ACERCA DE LA EXISTENCIA DE FORMAS DE ARGUMENTACIÓN CONSTRUIDAS FUERA DE ESCENARIOS ESCOLARES QUE LLEGAN AL AULA DE MATEMÁTICA

Cecilia Crespo Crespo, Rosa M. Farfán, Javier Lezama
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*". Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.
CICATA–IPN México
Cinvestav, IPN México
crccrespo@gmail.com, rfarfan@cinvestav.mx, jlezamaipn@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento lógico, Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. Este trabajo forma parte de una investigación enmarcada en la perspectiva socioepistemológica y se orienta a analizar desde este marco teórico, las características de las demostraciones y argumentaciones presentes en el aula de matemática. El objetivo de la investigación es comprender el carácter sociocultural de las argumentaciones matemáticas, mostrándolas como resultado de acciones de una comunidad en un escenario sociocultural. Nuestra cultura, con base aristotélica, ha construido formas de argumentación basadas en esta lógica, y durante siglos se han consideradas innatas. Sin embargo, en el aula se ponen de manifiesto algunas situaciones no sujetas a la lógica que se ha considerado innata, que evidencian el carácter de construcción social de la argumentación matemática y que consideramos tienen que ser tenidas en cuenta en el discurso matemático escolar.

Palabras clave: argumentación, construcción sociocultural, escenario

Introducción

A veces es posible detectar en el aula de matemática, ciertos modos de razonamiento que realizan los alumnos que no son acordes con la tradición aristotélica. Se trata en muchas oportunidades de la transferencia a escenarios académicos escolares de formas de argumentar que son utilizados en escenarios cotidianos, que han sido construidos en escenarios no académicos. La visión socioepistemológica de la matemática debe tener en cuenta estas formas de razonamiento, la manera en las que son realizadas y cómo se reflejan en el aprendizaje y validación de resultados matemáticos, ya que denotan la transferencia de los mismos de unos escenarios a otros. En investigaciones realizadas, se han puesto de manifiesto que las argumentaciones como recurso de validación de resultados en matemática, surgen con el carácter de producto cultural (Crespo Crespo, 2005; Crespo Crespo & Farfán, 2005).

En este trabajo se presentan algunas de estas formas de argumentación y se abren preguntas, cuyas respuestas conducirán a nuevas investigaciones. La finalidad de este artículo es mostrar que en los cursos de matemática, no todas las maneras de razonar que se ponen de manifiesto son deductivas. De esta manera, la argumentación deductiva de origen aristotélico vuelve a mostrarse como una construcción sociocultural, que convive con otras formas de argumentación que también han sido construidas socioculturalmente.

Argumentaciones abductivas

El término abducción fue introducido por Pierce (Panizza, 2005), para designar razonamientos de la siguiente forma: $p \Rightarrow q,\ q \dashv p$.

En la lógica clásica este es un razonamiento no válido. Esta falacia suele, sin embargo, utilizarse en ciertos escenarios para la producción de conocimiento. En escenarios no académicos es usada en numerosas situaciones en las que se busca una explicación. En la vida cotidiana, en múltiples oportunidades, se razona a partir de evidencias y sobre la base de los conocimientos que se posee, se formula una hipótesis acerca de cuál puede ser la causa del hecho observado. En algunos casos la conclusión inferida tiene mayor probabilidad de ser cierta que en otros. La conclusión se enuncia a veces por medio de un "tal vez" o un "quizá". La fuerza de las creencias acerca de la manera en la que se desarrollan los hechos o el valor de las pruebas a las que se someten las conclusiones resultan fundamentales en el momento de afirmar la conclusión.

Veamos un ejemplo de pensamiento abductivo, que se presentó en alumnos de primer año de ingeniería en sistemas. Se presentó a los estudiantes:

"Probar que si el cuadrado de un número natural es par, dicho número es par"

La demostración presentada por varios alumnos fue:

a es par, entonces se puede escribir a=2k

El cuadrado de a es: $a^2=(2k)^2=4k^2$

que es par.

Al corregir este tipo de demostraciones, se suele afirmar que se trata de una confusión de la hipótesis y la tesis del teorema. Se trata, en realidad de un razonamiento abductivo.

La concepción de los condicionales en los estudiantes suele ser causal y es común que al preguntarles la explicación de cierto proceso que hayan utilizado en la resolución de un problema, acudan a razonamientos abductivos. Esto quizá se deba a que confundan la estructura condicional con la bicondicional y de esta manera asignan a las argumentaciones abductivas carácter de válidas.

En escenarios cotidianos, los razonamientos abductivos son bastante utilizados. Esta forma de argumentación se le reconoce gran valor para lograr argumentos explicativos. Algunas preguntas que se abren ante las situaciones en que se los utiliza en escenarios académicos son: ¿Existe realmente una confusión entre la tesis y la hipótesis del teorema? o, ¿asumen como válidos los razonamientos abductivos, basándose en la implicación de Diodoro, en vez de la reconocida por Aristóteles? ¿Consideran como válidos únicamente los razonamientos sólidos?

Argumentaciones inductivas

También es frecuente encontrar en el aula argumentaciones inductivas. Los alumnos a veces, ante un enunciado de una propiedad matemática, prueban una cantidad finita, e incluso no muy grande, de casos aislados, concretos, y de eso concluyen que cierta proposición.

Esta situación se repite en distintos cursos y en distintas ramas de la matemática. Es muy usual que los alumnos extraigan conclusiones a partir de razonamientos inductivos. Los razonamientos inductivos conducen a conclusiones más o menos probables. No otorgan garantía de la verdad de la proposición. Los razonamientos inductivos no dependen únicamente de la cantidad de casos ensayados y observados.

Por ejemplo, preguntamos a un grupo de alumnos de segundo año de escuela media:

> *"¿De qué cuadrilátera se trata si tiene sus diagonales iguales, perpendiculares y que se corten mutuamente en partes iguales?"*

Los alumnos comenzaron a trazar segmentos perpendiculares que verifican las condiciones solicitadas: perpendiculares, que se corten mutuamente en partes iguales y que sean iguales entre sí. Cada uno probó en uno o dos casos, compararon resultados, y respondieron: *'Se trata de un cuadrado'"*.

Esta situación se repite en distintos cursos y en distintas ramas de la matemática. Es muy usual que los alumnos extraigan conclusiones a partir de razonamientos inductivos. El esquema inductivo es uno de los más habituales entre los estudiantes. Además éstos no son conscientes de sus limitaciones, ya que no dan pruebas de su rechazo cuando se les presenta una argumentación inductiva. Sus pruebas inductivas consisten muchas veces en la presentación de un ejemplo o dos, rara vez muestran un contraejemplo, e incluso no expresan que éste invalide la prueba.

Argumentaciones no monotónicas

Una característica de la lógica clásica es la monotonicidad. Esto significa que agregando nuevas proposiciones (premisas) a un razonamiento, nunca se invalidan viejas conclusiones. O sea que el conjunto de conclusiones o teoremas crece monótonamente con el conjunto de premisas. Dicho de otra manera: si una proposición es posible que sea inferida a partir de cierto conjunto de premisas, por más que se agreguen nuevas premisas, la proposición seguirá siendo inferida. En la práctica, de hecho, no se utilizan muchas veces todas las premisas de las que se disponen para llegar a una conclusión. Por ejemplo cuando en matemática se demuestra un teorema, no se aplican todos los conocimientos y propiedades que ya han sido demostrados previamente para lograr dicha demostración.

La lógica clásica permite realizar inferencias seguras y consistentes, no obstante, los razonamientos humanos no siempre son consistentes, por las inferencias que realizan los alumnos en el aula a veces tampoco lo son, ya que transfieren esta forma de razonar desde un escenario no académico a uno que sí lo es. El paradigma inferencial de la no-monotonicidad otorga una noción de "racionalidad útil" que no consiste solamente en razonar correctamente garantizando el proceso de deducción lógica, la *racionalidad útil* toma en cuenta no sólo los propósitos de un agente razonador determinado sino también el dominio en el cual éste opera. La inferencia clásica se explica a través de la noción de consecuencia lógica, mientras que la inferencia no-monotónica asume compromisos muy distintos respecto a su contraparte clásica, en especial abandona la noción de consistencia y de validez, asumiendo que el contexto de la información es importante para la representación de las inferencias racionales. El requisito de racionalidad que requieren las inferencias de sentido común parece centrarse en las propiedades formales que debe poseer la relación de consecuencia no-monotónica.

La no monotonicidad de las argumentaciones también aparece en oportunidades en las aulas. El uso de contraejemplos está relacionado con este tipo de argumentación. Volvamos al ejemplo que se presentó en el caso de las argumentaciones abductivas, pero enunciemos de distinta manera la propiedad: *"Probar que si el cuadrado de un número es par, dicho número es par"*, un alumno presentó la siguiente demostración:

> *Sea $a^2=2k$. Entonces a tiene que ser par, pues como 2 es primo y la descomposición en números primos de a es única entonces a tiene un factor 2, entonces k tiene que tener un factor 2 para el otro a. Entonces a=2u (siendo u=k/2) y por lo tanto a es par. Pero 2 es par y $\sqrt{2}$ no es par pues no es entero. Entonces la propiedad es falsa.*

La demostración presentada tiene dos partes. En la primera utiliza una argumentación deductiva. En la segunda, descubre un contraejemplo y a partir de ahí afirma que la propiedad es falsa. Sin embargo, en el examen presenta ambas argumentaciones, como si la propiedad hubiera sido válida hasta la aparición del contraejemplo.

Cabe preguntar: ¿Qué papel desempeñan los contraejemplos para los alumnos? ¿Acaso ven a la matemática como una construcción no monotónica y no reconocen el carácter deductivo que le da la lógica aristotélica?

Argumentaciones visuales

Existen estudios actuales acerca de los aportes que pueden hacer las demostraciones visuales a la comprensión de la demostración matemática, basadas en la visualización (Hanna, 2000). Estas se sustentan en la utilización de representaciones visuales, el uso de diagramas y otros elementos que ayuden a visualizar las propiedades que se desea demostrar.

Son conocidas las demostraciones de propiedades aritméticas que provienen de la época de Pitágoras. Otro tipo de argumentaciones visuales son las que utilizan recursos computacionales. Pueden mencionarse como ejemplos las construcciones en Cabri Geomètre de los puntos notables de un triángulo. Los alumnos utilizan estas construcciones para visualizar las propiedades correspondientes de las ubicaciones de estos puntos. Quienes utilizan estos recursos en el aula, defienden que en realidad al experimentar con los gráficos obtenidos, se están probando los mismos para una cantidad infinita de casos y que a partir de ellos, es posible referirse a demostraciones visuales. Sin embargo, se preguntan otros cómo extraer la información implícita de las representaciones visuales que permitan construir una demostración válida (Hanna, 2000).

Para los estudiantes, quizá esta sea la manera que menos aceptan de argumentación no deductiva, ya que como se presenta en algunas investigaciones (Crespo Crespo, 2007), "no creen" en los gráficos debido a la cantidad de veces que han oído que los dibujos pueden engañar.

Preguntas que surgen son: ¿Qué tipos de argumentaciones gráficas pueden considerarse deductivas? ¿Cuáles son en realidad inductivas? ¿Creerían los estudiantes en ellas si no recibieran el continuo mensaje de que no son válidas?

Argumentaciones a conocimiento cero

Hace unos años, ha surgido la expresión "demostraciones a conocimiento cero" para identificar ciertas formas de argumentación (Hanna, 1997). Se trata de una prueba interactiva basada en protocolos de conocimiento cero. En ella, una persona trata de demostrar a otra que sabe algo, sin enseñarle o transmitírselo. Es una forma de presentar una propiedad matemática a un interlocutor, convenciéndolo de la veracidad del teorema correspondiente y de que el demostrador conoce la misma. Durante esta comunicación se busca el convencimiento y la aceptación del otro.

Esta forma de demostración es sustancialmente distinta a la que se aplica en la matemática clásica, sin embargo resulta interesante desde el punto de vista socioepistemológico en cuanto caracteriza una práctica social constituida por el intercambio de opiniones acerca de ideas matemáticas en escenarios académicos en los que no se presenta la demostración completa, pero que surge de ella la aceptación del resultado.

Su aplicación en el aula se realiza con gran frecuencia, incluso con fines didácticos. Por ejemplo cuando se desea que los estudiantes comprendan y acepten un resultado matemático, pero el docente no se focaliza en la presentación de la demostración en sí del resultado.

Algunas reflexiones acerca de las argumentaciones de los estudiantes

A veces en la tarea docente preocupa que los estudiantes no lleguen a los resultados que como profesores quisiéramos, no se entiende cómo no realizan argumentaciones deductivas correctas, es posible oír de algún docente, la expresión "no razonan".

> *"Pero los alumnos razonan siempre. Dicho de otra manera, los alumnos no razonan solamente porque la tarea lo demanda [.]. Los alumnos establecen espontáneamente analogías, generalizan, se dan explicaciones, encuentran regularidades, etc.".* (Panizza, 2005, p.94)

En efecto, lo que ocurre es que sus formas de razonar no coinciden con la manera deductiva clásica, fundamentada en la tradición aristotélica. Están transfiriendo al escenario del aula formas de argumentación que son propias de escenarios no académicos, de la manera que utilizamos con frecuencia en razonamientos cotidianos.

Las maneras de argumentar en matemática no se han mantenido estáticas, y deben ser comprendidas como construcciones socioculturales. Esta comprensión, podrá ayudar a tener una mayor percepción de las formas de argumentación en el aula y un mejor aprovechamiento en la reconstrucción del discurso matemático escolar.

La comprensión de las demostraciones matemáticas como prácticas sociales, conduce de inmediato a analizar las maneras de argumentar que están presentes en el aula y a pensar acerca de las causas por las que surgen y de qué manera adquieren o no aceptación por parte de los alumnos. El análisis del valor social de estas formas de argumentar, puede dar luz acerca de la comprensión de los mecanismos de validación y explicación de las construcciones matemáticas en el aula.

Consideramos que resulta indispensable una mirada sobre la escuela actual en función de las argumentaciones. Las instituciones educativas se mantienen en la actualidad, o al menos intentan mantenerse, con características que les fueron propias hace años. Intenta mantener sus tareas de manera disciplinadamente racional, esto es *"que permitan distinguir con claridad los espacios del que sabe y del que aprende, del que manda y del*

Algunas reflexiones acerca de las argumentaciones de los estudiantes

A veces en la tarea docente preocupa que los estudiantes no lleguen a los resultados que como profesores quisiéramos, no se entiende cómo no realizan argumentaciones deductivas correctas, es posible oír de algún docente, la expresión "no razonan".

> *"Pero los alumnos razonan siempre. Dicho de otra manera, los alumnos no razonan solamente porque la tarea lo demanda [.]. Los alumnos establecen espontáneamente analogías, generalizan, se dan explicaciones, encuentran regularidades, etc.".* (Panizza, 2005, p.94)

En efecto, lo que ocurre es que sus formas de razonar no coinciden con la manera deductiva clásica, fundamentada en la tradición aristotélica. Están transfiriendo al escenario del aula formas de argumentación que son propias de escenarios no académicos, de la manera que utilizamos con frecuencia en razonamientos cotidianos.

Las maneras de argumentar en matemática no se han mantenido estáticas, y deben ser comprendidas como construcciones socioculturales. Esta comprensión, podrá ayudar a tener una mayor percepción de las formas de argumentación en el aula y un mejor aprovechamiento en la reconstrucción del discurso matemático escolar.

La comprensión de las demostraciones matemáticas como prácticas sociales, conduce de inmediato a analizar las maneras de argumentar que están presentes en el aula y a pensar acerca de las causas por las que surgen y de qué manera adquieren o no aceptación por parte de los alumnos. El análisis del valor social de estas formas de argumentar, puede dar luz acerca de la comprensión de los mecanismos de validación y explicación de las construcciones matemáticas en el aula.

Consideramos que resulta indispensable una mirada sobre la escuela actual en función de las argumentaciones. Las instituciones educativas se mantienen en la actualidad, o al menos intentan mantenerse, con características que les fueron propias hace años. Intenta mantener sus tareas de manera disciplinadamente racional, esto es *"que permitan distinguir con claridad los espacios del que sabe y del que aprende, del que manda y del* *que obedece, así como quién es el que evalúa al aprendiz, y cuándo y cómo*" (Barbero, 2006, p.2).

Sin embargo estas instituciones educativas están entrando en un período de crisis que deberá desembocar en un replanteo de sus actividades, de los roles que en ellas se desempeñan. Barbero plantea claramente que la causa de la crisis es que no es posible pensar un modelo escolar que marque los espacios y tiempos de aprendizaje en la sociedad actual. "*Estamos pasando de una sociedad con sistema educativo a una sociedad educativa*" (Barbero, 2006, p.3). Esta idea parece esencial, ya que llama la atención a buscar fuera de la escuela los conocimientos que se construyen y a tratar de identificar la manera en la que se los construyen. La escuela pasa a ser, bajo esta concepción, una instancia más de aprendizaje, pero no la única, se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento.

En el caso de las argumentaciones, nuestro esquema actual de escuela, ha intentado, siguiendo el esquema aristotélico de ciencia, enseñar formas de argumentar deductivas. Sin embargo, no ha logrado con los estudiantes actuales resultados satisfactorios. Acabamos de mostrar la presencia en el aula de algunas formas de argumentar no deductivas. Éstas en algunas oportunidades parecen incluso más convincentes para los estudiantes. Indudablemente han sido construidas en escenarios no académicos. Son utilizadas en la sociedad para comunicarse, justificar, inferir, defender ideas.

La escuela actual intenta ignorarlas, pero no podemos ignorar que el modelo de comunicación escolar actual es distinto de las dinámicas comunicativas de la sociedad actual, del escenario en el que los estudiantes se desenvuelven, en la que se utilizan recursos orales, gestuales, sonoros, visuales, musicales y escritos. Estos recursos contribuyen a la construcción de argumentaciones fuera de la escuela, en escenarios no académicos. La escuela no puede ignorarlos. Con el reconocimiento de que nos hallamos en una sociedad educativa, los docentes deberemos prestar atención a estas formas de argumentación y a su construcción.

La socioepistemología al reconocer la construcción social del conocimiento y comprender que éste se lleva a cabo en un escenario determinado y a veces se transfiere a otros escenarios, estudia la manera en la que se produce esa transferencia. En el caso particular del objeto de nuestro estudio, las argumentaciones, hemos podido detectar que las argumentaciones utilizadas por los alumnos en la escuela a veces son construidas fuera de ella. El alumno actúa en escenarios académicos y no académicos, trae argumentaciones construidas en los segundos a los primeros. Si la escuela se mantiene con la convicción de que ella constituye el sistema educativo y no reconoce, según las palabras de Barbero que mencionamos anteriormente, la existencia de una sociedad educativa, no podrá repensarse en la reconstrucción del discurso matemático escolar.

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2006). Dinámicas urbanas de la cultura y cultura escolar. En *Nuevos tiempos y temas en la agenda de política educativa. La escuela vista desde afuera*. Buenos Aires, Argentina.

Cantoral, R. (2001). Sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*. (pp.64-75). México: Iberoamericana.

Crespo Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo*. Tesis de Maestría sin publicar. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de Doctorado sin publicar. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. y Farfán, R. (2005). *Una visión de las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural.* Relime Vol. 8 (3), pp.287-317.

Hanna, G. (1997). The ongoing value of proof. En A. Gutiérrez y L. Puig (Ed.), *Proceeding of PME 20. 1* (pp.21-34). Valencia.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 5–23.

Panizza, M. (2005). *Razonar y conocer*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.