde describimos la complejidad que presupone el manejo de las definiciones centrales y su campo conceptual. Por último, tomamos contacto con los saberes, opiniones y concepciones de los docentes de ambos niveles. En esta sección queremos resumir los resultados de las experiencias realizadas con los alumnos de FaCENA obrantes en V.1.1, pp. 100-108 y V.1.4, pp. 117-136, y que dan cuenta de los obstáculos que enfrentan los alumnos al tratar con el tema de la dependencia e independencia lineal, como así también de sus creencias y concepciones.

Existen situaciones en las que los docentes tomamos conciencia de forma inmediata que el estudiante se encuentra totalmente perdido en el manejo de algún concepto o conjunto de conceptos. Estas circunstancias son fácilmente observables cuando el alumno utiliza el lenguaje apropiado de modo inapropiado, esto es, cuando hace recaer ciertos calificativos en objetos matemáticos equivocados. Por ejemplo, en una de las respuestas de la Tarea B (p. 103), se percibe que los alumnos construyen una asociación entre la palabra TRIVIAL[64] y la palabra INDEPENDENCIA; además saben que en el análisis hacen su aparición SISTEMAS de ecuaciones lineales HOMOGÉNEOS. La yuxtaposición de estas palabras da por resultado la respuesta: "pues el SISTEMA es HOMOGÉNEO INDEPENDIENTE TRIVIAL" donde se nota una asignación correcta del calificativo 'homogéneo' al 'sistema', y otras dos incorrectas, de 'independiente' y 'trivial' que, como se sabe, recaen en el 'conjunto de vectores' y en la 'solución del sistema', respectivamente (V.1.1.3, p. 104). En este mismo subapartado y en modo análogo, podemos analizar una de las respuestas de la Tarea A donde puede verse la rareza: "las combinaciones lineales independientes son todas cero". Estas situaciones, a las que podríamos denominar 'manotones de ahogado', son claros momentos en que el alumno simula utilizar el lenguaje de un experto, mostrando que aún no lo es.

Algunas de las creencias y concepciones erróneas de los estudiantes, que hemos recogido a lo largo de las experiencias con relación a los conceptos de dependencia e independencia lineal, son:

- El caso de la independencia lineal se reduce a observar que el cardinal del conjunto de vectores sea igual a la dimensión del espacio.
- La demostración de que un vector no es combinación lineal de otros dos, se reduce a:
  - verificar que de la suma de éstos, no resulta el primero;
  - imponer un par de escalares arbitrarios y observar que la combinación lineal de esos vectores, con esos escalares, no da por resultado el primer vector;

[64] Estamos evitando aquí, deliberadamente, el análisis respecto a si la solución trivial es la única solución, hecho indispensable para decidir la DL o IL.

- observar que ninguno de los dos vectores es múltiplo del primero.

- La demostración de que un conjunto de dos vectores es linealmente independiente, se reduce a:
    - exhibir la combinación lineal nula trivial;
    - obtener la expresión 0=0, luego de plantear una combinación lineal nula genérica de los vectores;
- El número de vectores linealmente independientes de un conjunto, es igual a la resta entre el cardinal del conjunto y el número de vectores que se pueden escribir como CL de los demás.
- A partir de un conjunto de vectores linealmente dependiente, no puede obtenerse, un conjunto linealmente independiente.
- La independencia lineal puede 'perderse' al quitar vectores de un conjunto.
- La independencia lineal puede 'ganarse' al agregar vectores en un conjunto.
- Un conjunto linealmente independiente puede contener un subconjunto linealmente dependiente.
- Un conjunto LD no puede contener un subconjunto LI.
- La comparación del rango con el orden de una matriz sólo es eficaz en la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales, no así, para la determinación de la DL, del conjunto de los vectores fila o columna de la matriz.
- La idea de la concurrencia de vectores geométricos, se limita a dos vectores y no más.

Entre los obstáculos más relevantes se encuentran:

- La dialéctica entre lo general y lo particular.
- Encerramiento en el uso de las definiciones de DL e IL como única herramienta posible.
- Impedimento para reconocer que, salvo el caso del vector nulo, las CLs se presentan al menos, en parejas.
- La escasa flexibilidad cognitiva entre las ideas del campo conceptual descrito y entre los distintos registros de representación semiótica.
- Resistencia a aceptar la idea de que la dependencia e independencia lineal son características excluyentes de los conjuntos de vectores.
- La no inclusión de la solución trivial entre las infinitas soluciones de un sistema homogéneo indeterminado.
- No lograr concebir la idea de que un vector que es combinación lineal de otro, lo es del conjunto de vectores.
- Rechazar la posibilidad de incluir en las combinaciones lineales, algún vector con coeficiente nulo.

VI.6 De las implicancias didácticas y posibles prolongaciones

- Nosotros somos concientes de que las *implicancias didácticas* del trabajo que hemos desarrollado son bien limitadas, en el sentido de que no proponemos aquí soluciones a los conflictos que señalamos.

  Tan sólo hemos pretendido dirigir una mirada reflexiva, que nos permita mostrar a la comunidad educativa la complejidad de los conceptos matemáticos que estudiamos, a la vez que probamos que la dificultad de su apropiación no permanece a nivel del discurso, ni de la retórica, sino que conforman fuertes conflictos cognitivos en nuestros estudiantes.

  De haber logrado, en el lector, esa toma de conciencia a la que aludimos, habremos conseguido nuestro único propósito.

- En cuanto a las *posibles prolongaciones* de este trabajo entendemos que resta mucho por hacer. Algunas de esas cuestiones exceden los objetivos que nos hemos propuesto en un principio; otras, han surgido tardíamente como interesantes para investigar, a medida que avanzábamos en nuestra labor.

  Entre las primeras, se encuentra, obviamente, el diseño de un conjunto de situaciones que garantice suficientemente la comprensión de los conceptos que hemos tratado, esto es, una ingeniería didáctica, quizá compuesta de varias "estrategias entretejidas y a largo plazo" como sugiere Dorier (pp. 49, 50), y con las dudas que implique su posible reproducibilidad en otros sistemas didácticos, tal como reportan Lezama y Farfán (p. 99).

  Entre las restantes tareas, podemos señalar como pendiente, la obligación de confirmar empíricamente y con un fundamento teórico que las enmarque, ciertas afirmaciones que responden más bien a hipótesis que se generan a nivel de intuición docente, que a experiencias didácticas propiamente dichas, por ejemplo:

  - Probar que los alumnos no asociarían el algoritmo que permite el escalonamiento de una matriz, ya sea con el propósito de hallar su rango, su determinante, su inversa o en el seno de la resolución de los sistemas lineales, a la aplicación de las definiciones de dependencia o independencia lineal, en cualquiera de sus versiones, ni tampoco al concepto de combinación lineal.

    Veamos un ejemplo:

    $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \equiv_f \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ lo que se basa en que: $(-1).(1,2,3) + 2.(4,5,6) = (7,8,9)$,

    que también es equivalente a: $(-1).(1,2,3) + 2.(4,5,6) + (-1).(7,8,9) = (0,0,0)$ identidad que muestra claramente una CLNNT de los tres vectores fila de la matriz dada, hecho que nos conduce a concluir que el conjunto $\{(1,2,3);(4,5,6);(7,8,9)\}$ es LD; que el rango de aquella matriz es menor que 3; que su determinante es 0, que la matriz no es inversible; que su forma canónica no es la identidad, y que de tratarse de la matriz principal de un sistema de ecuaciones lineales, ese sistema resultaría incompatible o compatible indeterminado.

No obstante, si continuamos con el escalonamiento, podemos obtener:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix} \equiv_f \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \equiv_f \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 3 & 6\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{lo que se basa en que:}$$

$4.(1,2,3) + (-1).(4,5,6) = (0,3,6)$, que es suficiente para afirmar que el rango de la matriz es 2, en virtud de la propiedad que expresa que "en toda matriz escalonada, el rango es el número de filas no nulas de dicha matriz", propiedad que, rara vez se demuestra en clase. La asociación a la que nos estamos refiriendo puede construirse al plantear la ecuación:

$\alpha.(1,2,3) + \beta.(4,5,6) = (0,0,0)$, de lo que resulta que $\alpha = 0 \wedge \beta = 0$ y por lo tanto, el conjunto $\{(1,2,3);(4,5,6)\}$ es LI; en consecuencia el rango de la matriz es 2, etc.

En el escenario didáctico de la UNNE, la construcción de estas vinculaciones queda a cargo del alumno.

- Investigar ¿cuál es la asociación que construyen los estudiantes entre el cardinal del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales y la dependencia e independencia lineal?

Como es sabido, un conjunto de vectores tiene sólo *dos* posibilidades excluyentes entre sí, es LD o LI. Por otro lado, el cardinal del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, tiene *tres* posibilidades: 0, 1 ó ∞. Es bien cierto que al aplicar la definición (1) de la DL, se presentan sistemas homogéneos que son siempre compatibles, y por lo tanto, aquellos cardinales posibles se reducen a dos: 1 ó ∞, que se corresponden unívocamente con la IL y la DL. Sin embargo, en muchas oportunidades, la DL surge como consecuencia de aplicar la definición (4), a través del planteo de un sistema de ecuaciones que resulta tener solución única.

Veamos un ejemplo:

La técnica A3 para resolver la Tarea A (*¿el vector* (-3,2) *es combinación lineal de los vectores* (0,1) *y* (3,2)?), que se presentó en el apartado IV.2.5, pp. 93, consiste en plantear la ecuación:

$$a_1\,(0,1) + a_2\,(3,2) = (-3,2) \Rightarrow (0,a_1) + (3a_2\,,2a_2) = (-3,2) \Rightarrow (3a_2\,,a_1 + 2a_2) = (-3,2) \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3a_2 = -3 \\ a_1 + 2a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -1 \\ a_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4\,(0,1) + (-1)\,(3,2) = (-3,2),$$

de lo cual se deduce que la afirmación es verdadera. Pero, haciendo uso de la definición (4), también se deduce que el conjunto $\{(0,1);(3,2);(-3,2)\}$ es LD. Esta dependencia ha surgido del planteo de un sistema compatible determinado, contrariamente a lo que hemos afirmado más arriba.

Esta situación no logra confundir a un experto que está seguro que una CLN genérica de aquellos vectores, deriva en un sistema homogéneo con infinitas soluciones pero, ¿no queda una duda razonable y no explícita en el alumno? ¿comprende la diferencia? En esta posible confusión, ¿a qué asocian los estudiantes la incompatibilidad de un sistema? ¿no puede verse inclinado a establecer una triple y falsa biyección que genere una tercera opción, más allá de la Dl e IL?

Nosotros no hemos aplicado ningún dispositivo que permita responder con certeza estas preguntas pero, en algunas respuestas de los alumnos, en las experiencias que llevamos a cabo, intuimos posibles confusiones de la naturaleza que señalamos.

- Investigar los esquemas mentales que los estudiantes construyen, desde el concepto de independencia lineal para alcanzar los conceptos de generador, base y dimensión o viceversa, según la organización de contenidos que se haya puesto en práctica.

  Conocer estos esquemas, facilitaría, por ejemplo, la construcción del andamiaje necesario para comprender las ideas de 'generador mínimo e independiente máximo', que como ya hemos visto, fueron tardías, incluso entre los matemáticos (pp. 137).

- Explorar las bondades de un acercamiento geométrico al Álgebra Lineal en el entorno Cabri, en comparación con un acercamiento aritmético, centrado en la construcción de los conceptos de vector, dependencia lineal y transformaciones lineales, tal como sugieren Dreyfus, Hillel. & Sierpinska (1998, pp. 209-221) en 'Cabri-based Linear Álgebra', artículo citado en el apartado III.2.5, p. 55. Este soft, permitiría una introducción geométrica y exploratoria de nociones como la linealidad, la no linealidad, las transformaciones y los autovectores[65].

- Investigar, en general, la potencialidad del uso de ordenadores con lenguajes computacionales específicos que cooperen en la construcción de las nociones que componen el Álgebra Lineal.

Si hoy tuviéramos que elegir el pensamiento que interpreta al nuestro de la mejor manera, con relación a la problemática que hemos planteado en esta tesis, con todos los interrogantes, titubeos, incertidumbres y vacilaciones, sin lugar a dudas, nuestra elección recaería en:

> Las presentaciones estándares de los espacios vectoriales, es decir, aquellas que arrancan con un listado de sus axiomas y terminan con la diagonalización de operadores lineales, a menudo sigue una práctica que se limita a tareas de tipo algorítmico en las que los estudiantes tienen 'éxito', por ejemplo, en encontrar la forma reducida de una matriz con el método de Jordan, o la resolución de sistemas de la ecuaciones lineales, pero tienen severas dificultades para comprender las nociones de dependencia lineal, generadores, o subespacios complementarios. En palabras de Chevallard (1991, pp. 67-68, en Dorier, 2000a, p. 33) esta algoritmización es una respuesta clásica cuando el objeto de enseñanza aparece como demasiado novedoso. Pero, paradójicamente, las cuestiones que el alumno aprende a resolver, son casualmente aquellas que ya sabía resolver, quizá con otros métodos, y sin necesidad de sumergirse en "la inmensa batería de los espacios vectoriales". Esta situación, a la que denomina 'el obstáculo del formalismo', conduce irremediablemente al autor, y por qué no decirlo, también a nosotros, a la pregunta ¿hay que desechar la enseñanza de la Teoría de los Espacios Vectoriales en primer año de la universidad y esperar a que la necesidad aparezca en los estudiantes? A pesar de ello, muchas personas encuentran importante su inclusión desde el inicio de los estudios universitarios (Dorier, 2002, pp. 876-877).

Esperamos que a través de este trabajo, el lector logre percibir un primer paso, nuestro primer paso, "para encontrar el camino hacia una enseñanza de calidad" como una 'meta digna' a la que alude Cowen (1997), pensamiento que guió en todo momento nuestra labor.

[65] Al momento de finalizar esta tesis, nos encontramos encarando este nuevo proyecto.

Después de todo .....
¿cómo le explicaríamos a la abuela qué es la dependencia lineal?

Podríamos comenzar diciendo que

"Es como una enfermedad contagiosa e incurable, salvo por extirpación. Afecta a ciertas familias, cuyos integrantes tienen por finalidad brindar información codificada con respecto a otra familia todavía más grande, cuando alguno de ellos provee información equivalente a la de los demás; es decir, cuando los datos que nos ofrece, pueden deducirse a partir de los otros -algo parecido a un chisme repetido que nos dice lo mismo con otras palabras-.

Estos integrantes, cuya sola presencia provoca la enfermedad, se caracterizan porque se los puede 'preparar' tomando como 'ingredientes' básicos a los restantes, similar a la forma en que se elabora una 'torta', o sea, 'dos tazas de esto', más 'tres tazas de aquello', etc.

Eso si, existe un integrante que, si bien parece mudo, siempre está enfermo y contagia al resto. Si alguna familia lo contiene, no hay que buscar ningún otro síntoma, esa familia está enferma, sin duda alguna.

Según la cantidad de integrantes que tenga la familia, a veces la enfermedad provoca la falta de información, y por consiguiente, sólo se conoce una parte de la familia grande. En otros casos, si la información es sobreabundante, y por lo tanto, redundante, no se presenta este problema, siempre que 'alcance' para conocer a la familia grande, pero aquella situación provoca que los integrantes puedan ser nombrados de muchas maneras. Para que tengan una identidad propia y única, la misma para toda la gente, la cantidad de información –integrantes-, sin 'reiteraciones', tiene que ser la 'justa y necesaria' para cada familia grande.

En fin, las familias sanas no están a salvo de posibles contagios si se les agrega integrantes, pero las enfermas, a veces contienen subfamilias libres de infección.

A propósito ..., por si te interesa saber abuela ..., a los integrantes de las familias se los suele llamar 'vectores'; a las familias 'conjuntos'; a las familias grandes 'espacios vectoriales'; a las tortas, 'combinaciones lineales'; a la cantidad de tazas, 'coeficientes de la combinación'; al vector siempre enfermo, 'vector nulo'; a la información justa y necesaria, 'base'; a la cantidad de los integrantes de la base, 'dimensión'; a las familias cuya información alcanza, enfermas o no, 'generador'; a la enfermedad, 'dependencia lineal', a la ausencia de enfermedad, 'independencia lineal'.

Capítulo VII
Bibliografía

Alves Dias, M. y Artigue, M. (1995). Articulation Problems between Different Systems of Symbolic Representations in Linear Algebra, in *The Proceedings of PME19*, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brazil, Vol. 2, pp. 34-41. Teaching Linear Algebra at University 9.

Andreoli, D. (2002). “Con los pies en la tierra y sin tanto maquillaje”. *Memorias de la Sexta Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur*. Buenos Aires, Argentina. http://webs.uolsinectis.com.ar/ncotic/bre.htm.

Andreoli, D. (2003). Los Sistemas ‘Impertinentes’ como Génesis de Importantes Nociones Matemáticas. *Actas de la Tercera Conferencia Argentina de Educación Matemática*, Sociedad Argentina de Educación Matemática, Octubre 2003, Salta, Argentina.

Albert Huerta, J. (2000). Introducción a la Epistemología de la Matemática Educativa. *Material de apoyo al curso Epistemología de la Matemática Educativa*, Maestría en Ciencias, Especialidad en Matemática Educativa. CICATA-IPN. México.

Arcavi, A. (1999). The role of Visual Representations in the Learning of Mathematics, *XXI Annual Meeting PME-NA*, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca, Morelos, México, pp. 55-80.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10*(2-3), 241-286.

Artigue, M. (1999). The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level. Crucial Questions for Contemporary Research in Education, *Notices of the American Mathematical Society, 46* (11), pp. 1377-1385. Disponible en *www.ams.org/notices/ 199911/fea-artigue.pdf* Acceso 2004 Dic. 13.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X,* No. 2, pp. 117-134. Traducción del original realizada por Alejandro S. González-Martín con la autorización de la autora. Disponible en *www.emis.de/journals/BAMV/conten/ vol10/artigue.pdf* Acceso 2004 Dic. 13.

Arya, J. & Lardner R. (1992). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.

Axler, S. (1995). Down with determinants! *The American Mathematical Monthly*, *102*, 139–154.

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*, Edit. Siglo XXI, 17ª, Buenos Aires, 1991.

Bessot, A. (2003). Une Introduction à la Théorie des Situations Didactiques. *Les cahiers du laboratoire Leibniz,* Grenoble, France, Nº 91, pp. 1-60. Disponible en www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/ 2003/Cahier91/CLLeib91.pdf. Acceso 2004 Dic. 13.

Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "Instrumentos de Representación" en la actividad matemática. *IV Simposio SEIEM*, Huelva. Ponencia invitada al Seminario de Investigación I, "Representación y comprensión". Versión preliminar, pp. 1-13. Disponible en www.ugr.es/~seiem/Actas/Huelva/MBosch.rtf. Acceso 6 Dic. 2004.

Brousseau, G. (1976). *La problématique et l'enseignement des mathématiques*, XXVIIIème Rencontre de la CIEAEM, Louvain la Neuve.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistémologiques et les problémes en didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 4*(2), pp. 165-198.

Brousseau, G. (1986/2001). "Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, No.2, pp. 33-115. Material editado por los MC Martha C. Villalba Gtz. y Víctor M. Hernández para fines de Estudio Académico, México, DF, pp.1-56.

Brousseau, G. (1988). Los diferentes roles del maestro. *Conferencia pronuciada en la UQAM, Canadá*. Traducción del francés de *María Emilia Quaranta*, reproducido con autorización del autor. Capítulo IV, pp. 65-94.

Brousseau, G. (1989). La tour de Babel. Études en Didactique de Mathématiques, *Article Occasionnel* 2, Burdeos, IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Primera Parte). IREM, Université de Bordeaux. *Enseñanza de las Ciencias,* 8, pp.259-267. Traducción de Luis Puig, pp. 1-10. Disponible en *http://fractus.mat.uson.mx/Papers/Brousseau/Didactica1.pdf*. Acceso 2004, Dic. 13.

Calvo Pesce, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*, Tesis Doctoral, Bellaterra, Barcelona, pp. 31.

Cantoral, R., Farfán, R. (1998). Pensamiento y Lnguaje Variacional en la Introducción al Análisis. *Épsilon – Edición especial.* España, N. 42, pp. 353 – 369.

Cantoral, R., Farfán, R. (2000). Matemática Educativa: Una visión de su evolución, Artículo de la bibliografía de la Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, CICATA, IPN, México, DF, pp. 1-11.

Carlson, D.; Johnson, C.; Lay, D. and Porter, A. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *College Mathematics Journal*, vol. 24: 41-46.

Chevallard, Y. (1980). The didactics of mathematics: its problematic and related research. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 1:146-157.

Chevallard, Y. (1985/1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Traducción Claudia Gilman. Aique, Buenos Aires, págs. 196.

Chevallard, Y. (1996). Les Outils Sémiotiques du Travail Mathématique, *Petit x*, n°42, pp. 33-57.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemática: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Cuadernos de Educación. Editorial Horsori. Barcelona.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2): 221-266. Traducción Barroso, R. y Fernández, T. *Revista Eletrónica de Didáctica de las Matemáticas*. Publicación Trimestral. Año 3, nº 2: 1-33. Octubre 2002. Universidad Autónoma de Querétaro. (México). Revisión Chevallard, Y. y Bosch, M. Disponible en *http://www.uaq.mx/matematicas/redm/articulos.html*?1005. Acceso 6 Dic. 2004.

- - - - - -. (1997). Contenidos Basicos Comunes para la Educación Polimodal. Matemática. Ministerio de Cultura y Educacion de la Nación. Consejo Federal de Cultura y Educación. República Argentina. Disponible en *http://www.me.gov.ar/consejo/documentos/cbc/polimodal/cbcep/matema.txt* Acceso 2004, Dic. 13.

Cowen, C. (1997). On the Centrality of Linear Algebra in the Curriculum. Mathematical Association of America. Disponible en *http://www.maa.org/features/cowen.html*. Acceso 2005 Abril 26.

Day, J. & Kalman, D. (1999). Teaching Linear Algebra: What are the Questions?. *Department of Mathematics at American University in Washington D.C*. pp. 1-16. Disponible en *www.american.edu/academic.depts/ cas/mathstat/People/kalman/pdffiles/questions2.pdf*

Dorier, J.-L. (1995a). A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory. *Historia Mathematica*, *22*(3), 1995, 227-261.

Dorier, J.-L. (1995b). Meta level in the Teaching of Unifying and Generalizing Concepts in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, num. 29.2, pp. 175-197.

Dorier, J. (1996). Sur les Concepts d'Indépendance et de Dépendance Linéaires, Approches didactique et épistémologique, in Nguyen Dinh Tri et al., (eds.) *Actes de la 7ième Conférence Sud-Est Asiatique sur l'Enseignement Mathématiques, (3)7,* Hanoï (Viet-Nam), Juin 1996, Vietnamese Mathematical Society, 150-155.

Dorier, J.-L. (1998). (Comité de programme) Teaching and Learning Linear Algebra in First Year of French Science University, First Conference of the European Society in Mathematics Education, Osnabrück, Allemagne, pp. 27-31. *Actes sous forme électronique*: *http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/ cerme1-proceedings.html*. pp. 103-112. Acceso 2004 Dic. 13.

Dorier, J.-L. (2000a). Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire. Perspectives théorique sur leurs interactions, *Les cahiers du laboratoire Leibniz, No. 12*, pp. 1-89. Disponible en *http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers*. Acceso, 2004 Dic. 13

Dorier, J.-L.; Robert, A.; Robinet, J.; Rogalski, M. (2000b). On a Research Program about the Teaching and Learning of Linear Algebra in First Year of French Science University, *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology, 31*(1), pp. 27-35.

Dorier, J.-L. (2002) (invité). Teaching Linear Algebra at University, in Li Tatsien (ed.) *Proceedings of the International Congress of Mathematician*, Beijing 2002, August 20-28, Vol III (Invited Lectures) pp. 875-884. Disponible en *http://www.fing. edu.uy/~omargil/gal1/gal1.html*. Acceso 2004 Dic. 13.

Dreyfus, T., Hillel, J. & Sierpinska, A. (1998), Cabri-based Linear Algebra: transformations. *Paper presented at CERME-1* (First Conference on European Research in Mathematics Education, Osnabrück, August 1998). pp. 209-221. Disponible en http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html, Acceso 2004 Dic. 13.

Dubinsky, E. (2001). Some Thoughts on a First Course in Linear Algebra at College Level, *Purdue University and Education Development Center*, pp. 1-24. Disponible en *http://trident.mcs.kent.edu/~edd/publications.html*. Acceso 2004 Dic 13.

Duval, R. (1988/1992). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En R. Cambray, E. Sánchez & G. Zubieta (comp..), *Antología en Educación Matemática*, Material de apoyo para el seminario de educación matemática I. Maestría en Ciencias, Especialidad en Matemática Educativa, Nivel Medio Superior. Cinvestav-IPN, pp. 125-141.

Duval, R. (1995/1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática, pp. 1-310.

Duval, R. (1998). *Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*, Investigaciones en matemática educativa II, Editor Hitt, F., Grupo Editorial Iberoamérica S.A de C.V.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive function in mathematical thinking. Basic issues for learning*, XXI Annual Meeting PME-NA*, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca, Morelos, México, pp. 3-26.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*, pp. 25-38. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Farfán, R. M. (2001). Paradigmas actuales de Investigación en Didáctica. Artículo de la bibliografía de la Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, CICATA, IPN, México, DF, pp. 1-15.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*: An Education Approach Reidel.

Gascón. J. (1998). Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(1), pp. 7-34.

Gascón, J., Muñoz-Lecanda, M., Sales, J., Segura, R. (2004). Matemáticas en Secundaria y Universidad: razones y sinrazones de un desencuentro. Comunicación presentada en el marco de las "*Xornadas sobre Educación Matemática*" celebradas en Santiago de Compostela del 16 al 18 de septiembre. pp. 1-26.

- - - - - -. (2005). *Geometría y álgebra lineal 1*. Instituto de Matemática y Estadística "Prof. Ing. Rafael Laguardia" (obra colectiva). Ed. Oficina de Publicaciones del Centro de Estudiantes de Ingeniería. Uruguay. Introducción y materiales Disponible en *http://imerl.fing.edu.uy/gal1/Curso2005/materiales/intro.html*. Acceso 2005 Abr. 22.

Godino, J. (2001). Comparación de herramientas teóricas en didáctica de las matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en *www.ugr.es/~jgodino/ funciones-semioticas/07_ComparacionHT.pdf*, pp. 1-18.

Godino, J. (2003). Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. pp. 1-44. Disponible en *www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/01_PerspectivaDM.pdf* Acceso: Dic. 13/2004.

Gransard, F. (1998). Book Reviews. ZDM 98/6, pp. 206-210, Brussels (Belgium). Reseña del libro: Dorier J.-L. (ed.) (1997). *L'algèbre linéaire en question*, collection Bibliothèque de Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble: La Pensée Sauvage Éditeur. (331 pages). Disponible en *www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm986r2.pdf*. Acceso 2004 Dic. 13.

Guzmán, M. de (1996/1999). El rincón de la pizarra. Cap 0, Piramide, Madrid. Disponible en *http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/Visualizacion/01quees.htm*. Acceso: 2004 Dic. 13.

Guzmán, M. de. (2001). La actividad subconsciente en la resolución de problemas. *Red Científica. Ciencia, Tecnología y Pensamiento.* Año IV, Epoca 3, Nº 43. Disponible en http://www.redcientifica.com/doc/doc200112010001.html. Acceso 4 Dic. 2004.

Hamdan, M. (2003). Alternatives for Teaching Linear Algebra: The Case of Representation. ***Proceedings of The Twenty Ninth Conference, Held At The University of Birmingham.*** Disponible en *http://www.umtc.ac.uk/umtc03/umtc2003proca.pdf*, pp. 31-36. Acceso 2004 Dic. 13.

Harel, G. (2001). Pupa's Two Complementary Products: Taxonomy of Students' Existing Proof Schemes and DNR-Based Instruction. *International Newsletter on de Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Mariotti, A. (ed.). On-line material, pp. 1-12. Disponible en *www.lettredelapreuve.it/Resumes/Harel/Harel01.pdf*. Acceso 2004 Dic. 13.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (1994). *Metodología de la investigación*. Ed. McGraw Hill Interamericana de México, S.A. de C:V., México, D.F., págs.505.

Hitt, F. (1998). Tesis de Doctorado en Matemática Educativa en México, *Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN,* México. Disponible en http//fractus.mat.uson.mx/Papers/Varios/DoctCinvest.html. Acceso. 2004 Dic/13.

Kotliarenco, M., Cáceres, I. , Fontecilla, M. (1997). Estado de Arte en Resiliencia. *Organización Panamericana de la Salud y otros*. Disponible en http://www.adolec.org/pdf/Resil6x9.pdf, visitado Nov. 11, 2004, pp. 1-60.

Leron, U. & Dubinsky, E. (1995). An Abstract Algebra Story, *American Mathematical Monthly*, 102, 3, March 1995, pp. 227-242 . Disponible en http://trident.mcs.kent.edu/~edd/publications.html, pp. 1-32. Acceso 2004 Dic. 13.

Lezama Andalón, J.; Farfán Márquez, R. M. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad. RELIME. Vol. 4, Núm 2, pp. 161-193.

Marton, F. (1994). Phenomenography in Husén , T. and Postlethwaite, N T eds. In *The International Encyclopedia of Education*. 2nd ed , Vol 8. Pergamon, pp. 4424-4429. Disponible en *http://www.ped.gu.se/biorn/phgraph/civil/main/1res.appr.html*

Mora, B. (2000). Modos de Pensamiento e Interpretación de la solución de un Sistema de Ecuaciones, Tesis de Maestría, CINVESTAV, IPN, México, D.F.

Moreira, M. (2002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la Enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias, 7*(1), 2002. Traducción de Isabel Iglesias. Disponible en http://www.if.ufrgs.br/ienci. Acceso 18 Dic 2004.

Muench, D. (1990). Teaching and Learning the Concept of Linear Dependence using ISETL, *Eastern Small Colleges computing Conference*, Allentown, PA, August 1990, pp. 1-6.

O'Connor, J. & Robertson, E. (1996a). Disponible en http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html (2004, 20 de agosto)

O'Connor, J. & Robertson, E. (1996b). Disponible en http://www-gap.dcs.st-nd.ac.uk /~history/ HistTopics /Nine_chapters.html. Acceso 2004 Agosto 20.

Panizza, M.; Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999). La Ecuación Lineal con dos Variables: entre la Unicidad y el Infinito. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), pp. 453-461.

Parra, C. y Saiz, I. (1994). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Ed. Paidós Educator. Argentina. págs. 299.

Ruiz, L. (2001). Ingenieria Didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza aprendizaje. En G. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 14, pp.122-130. México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Safuanov, I. (2003). Design of the System of Genetic Teaching of some Topics of Algebra at Universities. *Pedagogical Institute of Naberezhnye Chelny* (Tatarstan). Russian. Disponible en http://www.icme-organisers.dk/tsg03/safuanovtsg3.pdf. Acceso 2005 Abril 22. pp. 1-7.

Saiz, I. (1995). La Multiplicación en el Primer Ciclo. Mód. 6. Material didáctico para Cursos de Capacitción Docente Continua. *Ministerio de Educación de la Provincia de Corrientes.* Argentina.

Santaló, L. (1989). Las Secciones Indiscretas. *Revista de Divulgación Científica y Tecnológica de la Asociación Civil Ciencia Hoy, Vol. 1, Nº 2*, Disponible en *http://www.ciencia-hoy.retina.ar/hoy02/seccionesindiscretas3.htm*. Acceso 2004 Dic. 13.

Sarrazy, B. (1996). La sensibilité au contrat didactique. Role des Arriere-plans dans la resolution de problemes d'arithmetique au cycle trois. *These pour le doctorat de l'Université de Bordeux II. Mention Sciences de l'Education*. Bordeaux. Francia.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the notion of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Ed.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). MAA, vol. 25.

Sierpinska, A. (1999). Lectures on the Theory of Didactic Situations. Canada: Concordia University.

Sierpinska, A., Nnadozie, A., Oktaç, A. (2002). A Study of Relationships Between Theoretical Thinking and High Achievement In Linear Algebra. *Work in progress on Theoretical Thinking.* Disponible en http://alcor.concordia.ca/ ~sierp/downloadpapers. html, pp. 1-188.

Sierpinska, A. (2004). Theory is not Necessary. Practice of Theory is. On the Necessity of Practical Understanding of Theory. *En ICME-10*, Topic Study Group 22. Disponible en http://alcor.concordia.ca/~sierp/tsg22Sierpinska.pdf, pp. 1-23. Acceso 2004 Dic. 13.

Solano, A. & Presmeg, N. (1995). Visualization as a Relation of Images. *Proceeding of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Brasil: Universidade Federal de Pernambuco.

Talizina, N. (1985). Conferencia sobre los Fundamentos de la Enseñanza en la Educación Superior. *CEPES, Universidad de La Habana. Cuba*.

Tee, G. (2004), ¡Vivan los determinantes!. Reprint *Lecturas Matemáticas*, *25*, pp. 25-40.

Venegas, L. (2004). ¿Aprender Álgebra Lineal es un Proceso Lineal? *Seminario para profesores. Departamento de Matemáticas, Universidad de Los Andes*. Bogotá Colombia. Relator: Fonseca, A.. Disponible en *http://temasmatematicos.uniandes. edu.co/Seminario/paginas/Seminario_03/#cap9.* Acceso 2005 Mayo 29.

Vergnaud, G. (coord). (1994/1997). *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?.* Paris, Hachette. Traducción Clara Maranzano, *Aprendizajes y didácticas: ¿Qué hay de nuevo?,* Ed. Edicial, R. Argentina, págs. 250.

Vergnaud, G. (1981/1991). *L'enfant, la mathématique et la réalité :* ***problèmes de l'enseignement des mathématiques***. Berna: Peter Lang. Traducción española *El niño, las matemáticas y la realidad*, Ed. Trillas, Méjico. Reimpresión 1999.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques, 10* (23): 133-170.

Weller, K.; Montgomery, A.; Clark, J.; Cottrill, J.; Trigueros, M.; Arnon, I. & Dubinsky, Ed. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL*, Research in Undergraduate Mathematics Education Community, Preliminary Version 3, July 2002, págs. 389.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Editors' Introduction: What is Mathematical Visualization? In Zimmermann, W. & Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, pp. 1-8. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Referencias citadas por J. L. Dorier en "A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory" (1995)

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz, *Leibnizens Mathematische Schriften*, ed. C. I. Gerhardt, 2 vols., Berlin: Julius Pressner, 1850; reprint ed., *Euvres mathematiques de Leibnitz*, Paris: Libraire de A. Frank Editeurs, 1853.

[2] Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des courbes algébriques*, Genève: Cramer et Philibert, 1750.

[3] Augustin Louis Cauchy, Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite de transpositions opérées entre les variables qu'elles renferement, *Journal de l'Ecole Polytechnique* **10** (1815).

[4] Leonhard Euler, Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes, *Mémoires de l'Académie des Sciencies de Berlin* **4** (1750), 219-223, or [5,6 :287-315].

[5] Leonhard Euler, *Opera Omnia*, 3 ser., 57 vols., Lausanne: Teubner-Orell Füssli-Turicini, 1911-1976.

[6] Henry Jhon Stanley Smith, On Sysems of Linear Indeterminates, Equations, and Congruences, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **151** (1861), 293-326, or Collected Mathematical papers, reprint ed., New York: Chelsea, 1965, 1:367-409.

[7] Georg Ferdinand Frobenius, Über das Pfaffsche Problem, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **82** (1875), 230-315.

[8] Georg Ferdinand Frobenius, Über homogene totale Differentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **86** (1879), 1-19.

[9] René Descartes, *Le Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciencies*, Leyden : Jan Maire, 1637 ; reprint ed., *La Géométrie*, ed. M. Leclerc et J-C. Juhel, Nantes : Édition de L'AREFPPI, 1984 ; *The Geometry of René Descartes*, trnas. D. E. Smith and M. L. Lathan, New York : Dover, 1954.

[10] Pierre de Fermat, *Ad Locos et solidos isagoge*, Toulouse, 1643 ; reprint ed., in *Varia opera mathematica*, ed. P. Tannery and C. Henri, 3 vols., Paris: Gauthier-Villars, 1891-1912, 85-96.

[11] Carl Friedrich Gauss, Theoria residuorum biquadraticorum-Commentatio secunda paper read in Göttingen on 23 April 1831, printed in [12,2:69-178].

[12] Carl Friedrich Gauss, *Werke*, 12 vols., Leipzig: Teubner, 1863-1933.

[13] Agustin-Louis Cauchy, Sur les quantités géométriques et su une méthode nouvelle pour la résolution des équations algébriques de degré quelconque, *Comptes rendus de l'Académie des Sciencies de Paris* **29** (1849), 250-258, or [14, 1(1e série) :91-169].

[14] Agustin-Louis Cauchy, *Œuvres complètes*, 2 ser., 26 vols., Paris: Gauthier-Villars, 1882-1956.

[15] August Ferdinand Möbius, *Gesammelte Werke*, ed. R. Baltzer, 4 volc., Leipzig: S. Hirtzel KG, 1915; reprint ed., Wiesbaden: Dr. Martin Sändig oHG, 1967.

[16] Giusto Bellavitis, Sopra alcune applicazioni de un nuovo metodo de geometrìa analitica, *Il poligrafo giornale di scienze, lettre ed arti. Verona* **13** (1833), 53-61.

[17] William Rowan Hamilton, On Quarternions or a New System of Imaginaries in Algebra, *Philosophical Magazine* **25** (1844), 489-495.

[18] Leonhard Euler, Problema algebricum ob affectiones prorsus singulares memorabile, *Novi comentarii academiae scientiarum peptropolitanae* **15** (1770), 75-106 or [5, 6:287-315].

[19] Joseph Louis Lagrange. *Œuvres complètes*, 14 vols., Paris: Gauthier-Villars, 1867-1892.

[20] Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Leipzig, 1802, or [21,1]; *Recherches arithmétiques*, trans. By A. C. M. Poulet-Delisle, Paris : Courcier, 1803 ; reprint ed., Paris ; Blanchard, 1979.

[21] Carl Friedrich Gauss, *Werke*, 12 vols., Leipzig: Teubner, 1863-1933.

[22] Arthur Cayley, A Memoir on the Theory of Matrices, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **148** (1858), 17-37, or [23, 2:475-496].

[23] Arthur Cayley, *Collected Mathematical Papers*, 13 vols., Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. press, 1889.

[24] August Ferdinand Möbius, *Der Barycentrische Calcul*, Leipzig: Johan Ambrosius Barth, 1827, or [15, 1:1-388]. [The citation is taken from the English translation in [25,526]].

[25] David Eugene Smith, *A Source Book in Mathematics*, New York: Dover, 1959.

[26] Arthur Cayley, Sur quelques résultats de géométrie de position, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **31** (1984), 213-227, or [23, 2 :475-496].

[27] Hermann Grassmann, *Die lineale Ausdehnungslehere*, Leipzig: Otto Wigand, 1844, or [29: 1:1-139]. Citations of Grassmann's 1844 *Ausdehnungslehere* are taken from Lloyd C. Kannenberg's translation, New York: Open Court, 1994.

[28] Hermann Grassmann, *Die Ausdehnungslehere, vollstánding und in strenger Form*, Berlin: Enslin, 1862, or [29, 2:1-383].

[29] Hermann Grassmann, *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, ed. F. Engel, 3 vols., Leipzig Teubner, 1894-1911; reprint ed., New York/London: Johnson Repreint Corporation, 1972.

[30] Giuseppe Peano, *Calcolo Geometrico secundo l'Ausdehnungslehere de H. Grassmann e precedutto dalle operazione della logica deduttiva*, Turin: Fratelli Bocca Editori, 1888.

[31] Cesare Burali-Forti, *Introducción à la géométrie différentielle selon la méthode de H. Grassmann*, Paris: Gauthier-Villars, 1897.

[32] Cesare Burali-Forte and Roberto Marcolongo, *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica matematica*, Turin: G. B. Pretrini de Giovani Gallazio, 1909.

[33] Hermann Weyl, *Raum-Zeit-Materie*, Berlin: Springer, 1918. Citations are taken from dthe English trans., *Space-Time-Matter*, trans. L. Brose, New York: Dover, 1952.

[34] Gustav Peter Leujene Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig: Vieweg, 1863; reedited with supplements by R. Dedekind in 1871 (ed.1), 1879 (ed.2), 1893 (ed.4); reprint of the 4th ed., New York: Chesea, 1968.

[35] Ernest Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **137** (1910), 167-309; reprint ed., ed. H. Hasse and R. Baer, Berlin/Leipzig: De Gruyter, 1930.

[36] Bartel L. van der Waerden, Moderne Algebra, 2 vols., Berlin: Springer-Verlag, 1930-1931.

[37] Otto Schreier and Emanuel Sperner, Einführung in der analytische Geometrie und Algebra (in two parts), Hamburguer mathematische Einzelschriften **10** (1931) and **19** (1935); Introduction to Moderm Algebra and Matrix Theory, trans. Martin Davis and Melvin Hausner, New York: Chelsea, 1951.

[38] Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris Firmin Didot Père et Fils, 1822; reprint ed., Paris: J. Gabay, 1988.

[39] Fréderic Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, *Acta Mathematica* **41** (1918), 71-98, or [40, 2:1053-1080]. [Trans. Of the original published en 1916 in Hungarian].

[40] Fréderic Riesz, *Œuvres complètes*, 2 vols., Paris: Gauthier-Villars, 1960.

[41] Stefan Banach, *Œuvres*, 2 vols., Warsaw : Editions scientifiques de Pologne, 1967/1979.

[42] Stefan Banach, *Théorie des opérateurs linéaires*, Warsaw : Funduszu Kultury Narodowej, 1932, or [41, 2 :19-217].

[43] Garrett Birkhoff and Saunders MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, New York: MacMillan Co., 1941.

[44] Paul R. Halmos, *Finite Dimensional Vector Spaces*, Pricenton: Pricenton Univ. Press, 1942.

[45] Nicolas Bourbaki, *Eléments de mathématique*, livre II, chap 2, *Algèbre linéaire*, Paris: Hermann, 1947.

Capítulo VIII
Apéndices

VIII.1 Enunciado de las preguntas propuestas a alumnos de la FaCENA

PREGUNTA A
Establecer la verdad o falsedad de la siguiente afirmación, justificando la respuesta:
El vector (-3,2) es combinación lineal de los vectores (0,1) y (3,2)

PREGUNTA B
Establecer la verdad o falsedad de la siguiente afirmación, justificando la respuesta:
Los vectores (3,-2) y (-3/2,1) son linealmente independientes

VIII.2 Enunciado del problema propuesto a Profesores de Nivel Medio

Un espía sabe que en cierto aeropuerto secreto hay estacionados 60 aviones, entre cazas y bombarderos. Hay un tipo de cohete que es transportado por ambas clases de aviones; el caza porta seis de esos cohetes y el bombardero sólo dos. El agente sabe que con 250 cohetes quedaron pertrechados por completo todos los aviones que se hallan en el aeropuerto. Además, se entera que en esa base el número de aviones caza es el doble del número de bombarderos.

a) Calcule el número de aviones caza y bombarderos que hay en el aeropuerto o bien demuestre que la información del agente debe ser incorrecta, ya que es inconsistente.

b) Si la información resultó inconsistente, modifíquela de manera tal que:

i) pueda determinarse con certeza el número de aviones de cada tipo;

ii) sea imposible afirmar con certeza el número de aviones caza y bombardero pues solamente se obtienen algunas cantidades posibles de aviones de cada tipo que pudieran estar estacionados en el aeropuerto.

VIII.3 Guión de la entrevista realizada Profesores de la UNNE

Apellido y Nombres								
Facultad ó Instituto								
Cargo y Dedicación								
Asignatura								
Carrera/s para las que se imparte								
Matrícula Estudiantil de su Grupo								
Régimen de Cursado y Ubicación Curr	Anual	Cuatrimestral	1ro	2do	Trimestral	1ro	2do	3ro
Tipo de Clases que Imparte	Teóricas		Prácticas			Teór-Prác		
Modalidad de la clases	Expositivas		Trabajo en grupos			Mixta		
Carga Horaria Semanal Presencial	Teórica:		Práctica:			Teór-Prác:		

1	Indique los tópicos que se tratan antes y después del tema "Espacios Vectoriales"					
2	Indique, en orden, los ítems que integran el tema "Espacios Vectoriales"					
3	¿Cree UD. que son importantes, en la formación matemática de sus alumnos, las ideas de Dependencia e Independencia lineal de Vectores? ¿Por qué?					
4	¿Qué estrategias de enseñanza utiliza para transmitir las nociones de Combinación, Dependencia e Independencia lineal? Brinde ejemplos, metáforas, ejercicios, etc...					
5	¿Qué porcentaje aproximado de alumnos de su grupo considera UD. que logran apropiarse de los conceptos de Dependencia e Independencia lineal?					
6	¿Cuántas horas de clase le dedica al desarrollo del tema "Espacios Vectoriales"?		¿Cuántas horas de clase le dedica a las nociones de "Dependencia e Independencia lineal de vectores"?		¿Considera UD. que son suficientes? ¿Por qué?	
7	A su criterio ¿cuáles son las dificultades que encuentran sus alumnos en la construcción de las nociones de Dependencia e Independencia lineal de vectores?					
8	Describa todo lo que UD. puede afirmar a partir de conocer que un conjunto de *n* vectores es linealmente dependiente.					

VIII.4 Guión de la entrevista realizada a alumnos de la FaCENA

Referencias de las abreviaturas utilizadas en las consignas:

CL: Combinación Lineal
CLN: Combinación Lineal Nula
CLNT: Combinación Lineal Nula Trivial
CLNNT: Combinación Lineal Nula no Trivial
LD: Linealmente Dependiente
LI: Linealmente Independiente
V: Espacio Vectorial

Parte 1

Escriba 4 conjuntos de 3 vectores de R^3 en los cuales exactamente ninguno, 1, 2 y 3 vectores, respectivamente, sean CL de los demás.

Parte 2

Investigue si son verdaderas o falsas las siguientes implicaciones:

a) Si en un conjunto de vectores, uno de ellos no es CL de otros, entonces el conjunto es LI.
b) Si existe una CLN de todos los vectores de un conjunto, entonces ese conjunto es LD.
c) Si existe la CLNT de todos los vectores de un conjunto, entonces ese conjunto es LI.
d) Si existe una CLNNT de todos los vectores de un conjunto, entonces ese conjunto es LI.
e) Si un conjunto de vectores es LD, entonces uno de sus vectores es múltiplo de otro.
f) Si un conjunto de vectores es LI, entonces ninguno de sus vectores es múltiplo de otro.
g) Si un conjunto de vectores es LI, entonces todo subconjunto del mismo, es LI.
h) Si un conjunto de vectores es LD, entonces todo subconjunto del mismo, es LD.
i) Si a un conjunto de vectores LI se le agrega otro vector, entonces el nuevo conjunto es LI.
j) Si de un conjunto de vectores LI se quita un vector, entonces el nuevo conjunto es LI.
k) Si de un conjunto de vectores LD se quita el único vector que es CL de los restantes, el nuevo conjunto es LI.
l) Si a un conjunto de vectores LD se le agrega un vector que no es CL de aquellos, el nuevo conjunto es LI.
m) Si un subconjunto de V cuya dimensión es 3, tiene 4 vectores, entonces ese conjunto es LD.
n) Si un subconjunto de V cuya dimensión es 3, tiene 3 vectores, entonces ese conjunto es LI.

VIII.5 Trascripción de la entrevista realizada a alumnos de FaCENA

Alumnos: A, B, C, D, E, F
Entrevistador: N

1. **N** Yo traje para charlar con ustedes algunas tareas para pensar y resolver. No sólo me interesa saber cómo la resuelven, sino también, por qué la resuelven de esa manera. Por lo tanto, después de ver lo que hacen, me gustaría charlar con ustedes justamente para analizar qué los condujo a resolver de ese modo la situación. Les voy a dar una hoja a cada uno, donde están escritas las tareas, pero además la transcribí en este cartel bien grande para que la podamos ver todos. Como pueden ver, la primera dice: "Escriba 4 conjuntos de 3 vectores de R^3 en los cuales exactamente ninguno, 1, 2 o 3 vectores respectivamente, sean CL de los demás." ¿Se entiende?... Es decir, que lo que se pide son cuatro conjuntos que tienen características especiales que tienen que ver con cuántos vectores son combinación de los demás. Me gustarían que contesten atrás de la hoja, pero también que charlemos un ratito al respecto.
[una de las estudiantes se apresura y sin mencionar a qué parte de la tarea se está refiriendo, interviene]
2. **E** Tienen que ser concurrentes.
3. **N** Me está surgiendo la duda respecto a qué entienden por concurrentes .... por vectores concurrentes, veo que usan mucho el término, pero a lo mejor no estamos hablando de lo mismo.
4. **E** Cuando no están consecutivos ... cuando no son paralelos ...
5. **N** Por lo que yo recuerdo ... bueno, esos términos quizá no se definen en este tema de los espacios vectoriales pero, rectas concurrentes son rectas que se cortan en un punto ¿le están dando ese sentido?
6. **E** ¿Puedo escribir acá? [muestra la hoja que le proporcionamos]
7. **N** Si ¡como no! O si no, mejor escribilo por favor en el pizarrón así podemos ver todos qué entendés por vectores concurrentes.
[dibuja tres vectores en el plano que tienen en común sus orígenes]
8. **N** Bueno ¿cuáles serían los vectores concurrentes para vos ahí?
9. **E** Estos serían los concurrentes [señala los vectores de arriba y del medio] éste con éste [señala nuevamente esos vectores] y éste con éste [señala los vectores del medio y de abajo].
10. **D** No, para mi éste es concurrente con éste [señala los vectores de los extremos] y el otro sería la suma.
11. **E** Estos serían concurrentes a este otro [señala primero los vectores de los extremos y luego el del medio].
12. **N** ¡Ah!... esa es la idea de concurrencia que tienen…
13. **D** No, este es concurrente con este, y ahí la suma de estos es el otro…
14. **E** Claro y después la suma de estos daría este digamos… son dependientes …
15. **D** El otro, el tercero…
16. **B** [Parece querer decir algo pero no lo hace]
17. **N** ¿Esa es la misma idea que tenés vos? [dirigiéndose a **B** que no contesta]
18. **A** La suma entre los dos, pero cada uno de los vectores.
19. **E** La suma entre éste y éste daría éste [señalando primero a los de los extremos y luego al central]
20. **N** ¡Ahá! Ahí intentaste aplicar la regla del paralelogramo que no salió muy bien pero…
21. **A** A mi me confunde porque puede ser que cada vector esté multiplicado por una constante también, porque ella los alargó después ....
22. **N** Esa es la idea que parece querer transmitir **E** cuando estiró los vectores … la presencia de escalares ¿no es cierto? eso a todos pareciera quedarles claro. Quiere decir que la idea de concurrencia es la misma que yo dije recién de las rectas… la idea es que tienen un único punto en común, en este caso concurren los tres en el origen... entonces estaba bien, pero no sé si es la misma idea que tenía **B**…

23. **B** Si
24. **N** ¿Era esa?
25. **B** Sí
26. **N** ¿Porqué insisto con esta pregunta? porque en un momento dudé si no estaban hablando de vectores colineales …… ¿es lo mismo? ……. ¿Qué entienden por vectores colineales ustedes?
27. **C** Que se encuentran en la misma recta.
28. **N** Que están sobre la misma recta ¡Ahá! .... esos son vectores colineales y a veces hablan de paralelos……bien .... pero ¿que decías vos [dirigiéndose a **E**] en relación con esto porque dijiste algo de la dependencia …
29. **E** Claro porque yo se que en R^2, por ejemplo, cuando son paralelos son linealmente....., uno depende del otro ….
30. **N** ¡Ahá!.
31. **E** Y cuando son concurrentes, cuando son dos vectores concurrentes, ese es el único que es independiente, ahora cuando son 3 vectores si son dependientes.
32. **N** ¿Entienden lo que quiere decir ella? ... ¡si le pusiéramos letras! … Ayudanos poniéndole letras, así podemos referirnos a ellos, ponele letras a los que llamaste concurrentes y letra al que supuestamente es la suma.
33. **E** Este sería el vector u, este v, y este sería la suma, w. Entonces sería u+v=w.
34. **N** Lo que ella dijo …. [C interrumpe]
35. **C** Creo que lo que quiso decir es que si no ocupan la misma recta, entonces son LI, es decir u es LI respecto a v, pero w es LD respecto a u y a v.
36. **N** ¡Ahá!... hablando de 'conjunto LD' ¿como podríamos expresar eso? [Silencio]
37. **N** Ahí ahora hay tres vectores... En general hacemos abuso del lenguaje y decimos "los vectores fulanito de tal son LD" pero la definición habla de "el conjunto de vectores fulanito de tal es LD si y sólo si pasa tal cosa …" ¿no es cierto? En este caso que ella está mostrando ¿cómo lo deberíamos decir?
38. **D** Que la componente va a ser proporcional
39. **E** Eso es cuando son paralelos
40. **N** ¡Ahá! pero acá, en esta configuración ¿quiénes serían LD?
41. **E** u y v....
42. **D** LD es cuando son paralelos.
43. **N** ¿Y acá hay algún par de vectores paralelos?
44. **E** No
45. **N** Sin embargo ella habló de una DL.
46. **D** Pero... w porque, digamos la suma y la multiplicación por un escalar da w
47. **E** No, u y v son independientes, porque éste [señala a w] depende de los dos.
48. **N** ¡Ahá! ella dice, afirma con total certeza que u y v son independientes.
49. **D** Sí
50. **N** El que estropea, digamos, la independencia es la aparición de w, porque acá **D** dice que de alguna manera los vectores u y v están multiplicados por escalares y la suma de esos productos da w.
51. **A** Claro y esa es la CL
52. **N** Eso es una combinación …
53. **A** Porque w se puede escribir como una CL de u y v.
54. **N** Exactamente, si yo pienso que u está multiplicado por un uno ¿no es cierto? es como que tanto u como v se los puede pensar como multiplicados por uno, aunque ella dibujó unos vectores más pequeños que parecen indicar que estuvieron multiplicados por otros escalares, pero pensemos que no están, es decir, ahí lo que está diciendo es que w es una vez u mas una vez v, y los escalares están igualmente presentes y de alguna manera aparece la CL, pero.... si u y v son LI ¿quiénes son los dependientes?
55. **C** Los que se pueden escribir como combinación lineal de u y v.

56. **N** Y en términos de conjuntos no lo podemos expresar, capaz no es muy importante lo que estoy diciendo...
57. **C** Y bueno eso, el conjunto de vectores que se puede escribir como CL de u y v, es decir, tal que existan los escalares que multiplicados a u y a v, y sumados luego de la multiplicación … digamos … eh … den como resultado otro vector.
58. **N** Claro, pero en este caso que tenemos en la pizarra, pareciera que solamente w es combinación de los demás, quiere decir que la respuesta a mi pregunta ¿quiénes son los que son LD?....
59. **C** Pero...
60. **N** Pareciera que la respuesta es decir w.
61. **C** No precisamente w, porque puede ser que... o sea … sobre la misma recta exista un vector mas largo que ya no va a ser w.
62. **N** Claro, no, por supuesto, me puedo inventar cualquier otro vector sobre la misma recta donde está w pero ¿no pensando en otro vector sino en estos tres?
63. **C** Si
64. **N** La DL ¿a quién se la adjudicamos?
65. **C** A w.
66. **N** ¿Y entonces ....?
67. **C** O sea w es independiente pero a causa de que u y v se pueden escribir como CL digamos …
68. **A** Pero ahí yo no... no me está cerrando el concepto pero... a mi, por lo que estudié de esto, algo me dice que u, w, y v, los tres son CL, o sea uno puede ser CL de los otros dos.
69. **N** Pero como escribirías eso para comunicarlo [silencio]
70. **N** Esa afirmación ...
71. **A** Cualquiera de los tres vectores puede ser escrito como combinación lineal de los otros dos.
72. **N** Y respecto a la dependencia y no a la CL ¿cómo lo dirías? lo acabás de decir … faltaría escribirlo ... hace un momento lo dijiste.... ¿qué dijo él? ¿escucharon lo que dijo?
73. **E** Si, que los tres siguen siendo CL ….
74. **N** ¿Cómo se entiende eso? no me refiero a que cada uno es una CL de los otros, porque eso es una cosa interesante que da la impresión que pocas veces se trabaja, pero así como escribo w igual a u más v, puedo escribir a u y aparece una CL y puedo despejar v, y aparece también la otra, van a aparecer unos escalares -1 ¿no es cierto?... al trasponer, claro, pero me preocupa que no puedan …. eh … digamos que **A** se acercó mucho, tal vez tampoco sea muy importante, pero el hecho de que no lo puedan decir, también es importante ... el dijo los tres son … ¿cómo se escribe eso? para eso no hay mas que evocar de alguna manera la definición de la DL ¿cómo arranca la definición de la dependencia lineal de vectores? ¿alguien la reacuerda?
75. **C** "Sea V un espacio vectorial, se dice que un conjunto de vectores ....
76. **N** Estás hablando de un conjunto de vectores … es decir quedó en el aire pero, él [**A**] dijo en un momento "los tres..." ¿pero te animas a escribir eso? ¿cómo se escribe eso?
77. **A** Relacionando …
78. **N** Dale, dale, escribí …
79. **A** Los tres
80. **N** Lo que dijiste verbalmente escribilo simbólicamente ….. [toma la tiza pero se queda sentado] … [risas de todos]
81. **N** ¡Ni siquiera empezamos con uno de los ítems de la tarea!
82. **A** Relacionando lo que a mi me dice, es que si los tres se pueden escribir … el conjunto de estos tres vectores, uno se puede escribir como CL de los otros dos….
83. **N** Cada uno de ellos
84. **A** Cada uno de ellos, entonces son LD los tres.
85. **N** Sí, y ¿cómo se escribe eso? [Silencio]
86. **N** ¿Relacionado con la definición? [Silencio]
87. **A** Y… entonces si los tres son LD, uno de ellos se puede escribir como CL de los otros dos.

88. **N** Vos ves la necesidad de escribir, para poder transmitir la dependencia … insistir con que cada uno es CL de los otros, es decir, esa es la manera tuya de ver la dependencia ... es cierto que de ahí arrancamos … porque la señorita escribió w =u+v....y ahora conversando … mas bien que lo dije yo … pero yo creo que era porque todos lo estaban pensando … que podemos despejar u y v, eso es cierto. En esta situación cada uno es combinación lineal de los otros … eso esta cerrado … ahora ¿cómo se transmite la idea para poder decir que hay alguna cuestión de DL? es u? ¿es v? ¿es w? ¿son los tres? ¿son dos de ellos? ¿cómo se dice?

89. **C** Si uno se puede escribir como CL de los otros, entonces todos son LD.

90. **N** Claro y ¿cómo se escribe eso?.....[risas de todos] … así … escribiendo las palabras…

91. **N** Es muy gracioso .... digamos .... ¿no se puede escribir así? [Escribe en el pizarrón {u,v,w} es LD] … ¿No acabamos de decir que la definición de DL aludía a un conjunto? ¿no arrancaste diciendo [dirigiéndose a **C**] "un conjunto de vectores es LD sí y solo sí..."? y ¿por qué entonces en la respuesta cuesta decir que este conjunto es LD? … 'el conjunto de los tres' y en este caso es LD porque cada uno de ellos es CL de los restantes, ahora la pregunta es ¿que tiene que ver con este ejercicio? [Silencio]

92. **N** ¿Siempre sucede que todos son CL de los restantes como en este caso? La consigna esta apunta a algo más finito … en un momento no quiero ninguno, en otro momento sólo uno, en otro momento dos, y en otro tres … Quedamos que éste es un caso donde los tres son CL de los restantes … y estaríamos en la situación del último caso … aunque nos fuimos al plano y nosotros estábamos en el espacio. Bueno, con esta introducción, se animan a escribir ahora, atrás de la hoja, los conjuntos, no importa el orden.

93. **E** ¿El primero?

94. **N** En el orden que prefieran, digamos … Hay algunos que se pueden sentir más cómodos haciendo el último primero …. como está haciendo **A** [los alumnos escriben en la hoja y el entrevistador mira algunas de las producciones] [*Se retira la séptima participante*] 15 min

95. **N** [Dirigiéndose a **C** y en relación con lo que escribió] Con esta tercera componente 0 quiere decir que no se mueve en el eje z, se mueve sólo en xy …

96. **C** Es un vector del plano ....

97. **N** Es un vector del plano … Es cierto … pocas veces lo representamos así …. Pero, cambia mucho la cosa para la tarea esta …. Necesitás que aparezca ese 0.

98. **C** Lo que pasa es que yo leí en la teoría que si yo tengo … por ejemplo en R^2, el caso de IL se reduce a que el cardinal del conjunto de vectores sea igual a la dimensión de un espacio, por eso yo entonces … yo justamente le dije que son LI si están en distintas direcciones…

99. **N** Esperá… vamos a rearmar lo que dijiste porque no se si todos lo aceptan … El dijo que la IL en R^2 se reduce a tener dos vectores …

100. **C** Claro

101. **N** De alguna manera eso es lo que dijo **E** hoy …

102. **C** Y en R^3 se reduciría a tener tres vectores ... y en R^4 …

103. **N** ¿Cualesquiera?

104. **C** Si cualesquiera … creería que menos el nulo del plano …

105. **N** A ese lo quitarías …. Es el único que nos estropea la dependencia …

106. **C** Si

107. **N** Así que el nulo es el único que nos estropea la independencia …. perdón …

108. **C** Si, por eso yo le preguntaba si puedo escribir …. si hacer valer la tercera componente cero se reduciría a tener un vector en R^2, entonces yo tendría tres vectores en R^2 básicamente ….

109. **N** ¿Le pondrías cero a los tres?

110. **C** Claro, a los tres. Reduzco la tercera componente a cero, entonces tendría tres vectores en R^2.

111. **N** Y podrías usar esa propiedad que recién dijiste.

112. **C** Sería mayor el cardinal ….

113. **N** Pero tendríamos tres, no tendríamos dos …. Ese es el problema ….

114. **A** Lo que yo pienso es que si recurro al plano, de alguna forma meto el plano al espacio … no deja de ser espacio [todos asienten] no deja de moverse en el espacio si se mueve en un solo plano.

115. **N** Si, claro, lo que pasa es que también puedo considerar que es un vector que se mueve en el plano xy … Pero, respecto a lo que el decía, no deja de tener tres vectores aunque le ponga cero a la última componente …. Son tres vectores de R^3 … los podés pensar como tres vectores de R^2 del plano xy … ¿pero qué hacemos con que son tres vectores de R^3?

116. **C** Justamente por eso es que yo le había dicho que si tengo dos vectores en R^2 serían LI, pero si tengo tres, entonces el cardinal supera a la dimensión, entonces uno de ellos se va a poder escribir como CL de los otros dos.

117. **N** Jamás lo hubiera esperado … qué interesante para analizar…. Yo te soy sincera, debería pensar un poco más cuál es el esquema de razonamiento … entiendo … vos querés reducir, a partir de poner coordenadas ceros en el eje z, pensarlos todos como vectores del plano xy, pero siguen siendo tres, y según tu teoría, deberían ser LI, por lo tanto ¿qué conclusión sacarías de allí?

118. **C** Y que si …. Digamos si ….

119. **N** Digamos…. ¿A qué respondería de estos tres … cuatro ítems?

120. **C** A que a mí me resultaría más fácil escribirlos como CL ….

121. **N** ¿Pero a cuál respondería de estos ítems, al primero, al segundo ….?

122. **C** Al último …. Sí, al último …. Que los tres son CL … que los tres sean LD.

123. **N** ¿Podés pasar y escribir un conjunto de esos tres vectores para que todos estemos seguros de qué estábamos hablando

124. **E** El se refiere al último del 2 ….

125. **N** El pretende con este procedimiento contestar …. el de tres aparentemente ….

126. **C** En el caso que todos sean LD.

127. **N** ¿El de tres?

128. **C** Si con tres vectores LD [mientras escribe R^3={(2,4,0),(-2,-4,0),(1,2,0)]

129. **N** Que los tres sean CL …. es decir, el último … Esperemos que los escriba para poderlos identificar realmente.

130. **N** Independientemente de tu razonamiento, de pensar esto como vectores del plano xy, que no me parece nada malo ¿no? porque son vectores del plano xy, los tres ¿cómo podrías probar que cada uno de ellos es CL de los demás? …. ¿cada uno no? … porque estamos pretendiendo responder el último ítem.

131. **C** Escribiendo cada uno como CL … es decir … escribiendo a éste [señala el primero de los vectores] como CL de estos dos [señalando los dos últimos]

132. **N** Pero de sólo verlo ¿a vos se te ocurre cómo escribirlo? Porque a lo mejor escribiste cosas al azar, probablemente …. Aunque no parecen tan al azar [volviendo a mirar lo que escribió y dirigiéndose al resto de los estudiantes] eligió números muy particulares además …

133. **C** Son los más fáciles, por eso ….

134. **N** A ver … un momento … ¿por qué? … a su vez … ¿qué pasó? ¿tomaste múltiplos?

135. **C** Claro, son múltiplos.

136. **N** ¿Por qué tomaste múltiplos? ¿No te bastaba con que estén en el mismo plano? ¿además tenían que estar sobre …..?

137. **C** No, no me bastaba. [risa de todos]

138. **N** ¿Y los vectores ahora dónde están? ¿A ver?

139. **C** Yo no se si … o sea … si son cualquiera … las componentes digamos … se iría a …

140. **N** Si avala tu teoría …

141. **C** … seguiría teniendo la misma validez.

142. **N** Fíjense, yo pensé que el se iba a levantar e iba a escribir tres vectores cualesquiera donde la tercera componente fuera cero, pero que se iba a arriesgar a poner cualquier cosa adelante, pero el no eligió cualquier cosa, el tuvo miedo también …

143. **C** Si. No estoy tan seguro de lo otro.

144. **N** Parece que tenía miedo que le fallara su teoría.

145. **C** Si yo me baso únicamente en lo que yo leí … yo …no pienso en los números … pero todavía me da cierta incertidumbre digamos porque no … no lo comprobé …
146. **N** Tenés incerteza …
147. **N** Porque encima ahora, no sólo podemos decir que están en el plano xy, sino que podemos decir algo más de estos tres vectores … ¿que están cómo? … fíjense cómo son …
148. **C** Que son colineales [casi todos al unísono]
149. **N** Están en la misma recta. Son múltiplos…. que estemos seguros que son múltiplos … a ver …. ¿por qué decimos que son múltiplos? Por ejemplo ¿cómo puedo obtener el segundo a partir del primero?
150. **C** Multiplicando por -1.
151. **N** ¿Cómo puedo obtener el último?
152. **C** Dividiendo por 2.
153. **N** Hicimos el primero con los otros dos … Ahora tomemos el del medio, por ejemplo …. Bueno, ya dijimos cómo podemos obtener el segundo a partir del primero …. A ver ¿podemos obtener el primero a partir de los otros?
154. **C** Si, multiplicando éste [señala el tercer vector]
155. **N** ¿Necesito hacer intervenir el último?
156. **C** ¿Cómo?
157. **N** Voy a cambiar la pregunta …. ¿te animás a escribir la CL por la cual resulta el vector (2,4,0)? … (2,4,0) ¿igual a qué? [Silencio] La CL del (2,4,0). ¿Puedo decir que es CL de los demás, realmente?
158. **A** La verdad es que se puede decir que es CL de otro vector, sin que participe el tercero o el segundo.
159. **N** ¿Estaría mal decir que es CL de los restantes?
160. **A** Yo creo que no.
161. **N** ¿Estaríamos cometiendo un error? Lo que pasa es que me gustaría que esta pregunta la contesten después que logre escribir eso. Me parece que va a ser más efectiva no.
162. **E** Profe … y en R^2 … por ejemplo cuando son paralelos … son LD … y yo puedo hacer una CL, por ejemplo escribiendo un vector y poniendo … o sea … el doble de ese vector … ahí van a ser proporcionales.
163. **N** Exacto ¿hablando de dos o de tres vectores en R^2? A ver, me perdí.
164. **E** De dos vectores.
165. **N** Si, claro, pero el problema es que ahora estamos en R^3.
166. **E** Para analizar la dependencia digo.
167. **N** Si, si … Fíjense que los primeros que nombraron la cuestión de la dependencia fueron ustedes …. es decir … surgió de la tarea pero … me parece muy interesante que no la haya introducido yo que justamente es el tema central de la cuestión … pero todavía no entiendo **E** cómo usarías …. Él de alguna manera lo está usando … quiso traer lo que sabe que sucede en R^2, lo quiso traer a R^3, con un error que ahora lo vamos a tener que trabajar.
168. **D** Todos los vectores son múltiplos de otro, no son LI.
169. **N** No son LI. Exactamente … si … Lo que pasa es que aquí hay una cuestión semántica. Si vos lográs escribir el (2,4,0), después que lo escribieras, me hubiera gustado discutir algo que era la cuestión de si podemos decir que es CL de los demás, o ¿está mal dicho eso?
170. **N** ¿No podés escribir el (2,4,0) como CL? ¿No? ¿En serio?
171. **C** A simple vista no ….
172. **N** Bueno, hagámoslo entre todos. A ver … [escribiendo en el pizarrón (2,4,0)=] ¿Cómo podemos escribir (2,4,0) como CL de los demás?
173. **A** ¿De los otros dos, profesora?
174. **N** De los otros dos.
175. **E** Del (1,2,0) porque es el doble del otro y van a ser proporcionales.
176. **N** Bueno ¿cómo escribirían? Ustedes díctenme, y yo escribo. … A ver ¿cómo decís E?

177. **E** Primero el vector (1,2,0) ….
178. **N** Acá pongo (1,2,0)
179. **E** Sería así [se levanta y escribe en el pizarrón] Estos son los vectores [escribe (1,2,0), (2,4,0) y luego $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_2}=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}$ y dudando cómo seguir, escribe ld, donde se detiene]. Estos serían LD.
180. **N** El conjunto de esos dos vectores …
181. **E** Claro. Sacaría el cero [se refiere al cero de los vectores]
182. **N** ¡Había dicho de sacar el cero!
183. **A** Pero siguen manteniendo …
184. **N** ¿Siguen siendo vectores de R^3?
185. **A** A mi me parece que si. Un plano se mantiene en el espacio.
186. **N** ¿Vos no podés pensar esto mismo, pero sin quitar ese cero?
187. **E** Puede ser
188. **N** O lo que te dio miedo es el cero sobre cero. Si. [Risas de todos]
189. **E** Eso. Lo que resulta es que uno es el doble del otro [con lo que quedó escrito $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_2}=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=2$]
190. **N** Nunca pensé que íbamos a terminar en esto, pero, el cero sobre cero … uno tiembla … porque vivimos los profesores diciendo que eso es una indeterminación matemática, que etc., etc., pero fijate que lo que vos estás buscando con este procedimiento es un número que multiplicado por uno, te de el otro … en realidad eso es lo que estás buscando …Acá te das cuenta que al primero lo tengo multiplicar por dos para obtener el de abajo, que es lo que sale de estos cocientes.
191. **D** El cero sobre cero no va a importar, cualquier número lo va a hacer cero.
192. **N** Claro. También el dos sirve para el cero … dos por cero es cero. Por eso no tenemos que tener miedo de dejar ese cero ahí. De todas maneras, se supone que de aquí sale una constante que te va a servir para escribir aquello [señala la CL inconclusa del vector (2,4,0)] ¿Te animás ahora a escribir aquello?
193. **E** [Niega con la cabeza]
194. **N** ¡No puede ser! Lo descubrió de acá. Hay algo que les está impidiendo escribir.
195. **D** Yo si [Se levanta y escribe con entusiasmo (2,4,0) = 2(1,2,0) y (2,4,0) = -1(-2,-4,0)]
196. **N** El no sólo escribió a uno de ellos en función del otro, sino que también al mismo en función del tercero. Claro, lo que pasa es que **C** escribió unos vectores tan particulares que en realidad los puede conectar todos … eh … pero suponte que no hubieras escrito lo último … ¿yo puedo decir que el vector (2,4,0) es CL de los demás? ¿en plural?
197. **A** Si, si yo logro encontrar escalares que satisfacen la igualdad … si al otro vector lo multiplicamos por el escalar nulo ….
198. **N** ¿Eso está prohibido?
199. **A** No, diría que no.
200. **N** A ver, escribilo [dirigiéndose a **C** que está junto al pizarrón] … sí, allí, al final.
201. **C** ¿Acá?
202. **N** Si, ahí … aunque no lo estemos 'usando' al vector, lo podemos pensar como que está multiplicado por el escalar cero, y cumple con la definición de CL. Muchas veces se entra en conflicto con estas cuestiones … [pensamos] 'No, no es CL de los otros dos, lo es de uno solo'. No, si es de uno, también lo es del otro. Ponemos el escalar cero y listo. Bueno, vamos a ver si lo que hizo **C** está bien o no. Ese conjunto, en cuanto a la DL o IL ¿cómo lo caracterizamos?
203. **Todos** LD
204. **N** LD, no nos cabe ninguna duda …. Me llama a reflexionar que él hizo dos cosas, puso los ceros atrás para asegurarse que se los pueda pensar como vectores del plano, para que hubiera DL, pero además puso una proporcionalidad … es como que se quiso requeteasegurar. Yo ahora tengo ganas de preguntar ¿qué hubiera pasado si hubiera tomado cualquier otro, no? es decir … este otro [levantándose y escribe en el pizarrón {(1,2,0), (2,3,0),(4,5,0)}]
205. **C** Si, también.

206. **N** Ahora estás con un poco más de confianza.
207. **C** Ahora estoy seguro.
208. **N** Ya ahora acá, no se si son tan evidentes las CL. ¿Qué deberíamos hacer?
209. **C** Yo represento en un eje cartesiano y ahí … digamos … yo creo que sí, porque voy a poder escribir los tres y seguramente uno lo voy a cortar … si yo dibujo la regla del paralelogramo, seguro va a haber una CL , seguro, seguro ….
210. **N** Lo que pasa es que estoy viendo una integración muy clara de propiedades que no se si están teniendo en cuenta. Porque vos estás usando algo muy fuerte que fue, pretender pensar estos vectores, que no hay ningún impedimento, pensarlos como vectores de un plano y además dijiste algo … yo estoy tratando de sintetizar lo que dijiste … además dijiste que si son tres vectores en el plano, que es un espacio de dimensión dos, no pueden ser LI. **E** está usando algo muy fuerte que no se si maneja el resto. Por ejemplo … a ver … ¿cuántos vectores tiene una base en R^2?
211. **A** Dos.
212. **N** Es decir, eso lo tienen todos claro … si me aparece un conjunto con tres vectores, uno de ellos es CL de los restantes, y eso es suficiente para decir que ese conjunto ¿cómo es?
213. **Todos**LD
214. **N** De todas maneras, si nos quedara la duda, o que haya alguien que no se convenza con esto que estamos diciendo… Es muy probable que alguno de ustedes no esté muy convencido que suceda eso ¿qué podríamos hacer para convencerse que ese conjunto es LD? ¿Qué es lo que normalmente hacemos cuando …?
215. **B** Igualar al vector nulo y resolver el sistema.
216. **E** Eliminación de Gauss
217. **N** ¿En el contexto de las matrices?
218. **E** [asiente con la cabeza] Sería hacer el determinante
219. **N** De alguna manera se vincula con el determinante. Buena variante …. Haría el determinante … a ver … ¿qué podría pasar con el determinante de esa matriz?
220. **E** De acuerdo al rango …
221. **N** ¡Qué interesante no! …. Armaría una matriz con los vectores …. ¿cómo los pongo? ¿Están entendiendo lo que ella está diciendo? Ella se fue de la DL de los vectores de R^3 al determinante ¿vía qué? ¿qué está usando?
222. **E** De acuerdo al resultado voy a saber si son dependientes o no …
223. **A** Claro, pero como en este caso los tres tienen la última componente cero … y si una fila o columna de una matriz….. tiene una columna nula, el determinante va a ser cero.
224. **N** Claro. Lo que pasa es que estamos hablando de una matriz que no la estamos viendo. ¿Todos la están imaginando? ¿Vos también? [Dirigiéndose a **F**]. Podemos escribirla.
225. **C** Pero, aparte también el rango sería menor que *n*, o sea, el rango ….
226. **N** ¿Acá *n* cuánto es?
227. **C** Tres. En vez de tener el rango fila, tomo el rango columna, y como es todo cero, elimino. Y entonces … sería como obtener el vector nulo.
228. **N** Fíjense, hemos saltado de la dimensión, a la base, al rango, al determinante. ¡Cómo están integrados tantos temas! Bien, este es el determinante al que vos te referías, no es cierto [mostrando lo que escribió A en el pizarrón, que es: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$]. Bien. ¿Qué esperabas sacar de acá? [dirigiéndose a **E**] porque vos dijiste que según el resultado ….
229. **E** Si el determinante fuera distinto de cero, sería LI.
230. **N** Claro, y este determinante ¿cómo es?
231. **E** Tengo que hacer …. Tengo que desarrollar por los elementos de una fila.
232. **N** ¿Tiene que hacer algo? [dirigiéndose al resto] [Algunos niegan con la cabeza]
233. **A** Hay que aplicar propiedades.

234. **N** No tiene que hacer nada. ¿Por qué no tiene que hacer nada? Está dominando mejor la teoría que la práctica.
235. **F** Porque hay una columna nula
236. **N** Claro, hay una columna nula y hay una propiedad que nos dice que es nulo. Entonces, fíjense, que en vez de plantear una CLN, etc., etc., basta con hallar el determinante pero, ¿por qué acá tenemos la posibilidad de estudiar el determinante? ¿Siempre podemos armar un determinante a partir de un conjunto de vectores de R^n? [silencio] Piénsenlo ¿Siempre hay presente una matriz y encima cuadrada?
237. **C** Cuadrada, cuadrada, …., pero si no fuera cuadrada ….
238. **N** Porque si yo le quito un vector a este conjunto, nos queda una matriz de 2x3, y el determinante …. Quiere decir que acá se daba la posibilidad y ustedes la encontraron. Bueno, realmente E fue la que introdujo la idea de usar el determinante. En este caso es muy útil. Ni siquiera necesitamos verla armada, vemos esos ceros atrás, nos imaginamos la columna, el determinante es cero. Quiere decir que no hacía falta ser tan meticuloso, poniendo componentes proporcionales. A él [señalando a **C**], el miedo le hizo poner esos vectores, pero por supuesto que no estropeó el conjunto. ¿No es cierto? Sigue siendo un conjunto LD, lo que pasa es que encima son vectores de la misma recta, que además están en el espacio.
239. **A** Si, eso nos da la libertad de escribir otros vectores …
240. **N** Ahora, él [refiriéndose a **C**] en un momento se paró y dijo algo de que el rango era menor que n. En este momento, n es 3, el rango es menor que 3 en esta matriz de la que estamos hablando. Pero ¿eso es suficiente para hablar de qué? ¿me permite decir algo sobre la DL también?
241. **C** No.
242. **E** No, eso es para determinar si es indeterminado o no …
243. **N** El rango lo asocian sólo con los sistemas, con los sistemas de ecuaciones …
244. E Para la clasificación …
245. **N** Es cierto que están muy asociados pero ¿puedo hablar de rango sin sistema, o no? ¿Puedo hablar del rango de una matriz sin que existan los sistemas?
246. **Todos** Si
247. **N** De hecho, el concepto se define en las matrices y después se los traslada a los sistemas. Pero, mi pregunta tal vez no esté clara … El hecho de que el rango sea menor que tres ¿habla de DL también? [Silencio]
248. **C** Si … porque va a haber una fila nula … Si, porque de alguna manera habla del cardinal. Por ejemplo, si el rango es dos, entonces estoy hablando del cardinal de ese conjunto …
249. **N** Que es dos, está por verse … puede no ser dos. A ver, volvamos al conjunto propuesto por **C**.
250. **C** Si, puede ser, pero tomemos el caso de que haya uno que podamos eliminar, entonces ya de por sí, va ser menor a n. Seguro que no va ser n.
251. **N** Es suficiente para decir que no es tres.
252. **C** Si. Entonces el cardinal ya es menor.
253. **N** Si, el rango es menor, y eso te da a vos la idea de la presencia de una DL del conjunto de esos tres vectores. No … me quedé pensando … y estoy tentada de hacer una pregunta, pero yo soy consciente de que no se trabaja mucho el concepto. El conjunto de vectores que vos fabricaste [dirigiéndose a **C**] terminaron siendo vectores de una recta … ¿cuál es la dimensión del espacio vectorial que generan? [silencio] Esos vectores generan un espacio o subespacio, como quieran llamarlo ¿cuál es la dimensión de ese espacio? … Y tiene que ver con, cuando yo te interrumpí, y dije, hay que ver si el rango es dos. Porque si hacemos la eliminación gaussiana que recién proponía **E** ¿ustedes saben lo que va a pasar? ¿ustedes se imaginan qué es lo que va a suceder? Ah, yo estoy hablando de aquella, de la primera matriz [y escribe en el pizarrón $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$] Si, esta, porque este otro conjunto lo escribí yo. Tal vez no les resulte muy fácil ver pero, por todo lo que hablamos respecto a que cada uno es múltiplo del otro. Es bastante fácil pensar qué va a suceder cuando pretendamos hacer la triangulación.

254. **D** Es uno.
255. **A** Se va a anular todo.
256. **N** ¿Todo?
257. **E** O podría hacer Sarrus, porque es de 3x3 …
258. **N** Claro, pero el determinante ya lo conocemos y Sarrus nos va a arrojar el determinante.
259. **C** Como eliminamos una por la columna de ceros, y después sumamos las otros dos, es fácil ver que es dos, mirando las columnas que es más fácil que mirar las filas.
260. **N** El rango de esta matriz es uno, es como dijo **D**. Pero lo que yo me pregunto es ¿necesitamos hacerlo para saber lo que va a pasar con esta matriz?
261. **D** No, porque son múltiplos.
262. **E** Aparte, al ver que uno es el opuesto del otro ….
263. **N** Ustedes se mueven en el contexto aritmético pero ¿qué dijimos al principio qué sucedía con estos vectores?
264. **B** Que están sobre una recta.
265. **N** Eso, están sobre una recta y ¿cuál es la dimensión del espacio R?
266. **B** Uno.
267. **N** Quiere decir que en realidad no necesitamos hacer nada. Bueno, en algún momento pregunté sobre si necesitábamos hacer algo, pero cuando pregunté cuál es la dimensión del espacio que generan esos tres vectores …. es un espacio de dimensión uno, pero proviene de pensar que al final dijimos que eran vectores de una recta. Yo les digo que la conversación está muy interesante, pero ustedes todavía no me contestan ni la primera tarea. A ver, vamos a redondear ¿contestamos alguna? Por lo menos entre todos, con esta presentación que hicimos acá [señala los conjuntos del pizarrón], que derivó en muchas otras cosas muy interesantes, porque ustedes vieron que está conectado con todo. ¿Estamos convencidos que contestamos alguna de ellas?
268. **E** Si
269. **N** ¿Cuál?
270. **B** La tercera.
271. **C** La cuarta.
272. **N** La cuarta, la que tiene tres vectores donde cada uno es CL de los restantes. Porque no lo vamos a escribir, pero es cierto que cada uno [señalando el conjunto en cuestión] se lo puede escribir como CL de los demás. Van a aparecer números racionales, -1/2 … negativos… Entonces, tomemos ese conjunto como la respuesta de C al punto cuatro. Bien. Avancemos con los otros tres, a ver si podemos contestar. Si les pido un conjunto de tres vectores donde dos, y sólo dos sean CL de los restantes ¿qué harían? … o si prefieren con uno, o cero ….
273. **D** Yo escribiría un vector múltiplo de otro, y el tercero, todos números primos 5, 7 y 3, para que no sean divisibles por los dos.
274. **N** ¿Pero coprimos en la misma terna? 3, 5, 7 ¿eso te va a servir?
275. **D** Claro, yo estoy pensando, por ejemplo 1, 2, 3 el otro 2, 4, 6, para que sean CL, y el último se puede poner 5,7 y 1.
276. **N** 5, 7 y 1 son coprimos entre sí … lo que me quedé pensando es si eso es eficaz. Haceme un favor, escribí allá ese conjunto que acabás de decir para que lo podamos ver todos. Él, con esto quiere responder a la situación donde sólo dos son CL. [**D** se levanta a escribir en pizarrón]
277. **C** Lo que yo no entiendo es … como que uno sea CL … ese me está resultando … ¿que sea CL de cuál digamos? [**A** asiente con la cabeza como coincidiendo en la problemática]
278. **N** Si, probablemente éste sea el que más les cueste. Con uno sólo. A ver ¿porqué te cuesta? El de uno, es interesante, analizar esto. ¿Por qué, para que haya uno y sólo uno está costando? … a ver … [Mientras **D** escribe en el pizarrón {(1,2,3),(2,4,6),(5,7,1)}]
279. **B** Hay que hacer operaciones lineales ….
280. **N** ¿Y?
281. **C** Claro, por eso, si es uno sólo …
282. **N** Si, quiero uno sólo.

283. **C** Aunque podría formarse otro conjunto que sea CL ….
284. **N** No, no, esa no es la idea de la tarea …eh … la de formar otro, no … ¿Por qué decís que es un impedimento?
285. **C** Por eso que dijo él [señala a **B**]. Porque si yo digo CL me imagino que tiene que ser CL de otro, y si es de otro, entonces ese otro, es a su vez CL del primero.
286. **N** Acá vamos a descubrir … no se si las chicas están siguiendo la conversación… la existencia de que haya uno y sólo uno, se tropieza con otra idea, que es correcta, que cuando existe que uno es CL de otro, la CL es mutua, lo único que va a cambiar, es el escalar. ¿Eso lo tienen claro? La dependencia es mutua, salvo un caso, que es el yo estoy buscando que digan.
287. **C** Tal vez sea CL de sí mismo.
288. **B** O CL de la base donde se encuentren …
289. **N** Mirá, lo hicimos escribir [señala el conjunto que escribió **D** en el pizarrón] pero lo vamos a dejar en suspenso, porque surgió esta otra conversación. Ahora vamos a trabajar con ese. Pero a él [señala a **C**] le preocupa la búsqueda del conjunto con uno y sólo uno, porque es como que dice que siempre viene uno y su pariente. Lo voy a traducir [dirigiéndose a **C**] ¿Ustedes lo sienten así? [dirigiéndose a las muchachas] Me parece que E, no está de acuerdo.
290. **E** No lo veo.
291. **N** ¿No lo ves que vienen de a dos? Digamos, si el vector u es CL de v ¿vos no sentís que v es CL de u, que solamente hay que ajustar el escalar?
292. **E** No, no lo veo.
293. **N** ¿Quién se lo podría contar? ¿Pueden aclarar eso?
294. **C** La operación inversa … se obtiene el vector segundo a partir del primero.
295. **N** Claro, si allí … [señalando el conjunto {(2,4,0),(-2,-4,0),(1,2,0)}] al segundo, lo puedo escribir como el primero por -2, al primero, lo puedo escribir como el segundo por -1/2, sería ¿o no? ¿No te parece que es así?
296. **B** Por un pasaje de términos también.
297. **N** Claro…. Ni siquiera tenemos que esforzarnos haciendo un cálculo mental, sino que podemos escribirlo …, pero no todos los alumnos llegan a ese concepto. Ahora, bueno, todos parece que vienen en pareja, pero si yo pregunté, es porque parece que hay una respuesta. ¿Cuál es? Hay que buscar un caso donde uno sólo sea CL.
298. **A** No estoy seguro, pero ¿si se relaciona con los vectores unitarios?
299. **N** A ver como sería … los vectores unitarios ¿te referís a las bases canónicas?
300. **A** Claro.
301. **N** El (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) ¿y qué haríamos con eso? ¿a ver?
302. **A** Y … podría ser que un vector sea CL de esos vectores …
303. **N** Y entonces quizá … ¿no se los podría escribir como CL del otro? ¿por qué habría una excepción? Habría que jugar un rato no, pero teóricamente no le encuentro … no se los demás. El hecho de que justo sea un vector canónico, un vector de la base de R^3 …
304. **C** Puede ser que un vector …. Si yo incluyo el vector nulo …. Puede que lo multiplique … por ejemplo, si yo tengo dos vectores, y un vector nulo, y yo multiplico un vector , puedo igualar a cero …
305. **N** Perdón, dos vectores ¿cómo?, porque acordate que no quiero que haya otra CL.
306. **C** Si.
307. **N** Algo que vamos a tener que mirar atentamente. [Silencio] Él está redondeando una idea, vamos, a dejar que la redondee. ¿Algún otro tiene otra idea de cómo lograr que haya uno y sólo uno? Nos fuimos de lo tuyo [señalando a E y al pizarrón]… [silencio]
308. **A** No se, a mi se me ocurre otra cosa pero…
309. **N** ¿A ver?
310. **A** Que los tres vectores tengan las mismas componentes, que sean iguales.
311. **N** mmmmm …. ¿Qué tiene in mente? ¿Eso iría contra qué? Porque escribir por ejemplo, entre llaves, el vector (2,3,0), (2,3,0), (2,3,0).

312. **D** Tendría uno sólo.
313. **N** ¿Es lícito? No me preocuparía que fuera contra la independencia porque lo que acá va a surgir es un conjunto LI pero ¿va contra qué?
314. **C** La reflexividad ¿puede ser? [Risas de todos]
315. **C** En la parte de funciones, había un caso, donde por ejemplo había dentro de un conjunto … había dos vectores iguales, entonces el conjunto se reducía a ese solo vector.
316. **N** La verdad que … eh … otra cosa que jamás pensé que iba a surgir. En un momento se deduce una propiedad …cuando se habla de … digamos, propiedades que surgen de las definiciones de CL, base, dimensión, en un momento hay una propiedad que dice, 'si dos vectores son iguales, entonces el conjunto es LD'. De allí, ustedes pueden agarrarse fuertemente con que realmente hay conjuntos donde hay vectores iguales, pero esa propiedad aparece en un contexto teórico ¿qué significaría tener esto aquí? A ver … por ejemplo, si yo les digo a ustedes [escribe en el pizarrón {(2,3,1), (2,3,1), (2,3,1)}] Bueno, de alguna manera lo dijo recién **C**. Esto ¿está bien escrito en la teoría de conjuntos? Pensando en la teoría de conjuntos [silencio] Tiene que ver con lo que acabás de decir [dirigiéndose a **C**]
317. **C** Si, los tres se reducen a uno.
318. **N** En un conjunto, no se repiten los elementos. No puedo escribir un conjunto que diga {a,a,a}, es una norma. Por eso habría que aclarar, ordenar lo que decimos, porque decimos mal … Esto [señalando el conjunto recientemente escrito] … esto, en realidad, es este conjunto [escribe {(2,3,1)}]. Pero, pensando en la teoría de conjuntos nomás … una regla que dice que no se repiten los elementos. Quiere decir que esta idea en realidad no responde a la tarea porque tengo que escribir un conjunto con tres vectores. A ver … otra idea …. [aclara algo a **F** que está resolviendo en la hoja]
319. **C** Puede ser que tenga un conjunto de vectores (1,0,0), (0,1,0), y el vector nulo … y yo pueda … si
320. **N** Expresá lo que pensaste ¿a ver?
321. **C** O sea, lo que yo no se cómo … de alguna forma tenga el vector nulo, y entonces, uno de ellos puedo escribir como CL del vector nulo, pero al vector nulo no lo puedo escribir como CL del otro porque multiplicando cualquier escalar por el vector nulo voy a obtener cero y sería distinto del vector original, digamos. No se si se entiende.
322. **N** Yo creo entenderte, pero también creo que hay algo que no anda bien ahí. Pero me parece que vale la pena, porque a lo mejor, estás queriendo hacer en el aire, y sin escribir, estás confundiendo alguna cosa. Vos dijiste, no puedo escribir, a lo mejor podés escribir. El propuso, algo en lo que andaba también cerca **A**, que quería agarrar algunos vectores de la base canónica. Yo quisiera que quede claro que no es indispensable la base canónica para asegurarse que esos dos otros sean independientes, podría agarrar un múltiplo de los vectores canónicos, por ejemplo, en lugar de (1,0,0) podría ser (3,0,0), u otros dos … Eso me gustaría que quede claro que no es indispensable agarrar los vectores de la base canónica, lo que pasa es que nos queremos asegurar, que no sean CL, entonces esa es una manera de estar seguros. Vamos a escribir lo que vos decís para ver si realmente nos lleva a algo. ¿Escucharon lo que dijo? El quiere usar … ¿a ver si entendí bien? … Vení, escribí vos …. Dos vectores de la base canónica, y el tercero … a ver si es cierto …
323. **C** [Escribe en el pizarrón el conjunto {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,0)]
324. **N** Ahí está … a ver ¿qué crítica le podemos hacer a este conjunto? Si es que la tiene. A lo mejor no tiene ninguna crítica. Piensen bien. Quiero que uno sea … ¿Quién se anima? ¿Cuál sería candidato a ser CL de los restantes?
325. **C** El vector nulo.
326. **N** Claro. Siempre se dice que el vector nulo es CL de cualquier vector. ¿No es cierto? ¿Lo escucharon? Bien. Quiere decir que los otros dos tienen que ser linealmente independientes. Me tengo que asegurar que sean LI ¿vos eso trataste que sea así?
327. **C** Claro, claro. Por eso no estoy seguro de que mi conjunto está bien.
328. **F** Si multiplico por cero ¿no me va a dar el vector nulo?

329. **N** ¿A cuál?
330. **F** A cualquiera. Si multiplico por cualquier número al nulo me va a volver a dar el nulo.
331. **N** Si, lo que pasa es que eso habría que escribirlo, para ver si contradice lo que realmente creemos que contradice. Vamos a ceñirnos exactamente a lo que dice la tarea. Quiero que uno y sólo uno sea CL de los restantes, quiere decir que a los otros no los tendría que poder escribir como CL de los otros dos ¿si? Intentémoslo.
332. **C** Claro, pero….
333. **N** A ver. Intentemos que el nulo sea CL de los restantes. ¿Cómo escribís eso?
334. **C** [escribe (0,0,0) = 0(1,0,0)]
335. **N** Si, tomaste del primero …
336. **C** Y del segundo también …
337. **N** Pero dijimos que podíamos tomar ….. ¿hay algún problema si le agrego más? A ver, ponelo …
338. **F** No
339. **C** [completa hasta tener (0,0,0) = 0(1,0,0)+0(0,1,0)]
340. **N** Cuando leemos eso estamos leyendo que ese vector nulo es CL de los otros dos ¿si o no? ¿Están todos de acuerdo?
341. **E** Si multiplicamos todo por ceros …. Ya no va a ser el mismo conjunto … los mismos vectores …
342. **F** Pero … ese conjunto es LD porque tiene el vector nulo …. y poniendo todos ceros … tenemos la solución trivial …
343. **N** ¿Solución de qué?
344. **F** Esta, es la CLNT…. Y cuando eso pasa … son LI [Algunos asienten con la cabeza].
345. **N** ¿Vos te referís a la CLNT que surge cuando resolvemos un sistema homogéneo?
346. **F** Si, a esa.
347. **N** Y ¿cuál es el sistema que estamos resolviendo aquí? [Silencio de todos]
348. **N** ¿Los ceros surgieron de resolver algún sistema o los pusimos nosotros?
349. **C** Los pusimos nosotros.
350. **N** Y … cuando decidimos que un conjunto es LI ¿los ceros los ponemos nosotros?
351. **C** Saltan como la única solución [Silencio de los demás].
352. **N** Si esto que escribimos en el pizarrón, no es un sistema ¿qué es?
353. **D** Una CL.
354. **N** Y … ¿qué dice la definición de CL?
355. **D** Que un vector es CL de otros si existen escalares ….
356. **N** ¿Dice algo respecto a que no puedan ser ceros?
357. **D** No [los demás asienten]
358. **N** Bueno, aclarado esto … sigamos
359. **C** Y a este [señala el vector (1,0,0)] yo no lo puedo escribir como CL de estos dos.
360. **N** ¿A ver? Estaríamos cumpliendo bien la tarea.
361. **C** [escribe (1,0,0)=   (0,0,0)+   (0,1,0)] Cualquier escalar que yo ponga acá [señala el primer hueco que dejó en la expresión] me va a dar cero, y cualquier escalar que yo ponga acá [señala el segundo hueco] … si yo multiplico por un escalar, por tener este 0, nunca voy a lograr este 1.
362. **N** Justamente, estamos logrando lo que queríamos. Que no pudimos escribir al primero como CL de los otros dos. Vamos a escribirlo bien, para que no quede así.
363. **C** Cambia el igual por distinto
364. **N** Incluso podríamos haber puesto un alfa y beta ahí. Ahora, podemos intentar lo mismo con el segundo. Al fin, tenemos que ver los dos.
365. **C** [Escribe (0,1,0)=   (0,0,0)+   (1,0,0)]
366. **N** A ver qué problema surgiría acá. ¿Por qué realmente eso no funciona?
367. **C** Por lo mismo. Cualquier escalar que ponga acá [señala el segundo hueco que dejó en la expresión] la segunda componente se hace cero, y según el primer miembro, tiene que ser 1.
368. **N** ¡Ahá! ¿Qué sacamos como conclusión? Si quiero uno y sólo uno ¿a quién tenemos que incluir?

369. **Todos** Al nulo.
370. **N** Al nulo.
371. **D** Los otros pueden ser coprimos entre sí y ….
372. **N** Los otros, tengo que ver que no vayan a ser múltiplos …
373. **D** Podemos poner (5,7,1) …
374. **N** El tiene el recurso de los coprimos … pero, cuidado, que cuando hablás de los coprimos, me parece que estás pensando en los coprimos dentro de la misma terna, y vos necesitás que sean coprimos con los otros. Eso es algo que todavía nos falta trabajar. Si, si … ¿Ustedes están de acuerdo conmigo que este es el punto más pensado?
375. **Todos** Si.
376. **N** Si, yo también. Para seguir con la tarea, podés terminar [dirigiéndose a **D**] esa otra tarea que quedó pendiente. ¡Ahá! teníamos: {(1,2,3),(2,4,6),(5,7,1)}. Ah, es evidente que el primero es un múltiplo del segundo.
377. **Todos** Si
378. **N** Capaz que acá podríamos sacar alguna conclusión muchachos. Cuando se trata de dos vectores, la DL ¿viene vía qué? Una manera fácil de encontrar …
379. **C** Cuando son múltiplos.
380. **N** Cuando uno es múltiplo del otro … viene por ese lado … Quiere decir que cuando son dos vectores, es muy fácil encontrar una CL, me fabrico un múltiplo … pero no a todos los alumnos le queda claro eso … Bien, para que el tercero no sea una CL ¿cómo lo intentaste?
381. **D** Que no sea múltiplo … que no se pueda dividir por un número y me de el otro … que multiplicado por un número me de el otro …
382. **A** Si, pero en el caso en que ese sea el punto que tenemos que buscar, que uno sea CL del otro. Si el primero multiplicamos por 2 obtenemos el segundo, y si al segundo multiplicamos por ½ obtenemos el primero …
383. **N** Pero, está bien, queríamos dos acá eh … dos, exactamente dos …
384. **A** A no, creí que [y muestra lo que se estuvo desarrollando en el punto anterior]
385. **N** Ah … no … este ya está … era el nulo, y los otros dos que no sean parientes, digamos …
386. **C** [Dice algo ininteligible]
387. **N** Me preocupa la fabricación del tercero porque tiene que suceder que el tercero, no sea CL de los otros dos. Porque quiero dos y sólo dos. Y **D** recurre al recurso, valga la redundancia, de los coprimos, pero me deja pensando … yo confieso que tendría que pensarlo un rato más … El toma coprimos entre sí (5,7,1) … pero ¿es equivalente eso? … claro, es para que no sean múltiplos todos de un mismo número … Si son coprimos entre si, como el 5, el 7 y el 1, no pueden ser múltiplos de un mismo número, y ese número sería el candidato al escalar. ¿Se entiende lo que estoy diciendo? ¿Quién te enseñó esa estrategia?
388. **D** Yo no lo pensé para que no sea múltiplo sino para que sea independiente como usted dice …
389. **N** Lo que pasa es que a mi hasta me sorprende que sepas lo que son los coprimos [Risa de todos] Pero mi cautela se debe a que, por ejemplo, en el conjunto {(1,2,3),(2,3,4),(3,5,7)}, la última terna tiene componentes coprimos, y sin embargo, es la suma de las otras dos. Así que, hay que tener bajo control todo.
390. **D** Claro, es CL.
391. **N** Bueno, cómo podríamos probar realmente que este conjunto cumple las condiciones de la tarea. Escribiéndolo ¿no? Seguramente vamos a poder escribir el primero como CL del segundo y para usar el tercero … si tengo ganas de usar también el tercero ¿qué puedo hacer?
392. **A** El escalar cero.
393. **N** Claro, hago que lo uso, pero no lo uso en realidad. Cuando escribo el segundo en función de los otros dos, al primero le pongo el escalar que le corresponde, al otro cero y, supuestamente, al tercero, no debería poderlo escribir. Ahora, cuando uno en matemática no puede escribir, no está seguro de que no exista.
394. **A** Pero allí estaríamos usando los tres si le ponemos el escalar cero.

395. **N** Si, pero no significa que a ese lo pueda escribir … a ese … El propósito es que haya dos y sólo que se puedan escribir como CL de los demás. Al tercero no lo vas a poder escribir. Y ese es el punto que estamos tratando. Es decir, al (5,7,1) podemos escribirlo como una alfa por el primero, beta por el segundo …. ¿Cómo yo llego a estar convencida que no se puede escribir? Sólo porque no los estoy encontrando ¿en matemática es así? ¿funciona así la cosa? Si yo no lo encuentro ¿no existe?

396. **D** No.

397. **N** Puede deberse a mi incapacidad ¿no es cierto?

398. **A** Una cosa es que no lo utilice como en este caso …

399. **N** No, no tiene que ver con eso … no tiene que ver con eso. Me parece que acá **A** está confundiendo algo. Si no lo utilizo, entonces no lo puedo escribir como CL, no … no es eso lo que estoy diciendo.

400. **A** Yo por el escalar cero me refiero, como no hace falta, sabiendo que los dos primeros son múltiplos …

401. **N** Vos decís que no los pongamos …

402. **A** Claro, para facilitar ….

403. **N** Lo que pasa es que a mí no me facilita ni me complica ¿a ustedes les complica el hecho de que … Miren, lo voy a escribir porque me parece que a **A**, a él le preocupa … Mirá, acá es cierto que dos y sólo dos son CL, al (1,2,3) lo puedo escribir como ½ por (2,4,6); al (2,4,6) como al primero por 2; molesta en algo si acá agregamos 0 por (5,7,1) y acá también. [Finalmente queda escrito en la pizarra: (1,2,3)=1/2(2,4,6)+0(5,7,1); (2,4,6)=2(1,2,3)+0(5,7,1)] ¿Deja de ser cierto lo que estamos afirmando porque no lo vemos? no. Al primero lo estamos escribiendo como CL de los demás, al segundo también, y al tercero, no puedo, entonces, dos y sólo dos, los podemos expresar como CL. Cuando intentemos escribir el tercero, yo me trabo acá, porque que yo no pueda escribirlo no significa que no existe ¿se entiende? Pongo los vectores para ….. para poder concentrarme en los escalares [escribe (5,7,1)= (1,2,3)+ (2,4,6)], y empiezo a pensar en los escalares … empiezo a pensar en los escalares … y no se me ocurre nada ¿eso significa que no existe la CL? Tengo que buscar otro recurso [agrega alfa y beta quedando escrito (5,7,1)= α(1,2,3)+β(2,4,6)]

404. **A** Lo que yo decía … Se me ocurre a mi que el último vector … cuando se expresa el primero y el segundo como CL del último se le haga pasaje de términos … es lo único … algo se va a dar del otro lado.

405. **N** Para ver si …

406. **A** Si es CL de los demás …

407. **N** El dice: si existe tal combinación debería surgir de acá. [señala las expresiones (1,2,3) = ½ (2,4,6) + 0 (5,7,1) ; (2,4,6) = 2 (1,2,3) + 0 (5,7,1)] ¿Qué decías **B**?

408. **B** Si ahora hago el sistema, hallando el valor de α y β.

409. **N** Es un recurso. Acá, cuando yo me paro acá y no encuentro esos escalares, vuelvo a decir, no podemos deducir que no existan. Tengo que cambiar de recurso. Entonces, acá estamos viendo otras estrategias.

410. **N** **B** dice …acá lo tengo … bueno, yo les facilité poniéndoles alfa y beta. Es como que bueno, pongámonos a buscar a ver si existen o no existen. Esto tiene un cierto trabajo, no. Hay que plantear un sistemita que no va hacer homogéneo acá ¿no? porque no tengo al vector nulo de este lado … bueno, no sería problema … y ver si encuentro este alfa y este beta de tal manera que cumplen esto. Bien, pero él [refiriéndose a **A**] dice que puede haber algo más fácil. Que es intentar despejar de acá. Si los logro despejar de acá lo habré escrito como CL de los otros. Está bien lo que dice ¿no? ¿pero lo puedo despejar de acá? [señala nuevamente las últimas expresiones]

411. **D** No, porque está multiplicado por 0 y si lo paso, va a quedar dividido por 0.

412. **N** Claro, yo paso este restando [señala la expresión ½(2,4,6)], queda 0(5,7,1); cuando quiero despejar este vector …

413. **D** Va a quedar dividido por 0.
414. **E** No se puede dividir por 0.
415. **N** Esa es la imposibilidad.
416. **D** Y podemos decir que no existe cuando resolvemos el sistema y no existe solución.
417. **N** Claro y ¿cuándo te das cuenta que no existe?
418. **D** Cuando da indeterminado [enseguida repara en su error]
419. **N** Si es incompatible, por ejemplo … pero, me refiero a ¿cómo te das cuenta? Por hay, resolviendo, por un lado α te da 3, y por otro lado, te da -1, pero estamos en una situación que resulta incompatible. Les quiero preguntar, a ver qué opinan … En este conjunto, donde hay dos que son CL de los demás ¿cuántos vectores LI hay?
420. **Todos** Uno
421. **N** Y … ¿dónde teníamos uno sólo que era CL de los demás?
422. **Todos** Dos.
423. **N** ¿Y ninguno?
424. **Todos** Tres
425. **N** Claro, restan ¿no? Y para tres, van a decir, ninguno ¿no? [asienten con la cabeza] Bueno, ya no tenemos tiempo para trabajar esta idea. Con esto tenemos tres conjuntos, nos falta uno, que es el de ninguno.
426. **C** Va a ser LI … y, se toma la base.
427. **N** ¡Ahá! Se toma la base que es lo más sencillo ¿no es cierto? Pero ¿podríamos encontrar otros tres vectores que no sean los de la base?
428. **A** Múltiplos de la base también pueden ser.
429. **N** Y ¿que no sean tampoco múltiplos de la base? [Silencio]
430. **N** A ver , díganme, según ustedes, el rango de una matriz ¿tiene alguna vinculación con la IL en este caso?
431. **D** Si, por la definición … porque es el máximo número de vectores LI …
432. **N** Y ¿cómo lo hallan?
433. **D** Escalonando y contado las filas no nulas.
434. **N** Y esa idea ¿no la podemos usar para construir este conjunto?
435. **Todos** [Silencio largo]
436. **N** Bueno, chicos, los entretuve mucho, así que les voy a pedir que esta segunda parte la contesten directamente en el papel. FIN.