INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA
APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA
U. LEGARIA

EL PAPEL DEL CONTEXTO EN LA ASIGNACIÓN DE SIGNIFICADOS A LOS OBJETOS MATEMÁTICOS. EL CASO DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN

Tesis que para obtener el grado de
Doctorado en Matemática Educativa

Presenta:
Agustín Grijalva Monteverde

Director de Tesis:
Dr. Ramiro Ávila Godoy

México, D. F., Noviembre de 2007

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 20 del mes de noviembre del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función.

Presentada por el alumno:

GRIJALVA	MONTEVERDE	AGUSTÍN
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 4 | 1 | 5 | 3 | 9 |

aspirante al grado de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Ramiro Ávila Godoy

Codirector de tesis

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Gustavo Martínez Sierra

Dr. Juan Díaz Godino

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México, el día 10 del mes de diciembre del año 2007, el que suscribe Agustín Grijalva Monteverde alumno del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A041539, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Ramiro Ávila Godoy y cede los derechos del trabajo intitulado "El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: guty@gauss.mat.uson.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Agustín Grijalva Monteverde

Dedico este trabajo:

A mi madre, quien nos abandonó físicamente de este mundo una semana después de presentar el examen predoctoral correspondiente a mis estudios, pero sé que le daría gusto y satisfacción verlo concluido.

A mi padre, que en medio de su dolor se dio tiempo y obtuvo fuerzas para ayudarme con la traducción del latín de publicaciones de Euler.

A mis hijos, Nancy Gabriela, Nayeli y Agustín, que de alguna manera disfrutaron y padecieron, a la vez, mis esfuerzos.

A Silvia, María Antonieta y Luisa Cristina, quienes también disfrutaron y padecieron estos esfuerzos.

A mi compañera, a Silvia Elena, quien se ha fletado conmigo en esta vida, lo cual incluye las reflexiones y actividades en el área de matemática educativa, con la plena conciencia de que su apoyo es un factor primordial para la conclusión de este trabajo.

Agradecimientos

A la Universidad de Sonora, quien no sólo me apoyó con una beca para la realización de mis estudios sino que, a través de todas las instancias a que recurrí, siempre dio respuesta satisfactoria a mis solicitudes.

Al Programa de Matemática educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, donde siempre recibí un trato eficiente y afectuoso, tanto del personal académico como del personal de apoyo administrativo.

A mi director de tesis, Dr. Ramiro Ávila Godoy, por su esfuerzo y dedicación en esta empresa, lo cual nos permitió, además, profundizar en nuestra ya vieja amistad.

A los lectores de mi tesis y miembros del jurado del examen de grado:

Dr, Francisco Javier Lezama Andalón
Dr. Gustavo Martínez Sierra
Dr. Apolo Castañeda Alonso
Dr. Ramiro Ávila Godoy
Dr. Juan Díaz Godino

ÍNDICE

Página

INTRODUCCIÓN 1

CAPÍTULO 1
EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN E
INVESTIGACIONES RELACIONADAS 17

1.1 El problema de investigación y su justificación 17

1.2 Investigaciones relacionadas 31

CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO Y ESTRATEGIA DE INVESTIGACIÓN 47

2.1 Enfoque ontosemiótico de la cognición matemática 47

2.2 Significado personal y significado institucional 64

2.3 Dualidades cognitivas 67

2.4 Funciones semióticas 71

2.5 Estrategia de investigación 76

CAPÍTULO 3. ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO
DE LA INTEGRAL, DE LEIBNIZ A CAUCHY-RIEMANN 79

3.1 La integral en Leibniz 81

3.2 Elementos de significado de la teoría de las funciones
semióticas en Leibniz 122

3.3 Visión global de la integral en Leibniz 132

3.4 La integral en Euler 135

3.5 Elementos de significado de la teoría de las funciones
semióticas en Euler 179

3.6 Visión global de la integral en Euler 190

3.7 La integral en Cauchy y Riemann 193

3.8 Elementos de significado de la teoría de las funciones
semióticas en Cauchy y Riemann 230

3.9 Visión global de la integral en Cauchy y Riemann 239

3.10 Visión global del desarrollo de la integral de Leibniz a Riemann 243

CAPÍTULO 4.
SIGNIFICADOS PERSONALES DE LA INTEGRAL 251

4.1 Consideraciones generales 251
4.2 El diseño del instrumento de evaluación 257
4.2.1 Instrumento de evaluación 259
4.2.2 Propósitos de los problemas del instrumento 265
4.3 Aplicación y análisis de las respuestas 269
4.3.1 El caso general 269
4.3.2 Algunos casos particulares 283
4.4 Análisis global de los significados personales de la integral de una función 324

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES 329

BIBLIOGRAFÍA 349

Resumen

Este trabajo presenta los resultados de una investigación sobre el papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. Para la consecución del objetivo planteado centramos nuestra atención en la integral de una función.

En diversos trabajos se reconoce que el conocimiento que se genera por la actividad humana es siempre contextual pero poco se profundiza al respecto con hechos que muestren la forma en que ello se produce. Esta visión está ligada a una concepción no realista de la matemática, en la que no se concibe la preexistencia de los objetos a los que haya que "descubrir". Los objetos matemáticos son construidos como producto de la actividad humana al enfrentar determinadas situaciones problémicas.

Aún en este marco general, encontramos que existen diversas formas de interpretar los procesos de construcción del conocimiento matemático y la asignación de significados a dichos objetos por parte de quienes se involucran en procesos de aprendizaje y, particularmente, existen múltiples versiones de lo que puede entenderse por contexto. Este trabajo pretende aportar elementos que permitan caracterizar el contexto en el cual se construye y desarrolla el trabajo matemático, así como su enseñanza y su aprendizaje y mostrar el papel determinante que éste juega en la construcción de significados.

El estudio se realiza mediante el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, en el cual se asume una concepción pragmática de los significados y se reconoce a los sistemas de prácticas desarrollados al resolver un determinado tipo de situaciones problémicas, como el significado de un objeto matemático.

En la mayoría de los trabajos realizados dentro del enfoque ontosemiótico se reconoce a las situaciones problémicas como el contexto a partir del cual se generan dichos sistemas de prácticas. En esta tesis asumimos una versión de contexto más general, conformado por las componentes del significado u objetos matemáticos primarios, esto es, las propias situaciones problémicas, el lenguaje, los procedimientos, las propiedades, las argumentaciones y las concepciones que se construyen sobre los objetos matemáticos.

Con nuestra investigación aportamos elementos, dentro del enfoque ontosemiótico, del papel determinante que juega el contexto en la construcción se significados a los objetos matemáticos, ilustrado con el caso de la integral de una función.

Con el propósito de proporcionar evidencias sobre este papel del contexto, hemos trabajado en dos niveles:

Por una parte se hace un estudio histórico epistemológico del desarrollo del objeto "integral de una función", partiendo de las aportaciones de Leibniz hasta los

desarrollos de Riemann. En esta parte el estudio se realiza en el marco de los objetos y significados institucionales, centrando la atención en la comunidad de expertos en matemáticas.

Por otro lado, se hace un estudio entre algunos profesores y estudiantes de cálculo de los niveles escolares medio superior y superior de nuestra región, con lo cual atendemos a la construcción de significados personales de los objetos matemáticos.

En ambos casos mostramos las significaciones de los objetos matemáticos del cálculo ligados a la integral de una función y estudiamos su relación con el contexto correspondiente. Para el análisis hacemos uso de los recursos metodológicos del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, primordialmente la construcción de configuraciones epistémicos, las dualidades cognitivas del conocimiento matemático y la teoría de las funciones semióticas.

Abstract

This work presents the results of a research about the role of the context in the assignment of meanings to the mathematical objects. We focus the attention in the integral of a function.

In different works is admitted that the knowledge generated by the human activity is always contextual but little is deepened in the form in which occurs this process. This vision is tied to a not realistic conception of the mathematics, in which there is not conceived the preexistence of the objects that is necessary "to discover". The mathematical objects are constructed like a product of the human activity in the resolution of certain kind of problemic situations.

Nevertheless, multiple versions exist about what can be the meaning of the context by an expert and, in this sense, this work tries to reach elements that allow to characterize the context in which the mathematical work develops, as well as its teaching and its learning and to show the determinant role that this one plays in the construction of meanings.

The study is realized with the ontosemiotic approach of the mathematical cognition, a pragmatic conception of the meanings, assuming the mathematical practices developed by the individuals and the communities when they face a certain type of problemic situations like the meaning of the object.

In the majority of the works realized in the ontosemiotic approach, the context is associated with the problemic situations that generate the practices system. In our thesis we assume a more general vision of the context, composed for the elements of the meaning (components of the meaning) or the mathematical primary objects, that is, the problemic situations self, the language, procedures, properties or propositions, arguments and conceptions that are constructed about the mathematical objects.

In our research gets elements, inside of the ontosemiotic approach, about the principal role of the context in the construction of meanings for the mathematical objects, exemplified with the integral of a function.

The work is realized to two levels:

On one hand a historical and epistemological study of the development of the object "integral of a function", departs from Leibniz's contributions up to Riemann's developments. In this part the study is realized in the frame of the objects and institutional meanings, centering the attention on the experts' community on mathematics.

On the other hand, a study is done among some teachers and students of calculus of the school superior levels top of our region, attending the construction of personal meanings of the mathematical objects.

Both cases we show the meanings of the mathematical objects of calculus linked to the integral of a function and study its relations with the correspondent context. We use methodological resources of the ontosemiotic approach, mainly the construction of epistemological configurations, cognitive dualities of the mathematical knowledge and the theory of the semiotic functions.

INTRODUCCIÓN

Con base en nuestra experiencia, tanto en docencia como en investigación, hemos constatado que los significados que los estudiantes asignan a los objetos matemáticos son diversos, en dependencia a sus experiencias en el tratamiento de determinadas situaciones problémicas a las que se enfrentan y, en general a los sistemas de prácticas que se promueven en los salones de clase.

En este trabajo se presentan los resultados de una investigación realizada con el propósito de obtener evidencias sobre el papel que los contextos juegan en la asignación de significado para la integral de una función, con la cual se pretende ejemplificar lo que, desde nuestro punto de vista, es una situación general en la construcción de significados para los objetos matemáticos.

Una situación que puede servirnos para ilustrar esta situación la encontramos precisamente en algunos de nuestros estudiantes en los cursos universitarios de cálculo, respecto al significado de la integral de una función. Con las experiencias previas de nuestros alumnos, la de sus cursos de bachillerato, hemos constatado que la mayoría de ellos arguye que la integral de una función es una antiderivada y otros, que es “el área bajo una curva”. Otros más, los menos, hablan en ambos sentidos, es decir, que la integral es una antiderivada y es el área bajo una curva.

Las respuestas que dan a determinados cuestionamientos no son casuales, obedecen a las experiencias que han tenido con el tratamiento de la integral y, de forma análoga, con otros objetos matemáticos sucede lo mismo.

De estas observaciones nos han surgido diversas interrogantes, algunas de las cuales son las siguientes:

¿Cuáles son los elementos o componentes del significado para los objetos matemáticos?

¿Cómo se manifiestan estas componentes en las prácticas de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas?

¿Cómo se manifiestan estas componentes en las prácticas matemáticas de las comunidades de expertos (los matemáticos profesionales, por ejemplo)?

Para abordar estas interrogantes hemos planteado un problema de investigación que de alguna manera englobe estas interrogantes, a partir de una concepción teórica con eje en el enfoque ontosemiótico de Juan Díaz Godino.

Una particularidad de este enfoque es su definición explícita frente a dos aspectos fundamentales en el desarrollo de la Matemática Educativa: la naturaleza ontológica de los objetos matemáticos y una postura clara respecto al significado de los objetos.

Respecto a la naturaleza ontológica de los objetos matemáticos, nos parece imprescindible que si hablamos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, esto es, de la enseñanza y el aprendizaje de determinados conceptos, procedimientos, algoritmos y, en general de objetos matemáticos, establezcamos con claridad a qué nos estamos refiriendo.

Por otra parte, al tratar con los objetos matemáticos, pudiéramos pensar que, una vez que tenemos conocimiento de los mismos, por ejemplo, la integral de una función, la significación que tenemos es la misma para todos, toda vez que el objeto es único e independientemente de su naturaleza ontológica, sólo puede concebirse de una determinada forma. Desde nuestro punto de vista esta sería una visión errónea y los significados que asignamos a los objetos matemáticos están en dependencia de nuestra experiencia con los objetos. Así, en líneas anteriores hemos señalado algunas de las significaciones que los estudiantes asignan al objeto “integral de una función”.

El estudio del significado de los objetos matemáticos juega un papel de primera importancia en Matemática Educativa, y prácticamente en todos los enfoques teóricos se hace alusión al término. Sin embargo, en la revisión que hemos hecho de algunos enfoques teóricos, encontramos que la palabra significado es utilizada con relativa familiaridad, como si se tratara de un término coloquial o primitivo. A nuestro parecer, la investigación en Matemática Educativa se relaciona directamente con la producción de significados para los objetos matemáticos y se requiere tener una versión también clara de lo que entenderemos por significado.

Una forma de concebir los objetos matemáticos es de naturaleza realista, esto es, partir de que los objetos matemáticos existen independientemente de la actividad humana y, reconociendo su naturaleza inmaterial, asumir que los objetos matemáticos existen en un “mundo de ideas”, en un mundo platónico, de tal suerte que el conocimiento consiste en "descubrir" esos objetos. Esta concepción tiene implicaciones sobre las actividades de enseñanza, en el sentido de que se concibe a ésta como la actividad en la que el profesor "presenta" esos objetos a sus alumnos para que los identifiquen y los "aprehendan" o, como la actividad en la que el profesor pone en actividad a sus alumnos para que por diferentes medios, por ejemplo la resolución de problemas, el alumno "descubra" los objetos matemáticos.

En otros acercamientos, como los de corte constructivista, se asume una posición diferente, en la que no se reconoce la existencia de los objetos matemáticos con independencia de la actividad humana. Los objetos matemáticos son el producto de la construcción intelectual del hombre. Una primera implicación de este reconocimiento en la enseñanza es que las actividades se plantean ahora como el vehículo para que los estudiantes construyan su propio conocimiento.

Para quienes asumimos una postura filosófica de este carácter surgen nuevas interrogantes, como las siguientes:

Si los objetos matemáticos no existen con independencia de la actividad humana ¿qué son dichos objetos?

Dada la naturaleza ideal de los objetos matemáticos y la asunción de que no existen al margen del pensamiento de los hombres ¿Cómo es que reconocemos dichos objetos? ¿Cómo es posible hablar de funciones, de derivadas, de integrales o cualquier otro objeto matemático?

En el enfoque ontosemiótico se asume una posición pragmática ante este tipo de interrogantes, relacionando la naturaleza de los objetos matemáticos con las prácticas matemáticas de los individuos o las comunidades. Un primer aspecto a resaltar es que en el enfoque se asume que en general, un objeto matemático es todo ente o cosa de la que hablamos o a la que aludimos, que interviene en la actividad matemática.

En cuanto a la práctica matemática, entendemos a ésta como "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

Cuando enfrentamos una determinada situación problémica, desarrollamos prácticas matemáticas de diversa naturaleza, algunas de las cuales juegan un papel o tienen sentido en la resolución de la situación y otras no. A las primeras las denominamos prácticas significativas. Por otra parte, al enfrentar un tipo determinado de situaciones problémicas, las prácticas que empleamos no son aisladas o inconexas, utilizamos todo un conjunto o sistema de prácticas matemáticas.

En este sentido llamamos significado de un objeto matemático al sistema de prácticas matemáticas significativas prototípicas que empleamos para resolver determinados tipos de situaciones problémicas. Considerando que las prácticas pueden ser discursivas u operativas, entendemos el significado como todo lo que un sujeto (individuo o institución) puede decir o hacer con el objeto.

Si los sistemas de prácticas son realizadas individualmente por un sujeto, hablamos de significado personal y si los sistemas de prácticas son compartidos al seno de una comunidad, decimos que se trata de un significado institucional.

Reconocemos como objetos matemáticos a los objetos emergentes de los sistemas de prácticas, distinguiendo de entre ellos a seis tipos de objetos primarios o componentes primarios del significado:

Situaciones problémicas, con lo cual nos referimos a problemas más o menos abiertos, ejercicios, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, etc.

Lenguaje, empleo de términos específicos de matemáticas, expresiones algebraicas, tablas numéricas, gráficas, diagramas, gestos, etc.

Procedimientos, emprendidos o ejecutados por el sujeto ante las tareas matemáticas.

Conceptos, los cuales nos referimos a los objetos matemáticos reconocidos como parte de la estructura matemática, caracterizados por sus propiedades esenciales, las que permiten distinguirlos de otros y suelen expresarse por medio de descripciones o definiciones.

Propiedades, o atributos de los objetos mencionados.

Argumentaciones que se usan para validar y explicar las proposiciones.

En la actividad matemática, cuando nos enfrentamos a una situación problémica, lo hacemos empleando un lenguaje específico, realizamos procedimientos que hemos percibido como útiles en otras situaciones, partimos de una concepción de la situación en juego, reconocemos propiedades y argumentamos en un determinado sentido. Pero de la realización de estas actividades para abordar un nuevo tipo de situaciones problémicas surgen también nuevos objetos primarios o nuevos componentes del significado, es decir, surgen nuevos objetos matemáticos.

A las situaciones problémicas que enfrentamos en un determinado momento y los procedimientos, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentaciones con las cuales abordamos las situaciones las identificamos como elementos del contexto en la cual se realiza la actividad matemática.

Análogamente a como lo hicimos con los significados, decimos que si de los sistemas de prácticas de un individuo en lo particular, emergen determinados objetos matemáticos, éstos serán objetos personales. Pero si los objetos son emergentes de los sistemas de prácticas compartido por una comunidad al enfrentar un determinado tipo de situaciones problémicas, los identificaremos como objetos matemáticos institucionales.

Así, tenemos la hipótesis de que si nos referimos a la generación de conocimiento matemático en las comunidades de expertos, en las comunidades científicas, se generarán objetos y significados de los mismos que estarán en dependencia de los contextos en los que se desarrollan. Esto es, los objetos institucionales y sus significados no se producen de una vez y para siempre, están sujetos a procesos de modificación en dependencia de los contextos en que surgen y en que se utilizan.

De forma análoga sucede, desde nuestro punto de vista, en los sistemas educativos, en los que, en dependencia de los sistemas de prácticas que se promuevan, los estudiantes generarán significados diversos para los objetos matemáticos. Así, aunque en diversas partes podamos hablar de objetos, como la "integral de una función", el significado que le asignen los estudiantes a dicho objeto dependerá de los contextos escolares en los que se desenvuelve, esto es, de los sistemas de prácticas que se promuevan en el transcurso de su discusión en la escuela.

En el presente trabajo nos hemos propuesto realizar una investigación sobre el papel de los contextos, en el sentido que los hemos descrito, en la asignación de significados para los objetos matemáticos, centrando nuestra atención en el caso de la integral de una función real de variable real.

En el primer capítulo planteamos el problema específico de investigación, su justificación y los objetivos formulados. El problema lo hemos escrito por medio de la siguiente interrogante:

¿Cuál es el papel que juega el contexto en la construcción de significados para la integral de una función?

Consecuentemente con el problema planteado, nos proponemos abordar este problema a dos niveles. Por una parte, haremos un estudio histórico-epistemológico del surgimiento y desarrollo del objeto matemático "integral de una función", en la búsqueda de evidencias del papel de los contextos en la creación del significado institucional del objeto y, por otra, haremos un estudio sobre los significados personales del objeto en cuestión, entre profesores y estudiantes con experiencias de aprendizaje y de enseñanza de la integral, según el caso.

Los propósitos de investigación que formulamos se resumen en los siguientes objetivos.

General:

Aportar elementos que muestren la importancia de los contextos en la construcción de significado para la integral de una función.

Específicos:

Aportar elementos que muestren el papel de los contextos en la construcción de significados institucionales para el objeto matemático "integral de una función", en las comunidades matemáticas que dieron origen y desarrollaron dicho objeto.

Aportar elementos que muestren el papel de los contextos en la construcción de significados personales para el objeto matemático "integral de una función", por parte de estudiantes y profesores de cálculo y/o análisis matemático.

En el segundo capítulo profundizamos en los preceptos teóricos con los cuales haremos nuestro estudio y, ligado a los mismos, hacemos una descripción de la estrategia de investigación para desarrollar el trabajo.

En términos generales, el marco teórico con el que trabajaremos es el enfoque ontosemiótico de Juan Díaz Godino. En este enfoque se concibe a los significados como los sistemas de prácticas matemáticas y a los objetos matemáticos como emergentes de dichos sistemas de prácticas.

El enfoque ontosemiótico se ha venido desarrollando en los últimos años para tratar de cubrir los diferentes aspectos tanto de investigación como de propuestas para incidir en el sistema educativo. Su desarrollo se ha venido estructurando en tres núcleos teóricos que podemos identificar como:

Teoría de los significados sistémicos. En esta parte ubicamos la versión pragmática de los significados y la caracterización de los objetos como emergentes de los sistemas de prácticas. De igual forma, en dependencia del sujeto a considerar (un individuo en lo particular o una comunidad), identificamos a los objetos como personales o como institucionales.

Asimismo, tomamos en cuenta la presencia de algunas dualidades que se presentan en la actividad matemática al considerar tanto a los sujetos que intervienen en la misma (personas en lo individual o instituciones), como a las componentes de significado. Las dualidades que tomaremos en cuenta son las siguientes:

- Dualidad personal e institucional.
- Dualidad ostensiva y no ostensiva.
- Dualidad extensiva e intensiva (ejemplar y tipo).
- Dualidad elemental y sistémica.
- Dualidad expresión y contenido.

Teoría de las funciones semióticas. Al enfrentar situaciones problémicas, los sujetos (individuos o comunidades) emplean elementos ostensivos, como expresiones verbales, ya sea escritas u orales, gráficas, gestos, etc. y elementos no ostensivos, como conceptos, propiedades y otros, pero lo único que es perceptible de su actividad es el uso de los elementos ostensivos. Una tarea central del investigador es entonces determinar los elementos no ostensivos a partir de los elementos ostensivos.

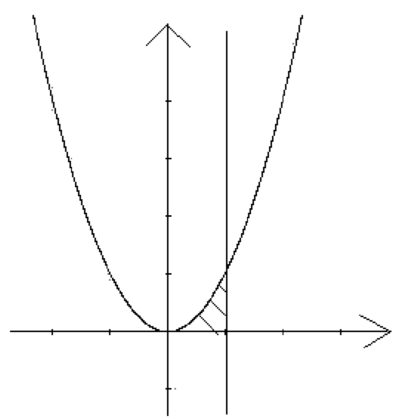
Para hacer esta labor, nos basamos en la noción de función semiótica, a la que concebimos como la relación entre dos funtivos o partes de un texto, a la primera de las cuales identificamos como plano de expresión u objeto inicial, considerado como el signo, y una segunda, que denominamos plano de contenido u objeto final, al que consideramos como el significado del signo.

Asimismo, debemos tomar en cuenta un criterio o regla de correspondencia que permite interpretar el plano de expresión para determinar el plano del contenido.

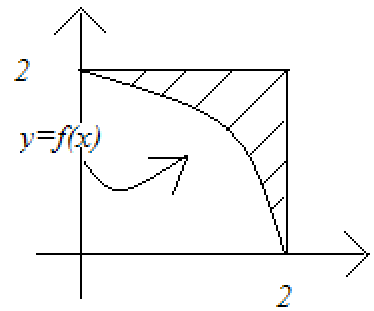
La concepción de función semiótica viene a transformar la noción clásica de representación, en la cual se concibe al lenguaje o a los signos como representantes de los objetos matemáticos o de sus significados, es decir, se concibe al signo como puesto “en lugar de”. Pero en las funciones semióticas se considera que las mismas entidades abstractas pueden ser colocadas en lugar de otras entidades y así, cualquiera de los seis objetos primarios o componentes del significado puede aparecer como parte del plano de expresión o como parte del contenido.

Un ejemplo de esta doble posibilidad lo tenemos en las siguientes situaciones:

Al calcular el área de la figura acotada por la gráfica de la parábola cuya expresión algebraica es $y = x^2$, el eje de las abscisas y la recta $x = 1$, como se ilustra en la figura, un procedimiento típico consiste en determinar el valor de una integral, en este caso $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. En este caso el plano de expresión corresponde a una integral (elemento ostensivo) y el plano de contenido es el área de una figura (elemento no ostensivo). De esta manera, la integral es el “representante” del área calculada.



Pero si en la siguiente figura,



nuestro interés es obtener el valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$, conociendo que el área sombreada es *1*, entonces una manera de proceder es considerar que el área del cuadrado ilustrado en la figura es 4 y al restarle el valor del área sombreada encontramos que $A = 4 - 1 = 3$, el cual corresponde al valor de la integral solicitada. Los papeles de área y de integral estarán ahora invertidos, el área corresponderá al plano de expresión (elemento ostensivo) y la integral al plano de contenido (elemento no ostensivo) y el área viene a ser el "representante" de la integral.

Teoría de las configuraciones didácticas y criterios de idoneidad. En esta parte, el propósito es analizar y diseñar las acciones didácticas pertinentes para una positiva intervención en los hechos educativos.

Dadas las características de la investigación, sólo nos basaremos en los primeros dos de los tres núcleos teóricos.

En el tercer capítulo presentamos los resultados del estudio histórico-epistemológico de la integral de una función, dividido en tres grandes apartados: la integral en la versión de Leibniz, las aportaciones de Euler y la versión de Cauchy y Riemann. En esta parte el interés se centra en la determinación de los significados institucionales sobre la integral de una función.

En realidad los trabajos que se discuten incluyen las aportaciones de otros matemáticos o científicos, pero las versiones de integral y otros objetos matemáticos estrechamente relacionados que centran el trabajo, son las tres señaladas, en las que identificamos momentos de especial trascendencia en el desarrollo de la integral y del cálculo en su conjunto.

Un primer aspecto que resaltamos es retomado de Bos (1974) quien plantea que el cálculo pasa por una etapa geométrica en los trabajos y la época de Leibniz, una extensión de los objetos creados en esta etapa hacia las variables generalizadas en los trabajos de Euler y, una tercera etapa, en la que el objeto "diferencial" es sustituido por el de derivada de una función.

Compartiendo el planteamiento general de Bos, en nuestro análisis no discutimos de principio las aportaciones de Newton, pero a lo largo del desarrollo del estudio realizado fue imprescindible retomar su versión y la de algunos de sus seguidores, pues sus ideas jugaron también un papel de primera importancia en la creación y evolución del cálculo y/o análisis.

En cada caso o etapa, recurrimos al análisis de fuentes originales o de traducciones a otros idiomas, por lo que hubo necesidad de hacer, por nuestra parte, traducciones al español de artículos en latín, en francés o en inglés, según la fuente a la que tuvimos acceso, con el propósito de presentar, hasta donde fuera posible, una versión fidedigna de la producción matemática de los autores analizados.

La atención estuvo centrada en la detección de las situaciones problémicas, el lenguaje en que expresaban los problemas matemáticos, los procedimientos que realizaban, los conceptos a que recurrían, las propiedades de los objetos y los argumentos empleados, a los que reconocemos como objetos matemáticos o componentes del significado, para estudiar cuáles fueron los nuevos objetos que surgieron al resolver las situaciones problémicas que iban abordando.

En términos generales, mostramos selecciones de aspectos que nos parecieron representativos en torno a la noción de integral, pero en más de una ocasión tuvimos que estudiar otros aspectos sin los cuales no sería posible explicarla. Entre ellos están las cantidades diferenciales, las cantidades infinitamente pequeñas, las cantidades infinitamente grandes, las funciones, la noción de convergencia, etc.

La caracterización que presentamos es extensa y resulta complicado resumirla en pocas líneas, pero queremos destacar que, desde nuestra perspectiva, hemos encontrado elementos que aportan evidencias en el sentido de que los contextos dieron lugar a objetos y significaciones diferentes del cálculo, incluyendo el de integral. Estas diferencias tienen su origen en las mismas situaciones problémicas que fueron tratadas en cada etapa y que, a manera de ejemplo de nuestro análisis, mostramos a continuación:

Principales situaciones problémicas de Leibniz.

- La primera de las situaciones problémicas que Leibniz enfrentó, con relación al cálculo fue la determinación de las sumas infinitas de cantidades “infinitamente pequeñas” o que “devienen a cero”, en las que, por medio de la aplicación de la ley de continuidad, resolvió mediante procedimientos análogos a los que previamente había empleado para sumas finitas.

- La principal situación que abordó, en lo que toca a la noción de integral, fue la creación de un método general para resolver los problemas de cuadratura de figuras con lados curvilíneos. Este problema se remonta a la época de los griegos y en el transcurso del tiempo se habían resuelto ciertos casos particulares, como el área de un sector parabólico, pero no se contaba con un procedimiento general para abordar las diversas figuras que incluían a las curvas conocidas en esa época. La búsqueda de solución al problema se había intensificado con la aparición de la geometría analítica.

- Otro problema, cuyos antecedentes se remontan a la época de los griegos y que se esperaba resolver con el empleo de los métodos de la geometría analítica, era el de la determinación de las rectas tangentes a una curva arbitraria.
  En la búsqueda de solución al problema de la cuadratura, Leibniz resolvió ambas situaciones, mostrando cómo es que estos dos problemas, aparentemente sin conexión, podían tratarse conjuntamente, visualizándose como problemas inversos.

- Una vez que los problemas de las rectas tangentes y las cuadraturas se resolvieron por medio de su cálculo, Leibniz se planteó el problema de ampliar sus resultados con el propósito de analizar los fenómenos físicos e incluir en sus procedimientos el tratamiento de las curvas mecánicas.

Principales situaciones problémicas de Euler.

- Generalización de los conceptos, técnicas y procedimientos del cálculo diferencial e integral, para abarcar todo tipo de variables conocidas, sin limitarse al tratamiento de las curvas. Dado que los intereses de Euler abarcaban un numeroso cúmulo de problemas tanto de física como de matemáticas, entre otros el estudio de los fluidos, la mecánica y la hidrodinámica, se ocupó de aplicar las técnicas del cálculo a situaciones diversas en las cuales el tratamiento de las curvas era insuficiente y extendió los alcances del cálculo a las variables generalizadas.
- Fundamentación del cálculo y/o análisis por medio de las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes para las variables generalizadas. Para lograr esta fundamentación Euler no sólo retomó el carácter pragmático de Leibniz, sino que tomó como eje de análisis su concepción del mundo y de la materia, de la continuidad y la completez.
- Sistematización de los resultados del cálculo y/o análisis, partiendo de los elementos primarios o elementales hacia los resultados más complejos. Su preocupación por organizar el cálculo y/o análisis lo condujo a plantearse la mejor forma para hacerlo, encontrando en el álgebra el recurso adecuado, toda vez que los principios algebraicos eran reconocidos como válidos y fundamentar el cálculo con base en el álgebra conduciría a darle validez a las técnicas del cálculo.
- Sistematización de los resultados del cálculo y/o análisis con el propósito de presentarlos didácticamente a los estudiantes, centrando primero la atención en los recursos algebraicos y el tratamiento del infinito, para después aplicarlo en el cálculo, primordialmente en el cálculo integral, en donde los recursos algebraicos juegan un papel central.

Principales situaciones problémicas de Cauchy y Riemann

- Fundamentación del cálculo y/o análisis sobre bases aceptadas universalmente, apoyándose en las reglas de la aritmética para la definición de los objetos elementales.

- Establecimiento, con base en las nuevas ideas de fundamentación, de los resultados principales del cálculo, como es el caso del Teorema Fundamental del Cálculo, el cual relaciona a la derivada con la integral.

Los desarrollos realizados en cada una de esas épocas, iniciando con las situaciones problémicas, son diferentes en cada uno de los aspectos que se analizan en el presente trabajo. Para ilustrar nuestra afirmación, mencionaremos que las situaciones geométricas de Leibniz fueron tratadas por Leibniz precisamente con la creación de objetos geométricos, con diferenciales concebidos, en principio, como segmentos de longitud "inasignable", "infinitamente pequeños". Esta concepción se extendió después para incluir diferenciales de área y de volumen. Los diferenciales no eran variables, eran elementos geométricos.

Posteriormente Euler retomó la misma idea, pero la extendió a las variables generalizadas. De esta manera una cantidad diferencial podía ser una parte infinitamente pequeña de cualquier variable, una diferencial de presión, una diferencial de fuerza, una diferencial de velocidad, etc. y también una diferencial de longitud, de área o de volumen.

En cambio, con Cauchy las cantidades diferenciales dejaron de ser cantidades infinitamente pequeñas para concebirlas como variables obtenidas a partir de la noción de derivada, la cual vino a desempeñar el papel que antes jugaba la diferencial en Leibniz y Euler.

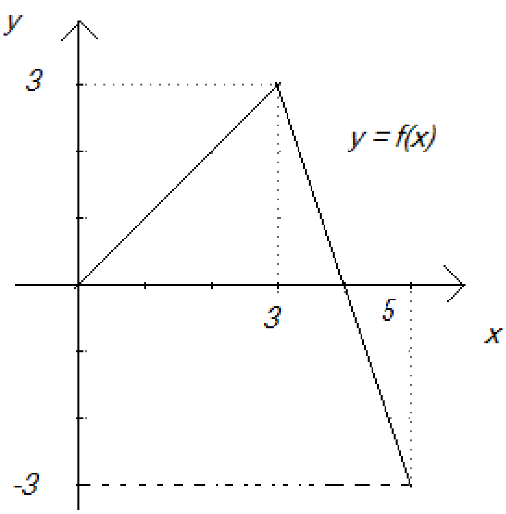
Consecuentemente a la emergencia de estos objetos matemáticos y sus diversas significaciones, los lenguajes, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentaciones se fueron modificando, ideas en las que profundizaremos en el desarrollo del trabajo.

Posteriormente, en el Capítulo IV, presentamos los resultados de la aplicación de un instrumento de investigación para conocer los significados personales de algunos estudiantes y profesores sobre el objeto "integral de una función". El instrumento de investigación a que hacemos referencia fue aplicado a profesores con experiencia en la enseñanza del cálculo y estudiantes que hubieran cubierto ya sus cursos de cálculo integral.

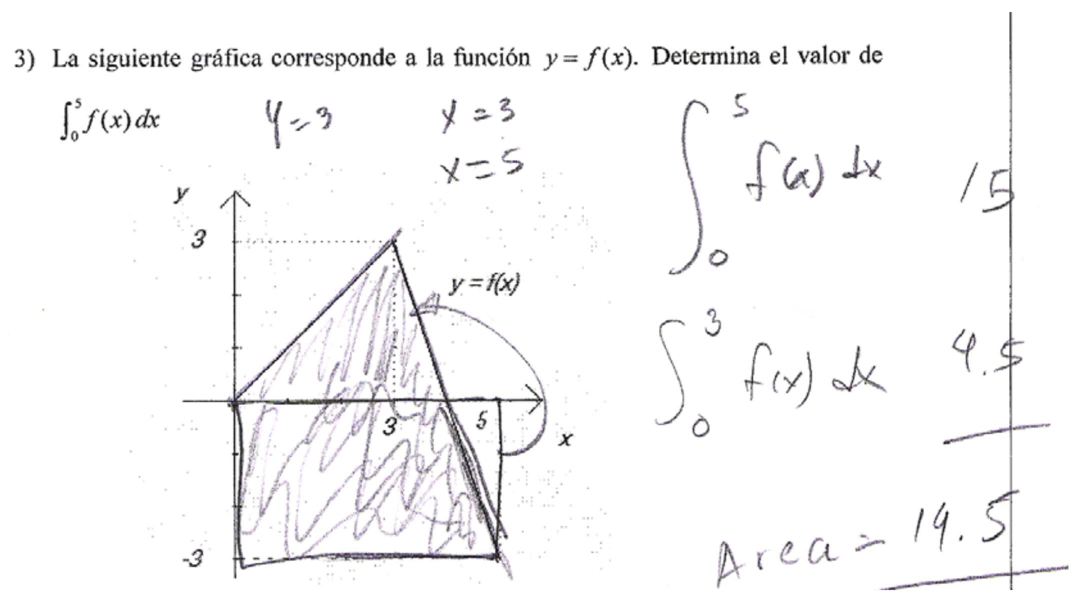
Nuestro propósito no consistió en estudiar los significados que se producían al someter a los estudiantes y profesores a una experiencia de diseño didáctico especial, lo que nos propusimos fue conocer las significaciones que asignaban a la integral de una función en cursos típicos de cálculo.

Algunos de los resultados que obtuvimos apuntan también en la dirección de apoyar nuestra hipótesis sobre el papel de los contextos en la asignación de significados para la integral. Un ejemplo que ilustra la afirmación es la siguiente:

Se pidió a los participantes en la investigación que determinaran el valor de la integral $\int_0^5 f(x)\,dx$, para la función cuya gráfica se muestra a continuación.

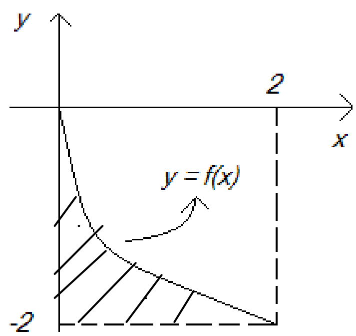


Una de las respuestas obtenidas, presentada por un estudiante de ingeniería, fue la siguiente:

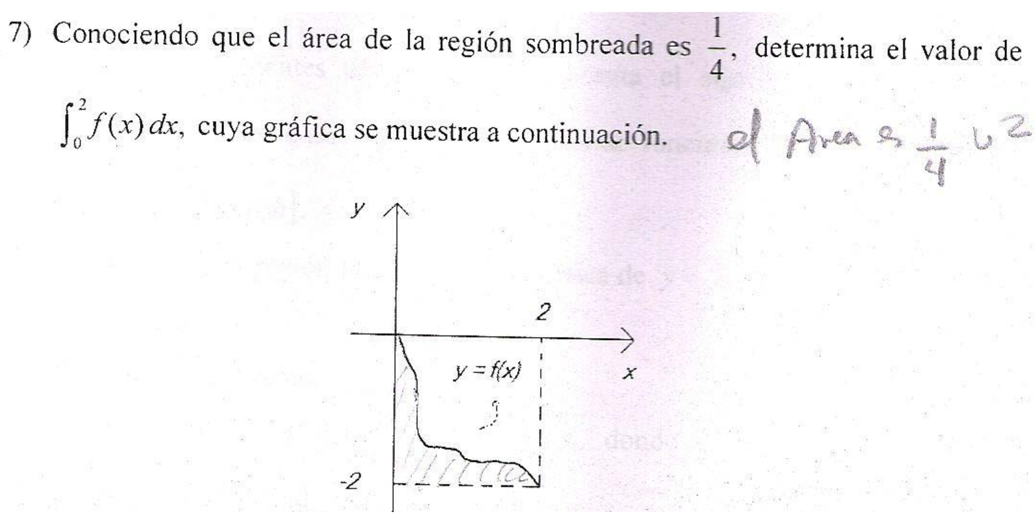


Como podemos observar, la respuesta del estudiante consistió en determinar el área del trapezoide sombreado. ¿Cómo debemos interpretar esta respuesta? La explicación que nos parece coherente con los sistemas de prácticas que se desarrollan en los salones de clase, en los que por lo regular no se incluyen funciones de este tipo, es que el estudiante hizo una interpretación de la frase común de que la integral es el "área bajo la curva". Pero si las experiencias se restringen a los casos en los cuales las funciones son positivas, enfrentado a un problema como éste, el estudiante procede conforme a su interpretación de la frase y su consecuente significación de integral.

Esta misma idea la vimos reflejada en otros problemas. En el caso siguiente, solicitamos a los participantes en la investigación que determinaran el valor de la integral $\int_0^2 f(x)\,dx$, sabiendo que el área sombreada en la siguiente figura es igual a $1/4$.



En este caso, un profesor de nivel superior, con experiencia de enseñanza del cálculo en el bachillerato, proporcionó la siguiente respuesta:


7) Conociendo que el área de la región sombreada es $\frac{1}{4}$, determina el valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$, cuya gráfica se muestra a continuación. el Area es $\frac{1}{4}$ u^2

De su respuesta se desprende que para él es equivalente determinar el valor de la integral y calcular un área, lo cual nos parece adecuado, pero su interpretación es similar a la anterior y su respuesta es considerar “el área bajo la curva”, con la peculiar manera de concebirla.

Con estos ejemplos ilustramos el tipo de situaciones y análisis que se desarrollan en el capítulo IV, con lo cual completamos la parte correspondiente a nuestra experimentación.

En el capítulo siguiente, el quinto, establecemos las conclusiones generales de nuestra investigación, resaltando algunos aspectos centrales de los resultados obtenidos y su relación con nuestro problema de investigación y los objetivos que nos formulamos desde un principio. La conclusión más importante consiste en que, desde nuestra perspectiva, encontramos evidencia de que los significados que se asignan a los objetos matemáticos dependen de los contextos en los que se crean y desarrollan.

CAPÍTULO 1
EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN E INVESTIGACIONES RELACIONADAS

1.1 EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y SU JUSTIFICACIÓN

Uno de los intereses primordiales de la enseñanza en cualquier nivel educativo es la formación de individuos con habilidades y capacidades para resolver problemas de su entorno.

Para la consecución de este objetivo se espera que el aprendizaje de los estudiantes les permita transferir el conocimiento construido en el contexto escolar a situaciones contextuales diferentes a aquellas que les dieron origen.

Uno de los casos más representativos de concebir la transferencia lo tuvimos en la enseñanza de las llamadas matemáticas modernas. En la propuesta curricular diseñada, los libros de texto y los materiales de apoyo, aunados a amplios programas de formación de profesores en esta línea, se presentaba a las matemáticas a partir de teorías generales y abstractas, más acordes a las formas de organizar a las matemáticas en el sentido de Bourbaki, con la convicción de que ello permitiría una mejor comprensión de las mismas y la aplicación posterior se realizaría de manera sencilla, pues tener claridad sobre la estructura general de las matemáticas y sus procedimientos, llevaría a ver cada caso particular como un ejemplo específico.

La potenciación del aprendizaje de las matemáticas y sus aplicaciones por amplios sectores de la sociedad no sólo no se dio, sino que además se produjeron diversos problemas que, en buena medida, para entenderlos y superarlos motivaron el incremento de la investigación sobre los problemas del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, dando lugar a lo que hoy conocemos como Matemática Educativa.

El contexto general en el que se presentaban las nociones matemáticas era el del formalismo, siempre con base en la teoría de conjuntos como antecedente y primer tema de los cursos y libros de texto. La falta de referencia a problemas, matemáticos y no matemáticos, en los cuales se involucraran dichas nociones, previas a la presentación de definiciones y explicaciones correspondientes llevó a Brousseau [1986: 3] a afirmar que las matemáticas aparecían descontextualizadas, despersonalizadas y destemporalizadas. La idea expresada la compartimos en términos generales, pero desde nuestro punto de vista es preferible hablar de que las nociones matemáticas se presentaban de forma recontextualizda, retemporalizda y repersonalizada, esto es, siempre podemos ubicar un contexto y otras características para las matemáticas, diferentes a aquellas que le dieron origen o a las situaciones problémicas en las que puedan surgir o aplicarse.

La ineficacia de la propuesta de las matemáticas modernas se ponía de manifiesto desde las formas mismas en las cuales se exponían los resultados. Así, una clase típica podía iniciarse con la definición del objeto matemático a estudiar, luego, ante la incomprensión de los estudiantes sobre sus significados, se acompañaba inmediatamente después de uno o varios ejemplos para promover la construcción de algún significado. Es decir, se ejemplificaba la definición en un contexto más familiar para los estudiantes, que permitiera encontrarle un "sentido" a la frase o expresión en discusión. Posteriormente se daba paso a la presentación de otro resultado, definición, teorema o procedimiento, en el cual se empleara la definición previa.

Las dificultades asociadas a la enseñanza de las matemáticas modernas son múltiples pero entre ellas queremos referirnos a las señaladas en diversos reportes de investigación en campos diferentes, en las cuales se dan muestra de las dificultades para que el proceso de transferencia del contexto escolar a otros, ocurra con la eficiencia esperada. La transferencia de conocimientos no se da de manera automática y se requiere del desarrollo de un proceso que permita la aplicación o adaptación del conocimiento construido en un contexto -reconociendo patrones de similitud- en un contexto diferente.

Un ejemplo de las dificultades para obtener la transferencia de conocimientos lo encontramos en la tesis de maestría de José Álvaro Encinas Bringas [2001], quien desarrolló una investigación en el año 2001, en la cual se muestra que estudiantes participantes en una experiencia de aprendizaje de cálculo diferencial, en el contexto del movimiento, no pudieron hacer transferencias de sus construcciones matemáticas a problemas de áreas, volúmenes, temperaturas, energías u otras magnitudes físicas. En su estudio se detectan y caracterizan algunas de las dificultades u obstáculos para ello.

Por su parte, investigadores como Lave [1988] y Walkerdine [1988] hablan de la imposibilidad de la transferencia, debido a las diferencias en las comprensiones cotidianas y los procedimientos mentales que involucran operaciones y relaciones matemáticas, y aquellas que se espera de los estudiantes en la escuela y en tareas experimentales.

De alguna manera este problema de la transferencia nos ha preocupado desde hace años y uno de los antecedentes en los que abordamos el problema fue nuestra propia tesis de maestría en la que, refriéndonos al contexto general de la preparación de profesionales de cualquier carrera en las universidades, planteamos que las formas tradicionales de organizar los currículos, hacían particularmente difícil el proceso de transferencia. Nuestra afirmación obedece a que en los currículos de las carreras el centro se pone en el plan de estudios y éste a su vez es frecuentemente una lista de asignaturas, organizadas de acuerdo a un orden predeterminado, con programas de asignatura que son a su vez, una lista de temas a cubrir por parte de los profesores y los estudiantes.

Así, aún reconociendo que el objetivo central en un currículo es la formación de personal humano capacitado para resolver determinados tipos de problemas, la estrategia central que se plasma en los currículos para lograrlo, es el aprendizaje de conocimientos disciplinarios, en dependencia de la carrera correspondiente.

En los hechos se asume que la acumulación de conocimientos (que en realidad es acumulación de información) por parte de los estudiantes, es suficiente para desarrollar sus capacidades profesionales y se espera que al abandonar la escuela estén en condiciones de transferir o aplicar sus conocimientos en contextos diversos.

Por nuestra parte, propusimos que el eje central del currículo deberían ser las situaciones problémicas, para cuya resolución sería necesario ir construyendo significados para los conocimientos teóricos y prácticos en análisis y discusión, en un encadenamiento tal que las situaciones problémicas se fueran pareciendo cada vez más al tipo de situaciones que se espera aborden los egresados en la práctica de su profesión.

La parte correspondiente a matemáticas implicaba detectar, por una parte, las situaciones problémicas que se semejaran cada vez más a las situaciones que enfrenta un egresado, y, por otra, analizar la forma en la cual aparecen las matemáticas en los cursos de un ingeniero. Nos referimos a los cursos no matemáticos, como los de estructuras, estática, electromagnetismo, termodinámica, diseño de reactores, transferencia de masa, etc., partiendo de la idea de que los cursos de matemáticas en las carreras de ingeniería están al servicio de necesidades que no necesariamente son los de la problemática interna a la propia matemática, sino precisamente a situaciones y problemas provenientes de la física, la química y los cursos específicos de ingeniería.

En la búsqueda de ambos tipos de situaciones problémicas (de las que enfrentan los ingenieros en la práctica de su profesión y de las que abordan los estudiantes en los cursos específicos de su carrera) detectamos o percibimos la existencia de prácticas sociales que se aplican de forma general a la solución de problemas, sin que se puedan reconocer o caracterizar con precisión como métodos matemáticos, aunque sí constituyen una fuente de situaciones problémicas de carácter matemático.

Aquel en el cual centramos nuestra atención fue el de la búsqueda de regularidades en la caracterización de los fenómenos físicos o químicos, regularidad que frecuentemente se buscaba a través de la proporcionalidad. Al observar que muchas leyes de física elemental estaban expresadas por medio de la proporcionalidad decidimos estudiar la situación con mayor detenimiento.

Por ejemplo, aceptando que la proporcionalidad es la forma más simple de relacionar dos variables en una determinada situación, nos parece natural que al estudiar un fenómeno, se busque la existencia de una relación de tal tipo, lo cual es fácilmente detectable. Pero había casos que no son fácilmente detectables como la relación de proporcionalidad de una variable con el cuadrado o el cubo de otra y su aparición da muestra de la búsqueda intencional de la misma.

Casos como éstos los tenemos en la aseveración de Galileo de que la posición de un objeto en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido o, más complejo aún, en la afirmación de Kepler –en la llamada tercer Ley de Kepler- de que el cuadrado del periodo orbital de un planeta (el tiempo transcurrido en darle una vuelta al sol) es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al sol.

Nuestra hipótesis en el sentido de que la búsqueda de proporcionalidad constituía una práctica social trascendente alrededor de la cual giraba la explicación de numerosos fenómenos se reforzó al encontrar opiniones como la siguiente de Galileo Galilei [1997:11-12]:

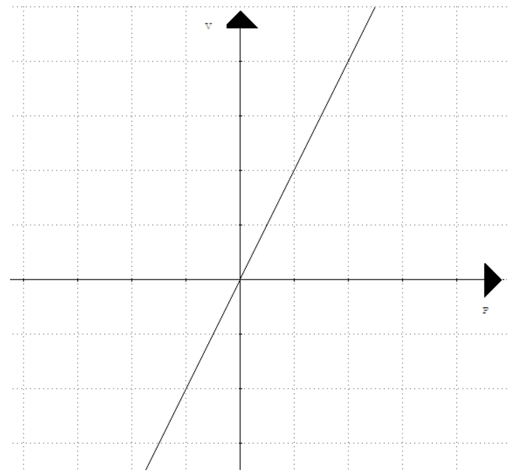
“Porque cuando yo observo que una piedra al descender de una altura, partiendo del reposo, adquiere continuamente nuevos incrementos de velocidad, ¿por qué no he de creer que tales aditamentos se efectúan según el modo más simple y más obvio para todos?

Porque, si observamos con atención, ningún aditamento, ningún incremento hallaremos más simple que aquel que se sobreañade siempre del mismo modo. Lo veremos fácilmente si paramos mientes en la gran afinidad que hay entre el tiempo y el movimiento. Porque así como la uniformidad del movimiento se define y se concibe por medio de la uniformidad de los tiempos y de los espacios (pues al movimiento lo llamamos uniforme, cuando espacios iguales son recorridos en tiempos iguales), así por medio de la igualdad de los intervalos de tiempo, podemos concebir los incrementos de la velocidad simplemente agregados, entendiendo que ese movimiento es acelerado uniformemente y del mismo modo continuamente, siempre que en cualesquiera tiempos iguales se le vayan sobreañadiendo aditamentos iguales de velocidad. De modo que si, tomado un número cualquiera de intervalos iguales de tiempo, a contar desde el primer instante en que el móvil abandona el reposo y comienza el descenso, la velocidad adquirida durante el primero más el segundo intervalo de tiempo, es doble de aquella que el móvil adquirió durante el primer intervalo solo, la velocidad que adquiere durante tres intervalos de tiempo es triple; y la que adquiere en cuatro, cuádruple de la velocidad del primer tiempo. De modo que (para más clara comprensión) si el móvil continuara su movimiento uniformemente con la velocidad adquirida en el primer intervalo de tiempo, este movimiento sería dos veces más tardo que aquel que hubiera alcanzado con la velocidad adquirida en dos intervalos de tiempo.

Y así, no parece repugnar a la recta razón el admitir que el incremento de la velocidad se efectúa según la extensión del tiempo; de donde la definición de movimiento que vamos a tratar puede ser la siguiente: Llamo movimiento igualmente o uniformemente acelerado aquel que, a partir del reposo, va adquiriendo incrementos iguales de velocidad durante intervalos iguales de tiempo."

Realizamos también un estudio exploratorio con profesores de ingeniería con diferentes formaciones y que atendieran cursos diferentes. Preguntamos diferentes aspectos a 5 físicos, 4 matemáticos y 5 ingenieros de diferentes especialidades. A manera de ejemplo presentamos dos de las preguntas o situaciones que les fueron formuladas.

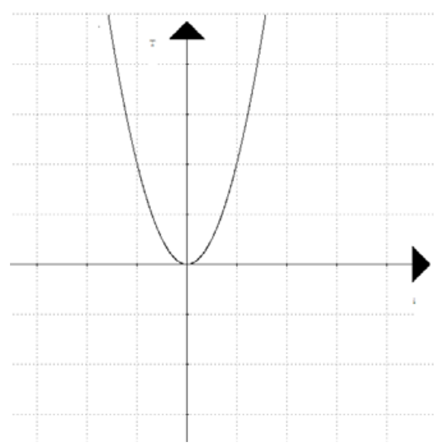
En una de ellas les solicitamos que expresaran todas las características que consideraran relevantes en la relación de las variables V y P que se representaba mediante la siguiente gráfica:



Las respuestas de los matemáticos y los ingenieros fueron similares y se reducían a señalar que V dependía de P, estableciéndose una función lineal entre ellas.

Por su parte los físicos indicaron que V era directamente proporcional a P.

Hicimos una pregunta similar para el caso de la siguiente gráfica y las variable R e i:



La respuesta de los matemáticos y los ingenieros fue que R dependía de i, estableciéndose una función cuadrática. En el caso de los físicos señalaron que R era directamente proporcional al cuadrado de i.

Las diferentes respuestas de los físicos con relación a las de los matemáticos y los ingenieros nos condujeron a reflexionar sobre cuáles eran las causas para que ocurriera así, por qué "leían" las gráficas de una manera diferente. En entrevistas con algunos de ellos nos quedó claro que todos tenían claridad de la linealidad de las funciones y sus características más importantes y lo mismo sucedía con el caso de la proporcionalidad entre los matemáticos y los ingenieros.

La diferencia en sus "lecturas" obedece a las prácticas matemáticas que desarrolla cada uno de ellos. En el caso de los físicos es frecuente que establezcan las propiedades de sus objetos en términos de la proporcionalidad.

Muchos de los fenómenos son conocidos y tratados tanto por físicos, como por matemáticos e ingenieros, pero mientras unos centran sus prácticas en la determinación de las condiciones para que existan soluciones en las expresiones tratadas, como el caso de las ecuaciones diferenciales, otros las ponen en los algoritmos que permiten solucionarlos y otros, como en el caso de los físicos, en las propiedades físicas de los objetos y sus formas de representarlas por medios gráficos, numéricos y/o algebraicos.

A todos ellos pueden interesarles los diferentes aspectos que señalamos pero el centro o énfasis los ponen en diferentes partes y, consecuentemente, desarrollan prácticas diferentes que les conducen a diferentes significaciones de las mismas nociones, enfrentando las situaciones de manera diferente.

Independientemente del curso que tomó el trabajo de tesis en nuestra maestría, lo cual no es aquí el tema, queremos resaltar la idea de que las prácticas matemáticas desarrolladas por las personas en lo individual, o los grupos o comunidades que trabajan en torno a situaciones problémicas similares, tiene un rol fundamental en la significación que se atribuye a los objetos matemáticos.

El camino seguido en nuestra tesis de maestría se corresponde con la búsqueda de un discurso matemático escolar diferente al tradicional y con la búsqueda de propuestas didácticas que tomen en cuenta la complejidad de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en situación escolar. Partíamos de la necesidad de hacer elaboraciones que no sólo consideraran la complejidad del conocimiento matemático en juego y de los procesos cognitivos de los estudiantes, sino también las circunstancias socioculturales en las que se desempeñaban estudiantes y profesores.

Este tipo de acercamientos son producto del desarrollo de Matemática Educativa en México y en el mundo. Aunque los acercamientos que las diferentes comunidades que hacemos trabajo en matemática educativa tienen diferencias en sus prácticas y en los marcos teóricos que elaboramos o usamos, podemos detectar que, en términos generales, hemos ido viviendo etapas similares, avanzando en el análisis de los procesos educativos con una visión sistémica que tome en cuenta los factores cognitivos, epistemológicos, didácticos y socioculturales asociados a tales procesos. En un esfuerzo por hacer una semblanza del proceso de transformación de matemática educativa, Ricardo Cantoral y Rosa María Farfán [2003], ubican cuatro grandes periodos.

En el primero de ellos, con las elaboraciones de los años 70's, las propuestas consistían en hacer presentaciones de las matemáticas que fueran más intuitivas y con exposiciones que dieran "claridad" a los estudiantes sobre los conceptos y los procedimientos a aprender. La atención se ponía en el conocimiento matemático, organizándolo de forma diferente. A este periodo lo identifican con el nombre de "una didáctica sin alumnos".

Posteriormente, a raíz de la presentación del trabajo de Freudenthal en 1980, en la reunión de ICME-4, el centro de atención sufrió modificaciones que influyeron la actividad en matemática educativa. En el escrito de Freudenthal se formulan preguntas del siguiente estilo: ¿cómo aprenden los alumnos? ¿Cómo podemos aprender a observar procesos de aprendizaje? Este tipo de preguntas respondían a la necesidad de profundizar en los estudios de carácter cognitivo, los cuales se mantienen hasta la actualidad. Se señala a los trabajos de Vinner y Tall sobre "imagen del concepto" y "definición del concepto" como una de los primeras aproximaciones en este paradigma cognitivo. Los estudios cognitivos incorporan ahora a los alumnos, pero dejan de lado otros aspectos como las representaciones que los estudiantes tienen sobre la actividad matemática, de sus formas de aprendizaje, de su status como alumno y, en general, de condicionamientos sociales como los proporcionados por el ambiente escolar. A este periodo lo identifican como "una didáctica sin escuela".

Posteriormente encontramos que las aproximaciones sistémicas, como las de la escuela francesa, más específicamente la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, en las que se incorporan consideraciones del ambiente escolar y se analizan los procesos educativos tomando en cuenta a los sujetos que aprenden, a quienes enseñan y a la complejidad del conocimiento matemático involucrado. En acercamientos de esta naturaleza se incluyen entonces, holísticamente, las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica. A este periodo lo denominan “una didáctica en la escuela; pero sin escenarios.

Finalmente señalan que en los últimos años se reconoce que la matemática escolar que se estudia en el nivel superior “está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde, a su vez, adquiere sentido y significación”. Se da pie entonces a aproximaciones teóricas que tomen en cuenta no sólo la necesidad de los análisis sistémicos, sino también la necesidad de situar socialmente la actividad matemática desarrollada. A este nuevo periodo lo identifican como “una didáctica en escenarios socioculturales”. Particularmente importante es la mención que hacen del acercamiento socioepistemológico, que ellos proponen, en el cual se incorporan a los análisis sistémicos cuatro componentes de la construcción del conocimiento, añadiendo a las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica, la dimensión sociocultural o, simplemente, la dimensión social.

El acercamiento socioepistemológico reviste una gran importancia para el desarrollo de matemática educativa en nuestro país y Latinoamérica, pues es el primer acercamiento teórico global que surge aquí e indudablemente ha probado su eficacia en diversas investigaciones, incluyendo diferentes tesis doctorales.

Desde nuestro punto de vista, en la actualidad, casi todos los acercamientos teóricos reconocen la necesidad de incorporar los factores socioculturales en los análisis de los fenómenos educativos que son de interés en matemática educativa, pero nuevamente los acercamientos son diferentes entre los diversos grupos. En el caso de la socioepistemología el énfasis es claro en la necesidad de tomar en cuenta a la dimensión social, a la cual se supeditan las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica.

Por nuestra parte, reconociendo la importancia de los factores sociales y culturales en la construcción de significado para los objetos matemáticos, encontramos en las aportaciones de la socioepistemología una fuente importante de situaciones problémicas para el diseño de actividades de enseñanza y de aprendizaje. Así, es posible incorporar a los diseños de actividades de aprendizaje nociones como las de predicción, modelación, actividades de convención matemática y otras surgidas en el acercamiento socioepistemológico, las cuales han mostrado su eficacia para la construcción de significados. A estas nociones se les identifica con el nombre genérico de *prácticas sociales*.

Sin embargo, interesados en el papel que juegan los contextos en la construcción de significados para los objetos matemáticos, consideramos pertinente incluir diversos factores que juegan un papel preponderante en la actividad matemática, los cuales extraemos de la teoría ontosemiótica de Juan Díaz Godino, en la que se pone al centro a la noción de *práctica matemática*. En este acercamiento se identifican como objetos matemáticos primarios a las situaciones problémicas, el lenguaje, los procedimientos, los conceptos, las propiedades y las argumentaciones que aparecen en las prácticas matemáticas de los individuos o las comunidades que comparten la búsqueda de soluciones a situaciones problémicas semejantes.

En términos generales se considera que las situaciones problémicas proveen el contexto de la actividad matemática, pero por nuestra parte hemos asumido que son estos seis objetos primarios los que proporcionan el contexto de la actividad matemática de los estudiantes. Con la finalidad de respaldar nuestra afirmación, abundaremos un poco en esta idea.

Centrándonos en el nivel de la educación superior, donde realizamos nuestra actividad, tenemos que cuando en un texto o en una clase escolar se plantea una situación problémica, se presenta con un lenguaje que no es neutral y tiene una carga semántica para profesores y estudiantes, se promueven procedimientos y argumentaciones que tampoco son neutrales y en algún sentido, se asumen concepciones y propiedades de los objetos predeterminados por nuestras prácticas escolares previas.

Algunos ejemplos de la incorporación de estos elementos los tenemos en situaciones o experiencias como las que describimos a continuación, algunas sólo referentes al lenguaje empleado, pero otras que incorporan a los objetos matemáticos primarios en su conjunto.

Un caso lo tenemos en el tratamiento que damos a expresiones como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, etc., las cuales, como hemos observado en nuestro desempeño como docentes y en algunas exploraciones investigativas, son percibidas de formas diferentes por estudiantes y profesores. Los matemáticos y los estudiantes avanzados de las carreras de matemáticas, suelen identificarlas con números irracionales, los cuales pueden manipular, representar en la recta real mediante el uso de la regla y el compás, estudiar su cardinalidad, etc.

En tanto que los ingenieros y los estudiantes de ingeniería, suelen asociar los símbolos con la operación aritmética de extracción de una raíz cuadrada. Así los números originalmente involucrados en estos ejemplos son $2,3,5$ y el símbolo $\sqrt{\ }$ denota la operación que habrá de aplicarse a dichos números para obtener otros, que posiblemente reconozcan como irracionales y busquen la "aproximación racional" más conveniente para su manipulación.

Otro caso es reportado en diversas investigaciones, en alusión a la existencia de dificultades para el aprendizaje del cálculo de funciones, cuando al emplear literales como x e y para reportar variables, los estudiantes muestran que el significado asignado a las mismas, es el de "incógnitas", como las conocieron en sus cursos iniciales de álgebra de la escuela secundaria.

Un caso más lo encontramos en Artigue [1995] con el signo de igualdad "=", el cual usamos en diferentes contextos en los que tiene una significación diferente. Por ejemplo, en el caso de la aritmética "significa" que mediante manipulaciones en uno u otro lado de la igualdad podemos arribar a dos expresiones idénticas. En el caso del álgebra elemental la situación es similar, sólo que aquí en ocasiones se arriba a identidades y en otras a ecuaciones de obvia resolución, como $x = 3,$ $x = 7,$ u otra similar, de solución tan sencilla que frecuentemente la interpretamos precisamente como la solución de otras ecuaciones.

En el cálculo, sin embargo, tanto el signo de igualdad como de las literales mismas tienen otras connotaciones. Así, en el desarrollo del álgebra funcional, cuando escribimos la expresión $y = f(x),$ hacemos un uso de las literales que resulta conflictivo para los estudiantes, pues aquí x e y representan variables y no incógnitas. En lo que respecta al signo de igualdad, no estamos afirmando que las transformaciones en los miembros de la igualdad nos conducirán a una identidad o a una ecuación de obvia resolución. En este caso indicamos cuál es la forma de relacionar a la variable independiente x con la variable dependiente y.

En el caso de la convergencia el signo de igualdad tiene, por su parte, otra connotación. Así, cuando escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = L,$ la interpretación del signo "=", al menos operativamente "significa" otra cosa. Aquí significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ siempre que $0<|x-a|<\delta.$ Como vemos la significación que damos al mismo signo es diferente según el contexto en el cual estemos trabajando.

Los ejemplos que hemos citado son muestra de que los elementos que introducimos en el salón de clases y en las prácticas de enseñanza, tienen una carga semántica generada por las prácticas previas en las que los términos y las expresiones han surgido. A los elementos que introducimos en las prácticas de enseñanza, los objetos matemáticos primarios (situaciones problémicas, lenguaje, procedimientos, conceptos, propiedades o atributos de los objetos, argumentaciones), los identificamos como parte esencial del contexto.

Compartimos la idea de que el contexto incluye muchos otros factores, de naturaleza biológica, sociocultural, económica, etc. Todos estos factores contextuales juegan un papel en la construcción de significados para los objetos matemáticos por parte de los estudiantes, y en diferentes enfoques teóricos y propuestas didácticas se incluyen aspectos relacionados con ello.

Las formas de concebir a los contextos e incorporarlos en la investigación y el diseño de las actividades de enseñanza y de aprendizaje son diferentes en cada enfoque teórico, pero la mayoría tiene en común, desde nuestra perspectiva, la atención centrada en las situaciones problémicas que promueven la actividad matemática, dejando de lado aspectos como el papel del lenguaje en el que se plantean y resuelven dichas situaciones, los procedimientos matemáticos que se promueven entre los estudiantes, las propiedades que se atribuyen a los objetos matemáticos, las concepciones que se asumen de los objetos matemáticos y las argumentaciones con las que se validan los resultados.

Por supuesto que no planteamos que estos elementos no estén presentes, sólo afirmamos que el énfasis se pone en las situaciones problémicas. Por ejemplo, en las propuestas didácticas que se conocen como "matemáticas en contexto", se propone que las actividades matemáticas se centren en la resolución de problemas extramatemáticos, problemas "de la vida real", sea lo que sea que ello signifique.

Las investigaciones de corte etnográfico, como las de Lave [1988], muestran que la matemática "en contexto" tiene serias dificultades, pues los procedimientos mentales que se utilizan en la resolución de situaciones elementales, cotidianas o de aplicación, son diferentes de las que se esperan de un estudiante en la escuela, dificultando la transferencia de conocimientos en el contexto en el que se discuten las ideas en el salón de clases, hacia la resolución de problemas en contextos diferentes.

Las prácticas sociales de la socioepistemología tienen que ver, desde nuestra interpretación, con los contextos socioculturales que llevan a las personas o a las comunidades a hacer actividad matemática, con las situaciones previas a la producción matemática.

Nuestro interés primordial es, precisamente, estudiar el papel que juega el contexto en la actividad matemática, entendiendo el contexto como los elementos primarios que se ponen en juego al estudiar y desarrollar las matemáticas: situaciones problémicas, lenguaje, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentaciones.

Tanto por su importancia en la formación de diversos profesionales, como del área en la que nos desempeñamos, limitaremos nuestro estudio al caso del cálculo diferencial e integral y, mas específicamente, al de la integral de una función real de variable real.

Los ejemplos que hemos citado están referidos a las prácticas de enseñanza y a los elementos que llevamos a las aulas, pero de igual forma pueden hacerse consideraciones respecto a la producción matemática en las comunidades de expertos, en las cuales los contextos parecieran jugar un papel trascendente en la construcción de significados y la creación misma de nuevos objetos matemáticos.

Todas estas consideraciones nos conducen a formularnos un problema de investigación, que resumimos por medio de la siguiente pregunta:

¿Cuál es el papel que juega el contexto en la construcción de significados para la integral de una función?

En el presente trabajo partiremos de una tesis, que da respuesta a esta pregunta en el sentido de que los contextos, como los hemos caracterizado, juegan un papel de primera importancia, en la construcción de significados para los objetos matemáticos, lo cual pretendemos ejemplificar con el caso de la integral de una función.

Consecuentemente con la tesis que sostendremos en el trabajo, nos proponemos alcanzar el siguiente

Objetivo general:

Aportar elementos que muestren la importancia de los contextos en la construcción de significado para la integral de una función.

Dado que nuestro propósito es analizar el papel de los contextos en la asignación de significados tanto en la producción matemática de las comunidades de expertos, como en el sistema escolar, nuestro objetivo general lo hemos desglosado en los dos siguientes

Objetivos específicos:

1. Aportar elementos que muestren el papel de los contextos en la construcción de significados institucionales para el objeto matemático "integral de una función", en las comunidades matemáticas que dieron origen y desarrollaron dicho objeto y sus correspondientes significaciones institucionales.

2. Aportar elementos que muestren el papel de los contextos en la construcción de significados personales para el objeto matemático "integral de una función", por parte de estudiantes y profesores de cálculo y/o análisis matemático.

Para la consecución de dichos objetivos, con los cuales pretendemos aportar elementos para dar respuesta al problema de investigación, desarrollaremos una estrategia de investigación que incluya el estudio del desarrollo histórico-epistemológico de la integral de una función real de variable real y la aplicación de un instrumento de investigación para aplicarse a profesores de cálculo y estudiantes que hayan revisado el tema en sus cursos de matemáticas correspondientes.

1.2 INVESTIGACIONES RELACIONADAS

Una de las disciplinas matemáticas a las que mayor atención se ha puesto en las investigaciones de matemática educativa es la del cálculo diferencial e integral. Las investigaciones al respecto han abarcado una gran variedad de temas y se han realizado bajos diversos acercamientos teóricos.

Entre los temas estudiados están: números reales, funciones, convergencia, continuidad, derivada, integral, series, teorema de Taylor, por citar algunos.

El énfasis que se ha puesto a cada investigación ha sido también diverso, en dependencia de los objetivos que cada trabajo se ha formulado. Así, encontramos investigaciones que se centran en la ejecución de un determinado diseño de enseñanza, otras cuyo propósito es la detección de obstáculos (epistemológicos, cognitivos y didácticos), otras con análisis sobre el desarrollo de los cambios conceptuales en algún tópico específico, otras más cuyo propósito es caracterizar epistemológicamente –bajo un determinado enfoque teórico- el desarrollo del cálculo o alguno de sus objetos, otras más que hacen análisis de fenómenos de transposición didáctica, así como también aquellas investigaciones que procuran establecer el papel de una determinada práctica social en el desarrollo del cálculo.

Para ubicar de mejor manera la investigación que aquí reportamos, presentamos un panorama general de los trabajos que hasta el momento se han realizado, sin pretensiones de ser exhaustivos, lo cual escapa a las posibilidades e intenciones del estudio. La mayoría de los estudios que se reseñan son referentes a la integral de una función, aunque también se han incluido otros que, en algún sentido, proporcionan elementos importantes a considerar para el desarrollo de nuestro trabajo.

En los primeros trabajos que presentamos se refleja el tipo de investigaciones que se hacían en la década de los 80's con énfasis en el diseño de actividades de enseñanza y sus posibilidades de uso, situación que fue modificándose paulatinamente para cubrir otros aspectos.

Así por ejemplo, en Quezada y Ramírez [1986:2] se reporta que en el bachillerato se estudian fundamentalmente los algoritmos de derivación e integración, destacándose entre los últimos "los métodos de integración por partes, sustitución y fracciones racionales, aplicados a funciones algebraicas, trigonométricas y logarítmicas". El énfasis del trabajo se pone en la determinación de los prerrequisitos de álgebra y de cálculo diferencial para obtener un buen desempeño en el cálculo de primitivas.

En Becerril [1987] se señala también el énfasis del estudio de la integral a partir de los procesos de antiderivación, pero la atención se pone en el caso de las funciones que no tienen antiderivada, entre ellas las que se pueden representar analíticamente mediante las expresiones $f(x) = e^{-x^2}$, $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ $x > 0$ y $f(x) = \frac{sen\,x}{x}$ $x \neq 0$.

En este trabajo se presentan algunos resultados matemáticos que justifican la inexistencia de antiderivadas para este tipo de funciones, con énfasis en los aspectos matemáticos, partiendo de las aportaciones de Joseph Liouville al final del Siglo XIX, al abordar el problema de las condiciones para que una función tenga antiderivada. Aunque enfocada a los aspectos matemáticos disciplinares, el tratamiento de estos casos permite enriquecer en el aula los sistemas de prácticas en torno a la integral.

Otro trabajo sobre la integral lo encontramos en Saldaña [1988]. Aquí también se plantea que en el bachillerato se presenta regularmente a la integral mediante el proceso inverso de antiderivación y el teorema fundamental del cálculo, en tanto que en el nivel universitario el primer acercamiento a la integral es mediante sumas de Riemann, suscitando discusiones sobre las ventajas y desventajas de una u otra presentación.

Para profundizar en estos aspectos, se hace un estudio histórico-epistemológico de la integral de una función, a partir de la noción de área, iniciando desde el Neolítico con el desarrollo de la cerámica y la agricultura, hasta el siglo XIX, con los trabajos de Cauchy y Riemann.

Una perspectiva diferente, también ligada a la enseñanza de la integral, la encontramos en Quevedo [1990], en la cual se presentan actividades de la integral centradas en el cálculo de áreas y de volúmenes, mediante el uso de la computadora. En este caso se abordan lo problemas de integración haciendo uso de los recursos visuales.

En los estudios señalados hasta ahora pueden notarse los tipos de trabajos que se hacían inicialmente, estrechamente ligados a problemas de enseñanza y centrados en los aspectos disciplinares. Asimismo, es posible observar que se incorporaban paulatinamente otros elementos, como los estudios epistemológicos, el papel de la visualización y el empleo de computadoras.

Con la evolución de nuestra disciplina y la consideración de otros factores, entre ellos los mecanismos de aprendizaje y los escenarios socioculturales en los que los procesos de enseñanza y de aprendizaje tienen efecto, los tipos de investigaciones se fueron modificando para incluir otros aspectos o incorporar otras visiones.

La creación y desarrollo de diferentes marcos teóricos condujo a interpretaciones diversas sobre los mismos fenómenos. En muchos de dichos enfoques teóricos se pone de relevancia la necesidad de incorporar visiones globales y sistémicas sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje, pero el énfasis se pone en uno u otro determinado aspecto, ya sea el referente a las prácticas sociales, las prácticas matemáticas, el análisis epistemológico, el análisis didáctico o el análisis cognitivo. En cualquiera que sea el caso, las investigaciones resultan teóricamente más sólidas, sin perder de vista que el objetivo social de la matemática educativa obliga a considerar las formas de intervenir en el sistema educativo, para mejorarlo.

La descripción de las investigaciones que señalaremos la haremos sin seguir necesariamente un orden cronológico, basándonos en la presentación de algunas ideas que muestran el tipo de investigaciones realizadas hasta el momento, con el propósito de identificar las ideas sobre las que se han desarrollado.

En Artigue (1996) se mencionan algunos obstáculos detectados en la enseñanza de los principios del cálculo en el nivel superior, en un estudio en el que se tratan diversos tópicos, entre ellos el sistema de los números reales, la noción de igualdad (como se usa por ejemplo en la caracterización del límite de una función), convergencia, continuidad, derivada e integral. Los obstáculos señalados pueden ser, según el caso, epistemológicos, cognitivos o didácticos.

En lo que se refiere al tratamiento de la integral en el nivel superior, Artigue señala, siguiendo a Poincaré, que el conocimiento previo de los estudiantes, con el estudio realizado en el bachillerato, les lleva a restringir el significado de la integral al "área bajo la curva" y a la antiderivada.

Con base en una idea similar, en Ayala [2003] se sostiene que el uso pragmático que suele darse al teorema fundamental del cálculo, restringe el significado de la integral y los estudiantes y profesores asocian la integral sólo con el proceso de antiderivación.

El estudio se basa en la noción de comprensión establecida en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática. Para postular la comprensión del enunciado de un teorema, en Ayala [2003: 22] se proponen los siguientes criterios:

"C1. Reconstruir una versión correcta e interpretarlo adecuadamente en algún contexto.

C2. Identificar los términos u objetos matemáticos básicos que se ponen en juego.

C3. Argumentar, con situaciones matemáticas o ejemplos, el porqué el teorema sólo puede garantizar la(s) conclusión(es) bajo la(s) hipótesis establecida(s).

C4. Utilizar el enunciado adecuadamente según sus diferentes usos y contextos en el que ofrece soluciones".

Con base en estos criterios se aplicó un cuestionario a profesores de cálculo y de análisis matemático matemáticas en distintas carreras de la Universidad de Sonora, México, de las cuales se extrajeron conclusiones sobre los significados personales de los profesores y se conjeturó sobre la existencia de algunos obstáculos. Entre los resultados obtenidos están algunos que no son exclusivos de la integral en sí misma, sino de los objetos asociados a ella. Por ejemplo, un obstáculo detectado para la comprensión del teorema fundamental del cálculo es la significación de la continuidad como una propiedad global de las funciones y la discontinuidad como una situación puntual aislada y simple. Otras, son más específicas, por ejemplo la identificación de la función integral $\int_a^x f(t)\,dt$ como antiderivada de f y consecuentemente como una función representable analíticamente

Otro trabajo de interés es la tesis doctoral de Ricardo Pulido, la cual trata de aspectos relacionados con el cálculo diferencial, específicamente sobre las diferentes formas en las que el diferencial de una función es tratado en la enseñanza de la física y en la enseñanza de las matemáticas. Se hace un estudio de transposición didáctica, pero, siguiendo las ideas de Michelle Artigue, se muestra cómo en la enseñanza de la física está presente un proceso de transposición didáctica no con base en el proceso de transición de un "saber especializado" hacia "un saber enseñado", como se trata usualmente, sino que se parte de un "saber de uso", en este caso antiguo, el de Leibniz.

En el desarrollo de sus ideas, Pulido hace un análisis epistemológico del cálculo de Leibniz que nos será de utilidad para nuestro trabajo, aunque en nuestro caso pretenderemos avanzar hacia el tratamiento de la integral.

Con el fin de hacer su análisis, en el trabajo se retoman las ideas de Bos sobre el desarrollo del cálculo en Leibniz, señalando las consideraciones fundamentales de Leibniz para establecer su concepción de diferencial en un ambiente geométrico, basado en tres ideas centrales. Así, en Pulido [1998: 5] se dice que "La primera idea es sobre la preocupación más profunda, filosófica, que rodea el trabajo de Leibniz". Esta idea se refiere a la pretensión de Leibniz de escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de argumentación y de razonamiento, en la búsqueda de un lenguaje simbólico general, de carácter universal.

Posteriormente, en Pulido [1998: 6] se dice que "La segunda idea consiste en <u>extrapolar a la geometría aquellos conocimientos propios de lo numérico</u> referentes a ciertas propiedades de las series" y, finalmente, en Pulido [1998:7] se dice que "La tercera idea es <u>la aplicación a cualquier curva del 'triángulo característico'</u>". (Los subrayados son de las citas originales).

El desarrollo posterior de la tesis profundiza en estas ideas y en el desarrollo de la noción de diferencial tanto en matemáticas como en física.

Así como en el caso se la investigación de Pulido, una investigación que no es propiamente sobre la integral pero aporta elementos se análisis importantes y trascendentes, está el trabajo de tesis doctoral de Apolo Castañeda Alonso, en el año 2004, quien desarrolló una investigación de corte socioepistemológico titulada "Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión".

Dado su interés por la evolución didáctica, en esta investigación se hace análisis de textos, tanto antiguos como modernos. En el caso de los textos antiguos encontramos una vertiente epistemológica interesante, toda vez que los libros estudiados no son en principio los de los creadores originales de los objetos del cálculo, sino quienes escribieron, con fines de enseñanza, los resultados obtenidos por los expertos. Particularmente se analizan los textos de L´Hospital y de Agnesi, Analyse des Infiniment Petit pour Intelligence des Lignes Courbes e Institutione Analiche, respectivamente.

Entre las aportaciones de Castañeda tenemos el constructo teórico que denomina *Transposición Didáctica Inversa*. Como señala el propio Castañeda [2004: 234], la transposición didáctica “describe el proceso por el que una idea es llevada de un sitio a otro”. Usualmente se habla de transposición para explicar el proceso mediante el cual el conocimiento matemático es llevado de un ambiente erudito hacia el ámbito de la enseñanza, en la escuela, refiriéndose a este proceso como el del tránsito del “saber sabio” al “saber enseñado”. En la medida que el conocimiento transita de un sitio a otro se puede hablar de etapas de transposición, una de las cuales se produce en el proceso didáctico mismo (tercera etapa de la transposición en términos empleados por Chevalard).

Con base en estas ideas, Castañeda estudia el impacto que tuvieron las obras de L’Hospital y de Agnesi en la obra matemática de los expertos, en el “regreso” de la didáctica al ámbito erudito. Con la difusión de las ideas del cálculo y el acceso a núcleos de población más numerosos que los de los expertos, así como los problemas generados por la manipulación de objetos no del todo claros, en Castañeda [2004: 232] se dice que “… es a partir de los trabajos de L’Hospital y Agnesi, que nuevos matemáticos buscaron ‘fundamentar’ el cálculo (entre ellos Euler) como exigencia de un sector académico preocupado por sistematizar un conocimiento que ya había sido difundido en esa época a partir de los trabajos de L’Hospital y Agnesi”.

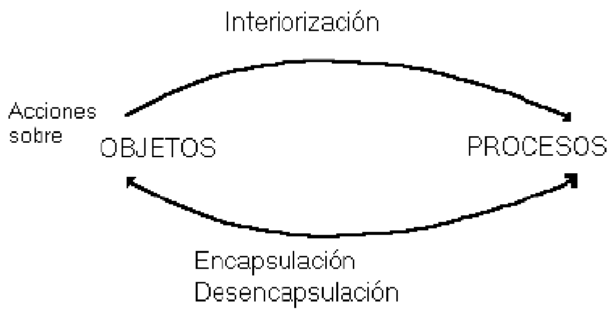
Aquí se plantea, sin embargo, que en la aproximación socioepistemológica no sólo se reconocen los tránsitos de conocimiento matemático sino también de determinados elementos extra matemáticos que requieren ser tomados en cuenta. Las reflexiones alrededor de esta idea conducen a considerar la Transposición Didáctica Inversa no como una tercera etapa de la transposición, en el seno de la propia actividad didáctica, sino, como se dice en Castañeda [2004: 234-235]: “… es un argumento que explica el proceso por el que la obra matemática, que se genera en un ámbito ‘no erudito’, regresa como fuente de ampliación de la obra realizada en el ‘ámbito erudito’. Esto implica más que un tránsito inverso de un ámbito al otro (en el sentido de la transposición didáctica). Pone especial énfasis en describir las condiciones que posibilitan este ‘regreso’ y explica además los procedimientos por lo que ocurre”.

Otro aspecto importante que queremos resaltar del trabajo de Castañeda es que en él se hace explícita la importancia que en la socioepistemología se hace del análisis del contexto, con la idea de que las prácticas sociales determinan la producción matemática en cada etapa o momento. Así, en Castañeda [2004: 13] se dice que "En una primera aproximación, se puede creer que es suficiente conocer la obra matemática para explicar su naturaleza, sin embargo, es claro que como cualquier otra obra humana, el conocimiento se construye como respuesta a una serie de necesidades, a sus intereses que se validan en su entorno".

Este tipo de observaciones muestran la importancia que en la socioepistemología se da a los contextos, partiendo de que las prácticas sociales se constituyen en el eje alrededor del cual se construye la obra matemática en sus diferentes etapas y facetas. En nuestro trabajo compartimos en general esta idea, pero como señalamos en el capítulo II, sobre el marco teórico de nuestra tesis, existen elementos que a nuestro juicio en este momento están ausentes en los análisis socioepistemológicos, centrando su atención en las situaciones problémicas en las que se reflejan las prácticas sociales de referencia.

Otros enfoques hacen énfasis en aspectos cognitivos, como es el caso de los trabajos de Dubinsky, pero en los cuales también se hacen análisis epistemológicos, mediante análisis histórico-críticos.

Dubinsky ha desarrollado la llamada teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas), en la que se plantea que el aprendizaje se da mediante un proceso en el que los individuos primeramente realizamos acciones de transformación de los objetos, con una percepción de que el proceso es externo. La repetición de las acciones permite interiorizar las mismas en un proceso y las reflexiones posteriores del proceso conducen a los individuos a tomar conciencia del mismo y pueden hacer transformaciones (ya sea acciones o procesos) que puedan actuar sobre él, construyen dichas transformaciones y piensan el proceso como un objeto. En este caso se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. En la realización de una acción o un proceso sobre un objeto, los individuos pueden requerir encapsular o desencapsular el objeto, según los requerimientos de la situación, con el propósito de hacer las manipulaciones pertinentes. Los planteamientos de Dubinsky pueden representarse mediante el siguiente diagrama.



Con esta concepción, en Dubinsky [1991: 12-13] se dice “La integral indefinida forma un ejemplo importante que puede ser interpretado como una encapsulación junto a una interiorización. Estimar el área bajo una curva con sumas y pasar al límite, desde luego, es un proceso. Los estudiantes que parecen entender esto a menudo tienen la dificultad con el siguiente paso de variación, digamos, el límite superior de la integral para obtener una función. Lo que nos sugiere la falta del proceso completo de encapsulación del área en un objeto, que podría variar cuando uno de sus parámetros varía. Esto entonces formaría un proceso 'de nivel superior' el cual especifica la función dada por la integral indefinida. La complejidad de este proceso total podría entonces ayudar a explicar por qué los estudiantes tienen tal dificultad no sólo con el Teorema Fundamental de Cálculo, sino también con definiciones poderosas tales como

$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t},\ x > 0$ ”.[1]

En un estudio posterior de Dubinsky [2000] y varios colegas, se hizo un estudio sobre el significado que 32 estudiantes de ingeniería, física y matemáticas que habían estudiado cálculo durante dos semestres y 21 de ellos habían participado un semestre en un curso del proyecto C^4L (Calculus, Concepts, Computers and Cooperative Learning)

[1] “The indefinite integral forms an important example that can be interpreted as encapsulation together with interiorization. Estimating the area under a curve with sums and passing to a limit, of course, a process. Students who seem to understand this often have difficulty with the next step of varying, say, the upper limit of the integral to obtain a function. What is lacking, we suggest, is the encapsulation of the entire area process into an object which could then vary as one of its parameters vary. This would then form a ‘higher-level’ process which specifies the function given by the indefinite integral. The complexity of this total process might then help explain why students have such difficulty with not only the Fundamental Theorem of Calculus, but such powerful definitions as $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t},\ x > 0$.”

impartido a 145 estudiantes, otros 10 habían concluido un segundo semestre standard impartido a cerca de 2000 estudiantes. Sólo uno de ellos había estado en ambos cursos.

Tomando en cuenta que la forma típica de abordar la integral de una función es mediante las sumas de Riemann, un resultado inesperado es que algunos estudiantes habían construido procedimientos similares a los creados en épocas anteriores. En el trabajo que reseñamos se hace un breve análisis del desarrollo de algunas de las ideas del pasado, estableciendo vínculos con las formas de razonar de los estudiantes participantes en la investigación. Profundizando en ello, en Dubinsky [2000: 1] se dice

"En tanto esperábamos que los estudiantes podrían tener problemas calculando integrales definidas, en verdad fue una sorpresa inesperada observar respuestas entre algunos estudiantes que claramente no estaban basadas en el acercamiento de suma de Riemann. De hecho, observamos en las mentes de los estudiantes una intuición coherente de calcular el área, que era muy diferente de la intuición que el curso de cálculo experimental trataba de desarrollar. Nuestros estudiantes no eran los únicos en tener esta intuición: la comparten con la empleada por matemáticos como Arquímedes, Cavalieri, Wallis, y Roverbal ".[2]

Las formas de razonar a que se refiere Dubinsky están desarrolladas en el artículo y son, principalmente, acercamientos a la resolución de problemas empleando procedimientos similares a los desprendidos de las nociones de infinitésimos e indivisibles.

Otros trabajo de interés, con aportaciones trascendentes sobre la construcción de significados para la integral lo encontramos en Cordero [1994], con una investigación cuya perspectiva de análisis estuvo basada en dos ejes: el discurso matemático escolar (DME) y el conocimiento ante problemas matemáticos.

En la investigación de Cordero [1994: 1] se señala que los procesos de enseñanza y de aprendizaje son vistos con la consideración de que la matemática es un conocimiento acabado y en didáctica el conocimiento se entiende a través de su repetición. Tomando en cuenta el primer eje, se señala que en la enseñanza tradicional, la matemática tiene como

[2] “While we expected that students might have trouble computing definite integrals, it was indeed an unexpected surprise to observe responses among some students that were clearly not based on the Riemann sum approach. In fact, we observed a coherent intuition of computing the area in students’ minds that was very different from the intuition the experimental calculus course was trying to develop. Our students were not alone in having this intuition: they share it with one employed by mathematicians like Archimedes, Cavalieri, Wallis, and Roverbal”.

característica esencial "que se ha limitado al plano del lenguaje y ha dejado de lado el papel de las acciones".

En lo que respecta al conocimiento ante los problemas matemáticos, se plantea que el conocimiento matemático debe de ser considerado como un objeto epistémico y las acciones de enseñanza deben orientarse hacia la identificación de las acciones con más énfasis en los procesos del conocimiento que en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

En Cordero [1994: 1-2] se indica que "entonces, el segundo eje, deriva una apreciación más sobre la problemática de la enseñanza; la forma de presentar el conocimiento matemático en la enseñanza tradicional no se parece a la forma de pensar la matemática". Siguiendo a Vergnaud, se admite la idea de que el conocimiento se da y adquiere a través de problemas y su resolución, es decir, "los problemas para ser resueltos son la fuente del conocimiento y la resolución de problemas es el criterio de la adquisición de conocimiento".

Éste es un trabajo cuyas aportaciones se enmarcan entre los pioneros de lo que posteriormente se ha conocido como socioepistemología, en la cual se realizan análisis sistémicos considerando cuatro componentes principales del hecho didáctico: la componente epistémica, la didáctica, la cognitiva y la social, ésta última se asume como el eje a la cual se supeditan las otras tres. En la tesis de Cordero sólo se habla de las tres primeras pero a lo largo de su trabajo se pueden notar que las reflexiones sobre las prácticas sociales ya juegan un papel importante en el análisis y específicamente, se identifica el papel que juegan la predicción, los estados estacionarios y la noción de acumulación, como prácticas sociales que posteriormente serán reconocidas explícitamente en la socioepistemología.

El propósito de orientar las investigaciones de tal manera que sea posible intervenir en el sistema educativo, se pone de manifiesto al plantear que en el discurso matemático tradicional se concibe a la matemática como un conocimiento acabado, el cual no está sujeto a posibles modificaciones por la participación de los estudiantes, quienes sólo tienen como función repetir el discurso presentado en textos y en el salón de clases, y, de hecho, se señala que no hay consideraciones sobre los significados de los objetos matemáticos, para plantear, en Cordero [1994: 5] que existe "necesidad de lograr que el estudio de la enseñanza de la matemática impacte en la enseñanza, es decir, que realmente se vea *un rediseño* del DME".

En la investigación la noción de significado es trascendente, del cual se plantea, en Cordero [1994: 7], "entendemos por significado el 'sentido' que el sujeto le da al objeto matemático, según la situación específica". Los significados, se dice, han sido marginados por el uso del lenguaje en lugar de las acciones y son estudiados aquí "a través de los *patrones de construcción* del sujeto y las situaciones que los favorecen…"

La idea de patrón que se emplea es la de idea que prevalece independientemente del contexto. Reconociendo la importancia de los contextos y las estrategias en la construcción de conocimientos, se establece que la relación $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ se constituye en el patrón de construcción de la teoría de integración. Este patrón está presente tanto en la didáctica (en este caso antigua) como en el producto científico (en este caso la física), de tal suerte que, ante nuevos y diferentes contextos, el patrón se conserva. El patrón de construcción puede observarse a pesar de las transformaciones que la integral va sufriendo. Así, aparece antes de cauchy, lo cual se ilustra con el texto de cálculo de Lacroix, en donde el contexto se identifica con el tratamiento de la variación con la estructura preconcebida *Variable* ⇨ *variación* ⇨ *variable*, en tanto que en Cauchy se identifica al contexto con la función y la continuidad, en Riemann con una nueva clase de funciones discontinuas, en Lebesgue con el concepto de medida cero y, finalmente, en Luzin, con las propiedades de medida y continuidad.

El estudio incluyó también una fase experimental con profesores de matemáticas y estudiantes de ingeniería, reconociéndose la prevalencia del patrón de construcción de la integral y, en lo que respecta a las significaciones de la integral y su forma de operarla en algunos fenómenos físicos y "nuevas situaciones matemáticas, los elementos más frecuentes fueron los de "acumulación", "cantidad que fluye" y "toma del elemento diferencial".

En síntesis, algunos de los hallazgos de la investigación de Cordero son: el patrón de construcción de la teoría de la integración a partir de la expresión $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, la noción de acumulación como en la asignación de significado para la integral, las situaciones con base en los fenómenos físicos favorecen el pensar en la integral y la exigencia de mover lo estático al trabajar la noción de área bajo la curva y la integral en como procesos de variación continua.

Otro trabajo que aporta elementos al estudio de la integral es la tesis doctoral de Germán de Muñoz, cuyo título es "Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a un campo de prácticas sociales asociadas al cálculo integral: aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos", presentada en el año 2006. La tesis es un estudio socioepistemológico, con interés en la problemática en la que están inmersos los estudiantes de cálculo integral: la separación entre lo conceptual y lo algorítmico.

Para precisar los alcances de su trabajo, en Muñoz [2006: 11] se plantea que "No reducimos *lo conceptual* a los conceptos o a la definición del concepto sino más bien lo conceptual lo entendemos en un sentido amplio como todo lo asociado a ideas, nociones, pensamientos, concepciones, conceptos, estructuras, objetos mentales, semántica de los sistemas simbólicos, significados, teorías. Por otro lado no reducimos *lo algorítmico* a los algoritmos sino más bien lo consideramos en un sentido amplio como todo lo asociado a método, reglas, procesos, operaciones, técnicas, procedimientos algorítmicos, procedimientos no algorítmicos, algoritmos, sintaxis de los sistemas simbólicos, significantes. También, *lo conceptual y lo algorítmico*, asociado al cálculo integral, en su sentido amplio está impregnado por elementos culturales, históricos e institucionales".

De esta manera, las indagaciones de Muñoz abarcan una gran posibilidad de procesos conceptuales y algorítmicos, analizados, por una parte, con el enfoque socioepistemológico desde diversos ángulos, incluyendo análisis epistemológico, desde la ápoca de los griegos con las aportaciones de Aristóteles y Arquímedes, hasta el Siglo XIX, y, desde otra, con análisis cognitivos y didácticos, trabajando con estudiantes. Todos estos análisis se hicieron tomando como base la práctica social de *predecir*.

Así, en Muñoz [2006: 12] se especifica que "En la dimensión epistemológica en el plano de la *génesis histórica* encontramos una evidencia de la dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico en el marco epistémico de Newton que implica centrarse en la *predicción* en tanto práctica social (Cantoral, 1990; Cantoral, 2001; Piaget y García, 1994). En la dimensión cognitiva construimos un campo conceptual del cálculo (Muñoz, 2000b) apoyado en una perspectiva de la integral centrada en la *acumulación* (Cordero, 1994; Cordero 2003) y en la teoría de campos conceptuales (Vergnaud, 1990a; Vergnaud, 1990b;

Vergnaud, 1998). Dicho campo conceptual está anclado a determinadas prácticas sociales organizadas alrededor de dos ejes: *la predicción y la acumulación*. En la dimensión didáctica en el plano de la génesis artificial tratamos de desentrañar las condiciones para propiciar la relación dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico en escenarios socioculturales específicos en donde se usa cálculo integral [Muñoz, 2003]".

Un último trabajo que queremos reseñar es "Reconstrucción del significado de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática", de Crisóstomo, E., Ordóñez, L. Contreras, Á. y Godino, J. D. [2006], el cual reporta una investigación de corte histórico-epistemológico-didáctico de la integral de una función con el enfoque ontosemiótico.

En esta investigación se hace un estudio del significado institucional global de la integral de una función, tomando como eje a los sistemas de prácticas matemáticas y construyendo las configuraciones epistémicas de la integral en seis momentos diferentes de la historia, identificando los seis tipos de objetos emergentes primarios que se reconocen en el enfoque: situaciones problémicas, lenguaje, procedimientos, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos.

En este trabajo se plantea que las configuraciones epistémicas permiten identificar significados parciales de los objetos matemático bajo análisis, señalando en Crisóstomo et. al. [2006] que "En la reconstrucción del significado global del objeto interesa, por tanto, identificar los cambios que se van añadiendo en cada categoría de objetos emergentes y que permitirán caracterizar los obstáculos, rupturas y progresos en la evolución de las configuraciones epistémicas".

En la investigación se reconocen las siguientes configuraciones epistémicas:

Configuración Epistémica Finita (CEF). Ésta se refiere a los intentos de "integración" de la matemática griega, principalmente los trabajos de Arquímedes y su evolución del método de exhaución hacia procesos cada vez más numéricos.

Configuración Epistémica Intuitiva (CEI). Aquí se hace referencia a los métodos intuitivos de "integración" de la Edad Media con la recaudación de los trabajos de los griegos y caracterizada por el estudio del cambio y del movimiento.

Configuración Epistémica Primitiva (CEP). En esta parte se trata de la etapa caracterizada por la relación inversa entre la integración y la diferenciación, constituida por los métodos de integración de Newton.

Configuración Epistémica Sumatoria (CES). En esta configuración se caracterizan las aportaciones de Leibniz, a través de la integración como suma de elementos infinitesimales.

Configuración Epistémica Analítica (CEA). En ésta, se analizan los aportes realizados en los siglos XVIII y XIX, con la extensión de las aplicaciones del cálculo integral y los fuertes contenidos teóricos que se fueron agregando hasta la época de Riemann.

Configuración Epistémica Generalizada (CEG). En esta se estudian los avances en la teoría de la integración desde el surgimiento de la teoría de la medida hasta la actualidad.

Dado que este trabajo está realizado empleando el enfoque ontosemiótico, tiene algunas similitudes con el tipo de análisis que nosotros hacemos y presentamos en el capítulo 3, pero, por una parte, el periodo que aquí se abarca es más extenso y se incluyen las aportaciones de Newton (lo cual nosotros no hacemos) y, por otra, toda vez que nuestro interés se centra en los contextos, tal y como los definimos antes, el análisis ontosemiótico tiene también algunas diferencias importantes.

En nuestro caso no sólo estamos interesados en las configuraciones epistémicas de la integral sino, fundamentalmente, en estudiar cómo los objetos matemáticos emergentes, surgen de manera natural en dependencia del contexto en el cual se desarrolla la integral, tomando como elementos contextuales precisamente a los objetos matemáticos y sus significados en el momento de resolver las situaciones problémicas a los que la humanidad se fue enfrentando en cada periodo.

Finalmente, queremos apuntar que el estudio de otras investigaciones relacionadas con la nuestra permite observar que en el análisis de la integral desde la perspectiva de la matemática educativa tiene importantes avances y elementos que debemos tomar en consideración, pero desde nuestro punto de vista es posible aportar también elementos de reflexión mediante el estudio del papel de los contextos (entendido en el sentido que aquí proponemos), de tal suerte que podamos intervenir favorablemente en el sistema educativa enriqueciendo los sistemas de prácticas con los que se resuelven las situaciones problémicas que requieren el uso de integrales para resolverse o, en su caso, cualquier otro objeto matemático de interés.

CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO Y ESTRATEGIA DE INVESTIGACIÓN

2.1 ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN MATEMÁTICA

En el capítulo anterior hemos hablado de nuestro problema de investigación refiriéndonos al mismo con expresiones empleadas con un cierto grado de libertad, como *significado*, *contexto*, *objeto matemático* y otros, las cuales necesitan precisarse para estar en condiciones de hacer nuestro análisis del papel de los contextos en la asignación de significados a los objetos matemáticos.

Aunque resulta difícil hablar de estos términos sin referirnos a los otros, iniciaremos con una discusión sobre lo que entendemos por significado.

Desde nuestro punto de vista, la actividad de matemática educativa gira, en gran medida, precisamente en torno a la investigación sobre los significados que los estudiantes le asignan a los objetos matemáticos, pues, si socialmente nos interesa intervenir en el sistema educativo para mejorar el aprendizaje de quienes asisten a la escuela, esperando que apliquen los conocimientos matemáticos a diversas situaciones problémicas y desarrollen las habilidades del pensamiento, entonces estamos interesados en que comprendan los conceptos, algoritmos y lenguaje matemáticos, que argumenten y ejecuten los procedimientos pertinentes cuando se enfrenten a una situación problémica en la que se usan las matemáticas.

Entre más rica sea la significación que los estudiantes construyan de los objetos matemáticos, mayores serán las posibilidades de emplearlas en la resolución de problemas de su entorno y de su vida cotidiana.

En los trabajos de matemática educativa (didáctica de las matemáticas y educación matemática serán empleadas aquí como sinónimos de matemática educativa) constatamos que la importancia que se atribuye a la noción de significado está presente en muchas investigaciones y programas de investigación. Sin embargo, en diversos acercamientos teóricos pareciera que el término "significado" se emplea como parte del lenguaje común, sin mayor precisión de lo que se quiere decir cuando se hace referencia al mismo.

Por ejemplo, reproducimos algunas citas encontradas en Díaz Godino [1994: 2]:

En Sierpinska [1990: 27, 35]: "Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la 'estructura' del concepto (la 'estructura' es la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión". "La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos".

En Dummet [1991: 372]: "Una teoría del significado es una teoría de la comprensión; esto es, aquello de lo que una teoría del significado tiene que dar cuenta es lo que alguien conoce cuando conoce el lenguaje, esto es, cuando conoce los significados de las expresiones y oraciones del lenguaje" .

En Bruner [1991: 47]: "El concepto fundamental de la psicología humana es el de significado y los procesos y transacciones que se dan en la construcción de los significados".

Nos parece que, por la importancia que la noción de significado tiene en el aprendizaje de las matemáticas, es necesario precisar lo que entendemos por la misma. En términos generales asumiremos los preceptos del enfoque ontosemiótico de Juan Díaz Godino, para quien "La didáctica de las matemáticas … se interesa por determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción". Juan Díaz Godino [1994: 2].

Aunque la noción de significado puede abordarse desde diversas perspectivas, es en la lingüística y la psicología que encontramos sus primeros desarrollos, ligado al empleo de los signos, dando lugar a una rama científica que hoy podemos considerar como independiente: la semiótica.

En el caso de matemática educativa la semiótica ha venido a desempeñar un papel de primera importancia pues como dice Radford [2006a: 7] "Por un lado, ha habido una toma de conciencia progresiva del hecho de que, dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, esencialmente, una actividad semiótica".

A nuestro parecer esta afirmación de Radford es adecuada en cierto sentido y podemos constatar que la actividad matemática está siempre relacionada con la manipulación de signos semióticos. Sin embargo, la matemática no se restringe a la manipulación de signos semióticos. Percibimos la matemática de al menos tres maneras: como una actividad de resolución de problemas, como un lenguaje simbólico y como un sistema conceptual lógicamente organizado y estructurado. A cada una de estas tres maneras, la concebimos como aspectos constituyentes de la misma.

Aunque los matices y las concepciones sean distintos, la importancia de los sistemas de representación semiótica es compartida por diferentes acercamientos teóricos que, en general, asumen una versión no mentalista del pensamiento.

En la concepción mentalista del pensamiento se asume que los pensamientos y las ideas de los individuos, son el producto exclusivo de la actividad mental interior, por medio de la cual se desarrollan las actividades necesarias para resolver problemas, recuperar información almacenada en la memoria y, en general, analizar situaciones.

Por otro lado, tenemos a investigadores como Radford [2006b: 107], quien concibe al pensamiento como una actividad social, en la que los signos y representaciones juegan un papel determinante. "De manera más precisa, el pensamiento es considerado una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos". De esta manera se diferencia de los psicólogos cognitivistas, quienes asumen una concepción mentalista del pensamiento aunque reconocen que el pensamiento puede auxiliarse de objetos, instrumentos y sistemas de signos (artefactos decía Vigotsky). En el caso de la concepción no mentalista se asume que el pensamiento es la combinación de actividades mentales internas y el uso de artefactos, los cuales no pueden considerarse como separados del pensamiento, son parte integral del mismo.

Por su parte Duval, en un acercamiento teórico distinto, plantea que los objetos matemáticos son unos y sus representaciones son otras, llamando noesis al proceso de aprehensión conceptual de los objetos matemáticos y semiosis a la aprehensión o producción de una representación semiótica de los objetos matemáticos. Con base en estas nociones Duval establece que no existe noesis sin semiosis, sosteniendo que la única manera de acceder a la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos es por medio de sus representaciones semióticas.

De acuerdo a Duval es en matemáticas es frecuente confundir el objeto representado con su representante, toda vez que éste es el único vehículo de acceder a aquél.

Por nuestra parte, asumimos también una concepción no mentalista del pensamiento y la comprensión, tomando como punto de partida a la noción de práctica matemática, la cual, siguiendo a Godino y Batanero [1994: 8] la entendemos como “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución o generalizarla a otros contextos y problemas”.

De entre las prácticas empleadas, algunas serán de utilidad para lograr el objetivo de la actividad desarrollada, pero otras no contribuirán a la consecución del objetivo. Diremos que una práctica es significativa o tiene sentido, si juega un papel en la consecución de los objetivos propuestos, ya sea para resolver un problema, para comunicar los resultados obtenidos a otros, para validar dichos resultados o para generalizarlos a otros contextos y problemas.

Asimismo, algunas prácticas pueden surgir o emplearse en casos particulares o específicos de un determinado problema o bien, otras pueden ser prácticas que se usan con frecuencia ante un determinado tipo de situaciones problémicas. A estas últimas las llamaremos prácticas prototípicas.

Al resolver situaciones problémicas estamos interesados en observar, más que las prácticas individuales o aisladas, a los sistemas de prácticas que entran en juego dentro de la actividad matemática.

Llamamos significado de un objeto matemático al sistema de prácticas matemáticas significativas prototípicas asociado a la resolución de un tipo de situaciones problémicas. Es decir, asumimos que el significado de un objeto matemático es todo aquello que podemos hacer y decir sobre el objeto. Cuando los sistemas de prácticas matemáticas son particulares de un individuo, hablamos de significados personales, y, cuando los sistemas de prácticas matemáticas son compartidos por una determinada comunidad, decimos que se trata de significados institucionales.

De los sistemas de prácticas matemáticas significativas prototípicas emergen nuevas situaciones problémicas, nuevos elementos de lenguaje, nuevos procedimientos matemáticos, nuevos argumentos, nuevos conceptos, nuevas propiedades, y a estos emergentes de los sistemas de prácticas matemáticas significativas prototípicas, las denominamos objetos matemáticos. Análogamente a la situación anterior, si los emergentes de los sistemas de prácticas matemáticas son construcciones particulares de un individuo, decimos que se trata de objetos personales y si son compartidos en el seno de una comunidad, decimos que son objetos institucionales.

Con esta visión pragmática de los objetos matemáticos, en la cual los significados están en función del papel que juegan los diferentes términos en un determinado lenguaje o representación semiótica, se supera la falta (al menos explícita) de definición ontológica de algunos enfoques teóricos, así como la visión realista que concibe a los objetos matemáticos como realmente existentes en algún mundo platónico. Esta afirmación no pretende negar la existencia de definición ontológica en otros acercamientos teóricos, sólo pretendemos enfatizar su falta de definición explícita al respecto.

En algunos acercamientos teóricos se equiparan los objetos matemáticos con los conceptos matemáticos, sin hacer distinción entre ellos ni asumir una postura ontológica que clarifique qué es un objeto matemático o un concepto matemático. Así, en reportes de investigación en revistas especializadas, en tesis (de maestría y doctorado), en presentaciones de trabajos en congresos y otros, es frecuente que se hable de estudios sobre el "concepto de función", "sobre el concepto de derivada", sobre el "concepto de convergencia", etc., sin especificar qué se entiende por dichos conceptos.

Pero en la medida que no se especifica o asume una postura respecto a qué son estos "conceptos" u "objetos", es difícil esclarecer de qué estamos hablando cuando nos referimos a ellos.

En el enfoque ontosemiótico se considera que los objetos son los emergentes de los sistemas de prácticas, los cuales son objetos de diversa naturaleza, íntimamente relacionados entre sí. Se reconoce que en los sistemas de prácticas emergen los siguientes seis tipos de objetos matemáticos primarios:

Situaciones problémicas, con lo cual nos referimos a problemas más o menos abiertos, ejercicios, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, etc.

Lenguaje, empleo de términos específicos de matemáticas, expresiones algebraicas, tablas numéricas, gráficas, diagramas, gestos, etc.

Procedimientos, emprendidos o ejecutados por el sujeto ante las tareas matemáticas.

Conceptos, con los cuales nos referimos a los objetos matemáticos reconocidos como parte de la estructura matemática, caracterizados por sus propiedades esenciales, las que permiten distinguirlos de otros y suelen expresarse por medio de descripciones o definiciones.

Propiedades, o atributos de los objetos mencionados.

Argumentaciones que se usan para validar y explicar las proposiciones.

De esta manera distinguimos la noción de concepto de la de objeto matemático. Los conceptos son un tipo de objetos, pero reconocemos así que en matemáticas las situaciones problémicas son propias de un campo del saber o se resuelven usando conocimientos matemáticos previamente construidos, con un lenguaje particular, con procedimientos específicos, se atribuyen propiedades y se argumenta de formas específicas. Y al resolver las situaciones problémicas emergen nuevos elementos, que de una u otra forma son del tipo de alguno de los seis objetos primarios.

Es pertinente precisar algunos aspectos con el fin de no provocar confusiones. Cuando nos referimos al enfoque ontosemiótico de Juan Díaz Godino estamos claros que hablamos de preceptos teóricos construidos previamente, pero en la medida que somos conscientes de nuestra propia interpretación o versión de lo declarado sobre el enfoque, hemos considerado prudente especificarlo. Ése es el caso de las situaciones problémicas, las cuales son referidas usualmente como situaciones-problema o situaciones problemáticas.

Hemos preferido emplear el término "situación problémica" para diferenciarlo de la expresión "problema" y adjetivar la situación, al mismo tiempo que privilegiamos el uso que en el área se le ha dado a la palabra problémica en otros acercamientos, como el de los trabajos cubanos, en el que problémico no sólo se refiere al problema, sino en general a las situaciones que un individuo asume como propias y en principio no puede resolver con los conocimientos previamente construidos. Si la situación se encuentra en la zona de desarrollo próximo del sujeto (en el sentido de Vigotsky), el sujeto estará en condiciones de accionar con la situación para resolverla haciendo nuevas construcciones. No percibimos diferencias entre nuestra interpretación y la de Díaz Godino, pero nos parece más adecuado emplear el término problémico, surgido con anterioridad y en nuestro propio idioma.

Por otra parte, enfatizamos que cuando en nuestro problema de investigación hacemos referencia a los contextos, con ello identificamos a las prácticas que se realizan en las comunidades en las que estamos haciendo el análisis correspondiente y dichas prácticas están íntimamente ligadas a estos seis objetos primarios. Así por ejemplo, al hacer análisis epistemológico, identificaremos cuáles son los tipos de situaciones problémicas que se proponían resolver en una determinada época, cuál era el lenguaje que usaban, cuáles los procedimientos que realizaban, cuáles los conceptos involucrados, las propiedades de los objetos y las argumentaciones con las que validaban sus resultados. Similarmente, al hacer análisis didáctico, al estudiar lo que sucede en un ambiente de enseñanza, en un salón de clases, en una institución, estos elementos determinan el contexto a considerar.

Usualmente en los trabajos que se emplea el enfoque ontosemiótico, se señala que el contexto más general se determina por las situaciones problémicas que se estén abordando, pero, basándonos en ejemplos como los que indicamos en el capítulo previo, el contexto viene también determinado por el lenguaje en el que se plantean las situaciones y, en general, los objetos matemáticos primarios previamente construidos están presentes en las actividades matemáticas, constituyendo parte del contexto en el cual emergerán los nuevos objetos y teorías matemáticas. Nuestra concepción de contexto cubre, consecuentemente, a estos como los elementos fundamentales.

La caracterización de los objetos matemáticos en el enfoque ontosemiótico, ofrece posibilidades de análisis que no están presentes en otros acercamientos, uniendo, en una visión holística, a los diferentes elementos que surgen en la actividad matemática. En estos objetos primarios se incluyen aspectos relativos a las formas de concebir las matemáticas como una actividad de resolución de problemas, como un lenguaje simbólico y como un conocimiento lógicamente organizado. Asimismo, al tomar como base a los sistemas de prácticas, se reconoce el carácter socio-cultural y antropológico de la actividad matemática, asumiendo una posición ontológica que otros acercamientos evaden.

Por ejemplo, en el caso de Duval, aunque no lo declara explícitamente, pareciera que su posición respecto a la naturaleza de los objetos matemáticos es de tipo realista, presuponiendo la existencia de los mismos en un mundo platónico, los cuales conocemos a través de la manipulación de sus representaciones. Admitimos sin embargo, que su posición no es del todo clara y quizá por ello no habla explícitamente de la aprehensión de los objetos por medio de sus representaciones, sino de aprehensión conceptual, con lo cual, en algún sentido, pudiéramos estar de acuerdo, pero el uso del término aprehender pareciera sugerir la existencia previa de los objetos, lo cual no compartimos.

Por otro lado, un acercamiento teórico que ha venido aportando reflexiones trascendentes sobre las posibilidades de intervenir en el sistema educativo para modificar el discurso matemático escolar, es la socioepistemología, de Ricardo Cantoral, Rosa María Farfán y otros. En este acercamiento se pone el énfasis en lo que denominan "prácticas sociales" para hacer análisis sistémicos de las situaciones didácticas, contemplando las dimensiones cognitiva, didáctica, epistemológica y social, con preponderancia de la dimensión social, a la cual se subordinan las restantes.

Desde nuestra perspectiva, la socioepistemología ha encontrado en las prácticas sociales notables fuentes de situaciones problémicas, que posibilitan la elaboración de propuestas didácticas de sumo interés y vialidad, pero en términos teóricos, contemplan sólo a las situaciones problémicas (con mucha solidez por cierto), y sus posibilidades explicativas de los fenómenos requieren contemplar otros elementos -como los de carácter semiótico- para fortalecerse.

Por ejemplo en Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez [2006] señalan que la importancia que en otros acercamientos teóricos se atribuye a la representación es prueba de que se asume la existencia previa de los objetos representados. La cuestión no es, sin embargo, tan sencilla y tanto la teoría de la objetivación de Luis Radford como el enfoque ontosemiótico, que aquí usamos, son ejemplos de ello, pues ninguno de estos acercamientos es de tipo realista, idea en la que profundizaremos para el caso del enfoque ontosemiótico.

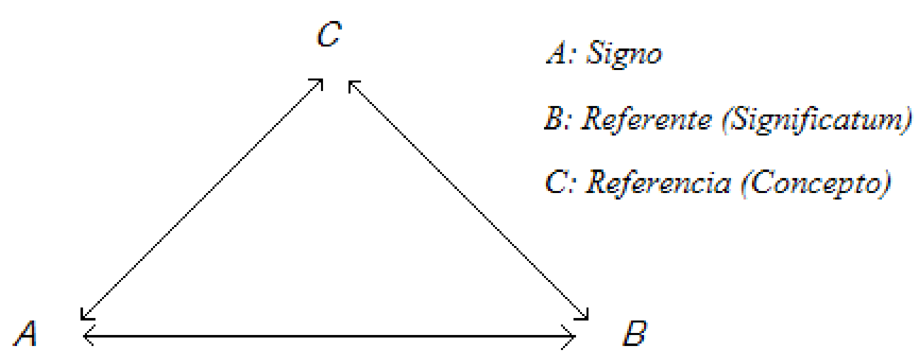
Incluso en Duval encontramos posturas que no dejan del todo claro que se asuma una posición epistemológica y ontológica realista, esto es, que se acepte la existencia previa de los objetos matemáticos y se considere que las representaciones son simples imágenes mentales o materiales de los mismos. Ciertamente frases de Duval en las que se habla de aprehensión conceptual de los objetos, o sobre la posibilidad de confusiones entre los objetos representados y sus representantes, sugieren una postura realista. Sin embargo, dado que la posición de Duval es no mentalista y sostiene que la noesis no es posible sin la semiosis, también tenemos indicios de que su postura pudiera ser otra.

Por ejemplo, cuando Duval afirma que al cambiar de un registro de representación semiótica a otro, por medio de una conversión entre registros, en el nuevo registro se conserva una parte de la información, se pierde otra y se adquiere nueva información. Este tipo de argumentos nos llevan a cuestionamos si su postura es que el objeto existe independientemente de las representaciones, cada una de las cuales puede representar sólo parcialmente a los objetos, o el objeto se constituye por medio de todas las representaciones, tanto las mentales internas y las externas, de carácter semiótico.

Estas ambigüedades son producto, desde nuestra perspectiva, de la ausencia de una definición ontológica clara en la que se exprese la naturaleza de los objetos matemáticos, tal y como Duval los entiende.

Asumir una posición ontológica, es decir, establecer explícitamente nuestra concepción sobre la naturaleza de los objetos matemáticos con los que estamos trabajando, es una condición necesaria en cualquier enfoque teórico. Con base en este reconocimiento, en las siguientes líneas profundizaremos en algunos aspectos sobre la noción se significado y de objeto.

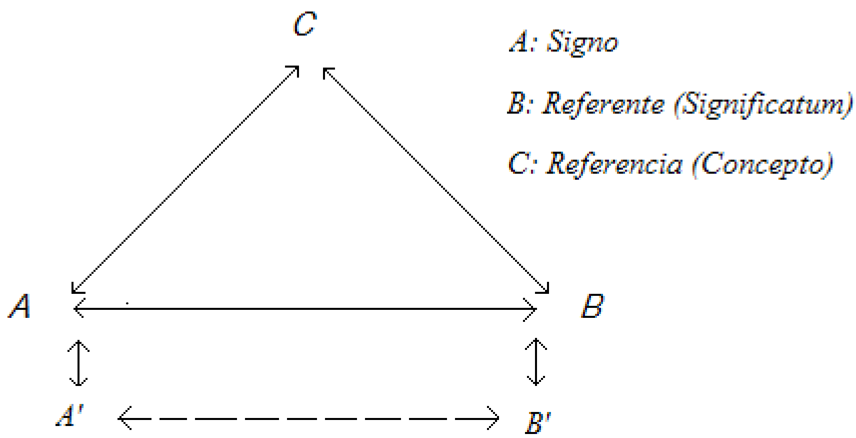
En un análisis clásico sobre la teoría del significado, encontramos el trabajo de Ogden y Richards [1923], quienes describían la relación de significación mediante una relación de tres elementos. Para simplificar el análisis pensemos primero en objetos de tipo material, o un ejemplar prototípico de un tipo de objetos materiales, representado aquí como B, por ejemplo un árbol. Tenemos también un signo, en este caso el signo A, que también es un objeto material, que puede ser una expresión verbal (hablada o escrita), como "árbol", un dibujo, una seña, etc. y, finalmente, el concepto o referencia C. De acuerdo a Ogden y Richards aquí es posible establecer dos relaciones directas y una indirecta, siendo esta última la que se establece entre el referente B y el signo A, la cual puede establecerse sólo a partir del concepto C.



Así por ejemplo, si podemos establecer una relación entre un determinado objeto y la palabra árbol es porque tenemos un concepto de árbol, lo cual nos permite identificar el objeto y asociarlo con la palabra correspondiente. Aunque en este ejemplo estemos hablando de dos objetos materiales, el referente y el signo, su relación sólo puede establecerse por medio del pensamiento, de la concepción que del objeto hayamos construido. En otros casos, si no tenemos una concepción de un determinado objeto, la relación no se puede establecer. Por ejemplo, en mi caso personal o particular difícilmente puedo reconocer un diodo en un circuito electrónico, porque mi concepción de "diodo" es pobre y no incluye una imagen física del mismo.

Por otro lado, la construcción de significados de los objetos es un proceso social, cultural, la cual se produce mediante el uso de los signos y/o símbolos, particularmente por medio del lenguaje. En un caso interesante Vigotsky [1929: 8] refiere la situación de un alumno a quien le pidieron que señalara las diferencias principales entre un árbol y un tronco, a lo cual respondió que no podía hacerlo porque no sabía lo que era un árbol. Entonces le preguntaron sobre lo que se veía a través de la ventana y el niño indicó que se trataba de un árbol de limas. Esto es, el niño no había separado el nombre del árbol de una de sus propiedades particulares, lo cual se consigue por medio de la interacción entre los seres humanos, hasta hacer esa separación y darle a la palabra, en este caso árbol, que se le da socialmente. Se requiere tener un significado de árbol para relacionar la palabra "árbol" con un objeto como los que el niño podía percibir.

Siguiendo algunas de las ideas en Font [2000] el análisis que se hace con el triángulo de Ogden y Richards puede profundizarse incluyendo las representaciones mentales que los objetos materiales, en este caso los referentes y los signos, generan. Así, el objeto de referencia B genera una representación mental B' del objeto y el signo A genera una representación mental A'.



Estas representaciones mentales son las que nos permiten evocar los objetos y sus representaciones semióticas sin que nos encontremos físicamente frente a ellos, accionar mentalmente con dichos objetos y hacer procesos reflexivos sobre ellos o con ellos.

Bajo este esquema podemos concebir la representación en dos clases diferentes; una es la que se produce cuando relacionamos objetos horizontalmente, esto es, cuando relacionamos el objeto B con su representación semiótica A o cuando relacionamos la imagen mental B’ con su representación mental A’. Cualquiera de estas dos relaciones se da por medio del concepto C. La relación entre objetos del mismo mundo (versión débil de la representación) es aceptada por todos o casi todos los acercamientos teóricos, aún de aquellos que no declaran posición sobre las representaciones semióticas.

Pero también podemos considerar representaciones verticales como la representación mental B’ del objeto B y la representación mental A’ del objeto material A. La relación homeomórfica entre objetos de diferentes mundos (versión fuerte de la representación) es el tipo de representación que asumen las epistemologías realistas del conocimiento.

Estas categorías de análisis permiten también clasificar a las epistemologías como representacionistas y no representacionistas. Por representacionistas nos referimos a los acercamientos epistemológicos que aceptan tanto las versión débil como la versión fuerte de la representación y por no representacionistas a quienes sólo aceptan la versión débil.

La aceptación de la relación homeomórfica entre representaciones de mundos diferentes es uno de los principios fundamentales de las epistemologías realistas, pues en ellas se asume que los objetos existen independientemente del hombre y sus actividades y la mente los representa o refleja como un espejo refleja un objeto material.

En las teorías realistas del significado se asume precisamente la preexistencia de los objetos matemáticos y reduce el papel de los signos a una función semántica, a situarse "en lugar de". Un signo, una palabra, una expresión se hacen significativas por el objeto al que representan, el cual es su significado. Ejemplos de esta función semántica lo encontramos en Godino [2003b: 6], en las que se ilustra lo que decimos:

"-el significado de un nombre propio consiste en el objeto que se designa por dicho nombre.

-los predicados (por ejemplo, esto es rojo; A es más grande que B) designan propiedades o relaciones o, en general, atributos.

-las oraciones simples (sujeto -.predicado - objeto) designan hechos (por ejemplo, Madrid es una ciudad)".[1]

Con una visión realista, el proceso de conocer consiste en "descubrir" los objetos existentes en un mundo platónico, asociándoles un nombre, un predicado o una oración.

Por nuestra parte asumimos que los objetos matemáticos no existen previamente a la acción del hombre, sino que son producto de un proceso de construcción y que se desarrollan al modelar y caracterizar nuestras experiencias con los objetos materiales y con los objetos ideales que hemos construido. Surgen entonces interrogantes acerca de esos objetos ideales construidos, a los que sin embargo reconocemos como tales, toda vez que les asignamos significado a las palabras que los refieren. Esto nos conduce a preguntarnos ¿qué son los objetos matemáticos? ¿Cuál es su naturaleza?

Si los objetos matemáticos no tienen existencia fuera de la actividad mental del hombre, no están en un mundo platónico preexistente ¿qué nos permite identificarlos, resolver problemas con ellos, comunicarlos a otros? Esto es, independientemente de que neguemos su existencia en los mismos términos que los objetos de naturaleza material, los objetos matemáticos también existen y nos referimos a ellos cuando hablamos de números, de figuras geométricas, de sistemas de ecuaciones lineales, de vectores y matrices, de funciones, de continuidad de funciones, de la derivada y la integral de una función, etc.

[1] Sin embargo, es pertinente aclarar que no compartimos la caracterización que se desprende aquí de predicados y oraciones simples.

Independientemente de los acercamientos teóricos con los que realicemos nuestra actividad matemática, estos u otros nombres y signos lingüísticos están presentes en las situaciones problémicas que abordamos y en los recursos algorítmicos que aplicamos.

¿Qué es lo que permite que hablemos de estos objetos y nos refiramos a sus definiciones, a sus propiedades, operemos con ellos y los hagamos objetos de enseñanza en el sistema escolar?

Los objetos matemáticos han sido y son parte de la construcción social de los seres humanos y no existen de forma independiente. La cuestión es, por ejemplo ¿qué son los objetos matemáticos que reconocemos como producción cultural de las sociedades anteriores a las nuestras? ¿Partimos en la escuela y en general en el mundo actual, de que requieren ser construidos nuevamente?

Negar la existencia de objetos matemáticos como función, derivada o integral, nos colocaría en una situación difícil pues entonces hablar de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas -principal objeto de estudio de la matemática educativa-, sería como hablar en el vacío.

Optamos entonces, por asumir una postura ontológica referencial o pragmática, en la cual reconocemos la existencia de los objetos matemáticos como producto de la actividad social, construidos a partir de las prácticas desarrolladas por los individuos o grupos de individuos (instituciones) cuando resuelven situaciones problémicas de un determinado tipo. El centro se pone no en las prácticas aisladas o solitarias sino en los sistemas de prácticas puestos en acción.

Al dar a los objetos un carácter social ligado a los sistemas de prácticas, los concebimos en constante evolución, pues al abordar nuevas situaciones problémicas los sujetos (instituciones o personas en lo individual), los sistemas de prácticas hacen surgir nuevos objetos y en ocasiones modifican los anteriores enriqueciendo su significación con nuevos sentidos o asignándoles un carácter de mayor generalidad dentro de un mismo contexto.

En alguna medida, el reconocimiento de la existencia de los objetos matemáticos en una versión referencial del significado, nos acerca a la posibilidad de hacer análisis similares a los de las epistemologías realistas, en el sentido de que si bien no reconocemos la existencia previa de los objetos matemáticos, y los que construimos como productos de las prácticas no los concebimos como parte de un mundo platónico de donde podamos aprehenderlos de algún modo, el reconocimiento de su existencia referencial nos permite hablar de ellos, reconocerlos y operarlos.

Asimismo, toda vez que los emergentes de los sistemas de prácticas pueden ser de carácter ideal, como en el caso de los conceptos o de carácter material, como en el caso de los signos semióticos, en nuestra concepción los objetos matemáticos pueden ser ideales o pueden ser materiales. Por ejemplo, si hacemos referencia al concepto de función cuadrática, lo reconocemos como un objeto matemático ideal, el cual podemos representar de múltiples maneras, una de las cuales puede ser la expresión algebraica $y = ax^2 + bx + c$, otra puede ser la gráfica de lo que en un sistema de coordenadas llamamos parábola, otra más puede ser una tabla numérica, etc. Pero en la medida que también reconocemos en estas representaciones a emergentes de los sistemas de prácticas y pasan a formar parte del lenguaje con el que nos referimos a situaciones matemáticas, también son objetos matemáticos, pero de naturaleza material.

A los objetos de carácter ideal, únicos que se reconocen usualmente como objetos matemáticos, son a los que, según Duval, podemos confundir con sus representaciones. Esta confusión se pone de manifiesto en algunos libros de texto y en el lenguaje empleado por algunos profesores cuando usan expresiones como “ésta es la gráfica de la función $y = x^2$", como si la expresión algebraica fuera la función y no una de sus representaciones. De esta manera se restringe la noción de objeto matemático y a la producción semiótica sólo se le reconoce su papel representacional.

Por otro lado, es necesario aclarar que bajo nuestra perspectiva, aún en el caso de la producción material de objetos matemáticos, particularmente los signos, ya sean expresiones orales o escritas, gestos, gráficas, expresiones analíticas o numéricas, por si mismas no tienen significado. Cada signo está asociado a un significado y la producción es entonces, tanto material como ideal. Sólo bajo esta consideración asumimos que el lenguaje emergente de los sistemas de prácticas es un objeto matemático. Con esta afirmación asumimos también, siguiendo a Duval, que la semiosis no es posible sin la noesis.

La sobrevaloración de los aspectos semióticos en teorías como las de Duval redundan en una visión reduccionista de la actividad matemática, pero en el caso de otros acercamientos teóricos se tiene también una versión que, desde nuestro punto de vista, es incompleta. Por ejemplo en la socioepistemología, en la cual se reconoce que el eje central es la noción de práctica social y, como se señala en Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez [2006: 84] "… aunque el énfasis socioepistemológico no está puesto ni en el objeto preexistente o construido, ni en su representación producida o innata; sino más bien se interesa por modelar el papel de la práctica social en la producción de conocimiento a fin de diseñar situaciones para la intervención didáctica".

Así planteado el caso de la socioepistemología pareciera no interesarse en los productos emergentes de la actividad matemática. Entendemos que no es ese el caso y lo que se pretende es resaltar su énfasis en las prácticas sociales, en las actividades previas que dan origen a la construcción de objetos matemáticos y sus representaciones. A nuestro juicio, en los trabajos de socioepistemología se han detectado algunas prácticas sociales que han probado su utilidad para la construcción de situaciones problémicas útiles para la intervención didáctica, pero con esta visión limitan su actividad.

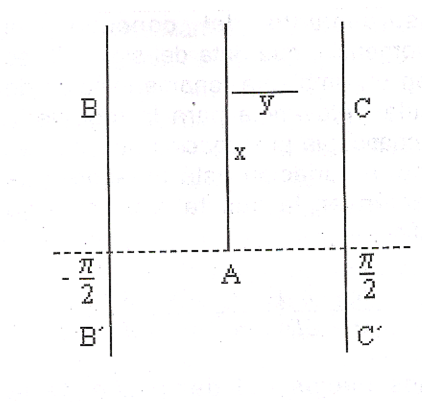
Las situaciones problémicas que se abordan en matemáticas están escritas con un lenguaje que no es neutro y es específico de la actividad matemática, se emplean signos semióticos que también son producto de las prácticas sociales y su uso se constituye también en una práctica social, los procedimientos que se desarrollan son también prácticas sociales, los tipos de argumentaciones, etc., y es la conjunción de todos estos factores lo que conduce a enriquecer los significados de los objetos matemáticos.

El carácter de cada uno de estos elementos, de lo que nosotros denominamos objetos matemáticos primarios, como parte de las prácticas sociales, desde nuestro punto de vista se encuentran en algunos de los estudios socioepistemológicos. Así, en algunos casos sus investigaciones y diseños para la intervención didáctica se centran en las situaciones problémicas que se pueden derivar de la práctica social de predicción, pero en otros casos se refieren a las prácticas ligadas a las argumentaciones como en Martínez-Sierra [2003] cuyo trabajo se basa en el papel de la convención matemática, en otros se centran en los procedimientos realizados para resolver situaciones problémicas, como en Arrieta [2002], sobre el papel de la actividad de modelación, etc.

Reconociendo que la socioepistemología ha generado producciones útiles para la intervención didáctica, nos parece adecuado profundizar un poco más en nuestras observaciones sobre la misma, no por el simple hecho de marcar diferencias o tomar distancia, sino, por el contrario, de contribuir a la reflexión que en matemática educativa debemos hacer quienes hacemos investigación.

Al centrarse en las prácticas sociales, el interés es tal que se ignoran o minimizan otros factores, sin los cuales es imposible hacer actividad matemática, como los aspectos relacionados a los sistemas de representación semiótica. Por ejemplo, en Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez [2006: 92] se presenta un análisis del trabajo original de Fourier en su libro Teoría Analítica del Calor, traduciendo algunos pasajes del francés al español, entre ellos aquel en donde Fourier plantea el problema de la determinación del fenómeno de conducción del calor y el papel de la predicción juega un papel trascendente.

El planteamiento del problema se basa en la figura siguiente



Parte del problema aparece así: “Suponemos que una masa sólida homogénea está contenida entre dos planos verticales B y C paralelos e infinitos, y que se ha dividido en dos partes por un plano A perpendicular a los otros dos (ver figura); consideraremos las temperaturas de la masa BAC comprendida entre los tres planos infinitos A,B,C…” Más adelante en el análisis del fenómeno de conducción del calor se especifica que el grosor de la lámina es infinitesimal, lo cual conduce a consideraciones matemáticas sobre la forma de establecer la ecuación diferencial que modela el fenómeno.

En el análisis socioepistemológico se hace alusión a que en este problema no hay forma de confundir a ningún objeto matemático con su representación, pues no hay aquí ningún objeto matemático preexistente o construido a este momento. Lo único que tenemos es un contexto físico en el que la práctica social de predicción tiene el rol fundamental.

Planteadas así las cosas se afirma que aquí no tiene sentido preguntarse si un objeto matemático es confundido con su representante, pues no hay objeto aún.

Sin entrar en debate sobre el papel de la predicción, en la cual reconocemos un hallazgo válido e importante, nos preguntamos entonces: ¿existen láminas como las descritas o se trata de un objeto matemático, en el que tenemos planos de longitud infinita y grosor infinitesimal? Notemos que estos objetos son ideales pues físicamente no existen láminas con estas características ¿Qué papel juegan las expresiones como “planos infinitos A,B y C”, “masa BAC” y otros similares? Si revisamos el artículo que discutimos podremos observar que se usan ahí expresiones matemáticas como $\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$, $\frac{\partial v}{\partial t}=0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$, por citar algunas.

Así, sin duda podemos reconocer la importancia de la predicción de problemas y de éste en particular, pero desde el planteamiento de la situación problémica (la que concebimos como un objeto matemático) encontramos representaciones semióticas y figuras geométricas con características que no se corresponden homeomórficamente a ninguna situación física real. En la representación de Fourier se tiene una placa de longitud infinita y grosor infinitesimal, con la construcción de ecuaciones diferenciales que modelan la situación, con acotamientos de los valores (los valores frontera), etc. Estos son objetos que emergen del sistema de prácticas en la época de Fourier, en las que también están las formas de representar la situaciones problémicas, de modelarlas, de analizarlas, etc. y por lo tanto nos parece que deberían incorporarse a las reflexiones que se generan en los análisis socioepistemológicos.

La concepción de la matemática en su triple composición (como actividad de resolución de problemas, como lenguaje simbólico y como conocimiento lógicamente estructurado), nos conduce a tomar en cuenta diversos factores para analizar su construcción y explicar las formas que adquiere el conocimiento matemático, siempre dentro de un contexto que incluye las situaciones problémicas, el lenguaje empleado y, en general, los seis objetos matemáticos primarios que se reconocen en el enfoque semiótico.

2.2 SIGNIFICADO PERSONAL Y SIGNIFICADO INSITUCIONAL

En lo escrito hasta ahora nos hemos referido a los significados en forma genérica; en este apartado, con el propósito de delimitar nuestra investigación, haremos algunas precisiones sobre las formas de concebir a los objetos matemáticos y sus significados.

A grandes rasgos, identificamos en el enfoque ontosemiótico tres componentes: el estudio sistémico con centro en los objetos personales y los objetos institucionales; la teoría de las funciones semióticas, con base en la cual podemos hacer interpretaciones respecto de los significados de los objetos personales e institucionales a partir de las prácticas operativas y discursivas de los sujetos; y una tercer componente, la teoría de las configuraciones didácticas, cuyo propósito es analizar y diseñar las acciones didácticas pertinentes para una positiva intervención en los hechos educativos.

Dada las características de nuestra investigación, en el presente trabajo sólo hacemos referencia a las primeras dos componentes, las cuales emplearemos para hacer un estudio histórico-epistemológico de la integral de una función y de los significados que atribuyen estudiantes y profesores a dicho objeto matemático.

Como hemos mencionado, desde nuestro punto de vista, las prácticas matemáticas son el centro de la construcción de significado y de la construcción misma de los objetos matemáticos, tanto en su faceta personal como institucional.

En concordancia con estas prácticas identificamos diferentes niveles o gradaciones en los significados personales e institucionales. Así, en el caso del significado institucional nos referiremos al significado de referencia, al pretendido, al implementado y al evaluado.

Cuando hablamos del significado institucional de referencia, centramos nuestra atención en lo que reconocemos o aceptamos como el significado de los expertos, el de los escritos de los matemáticos, de los libros de texto, de los currículos escolares y de los conocimientos previamente construidos por los sujetos. Éste es el significado que se asocia a las prácticas operatorias y discursivas que los expertos reconocen como propias, adecuadas e inherentes a los objetos. Este significado institucional de referencia no podemos verlo en forma absoluta, puede ser diferente en dependencia de la comunidad en la que centremos nuestra atención, en concordancia con las prácticas que se reconozcan como prototípicas y significativas de los objetos y teorías matemáticas, las que en muchas ocasiones, pueden identificarse por medio de los libros de texto que se emplean.

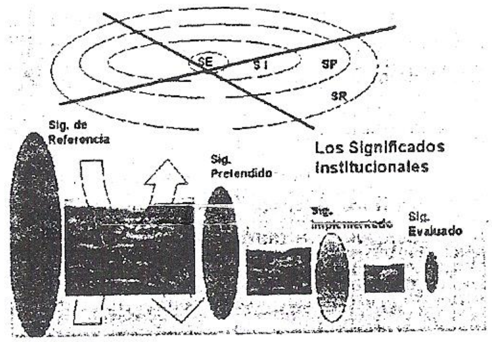
Pero en los procesos educativos, por razones de la seriación que se hace de los cursos, por los tiempos de los calendarios, por los objetivos escolares previamente fijados, etc., debe hacerse una selección de prácticas a desarrollar en el aula y en las tareas escolares, por lo cual existe la necesidad de delimitar los aspectos que se revisarán, estableciéndose lo que identificamos como el significado institucional pretendido.

Pero del significado institucional pretendido, establecido frecuentemente en los currículos escolares, lo que el profesor realmente promueve y lleva a cabo entre sus estudiantes, lo que efectivamente ocurre en el salón de clases, lo identificamos como el significado institucional implementado.

A su vez, de entre las prácticas discursivas y operatorias que realmente se han implementado, el profesor selecciona aquellas que considera fundamentales y considera como las mínimas a desarrollar por los estudiantes para continuar su formación o desarrollar sus actividades extraescolares. A estas prácticas las asociamos con el significado institucional evaluado.

Debemos hacer notar que, aunque en primera instancia pareciera que de cada uno de los tipos de significados institucionales a que hacemos alusión vamos tomando partes y conformando subconjuntos, ello no es necesariamente así. Es posible, por ejemplo, que las prácticas operatorias y discursivas implementadas por un profesor sean diferentes a las que se pretenden, ya sea porque el profesor tiene una versión más rica en significaciones, o por insuficiencia del profesor, porque le parece que los currículos limitan o restringen las posibilidades de los estudiantes, o por cualquier otro motivo. Otro posible ejemplo lo encontramos cuando un profesor decide evaluar el aprendizaje de sus estudiantes incluyendo situaciones problémicas que conducen a desarrollar prácticas diferentes a las que tuvieron lugar en la clase.

Al referirse a esta situación, Font [2007: 80] menciona la conveniencia de no ver la relación entre objetos institucionales como pertenencia, sino como brecha, y representa el fenómeno por medio del siguiente diagrama:



Por otro lado, en el caso de los objetos personales, nos referiremos al significado global, al declarado y al logrado.

Por significado personal logrado entendemos el sistema total de prácticas discursivas y operativas de un estudiante ante un determinado tipo de situaciones problémicas. Entre las prácticas de un estudiante podremos identificar algunas que son conformes con los significados institucionales implementados, con los pretendidos y aún con los de referencia, pero también es posible encontrar prácticas que no se correspondan con ninguna de ellas. Así pues, el significado personal global se refiere tanto a las “prácticas correctas, conformes o adecuadas”, como a las “incorrectas o inadecuadas”.

El significado personal declarado es el sistema de prácticas operatorias y discursivas que un estudiante es capaz de mostrar o desarrollar en los trabajos cotidianos de un proceso educativo y, particularmente, las que se manifiestan en los procesos de evaluación. En este caso también es posible encontrar prácticas “conformes” o prácticas “inadecuadas”.

En cuanto a los significados personales logrados, nos referimos aquí a los sistemas de prácticas “correctos” o “adecuados”, la mayoría de las veces conformes con los significados institucionales pretendidos. A los sistemas de prácticas que ni se corresponden con los objetos institucionales pretendidos, ni los podemos caracterizar como “correctos” o “adecuados”, son a los que comúnmente identificamos como errores o como falta de aprendizaje.

2.3 DUALIDADES COGNITIVAS

La caracterización de los significados y de los objetos matemáticos con base en los sistemas de prácticas permitió la distinción de los objetos en tanto personales o en tanto institucionales. Estas facetas o dimensiones de los objetos, en dependencia de los sujetos, es un ejemplo de facetas duales o facetas que se presentan por parejas al tomar en cuenta tanto los sujetos, como las componentes de significado que entran en juego al resolver situaciones problémicas.

La relación dialéctica de estas facetas cognitivas duales está signada por el papel que desempeñan en el juego del lenguaje, y contribuyen a dotar de significado a las entidades matemáticas. Las facetas que se han identificado en el enfoque ontosemiótico son las siguientes:

- Dualidad personal - institucional.
- Dualidad ostensiva - no ostensiva.
- Dualidad extensiva - intensiva (ejemplar y tipo).
- Dualidad elemental - sistémica.
- Dualidad expresión - contenido.

A continuación abundamos un poco más en cada una de ellas.

Dualidad personal-institucional. Las facetas personal e institucional fueron desarrolladas previamente, con relación a los sujetos que realizan las actividades matemáticas. Si estamos interesados en los procesos de aprendizaje, en los sistemas de prácticas de los alumnos, estaremos centrando nuestra atención en la faceta personal del significado. Pero si nuestro interés se enfoca hacia los procesos de enseñanza, revisando los currículos, los libros de texto, las obras matemáticas de los expertos, la actividad de los profesores en el aula, estaremos centrados en la faceta institucional. En el diseño y análisis de las actividades didácticas o prácticas de instrucción, se requiere considerar ambas facetas y su interrelación.

Al tomar en cuenta ambas facetas del significado, podemos caracterizar el aprendizaje de los estudiantes como la aproximación progresiva de los significados personales hacia los institucionales. Esta forma de ver el aprendizaje enfatiza la necesidad de contar con una posición ontológica de los significados de los objetos matemáticos, pues las actividades de enseñanza están dirigidas al aprendizaje de objetos matemáticos que si bien no pretendemos se "descubran", como pretenden las visiones realistas, los profesores tenemos un significado de los mismos que buscamos promover.

En el caso de la faceta institucional, así como lo hicimos para el caso de los objetos, podemos distinguir diferentes niveles o estadios del significado institucional, clasificándolos como significados de referencia, significados pretendidos, significados implementados y significados evaluados.

Similarmente, en el caso de los objetos personales distinguimos entre significados globales, significados declarados y significados logrados.

Asimismo, podemos clasificar a los significados institucional y personal de los objetos matemáticos como significados a priori y significados a posteriori, al referirnos a su caracterización como previa o posterior a un proceso de enseñanza. Los tres tipos de significados personales pueden ser a priori o a posteriori, en tanto los significados institucionales de referencia y pretendido son a priori y los significados institucionales implementados y evaluados son a posteriori.

Dualidad ostensiva - no ostensiva. Cualquier objeto matemático tiene una faceta ostensiva, la cual reconocemos porque le asignamos un nombre, lo empleamos explícitamente en las situaciones problémicas o al comunicar a otras personas sus propiedades y características, siempre por medio del lenguaje ya sea oral, escrito, gráfico, analítico, numérico, gestual, etc. En nuestro trabajo de tesis hablamos por ejemplo, de la integral de una función, a la cual reconocemos y atribuimos propiedades que nos permiten comunicarnos con otras personas.

Pero los objetos matemáticos tienen también una faceta no ostensiva, en la medida en que podemos pensar e imaginar los objetos sin necesidad de mostrarlos externamente. Las entidades lingüísticas se muestran externamente pero el resto de las entidades no es perceptible directamente, y requieren de las entidades lingüísticas para su comunicación. Las entidades lingüísticas no sólo constituyen el medio de expresión de las entidades no ostensivas, sino son el instrumento para su constitución y desarrollo. A su vez, las mismas entidades lingüísticas tienen una faceta no ostensiva, pues podemos pensar en ellas sin necesidad de mostrarlas externamente.

Al asumir el papel del lenguaje tanto como la faceta ostensiva de los objetos matemáticos como el medio para la constitución y desarrollo de los objetos y los significados, una tarea imprescindible en matemática educativa es interpretar los elementos del lenguaje para conocer las facetas no ostensivas de los objetos, para detectar el significado que los sujetos asignan a los objetos matemáticos.

Dualidad extensiva - intensiva (ejemplar y tipo). En el desarrollo de los sistemas de prácticas es frecuente que encontremos casos en los cuales los tratamientos se hacen sobre casos concretos, ejemplares, que muestren una determinada propiedad o caso particular, pero en otros lo que nos interesa es la generalización –ligada a los procesos de abstracción- que cubra el mayor número de situaciones posibles.

La dualidad ejemplar-tipo está presente en diversas situaciones, desde las de carácter lingüístico o actuativo hasta las argumentativas. Por ejemplo, podemos estar interesados en determinar el caso particular de la obtención de $\int x^3\,dx$ o el caso general de $\int x^n\,dx$. En otros momentos estos pueden ser ambos, casos ejemplares, particulares y concretos, por ejemplo cuando hablamos de forma general de la noción de antiderivada. Análogamente, nuestras prácticas pueden ubicarse en el terreno argumentativo, por ejemplo cuando nos proponemos determinar si una función particular es integrable en un intervalo, o cuando tratamos el caso global de la determinación de las condiciones generales de integrabilidad de las funciones.

Dualidad elemental - sistémica. En ocasiones un objeto matemático emergente de un sistema de prácticas deviene en el centro de análisis de la producción matemática y centramos nuestra atención sistémicamente en él.

Por ejemplo en los sistemas de prácticas para calcular el área de figuras, puede emerger la integral de una función, a la cual se requiere caracterizar, conocer sus propiedades, evaluar su potencial en la resolución de situaciones problémicas semejantes a las tratadas, etc.

Pero en otros casos los objetos matemáticos pueden ser parte de sistemas más complejos, en los cuales aparecen como unidades elementales. Un ejemplo de ello es la forma en la cual aparece la integral de una función en el Teorema Fundamental del Cálculo.

Dualidad expresión - contenido. La actividad matemática es esencialmente relacional, los objetos matemáticos surgen y se usan con relación a otros. En las expresiones lingüísticas los objetos pueden ser ostensivos, aparecer explícitamente como parte de la expresión, pero también pueden ser no ostensivos, pueden ser parte del significado de la expresión o de sus componentes.

Esta dualidad cognitiva de los objetos y sus significados es de primera importancia en el enfoque ontosemiótico, ligada a lo que denominamos función semiótica, la cual desarrollaremos en el siguiente apartado.

2.4 FUNCIONES SEMIÓTICAS

Cuando enfrentamos una situación problémica desarrollamos sistemas de prácticas operatorias y discursivas que se manifiestan por medio del lenguaje hablado o escrito, por medio de gestos, de gráficas, de expresiones numéricas o algebraicas, etc. Estas prácticas son perceptibles para nuestros sentidos y constituyen lo que llamaremos la faceta ostensiva de los objetos matemáticos.

Por otra parte, también desarrollamos actividades mentales de las cuales los ostensivos que empleamos son representantes (aunque la representación no es homeomórfica). Esta faceta de carácter mental interna, sin manifestaciones lingüísticas o semióticas, constituye la faceta no ostensiva de los objetos matemáticos.

Cuando un sujeto realiza actividad matemática, lo único que podemos percibir de su actividad son los ostensivos que emplea y el reto en matemática educativa es emplear estos ostensivos para caracterizar los no ostensivos, ligados a la significación que los sujetos han construido o asignado para los objetos matemáticos.

En el enfoque ontosemiótico recurrimos a la noción de función semiótica como el recurso teórico y metodológico que nos permite analizar los significados que los sujetos asignan a los objetos matemáticos. El origen del término de función semiótica, como se entiende en este enfoque, tiene su origen en lo que Hjemslev, en 1943, denominó "función de signo" y posteriormente Humberto Eco, en 1979, denominó "función semiótica". Por medio de la función semiótica denotamos la relación entre el conjunto de signos y el de los significados en una expresión lingüística o, más generalmente, semiótica. Así la función semiótica es la relación que se da entre dos funtivos, la expresión y el contenido. La función semiótica permite enfatizar el carácter relacional de los objetos matemáticos.

Al referirse a las funciones semióticas, Godino [2003ª: 151] establece "Entre los posibles tipos de dependencia que se pueden identificar entre partes de un texto destacan aquellas en que una parte *designa* o *denota* otra cosa; la primera (*plano de expresión*) funciona o se ponen en representación de la segunda (*plano del contenido*), esto es, señala hacia un contenido que hay fuera de la expresión. Pensamos que la noción de función semiótica se puede concebir, al menos metafóricamente, como 'una correspondencia entre conjuntos', poniendo en juego tres componentes:

Un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo);

Un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);

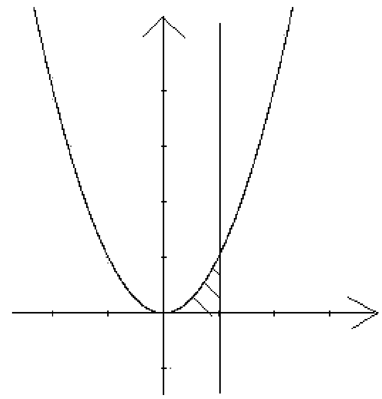
Un criterio o regla de correspondencia, esto es, un código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido, estableciendo el aspecto o carácter del contenido referido por la expresión."

Tradicionalmente la representación de los objetos se concibe como el uso del lenguaje o de los signos semióticos para colocarlos en lugar de los objetos matemáticos o de sus significados. Pero la noción de función semiótica modifica sustancialmente esta concepción pues aquí las mismas entidades abstractas pueden ser signos de otras entidades. Así, cualquiera de los seis objetos primarios puede aparecer como parte del plano de expresión o como parte del plano de contenido.

De esta manera, en ocasiones tenemos expresiones en las que un objeto emerge de la situación problémica que se esté tratando, por ejemplo en el caso de una función, que emerge como parte del proceso de caracterizar las relaciones entre elementos de dos conjuntos. Pero en otras ocasiones los objetos pueden ser parte de la fenomenología de uso para otros objetos, como en el caso de los sistemas de prácticas en los que se usan las funciones y los emergentes son otros objetos, como "continuidad", "derivada", "integral", u otros.

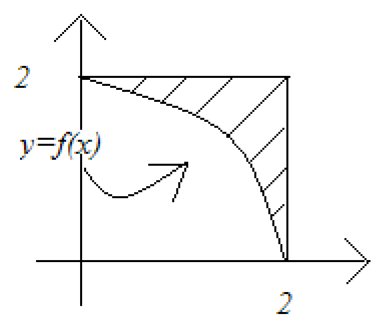
Para profundizar en esta idea, ilustraremos con los siguientes ejemplos la manera de concebir a las representaciones, en los cuales los papeles de los funtivos de los objetos involucrados están invertidos.

Al calcular el área de la figura acotada por la gráfica de la parábola cuya expresión algebraica es $y = x^2$, el eje de las abscisas y la recta $x = 1$, como se ilustra en la figura, un procedimiento típico consiste en determinar el valor de una integral, en este caso $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$.



Aquí el plano de expresión corresponde a una integral (elemento ostensivo) y el plano de contenido es el área de una figura (elemento no ostensivo). De esta manera, la integral es el "representante" del área calculada.

Pero si en la siguiente figura,



nuestro interés es obtener el valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$, conociendo que el área sombreada es *1*, entonces una manera de proceder considerar que el área del cuadrado ilustrado en la figura es 4 y al restarle el valor del área sombreada encontramos que $A = 4 - 1 = 3$, el cual corresponde al valor de la integral solicitada. Los papeles de área y de integral estarán ahora invertidos, el área corresponderá al plano de expresión (elemento ostensivo) y la integral al plano de contenido (elemento no ostensivo) y el área viene a ser el "representante" de la integral.

Con base en la noción de función semiótica podemos caracterizar la significación que un sujeto tiene de un objeto por el número de funciones semióticas que puede establecer, en las que el objeto aparezca como funtivo. Dado que el significado de un objeto lo entendemos como el sistema de prácticas operativas y discursivas empleadas en la resolución de determinadas situaciones problémicas, entre más funciones semióticas se puedan establecer con un objeto, más rico es el significado que de él se tiene. Asimismo, la consideración de que el objeto puede formar parte del plano de expresión en unas funciones semióticas y del plano de contenido en otras, forma parte de la riqueza del significado que sobre un objeto se tiene.

En Díaz Godino [2003a: 152] encontramos esta idea expresada de la siguiente manera: "La noción de función semiótica nos permite proponer una interpretación del conocimiento y la comprensión de un objeto O (en cualquiera de las categorías definidas anteriormente) por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que interviene el objeto O. Puesto que cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante, constituye para nosotros un *conocimiento* y hablar de conocimiento equivaldrá a hablar de significado, esto es, de función semiótica. En correspondencia con la variedad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en los capítulos anteriores, derivaremos una variedad paralela de tipos de conocimientos.

Dado que los objetos matemáticos primarios pueden aparecer en las funciones semióticas tanto en el plano de la expresión como en el plano del contenido, los tipos de funciones semióticas serán diferentes, pudiendo clasificarse o interpretarse como procesos cognitivos específicos: argumentaciones, generalizaciones, simbolizaciones, etc. Centrando nuestra atención en el plano del contenido, los tipos de funciones semióticas pueden reducirse a las siguientes seis:

Significado lingüístico. En este tipo de funciones semióticas nos referimos a aquellas en las que el resultado final es una expresión, un gráfico o cualquier otra expresión lingüística. Por ejemplo cuando usamos la expresión $y = f(x)$ al referirnos a una función, o en expresiones como "¿Cuál es la distancia recorrida por un objeto durante los tres primeros segundos de movimiento, si la velocidad del mismo viene dada por la ley de movimiento $v(t) = t^2 + 1$?", en cuyo caso la velocidad se refiere a la función derivada de la posición con respecto al tiempo.

Significado situacional. Este caso lo tenemos cuando el objeto final es una situación problémica. Esta situación la podemos ilustrar con casos como el del último ejemplo, cuando al resolver un problema de cálculo de distancias, nos hacemos el cuestionamiento: "Si conocemos la expresión para calcular la velocidad de un objeto que se mueve en línea recta ¿cómo podemos determinar la distancia que recorre el objeto en un determinado intervalo de tiempo?

Significado conceptual: Cuando el contenido de la función semiótica es un concepto (usualmente expresado por medio de una definición). Por ejemplo cuando después de argumentar en algún sentido concluimos con una frase como "por lo tanto $f(x)$ es una función continua", en el que función continua hace alusión a un concepto.

Significado proposicional: cuando el contenido es un atributo o una propiedad el objeto. Éste es el caso de funciones semióticas cuyas expresiones son "toda función derivable en un intervalo es continua en dicho intervalo", "la diferencial de una función es la mejor aproximación lineal a tal función", etc.

Significado actuativo: En este tipo de funciones semióticas el contenido es una acción u operación, como en los algoritmos o procedimientos. Por ejemplo la expresión "determina $\int xe^{x}dx$", indica que debe ejecutarse un procedimiento para determinar la función antiderivada de $y = xe^{x}$.

Significado argumentativo: cuando el contenido de la función semiótica es un argumento. Por ejemplo cuando hablamos de "la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo".

Además de los tipos de funciones semióticas que hemos establecido, con base en las características de uno de los funtivos, esto es, del contenido, podemos encontrar variantes originadas por las facetas de que se traen las entidades, en concordancia con las dualidades cognitivas a las que nos hemos referido con anterioridad.

Así, en la función semiótica podemos encontrar variantes según el agente que interpreta el objeto (una persona en lo individual o una comunidad, una institución); según el grado de complejidad del objeto (si aparece en la función semiótica como unidad o elemental o como sistema); según el nivel de abstracción o de concreción (en su faceta extensiva o en su faceta intensiva); según el carácter del objeto (ostensivo o no ostensivo); y, por último, según el papel desempeñado por la expresión (referencial o instrumental).

2.5 ESTRATEGIA DE INVESTIGACIÓN

Nuestro propósito central de investigación es aportar elementos que muestren la importancia de los contextos escolares en la construcción de significado para los objetos matemáticos.

En concordancia con ello nos hemos planteado abordar el problema de investigación en dos planos, uno de carácter histórico-epistemológico y otro ligado a las actividades de enseñanza, aunque no pretendemos poner en práctica una etapa de instrucción, como explicaremos más adelante.

En lo que se refiere al análisis histórico-epistemológico, nos proponemos hacer un estudio de las fuentes originales (o traducciones de los originales) de algunos de los matemáticos más destacados en la construcción de las nociones del cálculo y particularmente de la integral de una función.

El propósito central de esta revisión es aportar elementos que muestren que la naturaleza de los objetos matemáticos construidos en el cálculo ha seguido una evolución que no sólo fortalece y enriquece el significado de los objetos, sino que el significado mismo de los objetos es diferente en cada época, en dependencia de la situación contextual a la que corresponde.

Tomando en cuenta que la noción de integral de una función emergió como tal durante la segunda mitad del Siglo XVII, iniciaremos nuestros trabajos a partir de esa época. Por otra parte, durante un periodo de tiempo importante la versión predominante del cálculo, al menos en la Europa Continental, fue el cálculo de Leibniz, razón por la cual trabajaremos con esta versión. Sin embargo, en ciertos momentos será ineludible retomar las aportaciones de Newton, las cuales influyeron e influyen significativamente hasta nuestros días en las concepciones del cálculo diferencial e integral.

El estudio lo realizaremos hasta la presentación de las ideas de Riemann, que en esencia son las que se enseñan actualmente en los sistemas escolares. Para conectar los trabajos iniciales de Leibniz con los de Riemann deberemos revisar la producción de algunos matemáticos, destacando las obras de Euler, de Lagrange y de Cauchy.

Para el análisis de la evolución de la noción de integral emplearemos los recursos del enfoque ontosemiótico. Específicamente usaremos la teoría sistémico-pragmática (centrada, en este caso, en los significados y objetos institucionales) y la teoría de las funciones semióticas, incluyendo la consideración de las dualidades cognitivas. Por el carácter de nuestro estudio, ubicamos esta parte dentro de los estudios de los significados institucionales de referencia.

En el enfoque ontosemiótico se reconoce la naturaleza antropológica de la producción matemática, y por institución podemos reconocer a cualquier comunidad que comparte sistemas de prácticas significativas para la resolución de tipos de situaciones problémicas comunes. En el caso que estamos trabajando, la comunidad involucrada es la de los expertos, la de los creadores de las teorías del cálculo y de la integral en particular.

Aunque esta parte del trabajo pudiera ser suficiente para respaldar nuestra tesis de que la construcción de significados para los objetos matemáticos se ve fuertemente influenciada por los contextos (en el sentido que hemos declarado), realizaremos otras actividades encaminadas en la misma dirección, pero de naturaleza diferente.

Con las versiones posibles de significados institucionales para la integral de una función, los estudiantes modernos se involucran en actividades de aprendizaje en las que los sistemas de prácticas pueden ser diversos y, consecuentemente, los significados pueden ser ricos y variados, útiles en la resolución de varios tipos de situaciones problémicas, con procedimientos y argumentaciones diversas, etc.

Sin embargo, ello no necesariamente es así y los sistemas de prácticas que se promueven a nivel escolar pudieran ser limitados o restrictivos. Para tener elementos que nos permitan dilucidar al respecto, aplicaremos un instrumento de diagnóstico entre profesores y estudiantes de cálculo, con el propósito de recolectar información sobre los significados que profesores y alumnos asignan a la noción de integral de una función, en la resolución de ciertos problemas.

El diseño del instrumento diagnóstico se hará tomando en cuenta los objetos institucionales de referencia que resulten de nuestro análisis epistemológico, de los currículos escolares y de los libros de texto de cálculo diferencial e integral de mayor uso en nuestra región y país.

Para analizar las respuestas de estudiantes y profesores emplearemos la teoría de las funciones semióticas, analizando las expresiones lingüísticas (de carácter ostensivo), que nos permitan interpretar las respuestas y extraer conclusiones sobre los significados personales construidos por los sujetos. Dado que el instrumento de diagnóstico se aplicará al margen de procesos de enseñanza específicos, los significados personales que serán motivo de análisis, los ubicamos como significados personales logrados y declarados.

CAPÍTULO 3

ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA INTEGRAL DE LEIBNIZ A CAUCHY- RIEMANN

Conforme a nuestra estrategia de investigación, en este capítulo presentamos los resultados del análisis histórico-epistemológico de la integral, desde su surgimiento en los trabajos de Leibniz, en la segunda mitad del Siglo XVII, hasta los trabajos de Riemann, en la parte media del Siglo XIX.

Aún y cuando se reconoce que Newton y Leibniz son los fundadores del cálculo, en nuestro estudio sólo tratamos, de origen, las aportaciones de Leibniz, sin entrar en la discusión de los trabajos de Newton. Sin embargo, en más de una ocasión nos vimos en la necesidad de tomar en cuenta las aportaciones de Newton y de sus seguidores, por lo cual, aunque el énfasis está colocado en la línea que se inicia con los Leibniz, será imprescindible recurrir a los tratamientos de las fluxiones, los fluentes, las razones primeras y razones últimas de Newton, sin las cuales es imposible comprender el derrotero que el cálculo tomó a lo largo de su desarrollo y fundamentación.

Las razones para centrar nuestra atención en las aportaciones de Leibniz son varias y entre ellas está que el cálculo se desarrolló rápidamente con base en sus preceptos y técnicas, quizá, como dice Grattan –Guiness, no porque Newton usara una simbología muy complicada, sino por la calidad y grandeza de los seguidores de Leibniz, como los miembros de la familia Bernoulli, L'Hospital y Euler, por citar a algunos.

Debemos tomar en cuenta, también, que no es nuestra intención, en este trabajo, hacer el estudio completo de la evolución de las ideas en torno al cálculo y la integral de una función. Nuestro propósito es aportar elementos que muestren el papel de los contextos –en el sentido que hemos declarado- en la conformación del significado institucional de la integral, en la más representativa e importante comunidad de referencia en los sistemas escolares: la comunidad de matemáticos expertos. Hemos considerado que tanto los actores como los periodos que se revisan y discuten aquí, son suficientes para el logro de nuestro objetivo.

Los periodos que distinguimos en el trabajo son, a grandes rasgos, los tres siguientes:

- Los trabajos de Leibniz y sus contemporáneos, como Johann y Jacob Bernoulli, desde el último tercio del Siglo XVII, hasta mediados del Siglo XVIII.
- Desde mediados del Siglo XVIII, con las aportaciones de Euler, hasta los inicios del Siglo XIX.
- Los desarrollos de la primera mitad del Siglo XIX, fundamentalmente con los trabajos de Cauchy y de Riemann.

Las ideas que presentamos en este tercer capítulo las hemos organizado en secciones, conforme a los periodos señalados. En cada uno de ellos presentamos dos tipos de información y de análisis: una discusión de algunas de las aportaciones que identificamos como esenciales en sus desarrollos y otra en la que hacemos un análisis, con base en la teoría de las funciones semióticas, de los objetos matemáticos institucionales involucrados y los significados institucionales asignados a los mismos en la comunidad matemática, ubicando el papel de los contextos en ambos aspectos, esto es, tanto en la emergencia de objetos y la asignación de significados a los mismos, en concordancia con las prácticas matemáticas del momento o etapa correspondiente.

Finalmente, presentamos una discusión de la evolución de las ideas centrales, con base en nuestro marco teórico, del objeto matemático “integral de una función”, desde Leibniz hasta Cauchy-Riemann.

Para evitar confusiones, dado que usaremos escritos originales (algunos en latín) o traducciones al inglés o el francés, presentaremos nuestras traducciones al español y como pie de página las transcripciones de las fuentes de donde los hemos tomado.

3.1 LA INTEGRAL EN LEIBNIZ

En esta primera parte mostraremos cómo las prácticas desarrolladas en los trabajos de Leibniz y sus seguidores hicieron surgir una concepción de la integral de una función acorde con las mismas.

En el caso de Leibniz, de quien nos ocuparemos primero, mostraremos cómo la aplicación de los resultados obtenidos por él en sus trabajos con series numéricas y publicados en el artículo De Arte Combinatoria en 1666, al extender su aplicación a cuestiones de carácter geométrico, condujo a la creación del cálculo diferencial e integral.

En este camino mostraremos que la concepción de la noción de integral está estrechamente relacionada a sus prácticas matemáticas y a las de su época y, consecuentemente, los problemas tratados, las nociones construidas y los métodos empleados, responden a las prácticas matemáticas por una parte, de sus contemporáneos y, por otra, de manera preponderante, a las prácticas matemáticas desarrolladas personalmente por Leibniz.

Para la realización de esta parte, nos basaremos, fundamentalmente, en la traducción al inglés de diferentes manuscritos de Leibniz realizada por J.M. Child en 1920, con motivo de la celebración del segundo centenario de su muerte y cuya publicación tiene el nombre de “The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz”. Asimismo recurriremos a diferentes escritos sobre historia de las matemáticas y diversas fuentes originales o traducidas al inglés o al francés.

De particular importancia resulta el escrito cuyo nombre es Historia et Origo Calculi Differentialis, escrito por Leibniz en 1714, dos años antes de su muerte. Como era costumbre en la época, Leibniz escribe la historia de sus trabajos empleando un seudónimo y refiriéndose a él en tercera persona.

Por otra parte, la notación y simbología empleada en los primeros trabajos de Leibniz son diferentes de las que finalmente usó y que, en mucho, son las usadas actualmente en el cálculo. Aunque recurriremos más a la simbología empleada finalmente por él, e incluso a la actual, mostraremos también las notaciones de origen, pues es ilustrativo también de las prácticas desarrolladas el observar la evolución de las mismas.

El primero de los trabajos de Leibniz que mostraremos, se relaciona con las diferencias de progresiones numéricas finitas, las cuales trató de acuerdo a lo escrito a continuación.

Leibniz partió de una sucesión dada

$$A, B, C, D, E$$

y consideró la sucesión de diferencias

$$L, M, N, D$$

en la cual $L = B - A$, $M = C - B$, y así sucesivamente.

Entonces $L + M + N + D = (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) = E - A$

De aquí que la suma de las diferencias consecutivas es igual a la diferencia del primero y último términos de la sucesión original.

A manera de ejemplo, observó que la suma de los primeros n números naturales impares puede obtenerse a partir de la siguiente consideración: si tomamos la sucesión de los primeros cuadrados

$$0, 1, 4, 9, 16, ..., n^2$$

obtenemos que la sucesión de diferencias es precisamente la de los primeros n naturales impares

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1$$

pues $i^2 - (i-1)^2 = i^2 - (i^2 - 2i + 1) = 2i - 1$. De aquí que

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2 - 0 = n^2$$

Emocionado por esta observación –como él mismo lo declara- consideró muchas otras series y también tomó en cuenta las segundas diferencias o diferencias de las diferencias, las terceras diferencias o las diferencias de las diferencias entre las diferencias y así sucesivamente. En Leibniz [1846: 32] textualmente señala que "Él también observó que para los números naturales, i.e., los números que proceden en orden desde el cero, las segundas diferencias se desvanecen, como también lo hacen las terceras diferencias para los cuadrados, las cuartas diferencias para los cubos, las quintas para los bicuadrados, las sextas para los surdesólidos[1], y así sucesivamente; también que las primeras diferencias para los números naturales eran constantes e iguales a *1*, las segundas diferencias para los

[1] No tengo ningún referente en español del término original usado por Leibniz, surdesolids, pero en diferentes búsquedas se le señala como un término con raíces arábigas, que significa "quinta potencia".

cuadrados *1.2* o *2*; las terceras para los cubos, *1.2.3 o 6*; las cuartas para los bicuadrados, *1.2.3.4* o *24*; las quintas para los surdesólidos, *1.2.3.4.5* o *120*, y así sucesivamente."[2]

Leibniz reconoce que esto era ya conocido de otros pero si lo incluimos aquí es porque vemos en este análisis la fuente de lo que después serán los diferenciales del cálculo, incluyendo los llamados diferenciales de orden superior.

Continuó con sus análisis y una mención especial la tenemos en el caso del Triángulo de Pascal. En su análisis encontramos también las ideas que después se aplicarán en el surgimiento de la integral, relacionada con los diferenciales, en este caso con las diferencias. Si el Triángulo de Pascal lo escribimos en la forma siguiente

1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	*3*	*6*	*10*	*15*	*21*
1	*4*	*10*	*20*	*35*	*56*
1	*5*	*15*	*35*	*70*	*126*
1	*6*	*21*	*56*	*126*	*252*
1	*7*	*28*	*84*	*210*	*462*

En este caso observó [Leibniz 1846: 32] que "… aquí una serie precedente, sea horizontal o vertical, siempre contiene las primeras diferencias de la serie inmediatamente siguiente a ella, las segundas diferencias de la siguiente posterior a esa, las terceras diferencias de la tercera, y así sucesivamente. También cada una de las series, ya sean horizontales o verticales contienen las sumas de las series inmediatamente precedentes a ellas, las sumas de las sumas o las segundas sumas de las series siguientes a esa, las terceras sumas de la tercera, y así sucesivamente."[3]

[2] "He also observed that for the natural numbers, i.e., the numbers in order proceeding from 0, the second differences vanished, as also did the third differences for the squares, the fourth differences for the cubes, the fifth for the biquadrates, the sixth for the surdesolids, and so on; also that the first differences for the natural numbers were constant and equal to 1; the second differences for the square, 1.2 or 2; the third for the cubes, 1.2.3 or 6; the fourth for the biquadrates, 1.2.3.4 or 24; the fifth for the surdesolids, 1.2.3.4.5 or 120, and so on".

[3] "… here a preceding series, either horizontal or vertical, always contains the first differences of the series immediately following it, the second differences of the one next after that, the third differences of the third, and so on. Also, each series, either horizontal or vertical contains the sums of the series immediately

En estos resultados aparecen pues, de forma relacionada, las diferencias entre términos de las sucesiones y la suma de las diferencias como la diferencia del último y primer término de la sucesión original. Estos resultados se convertirán después, en su Principio Fundamental del Cálculo (y a la postre en el Teorema Fundamental del Cálculo).

Asimismo, notemos que las nociones de diferencias y sumas son extendidas a segundas, terceras, etc., diferencias y sumas. Esta extensión jugará también un papel importante en la construcción del cálculo diferencial e integral de Leibniz.

Otro paso importante, pero aún en el análisis numérico, se da cuando Leibniz aplica sus resultados a sucesiones [Leibniz 1846: 32] en las cuales los "términos decrecen continuamente sin límite, tenemos"[4]

Términos	a	b	c	d	e	etc.
1as diferencias	f	g	h	i	k	etc.
2as diferencias	l	m	n	o	p	etc.
3as diferencias	q	r	s	t	u	etc.
4as diferencias	β	γ	δ	ε	θ	etc.
Etc.	γ	μ	ν	ρ	υ	etc.

Aquí Leibniz toma a a como primer término y llama ω al "último", para obtener

$$a - \omega = 1f + 1g + 1h + 1i + 1k + etc.$$

. $$a - \omega = 1l + 2m + 3n + 4o + 5p + etc.$$

$$a - \omega = 1q + 3r + 6s + 10t + 15u + etc.$$

$$a - \omega = 1\beta + 4\gamma + 10\delta + 20\varepsilon + 35\theta + \text{etc.}$$

En virtud de que no estamos recurriendo a la versión presentada originalmente en la obra "de Arte Combinatoria", desconocemos la forma precisa en la cual Leibniz [1846: 33] escribió el siguiente párrafo, posiblemente sólo con expresiones verbales, pero que él comenta ahora con la notación del cálculo:

"Por tanto, adoptando una notación inventada por él en una fecha posterior, y denotando cualquier término de la serie genéricamente mediante y (en cuyo caso $a = y$ también) podemos llamar a la primera diferencia dy, a la segunda diferencia ddy, a la

preceding it, the sums of the sums or the second sums of the series next before that, the third sums of the third, and so on.

[4] In the series, a, b, c, d, e, etc., where the terms continually decrease without limit we have…".

tercera d^3y, a la cuarta d^4y; y llamando a cualquier término de otra de las series mediante x, podemos denotar la suma de sus términos por $\int x$, a la suma de sus sumas o su segunda suma por $\iint x$, a la tercera suma por $\int^3 x$, y a la cuarta suma por $\int^4 x$. Por lo tanto, suponiendo que

$$1+1+1+1+1+etc. = x$$

o que x representa a los números naturales, para los cuales $dx = 1$, entonces

$$1+3+6+10+etc. = \int x$$

$$1+4+10+20+etc. = \iint x$$

$$1+5+15+35+etc. = \int^3 x$$

y así sucesivamente. Finalmente se sigue que

$$y-\omega = dy.x - ddy\cdot\int x + d^3y\cdot\iint x - d^4y\cdot\int^3 x + etc.$$

y ésta es igual a y, si suponemos que la serie es continuada al infinito, o que ω deviene a cero. Por lo tanto, también sigue a la suma de la serie misma, y tenemos

$$\int y = yx - dy\cdot\int x + ddy\cdot\iint x - d^3y\cdot\int^3 x + etc.$$"[5]

[5] Hence, adopting a notation invented by him at a later date, and denoting any term of the series generally by y (in which case $a = y$ as well), we may call the first difference dy, the second ddy, the third d^3y, the fourth d^4y; and calling any term of another of the series x, we may denote the sum of its terms by $\int x$, the sum of their sums or their second sum by $\iint x$, the third sum by $\int^3 x$, and the fourth sum by $\int^4 x$. Hence, supposing that

$$1+1+1+1+1+etc. = x,$$

or that x represents the natural numbers, for which $dx = 1$, then

$$1+3+6+10+etc. = \int x$$

$$1+4+10+20+etc. = \iint x$$

Como él mismo lo señala, la notación empleada aquí corresponde a la que inventó tiempo después. Sin embargo, su uso aquí se corresponde con la construcción del cálculo infinitesimal hecha por él posteriormente, por medio de la extrapolación de su análisis al contexto geométrico, abordando los problemas de cuadraturas y tangentes a las curvas. Para enfatizar esta situación Leibniz [1846: 34] señala que “Estos dos teoremas poseen la propiedad no común de que son igualmente ciertos en cualquier caso del cálculo diferencial, el numérico o el infinitesimal; de la distinción entre ellos hablaremos después.”[6]

La distinción indicada la encontramos efectivamente en una página posterior del mismo escrito en la cual Leibniz [1846: 53] dice “Pero nuestro joven amigo rápidamente observó que el cálculo diferencial podía ser empleado con diagramas de una manera aún más maravillosamente simple que como lo era con números, porque con diagramas las diferencias no eran comparables con las cosas que fueron diferenciadas; y tan frecuentemente como eran conectadas juntas por adición o sustracción, siendo incomparables la una con la otra, la menor se desvanecía en comparación con la más grande…”.[7]

De esta manera, en un mismo individuo podemos observar cómo las prácticas desarrolladas para la resolución de un tipo de problemas, en este caso las de las series numéricas, aplicadas posteriormente a problemas de otra naturaleza, de carácter

---

$$1+5+15+35+etc.=\int^3 x$$

and so on. Finally it follows that

$$y-\omega = dy.x - ddy\cdot\int x + d^3y\cdot\iint x - d^4y\cdot\int^3 x + etc.$$

and this is equal to y, if we suppose that the series is continued to infinity, or that ω becomes zero. Hence also follows the sum of the series itself, and we have

$$\int y = yx - dy\cdot\int x + ddy\cdot\iint x - d^3y\cdot\int^3 x + etc.$$

[6] “These two like theorems possess the uncommon property that they are equally true in either differential calculus, the numerical or the infinitesimal; of the distinction between them we Hill speak later”.

[7] “But our young friend quickly observed that the differential calculus could be employed with diagrams in an even more wonderful simple manner than it was with numbers, because with diagrams the differences were not comparable with the things which differed; and as often as they were connected together by addition or subtraction, being incomparable with one another, the less vanished in comparison with the greater;…”.

geométrico, conducen a la construcción de una teoría tan importante como el cálculo infinitesimal.

Antes de centrarnos en dicha construcción, mostrando cómo es que ésta realmente corresponde a una extrapolación de sus observaciones de las series numéricas, abundaremos un poco más en los resultados que obtuvo en este terreno, particularmente en lo referente a algunos problemas que le fueron planteados por Christian Huygens, quien le sugirió, entre otros, que tratara de encontrar la suma de la serie

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)/2}+\cdots$$

de los recíprocos de los números triangulares.

Para ello Leibniz [1846: 50] consideró el siguiente arreglo numérico, el cual llamó "triángulo armónico":

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}$$

"… donde, si los denominadores de cualquier serie descendiendo oblicuamente al infinito o de cualquier serie finita paralela son, cada una, dividida por el término que le corresponde en la primera serie, son producidos los números combinatorios, a saber aquellos que están contenidos en el triángulo aritmético. Además esta propiedad es común a ambos triángulos, a saber, que las serie oblicuas son las series suma –y diferencia- una de la otra."[8]

Haciendo la suma de las cantidades que aparecen en las líneas oblicuas, las cuales son las diferencias de las líneas previas, Leibniz obtiene, con la consideración de que el último término decrece continuamente o "deviene en cero".

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+etc.=1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+etc.=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\frac{1}{140}+\frac{1}{280}+etc.=\frac{1}{3}$$

En la primera de estas sumas puede observarse que el n-ésimo elemento viene dado por

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

el cual es un medio de los recíprocos de los llamados números triangulares, y cuya suma le fue sugerida a Leibniz por Huygens, como indicamos líneas atrás. De esta manera resolvió el problema al multiplicar por 2 cada sumando de la primera de las líneas previas, para obtener

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+etc.=2$$

Similarmente, si multiplicamos la segunda de las líneas por 3 obtenemos la suma de los recíprocos de los números piramidales

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+etc.=\frac{3}{2}$$

Si multiplicamos la siguiente por 4, tenemos

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+etc.=\frac{4}{3}$$

[8] "… where, if the denominators of any series descending obliquely to infinite of any parallel finite series, are each divided by the term that corresponds in the first series, the combinatory numbers are produced, namely those that are contained in the arithmetical triangle. Moreover this property is common to either triangle, namely, that the oblique series are the sum –and difference- series of one another".

De esta manera, Leibniz no sólo obtuvo resultados que eran ya conocidos previamente, sino que su método le permitió encontrar solución a otros como el planteado por Huygens.

El siguiente paso consistió en aplicar su método a problemas de otro carácter, de tipo geométrico, dando surgimiento así a su propuesta del cálculo infinitesimal. Es en esta parte donde nos interesa mostrar cómo la primera versión del cálculo de Leibniz obedece a la naturaleza de los problemas que empezó a considerar. Como él mismo señala, la aplicación de su método de la suma de las diferencias al contexto geométrico tuvo su origen en la revisión de un trabajo de Pascal (quien firmaba con el pseudónimo de Detonville), "treatise on the sines of a quadrant of a circle". Referente a ello, Leibniz [1846: 38] escribió:

"Más tarde, frente a un ejemplo dado por Detonville, hubo una repentina explosión de luz sobre él, a lo cual es extraño decir que Pascal mismo no la hubiera percibido. Cuando él probó el teorema de Arquímedes para medir la superficie de una esfera o partes de ella, usó un método en el cual la superficie total del sólido formado por una rotación alrededor de cualquier eje puede ser reducida a una figura plana equivalente. De ahí, nuestro joven amigo, hizo para sí mismo el siguiente teorema general.

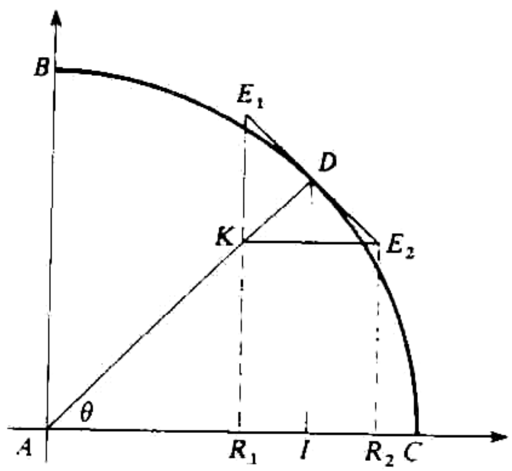
Porciones de una línea recta normal a una curva, interceptadas entre la curva y un eje, cuando son tomadas en orden y aplicadas en ángulos rectos al eje, conducen a una figura equivalente al momento de la curva alrededor del eje."[9]

Dada la importancia que este punto tiene para el análisis del surgimiento de la propuesta de Leibniz para el cálculo infinitesimal, es pertinente revisar tanto el trabajo de Pascal al que se hace referencia, como a los desarrollos que motivó y que él describe como súbita explosión de luz.

Pascal probó su proposición basándose en la siguiente figura

[9] "Later on from one example given by Detonville a Light suddenly Bursa upon him, which strange to say Pascal himself had not perceived in it. For when he proves the theorem of Archimedes for measuring the surface of a sphere or parts of it, he used a method in which the whole surface of the solid formed by a rotation round any axis can be reduced to an equivalent plane figure. From i tour young friend made out for himself the following general theorem.

Portions of a straight line normal to a curve, intercepted between the curve and an axis, when taken in order and applied at right angles to the axis give rise to a figure equivalent to the moment of the curve about the axis".



El triángulo rectángulo E_1E_2K construido tiene la característica de que la hipotenusa E_1E_2 es tangente al círculo en el punto D y, como puede comprobarse fácilmente, lo triángulos E_1E_2K y ADI son semejantes. De aquí que

$\frac{AD}{E_1E_2} = \frac{DI}{E_2K}$, por lo cual $DI \bullet E_1E_2 = AD \bullet E_2K = AD \bullet R_1R_2$.

Entonces, si denotamos DI por y, AD como a, E_1E_2 como Δs y R_1R_2 como Δx, tenemos que $y\Delta s = a\Delta x$. Considerando Δs y Δx como indivisibles, Pascal determinó que las sumas eran las mismas, las cuales en la simbología del cálculo, inventada precisamente por Leibniz podemos expresar como

$$\int yds = \int adx$$

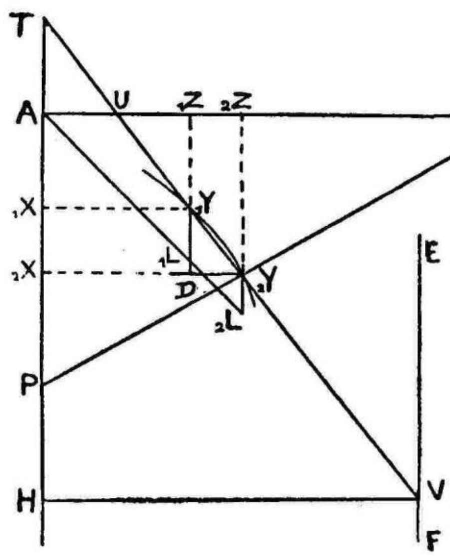
Ahora bien, si giramos el cuarto de círculo de la figura alrededor del eje x, tenemos que el área de una zona infinitesimal es $2\pi yds$ y, por lo tanto

$$A = \int_0^a 2\pi \, y \, ds = 2\pi \, a \int_0^a dx = 2\pi \, a^2$$

Básicamente ese es el resultado de Pascal y la súbita explosión de luz a la que Leibniz se refiere consiste en la consideración del triángulo E_1E_2K, el cual modificó ligeramente para construir lo que él llamó *triángulo característico*. Esta modificación representa un cambio en la concepción de las figuras con lados curvos y dará origen al surgimiento de las “cantidades diferenciales”.

La situación en la que Leibniz empleó por primera vez el triángulo característico es la que describiremos en los párrafos siguientes, iniciando el análisis de las curvas por medio del método que habría de construirse en su versión del cálculo diferencial e integral. Factor importante de su construcción fue la noción de momento, desarrollada por sus antecesores en la búsqueda de centros de gravedad.

Consideró la siguiente figura, en la cual el papel fundamental lo constituye el triángulo ${}_1Y\,D\,{}_2Y$, siendo éste al que denominó triángulo característico y "cuyos lados $D\,{}_1Y$, $D\,{}_2Y$ son respectivamente iguales a ${}_1X\,{}_2X$, ${}_1Z\,{}_2Z$, partes de las coordenadas o coabscisas AX, AZ, y su tercer lado ${}_1Y\,{}_2Y$ una parte de la tangente TV producida si es necesario."[10] Leibniz [1846: 39].



Plantea entonces que, aunque este triángulo es indefinido por ser infinitamente pequeño, es posible encontrar muchos triángulos definidos semejantes a él. Así supone, usando su terminología, que *AXX, AZZ* son dos líneas rectas en ángulo recto, *AX*, *AZ* son las coabscisas, *YX*, *YZ* las coordenadas, *TUV* la recta tangente, PYQ la perpendicular, *XT*, *ZU* las subtangentes, *XP*, *ZQ* las subnormales; completa la figura dibujando *EF* paralela al eje

[10] "… whose sides $D\,{}_1Y$, $D\,{}_2Y$ are respectevely equal to ${}_1X\,{}_2X$, ${}_1Z\,{}_2Z$, parts of the coordinates or coabscissae AX, AZ, and its third side ${}_1Y\,{}_2Y$ a part of the tangent TV, produced if necessary".

AX, en cuyo caso denota por *V* a la intersección de la tangente *TY* con EF y desde *V* dibuja la perpendicular VH al eje *AX*.

Con esta construcción tenemos que los siguientes triángulos son semejantes al triángulo característico ${}_1Y\,D\,{}_2Y$: *TXY*, *YZU*, *TAU*, YXP, *QZY*, *QAP* y *THV*, todos tomados como ejemplos de los muchos triángulos semejantes al triángulo característico.

El primer caso considerado por Leibniz [1846: 40], es el de la semejanza de los triángulos ${}_1Y\,D\,{}_2Y$ y ${}_2Y\,{}_2X\,P$, donde tenemos que $P_2Y \bullet {}_1Y\,D = {}_2Y_2X \bullet {}_2Y_1Y$; "… esto es, el rectángulo contenido por la perpendicular $P\,{}_2Y$ y ${}_1Y\,D$ (o el elemento del eje ${}_1X\,{}_2X$) es igual al rectángulo contenido por la ordenada ${}_2Y\,{}_2X$ y el elemento de la curva, ${}_1Y\,{}_2Y$, esto es, al momento del elemento de la curva alrededor del eje. Consecuentemente el momento total de la curva es obtenido formando la suma de estas perpendiculares al eje."[11]

De esta manera, procediendo como lo hicimos en el caso del problema de Pascal, si usamos la notación que Leibniz creó para los objetos del cálculo, el planteamiento hecho verbalmente queda escrito de modo que nos es más familiar. Por tanto, si denotamos $P\,{}_2Y$ por *n*, ${}_1Y\,D$ por *dx*, ${}_2Y\,{}_2X$ por *y*, y ${}_1Y\,{}_2Y$ por *ds* tendremos que $n\,dx = y\,ds$, y, sumando estos elementos, llegamos a que $\int n\,dx = \int y\,ds$.

Pero Leibniz [1846:40] mostró también que el análisis se puede extender analizando la semejanza del triángulo característico con algunos de los otros por él señalados. Por ejemplo, si tomamos el triángulo *THV*, tenemos que $\frac{{}_1Y\,{}_2Y}{{}_2Y\,D} = \frac{TV}{VH}$ o, escrito como multiplicación, $VH \bullet {}_1Y\,{}_2Y = TV \bullet {}_2YD$; "… esto es, el rectángulo contenido por la longitud constante *VH* y el elemento de la curva, ${}_1Y\,{}_2Y$, es igual al rectángulo contenido por *TV* y ${}_2Y\,D$, o el elemento de la coabscisa, ${}_1Z\,{}_2Z$. Por lo tanto la figura plana producida por la

[11] '… that is, the rectangle contained by the perpendicular $P\,{}_2Y$ and ${}_1YD$ (or the element of the axis, ${}_1X\,{}_2X$) is equal to the rectangle contained by the ordinate ${}_2Y\,{}_2X$ and the element of the curve, ${}_1Y\,{}_2Y$, that is, to the moment of the element of the curve about the axis. Hence the whole moment of the curve is obtained by forming the sum of these perpendiculars to the axis".

aplicación de líneas *TV* para ángulos rectos a *AZ* es igual al rectángulo contenido por la curva cuando es rectificada y la longitud constante *HV*".[12]

Nuevamente, usando la notación típica de la integral, tenemos que si denotamos la longitud constante HV mediante *a*, y a la longitud variable de la tangente mediante *t*, este resultado puede escribirse como $ads = tdx$ y, tomando sumas, $\int a\,ds = \int t\,dx$.

En otro ejemplo, analizando de nuevo la relación entre los triángulos semejantes ${}_2Y\,{}_2X\,P$ y ${}_1Y\,D\,{}_2Y$ (el triángulo característico), tenemos $\frac{{}_1Y\,D}{D\,{}_2Y} = \frac{{}_2Y\,{}_2X}{{}_2X\,P}$ y de aquí ${}_2X\,P \bullet {}_1Y\,D = {}_2Y\,{}_2X \bullet D\,{}_2Y$, "… o la suma de las subnormales ${}_2X\,P$, tomadas en orden y aplicadas al eje, ya sea a ${}_1Y\,D$ o a ${}_1X\,{}_2X$, será igual a la suma de los productos de las ordenadas ${}_2Y\,{}_2X$ y sus elementos, ${}_2Y\,D$, tomados en orden."[13][Leibniz 1846: 40].

Si denotamos la longitud de la subnormal ${}_2X\,P$ mediante ν, la relación de semejanza podemos escribirla como $\nu \bullet dx = y \bullet dy$ y, tomando sumas, $\int \nu\,dx = \int ydy$.

Adicionalmente, Leibniz [1846: 41] estableció que si la curva analizada pasa por el origen y su base es el intervalo $[0,b]$ entonces $\int ydy = \frac{1}{2}b^2$. Una vez más, empleó la misma figura para mostrar sus argumentos, expresados con palabras: "Pero líneas rectas que crecen continuamente desde cero, cuando cada una es multiplicada por su elemento de incremento, forman hasta aquí un triángulo. Sea entonces AZ siempre igual a ZL, entonces obtenemos el triángulo rectángulo AZL, el cual es un medio del cuadrado sobre AZ; y entonces la figura que se produce tomando las subnormales en orden y aplicándolas perpendicularmente al eje, siempre será igual a la mitad del cuadrado sobre la ordenada. Por tanto, para encontrar el área de una figura dada, es buscada otra figura tal que sus subnormales son respectivamente iguales a las ordenadas de la figura dada, y entonces esta

---

[12] "… that is, the rectangle contained by the constant lenght VH and the element of the curve, ${}_1Y\,{}_2Y$, is equal to rectangle container by the *TV* and ${}_2Y\,D$, or the element of the coabscissa, ${}_1Z\,{}_2Z$. Hence the plane figure produced by applying the lines *TV* in order at right angles to *AZ* is equal to the rectangle container by the curve when straightened out and the constant length *HV*".

[13] "… or the sum of the subnormals ${}_2X\,P$, taken in order and applied to the axis, either to ${}_1Y\,D$ or to ${}_1X\,{}_2X$, will be equal to the sum of the products of the ordinates ${}_2Y\,{}_2X$ and their elements, ${}_2Y\,D$, taken in order".

segunda figura es la cuadratriz de la primera; y entonces de esta consideración extremadamente elegante obtenemos la reducción de las áreas de superficies descritas por rotación a cuadraturas de planos, así como la rectificación de curvas; a la vez podemos reducir estas cuadraturas de figuras a un problema inverso de tangentes."[14]

Así pues, con la exposición que hemos hecho hasta el momento, guiados por las propias palabras de Leibniz tenemos aquí el surgimiento de la versión de cálculo infinitesimal creada por él. El análisis presentado obedece a lo que Leibniz denominó como una "súbita explosión de luz".

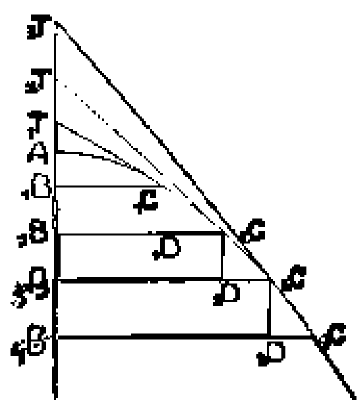
Rescatemos hasta aquí algunos hechos fundamentales para entender el derrotero que habrá de seguir el desarrollo del cálculo infinitesimal. Primero enfatizamos que con la aplicación del triángulo característico, con sus elementos ${}_1Y\,D$, ${}_2Y\,D$ y ${}_1Y\,{}_2Y$, Leibniz estableció la noción de diferencial. Las denominaciones establecidas fueron las de "elementos de crecimiento de las coordenadas" en los primeras dos y de "elemento de la curva" para la última. A estos "elementos de crecimiento" terminaría denominándolos como diferenciales y corresponden, respectivamente a los tres tipos primarios de diferenciales establecidos: diferenciales de las abscisas, de las ordenadas y de arco de la curva.

Así concebidos, los diferenciales tienen un carácter geométrico y el cálculo infinitesimal creado por Leibniz, el cual reposa en estos elementos tiene asimismo tal carácter geométrico. En sus publicaciones Leibniz planteó que los diferenciales son segmentos infinitamente pequeños y su concepción tiene fuertes implicaciones. Entre ellas tenemos que la consideración de que el diferencial de arco es un segmento infinitamente pequeño de la tangente a la curva, representa una novedosa manera de ver a las curvas y el proceso de rectificación al que él mismo hace alusión conlleva a concebir a las figuras curvilíneas como "polígonos infinito angulares". En tal sentido, para hacer cálculos en

[14] "But straight lines that continually increase from zero, when each is multiplied by its element of increase, form altogether a tringle. Let then AZ always be equal to ZL, then we get the right-angled triangle AZL, which is half the square on AZ; and then the figure that is produced by taking the subnormals in order and applying them perpendicilar to the axis will be always equal to hal the square on the ordinate. Thus, to find the area of a given figure, another figure is sought such that its subnormals are respectevely equal to the ordinates of the given figure, and then this second figure is the quadratix of the given one; and thus from this extremely elegant consideration we obtain the reduction of the areas of surfaces described by rotation to plane cuadratures, as well as the rectification of curves; at the same time we can reduce these cuadratures of figures to an inverse problem of tangents".

ellos, por ejemplo determinar sus áreas, podemos operar de forma similar a como se hace con cualquier otro polígono, haciendo los ajustes correspondientes. Para hacer dichos ajustes, Leibniz desarrolló las técnicas del cálculo, extrapolando su método para analizar las sucesiones numéricas, al caso de las nuevas entidades geométricas por él generadas.

La noción de polígono infinito angular y, en general los elementos del cálculo, lo encontramos en el siguiente pasaje del manuscrito "The elements of the new calculus for differences and sums, tangents and quadratures, maxima and minima, dimensions of lines, surfaces, and solids, and for other things that trascend other means of calculation", escrito en 1680 y en el cual, haciendo referencia a la siguiente figura,



Escribió "Sea CC una línea, de la cual su eje es AB, y sean BC ordenadas perpendiculares a este eje, éstas llamadas mediante y, y sea AB la abscisa cortada a lo largo de este eje, siendo llamado x.

Entonces CD, las diferencias de la abscisa, serán llamadas dx; tales son ${}_1C_1D$, ${}_2C_2D$, ${}_3C_3D$, etc. También las líneas rectas ${}_1D_2C$, ${}_2D_3C$, ${}_3C_4D$, las diferencias de las ordenadas, serán llamadas dy. Si ahora estas dx y dy son tomadas infinitamente pequeñas, o los dos puntos sobre la curva son entendidos como que están apartados una distancia menor que cualquier longitud dada, i.e., si ${}_1D_2C$, ${}_2D_3C$, etc. son considerados como los incrementos momentáneos de la línea BC, creciendo continuamente en tanto desciende a lo largo de AB, entonces es evidente que la línea recta uniendo estos dos puntos, digamos ${}_2C_1C$, (el cual es un elemento de la curva o un lado del polígono infinito angular que reposa sobre la curva), cuando es prolongado para unirse al eje en ${}_1T$, será la tangente a la curva, y ${}_1T_1B$ (el intervalo entre la ordenada y la tangente, tomado a lo largo del eje) será a la ordenada ${}_1B_1C$ como ${}_1C_1D$ es a ${}_1D_2C$; o, si ${}_1T_1B$ o ${}_2T_2B$, etc. son en general, llamados t, entonces $t : y :: dx : dy$. Entonces encontrar las diferencias de series es encontrar tangentes."[15][Leibniz 1680: 137].

Con lo expuesto hasta aquí tenemos elementos suficientes para mostrar cómo es que las prácticas desarrolladas por Leibniz en su análisis de las sucesiones y las series numéricas fueron extrapoladas a un nuevo contexto y con ello generó la construcción de su propuesta de cálculo infinitesimal.

Por esa razón, aún cuando en un principio se refería a los elementos del cálculo mediante el lenguaje ordinario o en prosa, la introducción de su notación, en mucho vigente hasta la actualidad, obedece a su concepción de diferencias y sumas.

Una vez concebidos los diferenciales como lo hace y la consecuente concepción de las figuras como polígonos infinito angulares, su extrapolación consiste en atribuirle a los diferenciales propiedades similares a las diferencias de las series infinitas, en las cuales los términos decrecen continuamente hacia el *0*. La extrapolación condujo entonces a nuevos problemas, algunos de carácter filosófico y otros de carácter práctico.

Por ejemplo, las diferencias o diferenciales a que hace alusión, sólo tienen sentido en este contexto, intrínsecamente relacionadas a su visión de los polígonos con lados curvos, a los cuales caracteriza como infinito-angulares. Para verlo con mayor claridad podemos formularnos interrogantes como las siguientes: ¿Cuál es la longitud de una cantidad diferencial, es decir, de una diferencia "infinitamente pequeña"? Si en las

---

[15]"Let CC be a line, of which the axis is AB, and let BC be ordinates perpendicular to this axis, these being called y, and let AB be the abcissae cut off along the axis, thes called x.
Then CD the differences of the abcissae, will be called dx; such are ${}_1C_1D,\ {}_2C_2D,\ {}_3C_3D$,etc. Also the straight lines ${}_1D_2C,\ {}_2D_3C,\ {}_3C_4D$ the differences of the ordinates, will be called dy. If now these dx and dy are taken to be infinitely small, or the two points on the curve are understood to be a distance apart that is less than any given length, i.e., if ${}_1D_2C,\ {}_2D_3C$,etc. are considered as the momentaneous increments of the line BC, increasing continuously as it descends along AB, then it is plain that the straight line joining these two points, ${}_2C_1C$ say, (which is an element of the curve or a side of the infinite-angled polygon that stands for the curve), when produced to meet the axis in ${}_1T$, will be the tangent to the cyrve, and ${}_1T_1B$ (the interval between the ordinate and the tangent, taken along the axis) will be the ordinate ${}_1B_1C$ as ${}_1C_1D$ is to ${}_1D_2C$; or, if ${}_1T_1B$ or ${}_2T_2B$, etc. Are in general called t, then $t : y :: dx : dy$. Thus to find the diffrences of series is to find tangents.

sucesiones numéricas Leibniz tomaba diferencias de términos consecutivos, ¿los diferenciales corresponden a diferencias de puntos consecutivos en una recta? De ser así ¿Todos los diferenciales son de igual longitud?

En el caso de la primera pregunta, si consideramos que es posible determinar la longitud de un segmento diferencial, por la propiedad arquimediana debemos aceptar que con un múltiplo suficientemente grande, la línea curva puede ser formada por los segmentos diferenciales. En el caso inverso tendríamos lo mismo, es decir, si una línea está formada por una cantidad finita de segmentos diferenciales, por muchos que éstos sean, será posible asignarles una determinada longitud. Para salvar esta situación Leibniz planteó que los segmentos infinitamente pequeños tenían una longitud "inasignable" y con ello renunció al manejo aritmético de los mismos y por lo tanto tuvo que crear y desarrollar reglas de operación para los diferenciales y sus sumas, construyendo entonces lo que hoy conocemos como cálculo diferencial e integral.

Esta concepción puede constatarse en el siguiente pasaje de Leibniz, retomado de un libro de H. J. M. Boss [1974: 14]: "Y tal incremento (a saber la suma de una línea incomparablemente más pequeña a una línea finita) no puede ser exhibida por ninguna construcción. Porque comparto la Definición 5 del libro V de Euclides que sólo aquellas cantidades homogéneas son comparables, de donde una puede llegar a ser más grande que otra si es multiplicada por un número, el cual es, un número finito. Aseguro que las entidades, cuya diferencia no es una cantidad, son iguales. (...) Esto es precisamente lo que significa decir que una diferencia es más pequeña que una cantidad dada".[16]

Respecto a la interrogante sobre si los diferenciales son la diferencia entre puntos consecutivos, Leibniz responde de forma positiva cuando escribe [Bos 1974: 18] "Aquí *dx* significa el elemento, esto es, el incremento o decremento (instantáneo), de la cantidad creciente (continuamente) *x*. También es llamado diferencia, a saber la diferencia entre dos

[16]"And such an increment (namely the addition of an incomparably smaller line to a finite line) cannot be exhibited by any construction. For I agree with Euclid Book V Definition 5 that only those homogeneous quantities are comparable, of which the one can become larger than the other if multiplied by a number, that is, a finite number. I assert that entities, whose difference is not such a quantity, are equal. (…) This is precisely what is meant by saying that the difference is smaller than any given quantity".

x's consecutivas las cuales difieren por un elemento (o por un inasignable), el uno originándose del otro, en tanto el otro crece o decrece o decrece (momentáneamente)".[17]

Concebidos de esta manera, es natural suponer que los diferenciales podrían considerarse todos de igual longitud, siendo ésta, constante. Sin embargo, por diferentes motivos no fueron así concebidos. Por ejemplo, considerando el triángulo característico en una curva diferente a la recta $y = x$, tenemos que, si partimos de tomar un elemento diferencial *dx*, entonces los diferenciales *dy* y *ds* serán diferentes a *dx*. Entonces los diferenciales podemos considerarlos diferentes y eso abrió la posibilidad de, como en el caso de las sucesiones numéricas, en el que podemos hablar de segundas diferencias, terceras diferencias, etc., en el caso de los infinitamente pequeños podemos asumir la existencia de diferenciales de distinto orden. "Además, *ddx* es el elemento del elemento, o la diferencia de las diferencias, dado que la cantidad *dx* misma no es siempre constante, sino que usualmente se incrementa o decrementa continuamente. Y de la misma manera se puede proseguir hacia *dddx* o d^3x, y así sucesivamente."[18][Bos 1974: 19].

Con estas consideraciones Leibniz abordó el problema de los cálculos de tangentes y de cuadraturas con un nuevo método, que simplificaba los procesos en comparación a las experiencias previas de los matemáticos. Y para el desarrollo de este método y creación de las nuevas reglas de operación, extrapoló al contexto geométrico los principales resultados de las diferencias y sumas numéricas. Generó también dudas y problemas sobre la validez de sus resultados, pues el desarrollo de un cálculo para objetos geométricos, sin aparentes posibilidades de tener un referente aritmético, y por lo tanto sin poder aplicarle a los diferenciales las reglas de la aritmética generaba desconfianzas sobre su validez. Inició entonces un largo proceso tanto de ampliación y aplicación de las reglas y resultados del cálculo, con mucho éxito ciertamente, pero a la vez se inició la búsqueda de una fundamentación que permitiera "aritmetizar" el cálculo y hacerlo compatible con el edificio matemático previamente construido.

[17] Here *dx* means the element, that is, the (instantaneous) increment or decrement, of the (continually) increasing quantity *x*. It is also called difference, namely between two proximate *x's* which differ by an element (or by an inasignable), the one originating from the other, as the other increases or decreases (momentaneously).
[18] "Further, *ddx* is the element of the element, or the difference of the differences, for the quantity *dx* itself is not always constant, but usually increases or decreases continually. And in the same way one may proceed to *dddx* or d^3x and so forth.

Es de notarse que Leibniz primeramente trabajó con diferencias de sucesiones numéricas con un número finito de términos y luego la extendió al caso de sucesiones numéricas infinitas en las cuales la variable "decrecía continuamente". El éxito en esta primera extrapolación del caso finito al infinito lo motivó para hacerlo al pasar del contexto numérico al contexto geométrico, sólo que ahora su extrapolación fue hecha para un caso mucho más escurridizo, los diferenciales, de longitud "inasignable".

Y es precisamente en este caso donde él profundizó su construcción y estableció las propiedades de los diferenciales y las sumas, que a la postre se convertirían en las actuales nociones de derivada y de integral. Al respecto, señaló lo siguiente:

"La *suma* es inversa del elemento o diferencial, porque si una cantidad decrece (continuamente) hasta desvanecerse, entonces la cantidad es la suma de todas las diferencias sucesivas, por lo que $d\int y\,dx$ es lo mismo que $y\,dx.$ Pero $\int y\,dx$ significa el área la cual es el agregado de todos los rectángulos, cada uno de los cuales tiene una longitud y (asignable) y ancho dx (elemental) correspondiente a y en la sucesión. Existen también *sumas de sumas* y así sucesivamente, por ejemplo $\int dz \int y\,dx,$ el cual es el sólido construido con todas las áreas tales que los $\int y\,dx$ son multiplicados por los elementos dz correspondientes en la sucesión."[19][Bos 1974: 20].

Aunque nuestro interés se centra en el caso de las sumas, es decir, el caso de la posterior integral, resaltamos que las propiedades y algoritmos requieren que también abordemos el cálculo de diferencias (diferenciales), pues ambas nociones se desarrollan a la par. Así pues, antes de profundizar en algunos casos de interés sobre las integrales, nos detendremos a hablar brevemente de las consideraciones generales de su propuesta.

Aunque los diferenciales son longitudes "inasignables", Leibniz asumió que satisfacían las propiedades de las diferencias tratadas en el caso numérico, y estableció, como ya vimos, la existencia de diferenciales de orden superior, esto es, diferenciales de

[19] "Reciprocal to the element or differential is the *sum*, because if a quantity decreases (continually) till it vanishes, then that quantity is the sum of all the successive differences, so that $d\int y\,dx$ is the same as $y\,dx.$ But $\int y\,dx$ jeans the area which is the aggregate of all rectangles, any of which has an (inasignable) length y and (elementary) width dx corresponding in the sequence to y. There are also *sums of sums* and so forth, for instance $\int dz \int y\,dx,$ which is the solid built up of all areas such as $\int y\,dx$ multiplied by the elements dz which correspond in the sequence".

segundo orden, infinitamente pequeños respecto a los diferenciales de primer orden; diferenciales de tercer orden, infinitamente pequeños respecto a los de segundo orden, y así sucesivamente. Si denotaba por ejemplo a una diferencia mediante dx, entonces empleó la siguiente notación en las restantes: $ddx = d^2x$ para las segundas diferencias, $dddx = dd^2x = d^3x$ para las terceras diferencias, etc.

Similarmente Leibniz extrapoló al caso geométrico la operación recíproca, esto es, la suma, la cual representó mediante $\int$ y la aplicó a diversas situaciones. Así, para referirse a la suma de las ordenadas en una curva, escribía $\int y$ y, por analogía con el caso de las diferencias, estableció que las sumas eran cantidades "infinitamente grandes" con relación a los valores de la variable de referencia.

La extrapolación de los resultados obtenidos para el caso finito y de sucesiones numéricas infinitas se hizo también para el caso de las sumas, asumidas como operaciones recíprocas para establecer que $\int dx = x$ y que $d\int x = x$.

Leibniz procedió entonces a construir las reglas de operación para los diferenciales y las sumas a partir de las reglas o propiedades válidas en el caso de las sucesiones numéricas finitas e infinitas (con términos que decrecen continuamente), pero ahora para los elementos inasignables o infinitamente pequeños y para los infinitamente grandes.

Una consecuencia importante de esta visión de Leibniz es que lo que hoy conocemos como Teorema Fundamental del Cálculo, puede establecerse simplemente como un principio o como una definición, pues siendo evidente su validez en el caso de las sucesiones numéricas, se extrapola al caso de los infinitamente pequeños y los infinitamente grandes. Así, hace referencia a lo que él denomina *principio fundamental del cálculo* [Leibniz 1680: 142]: "Diferencias y sumas son las inversas una de otra, es decir, la suma de las diferencias de una serie es un término de la serie, y la diferencia de las sumas de una serie es un término de la serie"[20], lo cual escribe precisamente como lo hicimos líneas arriba, $\int dx = x$ y $d\int x = x$.

[20] "The fundamental principle of the calculus. Differences and sums are the inverses of one another, that is to say, the sum of the diffrences of a series is a term of the series, and the difference of the sums of a series is a term of the series".

También puede observarse que en la nueva propuesta de cálculo, los infinitamente pequeños o diferenciales y los infinitamente grandes pueden referirse a variables geométricas lineales, como en el caso del triángulo característico con los diferenciales $dx, dy\ y\ ds,$ siendo ds el elemento de arco; pero también a áreas diferenciales como en el caso de las cantidades $ydx,$ o de volumen considerando también una tercera dimensión. Para el caso de las sumas se preserva la homogeneidad de las dimensiones y la suma de diferenciales lineales es una cantidad lineal, la suma de diferenciales de área es un área y la suma de diferenciales de volumen es un volumen.

En el desarrollo de este nuevo método, Leibniz estableció las diferentes reglas de diferenciación, entre las cuales podemos destacar las siguientes de carácter general:

$$d(x+y) = dx + dy$$

$$d(xy) = xdy + ydx$$

$$d\frac{x}{y} = \frac{xdy - ydx}{y^2}$$

En el establecimiento de estas propiedades o reglas de los diferenciales se pone de manifiesto la concepción de Leibniz sobre ellos y las consideraciones sobre los diferenciales de orden superior. Por ejemplo, para el caso del diferencial del producto escribió [Bos 1974: 16]: "$d(xy)$ es lo mismo que la diferencia entre dos xy adyacentes, de los cuales uno es xy y el otro es $(x+dx)(y+dy)$. Entonces $d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy$ o $xdy + ydx + dxdy,$ y esto será igual a $xdy + ydx$ si la cantidad $dxdy$ es omitida, la cual es infinitamente pequeña con respecto a las cantidades restantes, porque dx y dy son supuestos infinitamente pequeños (a saber, si el término de la sucesión representa líneas, continuamente creciente o decreciente hacia los mínimos)".[21]

También obtuvo reglas de diferenciación para el caso de algunas curvas específicas, como las que se indican a continuación:

$dx^a = ax^{a-1}dx$ (incluyendo valores fraccionarios de a)

[21] "$d(xy)$ is the same as the diffrence between two adjacent $xy,$ of which let one be $xy,$ the other $(x+dx)(y+dy)$. Then $d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy$ or $xdy + ydx + dxdy,$ and this will be equal to $xdy + ydx$ if the quantity $dxdy$ is ommited, which is infinitely small with respect to the remaining quantities, because dx and dy are suppsed infinitely small (namely if the term of the sequences represnts lines, increasing or decreasing continually by minima)".

$$d\log_a x = \frac{adx}{x}$$

$$db^x = b^x \ln b\, dx$$

$$d(senx) = \cos x dx$$

$$d(arcsenx) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ahora bien, dado el desarrollo de la época, es necesario decir que las expresiones analíticas como las señaladas corresponden a ecuaciones de curvas y no a funciones en el sentido actual. En ellas no se hacen consideraciones respecto a variables independientes y dependientes.

Para él era indistinto tratar con una u otra variable, pues siendo ambas necesarias para describir a la curva y, no teniendo en cuenta dependencia de una u otra, sus proposiciones podía hacerlas tomando como base a cualquiera de ellas.

Una de las ventajas señaladas por Leibniz es la ampliación de las curvas con las cuales podía trabajarse para la obtención de datos pertinentes como los de área y volumen, pues en los métodos anteriores sólo se aplicaban procedimientos a las llamadas "curvas geométricas" y ahora también podían incluirse las "curvas mecánicas" como se denominaba a aquéllas que representaban trayectorias de movimientos o de posición y para las cuales no existían procedimientos de análisis. "De la misma manera que era posible expresar curvas, las cuales Descartes había excluido por ser 'mecánicas', para ecuaciones de posición, y aplicarles el cálculo y entonces liberar la mente de una perpetua referencia a diagramas"[22][Leibniz 1714: 54].

La observación es particularmente interesante porque muestra cómo es que aplicando su método a objetos de naturaleza geométrica, incluyendo los escurridizos inasignables o infinitamente pequeños, Leibniz plantea que una vez que contamos con una caracterización de las curvas en términos de diferenciales, los procedimientos algorítmicos del cálculo proporcionan un método efectivo para el análisis de las curvas.

Sin embargo, como mostraremos más adelante, la forma de concebir los diferenciales y su caracterización como infinitamente pequeños o inasignables, al aplicarse

[22] "In the same way, that it was posible to express curves, which Descartes had excluded as being 'mechanical', by equations of position, and to apply the calculus to them and thus to free the mind from a perpetual reference to diagrams".

a la resolución de algunos problemas, condujo a situaciones que profundizaron el debate sobre su naturaleza y condujeron a transformaciones en el cálculo que le imprimieron un sello distinto al original. Pero por lo pronto volveremos al centro de nuestro interés, la integral de una función.

Debido a la extrapolación de las propiedades de las sucesiones numéricas a los objetos diferenciales creados por Leibniz, de naturaleza geométrica, la obtención de áreas y volúmenes, a las que explícitamente se refería, se hacía por medio de las *sumas* de los diferenciales. Pero al mismo tiempo, la caracterización de diferenciación y de suma como procesos inversos sugería la posibilidad de introducir a la suma como el proceso inverso, por definición, de la diferenciación. Precisamente éste fue el camino escogido por Johann Bernoulli quien escribió: "Hemos visto arriba como los *diferenciales* de las cantidades son encontrados; mostraremos ahora como, inversamente, las integrales de los diferenciales pueden ser encontrados, esto es, aquellas cantidades de las cuales son *diferenciales*."[23][Bos 1974: 21].

El término Integral fue conocido por Leibniz en un escrito de Jacob Bernoulli en 1690, y procuró convencer a Johann Bernoulli de cambiarlo por el término suma que él usaba:

"Dejo a tu reflexión si no sería mejor en el futuro, por el bien de la uniformidad y la armonía, no sólo entre nosotros mismos sino para todo el campo de estudio, adoptar la terminología de suma en lugar de tus integrales. Entonces por ejemplo $\int y\,dx$ significaría la suma de todas las *y* multiplicadas por el correspondiente *dx*, o la suma de tales rectángulos. Solicito esto primordialmente porque de esta manera las sumas geométricas o cuadraturas, se corresponden mejor con las sumas o sumas de sucesiones (…) Debo confesar que encontré completamente este método considerando la reciprocidad de sumas y diferencias, y de ahí que mis consideraciones avanzaron de las sucesiones de números a las sucesiones de líneas u ordenadas".[24][Bos 1974: 21].

---

[23] "We have seen above how the *differentials* of quantities are to be found; we shall now show how, conversely, the *integrals* of differentials can be found, that is those quantities of which they are the differentials".

[24] "I leave it to your deliberation if it World not be better in the future, for the sake of uniformity and harmony, not only between ourselves but in the whole field of study, to adopt the terminology of summation instead of your integrals. Then for instance $\int y\,dx$ would signify the sum of all y multiplied by the

La respuesta de Johann Bernoulli indica su disposición a usar el término suma, a la vez que explica las razones para el uso del término integral. "Además, en lo que toca a la terminología de la suma de diferenciales, gustosamente usaré en el futuro tu terminología de suma en lugar de nuestras integrales. Debía haberlo hecho así ya mucho antes si el término integral no fuera mucho más apropiado para ciertos geómetras, quienes me conocen como el inventor del término. Debía ser pensado por lo tanto que he obscurecido bastante el asunto, si ora indiqué la misma cosa con un término y ora con otro. Confieso que ciertamente la terminología no coincide con la cosa misma (el término mismo me lo sugirió cuando consideré a la parte infinitesimal de un todo o *integral*; No pensé nada más acerca de ello)."[25][Bos 1974: 21]

No parece existir más bibliografía al respecto, pero el término integral fue usándose con mayor frecuencia, desplazando el término original de suma, hasta quedar el de integral como único.

Es pertinente resaltar aquí que la notación de Leibniz procura reflejar su concepción de suma de cantidades diferenciales. En sus primeros trabajos en lugar del signo moderno de integral empleó el término *omn*, abreviatura de omnia, que en latín significa "el todo" o "lo completo". Así, para expresar $\int_0^a xy\,dx = a\int_0^a y\,dx - \int_0^a dx \int_o^x y\,dx$ escribía $omn.\overline{xy} \neg ult.x\,\overline{omn.\,y} - omn.\overline{omn.\,y}$. El símbolo *omn* fue sustituido por el de $\int$, que es una s alargada mediante el cual se representaba a la "summa".

Leibniz resolvió problemas de cuadraturas, volúmenes, determinación de momentos y otros por medio de las sumas de cantidades diferenciales, a las cuales originalmente se refirió sólo como tales: sumas. En su concepción introdujo la posibilidad de considerar sumas de elementos de área de la forma xdy, o de la forma ydx, semejantes a los que se

---

corresponding *dx*, or the sum of all such rectangles. I ask this primarily because in that way the geometric summations, or quadratures, correspond best with the arithmetical sums or sums of sequences (…) I do confess that I found this whole method by considering the reciprocity of sums and differences, and that my considerations proceed from sequences of numbers to sequences of lines or ordinates."

[25] "Further, as regards the terminology of the sum of differentials, I shall gladly use in the future your terminology of summations instead of our integrals. I would have done so already much earlier if the term integral were not so much appreciated by certain geometers who acknowledge me as the inventor of the term. It would therefore be thought that I rather obscured matters, If I indicated the same thing now with one term and now with another. I confess that indeed the terminology does not apply agree with the thing itself (the term suggested itself to me as I considered the differential as the infinitesimal part of a whole or integral; I did not think further about it)."

emplean en las actuales sumas de Darboux-Riemann. Sin embargo, al proceder a obtener la cuadratura de una figura con un lado curvo, esto es, de un polígono infinito-angular, por medio de este procedimiento resulta complicado de realizarse porque, por ejemplo, si seleccionamos dos alturas (correspondientes a dos valores de la ordenada y) la diferencia en los valores de las abscisas (la longitud de la base del rectángulo diferencial) será una cantidad determinada, la cual correspondería a un elemento diferencial de la forma dx, contradiciendo su naturaleza de infinitamente pequeño, de longitud inasignable.

Así pues, los rectángulos diferenciales aparecen en los primeros trabajos del cálculo como elementos de análisis pero no como entes susceptibles de ser operados. Por ejemplo, la regla de la ahora llamada integración por partes fue obtenida por Leibniz por medio de dos procedimientos, uno de carácter geométrico y otro algorítmico. En el caso geométrico, consideró la siguiente figura:

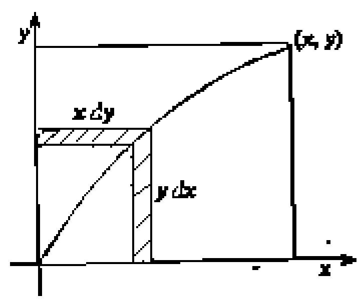


Figura 11

Si partiendo del origen avanzamos sobre el eje de las abscisas una longitud x, a la vez que denotamos por y a la correspondiente longitud de la ordenada, entonces podemos considerar el rectángulo de área xy como la suma de las áreas $\int xdy$ y $\int ydx$, esto es, $xy = \int ydx + \int xdy.$

Este mismo resultado fue presentado también por Leibniz de una forma más sencilla, por medio del principio fundamental del cálculo, asumiendo simplemente que la regla para obtener el elemento diferencial de un producto $d(xy) = ydx + xdy$ es equivalente a $\int d(xy) = xy = \int (ydx + xdy) = \int ydx + \int xdy.$

Por medio de la integración por partes obtuvo algunas sumas para curvas que eran familiares en esa época y a las que modernamente llamamos antiderivadas o primitivas. Por ejemplo, una integral que era fácil de encontrar, $\int x dx = \frac{x^2}{2}$, (pues basta con obtener el área de un triángulo) se puede obtener mediante la integración por partes así: Consideremos la función $y = x$, en cuyo caso $dy = dx$. Apliquemos ahora la regla establecida, obteniendo $\int y\, dx = \int x\, dx = xy - \int x\, dy = x^2 - \int x\, dx$. Consecuentemente $2\int x\, dx = x^2$ o, equivalentemente, $\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2$.

Aplicando ahora la integración por partes al caso de la suma para $y = x^2$, tenemos que

$\int ydx = \int x^2 dx = xy - \int xdy = x^3 - \int x(2x)dx = x^3 - 2\int x^2 dx$ y de aquí que $3\int x^2 dx = x^3$ o, lo que es lo mismo, $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$.

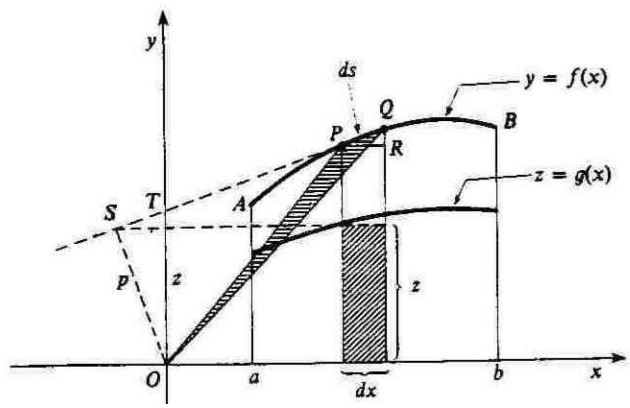
Análogamente, para el caso de $y = x^3$ tenemos que

$\int ydx = \int x^3 dx = xy - \int xdy = x^4 - \int x(3x^2)dx = x^4 - 3\int x^3 dx$ y, procediendo de forma similar al caso anterior, concluimos que $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4$.

Mediante este procedimiento es igualmente sencillo determinar el caso general de la función $y = x^n$, para valores naturales de *n*. En este caso tenemos, como es conocido, $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$.

Pero este razonamiento no puede ser extendido a curvas con otras características, por ejemplo al caso en el que n no sea un número natural. La forma de resolver este problema llevó a Leibniz al reconocimiento de un principio surgido en el siglo XVII, el cual incorporó en su propuesta de cálculo infinitesimal de forma muy provechosa e ingeniosa, resultando fundamental en su construcción. Nos referimos al llamado principio de “transmutación”, que podemos enunciar de la siguiente manera: Sean *A* y *B* dos regiones planas o volumétricas, cada una de ellas subdividida con “indivisibles”, por lo general rectángulos o prismas infinitamente pequeños. Si puede establecerse una correspondencia uno a uno entre los indivisibles de *A* y los de *B*, decimos que *B* es derivado de *A* por "transmutación", con la conclusión de que A y B tienen las mismas áreas o volúmenes, según el caso.

La forma en la cual Leibniz aplicó este principio, con el interés puesto en la manipulación de triángulos "indivisibles", lo llevó a emplear por primera ocasión cambios de variables e integración por partes. Partiendo de la siguiente figura, el procedimiento puede explicarse así:



Tomemos dos puntos vecinos $P(x,y)$ y $Q(x+dx, y+dy)$ sobre la curva que representamos analíticamente mediante $y = f(x)$, $x \in [a,b]$. Consideremos ahora el triángulo infinitesimal ΔOPQ, en el cual O es el origen. El procedimiento de Leibniz consiste entonces en calcular la suma $\int_a^b ydx$ subdividiendo el sector OAB formado por la curva $y = f(x)$ y los radios OA y OB en triángulos "indivisibles". La suma de estos triángulos "indivisibles" le da pues el área del sector OAB. Leibniz considera ahora el área de los triángulos ΔOAa y ΔOBb, estableciendo que

$$\int_a^b ydx = área(OAB) + área(\Delta OBb) - área(\Delta OAa) .$$

Concordantemente con su concepción de que estas figuras son polígonos infinito angulares, considera como línea tangente al arco infinitesimal ds que une a P y Q, que prolongado intersecta al eje y en un punto $T(0,z)$ y asimismo denota por OS al segmento perpendicular de longitud p que va de O a la recta tangente.

De la figura es fácil ver que $z = y - x\dfrac{dy}{dx}$, y es precisamente con esta variable z con la cual Leibniz trabaja, empleando por primera vez una sustitución o cambio de variable, dando lugar al principio de “transmutación”. De la semejanza entre los triángulos ΔOST y el triángulo característico ΔPRQ, tenemos que $\frac{dx}{p}=\frac{ds}{z}$, o, lo que es lo mismo, $zdx = pds.$ Ahora bien, si consideramos el triángulo infinitesimal $\Delta OPQ,$ tenemos que su área es

$$área(\Delta OPQ) = \frac{1}{2}p\,ds = \frac{1}{2}z\,dx\,.$$

Si consideramos ahora el sector OAB tenemos que

$$área(OAB) = \frac{1}{2}\int_a^b zdx$$

Regresando al cálculo de la suma de nuestro interés, tenemos entonces que $\int_a^b ydx = área(OAB) + área(\Delta OBb) - área(\Delta OAa) = \frac{1}{2}\int_a^b z\,dx + \frac{1}{2}b\,f(b) - \frac{1}{2}a\,f(a)$, lo que, a su vez, puede escribirse como $\int_a^b ydx = \frac{1}{2}\left(\left[xy\right]_a^b + área(OAB)\right)$. De esta manera Leibniz formuló el “Teorema de transmutación” al referirse a la expresión siguiente:

$$\int_a^b y\,dx = \frac{1}{2}\left(\left[xy\right]_a^b + \int_a^b z\,dx\right).$$

La importancia de este resultado es múltiple. Por una parte, con él se establece una relación inversa entre los problemas de cuadratura y los de las rectas tangentes, al definir a z en términos de la recta tangente. Por otra parte, se construye una nueva curva, precisamente la de la relación $z = y - x\frac{dy}{dx}$, la cual se introduce como una “cuadratiz” para la curva original y el cálculo de $\int_a^b y\,dx$ se simplifica mediante el cálculo de la suma más sencilla $\int_a^b z\,dx$. También puede observarse que al introducir $z = y - x\frac{dy}{dx}$ en la expresión para la transmutación se obtiene la expresión para la integración por partes:

$$\int_a^b y\,dx = \left[xy\right]_a^b - \int_{f(a)}^{f(b)} x\,dy$$

Otro comentario pertinente aquí, es el relativo a la forma de visualizar el problema. Aunque conceptualmente las áreas de las figuras pueden obtenerse por medio de la descomposición de las mismas en rectángulos infinitesimales, en términos prácticos no es posible, con la construcción de diferenciales hecha por Leibniz, hacer el cálculo de áreas pues ello implicaría asignar una longitud determinada a la base de los rectángulos, lo cual sería contradictorio con la afirmación de que los diferenciales tienen longitud “inasignable” y los polígonos son infinito-angulares.

El procedimiento empleado evita ese problema pues al tomar triángulos infinitesimales no es necesario considerar una base diferencial (se parte de un vértice y no de un segmento) y, por otro lado, es congruente con el método usual para el cálculo de áreas de polígonos, descomponiéndolo en triángulos y sumando sus áreas, en este caso una infinidad de triángulos.

Veamos ahora cómo es posible utilizar este principio de “transmutación” para el cálculo de sumas o integrales para expresiones de la forma $y^q = x^p$, con $q > p > 0$, problema que, geométricamente corresponde a la cuadratura de la “hipérbola superior” y analíticamente al cálculo de la integral de $y = x^{\frac{p}{q}}$, $q > p > 0$, ampliando la cantidad de expresiones de la forma $\int x^n\,dx$ que es posible determinar mediante un procedimiento analítico.

De la expresión $y = x^{\frac{p}{q}}$ obtenemos

$$dy = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}dx = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}}x^{-1}dx = \frac{p}{q}\frac{x^{\frac{p}{q}}}{x}dx = \frac{p}{q}\frac{y}{x}dx$$

y de aquí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\frac{y}{x}$$

Hacemos ahora el cambio de variable considerando z para obtener

$$z = y - x\frac{dy}{dx} = y - x\frac{p}{q}\frac{y}{x} = y - \frac{p}{q}y = (1-\frac{p}{q})y = \left(\frac{q-p}{q}\right)y$$

Aplicamos ahora la expresión para la transmutación

$$\int_a^b ydx = \frac{1}{2}\left(\left[xy\right]_a^b + \int_a^b zdx\right) = \frac{1}{2}\left(\left[xy\right]_a^b + \int_a^b \frac{q-p}{q}ydx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[xy\right]_a^b + \frac{q-p}{2q}\int_a^b ydx$$

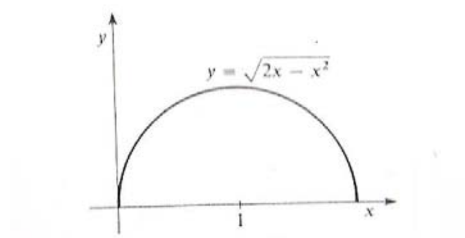
De aquí que

$$\int_a^b y\,dx - \frac{q-p}{2}\int_a^b y\,dx = \left(\frac{p+q}{2q}\right)\int_a^b y\,dx = \frac{1}{2}\left[xy\right]_a^b = \frac{1}{2}\left[x^{(p+q)/q}\right]_a^b$$

y, finalmente llegamos a

$$\int x^{\frac{p}{q}}\,dx = \frac{q}{p+q}\left[x^{(p+q)/q}\right]_a^b$$

La aplicación del Teorema de transmutación le permitió obtener algunos otros resultados trascendentes, de los cuales mostramos el caso de la llamada “cuadratura aritmética del círculo”. Consideremos la siguiente figura:



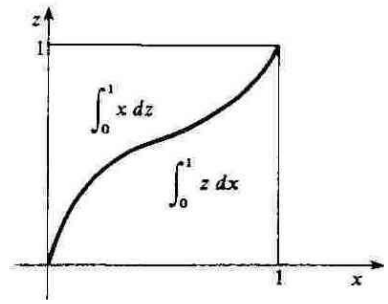
En esta figura estamos considerando la mitad superior de un círculo unitario tangente al eje y en el origen y cuya expresión analítica es $y=\sqrt{2x-x^2}$. Aplicando las fórmulas de Leibniz para los diferenciales tenemos que $dy=\frac{(1-x)dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{y}dx,$ o, lo que es lo mismo, $\frac{dy}{dx}=\frac{1-x}{y}$. Consideramos ahora el cambio de variable de Leibniz para obtener la cuadratiz

$$z=y-x\frac{dy}{dx}=y-x\frac{1-x}{y}=\frac{y^2-x+x^2}{y}=\frac{2x-x^2-x+x^2}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{x(2-x)}}=\sqrt{\frac{x}{2-x}}.$$

De esta manera $z^2=\frac{x}{2-x}=-1+\frac{2}{2-x}$ y, despejando, obtenemos $x=\frac{2z^2}{1+z^2}$.

Aplicamos ahora el teorema de transmutación.

$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 y\,dx=\frac{1}{2}\left(\left[x\sqrt{2x-x^2}\right]_0^1+\int_0^1 z dx\right)=\frac{1}{2}\left(1+\int_0^1 z dx\right)$ y, apoyándose en la siguiente figura para escribir $\int_0^1 z\,dx=1-\int_0^1 x\,dz,$ se llega a



$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\left(1+\left[1-\int_0^1 x\,dz\right]\right)=1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2z^2}{1+z^2}dz=1-\int_0^1\frac{z^2}{1+z^2}dz$$

Expandiendo por medio de una serie geométrica e integrando término a término, Leibniz obtiene

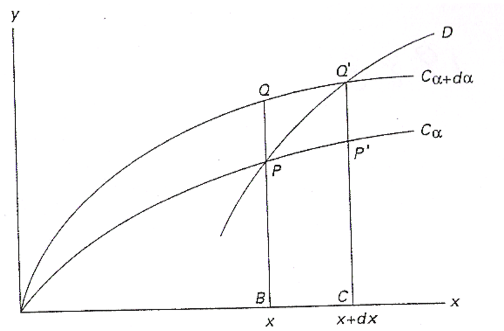
$$\frac{\pi}{4}=1-\int_0^1 z^2(1-z^2+z^4-z^6\ldots)dz=1-\left[\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5+\frac{1}{7}z^7-\frac{1}{9}z^9\ldots\right]_0^1$$

Finalmente, sin tomar en cuenta los radios de convergencia, en este caso cuando $z=1,$ obtuvo la cuadratura aritmética buscada:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\ldots$$

En gran medida la atención de Leibniz se centró en la modelación de curvas y fenómenos físicos por medio de las ecuaciones diferenciales, lo que le permitía caracterizar muchas situaciones. En las líneas siguientes incluimos el tratamiento a funciones de dos variables, en el cual aparecen lo que podríamos denominar como diferenciales parciales, mismas que se refieren al tratamiento de familias de curvas y no a superficies, como pudiéramos pensar que es más natural.

La situación que Leibniz consideró, a principios de los 1690's fue la de una familia de curvas, dos de las cuales, C_α y $C_{\alpha+d\alpha}$ están infinitamente cercanas y son intersectadas por una curva D ortogonal a cada curva de la familia. La situación se ilustra en la siguiente gráfica.

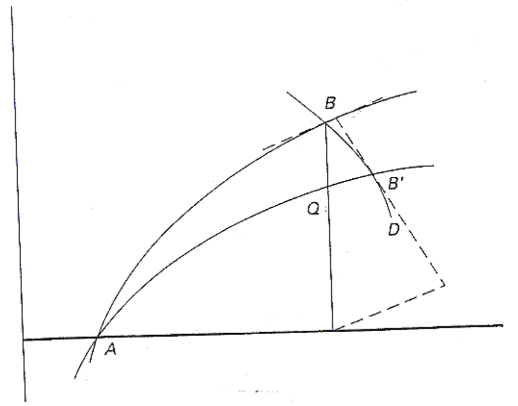


Tomando los puntos *P*, *P'* en C_α y *Q*, *Q'* en $C_{\alpha+d\alpha}$, podemos establecer un diferencial de *y* entre dos puntos de una misma curva, por ejemplo $y(P') - y(P)$, el cual es un diferencial de *y* con α constante y *x* variable, que denominaremos $d_x y$. Por otra parte podemos considerar un diferencial de y entre dos puntos correspondientes de las curvas vecinas, por ejemplo $y(Q) - y(P)$, en el cual α es variable y *x* es constante, formando un diferencial que denominaremos con $d_\alpha y$. Finalmente podemos considerar un diferencial a lo largo de la curva *D*, $y(Q') - y(P)$, el cual denotaremos de la forma usual, simplemente como *dy*.

Para Leibniz era sencillo operar con los diferenciales $d_x y$ y $d_\alpha y$, pues considerando *x* o α constante, según el caso, eran válidas las relaciones establecidas previamente para los diferenciales. Sin embargo, muchas de las curvas que analizó tenían la característica de que no se podían expresar algebraicamente y se representaban por medio de integrales. Por ejemplo, la familia de cicloides braquistócronas está dada por la expresión $C_\alpha = y(x,\alpha) = \int \sqrt{\frac{x}{\alpha - x}}dx$. El problema es obtener el diferencial $d_\alpha y$ en el cual α es variable. Leibniz resolvió el problema en julio de 1697, la cual escribió en una carta enviada a Johan Bernoulli, para el caso de la curva *D*, la cual corta arcos iguales de la familia de curvas logarítmicas $y(x,\alpha) = a \log x$.

Previamente había determinado que la longitud del arco diferencial *ds* para las curvas logarítmicas está dada por $ds = \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}{x}$ y la curva *D* buscada se determina mediante la condición $s(x,\alpha) = \int_1^x \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}{x} = K$, donde *K* es constante.

Posteriormente consideró la siguiente figura:



De aquí determinó la tangente, calculando la razón de *QB* a *QB'* en el triángulo diferencial señalado. El primer valor es $QB = d_\alpha \alpha \log x = \log x_0 d_\alpha$, donde x_0 es la abscisa del punto *B*. El arco *QB'* es la diferencia de arcos *AB'*-*AQ* y, como $AB = AB'$, tenemos $QB' = AB - AQ$.

Consecuentemente $QB' = d_\alpha s = d_\alpha \int_1^{x_0} \frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}}{x} dx.$

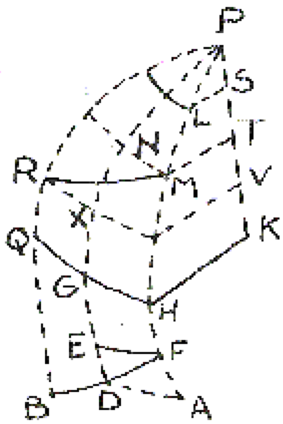
Utilizó entonces lo que él llamaba el teorema de ínter-cambiabilidad, obteniendo $QB' = d_\alpha \int_1^{x_0} \frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}}{x} = \int_1^{x_0} d_\alpha \frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}}{x} = \int_1^{x_0} \frac{\alpha}{x\sqrt{x^2+\alpha^2}} d\alpha\, dx.$

Pero esta expresión corresponde a una integral doble y Leibniz también avanzó en considerar este tipo de integrales, como detallaremos un poco más en los párrafos siguientes. Por lo pronto, dado que los límites de integración sólo involucran a la variable *x* (recordemos que Leibniz no empleó los símbolos de límites de integración), determinó que $QB' = \alpha\, d\alpha \int_1^{x_0} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+\alpha^2}}$.

El problema original que condujo a Leibniz a trabajar las integrales dobles le fue planteado como un reto por Vincenzo Viviani el 4 de abril de 1692, quien le propuso a Leibniz determinar cuatro “ventanas” iguales sobre una superficie hemisférica, de tal forma que la superficie restante fuera igual en área a una región construible con regla y compás. Leibniz resolvió el problema el mismo día que lo recibió y para ello empleó por primera vez integrales dobles.

Para tener una idea más clara, a continuación reproducimos los primeros párrafos del documento "Construcción de un arco hemisférico cuadrable", el cual tomamos de una traducción del latín al francés [Leibniz 1691: 19-20].

"...(1) Si una superficie esférica es descompuesta en elementos, tomados algunos meridianos y otros paralelos, las pequeñas superficies elementales comprendidas entre dos meridianos y dos paralelos estarán en razón compuesta de elementos de ecuador entre los meridianos y de los elementos del eje entre los paralelos; y serán iguales al producto de estos elementos tomados respectiva y mutuamente en si mismos; así, la pequeña superficie



LN será a la pequeña superficie *NR*, en razón compuesta de *HG* a *GQ* y de *ST* a *TV,* lo que aparece así según mi *Análisis diferencial de los infinitos*, si *PK* o *KH* es el radio r y si el arco *PL* es a, y si su seno hacia *PS* es x, y si el seno recto *LS* es y, y si *QH* es v, *LM* será hecho da; y *ST*, dx; y *GH, dv* y *NM*, $y\frac{dv}{r}$; y $da = \frac{rdx}{y}$. Entonces la pequeña área *LN* es *NM* multiplicada por *LM*, lo cual es $dv \cdot dx$. No explico eso más prolijamente, porque mis principios tanto de los *incomparables de la Geometría como del análisis de los infinitos*, ya han sido publicados en las actas de sabios".[26]

Una vez definidas las formas en las cuales se divide la semiesfera y considerado los elementos diferenciales señalados, en el siguiente párrafo se resuelve una parte del problema, por medio de una integral doble con elementos diferenciales dx y dv, la cual resuelve para el caso en que dv es constante.

[26] "...(1.) Si une surface sphérique est décomposée en Eléments, des méridiens et des parallèles étant menés, les petites surfaces Elémentaires comprises entre deux méridiens et deux parallèles seront en raison composée des éléments d'équater entre les méridiens et des éléments de l'axe entre les parallèles; et elles seront égales au produit de ces éléments menés respectivement mutuellement en soi; ainsi le petit surface LN sera à la petite surface NR, en raison composée de HG à GQ et de ST à TV. Ce qui apparaît ainsi selon mon Analyse différentielle des infinis, si PK ou KH est le rayon r et si l'arc PL est a, et si son sinus verse PS est x, et si le sinus droit LS est y, et si QH est v, LM sera fait da; et ST, dx; et GH, dv et NM, ydv : r; et da = rdx : y. Alors la petite aire LN est NM multiplié par LM, donc est $dv \cdot dx$. Je n'explique pas cela plus prolixement, parce que mes principes tant des incomparables de la Géométrie que de l'Analyse des infinis ont dejà paru dans les Acts des Savants.

"(2) Considerando las mismas cosas, las tres líneas elementales contenidas entre dos meridianos y un elemento de paralelo, es igual al rectángulo bajo el seno hacia los grados del meridiano y el elemento de ecuador interceptado entre los meridianos. En efecto, en la misma figura 49 *PMNP* es igual a *PT* multiplicado por *GH*, o a la superficie cilíndrica elemental *GHAD*. Dado que *LMN* es igual a $dv \cdot dx$, por lo que ha precedido, entonces el elemento esférico trilineal, *PMNP* es la suma de todas las pequeñas áreas de ese modo entre P y M (*dv* siendo siempre el mismo) o $\int dx \cdot dv$, será $x \cdot dv$."[27][Leibniz 1691: 20].

Como podemos ver, aunque Leibniz avanzó notablemente en la creación de reglas algebraicas para la obtención de sumas o integrales e incluyó las integrales dobles como en el ejemplo mostrado, sus problemas, sus métodos y procedimientos casi siempre tenían referentes geométricos. Aún en el caso de los problemas físicos que resolvía, su estrategia consistía en analizar la situación geométrica por medio de la cual se representaba. Por eso es que sostuvo que era indistinto si sus procedimientos se aplicaban a curvas geométricas o curvas mecánicas, su método se aplicaba a las curvas independientemente de su origen o situación de la que surgió.

Pero en el caso de sus primeros seguidores, aún ligados a su concepción geométrica y asumiendo la naturaleza geométrica originaria de los diferenciales como segmentos de longitud inasignable (generalizada a figuras de área inasignable, cuerpos de volumen inasignable, etc.), los procedimientos analíticos jugaron un papel preponderante. En el caso de la integral, la aplicación del principio fundamental del cálculo promovió que se privilegiara su caracterización como operación inversa a la de diferenciación más que la de suma.

La discusión sobre el nombre del mismo objeto matemático que se dio entre Leibniz y Johann Bernoulli no se circunscribía sólo al nombre, implicaba también asumir preponderantemente un significado, generado por prácticas matemáticas distintas que promovían a su vez prácticas matemáticas distintas.

[27] "(2.) Les mêmes coses étant posées, les tríos-lignes élémentaires compris entre deux méridiens et un élément de parallèle, est égal au rectangle sous le sinus verse des degrés du méridien et l'élément d'équateur intercepté entre les méridiens. En effet dans la même figure 49 PMNP est égal à pt multiplié par GH, ou à la surface cylindrique élémentaire GHAD. Car parce que LMN est égal à $dv \cdot dx$, par ce qui a precede, donc le trois-lignes élémentaire sphérique PMNP qui est la somme de toutes les petites aires de ce mode entre P et M (dv restant toujours le même) ou $\int dx \cdot dv$, sera $x \cdot dv$.

Así, mientras en Leibniz siempre encontramos referentes geométricos, en Bernoulli encontramos preponderantemente un desarrollo analítico. Así, en algunos de sus escritos sobre integral puede observarse nuestra afirmación. Los pasajes siguientes son traducciones al inglés de Struik, con base en los originales que han sido publicados en la obra Bernoulli's Opera Omnia.

"… Si, por lo tanto, investigamos la integral de una diferencial primeramente debemos averiguar si la cantidad dada es este producto de una diferencial y un múltiplo de su cantidad absoluta elevada a una cierta potencia. Esto es un signo de que podemos encontrar la integral según la regla antedicha. Si, por ejemplo, tiene que encontrarse la integral de $dy\sqrt{(a+y)}$, entonces observo primero que *dy* es multiplicado por un múltiplo de su cantidad absoluta $(a+y)$ elevada a la potencia $\frac{1}{2}$; entonces, según la regla antedicha, encuentro que $\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(a+y)^{\frac{1}{2}+1}$, esto es, $\frac{2}{3}(a+y)\sqrt{(a+y)}$."[28] [Bernoulli 169: 325].

Después de mostrar otros ejemplos, Bernoulli [1691: 325] llega a un resultado que después corrigió y que en realidad ya había sido previamente presentado correctamente por Leibniz en 1684. Nos referimos a que Bernoulli escribió "… la integral de $dx : x$ es igual a $\frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0}\times 1 = \infty$."[29]

Con Bernoulli [1691: 325] encontramos también los orígenes de algunos de los actuales métodos de antiderivación, como es el caso de la sustitución de variables:

[28] "… If, therefore, we inquire into the integral of a differential we must primarily find out whether the given quantity is this product of a differential and a multiple of its absolute quantity raised to a certain power. This is a sign that we can find the integral by the above-mentioned rule. If, for example, the integral of $dy\sqrt{(a+y)}$ has to be found, then I observe first that *dy* is multiplied by a multiple of its absolute quantity $(a+y)$ raised to the power $\frac{1}{2}$; then, by the above-mentioned rule I inquire into its integral and find $\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(a+y)^{\frac{1}{2}+1}$, that is, $\frac{2}{3}(a+y)\sqrt{(a+y)}$".

[29] "… the integral of $dx : x$ equal to $\frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0}\times 1 = \infty$."

“Si en lugar de $dx\sqrt{(a^2x^2+x^4)}$ escribimos la expresión $x\,dx\sqrt{(a^2+x^2)}$, entonces la integral encontrada es $\left(\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}x^2\right)\sqrt{(a^2+x^2)}$. Y si, en lugar de $dx\sqrt{(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3)}$, escribimos $(a\,dx+x\,dx)\sqrt{(a+x)}$, entonces la integral encontrada es $\frac{2}{5}(a^2+2ax+x^2)\sqrt{(a+x)}$”.[30]

Para concluir la presentación del trabajo de Leibniz nos referiremos a algunos de los problemas relacionados a los fundamentos sobre los cuales reposa su construcción. El más trascendente es la caracterización de origen de los diferenciales como segmentos de longitud inasignable, lo cual es sumamente difícil de concebir y aceptar. Si agregamos la enunciación de existencia de diferenciales de orden superior las cosas se complican aún más. Las explicaciones y argumentos de Leibniz contribuyeron a hacer aún más confuso el panorama, pues en unas ocasiones argumentaba en un sentido y en otras lo hacía de manera diferente.

Por ejemplo, a uno de sus seguidores o continuadores, el matemático francés Varignon, le expuso en una carta que los diferenciales podían concebirse como cantidades finitas: “Es por eso que con el fin de evitar estas sutilezas, he sostenido, para devolverle el raciocinio sensible a todo el mundo, que basta explicar aquí el infinito por el incomparable, es decir, concebir las cantidades incomparablemente más grandes o más pequeñas que las nuestras, lo que conduce, si se quiere, a grados de incomparables, ya que lo que es incomparablemente más pequeño, inútilmente se toma en cuenta con respecto a lo que es incomparablemente más grande que él. Así es como una parcela de materia magnética, que pasa a través de un vaso, no es comparable con un grano de arena, este grano no lo es con el globo de la Tierra, ni este globo con el Firmamento. Y es para el efecto que di una vez los Lemas de los incomparables en las Actas de Leipzig, que se pueden entender como

[30] “If we write instead of $dx\sqrt{(a^2x^2+x^4)}$ the expression $x\,dx\sqrt{(a^2+x^2)}$, then the integral is found to be $\left(\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}x^2\right)\sqrt{(a^2+x^2)}$. And if instead of $dx\sqrt{(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3)}$ we write $(a\,dx+x\,dx)\sqrt{(a+x)}$, then the integral is found to be $\frac{2}{5}(a^2+2ax+x^2)\sqrt{(a+x)}$”.

queramos, ya sea como infinitos, o ya sea sólo como grandes cantidades, las cuales no cuentan unas con respecto a las otras. Pero hay que considerar al mismo tiempo, que estas mismas incomparables ordinarias, no están fijas o determinadas de ninguna manera, y pueden ser tomadas tan pequeñas como queramos en nuestros razonamientos Geométricos, que en efecto son igualmente rigurosas que las cantidades infinitamente pequeñas, ya que un adversario que quiera contradecir nuestra enunciación, resulta por nuestro cálculo, que el error será menor que cualquier error que pueda asignar; estando en nuestro poder tomar este incomparablemente pequeño, suficientemente pequeño para esto, ya que siempre se puede tomar una cantidad tan pequeña como se quiera”.[31][Leibniz 1701: 50].

En otras ocasiones, las argumentaciones de Leibniz estaban en clara correspondencia con su posición filosófica general sobre la constitución del mundo, cuyo centro era lo que denominó como *mónada*. Ésta es una palabra que proviene del griego y significa unidad, por lo cual Leibniz la empleó para referirse a los componentes de la realidad. Basado en uno de sus principios filosóficos, el de la composibilidad, Leibniz pudo establecer los diferenciales. La composibilidad se refiere a que acepta como posible lo que no es contradictorio. Por ejemplo un círculo triangular no es composible porque involucra a dos ideas contradictorias, la de círculo y la de triángulo. Pero la existencia de una sirena es composible, aunque no sea real.

En lo que respecta al universo, Leibniz consideraba que éste era infinitamente divisible y por lo tanto no concordaba con la idea de la existencia de átomos, esto es, de partículas constituyentes de la materia que no admitieran división, ya sea por pequeñas o

[31] “C’est pourquoi afin d’éviter ces subtilités, j’ai crû que pour rendre le raisonnement sensible à tout le monde, il suffi soit d’expliquer ici l’infini par l’incomparable, c’est-à-dire, de concevoir des quantités incomparablement plus grandes ou plus petites que les nôtres, ce qui fournit autant qu’on veut de degrés d’incomparables, puisque ce qui est incomparablement plus petit, entre inutilement en ligne de compte à l’égard de celui qui est incomparablement plus grand que lui. C’est ainsi qu’une parcelle de matière magnétique, qui passe à travers du verre, n’est pas comparable avec un grain de sable, ni ce grain avec le globe de la Terre, ni ce globe avec le Firmament. Et c’est pour cet effet que j’ai donné un jour des Lemmes des incomparables dans les Actes de Leipsic, qu’on peut entendre comme on veut, soit des infinis à la rigueur, soit de grandeurs seulement qui n’entrent point en ligne de compte les unes au prix des autres. Mais il faut considérer en même temps, que ces incomparables communs mêmes, n’étant nullement fixes, ou déterminés, et pouvant être pris aussi petits qu’on veut dans nos raisonnements Géométriques, font l’effet des infiniment petits rigoureux, puisqu’un adversaire voulant contredire à notre énonciation, il s’ensuit par notre calcul, que l’erreur sera moindre qu’aucune erreur qu’il pourra assigner ; étant en notre pouvoir de prendre cet incomparablement petit, assez petit pour cela, puisqu’on peut toujours prendre une grandeur aussi petite qu’on veut”. Extrait d’une lettre de Mr, Leibniz a Mr. Varignon.

por su grado de dureza, pero podía pensar en especies de "átomos espirituales", las mónadas, con las cuales explicar el universo.

La noción de mónada fue utilizada por Leibniz no sólo para la explicación del universo material sino en general para hablar de cualquier fenómenos, ya sea ideal o material. Entre las características de las mónadas estaba su consideración de que no existían dos cosas completamente iguales (ni mónadas).

No es nuestra intención profundizar aquí en la noción de mónada de Leibniz, sólo queremos señalar que, en el caso de los diferenciales, para Leibniz los diferenciales eran las mónadas de los objetos geométricos en juego y ello era lo que permitía concebir los diferenciales como segmentos de longitud "inasignable" y concebirlos con longitudes diversas, toda vez que no existen dos cosas idénticas. Asimismo, los diferenciales pueden concebirse como entes "espirituales", toda vez que en realidad Leibniz concebía a las rectas como infinitamente divisibles.

Las ideas de Leibniz sobre las mónadas serán retomadas en algún sentido por Euler al explicar la naturaleza de las cantidades diferenciales en el caso de las variables generalizadas.

En otro orden de ideas, en la respuesta que proporciona al matemático holandés Bernhard Nieuwentijt, quien fundamentalmente criticó tres aspectos del cálculo de Leibniz, sus argumentos son diferentes. Los aspectos criticados por Nieuwentijt fueron: 1) Leibniz no podía explicar más que Barrow y Newton sobre cómo las diferencias infinitamente pequeñas difieren del cero absoluto; 2) no era claro cómo los diferenciales de orden superior eran obtenidos a partir de los diferenciales de primer orden, y 3) el método diferencial no podía aplicarse a las funciones exponenciales. Leibniz respondió a los primeros dos puntos de Nieuwentijt, omitiendo aludir al tercero de ellos.

La base de su respuesta es la aplicación de lo que denominó como la *ley de continuidad* que expresaba mediante un enunciado no muy claro: "En cualquier transición supuesta, acabando en cualquier término, es permitido instituir un razonamiento de general, en el cual el término final también puede ser incluido".[32] [Leibniz 1684: 147].

[32] "In any supposed transition, ending in any terminus, it is permissible to institute a general reasoning, in which the final terminus may also be included."

Tratando de entender, veamos el primero de los varios ejemplos de Leibniz [1684: 147] sobre la forma de aplicar la ley de continuidad. "Por ejemplo, si A y B son dos cantidades cualesquiera, de las cuales la primera es la mayor y la última la menor, y mientras B permanece constante, se supone que A es continuamente disminuida, hasta que A se hace igual a B; entonces será permitido incluir bajo un razonamiento general los casos previos en los cuales A era mayor que B, y también el caso último en el cual la diferencia desaparece y A es igual a B".[33]

Incluye también un ejemplo físico sobre el movimiento y algunos de naturaleza geométrica, como su planteamiento de que debería extenderse la noción de intersección de dos líneas rectas que permitiera hablar del punto de intersección "imaginario" de dos paralelas y asumiendo que el ángulo entre las dos rectas es infinitamente pequeño. Similarmente, las parábolas pueden considerarse como elipses, con la introducción de dos focos infinitamente distantes.

También aduce que los términos y símbolos se comportan de la misma manera y, en tanto tengan sentido, se les puede analizar desde esta perspectiva y el caso de los diferenciales es un ejemplo de ello, aunque se aplique al caso límite "ficticio".

Otros problemas suscitados en el desarrollo del cálculo infinitesimal se relacionan con la llamada indeterminancia de los diferenciales. Nos referimos a que en la construcción de las reglas de operación con diferenciales se estableció la necesidad de mantener la homogeneidad dimensional. Así, dx es una cantidad infinitamente pequeña con respecto a x, pero tiene la misma dimensión que x. Esto permite, por ejemplo, que al sumar $x+dx$ obtengamos una cantidad del mismo orden de dimensión. Pero lo mismo sucede si tomamos $x+2dx$ o $x+\frac{1}{2}dx$. Esto es, para fines de operación, con las reglas establecidas, era lo mismo tomar como diferencial a dx que a un múltiplo de la misma. La falta de claridad de esta situación condujo a algunas situaciones confusas o incoherentes. Así, en algunos problemas, matemáticos connotados daban soluciones diferentes en dependencia de

[33] "For example, if A and B are any two quantities, of which the former is the greater and the latter is the less, and while B remains the same, it is supposed that A is continually diminished, until A becomes equal to B; then it will be permissible to include under a general reasoning the prior cases in which A was greater than B, and also the ultimate case in which the difference vanishes and A is equal to B."

si tomaban constantes a cualquiera de los elementos del triángulo fundamental de Leibniz, esto es, en dependencia de si consideraban que $d^2x = 0$, o $d^2y = 0$, o $d^2s = 0$.

Para mayores señas, pueden verse la forma en que obtuvieron los radios de curvatura Johann y Jacob Bernoulli y el propio Leibniz, encontrándonos que cada respuesta es diferente.

3.2 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS EN LEIBNIZ

Situaciones:

Asociados a los problemas de la integral identificamos tres situaciones problémicas fundamentales en los trabajos de Leibniz:

- La primera de las situaciones problémicas que Leibniz enfrentó, con relación al cálculo fue la determinación de las sumas infinitas de cantidades “infinitamente pequeñas” o que “devienen a cero”, en las que, por medio de la aplicación de la ley de continuidad, resolvió mediante procedimientos análogos a los que empleó en el caso de las sumas finitas.

  Es de notarse que estas situaciones problémicas formaban parte de las situaciones que se discutían en su época y algunos de los problemas le fueron propuestos por otros matemáticos, como es el caso de Huygens.

  Las sumas de las series infinitas tenían antecedentes desde al menos dos mil años, destacándose los planteados por las paradojas de Zenón, como es el caso de la posibilidad de recorrer una determinada distancia, siendo que antes de recorrerla es necesario recorrer la mitad de la misma. Con este tipo de paradojas Zenón no planteaba sólo el problema de la suma de una serie infinita sino, primordialmente, ponía en entredicho el movimiento.
- La principal situación que abordó es la creación de un método general para resolver los problemas de cuadratura de figuras con lados curvilíneos. El problema de la determinación de las áreas de las figuras es muy antiguo y con los métodos geométricos de la regla y el compás los griegos resolvieron el caso de las figuras con lados rectos.

  Para el caso de las figuras con lados curvos el problema persistió y los casos que se resolvieron requirieron del uso de otros procedimientos. Destacan entre ellos el del área del círculo, cuya imposibilidad de resolverse usando sólo regla y compás se demostró hasta el siglo XIX a partir de la llamada Teoría de Galois. Otro caso es el de la cuadratura de un sector parabólico, resuelto por Arquímedes con el método de exhaución, antecedente más importante de la moderna integral.

El problema general de obtención de las cuadraturas persistió durante siglos, pero la aplicación de diversos métodos (como los indivisibles de Kepler y Cavalieri) no permitía la resolución general del problema. Con la publicación de *La Géométrie* de René Descartes y los trabajos de Fermat, con la creación de la geometría analítica, los intentos por resolver el problema de la cuadratura se multiplicaron.

La incursión en el problema por parte de Leibniz obedece pues, no sólo a sus inquietudes personales, sino fundamentalmente, a una situación de interés general para la sociedad científica de su época.

- Otro problema, cuyos antecedentes se remontan a la época de los griegos y que se esperaba resolver con el empleo de los métodos de la geometría analítica, era el de la determinación de las rectas tangentes a una curva arbitraria.

  En la búsqueda de solución al problema de la cuadratura, Leibniz resolvió ambas situaciones mostrando cómo es que estos dos problemas, aparentemente sin conexión, podían tratarse conjuntamente, visualizándose como problemas inversos.

- Una vez que los problemas de las rectas tangentes y las cuadraturas se resolvieron por medio de su cálculo, Leibniz se planteó el problema de ampliar sus resultados con el propósito de analizar los fenómenos físicos e incluir en sus procedimientos el tratamiento de las curvas mecánicas.

  Desde la época de los griegos, a las curvas que se generaban por medio del movimiento, como el caso de la cicloide que describe el movimiento de un punto de una circunferencia que se desplaza sobre una línea recta, se les denominaba curvas mecánicas. Dado que la geometría de los griegos se centraba en figuras estáticas, las curvas mecánicas eran tratadas de manera especial.

  Con los trabajos de Descartes las curvas a las que se podía asociar su ecuación algebraica se les denominó curvas algebraicas y al resto curvas mecánicas. Con los trabajos de Leibniz las curvas mecánicas pudieron analizarse a través de establecer las ecuaciones diferenciales que modelan su construcción y tratarse al mismo nivel que el resto. De hecho, a partir de entonces las curvas se dividieron en algebraicas y trascendentes.

Lenguaje:

- Con los primeros trabajos de Leibniz se fue generando un lenguaje que se aumentó y refinó en el cálculo diferencial y sumatorial. Precisamente en esos primeros trabajos las diferencias y las sumas juegan un papel central y al extrapolar su rango de validez del caso numérico al geométrico surgió el término “diferencial”.

  Pasando del tratamiento numérico de los infinitamente pequeños en las series infinitas, cuyos términos “devienen a cero”, en el caso geométrico tenemos los segmentos de “longitud inasignable”, las figuras de “área inasignable” y los cuerpos geométricos de “volumen inasignable”. Por las características atribuidas a los segmentos diferenciales como la unión de dos puntos consecutivos, y la concepción de Leibniz del universo, constituido de elementos simples –las mónadas- el lenguaje usado fue el de “elementos diferenciales” o simplemente “elementos”.

  Análogamente, en las sumas de las series cuyos términos no devienen a cero y por lo tanto divergentes, tenemos el origen de los infinitamente grandes y de la extensión de las sumas cuyos resultados son infinitamente grandes, como el de las ordenadas de las curvas, en el caso geométrico.

- Dado que los objetos del cálculo eran de carácter geométrico y en el caso de Leibniz la mayoría de las situaciones que abordó son problemas geométricos, frecuentemente encontramos términos como los de cuadratura, cuadratiz, tangente, normal, subtangente, subnormal. Particularmente importante es el caso del “triángulo característico”.

  Para referirse genéricamente a las características de las curvas como las de tangente, subtangente, normal, etc., Leibniz creó el término “función”, que finalmente evolucionó hasta lo que hoy concebimos como uno de los objetos matemáticos de mayor trascendencia e importancia en matemáticas.

  Estas características que Leibniz identificaba en las curvas son variables y dependen de la curva particular que se esté analizando, pero en principio sólo fueron concebidas como componentes de la situación global a la que la situación daba lugar, sin consideraciones de dependencia, toda vez que las curvas mismas que las originaban se concebían como relaciones en las que no se distinguía dependencia alguna.

- Con la caracterización de los diferenciales como de primer orden, segundo orden, tercer orden, etc. y la caracterización de curvas por medio de ellos, surgió también el término de ecuación diferencial.

  La caracterización de curvas por medio de ecuaciones diferenciales incluyó tanto a las llamadas curvas algebraicas (las que se podían expresar por medio de una ecuación algebraica) como a las curvas mecánicas (en las que se involucraba el movimiento), haciendo surgir el término "curvas trascendentes" para sustituir al de curvas mecánicas.

- Como parte del lenguaje creado por Leibniz destaca la simbología con la cual representó a los objetos matemáticos fundamentales del cálculo y que en mucho subsisten hasta la actualidad.

  Destacan de entre ellos, el de diferencial ($dx, dy, dz, dA,$ etc.), el de integral, que correspondía a la suma de leibniz ($\int$) y con ellos como base, otros que son producto de sus combinaciones. Así el cociente diferencial de Leibniz se convirtió en uno de los modernos símbolos de la derivada, y las derivadas superiores son representadas por medio de los símbolos de los diferenciales de orden superior que Leibniz empleó para representar los cocientes diferenciales.

Procedimientos:

- Una de los primeros procedimientos de Leibniz, relacionado con los orígenes del cálculo, fue el estudio de las relaciones entre los términos de una sucesión numérica finita y la suma de las diferencias de sus términos.

  Los resultados que obtuvo con sus procedimientos no incluían aportaciones originales, pero la observación de que las sumas de las diferencias arrojaban por resultado la diferencia del último con el primero de los términos de la sucesión original, devino en el posterior principio fundamental del cálculo y, a la postre, en el actual teorema fundamental del cálculo.

  La extensión de la idea de las diferencias hacia las segundas diferencias, terceras diferencias, etc. fueron, a su vez, los gérmenes de los diferenciales de orden superior, con los cuales se pudieron establecer relaciones analíticas entre las variables de las curvas y caracterizar tanto a las curvas geométricas como a las mecánicas.

- Un paso importante lo encontramos en la extensión de los resultados válidos para las sucesiones finitas y la suma de las diferencias de sus términos, al caso de las sucesiones infinitas cuyos términos "devienen a cero". Para operar en estos casos, asignó al último término de las sucesiones un valor que representó mediante la letra "ω".

  A este tratamiento numérico, como lo haría también con el caso geométrico, Leibniz lo caracterizó como cálculo infinitesimal. De hecho, lo que reconocemos como cálculo diferencial e integral es producto de la ampliación o extensión de estas ideas al caso geométrico y el desarrollo a que esta ampliación dio lugar.
- Con la aplicación de su método a las series infinitas, cuyos términos "devienen a cero", Leibniz pudo obtener resultados originales. A semejanza del triángulo de Pascal, construyó lo que denominó "triángulo armónico" y con él pudo determinar las sumas de algunas series numéricas como la que le había sido propuesta por Huygens, esto es, $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+etc.=2$ y otras más, entre ellas $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+etc.=\frac{3}{2}$.
- Caracterización de las figuras con lados curvilíneos como polígonos infinitoangulares y descomposición de sus lados mediante segmentos de longitud inasignable, esto es, mediante diferenciales. En esta descomposición, Leibniz concibió a los lados de los polígonos como segmentos que unen dos puntos consecutivos de las curvas y son parte de las rectas tangentes a las mismas. A partir de su concepción como polígonos infinitoangulares, pudo determinar sus áreas mediante la descomposición en triángulos diferenciales, uno de cuyos lados era precisamente el diferencial de arco.
- Visualización y uso teórico de las áreas de figuras como sumas de rectángulos infinitamente pequeños. De la misma manera se concibieron a los sólidos como suma de cilindros infinitamente pequeños o de paralelepípedos rectángulos infinitamente pequeños.

El lenguaje y la notación que requería para esta caracterización dio origen a la notación moderna de la integral ($y\,dx$ representaba valores de alturas u ordenadas multiplicadas por valores infinitamente pequeños de segmentos diferenciales).

- Determinación de las cuadraturas de curvas conocidas empleando el *principio fundamental del cálculo*, el cual permite potenciar los métodos analíticos pues asumiendo que la representación analítica de una curva es una fórmula diferencial, por medio de procedimientos algebraicos, es posible obtener lo que hoy denominamos función primitiva y evaluar en los extremos para determinar su valor.

  La extensión de estos procedimientos a problemas de otra índole permitió calcular también volúmenes de sólidos de revolución, centros de masa, distancias recorridas, etc.

- Establecimiento, con bases tanto geométricas como analíticas de un proceso de integración por partes para resolver las sumas de la forma $\int_a^b x^n\,dx$, donde n es un natural positivo.

  El proceso de integración por partes es obtenido tanto con consideraciones analíticas, como una consecuencia del principio fundamental del cálculo, como a partir de consideraciones geométricas, analizando los comportamientos de las sumas $\int y\,dx$ como $\int x\,dy$.

- Búsqueda de cuadratices, esto es, de curvas que generaran figuras de áreas equivalentes a aquéllas que se deseaba cuadrar, procurando que la determinación de sus áreas resultara más sencilla. En esta búsqueda se estableció el teorema de transmutación y se realizaron los primeros cambios de variable. La aplicación del teorema de transmutación posibilitó la resolución de cuadraturas de las parábolas superiores, las hipérbolas superiores y del círculo.

Conceptos:

- Los principales conceptos encontrados en Leibniz son los propios del cálculo diferencial y sumatorial, pero por el carácter geométrico de sus objetos, sus concepciones reflejan no sólo la naturaleza analítica de su cálculo, sino precisamente, el carácter geométrico. En su defensa del término suma en lugar del de integral, indica que su uso refleja mejor la correspondencia entre las “sumas geométricas o cuadraturas” y las “sumas o sumas de sucesiones”. Esto es, en su concepción se incluye el carácter geométrico del cálculo, como una extensión del tratamiento numérico.

Aunque tenía clara la interpretación de la suma como cuadratura de figuras, el origen de sus ideas estaba en el tratamiento numérico y ahí el término clave era el de suma. Concebidas así las sumas, se podía hablar de dobles sumas, triples sumas, etc., en cuyo caso la extensión al contexto geométrico podía tratarse de la misma manera y una de sus significaciones estaba asociada al problema de la cuadratura, pero Leibniz estaba interesado, en general, en las sumas de diferentes órdenes.

- Los diferenciales se conciben, en principio, como segmentos infinitamente pequeños que son la unión de dos puntos consecutivos. Esto es, los diferenciales son de carácter geométrico.

  Asimismo, los diferenciales de arco de las curvas son segmentos que forman parte de las rectas tangentes a las curvas, de tal suerte que aunque un diferencial siempre es la unión de dos puntos consecutivos, las longitudes de los mismos pueden ser diferentes.

- Las figuras se conciben como polígonos infinitoangulares y sus cuadraturas se pueden determinar mediante la suma infinita de áreas diferenciales.

  La caracterización de las figuras con lados curvos y su inclusión en el conjunto de figuras poligonales, condujo a la caracterización de los segmentos de longitud inasignable o diferenciales y a la aplicación de los métodos geométricos de cálculo de áreas a estas figuras.

  Consecuentemente los cuerpos geométricos son caracterizados de forma similar, incluyendo su descomposición en cilindros infinitamente pequeños, cuya suma de volúmenes daba por resultado el volumen total del cuerpo.

- Asociados a sus procedimientos analíticos encontramos también otros objetos, algunos de ellos de carácter geométrico. Entre ellos: función, para referirse a características, segmentos y otros, como tangente, normal, subtangente, subnormal. Además: cuadratura, cuadratiz, suma infinita, momento, radio de curvatura, triángulo característico, cantidades infinitamente pequeñas, cantidades infinitamente grandes, diferenciales de orden superior, sumas de orden superior, ecuación diferencial.

Propiedades:

- Las propiedades atribuidas a los objetos fundamentales del cálculo, en tanto extrapolaciones de las diferencias y sumas de sucesiones numéricas, preservan muchas de las propiedades determinadas en esos contextos, pero a la vez tienen nuevas propiedades que no pueden atribuirse a las sucesiones numéricas. Particular y fundamentalmente,esta afirmación es válida para los diferenciales, caracterizados como segmentos de longitud "inasignable". De esta manera son infinitamente pequeños con respecto a cualquier segmento de longitud determinada, de los que se consideran sus "elementos".
- Los diferenciales no satisfacen la propiedad arquimediana. Al caracterizar a los diferenciales como segmentos infinitamente pequeños, de longitud inasignable, al tomar cualquier cantidad finita de dichos segmentos, por muchos que sean, no es posible alcanzar cualquier otra longitud finita dada, pues caeríamos en una contradicción. Consecuentemente, para mantener la naturaleza de los diferenciales es necesario asumir que no se satisface la propiedad arquimediana.
- Los diferenciales son segmentos infinitamente pequeños con respecto a los segmentos de longitud finita de la que son "elementos" y los segmentos de longitud finita son infinitamente grandes con respecto a sus diferenciales. Análogamente, los diferenciales de primer orden son infinitamente grandes con respecto a los diferenciales de segundo orden y viceversa, los diferenciales de segundo orden son infinitamente pequeños con respecto a los diferenciales de primer orden. Más generalmente, los diferenciales de k-ésimo orden son infinitamente grandes con respecto a los diferenciales de $k+1$-ésimo orden y viceversa.
- La suma infinita de diferenciales es infinitamente grande con respecto a éstos y, en general, la suma infinita de segmentos es infinitamente grande con respecto a cualquiera de ellos. Recíprocamente, los diferenciales son infinitamente pequeños

con respecto a la suma infinita de diferenciales y los segmentos son infinitamente pequeños respecto a la suma infinita de segmentos.

- Una propiedad general es el establecimiento del *principio fundamental del cálculo*. Las sumas y los diferenciales son procesos inversos en los cuales son válidas las siguientes reglas: $\int dx = x$ y $d\int x = x$. Para el desarrollo analítico del cálculo integral este principio es de particular importancia pues la determinación de integrales se realiza con base en el mismo, privilegiando los procesos algebraicos.

  El establecimiento de este principio tiene su origen en la suma infinita de los términos de una sucesión infinita y se extiende naturalmente hacia el contexto geométrico con los diferenciales. Posteriormente, con el desarrollo de las ideas del cálculo, como lo analizaremos más adelante, el principio tuvo que ser sustituido por el llamado teorema fundamental del cálculo.

Argumentaciones:

- Para la construcción de su versión del cálculo la base metodológica central de Leibniz fue el establecimiento y aplicación del principio de continuidad por medio del cual se extendían los resultados válidos en un contexto a otro más complejo. Destacan los siguientes dos:

  a) Generalización de resultados válidos para procesos discretos finitos (sumas de diferencias) a casos infinitos (sumas infinitas cuando los términos "devienen a cero").

  b) Generalización posterior a objetos de carácter estrictamente geométrico y de naturaleza continua, como es el caso de los diferenciales.

  Con ambas generalizaciones se abordan y resuelven determinadas situaciones problémicas, unas de carácter numérico y otras de carácter geométrico, con técnicas y procedimientos que, en general, Leibniz denominó como "cálculo infinitesimal".

- Las propiedades analíticas de los diferenciales y las sumas se corresponden con las propiedades geométricas de las figuras que se estén analizando. Esta correspondencia tiene su origen precisamente en las sucesivas extrapolaciones realizadas por Leibniz, primero del caso numérico finito al infinito y posteriormente al geométrico.

Para la formulación de dichas propiedades se tuvieron que asumir convenciones respecto a las reglas de operación con los diferenciales y las sumas. Por ejemplo, para establecer la regla para la obtención del diferencial de un producto ($d(xy) = y\,dx + x\,dy$), se aceptó la eliminación del diferencial de segundo orden $dx\,dy$, el cual es infinitamente pequeño respecto a los diferenciales de primer orden.

- Las argumentaciones de Leibniz, en defensa de la validez de su método con base en la noción de diferencial, fueron diversas y contradictorias. Por una parte las caracterizó como cantidades finitas y por otra como infinitamente pequeñas.

  De acuerdo con las técnicas desarrolladas en la resolución de las situaciones problémicas que enfrentó, y por la forma en la que caracterizó los objetos del cálculo (polígonos infinito-angulares, segmentos de longitud inasignable, cantidades infinitamente pequeñas, cantidades infinitamente grandes, etc.), pareciera que el pensamiento de Leibniz sólo se puede explicar a partir de la noción de los diferenciales como infinitamente pequeños. Esta posición es congruente además, con su visión general del mundo y del universo, el cual concibe formado por "mónadas".

  Sin embargo, ante los debates suscitados respecto a la naturaleza de los objetos construidos, Leibniz cedió y en más de una ocasión argumentó que los diferenciales en realidad son segmentos de longitud muy pequeña pero de longitud determinada.

3.3 VISIÓN GLOBAL DE LA INTEGRAL EN LEIBNIZ

La búsqueda de métodos generales para la determinación de las rectas tangentes a curvas arbitrarias y de sus respectivas cuadraturas, ocupó durante siglos a la humanidad, pero con la invención de la geometría analítica en la primera mitad del siglo XVII, dicha búsqueda se intensificó.

A cerca de 50 años de la publicación de los trabajos de Descartes, ambos problemas fueron resueltos, de manera independiente, por Leibniz y Newton. Entre las características comunes de sus creaciones encontramos que ven estos problemas como procesos inversos y para solucionarlos se apartaron de la geometría analítica y construyeron un nuevo edificio que hoy conocemos con el nombre de cálculo diferencial e integral.

En el caso que estamos analizando, el del cálculo de Leibniz, este alejamiento de la geometría analítica consistió en la creación de nuevos objetos matemáticos, los diferenciales, de naturaleza geométrica. Aquí podemos observar cómo la emergencia de objetos personales, correspondientes a la construcción que se realiza con los sistemas de prácticas institucionales de su época, va generando a su vez, nuevos sistemas de prácticas que son compartidos en el seno de la comunidad científica de su época y de aquí surgen los nuevos objetos institucionales, los que reconocemos como parte del cálculo diferencial e integral.

Queremos resaltar cómo se entrelazan entre sí las prácticas institucionales y las personales de individuos que, como Leibniz, tuvieron aportaciones determinantes en la solución de determinadas situaciones problémicas. Por una parte, las situaciones problémicas que Leibniz abordó eran las mismas que trataban otros científicos, como las relativas a la convergencia de sumas infinitas, la determinación de las rectas tangentes a curvas arbitrarias y las cuadraturas de figuras con lados curvos. Estas situaciones problémicas eran comunes en la comunidad científica, pero la solución de Leibniz se desprende de su sistema de prácticas personales para tratar las sumas finitas de sucesiones numéricas. De este sistema de prácticas emergió una forma de concebir las sumas de series infinitas cuando los términos sumados “devienen a cero” y posteriormente surge la noción de diferencial.

Cuando Leibniz afirmó que no entendía por qué Pascal no vio lo que él, es porque las prácticas desarrolladas por uno y otro eran diferentes, y los significados y objetos que emergían ante situaciones similares eran consecuentemente diferentes. Pascal no podía ver las rectas tangentes como la unión de dos puntos consecutivos que podía caracterizar mediante diferencias, porque su sistema de prácticas era diferente y conducía a otros significados y a la construcción de otros objetos.

Cuando otros científicos, como los hermanos Bernoulli compartieron y desarrollaron los sistemas de prácticas de Leibniz, enriquecieron los significados de los objetos que habían ya surgido y de sus propias prácticas emergieron otros más. Como un ejemplo notorio de este enriquecimiento tenemos los casos de la integral de una función, que sustituyó al de suma de Leibniz, y el de función, concebida de forma diferente, como mostraremos líneas adelante.

El surgimiento del cálculo en Leibniz refleja la naturaleza geométrica del mismo pero también refleja que los significados atribuidos a las variables involucradas provienen de sus prácticas con las diferencias y sumas de las sucesiones numéricas. Para hacer este paso de extrapolación de un contexto a otro se basó en lo que llamó la ley de continuidad, producto no sólo de sus reflexiones matemáticas, sino de los análisis filosóficos generales en los que estaba inmiscuido.

Aunque en ocasiones el empleo de la ley de continuidad lo condujo a interpretaciones incorrectas, en los aspectos fundamentales del cálculo resultó exitosa. Entre otras razones, fue exitosa porque las curvas con las que trabajó eran pocas y, analizadas con el aparato matemático moderno, corresponden a funciones elementales, con comportamientos poco problemáticos. Sin embargo, conforme se desarrolló el cálculo, condujo a otros matemáticos a resultados también incorrectos pero en aspectos más fundamentales.

Leibniz no sólo resolvió el problema de las tangentes y las cuadraturas, sino que desarrolló un método primordialmente analítico para la manipulación de los objetos matemáticos de diferencial y de suma o integral. Sus referentes eran geométricos y siempre procuraba relacionar lo analítico con lo geométrico. De cualquier manera la fortaleza de su método era de carácter analítico y la vertiente privilegiada por sus sucesores fue precisamente esa. Como veremos en los trabajos posteriores de Euler, el estudio de las curvas se caracterizó como un ejemplo de aplicación de las técnicas analíticas del cálculo Leibniziano.

Por otra parte, las argumentaciones de Leibniz sobre la validez de sus resultados fueron ambiguas y muestran que era consciente de algunas de las inconsistencias de su creación. Las críticas que se le hicieron eran centralmente en dos aspectos: la existencia real de los diferenciales y la validez de los resultados encontrados con su empleo.

Aunque ambos son en esencia lo mismo, Leibniz los diferenció y para el primero, la real existencia de los diferenciales fue particularmente ambigua. Para el segundo de los casos, el de la validez de sus resultados, defendió su creación con un criterio pragmático, mostrando cómo la aplicación de sus técnicas en la resolución de problemas conocidos, arrojaba resultados idénticos a los que se obtenían por medio de procedimientos que se consideraban inobjetables.

3.4 LA INTEGRAL EN EULER

Con el desarrollo del cálculo infinitesimal a partir de los trabajos de Newton y Leibniz -aunque aquí sólo abordamos los trabajos de Leibniz- las aplicaciones a la resolución de numerosos problemas de la física y las matemáticas se multiplicaron y las nociones de diferencial e integral se utilizaron en situaciones que no necesariamente tenían un referente geométrico, o al menos no se hacían referencias al contexto geométrico.

Asimismo, los casos de las curvas geométricas se ampliaron y el universo de figuras a las que era posible caracterizar por medio de las ecuaciones diferenciales y obtener su cuadratura por medio de la integral se ensanchó notablemente.

A la vez la naturaleza de las nociones como "infinitamente pequeño", "infinitamente grande", segmento de longitud "inasignable" y otros, fueron duramente cuestionados cada vez con mayor profundidad.

Ambos aspectos, el incremento de las aplicaciones del cálculo, y las críticas a sus fundamentos y elementos básicos, condujeron a transformaciones que impactaron su desarrollo. Entre otros cambios tenemos que las representaciones de las curvas y los fenómenos físicos en los cuales se empleaban al menos dos variables, dejaron de verse como relaciones en las que cada variable era tratada similarmente y se comenzó a considerar a unas como variables independientes y a otras como variables dependientes. De esta manera se extendió el uso del objeto "función", cuyo nombre fue utilizado por primera ocasión por Leibniz, cubriendo las posibilidades de descripción de las relaciones que se presentan tanto en las situaciones geométricas como físicas.

En términos generales, Leibniz empleó el término función para referirse a cualesquier partes de una línea recta, esto es, a segmentos obtenidos de una recta, como abscisas, ordenadas, cuerdas, segmentos de tangentes, normales, subnormales, subtangentes, etc. Por ejemplo, en un escrito de 1694 dice "la tangente y algunas otras funciones dependientes de ella, tales como perpendiculares desde el eje conducidas a la tangente".[1][Leibniz 1692: 272]. De esta manera fue empleada también por Jacob Bernoulli

[1] "The tangent and some other functions depending on it, such as perpendiculars from the axis conducted to the tangent."

en un trabajo publicado en el Acta Eruditorum de octubre de 1694. Sin embargo, ninguno de los dos empleó sistemáticamente el término.

Cuatro años después, en julio de 1698, Johann Bernoulli usó la palabra función en la resolución de un problema propuesto por su hermano Jakob. La primera definición de función aparece en una publicación de 1718, debida precisamente a Johann Bernoulli y en ella establece, en Mêm. Acad. roy. sci. Paris, citado por Youschkevitech [1976: 60]:

"Definición: Llamamos función de una magnitud variable a la cantidad compuesta de cualquier manera ya sea de esta misma magnitud variable y de constantes."[2]

A su definición, Johann Bernoulli la acompañó de alguna notación, por ejemplo el uso de la letra φ para referirse a una *característica* de la función (término original de Leibniz), la cual usó sin paréntesis, escribiendo φx. Aunque la definición de Johann Bernoulli está escrita verbalmente, se infiere, por las prácticas desarrolladas tanto por él como por sus contemporáneos, que la forma de establecer una función es por medio de una expresión analítica.

Es de notarse que esta definición hace referencia a magnitudes variables, las cuales pueden ser de diversa naturaleza, no sólo geométrica, como en el caso de los trabajos de Leibniz. Como mostraremos más adelante estas ideas son retomadas por Euler, discípulo de Johann Bernoulli, para iniciar sus publicaciones sobre el cálculo infinitesimal y organizarlo de una manera diferente a la de sus antecesores.

Para Euler los elementos primarios de su cálculo no fueron las curvas, sino precisamente las funciones, con el propósito de desarrollar una teoría del cálculo infinitesimal en el cual los diferenciales no se asumieran como nociones de naturaleza estrictamente geométrica.

Los trabajos de Euler respecto al cálculo diferencial e integral son numerosos, pero de entre ellos destacan sus dos libros denominados "Introductio in Analysin Infinitorum" e "Institutiones Calculi Differentialis cum eius usu in analysi finitotrum ac doctrina serierum", y tres con el nombre de "Institutionum calculi integralis". Aunque los tres últimos son los de mayor interés para nosotros, necesariamente deberemos referirnos a los primeros y a otros trabajos de Euler.

[2] "Définition: On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière de cette grandeur variable et de constantes".

Los primeros dos volúmenes a los que hemos hecho referencia se publicaron originalmente en 1748 y están traducidos al inglés con el nombre de "Introduction to Analysis of the Infinite", a los cuales haremos referencia aquí.

En el primer volumen, Euler trata con las funciones de cantidades variables, su desarrollo en series infinitas, el estudio de los logaritmos y de las funciones circulares, entre otras. En el segundo volumen trata las curvas y las superficies.

En buena medida esta publicación representa el inicio de estructuración y fundamentación del análisis matemático moderno. Es, a partir de este trabajo, que el objeto de estudio central del análisis es la noción de función, con la cual se desarrollan o aplican los conceptos y procedimientos del cálculo.

Adicionalmente a su propósito de organizar el análisis a partir de la noción de función, Euler agregó su preocupación por ordenar y sistematizar las construcciones matemáticas sobre el tema, de tal manera que permitiera a los estudiantes universitarios una mejor comprensión de sus conceptos y sus métodos. La introducción al Volumen I de "Introductio in Analysin Infinitorum" es bastante ilustrativa en este sentido.

"Frecuentemente he considerado el hecho de que la mayoría de las dificultades que obstruyen el progreso de los estudiantes que intentan aprender análisis proviene de esto: aunque entienden un poco de álgebra ordinaria, necesitan trabajar más con este fino arte. De esto se sigue no sólo que se quedan en las márgenes, sino que además encuentran extrañas las ideas acerca del infinito, las cuales deben tratar de usar. Aunque el análisis no requiere un conocimiento exhaustivo del álgebra, menos de todas las técnicas algebraicas descubiertas hasta ahora, existen tópicos cuya consideración prepara al estudiante para una comprensión más profunda. Sin embargo, en los tratados ordinarios sobre los elementos del álgebra, esos tópicos o son omitidos por completo o son tratados descuidadamente. Por esta razón, estoy cierto que el material que he reunido en este libro es completamente suficiente para remediar este defecto".[3][Euler 1748: V].

[3] Often I have considered the fact that most of the difficulties which block the progress of students trying to learn analysis stem from this: although they understand littlle of ordinary algebra, still they attempt this more subtle art. From this follows not only that they remain on the fringes, but in addition they entertain starnge ideas about the concept of the infinite, which they must try to use. Although analysis does not require an exhaustive knowledge of algebra, even of all the algebraic techniques so far discovered, still there are topics whose consideration prepares a student for a deeper understanding. However, in the ordinary treatise on the elements of algebra, these topics are either completely ommited or are treated carelessly. For this reason, I am certain that the material I have gathered in this book is quite sufficient to remedy that defect."

Con esta idea, Euler conjunta su idea didáctica de cómo debe presentarse el análisis con su propuesta sobre cómo organizarlo matemáticamente, iniciando con el tratamiento del álgebra elemental como antecedente para abordar el cálculo. El tratamiento de estas ideas fundamentales lo hace, como dijimos atrás, en dos volúmenes.

"He dividido este trabajo en dos libros; en el primero de estos me he limitado a mi mismo a aquellos aspectos concernientes al análisis puro. En el segundo libro he explicado aquellas cosas que deben saber de geometría, en el cual el análisis es ordinariamente desarrollado de tal forma que se muestra la manera en la cual es aplicado. En ambos casos, sin embargo, he omitido los aspectos elementales y desarrollado sólo aquellas cosas que, en otros lugares, son o completamente omitidas o sólo tratadas superficialmente o, finalmente, siguen a nuevos argumentos".[4] [Euler 1748: V].

Euler describe la forma en que clasificará y presentará las funciones, teniendo siempre clara su relación con los diferenciales y la integral. Así, señala que las funciones serán divididas en algebraicas y trascendentes y dice: "La primer subdivisión de funciones algebraicas es en no irracionales e irracionales. He mostrado cómo las primeras pueden no sólo simplificarse, sino también factorizarse, lo cual es muy útil en cálculo integral".[5] [Euler 1748: VI].

Por la importancia que estos volúmenes tienen para la posterior presentación y tratamiento de la integral, particularmente el libro I, discutimos a continuación algunos de los desarrollos de Euler. Pudiéramos elegir hacer sólo descripciones de los puntos más importantes, pero nos ha parecido más adecuado mostrar los desarrollos de Euler. De esta manera nuestros análisis podrán contrastarse con lo expuesto. Por ejemplo, afirmar que Euler obtuvo las integrales de muchas funciones mediante admirables desarrollos algebraicos, sin mostrar algunos, pudiera ser lo mismo que nada.

El primer capítulo es dedicado al tratamiento general de las funciones y empieza así:

[4] "I have divided this work into two books; in the first of these I have confined myself to those matters concerning pure analysis. In the second book I have explained those things must be known from geometry, since analysis ordinarily developed in such a way that its application is shown. In both parts, however, I have ommited the elementary matters and developed only those things which, in other places, are either completely ommited or only cursorily treated or, finally, follow from new arguments."

[5] "The primary subdivisión of algebraic functions is into that of non-irratonal and irrational. I have shown the former can not only be simplified, but also factored, and this is very useful in integral calculus".

"1.Una cantidad constante es una cantidad determinada la cual siempre mantiene el mismo valor".[6] [Euler 1748: 1].

Las constantes pueden corresponder a cualquier tipo de número y en álgebra se representan por medio de las primeras letras del alfabeto.

"2. Una cantidad variable es aquella que no está determinada o es universal, la cual puede tomar cualquier valor".[7] [Euler 1748: 1].

Las variables se representan en álgebra por medio de las últimas letras del alfabeto.

"3. Una cantidad variable está determinada cuando algún valor definido es asignado a ella".[8] [Euler 1748: 2].

Una vez formuladas estas tres definiciones, Euler presenta su definición de función, la cual es prácticamente idéntica a la de su maestro Johann Bernoulli, salvo que en lugar de emplear el término "cantidad", emplea el término "expresión analítica". Aunque, como ya comentamos, cantidad, en el caso de Bernoulli, sólo podía representar expresión analítica, el reconocimiento como tal por parte de Euler, será de gran importancia para la evolución del concepto de función.

"4. Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y números o cantidades constantes",[9] [Euler 1748: 2].

De esta manera, Euler parte de una cantidad variable y forma otra cantidad variable que depende de ella, precisamente la función. En el siguiente punto esto es claro, a pesar de que no emplea nunca explícitamente el término "dependiente".

"5. Por lo tanto, una función de una cantidad variable será ella misma una cantidad variable".[10] [Euler 1748: 2].

Euler hace la aclaración de que las funciones pueden tomar tanto valores reales como complejos. Asimismo descarta la existencia de funciones constantes, partiendo de que las constantes no son variables, lo cual tuvo consecuencias posteriores en el desarrollo del cálculo.

[6] "1. A constant quantity is a determined quantity which always keeps the same value."
[7] "A variable quantity is one which is not determined or is universal, which can take any value."
[8] "3. A variable quantity is determined when some definite values is assigned to it."
[9] "4. A function of a variable quantity is an analytic expression composed in any way whatsoever of the variable quantity and numbers or constant quantities."
[10] "5. Hence a function itself of a variable quantity will be a variable quantity."

En las siguientes partes de su tratamiento general de las funciones establece que éstas pueden clasificarse en algebraicas y trascendentes. Por algebraicas reconoce a aquellas que se forman con sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias de las variables, a las cuales identifica como operaciones algebraicas y las trascendentes son las que se forman con "operaciones trascendentes" como las logarítmicas, exponenciales y trigonométricas. Sin embargo, en caso de que en una función se aplique una operación trascendente exclusivamente a la constante, la función será algebraica. Se señala también que los procesos de integración son una fuente de generación de funciones trascendentes.

Las funciones algebraicas se dividen a su vez, en irracionales y no irracionales. En las no irracionales sólo tenemos operaciones de suma, resta, multiplicación, división y potencias enteras, en tanto que en las irracionales se involucran los radicales. Asimismo, se distingue a las funciones dadas explícitamente de las implícitas.

Las funciones no irracionales se dividen, por su parte, en polinomiales y racionales.

Se clasifica también a las funciones como univaluadas o multivaluadas, refiriéndose a las primeras como aquellas que para cada valor de la variable independiente sólo toman un valor y, en el caso de las multivaluadas, a las que toman más de un valor para algunos de los valores de la variable independiente. Todas las funciones racionales son univaluadas y todas las irracionales son multivaluadas. Las funciones trascendentes pueden ser univaluadas y multivaluadas.

Otro aspecto a resaltar es que Euler identifica la existencia de funciones inversas y funciones compuestas. La presentación que hace de ellas es la siguiente:

"16. Si y es cualquier función de z, entonces asimismo, z será una función de y."[11] [Euler 1748: 10].

En este punto comenta que la afirmación es válida tanto para funciones univaluadas como para multivaluadas, preguntándose por el comportamiento correspondiente. Por ejemplo en el caso de la función implícita $y^3 = ayz - bz^2$, y es una función trivaluada de z en tanto que z es una función bivaluada de y.

El caso de las funciones compuestas se muestra con el siguiente desarrollo.

"17. Si tanto y como x son funciones de z, entonces y es también función de x, x a su vez, es también una función de y."[12] [Euler 1748: 10].

[11] "16. If y is any function of z, then likewise, z will be a function of y."

La demostración se basa en el uso de la existencia de la función inversa, expresado con argumentos del siguiente estilo. Si y es función de z, entonces z, a su vez, es función de y; ahora bien, como x es función de z, z también es función de x. Entonces y puede ser definido a través de x y viceversa, x puede ser definido mediante y.

Posteriormente clasifica a algunas funciones como pares y a otras como impares.

En el siguiente capítulo, el segundo, Euler trata con la transformación de las funciones, por ejemplo al escribirlas como producto cuando originalmente estaban escritas como suma. Es el caso de la función $y = z^2 - 3z + 2$, la cual se puede escribir, obteniendo sus raíces, como $y = (2 - z)(1 - z)$. El análisis de las raíces de las funciones se torna entonces, trascendente y algunos puntos en este capítulo versan sobre ello, considerando tanto raíces reales como complejas.

En el caso de los polinomios podemos observar cómo Euler los trata, en cierto sentido, como funciones continuas en el sentido moderno, al establecer el teorema del valor intermedio. Sin embargo, la demostración formal, en el sentido moderno, requiere de la aceptación explícita de la completez del sistema de los números reales.

"33. Si la función polinomial Z toma el valor A cuando $z = a$ y toma el valor B cuando $z = b$, entonces existe un valor de z entre a y b para el cual la función Z toma cualquier valor entre A y B."[13] [Euler 1748: 21].

El resultado enunciado lo emplea para caracterizar el tipo de raíces, reales o complejas, que puede tener un polinomio. Emplea aquí por primera vez a ∞ y $-\infty$ con libertad, como si fueran dos números más cualesquiera. En el siguiente ejemplo se muestra la forma de hacerlo.

"37. Si en una función polinomial Z el exponente más grande de z es un número par y el término constante tiene signo negativo, entonces la función Z tiene al menos dos factores lineales reales."[14] [Euler 1748: 23].

Su argumentación es: La función tendrá la forma $z^{2n} \pm az^{2n-1} \pm bz^{2n-2} \pm \cdots \pm nz - A$ y si hacemos $z = \infty$, tendremos $Z = \infty$ en tanto que si $z = 0$ tenemos $Z = -A$. Aplicando

[12] "17. If y and x are both functions of z, then y is also a function of x, and x in turn is also a function of y."

[13] "33. If the polynomial function Z takes the value A when $z = a$ and takes the value B when $z = b$, then there is a value of z between a and b which the function Z takes any value between A and B."

[14] "37. If in a polynomial function Z the greatest exponent of z is an even number and the constant term has a negative sign, then the function Z has at least two real linear factors."

el teorema del valor intermedio concluimos que existe un valor de z entre *0* y ∞ para el cual la función Z es *0*. Similarmente existe una raíz entre *0* y $-\infty$, pues si tomamos $z=-\infty$, tenemos que $Z=\infty$.

Con este tipo de resultados Euler aborda numerosos casos de funciones racionales, las cuales descompone en fracciones parciales, con el propósito de usar esas descomposiciones para integrarlas de la manera en que se hace usualmente en nuestros actuales cursos de cálculo.

El capítulo III está destinado a la transformación de las funciones por medio de una sustitución o cambio de variable. El punto de partida es el siguiente:

"46. Si y es alguna función de z, y z es definida por una nueva variable x, entonces y también puede ser definida por x."[15][Euler 1748: 38].

La sustitución será igualmente útil para la integración de funciones y en el capítulo III se presentan diversos casos de funciones que se simplifican al aplicarse algún cambio de variable conveniente. Por ejemplo, si tenemos la función $y=\sqrt{a+bz}$, el radical puede eliminarse tomando $\sqrt{a+bz}=bx$. De aquí que $y=bx$, y, despejando z, encontramos que $z=bx^2-\frac{a}{b}$.

El capítulo IV del libro es particularmente interesante tanto para el trabajo posterior en cálculo diferencial como en cálculo integral. Su tema es el desarrollo de funciones en series infinitas, tratándose diferentes casos, de los cuales ilustraremos con uno de los más sencillos.

Si tenemos la función $y=\dfrac{a}{\alpha+\beta z}$, por medio de un procedimiento de división continua podemos llegar a expresar la función por medio de la serie infinita siguiente:

$$y=\frac{a}{\alpha}-\frac{a\beta z}{\alpha^2}+\frac{a\beta^2z^2}{\alpha^3}-\frac{a\beta^3z^3}{\alpha^4}+\frac{a\beta^4z^4}{\alpha^5}-\cdots$$

Nótese que esta serie es geométrica con término inicial $\dfrac{a}{\alpha}$ y razón $\dfrac{-\beta z}{\alpha}$.

[15] "46. If y is some function of z, and z is defined by a new variable x, then y can also be defined by x."

Dado que los ejemplos se van haciendo más complejos, Euler reconoce que el proceso de división continua, aunque útil también para ellos, es largo y tedioso. Por ese motivo plantea un procedimiento alternativo consistente en asumir que una función puede expresarse como una serie infinita $A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots$ y después determinar los valores de los coeficientes $A,B,C,D,E,\cdots$. Veamos su procedimiento con el mismo ejemplo. Si $y=\dfrac{a}{\alpha+\beta z}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots$, entonces

$a=(\alpha+\beta z)(A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots)$ y de aquí que

$$a=\alpha A+\alpha Bz+\alpha Cz^2+\alpha Dz^3+\alpha Ez^4+\cdots+\beta Az+\beta Bz^2+\beta Cz^3+\beta Dz^4+\beta Ez^5+\cdots$$

Igualando las constantes y considerando que los coeficientes de potencias idénticas de z deben ser iguales a 0, tenemos que $a=\alpha A$, $\alpha B+\beta A=0$, $\alpha C+\beta B=0$, $\alpha D+\beta C=0$, $\alpha E+\beta D=0$, y así sucesivamente, obtenemos finalmente que

$A=\dfrac{a}{\alpha}$, $B=-\dfrac{\beta A}{\alpha}=-\dfrac{a\beta}{\alpha^2}$, $C=-\dfrac{\beta B}{\alpha}=\dfrac{a\beta^2}{\alpha^3}$, $D=-\dfrac{\beta C}{\alpha}=-\dfrac{a\beta^3}{\alpha^4}$, $E=-\dfrac{\beta D}{\alpha}=\dfrac{a\beta^4}{\alpha^5}$, y así sucesivamente.

Con este procedimiento Euler representa con series infinitas a muchas funciones, cubriendo de manera general a las funciones racionales en cuyo denominador el término independiente es diferente de cero, pues en caso de $\alpha=0$ "el primer término $A=\dfrac{a}{\alpha}$, "y claramente todos los demás términos serían infinitos".[16] [Euler 1748: 54]. Por simplicidad Euler escribe estas funciones en la forma $\dfrac{a+bz+cz^2+dz^3+\cdots}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\cdots}$.

Euler trató de demostrar que todas las funciones podían expresarse como series de potencias, lo cual no pudo conseguir, aunque a pesar de ello, lo estableció afirmando que los ejemplos mostrados eran muestra importante de ello. En caso de alguien no lo aceptara, su reto era mostrar un ejemplo para el cual el desarrollo en series de potencias fuera imposible. Así, estableció que cualquier función podía representarse por medio de la serie $Az^\alpha+Bz^\beta+Cz^\gamma+Dz^\delta+\cdots$, donde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,etc.$ son números cualesquiera.

[16] "...and indeed all other terms would be infinite."

Posterior a este capítulo se tratan las funciones de dos o más variables, las cuales también serán abordadas en los libros de cálculo diferencial e integral, en los que se introducen las derivadas parciales y las integrales múltiples.

Sin embargo, no nos referiremos a ese capítulo y pasaremos a los siguientes, VI, y VII, los cuales tratan de las funciones exponenciales y logarítmicas. Euler inicia considerando que el tratamiento de estas funciones es excepcional, pues tratándose de funciones trascendentes, es posible caracterizarlas sin el uso de las ideas del cálculo. "Aunque el concepto de función trascendente depende del cálculo integral, aún antes de llegar a ello, existen ciertos tipos de funciones que son más obvias, las cuales pueden ser convenientemente desarrolladas, y que abren la puerta a posteriores investigaciones."[17] [Euler 1748: 75].

Además de las funciones exponenciales y logarítmicas, Euler trata también en el siguiente capítulo con las funciones circulares o trigonométricas. En todas ellas la representación por medio de series es crucial. Aquí sólo trataremos el caso de las funciones exponenciales y logarítmicas, en las cuales se emplean por primera ocasión los términos "infinitamente pequeño" e "infinitamente grande" y muestran la manera en la cual Euler usará estos términos u objetos matemáticos originados en los trabajos de Leibniz.

Para referirse a las funciones exponenciales, considera una gama muy amplia de posibilidades, incluyendo el hecho de que las variables a tomar en cuenta pueden ser no sólo los exponentes de una expresión sino también su base. Así por ejemplo, son funciones exponenciales las siguientes: a^z, y^z, a^{a^2}, a^{y^2}, y^{a^2}, x^{y^z}. Sin embargo, el único caso que se trata es el de a^z y, aunque se analizan brevemente las diferentes posibilidades para los valores de *a*, los desarrollos se concentran en el caso en el que $a > 1$. Una de las primeras afirmaciones de Euler es que los valores de z pueden ser cualquier número real, haciendo notar que si "*z* va hacia ∞, entonces $y = a^z$ también va hacia ∞, si $z = 0$, entonces $y = 1$ y cuando z va hacia $-\infty$, y va hacia *0*. En otras palabras, para cualquier valor positivo

[17] "Although the concept of a trascendental function depends on integral calculus, still, before we come to that, there are certain kinds of functions which are more obvious, which can be conveniently developed, and which open the door to further investigations."

asignado a *y*, existe un valor real correspondiente a *z* tal que $a^z = y$. Si a *y* le es dado un valor negativo, no existe un valor real correspondiente a *z*".[18] [Euler 1748: 75]

Casi inmediatamente después de esta discusión, Euler se concentra en la función inversa de las funciones exponenciales, y por primera vez en la historia, presenta a los logaritmos como "el exponente al cual hay que elevar la base para obtener el número deseado".

"102. Así pues, dado una número *a*, para cualquier valor de *z*, podemos encontrar el valor de *y*, en tanto que, a su vez, dado un valor positivo de *y*, podríamos dar un valor de *z* tal que $a^z = y$. Este valor de z, en la medida en que es visto como una función de *y*, es llamado el LOGARITMO de *y*. La discusión acerca de los logaritmos supone que existe alguna constante fija a ser substituida por *a*, y este número es la base para el logaritmo. Habiendo asumido esta base, decimos que el logaritmo de *y* es el exponente en la potencia a^z tal que $a^z = y$. Se ha acostumbrado designar el logaritmo de *y* mediante el símbolo $\log y$. Si $a^z = y$, entonces $z = \log y$. De esto entendemos que la base de los logaritmos, aunque depende de nuestra selección, deberá ser un número más grande que *1*. Además, sólo es con números positivos que podemos representar el logaritmo mediante un número real."[19] [Euler 1748: 78].

Los desarrollos en series de las funciones exponenciales y logarítmicas los hace considerando los "infinitamente pequeños" y los "infinitamente grandes" iniciando con la función exponencial. Su argumentación se sintetiza en las siguientes líneas.

Partiendo de que $a^0 = 1$, y que la potencia crece cuando el exponente crece, entonces si tomamos una cantidad infinitamente pequeña y positiva, la potencia también

---

[18] "If *z* goes to ∞, then *y* also goes to ∞, then *y* also goes to ∞, if $z = 0$, then $y = 1$ and when *z* goes to $-\infty$, *y* goes to *0*. On the other hand, for any positive values assigned to *y*, there is a real value corresponding to *z* such that $a^z = y$. If a negative value is given to *y*, there is no corresponding real value for *z*."

[19] "102. Just as, given a number *a*, for any value of *z*, we can find the value of *y*, so, in turn, given a positive value for *y*, we would like to give a value for *z*, such that $a^z = y$. This value of *z*, insofar as it as viewed as a function of *y*, it is called the LOGARITHM of *y*. The discussion about logarithms suposses that there is some fixed constant to be substituted for *a*, and this number is the base for the logarithm. Having assumed this base, we say the logarithm of *y* is the exponent in the power a^z such that $a^z = y$. It has been customary to designate the logarithm of *y* by the symbol $\log y$. If $a^z = y$, then $z = \log y$. From this we understand that the base of the logarithms, although it depends on our choice, still it should be a number greater than *1*. Furthermore, it is only of positive numbers that we can represent the logarithm with a real number."

deberá crecer una cantidad infinitamente pequeña. Así, si ϖ es un número infinitamente pequeño, $a^{\varpi} = 1 + \psi$, donde ψ también es un número infinitamente pequeño. Existen entonces tres posibilidades, $\psi = \varpi$, o $\psi > \varpi$, o $\psi < \varpi$. Como eso depende del valor de *a*, entonces asumimos simplemente que $\psi = k\varpi$ y de aquí que $a^{w} = 1 + k\varpi$. Si ahora tomamos al número *a* como base para la función logarítmica, tenemos $\varpi = \log(1 + k\varpi)$.

Si *i* es un número cualquiera, tenemos $a^{i\varpi} = (1+\varpi)^{iw}$, el cual puede desarrollarse con el teorema del binomio para obtener

$$a^{iw} = 1 + \frac{i}{1}k\varpi + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\varpi^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\varpi^3 + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}k^4\varpi^4 + \cdots$$

Si hacemos $i = \frac{z}{\varpi}$, donde *z* es cualquier número finito, entonces *i* será un número infinitamente grande, toda vez que el denominador ϖ es infinitamente pequeño. Sustituimos ahora $\frac{z}{i}$ por ϖ, entonces

$$a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{(i-1)}{1\cdot 2j}k^2z^2 + \frac{(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}k^3z^3 + \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}k^4z^4 + \cdots$$

Tomando en cuenta que *i* es infinitamente grande, $\frac{i-1}{i} = \frac{i-2}{i} = \frac{i-3}{i} = \cdots = 1$ y también $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$, $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$, $\frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$, y así sucesivamente. Sustituyendo estos valores tenemos $a^z = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$

Para determinar el valor de *k*, el cual depende del valor de la base *a*, Euler evalúa la función en $z = 1$, obteniendo $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$. Dada la importancia de los logaritmos con base *10*, Euler determinó el valor de *k* en este caso, que es aproximadamente *2.30258*.

Para expresar ahora los logaritmos por medio de un desarrollo en series, Euler procedió tomando ahora la expresión $b = a^n$, equivalente a $\log b = n$. Entonces $b^z = a^{nz}$ y, consecuentemente, $b^{z}=1+\frac{knz}{1}+\frac{k^{2}n^{2}z^{2}}{1\cdot 2}+\frac{k^{3}n^{3}z^{3}}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^{4}n^{4}z^{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$ y, sustituyendo n por $\log z$, $b^{z}=1+\frac{kz}{1}\log b+\frac{k^{2}z^{2}}{1\cdot 2}(\log b)^{2}+\frac{k^{3}z^{3}}{1\cdot 2\cdot 3}(\log b)^{3}+\frac{k^{4}z^{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\log b)^{4}+\cdots$

Como $a^{\varpi}=1+k\varpi$, en la cual ϖ es una fracción infinitamente pequeña, entonces, tomando a como base, tenemos $\varpi=\log(1+kw)$ y de aquí $i\varpi=\log(1+k\varpi)^{i}$. Si tomamos un número i infinitamente grande, entonces $(1+k\varpi)^{i}$ viene a ser más grande que cualquier número mayor a *1*. Ahora, si hacemos $(1+k\varpi)^{i}=1+x$, entonces $\log(1+x)=i\varpi$. El número $i\varpi$ es finito, precisamente el valor de $\log(1+x)$.

Partiendo nuevamente de $(1+k\varpi)^{i}=1+x$, tenemos $1+k\varpi=(1+x)^{\frac{1}{i}}$ o, lo que es lo mismo, $k\varpi=(1+x)^{\frac{1}{i}}-1$ por lo que $i\varpi=\frac{i}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{i}}-1\right)$. Por otra parte teníamos ya la expresión $i\varpi=\log(1+k\varpi)$ y, consecuentemente $\log(1+k\varpi)^{i}=\log(1+x)=\frac{i}{k}(1+x)^{\frac{1}{i}}-\frac{i}{k}$, donde i es un número infinitamente grande. Pero, aplicando el teorema del binomio,

$$(1+x)^{\frac{1}{i}}=1+\frac{1}{i}x-\frac{(i-1)}{1\cdot 2i}x^{2}+\frac{(i-1)(2i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i}x^{3}-\frac{(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}x^{4}+\cdots$$

Como i es infinitamente grande se cumplen $\frac{i-1}{21}=\frac{1}{2}$, $\frac{2i-1}{3i}=\frac{2}{3}$, $\frac{3i-1}{4i}=\frac{3}{4}$, y así sucesivamente. Ahora, multiplicando por i la serie anterior, tenemos $i(1+x)^{\frac{1}{i}}=i+\frac{x}{1}-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+\cdots$. Como $\log(1+x)=\frac{i}{k}(1+x)^{\frac{1}{i}}-\frac{i}{k}$, combinar ambos, nos lleva a escribir $\log(1+x)=\frac{i}{k}(1+x)^{\frac{1}{i}}-\frac{i}{k}=\frac{1}{k}\left[i(1+x)^{\frac{1}{i}}-i\right]=\frac{1}{k}(i+\frac{x}{1}-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+\cdots-i)$ y, finalmente $\log(1+x)=\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+\cdots\right)$, logaritmo cuya base es a, la cual, como ya determinamos, es $a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^{2}}{1\cdot 2}+\frac{k^{3}}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$.

De esta manera Euler determinó la forma de representar en series, tanto las funciones exponenciales como las logarítmicas. Veamos ahora el camino que le permitió determinar el valor de la base de los logaritmos naturales o hiperbólicos (el último nombre obedece a que la cuadratura de la hipérbola puede expresarse usando estos logaritmos, como el propio Euler hizo notar), el cual representó mediante la letra *e*, conservada hasta la actualidad en su honor.

Partiendo de $\log(1+x)=\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$ y sustituyendo *x* por – *x*, obtuvo que $\log(1-x)=-\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$ y como $\log(1+x)-\log(1-x)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, tenemos $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{2}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right)$. Haciendo $\frac{1+x}{1-x}=a$, se tiene $x=\frac{a-1}{a+1}$ y, como $\log a=1$, tenemos $k=2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+\cdots\right)$ y de aquí, dado el valor de *a*, es posible obtener el de *k*.

Similarmente, dado que nosotros podemos escoger la base *a* para los logaritmos, “escogemos ahora *a* de manera tal que $k=1$. Supongamos ahora que $k=1$, entonces la serie encontrada arriba en la sección 116, $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$ es igual a *a*. Si los términos son representados como fracciones decimales y sumados, obtenemos el valor de $a=2.71828182845904523536028\cdots$. Cuando es escogida esta base, los logaritmos son llamados naturales o hiperbólicos. El último nombre es usado dado que la cuadratura de una hipérbola puede ser expresada a través de estos logaritmos. Por razones de brevedad para este número $2.718281828459\cdots$ usaremos el símbolo *e*, el cual denotará la base para los logaritmos naturales o hiperbólicos, el cual corresponde al valor $k=1$, y *e* representa la suma de la serie infinita $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$.”[20][Euler 1748: 97].

[20] “… we now choose a in such a way that $k=1$. Suppose now that $k=1$, then the series found above in section 116, $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$ is equal to a. If the terms are represented as decimal fractions and summed, we obtain the value for $a=2.71828182845904523536028\cdots$. When this base is chosen, the logarithms are called natural or hyperbolic. The latter name is used since the quadrature of a hyperbola can be expressed through these logarithms. For the sake of brevity for this number

Con lo escrito hasta aquí hemos dado muestra de las formas de proceder de Euler, sus propósitos tanto didácticos como matemáticos de organización del análisis, poniendo al centro a la noción de función, a la vez que continúa haciendo uso de las cantidades infinitamente pequeñas como de las infinitamente grandes. En la primera parte se define a las funciones y se exponen los resultados que son posibles de efectuar sin los conceptos del cálculo, particularmente los de diferencial e integral.

Sin embargo, con lo escrito en los libros de análisis del infinito, no estaban todos los elementos necesarios para el tratamiento de los diferenciales y las integrales, referidos ahora a las funciones y no a las curvas como en el caso de sus predecesores. En buena medida, en el libro I de análisis del infinito se presentan los elementos algebraicos necesarios para el análisis, pero aún era necesario profundizar en la segunda de sus ideas claves en la comprensión del análisis: la noción de infinito.

Las ideas al respecto se desarrollan exhaustivamente en el libro I de Institutiones Calculi Differentialis, del cual trataremos ahora, con base en una traducción al inglés publicada en el año 2000 con el nombre “Foundations of Differential Calculus”.

El libro comienza con dos capítulos en los cuales se abordan las diferencias en las sucesiones numéricas y su aplicación para la obtención de las sumas en series numéricas, de forma similar a como lo hizo Leibniz en sus orígenes. Posteriormente, en el tercer capítulo, se discuten las ideas del infinito y en esta parte ahondaremos un poco más, dada la importancia que tiene para el desarrollo de las ideas del análisis matemático y para nuestro análisis epistemológico.

Como ya hemos expresado anteriormente, las cantidades infinitamente pequeñas y las infinitamente grandes habían sido seriamente cuestionadas y con ello los fundamentos y la validez del cálculo mismo. En el caso de Euler tenemos el ingrediente adicional de que, a diferencia de Leibniz, quien sólo trabajó con objetos de naturaleza geométrica, tenía por objetivo hacerlo con las nociones de variable generalizada y su consecuente noción de función.

$2.718281828459\cdots$ we will use the symbol e, which will denote the base for natural or hyperbolic logarithms, which corresponds to the value $k=1$, and *e* represents the sum of the infinite series $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$.

Su disertación es un tratado filosófico sobre la materia, la continuidad de la misma y, consecuentemente, su concepción de los objetos matemáticos (como las rectas y curvas) en tanto continuos. Dada su importancia en la fundamentación del cálculo diferencial e integral, en los párrafos siguientes presentamos con amplitud algunos de los párrafos en los que Euler desarrolla el tema, mostrando su análisis, privilegiando la exposición de sus ideas directamente, en lugar de describirla. Comienza con el párrafo siguiente:

"72. Dado que cada cantidad, no importa que tan grande sea, siempre puede ser incrementada, y no existe obstáculo para sumar a una cantidad dada otra cantidad similar, se sigue que cada cantidad puede ser incrementada sin límite. Además, no hay una cantidad tan grande que no pueda concebirse a una más grande, y por tanto no hay duda de que *cada cantidad puede ser incrementada al infinito*. Si existiera alguien que negara esto, tendría que dar una cantidad que no pueda incrementarse, y por tanto necesita dar una cantidad a la que no se le pueda sumar nada. Esto es absurdo, y aún la idea de cantidad excluye esta posibilidad. Él deberá, necesariamente, conceder que cada cantidad siempre puede ser incrementada sin límite, esto es, puede ser incrementada al infinito".[21] [Euler 1755: 47].

En las siguientes líneas, Euler plantea que la claridad de estas ideas es tal que si alguien la negara caería en contradicciones pero, por otra parte, dichas ideas son, a la vez, sumamente complejas y su simplificación también conduce a contradicciones. Entre ellas está la de aceptar la existencia de cantidades infinitamente grandes en el sentido de que se trata de cantidades que ya no pueden ser incrementadas, contradiciendo la idea misma de cantidad. Con una concepción así, al aceptar la existencia de una cantidad infinita, también la niegan.

Luego añade que con estos razonamientos debería aceptarse que no hay cantidades infinitas pues para ello se requeriría que ya hubiera sido incrementada sin límite. Sin embargo, afirma que sí es posible concebir una cantidad infinita y relaciona el hecho con la posibilidad de dividir infinitamente las cosas. Este planteamiento muestra la unión, en la concepción euleriana, de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande.

[21] "72. Since every quantity, no matter how large, can always be increased, and there is no obstacle to adding to a given quantity another like quantity, it follows that every quantity can be increased without limit. Furthermore, there is no quantity so large than a larger one cannot be conceived, and so there is no doubt that *every quantity can be increased to infinity*. If there is someone who would deny this, he would have to give some quantity that cannot be increased, and so needs to give a quantity to which nothing can be added. This is absurd, and even the idea of quantity rules out this possibility. He must necessarily concede that every quantity can always be increased without limit, that is, it can be increased to infinity."

"76. Aunque estas parecen ser aquí una contradicción, si lo consideramos cuidadosamente podemos liberarnos nosotros mismos de todas las dificultades. Quien sea que afirme que algún material es infinitamente divisible niega que en la división continua del material uno llega a partes tan pequeñas que no pueden ser largamente divididas. Por tanto, este material no tiene últimas partes indivisibles, de aquí que las partículas a las cuales uno llega por división continua deben ser posteriormente subdivididas. Por lo tanto, quien sea que diga, en este caso, que el número de partes es infinito, entiende también que las últimas partes son indivisibles; intenta contar aquellas partes que nunca son alcanzadas, y en consecuencia que no existen. Si algún material puede ser siempre subdividido, carece de indivisibles o partes absolutamente simples. Por esta razón, quien sea que afirme que algún material puede ser infinitamente subdividido niega que el material está hecho de partes simples".[22] [Euler 1755: 48].

"78. Quienquiera que de esta discusión haya obtenido cualquier discernimiento, en la divisibilidad infinita no sufrirá las dificultades que la gente comúnmente asigna a esta opinión. Ni será forzado a admitir alguna cosa contraria a lo que suene razonable. En otras palabras, cualquiera que niegue que la materia es infinitamente divisible se encontrará a si mismo en serias dificultades de las cuales de ninguna manera será capaz de desenredar por si mismo. Estas últimas partículas son llamadas átomos por algunos, y, por otros, mónadas o seres simples. La razón por la cual estas últimas partículas no admiten división posterior podría ser por dos posibles causas. La primera es que ellas no tienen extensión; la segunda es que aunque tengan extensión, son tan duras e impenetrables que ninguna fuerza es suficiente para dividirlas. Cualquier elección que se tome conducirá a posiciones igualmente difíciles".[23] [Euler 1755: 49].

[22] "76. Although these seems to be a contradiction here, if we consider it carefully we can free ourselves from all difficulties. Whoever claims that some material is infinitely divisible denies that in the continuous division of the material one over arrives at parts so small that they can no longer be divided. Hence, this material does not have ultimate indivisible parts, since the individual particles at which one arrives by continued division must be able to be further subdivided. Therefore, whoever says, in this case, that the number of parts is infinite, also understands that the ultimate parts are indivisible; he tries to count those parts that are never reached, and hence do not exist. If some material can always be further subdivided, it lacks indivisible or absolutely simple parts. For this reason, whoever claims that some material can be infinitely subdivided denies that the material is made up of simple parts."

[23] "78. Anyone who has gathered from this discussion any insight, into the infinite divisibility of matter will suffer none of the difficulties that people commonly assign to this opinion. Nor will he be forced to admit anything contrary to sound reasoning. On the other hand, anyone who denies that matter is infinitely divisible will find himself in serious difficulties from which he will in no way be able to extricate himself. These

"79. Suponga que estas últimas partículas carecieran de cualquier extensión, por lo que carecen de cualquier otra parte: Con esta explicación la idea de los seres simples es adecuadamente salvada. Sin embargo, es imposible concebir cómo un cuerpo pueda estar constituido por un número finito de partículas de este tipo. Suponga que un pie cúbico de materia está compuesto por mil seres simples de este tipo, y que realmente es cortado en mil piezas. Si estas piezas son iguales, cada una será de un dedo cúbico; si no son iguales, algunas serán más grandes, algunas más pequeñas. Un dedo cúbico será un ser simple, y estaremos frente a una gran contradicción, a menos que por casualidad queramos decir que hay un ser simple y el resto del espacio es vacío. De esta manera es negada la continuidad del cuerpo, excepto que aquellos filósofos descartaron cualquier vacío del mundo. Si alguien objetara que el número de seres simples contenidos en un pie cúbico de materia es mucho más que mil, absolutamente nada es ganado. Cualquier dificultad que se siga del número mil se mantendrá con cualquier otro número, por grande que sea. El inventor de la mónada, un hombre muy agudo, LEIBNIZ, tocó este problema profundamente, y finalmente decidió que la materia es infinitamente divisible. Por lo tanto, no es posible llegar a una mónada antes de que el cuerpo sea infinitamente dividido. Por este mismo hecho, la existencia de los seres simples que componen un cuerpo es absolutamente refutada. Quien niegue que los cuerpos están compuestos de seres simples y quien afirme que los cuerpos son infinitamente divisibles están ambos diciendo la misma cosa".[24] [Euler 1755: 50].

---

ultimate particles are called by some atoms, by others monads or simple beings. The reason why these ultimate particles admit no further division could be for two possible reasons. The first is that they have no extension; the second is that although they have extension, they are so hard and impenetrable that no force is sufficient to dissect them. Whichever choice is made will lead to equally difficult positions."

[24] "79. Suppose that ultimate particles lack any extension, so that they lack any further parts: By this explanation the idea of simple beings is nicely saved. However, it is impossible to conceive how a body can be constituted by a finite number of particles of this sort. Suppose that a cubic foot of matter is made up of a thousand simple beings of this kind, and that it is actually cut up into one thousand pieces. If these pieces are equal, they will each be one cubic finger; if they are not equal, some will be larger, some smaller. One cubic finger will be a simple being, and we will be faced with a great contradiction, unless by chance we want to say that there is one simple being and the rest of the space is empty. In this way the continuity of the body is denied, except that those philosophers completely banished any vacuum from the world. If someone should object that the number of simple beings contained in a cubic foot of matter is much more than a thousand, absolutely nothing is gained. Any difficult that follows from the number one thousand will remain with any other number, no matter how large. The inventor of the monad, a very acute man, LEIBNIZ, probed this problem deeply, and finally decided that matter is infinitely divisible. Hence, it is not possible to arrive at a monad before the body is actually infinitely divided. By this very fact, the existence of simple beings that make up a body is completely refuted. He who denies that bodies are made up of simple beings and he who claims that bodies are infinitely divisible are both saying the same thing."

Una vez expuestas estas ideas generales, retoma el tema específico de las cantidades infinitamente pequeñas y las infinitamente grandes en cálculo y/o análisis.

“82. Pero regresemos a nuestra proposición. Aún si alguien niega que los números infinitos realmente existen en este mundo, no obstante en las especulaciones matemáticas surgen interrogantes a las cuales no pueden darse respuestas a menos que admitamos un número infinito. Así, si queremos la suma de todos los números que componen la serie $1+2+3+4+5+\cdots$, dado que estos números aumentan sin fin, y la suma crece, ciertamente no puede ser finito. De este hecho se sigue que es infinito. Por lo tanto, esta cantidad es tan grande que es más grande que cualquier cantidad finita y no puede no ser infinita. Para designar una cantidad de este tipo usamos el símbolo ∞, por medio del cual significamos una cantidad más grande que cualquier cantidad finita o asignable. Así, cuando una parábola necesita ser definida de tal manera que, se dice que es una elipse infinitamente larga, correctamente decimos que el eje de la parábola es una línea infinitamente larga”.[25] [Euler 1755: 50].

“83. Esta teoría del infinito estará más ilustrada si discutimos lo que los matemáticos llaman el infinitamente pequeño. No hay duda de que cualquier cantidad puede ser disminuida hasta que se desvanezca toda y entonces vaya a la nada. Pero una cantidad infinitamente pequeña no es nada sino una cantidad que se desvanece, y por lo tanto, realmente es igual a *0*. Hay también una definición de la cantidad infinitamente pequeña como aquélla que es menor que cualquier cantidad asignable. Si una cantidad es tan pequeña que es menor que cualquier cantidad asignable, entonces no puede no ser *0*, puesto que a menos que sea igual a *0* una cantidad igual a ella puede asignarse, y esto contradice nuestra hipótesis. A quien sea que pregunte qué es una cantidad infinitamente pequeña en matemáticas, podemos responderle que realmente es igual a *0*. No hay realmente un gran misterio acechando en esta idea como comúnmente piensan algunos y así

[25] “82. But let us return to our proposition. Even if someone denies that infinite numbers really exist in this world, still in mathematical speculations there arise questions to which answers cannot be given unless we admit an infinite number. Thus, if we want the sum of all numbers that make up the series $1+2+3+4+5+\cdots$, since these numbers progress with no end, and the sum increase, it certainly cannot be finite. By this fact it becomes infinite. Hence, this quantity is so large that it is greater than any finite quantity and cannot not be infinite. To designate a quantity of this kind we use the symbol ∞, by which we mean a quantity greater than any finite or assignable quantity. Thus, when a parabola needs to be defined in such a way that is said to be an infinity long ellipse, we can correctly say that the axis of the parabola is an infinitely long straight line.”

han considerado al cálculo de los infinitamente pequeños con mucha desconfianza. Mientras tanto cualquier duda que mantengan desaparecerá con lo que sigue, donde vamos a tratar con este cálculo”.[26] [Euler 1755: 51].

“84. Dado que vamos a mostrar que una cantidad infinitamente pequeña es realmente cero, primero debemos conocer la objeción de por qué no siempre usamos el símbolo *0* para las cantidades infinitamente pequeñas, en lugar de algunos especiales. Puesto que todas las nadas son iguales, parece superfluo tener diferentes signos para designar una cantidad tal. Aunque dos ceros son iguales uno al otro, por lo que no hay diferencia entre ellos, sin embargo, tenemos dos maneras de compararlos, aritmética o geométrica, observemos los cocientes de las cantidades a ser comparadas con el fin de ver la diferencia. La razón aritmética entre dos ceros es una igualdad. Éste no es el caso con una razón geométrica. Esto podemos verlo fácilmente de la proporción geométrica $2:1=0:0,$ en la cual el cuarto término es igual a *0*, como lo es el tercero. De la naturaleza de la proporción, dado que el primer término es el doble del segundo, es necesario que el tercero sea el doble del cuarto”.[27] [Euler 1755: 51].

“85. Estas cosas son muy claras, aún en aritmética ordinaria. Quienquiera sabe que cuando cero es multiplicado por otro número, el producto es cero y que $n\cdot 0=0,$ por lo que $n:1=0:0.$ Por lo tanto es claro que cualesquier dos ceros pueden estar en razón geométrica, aunque desde la perspectiva de la aritmética, la razón es siempre de iguales. Puesto que entre dos ceros cualquier razón es posible, con el fin de indicar esta diversidad

[26] “83. This theory of the infinite will be further illustrated if we discuss that which mathematicians call the infinitely small. There is no doubt that any quantity can be diminished until it all but vanishes and then goes to nothing. But an infinitely small quantity is nothing but a vanishing quantity, and so it is really equal to *0*. There is also a definition of the infinitely small quantity as that which is less than any assignable quantity. If a quantity is so small that is less than any assignable quantity, then it cannot not be *0*, since unless it is equal to *0* a quantity can be assigned equal to it, and this contradicts our hypothesis. To anyone who asks what an infinitely small quantity in mathematics is, we can respond that it really is equal to *0*. There is really not such a great mystery lurking in this idea as some commonly think and thus have rendered the calculus of the infinitely small suspect to so many. In the meantime any doubts that may remain will be removed in what follows, where we are going to treat this calculus.”

[27] “84. Since we are going to show that an infinity small quantity is really zero, we must first meet the objection of why we do not always use the same symbol *0* for infinitely small quantities, rather than some special ones. Since all nothings are equal, it seems superfluous to have different signs to designate such a quantity. Although two zeros are equal to each other, so that there is no difference between them, nevertheless, since we have two ways to compare them, either arithmetic or geometric, let us look at quotients of quantities to be compared in order to see the difference. The arithmetic ratio between any two zeros is an equality. This is not the case with a geometric ratio. We can easily see this from this geometric proportion $2:1=0:0,$ in which the fourth term is equal to *0*, as is the third. From the nature of the proportion, since the first term is twice the second, it is necessary that the third is twice the fourth.”

usamos diferentes notaciones para el propósito, especialmente cuando una razón geométrica entre dos ceros está siendo investigada. En el cálculo de los infinitamente pequeños, tratamos precisamente con razones geométricas de cantidades infinitamente pequeñas. Por este motivo, en estos cálculos, a menos que usemos diferentes símbolos para representar estas cantidades, caeremos dentro de la más grande confusión sin formas de resolverlas nosotros mismos”.[28] [Euler 1755: 51].

“86. Si aceptamos la notación usada en el análisis del infinito, entonces *dx* indica una cantidad que es infinitamente pequeña, por lo que ambas $dx = 0$ y $adx = 0,$ donde *a* es cualquier cantidad finita. A pesar de esto, la razón geométrica $adx : dx$ es finita, a saber $a:1.$ Por este motivo estas dos cantidades infinitamente pequeñas *dx* y *adx* siendo ambas iguales a *0*, no pueden ser confundidas cuando consideramos su razón. De manera similar, tratamos con cantidades infinitamente pequeñas *dx* y *dy*. Aunque estas son ambas iguales a *0*, tenemos de su razón que no son iguales. Ciertamente la fuerza total del cálculo diferencial se ocupa de la investigación de las razones de cualesquier dos cantidades infinitamente pequeñas de este tipo. La aplicación de estas razones por primera vez quizá parece que sea mínima. Sin embargo, si llegara a ser muy grande, será más claro cada día”.[29] [Euler 1755: 51-52].

“87. Dado que el infinitamente pequeño es realmente nada, es claro que una cantidad finita no puede ser incrementada agregando ni sustrayendo una cantidad infinitamente pequeña. Sea *a* una cantidad finita y sea *dx* infinitamente pequeño. Entonces $a + dx$ y $a - dx,$ o, más generalmente, $a \pm ndx,$ son iguales a *a*. Si consideramos la relación entre $a \pm ndx$ y *a*

[28] “85. These things are very clear, even in ordinary arithmetic. Everyone knows that when zero is multiplied by any number, the product is zero and that $n \cdot 0 = 0,$ so that $n:1 = 0:0.$ Hence is clear that any two zeros can be in geometric ratio, although from the perspective of arithmetic, the ratio is always of equals. Since between zeros any ratio is possible, in order to indicate this diversity we use different notations on purpose, especially when a geometric ratio between two zeros is being investigated. In the calculus of the infinitely small, we deal precisely with geometric ratios of infinitely small quantities. For this reason, in these calculations, unless we use different symbols to represent these quantities, we will fall into the greatest confusion with no way to extricate ourselves.”

[29] “86. If we accept the notation used in the analysis of the infinite, then *dx* indicates a quantity that is infinitely small, so that both $dx = 0$ and $adx = 0,$ where *a* is any finite quantity. Despite this, the geometric ratio $adx : dx$ is finite, namely $a:1.$ For this reason these two infinitely small quantities *dx* and *adx* both being equal to *0*, cannot be confused when we consider their ratio. In a similar way, we will deal with infinity small quantities dx and dy. Although these are both equal to 0, still their ratio is not that of equals. Indeed, the whole force of differential calculus is concerned with the investigation of the ratios of any two infinitely small quantities of this kind. The application of these ratios at first sight might seem to be minimal. Nevertheless, if turns out to be very great, which becomes clearer with each passing day.”

como aritmética o como geométrica, en ambos casos la razón viene a ser entre iguales. La razón aritmética de iguales es clara: Dado que $n\,dx = 0,$ tenemos

$$a \pm n\,dx - a = 0.$$

Por otra parte, la razón geométrica es claramente de iguales, dado que

$$\frac{a \pm n\,dx}{a} = 1.$$

De esto obtenemos la bien conocida regla de que *el infinitamente pequeño se desvanece en comparación con el finito y por lo tanto puede despreciarse*. Por esta razón la objeción contra el análisis del infinito, como carente de rigor geométrico, cae por su propio peso, dado que nada es despreciado excepto aquello que realmente es nada. Por lo tanto con perfecta justicia podemos afirmar que en esta sublime ciencia mantenemos el mismo perfecto rigor geométrico que es encontrado en los libros de los antiguos".[30] [Euler 1755: 52].

En los párrafos siguientes se profundiza en estas ideas, pero con lo mostrado es suficiente para entender el punto de vista de Euler. Respecto de las cantidades infinitamente grandes también profundiza en ellas, apoyándose en las cantidades infinitamente pequeñas, lo cual lo hace "más fácil". Representa a las cantidades infinitamente grandes por medio de ∞ y plantea que si *a* es finita y *dx* es infinitamente pequeña, entonces $\frac{a}{dx} = \infty,$ toda vez que $\frac{a}{\infty} = dx = 0$.

[30] "87. Since the infinitely small is actually nothing, it is clear that a finite quantity can neither be increased by adding or subtracting an infinitely small quantity. Let *a* be a finite quantity and let *dx* be infinitely small. Then $a + dx$ and $a - dx,$ or, more generally, $a \pm n\,dx,$ are equal to *a*. Whether we consider the relation between $a \pm n\,dx$ and *a* as arithmetic or as geometric, in both cases the ratio turns out to be that between equals. The arithmetic ratio of equals is clear: Since $n\,dx = 0,$ we have

$$a \pm n\,dx - a = 0.$$

On the other hand, the geometric ratio is clearly of equals, since

$$\frac{a \pm n\,dx}{a} = 1.$$

From this we obtain the well-known rule that *the infinitely small vanishes in comparison with the finite and hence can be neglected*. For this reason the objection brought up against the analysis of the infinite, that it lacks geometric rigor, falls to the ground under its own weight, since nothing is neglected except that which is actually nothing. Hence with perfect justice we can affirm that in this sublime science we keep the same perfect geometric rigor that is found in the books of the ancients."

En lo que respecta al tratamiento específico de la integral, Euler escribió tres libros denominados cada uno Institutiones Calculi Integralis, en el cual el primero trata de funciones de una variable, con el siguiente orden:

"La primera parte: Cuando la relación dada comprende sólo diferenciales de primer grado.

La siguiente parte: Cuando la relación dada comprende diferenciales de segundo u otro grado". [31] [Euler 1768: 18].

En el libro segundo se tratan las funciones de dos variables en la primera parte y de tres variables en la segunda.

Muchos de los resultados del tratamiento que Euler hace en el libro I de Calculi Integralis son similares a los que podemos ver en los libros actuales de cálculo al tratar las técnicas de integración, gran parte de las cuales son creación de él. Eso incluye a las notaciones empleadas, algunas de las cuales fueron también creadas por él, a la vez que se ponen de manifiesto algunas diferencias notacionales. Por ejemplo, aunque Euler creó el símbolo $f(x)$ para referirse a una función, lo cual realizó desde 1734 en *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* (Cajori, vol. 2, page 268), en este libro emplea las literales f y g como constantes, por ser parte de las primeras letras del alfabeto.

Consistente con su visión analítica del cálculo, el libro no contiene ninguna gráfica ni hace referencia a gráfica alguna. Su tratamiento es enteramente analítico, desarrollando las expresiones a integrar para simplificarlas, mediante procedimientos que incluyen cambios de variable, descomposición de funciones racionales en fracciones parciales, representación de funciones como series de potencias, etc., procedimientos que fueron desarrollados en sus libros de análisis del infinito.

Aunque el tratamiento de Euler es sencillo al principio y puede sernos bastante familiar, el estilo exhaustivo y cuidadoso con que se presentan los resultados es digno de tomarse en cuenta y desempeña un papel importante en su propósito de sistematizar el cálculo tanto por conveniencia de la disciplina matemática como de su interés didáctico para hacerlo asequible a los estudiantes.

[31] "Pars prior: quando relatio illa data tanta differentiala primi gradus complectitur.
Pars posterior: quando relatio illa data tanta differentiala secundi altiorumbe graduum complecitur".

En el capítulo introductorio establece los principios fundamentales del cálculo integral, concibiéndolo como el método inverso al del cálculo diferencial. Veamos algunos de sus apuntes, con base en el original en latín.

“Definición 1.

1.

El Cálculo integral es el método para, a partir de una relación diferencial dada, encontrar la relación entre las mismas cantidades; y la operación que conduce a esto suele llamarse integración.[32] [Euler 1768: 1].

A continuación, por medio de tres corolarios y dos escolios, extiende sus ideas respecto a la integral.

Corolario 1.

“2. Así pues, como el cálculo diferencial enseña a encontrar una relación diferencial a partir de una relación dada de cierta cantidad variable, el cálculo integral se dedica a investigar el método inverso.

Corolario 2.

3. Resulta claro que del mismo modo que en el Análisis perpetuo las operaciones binarias se oponen entre sí, como la sustracción a la adición, la división a la multiplicación, la extracción de raíces a la potenciación, así también, por razones semejantes, el cálculo integral es lo opuesto del cálculo diferencial.

Corolario 3.

4. Propuesta una relación determinada entre dos cantidades variables x y y, en el cálculo diferencial, el método nos lleva a encontrar la relación diferencial $\partial y : \partial x$; pero si, alternativamente, se trata, a partir de esta relación diferencial, de definir la relación entre estas mismas cantidades x y y, para operar esto hay que recurrir al cálculo integral”[33] [Euler 1768: 1].

[32] “Definitio 1.

1.

Calculus integralis est methodus, ex data differentialum relatione inveniendi relationem ipsarum quantitatum: et operatio, qua hoc praeftatur, integratio vocari solet”.

“Corollarium 1.

2. Cum igitur calculus differentialis ex data relatione quantitatum variabilium, relationem differentialum investigare doceat: calculus integralis methodum inversa suppeditat.

Corollarium 2.

3. Quemadmodum scilicet in Analysi perpetuo binae operationes sibi opponuntur, veluti substractio additioni, divisio multiplicationi, extractio radicum evectioni ed potestates, ita etiam similiratione calculus integralis calculo differentiali opponitur”. Euler en Intstitionum Calculi Integralis, página 1.

La siguiente nota o escolio tiene particular importancia pues aquí Euler da argumentaciones sobre la naturaleza de las funciones y los diferenciales. No se trata de argumentos novedosos en su propuesta y corresponden a los desarrollos de sus libros "Analysis Infinitorum" y "Calculi Differentialis". De la nota se desprende, por un lado, el carácter de dependencia que se reconoce entre *x* e *y* en una función y por otra, se hace alusión a la importancia que reviste la consideración del cociente $\frac{\partial x}{\partial y}$ en una relación diferencial.

"Escolio 1.

5. En el cálculo diferencial, como ya anoté, no debe entenderse la cuestión de un diferencial como algo absoluto, sino relativo; así, si *y* fuera una función *de x,* no se deduce que su diferencial es ∂y, sino su razón sobre el diferencial ∂x. Sin embargo, cuando todo el diferencial por sí mismo se iguale a nada, aunque *y* sea una función de alguna *x,* siempre tendremos $\partial y = 0$, y aunque, absolutamente, se pueda buscar una expresión más amplia. En verdad, debe estudiarse esta cuestión, cuando *x* toma incrementos infinitamente pequeños de manera que ∂x tiende a desaparecer, se deduce que la razón del incremento de la función *y* lo toma de esta ∂x*;* pero si este otro es $= 0$*,* deben investigarse estos valores interactuantes como lo propone el cálculo diferencial; así, si fuera *y = xx,* en el cálculo diferencial se expone que $\frac{\partial y}{\partial x} = 2x$, y que no es verdadera esta razón de incrementos sin el incremento de ∂x, del cual necesita ∂y para la igualación a *0*, pero, en verdad, estas genuinas nociones del diferencial llevan a enunciar expresiones comunes según las cuales se considera en forma absoluta al diferencial que son aceptables y en ocasiones llevan a la mente a aceptarlas como verdades. Correctamente, entonces, decimos: si *y =xx*, entonces $\partial y = 2x\partial x$, como no es falso decir $\partial y = 3x\partial x$ o $\partial y = 4x\partial x$, ya que estas igualdades

---

Corollarium 2.

4. Proposita relatione quaqunque inter binas quantitates variabiles *x* et *y*, in calculo differentiali methodus traditur rationem differentialium $\partial y : \partial x$ investigando: sin autem vicissim ex bac differentialium ratione ipsa quantitatum *x* et *y* relatio sit definienda, hoc opus calculo integrali tribuitur".

subsisten, pero primeramente la verdadera relación $\frac{\partial y}{\partial x} = 2x$ es la que conviene”.[34] [Euler 1768: 2].

El escolio 2 tiene otro carácter, referido a la comparación entre el cálculo construido con base en las ideas de Leibniz, del cual Euler es el más notable de sus continuadores, y el cálculo construido con base en las ideas de Newton. Tomando en cuenta su importancia histórica, lo reproducimos a continuación.

“Escolio 2.

6. Como el cálculo diferencial, entre los anglos, se llama método de fluxiones, así, entre ellos, el cálculo integral suele llamarse método de fluxiones inversas, de donde, por las fluxiones llegan a las cantidades fluentes. A las que nosotros llamamos cantidades variables los Anglos llaman con un nombre más idóneo cantidades fluentes, y a sus incrementos infinitamente pequeños, o sea a su tendencia a desaparecer, llaman fluxiones, de manera que sus fluxiones vienen siendo lo que para nosotros son los diferenciales. De tal manera que por estas opuestas formas de hablar que invalidan los usos del contrario, no esperamos exista fuerza de conciliación. En realidad, las fórmulas que usan los Anglos merecen ser imitadas, pero las que nosotros utilizamos tienen una visión de más largo alcance. En verdad, por todo lo que sus libros y otras razones predicen, no hay como conciliar su uso.”[35] [Euler 1768: 3].

---

[34] “Scholion 1.

5. In calculo differentiali iam notavi, quaestionem de differentialibus non absolute sed relative esse intelligendam, ita ut, si *y* fuerit function quaequnque ipsius *x*, non tam ipsum eius differentiale ∂y, quam eius ratio ad differentiale ∂x sit definienda. Cum enim omnia differentiala per se sint nihilo aequalia, quaequnque function *y* fuerit ipsius *x*, semper est $\partial y = 0$, neque sic quicquam amplius absolute quaeri posset. Verum quaestio ita rite proponi debet, ut dum *x* incrementum capi infinite parvum adeoque evanescens ∂x, definiatur ratio incrementi functionis *y*, quod inde capiet, ad istud ∂x: etsi enim utrumque est $= 0$, tamen ratio certa inter ea intercedit, quae in calculo differentiali ostenditur esse $\frac{\partial y}{\partial x} = 2x$, neque hanc incrementorum rationem esse veram, nisi incrementum ∂x, ex que ∂y nascitur, nihilo aequale statuatur. Verum tamen, hac vera differentialia quai absolute enunciantur, tolerari possunt, dummodo semper in mente saltem ad veritatem referantur. Recte ergo dicimus, si $y = xx$, fore $\partial y = 2x\partial x$, tam etsi falsium non esset, si quis diceret $\partial y = 3x\partial x$, vel $\partial y = 4x\partial x$, quoniam ob $\partial x = 0$ et $\partial y = 0$, hae aequalitates aeque subsisterent ; sed prima sola raione verae $\frac{\partial y}{\partial x} = 2x$ est consentanea.

[35] Scholion 2.

En el tratamiento de las siguientes ideas se profundiza en el plan con el que se desarrollarán las ideas del cálculo integral, incluyendo las integrales de las funciones de dos variables, a las que se señala como importantes en los problemas físicos, los cuales constituían gran parte del interés de Euler.

Ya en el desarrollo del libro comienza con la discusión de las integrales de funciones racionales. Euler consideraba al proceso de integración como la operación opuesta a la de diferenciación y su terminología y sus técnicas son congruentes con ello. Mostraremos cómo empleaba los recursos algebraicos para la obtención de algunas integrales, con el propósito de analizar la congruencia entre su planteamiento de que el álgebra era fundamental para entender las ideas del cálculo.

El primer capítulo de Calculi Integralis, se denomina "Sobre integración de fórmulas diferenciales racionales". Del título notamos que, aunque sus objetos matemáticos primarios son las funciones, considera que los procesos de integración se refieren a las fórmulas diferenciales de las funciones y no a las funciones mismas. Su tratamiento inicia precisamente con la definición de lo que es una fórmula diferencial racional, derivada de la función racional.

"Definición.

40. Una fórmula diferencial es racional respecto de la variable x, cuya función se busca, si su diferencial ∂x se multiplica por la misma función racional de x: o sea si X designa una función racional de la misma x, se dice que la fórmula diferencial $X\partial x$ es racional".[36] [Euler 1768: 19].

---

6. Quemadmodum calculus differentialis apud Anglos methodus fluxionum appellatur, ita calculus integralis ab iis methodus fluxionum inversa vocari solet, quandoquidem a fluxionibus ad quantitates fluentes revertitur. Quas enim nos quantitates variabiles voeamus, eas Angli nominee magis idoneo quantitates fluentes vocant, et earum incrementa infinite parva seu evanescentia fluxiones nominant, ita vt fluxiones ipsis idem sint, quod nobis differentialia. Haec diversitas loquendi ita iam usu invaluit, ut conciliatio vix unquam sit expectanda; equidem Anglos in formulis loquendi lubenter imitarer, sed signa quibus nos utimur, illorum signis anteferenda videntur. Verum cum tot iam libri utraque ratione concripti prodierint, huiusmodi conciliatio nullum usum esset habitura. »

[36] "Definitio. 40. Formula differentialis rationalis est, quando variabilis x, cujus functio quaeritur, differentiale ∂x multiplicatur in functionem rationalem ipsius x: seu si X designet functionem rationalem ipsius x, haec formula differentialis $X\partial x$ dicitur rationalis".

A la definición le siguen varios corolarios y notas o escolios, en el segundo de los cuales se establece que, a partir de una fórmula diferencial, en este caso racional, de la forma $X\,\partial x$, la función buscada viene dada por $\int X\,\partial x$.

La función buscada quedará completamente determinada considerando una constante de integración, como se establece en el resultado siguiente.

“Corolario 3

43. Si se acepta que P es, del mismo modo, una función de x, tal que su diferencial es $\partial P = X\,\partial x$, se sigue que la cantidad ¨$P+C$ tiene el mismo diferencial y de la fórmula propuesta $X\,\partial x$ la integral completa es $P+C$”.[37][Euler 1768: 19].

Establecidos estos resultados generales, se agregan dos notas extensas en las que se establecen o amplían las formas en las cuales se va a proceder con los métodos de integración, tanto de funcionales racionales como de otro tipo. Por tal motivo las reproducimos textualmente aquí.

“Escolio 1

44. De la primera parte del libro primero se refieren de este modo cuestiones relativas a funciones de la variable x, a partir de diferenciales propuestos de primer grado. Ciertamente, si la función buscada es igual a y e $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, conviene establecer que para cualquier ecuación propuesta entre tres cantidades x, y, p, desde la naturaleza de la función y, o de una ecuación entre x e y, eliminada la literal p, habría de encontrarse. Sin embargo, cuando se ve tanto en la naturaleza de la propuesta como en el análisis de nuestras fuerzas, que estas últimas pueden ser superadas, de tal manera que nunca esperemos encontrar una solución. Así pues, en los casos simples nuestras fuerzas pueden ejercitarse, entre las cuales encuentra el primer caso en el cual la función p a la que como en la sola x, se sigue una X tal que $\frac{\partial y}{\partial x} = X$, o sea $\partial y = X\,\partial x$, para lo cual se

[37] “Corollarium3. 43. Quodsi P fuerit ejusmodi functio ipsius x, ut ejus differentiale ∂P sit $= X\,\partial x$, quoniam quantitatis $P+C$ idem est differentiale, formulae propositae $X\,\partial x$ integrale completum est $P+C$.”

busca la integral $y = \int X \partial x$ que hemos colocado en la primera sección. Sin duda que en este caso, para la múltiple naturaleza de la función X parece amplísimo e implica muchas dificultades; por lo que en este capítulo hemos decidido desarrollar tan sólo cuestiones en las que esta función X sea racional; después avanzaremos hacia las irracionales de manera que progresemos hasta las trascendentes. Para acomodar esta parte, le hemos subdividido en dos secciones, en las que se incluyen otras integraciones de fórmulas simples en las que $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ se iguala con la función de la misma x, tratándose de que en otras razones, para integrar conviene enseñar que el propósito es igualar cualquiera de las mismas p, x, y. Por lo que en estas dos secciones y como primerísima exigencia, se elaboran muchos aspectos geométricos llenando la parte mayor de toda la obra.

Escolio 2

45. Más los primeros principios de integración y ya desde el mismo cálculo diferencial, se pretende que sean los mismos principios de la multiplicación y la división y los principios de extracción de raíces y también suelen ser los de la elevación de potencias. De donde, si la cantidad a diferenciarse consta de muchas partes como $P+Q-R$, su diferencial será $\partial P + \partial Q - \partial R$, o alternativamente si la fórmula diferencial consta de muchas partes como $P\partial x + Q\partial x - R\partial x$, su integral será $\int P\partial x + Q\partial x - R\partial x$, esto es, en forma singular se integran las diferentes partes. Además cuando la cantidad es aP, su diferencial sea $a\partial P$ y su fórmula diferencial sea $aP\partial x$, su integral será $a\int P\partial x$: Es claro que cuando la fórmula diferencial se multiplica por una cantidad constante la integral debe multiplicarse por la misma. Así, si la fórmula diferencial es $aP\partial x + bQ\partial x - cR\partial x$ en las cuales las funciones de la misma x se designan con las letras P, Q, R, la integral será $a\int P\partial x + b\int Q\partial x - c\int R\partial x$, así como se instituye para la integración de las fórmulas simples $P\partial x$, $Q\partial x$ y $R\partial x$. Por este hecho se añade que debe agregarse una constante arbitraria C para obtener la integral completa."[38] [Euler 1768: 19-21].

[38] "Scholion 1. 44. Ad libri primi partem priorem hujusmodi referuntur quaesquibus functiones solius variabilis x, ex data diffrentialum primis gradius relatione quaeruntur. Scilicet si functio quaesita $= y$ et

La primer integral a determinar es $\int x^n \partial x$ para todos los casos posibles, incluyendo cuando n es una fracción arbitraria. A diferencia de Leibniz que empleó la integración por partes para determinar esta integral cuando n es un número entero positivo y el teorema de la transmutación (encontrando la cuadratiz correspondiente a la curva) para el caso de la integral $\int x^{\frac{p}{q}} dx$, $q > p > 0$, Euler procedió empleando únicamente procedimientos algebraicos y generalizando los resultados obtenidos. Los casos tratados se presentan como problemas, los cuales va enumerando uno a uno y a cada cual corresponden varios corolarios y escolios o notas. El caso de la determinación de la integral $\int x^n \partial x$ corresponde al problema 1.

$\frac{\partial y}{\partial x} = p$, id pracstari oportet, ut proposita aequatione quaqunque inter ternas quantitates *x*, *y* et *p*, inde indoles functiones *y*, seu aequatio inter *x* et *y*, elisa litera *p*, inveniatur. Quaestio autem sic in genere proposita vires analyseos adeo superarevidetur, ut ejus solutio nunquam expectari queat. In casibus igitur simplicioribus vires nostrae sunt exercendae, interquos primum occurrit casus, quo *p* functioni cuipiam ipsius *x* puta *X* aequatur, ut sit $\frac{\partial y}{\partial x} = X$, seu $\partial y = X \partial x$, ideoque integrale $y = \int X \partial x$ requiratur, in quo primam sectionem collocamus. Verum et hic casus pro varia indole functionis *X* lattisime patet, ac plurimis difficultatibus implicatur: unde in hoc capite ejusmodi tantum quaestiones envolvere instituimus, in quibus esta functio *X* est rationalis: deinceps ad functiones irrationales atque adeo transcendentes progressuri. Hinc esta pars commode in duas sectiones subdivitur, in quarum altera integratio formularum simplicium, quibus $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ functioni tantum ipsius *x* aequatur, est tradenda, in altera autem rationem integrandi doceri conveniet, cum proposita fuerit aequatio quaecunque ipsarum *x*, *y* et *p*. Et cum in his duabus sectionibus, ac potissimum priore, a Geometris plurimum sit elaboratum eae maximam partem totius operis complebunt.

Scholion 2.

45. Prima autem integrationis principia ex ipso calculo differentiali sun pretenda, perinde ac principia divisionis ex multiplicatione, et principia extractionis radicum ex ratione evectionis ad potestates sumi solent. Cum igitur si quantitas differentianda ex pluribus partibus constet, ut $P + Q - R$, ejus differentiale sit $\partial P + \partial Q - \partial R$ ita vicissim si formula differentialis ex pluribus partibus constet, ut $P\partial x + Q\partial x - R\partial x$, integrale erit $\int P\partial x + Q\partial x - R\partial x$, singulis scilicet partibus seorsim integrandis. Deinde cum quantitatis aP differentiale sit $a\partial P$, formulae differentialis $aP\partial x$ integrali erit $a\int P\partial x$: scilicet per quam quantitatem constantem formula differentialis multiplicatur, per eandem integrale multiplicari debet. Ita si formula differentialis sit $aP\partial x + bQ\partial x - cR\partial x$, quaecunque functiones ipsius *x* litteris *P*, *Q* ,*R* designentur, integrali erit: $a\int P\partial x + b\int Q\partial x - c\int R\partial x$: uta it integratio tantum in singulis formulis $P\partial x$, $Q\partial x$ et $R\partial x$, sit instituenda. Hocque facto insuper adjici debet constans arbitraria *C*, ut integrale completum obtineatur.

Euler partió de la consideración respecto a que la fórmula diferencial de la función de x^m es $mx^{m-1}\partial x$ y, por lo tanto, $\int mx^{m-1}\,\partial x = m\int x^{m-1}\,\partial x = x^m$ y de aquí que $\int x^{m-1}\,\partial x = \frac{1}{m}x^m$. Haciendo ahora $m-1=n$ o, lo que es lo mismo, $m=n+1$, llegamos a $\int x^n\,\partial x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ y de aquí tenemos que $a\int x^n\,\partial x = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$. Para completar este caso se agrega una constante arbitraria *C*, lo cual deja inalterable la fórmula diferencial $ax^n\,\partial x$. "Y esta integración siempre tiene lugar sea cual sea el número que le atribuyamos al exponente *n*, ya sea positivo o negativo, ya sea entero o fraccionario, o sea también irracional.

El único caso que aquí se exceptúa es cuando el exponente es igual a *–1* o sea cuando se propone integrar la fórmula $\frac{a\,\partial x}{x}$."[39][Euler 1768: 21].

Para el caso en que $n=-1$ se hace alusión a que en el libro de cálculo diferencial ya se mostró que si lx denota el logaritmo hiperbólico de *x*, entonces la fórmula diferencial de alx es igual a $a\frac{\partial x}{x}$ y, consecuentemente, se tiene que $\int\frac{\partial x}{x}=lx$ y $\int\frac{a\,\partial x}{x}=alx$. Agregando una constante de integración C se tiene que la integral completa es $alx+C=lx^a+C$ y, finalmente, haciendo $C=lc$ para algún valor *c*, tenemos que $\int\frac{a\,\partial x}{x}=lcx^a$.

De esta manera escribe este resultado como un corolario. "Entonces para la fórmula diferencial $ax^n\,\partial x$, la integral siempre es algebraica excepto en el caso en que $n=-1$ y

[39] "Atque haec integratio semper locum habet, quicunque numerus exponenti *n* uribuatur, sive positivus sivu negativus, sive integer sive fractus, sive etam irrationalis.

Unicus casus hinc excipitur, quo est exponens $n=-1$, seu haec formula $\frac{a\,\partial x}{x}$".

se exige integrar por logaritmos, lo que nos refiere a funciones trascendentes. Es claro que la integral $\int \frac{a\,\partial x}{x} = lx + C = lcx^{a}$."[40][Euler 1768: 22].

Con la finalidad didáctica declarada de su libro, Euler ejemplifica con casos concretos de la integral $\int x^{n}\,\partial x$, desde $n = 0$ hasta $n = 5$. Después, también como un corolario del problema 1, plantea que si n es un número negativo, "poniendo $n = -m$ se tiene $\int \frac{a\,\partial x}{x^{m}} = \frac{a}{1-m} x^{1-m} + C = \frac{-a}{(m-1)x^{m-1}} + C$."[41][Euler 1768: 22]. Nuevamente ejemplifica con varios casos particulares.

En el siguiente corolario trata con los números fraccionarios. "Sea primero $n = \frac{m}{2}$, saldrá $\int a\,\partial x \sqrt{x^{m}} = \frac{2a}{m+2} x\sqrt{x^{m}} + C$."[42][Euler 1768: 22]. Nuevamente ejemplifica con algunos casos concretos.

El siguiente corolario trata el caso en el cual el radical aparece como denominador: "Póngase también $n = \frac{-m}{2}$ y tendremos

$$\int \frac{a\,\partial x}{\sqrt{x^{m}}} = \frac{2a}{2-m} \bullet \frac{x}{\sqrt{x^{m}}} + C = \frac{-2a}{(m-2)\sqrt{x^{m-2}}} + C."^{43}$$ [Euler 1768: 23].

---

[40] "Formulae ergo differentialis $ax^{n}\,\partial x$ integrale semper est algebraicum, solo exceptu casu quo $n = -1$, et integrale per logaritmos exprimitur, qui ad functionis transcendentes sunt referendi. Est scilicet $\int \frac{a\,\partial x}{x} = lx + C = lcx^{a}$ ".

[41] "... posito $n = -m$, fit $\int \frac{a\,\partial x}{x^{m}} = \frac{a}{1-m} x^{1-m} + C = \frac{-a}{(m-1)x^{m-1}} + C$ ".

[42] "Sit primo $n = \frac{m}{2}$, erit $\int \frac{a\,\partial x}{x^{m}} = \frac{a}{1-m} x^{1-m} + C = \frac{-n}{(m-1)x^{m-1}} + C$ ".

[43] "Ponatiur etiam $n = \frac{-m}{2}$, et habebitur $\int \frac{a\,\partial x}{\sqrt{x^{m}}} = \frac{2a}{2-m} \bullet \frac{x}{\sqrt{x^{m}}} + C = \frac{-2a}{(m-2)\sqrt{x^{m-2}}} + C$ ".

Después de ejemplificar con casos concretos, escribe el siguiente y último corolario del problema 1: “Si en general ponemos $n = \frac{\mu}{\nu}$, será: $\int ax^{\frac{\mu}{\nu}} \partial x = \frac{\nu a}{\mu + \nu} x^{\frac{\mu+\nu}{\nu}} + C$; o por radicales $\int \frac{a \partial x}{\sqrt[\nu]{x^{\mu}}} = \frac{\nu a}{\nu - \mu} \sqrt[\nu]{x^{\nu-\mu}} + C$.”[44][Euler 1768: 23].

Es de notarse que para este caso no se incluye ejemplo alguno.

A los 6 corolarios establecidos para el problema 1 le siguen dos notas o escolios y, notablemente, en la primera incluye, como de paso, la posibilidad de realizar cambios de variable para obtener una integral. Veámoslo a continuación.

“Escolio 1

53. Aunque se estableció que en este capítulo se tratarían sólo funciones racionales, sin embargo, se obtuvieron estas irracionalidades de manera natural, para que se puedan tratar del mismo modo que las racionales. Por lo demás, de aquí que se puedan integrar fórmulas más complicadas si para funciones de x se establece otra variable z. Por ejemplo si ponemos $x = f + gz$ se obtiene $\partial x = g \partial z$; de donde, si en lugar de a escribimos $\frac{a}{g}$ se tiene $\int a \partial z (f + gz)^n = \frac{a}{(n+1)g}(f + gz)^{n+1} + C$. Sin embargo, hay un caso singular en que $n = -1$: $\int \frac{a \partial z}{f + gz} = \frac{a}{g} l(f + gz) + C$.

Entonces, si se asienta que $n = -m$, se tiene $\int \frac{a \partial z}{(f + gz)^m} = \frac{-a}{(m-1)(f + gz)^{m-1}} + C$. Y poniendo $n = \frac{\mu}{\nu}$, nos conduce a $\int a \partial z (f + gz)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\nu a}{(\nu + \mu) g}(f + gz)^{\frac{\mu}{\nu}+1} + C$.

[44] “Si en genere ponamus $n = \frac{\mu}{\nu}$, fiet: $\int ax^{\frac{\mu}{\nu}} \partial x = \frac{\nu a}{\mu + \nu} x^{\frac{\mu+\nu}{\nu}} + C$, seu per radicalia: $\int \frac{a \partial x}{\sqrt[\nu]{x^{\mu}}} = \frac{\nu a}{\nu - \mu} \sqrt[\nu]{x^{\nu-\mu}} + C$”.

Poniendo, sin embargo, $n = -\frac{\mu}{\nu}$, se tiene $\int \frac{a\,\partial z}{(f'gz)^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{\nu a(f+gz)}{(\nu-\mu)g(f+gz)^{\frac{\mu}{\nu}}} + C$".[45][Euler 1768: 24].

Así pues, apareciendo aquí el cambio de variable, Euler establece nuevamente todas las posibilidades existentes para el caso que describimos de la integral $\int ax^n\,\partial x$. En el siguiente problema, el segundo, se generaliza el resultado del problema anterior al caso de las series infinitas de potencias de *x*, aunque posteriormente dedicará un capítulo a desarrollar las ideas correspondientes a la integración de series infinitas. En este caso el propósito es establecer la validez de las propiedades de la integral a series infinitas.

Partiendo de la función $X = \alpha + \beta x + \chi x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + etc.$, tenemos que $\int X\,\partial x = C + \alpha x + \frac{1}{2}\beta x^2 + \frac{1}{3}\chi x^3 + \frac{1}{4}\delta x^4 + \frac{1}{5}\varepsilon x^5 + \frac{1}{6}\zeta x^6 + etc.$ y, considerando exponentes fraccionarios y negativos, con la función $X = \alpha x^\lambda + \beta x^\mu + \chi x^\nu + etc.$ tendremos la integral $\int X\,\partial x = C + \frac{1}{\lambda+1}x^{\lambda+1} + \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + \frac{1}{\nu+1}x^{\nu+1} + etc.$

---

[45] "Scholion 1. 53. Quanquam in hoc capite functiones tantum rationales tratare institueram, tamen instae irrationalitates tam sponte se obtulerunt, ut perinde ac rationales tractari possint. Caeterum hinc quoque formulae magis complicatae integrari possunt, si pro *x* functiones alius eujuspiam variabilis *z* statuantur. Veluti si ponamus $x = f + gz$, erit $\partial x = g\,\partial z$: quare si pro *a* scribamu $\frac{a}{g}$, habebitur:

$$\int a\,\partial z(f+gz)^n = \frac{a}{(n+1)g}(f+gz)^{n+1} + C.$$

Casu autem singulari, quo $n = -1$: $\int \frac{a\,\partial z}{f+gz} = \frac{a}{g}l(f+gz) + C$

Tum si sit $n = -m$, fiet: $\int \frac{a\,\partial z}{(f+gz)^m} = \frac{-a}{(m-1)(f+gz)^{m-1}} + C$.

Ac posito $n = \frac{\mu}{\nu}$, prodit: $\int a\,\partial z(f+gz)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\nu a}{(\nu+\mu)g}(f+gz)^{\frac{\mu}{\nu}+1} + C$

Posito autem $n = -\frac{\mu}{\nu}$, obtinetur, $\int \frac{a\,\partial z}{(f'gz)^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{\nu a(f+gz)}{(\nu-\mu)g(f+gz)^{\frac{\mu}{\nu}}} + C$.

Posteriormente Euler considera las funciones racionales de la forma $\frac{M}{N}$ y desarrolla una serie de técnicas para descomponer las funciones en fracciones parciales, incluyendo algunos casos que involucran funciones trigonométricas. Veámoslo con algunos ejemplos.

Para el caso de la integral $y = \int \frac{(A+Bx)\partial x}{a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2}$, primero considera el caso de $\int \frac{-2ab\cos\varsigma\,\partial x + 2b^2x\,\partial x}{a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2}$, el cual, por un simple cambio de variable nos da como resultado $l(a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2)$. Ahora multipliquemos por $\frac{B}{2b^2}$ y tomemos

$$y - \frac{B}{2b^2} l(a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2) =$$
$$= \int \frac{(A+Bx)\,\partial x}{a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2} - \frac{B}{2b^2}\int \frac{-2ab\cos\zeta + 2b^2x^2}{a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2}\partial x$$

cuyo desarrollo nos lleva a $y - \frac{B}{2b^2} l(a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2) = \int \frac{\left(A + \frac{Ba\cos\zeta}{b}\right)\partial x}{a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2}$

y, haciendo $A + \frac{Ba\cos\zeta}{b} = C$, la integral puede escribirse como

$\int \frac{C\,\partial x}{a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2}$, la cual a su vez podemos escribir como

$\int \frac{C\,\partial x}{a^2 sen^2\zeta + (bx - a\cos\zeta)^2}$. Ahora hacemos el cambio de variable

$bx - a\cos\zeta = avsen\zeta$, obteniendo por una parte $\partial x = \frac{a\,\partial v\, sen\,\zeta}{b}$ y, por otra,

$(bx - a\cos\zeta)^2 = a^2v^2sen^2\,\zeta$, tenemos que la integral $\int \frac{C\,\partial x}{a^2 sen^2\zeta + (bx - a\cos\zeta)^2}$ queda así: $\int \frac{Ca\,\partial v\, sen\,\zeta}{b(a^2\, sen^2\,\zeta + a^2\, v^2\, sen^2\,\zeta)} = \int \frac{C\,a\,\partial v\, sen\,\zeta}{b\,a^2\, sen^2\,\zeta(1+v^2)} = \frac{C}{ab\, sen\,\zeta}\int \frac{\partial v}{1+v^2}$ y, como en el libro I de Calculi Differentialis se estableció que si $u = \arctan z$, entonces $\partial u = \frac{\partial z}{1+z^2}$, tenemos que $\int \frac{\partial v}{1+v^2} = \arctan v = \arctan \frac{bx - a\cos\zeta}{a\,sen\,\zeta}$ y, considerando que $C = A + \frac{Ba\cos\zeta}{b}$, la integral es $\frac{Ab + Ba\cos\zeta}{ab^2\,sen\,\zeta}\arctan\frac{bx - a\cos\zeta}{a\,sen\,\zeta}$. Finalmente llegamos a

$$\int \frac{(A+Bx)\partial x}{a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2} =$$
$$= \frac{B}{2b^2} l(a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2) + \frac{Ab + Ba\cos\zeta}{ab^2 sen\,\zeta}\arctan\frac{bx - a\cos\zeta}{a\,sen\,\zeta}$$

a la cual se agrega una constante arbitraria *C*.

Haciendo consideraciones sobre los posibles valores de *x* (nuestros actuales límites de integración) o sobre los valores de los ángulos, Euler aplica este resultado para obtener diferentes integrales. Primero considera el caso en el cual la integral es 0, con $x = 0$, obteniendo el valor de la constante de integración, la cual queda $C = -\frac{B}{2b^2} la^2$, de tal forma que al sustituirla y agregarla en la parte logarítmica, ésta se expresa como $\frac{B}{b^2} l \frac{\sqrt{a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2}}{a}$.

Si $B = 0$ tendremos $\int \frac{A\partial x}{a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2} = \frac{A}{ab\,sen\,\zeta}\arctan\frac{bx\,sen\,\zeta}{a - bx\cos\zeta} + C$. Ahora, tomando valores para los ángulos, determina algunas integrales como las que se ejemplifican en las siguientes líneas.

Tomando $\zeta = 90^0$, $\cos\zeta = 0$, $sen\,\zeta = 1$ y de aquí

$$\int \frac{(A+Bx)\partial x}{a^2 + b^2x^2} = \frac{B}{b^2} l \frac{\sqrt{a^2 + b^2x^2}}{a} + \frac{A}{ab}\arctan\frac{bx}{a} + C$$

Si $\zeta = 60^0$, tenemos $\cos\zeta = \frac{1}{2}$, $sen\,\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, y

$$\int \frac{(A+Bx)\partial x}{a^2 - abx + b^2x^2} = \frac{B}{b^2} l \frac{\sqrt{a^2 - abx + b^2x^2}}{a} + \frac{2Ab + Ba}{ab^2\sqrt{3}} \arctan \frac{bx\sqrt{3}}{2a - bx}$$

Si $\zeta = 120^0$, entonces $\zeta = -\frac{1}{2}$, $sen\,\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y

$$\int \frac{(A+Bx)\partial x}{a^2 + abx + b^2x^2} = \frac{B}{b^2} l \frac{\sqrt{a^2 + abx + b^2x^2}}{a} + \frac{2Ab - Ba}{ab^2\sqrt{3}} \arctan \frac{bx\sqrt{3}}{2a + bx}$$

Ahora, si tomamos $\zeta = 0$, tendremos $\cos\zeta = 1$ y $sen\,\zeta = 0$. Pero si tomamos un valor de ζ infinitamente pequeño, Euler establece entonces que $\cos\zeta = 1$, $sen\,\zeta = \zeta$, y la parte logarítmica será $\frac{B}{b^2} l \frac{\sqrt{a^2 - 2abx + b^2x^2}}{a} = \frac{B}{b^2} l \frac{\sqrt{(a-bx)^2}}{a} = \frac{B}{b^2} l \frac{a-bx}{a}$ y la otra parte será $\frac{Ab+Ba}{ab^2\zeta} \arctan \frac{bx\zeta}{a-bx} = \frac{(Ab+Ba)x}{ab(a-bx)}$ pues siendo ζ infinitamente pequeño, $\frac{bx\zeta}{a-bx}$ también lo es y entonces $\arctan \frac{bx\zeta}{a-bx} = \frac{bx\zeta}{a-bx}$.

Aplicando estos resultados a casos concretos Euler obtiene las siguientes integrales:

$$\int \frac{(A+Bx)\partial x}{(a-bx)^2} = \frac{B}{b^2} l \frac{a-bx}{a} + \frac{(Ab+Ba)x}{ab(a-bx)} + Const.$$

Con esta integral, descomponemos la función integrando en fracciones parciales obteniendo $\frac{A+Bx}{(a-bx)^2} = -\frac{B}{b(a-bx)} + \frac{Ab+Ba}{b(a-bx)^2}$ y de aquí

$$\int \frac{-B\,\partial x}{b(a+bx)} = \int \frac{(A+Bx)\partial x}{(a-bx)^2} - \frac{\int (Ab+Ba)\,\partial x}{b(a-bx)^2} = \int \frac{(-Ba+Bbx)\partial x}{b(a-bx)^2} = \frac{1}{b} \int \frac{(-Ba+Bbx)\partial x}{(a-bx)^2}$$

$$= \frac{1}{b}\frac{Bb}{b^2} l \frac{a-bx}{a} + \frac{1}{b}\frac{(-(Ba)b + (Bb)a)x}{ab(a-bx)} = \frac{B}{b^2} l(a-bx) - \frac{B}{b^2} la + C$$

Análogamente procede con la otra fracción parcial para obtener

$$\int \frac{(Ab+Ba)\,\partial x}{b(a-bx)^2} = \frac{Ab+Ba}{b^2(a-bx)} - \frac{Ab+Ba}{ab^2} = \frac{(Ab+Ba)x}{ab(a-bx)}$$

Una vez más Euler retoma el tema de las series infinitas, pero ahora para funciones del tipo aquí analizado y con el mismo procedimiento de asumir que la integral de la serie es la serie de las integrales.

Posteriormente, otro caso en el cual aparece el trinomio $a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2$ es la integral $\int \frac{(A+Bx)\partial x}{(a^2 - 2ab\cos\zeta + b^2x^2)^{n+1}}$. Una vez más es difícil seguir el curso de las manipulaciones algebraicas por él usadas y más difícil aún es el comprender las razones para seguir estos procedimientos, de tal forma que uno pudiera emplearlos creativamente en situaciones diferentes a las mostradas. En las siguientes líneas desarrollamos la solución encontrada por Euler a la integral y su aplicación a la resolución de otros casos.

Para abreviar, inicia denotando por X a $a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2$, de tal forma que la integral en cuestión es $\int \frac{(A+Bx)\partial x}{X^{n+1}} = y$. Asimismo, $\partial X = -2ab\partial x\cos\zeta + 2b^2x\partial x.$ Ahora hacemos $\partial \frac{C+Dx}{X^n} = \frac{DX^n\partial x - nX^{n-1}(C+Dx)\partial X}{X^{2n}} = -\frac{n(C+Dx)\partial X}{X^{n+1}} + \frac{D\partial x}{X^n}.$ Entonces $\frac{C+Dx}{X^n} = \int -\frac{n(C+Dx)(-2ab\cos\zeta + 2b^2x)\partial x}{X^{n-1}} + \int \frac{D\partial x}{X^n}$, cuyo desarrollo es $\int \frac{2nCab\cos\zeta - 2nCb^2x + 2nDabx\cos\zeta - 2nDb^2x^2}{X^n} + \int \frac{D\partial x}{X^n}$. Tomando ahora la suma $y + \frac{C+Dx}{X^n}$, esto es, $\int \frac{(A+Bx)\partial x}{X^{n+1}} + \int \partial \frac{C+Dx}{X^n}$, nos da

$$\int \frac{\partial x[A + 2nCab\cos\zeta + x(B + 2nDab\cos\zeta - 2nCb^2) - 2nDb^2x^2]}{X^{n+1}} + \int \frac{D\partial x}{X^n}$$

Hagamos ahora $A + 2nCab\cos\zeta = -2nDa^2$ y

$$B + 2nDab\cos\zeta - 2nCb^2 = 4nDab\cos\zeta$$

Despejando en esta última tenemos que $B - 2nCb^2 = 2nDab\cos\zeta$ y de aquí $2nDa = \frac{B - 2nCb^2}{b\cos\zeta}$ y, de la primera, tenemos que $2nDa = \frac{-A - 2nCab\cos\zeta}{a}$. Igualamos estas dos expresiones: $\frac{B - 2nCb^2}{b\cos\zeta} = \frac{-A - 2nCab\cos\zeta}{a}$ y desarrollamos para obtener

$Ba - 2nCab^2 + Ab\cos\zeta + 2nCab^2\cos^2\zeta = Ba + Ab\cos\zeta - 2nCab^2\, sen^2\,\zeta = 0$.

Despejando para C tenemos $C = \dfrac{Ba + Ab\cos\zeta}{2nab^2\, sen^2\,\zeta}$ y, sustituyendo este valor en la expresión $B - 2nCb^2$ tenemos $B - 2nCb^2 = B - 2nb^2\dfrac{Ba + Ab\cos\zeta}{2nab^2\, sen^2\,\zeta} = \dfrac{Ba\,sen^2\,\zeta - Ba - Ab\cos\zeta}{a\,sen^2\,\zeta}$ la cual podemos escribir como $B - 2nCb^2 = \dfrac{-Ab\cos\zeta - Ba\cos^2\zeta}{a\,sen^2\,\zeta}$. Como, por otra parte tenemos que $B - 2nCb^2 = 2nDab\cos\zeta$, igualamos y despejamos para D, obteniendo $D = \dfrac{-Ab - Ba\cos\zeta}{2na^2b\,sen^2\,\zeta}$. Regresando ahora a considerar $y + \dfrac{C + Dx}{X^n}$, la cual habíamos escrito como

$$y + \frac{C + Dx}{X^n} = \int\frac{\partial x[A + 2nCab\cos\zeta + x(B + 2nDab\cos\zeta - 2nCb^{2=}) - 2nDb^2x^2]}{X^{n+1}} + \int\frac{D\,\partial x}{X^n}.$$

Sustituimos por los nuevos cambios de variable para obtener

$$y + \frac{C + Dx}{X^n} = \int\frac{\partial x[-2nDa^2 + x(4nDab\cos\zeta) - 2nDb^2x^2]}{X^{n+1}} + D\int\frac{\partial x}{X^n}$$

$$= \int\frac{\partial x 2nD[-a^2 + 2abx\cos\zeta - b^2x^2}{X^{n+1}} + D\int\frac{\partial x}{X^n} = \int\frac{\partial x 2nD(-X)}{X^{n+1}} + D\int\frac{\partial x}{X^n} = (1 - 2n)D\int\frac{\partial x}{X^n}$$

Entonces $y = \displaystyle\int\frac{(A + Bx)\partial x}{X^{n+1}} = \frac{-C - Dx}{X^n} - (2n - 1)D\int\frac{\partial x}{X^n}$ y, sustituyendo C y D tenemos

$$\int\frac{(A + Bx)\partial x}{X^{n+1}} = \frac{-Ba^2 - Aab\cos\zeta + (Ab^2 + Bab\cos\zeta)x}{2na^2b^2\,sen^2\,\zeta} + \frac{(2n - 1)(Ab + Ba\cos\zeta)}{2na^2b\,sen^2\,\zeta}\int\frac{\partial x}{X^n}$$

De esta manera, si conocemos $\displaystyle\int\frac{\partial x}{X^n}$, podemos determinar $y = \displaystyle\int\frac{(A + Bx)\partial x}{X^{n+1}}$.

Veamos algunos de los casos que son señalados explícitamente en “Institutiones calculi integralis”. Partiendo de que ya resolvimos previamente, en el problema anterior, que si $X = a^2 - 2ab\cos\zeta + b^2x^2$, entonces $\displaystyle\int\frac{\partial x}{X} = \frac{1}{ab\,sen\,\zeta}\arctan\frac{bx\,sen\,\zeta}{a - bx\cos\zeta} + C$, entonces

$$\int\frac{(A + Bx)\partial x}{X^2} = \frac{-Ba^2 - Aab\cos\zeta + (Ab^2 + Bab\cos\zeta)x}{2a^2b^2\,sen^2\,\zeta\,X} +$$

$$+\frac{Ab + Ba\cos\zeta}{2a^3b^2\, sen^3\,\zeta}\arctan\frac{bx\,sen\,\zeta}{a - bx\cos\zeta} + C\,.$$

Haciendo $B = 0$ y $A = 1$, determina entonces las siguientes integrales

$$\int\frac{\partial x}{X^2} = \frac{-a\cos\zeta + bx}{2a^2b\,sen^2\,\zeta\,X} + \frac{1}{2a^3b\,sen^3\,\zeta}\arctan\frac{bx\,sen\,\zeta}{a - bx\cos\zeta} + C$$

$$\int\frac{\partial x}{X^3} = \frac{-a\cos\zeta + bx}{4a^2b\,sen^2\,\zeta\,X^2} + \frac{3}{4a\,sen^2\zeta}\int\frac{\partial x}{X^2} =$$

$$= \frac{-a\cos\zeta}{4a^2b\,sen^2\,\zeta\,X^2} + \frac{3(-a\cos\zeta + bx)}{8a^4b\,sen^4\,\zeta} + \frac{3}{8a^4b\,sen^5\,\zeta}\arctan\frac{bx\,sen\,\zeta}{a - bx\cos\zeta} + C$$

$$\int\frac{\partial x}{X^4} = \frac{-a\cos\zeta + bx}{6a^2b\,sen^2\,\zeta\,X^3} + \frac{5(-a\cos\zeta + bx)}{24a^4b\,sen^4\,\zeta X^2} + \frac{15(a - \cos\zeta + bx)}{48a^6b\,sen^6\zeta\,X} +$$

$$+\frac{15}{48a^7b\,sen^7\,\zeta}\arctan\frac{bx\,sen\,\zeta}{a - bx\cos\zeta}$$

Partiendo nuevamente de $X = a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2$ y, consecuentemente con diferencial $\partial X = (-2ab\cos\zeta + 2b^2x)\,\partial x$, Euler transforma ahora la integral en cuestión, escribiendo $\int\frac{(A + Bx)\partial x}{X^{n+1}} = \frac{1}{2b^2}\int\frac{2Ab^2\,\partial x + 2Bb^2x\,\partial x - 2Bab\,\partial x\cos\zeta + 2Bab\,\partial x\cos\zeta}{X^{n+1}}$, la cual es posible escribir mediante

$$\frac{1}{2b^2}\left[\int\frac{B(-2ab\cos\zeta + 2b^2x)\,\partial x}{X^{n+1}} + \frac{2b(Ab + Ba\cos\zeta)\,\partial x}{X^{n+1}}\right] =$$

$= \frac{1}{2b^2}\int\frac{B\,\partial X}{X^{n+1}} + \frac{1}{b}\int\frac{(Ab + Ba\cos\zeta)\,\partial x}{X^{n+1}}$, y, tomando en cuenta que $\int\frac{\partial X}{X^{n+1}} = -\frac{1}{nX^n}$ llega a establecer que $\int\frac{(A + Bx)\partial x}{X^{n+1}} = \frac{-B}{2nb^2X^n} + \frac{Ab + Ba\cos\zeta}{b}\int\frac{\partial x}{X^{n+1}}$.

Con este desarrollo y el empleo de descomposición en fracciones parciales, logra obtener otras integrales, entre las cuales están las siguientes:

$$\int\frac{(A + Bx)\partial x}{(a + bx)^2} = \frac{(Ab - Ba)x}{ab(a + bx)} + \frac{B}{b^2}\,l\,\frac{a + bx}{a} + C$$

$$\int\frac{(A + Bx)\partial x}{(a + bx)(f + gx)} = \frac{B}{2bg}\,l\,\frac{(a + bx)(f + gx)}{af} + \frac{2Abg - B(ag + bf)}{abg(bf - ag)}\,l\,\frac{f(a + bx)}{a(f + gx)} + C$$

$$\int \frac{(A+Bx)\partial x}{a^2-b^2x^2} = \frac{-B}{2b^2} l \frac{a^2-b^2x^2}{a^2} + \frac{A}{2ab} l \frac{a+bx}{a-bx} + C$$

$$\int \frac{A\partial x}{a^2.-b^2x^2} = \frac{A}{2ab} l \frac{a+bx}{a-bx} + C$$

$$\int \frac{Bx\partial x}{a^2-b^2x^2} = \frac{-B}{2b^2} l \frac{a^2-b^2x^2}{a^2} = \frac{B}{2b^2} l \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} + C$$

$$\int \frac{(A+Bx)\partial x}{a^2+b^2x^2} = \frac{A}{ab} \arctan \frac{bx}{a} + C$$

$$\int \frac{Bx\,\partial x}{a^2+b^2x^2} = \frac{B}{2b^2} l \frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a} + C$$

El caso de las funciones irracionales es más complejo que el de las funciones racionales y para determinar sus integrales, Euler hizo, consecuentemente, manipulaciones algebraicas más complicadas, que en principio resultan difíciles de hacer o evaluar su efectividad y tienen sus antecedentes en las manipulaciones algebraicas hechas en “Analysin Infinitorum”. Para concluir nuestro tratamiento sobre la noción de integral en Euler, ilustraremos a continuación algunos casos, la mayoría de los cuales corresponden a ingeniosos cambios de variable.

El primer caso de integral irracional que trató es $\int \frac{\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x}}$. Primero consideró el caso cuando $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(a+bx)(f+gx)}}$.

Para esta integral empleó, según las circunstancias, dos cambios de variable. El primero de ellos es $(a+bx)(f+gx) = (a+bx)^2 z^2$ y, dividiendo, obtiene $z^2 = \frac{(a+bx)(f+gx)}{(a+bx)^2} = \frac{f+gx}{a+bx} = bgx+bf$. De esta manera despeja para x: $x = \frac{f-z^2}{bz^2-g}$ y,

Sustituyendo, $(a+bx)(f+gx) = \left(a+b\frac{f-z^2}{bz^2-g}\right)\left(f+g\frac{f-z^2}{bz^2-g}\right) = \frac{(bf-ag)^2 z^2}{(bz^2-g)^2}$

De esta expresión calcula el diferencial $\partial x = \dfrac{2(ag-bf)z\partial z}{\left(bz^2-g\right)^2}$ y, por otra parte, considera $\sqrt{(a+bx)(f+gx)} = \sqrt{\dfrac{\left(bf-ag\right)^2 z^2}{\left(bz^2-g\right)^2}} = \dfrac{\left(bf-ag\right)z}{\left(bz^2-g\right)}$. De aquí obtiene ahora el diferencial $\partial y = \dfrac{\partial x}{\sqrt{(a+bx)(f+gx)}} = \dfrac{2(ag-bf)z\partial z(bz^2-g)}{(bz^2-g)^2(bf-ag)z} = \dfrac{2\partial z}{g-bz^2}$. Pero esta integral ya había sido previamente resuelta por Euler, refiriéndonos a aquella que escribimos como $\int\dfrac{A\partial x}{a^2-b^2x^2} = \dfrac{A}{2ab}l\dfrac{a+bx}{a-bx}+C$. Entonces $\int\dfrac{2\partial z}{g-bz^2} = \dfrac{1}{\sqrt{bg}}l\dfrac{\sqrt{g}+z\sqrt{b}}{\sqrt{g}-z\sqrt{b}}+C$. De forma similar, considerando que $\int\dfrac{A\partial x}{a^2+b^2x^2} = \dfrac{A}{ab}\arctan\dfrac{bx}{a}+C$, tenemos que la integral $\int\dfrac{A\partial z}{g+bz^2} = \dfrac{A}{\sqrt{bg}}\arctan\dfrac{z\sqrt{b}}{\sqrt{g}}+C$.

Aplicando este resultado al caso $\int\dfrac{\partial x}{\sqrt{(a+bx)(f+gx)}}$, tenemos que esta integral es igual a $\dfrac{1}{\sqrt{bg}}l\dfrac{\sqrt{g(a+bx)}+\sqrt{b(f+gx)}}{\sqrt{g(a+bx)}-\sqrt{b(f+gx)}}+C$.

Haciendo adecuaciones a cada caso particular, obtiene también las siguientes integrales:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{(bx-a)(f+gx)}} = \frac{1}{\sqrt{bg}}l\frac{\sqrt{g(bx-a)}+\sqrt{b(f+gx)}}{\sqrt{g(bx-a)}-\sqrt{b(f+gx)}}+C$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{(bx-a)(gx-f)}} = \frac{1}{\sqrt{bg}}l\frac{\sqrt{g(bx-a)}+\sqrt{b(gx-f)}}{\sqrt{g(bx-a)}-\sqrt{b(gx-f)}}+C$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{(a-bx)(f-gx)}} = \frac{-1}{\sqrt{bg}}l\frac{\sqrt{g(a-bx)}+\sqrt{b(f-gx)}}{\sqrt{g(a-bx)}-\sqrt{b(f-gx)}}+C$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{(a-bx)(f+gx)}} = \frac{2}{\sqrt{bg}}\arctan\frac{\sqrt{b(f+gx)}}{\sqrt{g(a-bx)}}+C$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{(a-bx)(gx-f)}} = \frac{2}{\sqrt{bg}}\arctan\frac{\sqrt{b(gx-f)}}{\sqrt{g(a-bx)}}+C$$

El siguiente cambio de variable surge de considerar $\partial y = \dfrac{\partial x}{\sqrt{a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2}}$, haciendo $b\ x^2 - 2ab\cos\zeta + a^2 = (bx - az)^2$. De aquí desarrolla y despeja *x*, obteniendo que $x = \dfrac{a(1-z^2)}{2b(\cos\zeta - z)}$ y, diferenciando, $\partial x = \dfrac{a\partial z(1 - 2z\cos\zeta + z^2)}{2b(\cos\zeta - z)^2}$. Por otro lado, $\sqrt{b^2x^2 - 2abx\cos\zeta + a^2} = \sqrt{(bx-az)^2} = bx - az$ y, sustituyendo el valor de *x*, tenemos ahora $\sqrt{b^2x^2 - 2abx\cos\zeta + a^2} = \dfrac{a(1-2z\cos\zeta + z^2)}{2(\cos\zeta - z)}$.

Regresando al diferencial de *y*, ahora obtenemos lo siguiente:

$$\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2}} = \frac{a\partial z(1-2z\cos\zeta + z^2)2(\cos\zeta - z)}{2b(\cos\zeta - z)^2 a(1-2z\cos\zeta + z^2)} = \frac{\partial z}{b(\cos\zeta - z)}.$$

Usando ahora un cambio de variable sencillo para $b(\cos\zeta - z)$, llegamos a la integral $\int \partial y = y = \int \dfrac{\partial z}{b(\cos\zeta - z)} = -\dfrac{1}{b}l(\cos\zeta - z)$. Ahora, despejando z de la expresión $b\ x^2 - 2ab\cos\zeta + a^2 = (bx - az)^2$, tenemos $z = \dfrac{1}{a}(bx - \sqrt{b^2x^2 - 2abx\cos\zeta + a^2}$ y, de aquí llegamos finalmente a $y = -\dfrac{1}{b}l\dfrac{a\cos\zeta - bx + \sqrt{b^2x^2 - 2abx\cos\zeta + a^2}}{a} + C_1$ o, haciendo $C = C_1 + \dfrac{la}{b}$, $y = -\dfrac{1}{b}l\left(a\cos\zeta - bx + \sqrt{a^2 - 2ab\cos\zeta + b^2x^2}\right) + C$.

De esta manera, la resolución de la integral $\int \dfrac{\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}}$ que nos planteamos al origen, se hace considerando $\alpha = a^2$, $b = \sqrt{\gamma}$ y $a\cos\zeta = \dfrac{-\beta}{2\sqrt{\gamma}}$, con lo cual obtenemos que

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}l\left(\frac{-\beta}{2\sqrt{\gamma}} - x\sqrt{\gamma} + \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}\right) + C_*$$

$$= -\frac{\beta}{2} - \gamma x + \sqrt{\gamma\left(\alpha + \beta x + \gamma x^2\right)} + C$$

Similarmente, considerando los dos tipos de cambios de variable realizados, obtiene que $\int \frac{\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \arctan \frac{2\sqrt{\gamma(\alpha + \beta x - \gamma x^2)}}{\beta - 2\gamma x} + C$.

3.5 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS EN EULER

Situaciones:

Identificamos las siguientes tres situaciones problémicas fundamentales en los trabajos de Euler:

- Generalización de los conceptos, técnicas y procedimientos del cálculo diferencial e integral, para abarcar todo tipo de variables conocidas, sin limitarse al tratamiento de las curvas. Dado que los intereses de Euler abarcaban un numeroso cúmulo de problemas tanto de física como de matemáticas, entre otros el estudio de los fluidos, la mecánica y la hidrodinámica, se ocupó de aplicar las técnicas del cálculo a situaciones diversas en las cuales el tratamiento de las curvas era insuficiente y extendió los alcances del cálculo a las variables generalizadas.

  Aunque Leibniz, los hermanos Bernoulli, L'Hospital, y otros habían empleado las técnicas del cálculo en la resolución de problemas físicos y modelado situaciones por medio de las ecuaciones diferenciales, sus procedimientos se realizaban en estrecha vinculación con los métodos geométricos, dada las características de los elementos fundamentales del cálculo de Leibniz.

  Euler, por su parte, centró la atención en la relación entre las variables involucradas en las situaciones y tomó como eje fundamental del cálculo y/o análisis a las funciones.

- Fundamentación del cálculo y/o análisis por medio de las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes para las variables generalizadas. Para lograr esta fundamentación Euler no sólo retomó el carácter pragmático de Leibniz, sino que tomó como eje de análisis su concepción del mundo y de la materia, de la continuidad y la completez.

  Asimismo, eliminó algunas de las inconsistencias del cálculo de Leibniz, como la indeterminancia de las variables, considerando la necesidad de establecer relaciones de dependencia entre las variables y asignándole una especial importancia a los cocientes diferenciales. Por otro lado, eliminó también los diferenciales de orden superior.

- Sistematización de los resultados del cálculo y/o análisis, partiendo de los elementos primarios o elementales hacia los resultados más complejos. Su preocupación por organizar el cálculo y/o análisis lo condujo a plantearse la mejor forma para hacerlo, encontrando en el álgebra el recurso adecuado, toda vez que los principios algebraicos eran reconocidos como válidos y fundamentar el cálculo con base en el álgebra conduciría a darle validez a las técnicas del cálculo.

  El tratamiento que dio Euler a los conceptos del cálculo fue tan preponderantemente algebraico, que en el primer volumen dedicado al cálculo integral, no aparece una sola gráfica o dibujo.

  Con tal organización de los contenidos matemáticos, se inauguró una etapa de desgeometrización de la enseñanza de las matemáticas que aún perdura en nuestros días, a pesar del reconocimiento del papel que juega la geometría en el desarrollo del pensamiento matemático y la importancia que actualmente se atribuye a la visualización en el aprendizaje de las matemáticas.

- Sistematización de los resultados del cálculo y/o análisis con el propósito de presentarlos didácticamente a los estudiantes, centrando primero la atención en los recursos algebraicos y el tratamiento del infinito, para después aplicarlo en el cálculo, primordialmente en el cálculo integral, en donde los recursos algebraicos juegan un papel central.

  Con este comentario queremos enfatizar el carácter didáctico de la propuesta de Euler, en la que no sólo se procuraba la organización del cálculo y/o análisis con el propósito de desarrollarlo en tanto disciplina, sino también en organizarlo con fines de enseñanza. El interés por la presentación didáctica le conduce a anteponer la enseñanza del álgebra a la del cálculo. En este aspecto también se instaura una forma de organizar el discurso matemático escolar, en el que la seriación de cursos y temas de las llamadas matemáticas superiores tienen como antecedente la revisión de contenidos de álgebra y con el estilo de Euler, esto es, con poco uso de los recursos visuales y geométricos.

Lenguaje:

- Para poder hacer el estudio de las variables generalizadas y aplicarles las técnicas del cálculo, Euler centró la atención en la noción de función y el lenguaje que emplea a lo largo de sus publicaciones es el de las funciones. Las nociones de diferencial e integral son ahora referidas a las funciones. Algunas de las variables geométricas de Leibniz pueden concebirse como casos particulares de funciones, pero ahora la referencia de los diferenciales y las integrales está referido a las funciones y no a las curvas.

  El tratamiento de las curvas es visto como una aplicación del análisis y, desde la organización de "Analisyn Infinitorum", el segundo de los libros tiene por tema la geometría analítica, concebido como aplicación de los conceptos y procedimientos discutidos en el primer volumen.

- Los elementos que se utilizan para la definición de las funciones son las cantidades constantes y las cantidades variables. De estas últimas se distinguen a las variables independientes de las dependientes, asignándole a las variables dependientes la categoría de funciones, al caracterizar a estas últimas como la expresión analítica que relaciona a la variable dependiente con la variable independiente.

  Esta definición es una adecuación de la que previamente había formulado su maestro, Johann Bernoulli, en la que se hablaba de cantidades compuestas en lugar de expresiones algebraicas. Si se revisan los ejemplos de funciones que se trataban en los trabajos de Bernoulli se puede constatar que la forma de crear "cantidades compuestas" es por medio de expresiones algebraicas.

  En ese sentido, la definición de Euler es prácticamente la misma, pero al incluir la frase "expresión analítica", hizo congruente la definición con su propuesta de hacer reposar el cálculo en el álgebra y, por otra parte, orientó la forma de concebir a las funciones hacia aquellas relaciones que podían establecerse por medio de las expresiones algebraicas, lo cual, al menos en la forma de expresarlo, no estaba en la definición de Bernoulli.

  La diferenciación entre las definiciones de Bernoulli es también representativa de las etapas de transformación de los objetos matemáticos. En el caso de Bernoulli las "cantidades compuestas" analíticas aparecían como producto de la modelación de curvas y de fenómenos físicos, de tal forma que, una vez reconocidas en su uso frecuente, le permitieron distinguirlas y definirlas como funciones, pero su tratamiento fue más de corte pragmático, similar a lo que Douady denomina “herramienta”. En el caso de Euler, por su parte, reconociendo la aparición constante de las expresiones analíticas en las funciones, las toma como el eje o elemento esencial y, abstrayéndose de las situaciones de origen, genera una nueva forma de concebir a las funciones, ubicándolas dentro de la estructura matemática.

- El lenguaje de Euler es el del álgebra y las funciones mismas son definidas por medio de las expresiones algebraicas, como el vehículo para establecer la relación de las variables independientes y dependientes.

  Este lenguaje algebraico está presente a todo lo largo de su obra, no sólo en lo que se refiere al estudio de los elementos básicos de álgebra. Así, al concebir a los procesos de integración como inversos de los de diferenciación, sus métodos de determinación de integrales son fundamentalmente analíticos. Consecuentemente, es natural que en su propuesta de organización del cálculo se proponga como antecedente el estudio de los conocimientos básicos del álgebra, los cuales se constituyen, por una parte, en el lenguaje natural del cálculo y, por otra, se privilegian las técnicas algebraicas para la determinación de diferenciales e integrales.

- Las funciones se clasifican en atención a diversos parámetros o características, apareciendo las funciones simples y compuestas, inversas, algebraicas y trascendentes, racionales e irracionales, univaluadas y multivaluadas.

  La caracterización de las funciones en dependencia de algunas propiedades comunes, condujo consecuentemente, a la creación de un lenguaje propio con el cual distinguir los diversos tipos de funciones. Así, adicionales a las que ya escribimos, se hablaba también de funciones periódicas, funciones pares e impares, funciones exponenciales, funciones logarítmicas, etc.

- En el tratamiento de Euler se hacen frecuentes referencias a las cantidades infinitamente pequeñas y a las infinitamente grandes, las cuales no sólo se relacionan con las nociones de diferencial e integral, sino que se aceptan como tales y se les manipula como en el caso del estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas.

- También se hace referencia a la necesidad de expresar las funciones de diferentes maneras, por medio de cambios de variable y representación en serie de potencias. Una vez más, para hacer estas transformaciones se siguen procedimientos algebraicos que simplifican algunas funciones, o se transforman para poder diferenciarlas o integrarlas.
- Se emplea también el término genérico de fórmula diferencial. En concordancia con su visión algebraica y su concepción de la integración como el proceso inverso de la diferenciación, Euler planteaba que lo que se integraba no eran diferenciales, sino fórmulas diferenciales.

Procedimientos:

- Estudio y caracterización de las funciones. Por la importancia que se le atribuye a la noción de función, el tratamiento de las mismas, antes de abordar las ideas del cálculo, es sumamente extenso.

  El manejo de funciones conduce a Euler a desarrollar un álgebra funcional, en el cual las transformaciones que realiza sobre las expresiones analíticas son, en mucho, las que persisten hasta la actualidad en los cursos de álgebra y de cálculo.
- Extensión de resultados para números enteros y fraccionarios hacia los irracionales e incluso hacia los números complejos, como en el caso de la diferenciación e integración de funciones de la forma $f(z) = A z^{\alpha} + B z^{\beta} + C z^{\gamma} + D z^{\delta} + \cdots$, donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, etc.$ son números cualesquiera.

  La posibilidad de integrar término a término una serie infinita, por ejemplo, es una generalización del caso de una suma finita, en donde el procedimiento es válido. Pero Euler no probó de ninguna forma la validez del caso de la suma infinita, por lo que, aunque no lo declare explícitamente, aquí hizo uso de la ley de continuidad de Leibniz, como lo hizo en otros casos, entre ellos el que comentamos a continuación.
- Desarrollo de funciones en series de potencias por medio de procedimientos fundamentalmente algebraicos. Aunque Euler conocía los trabajos de Taylor sobre

representación de funciones mediante series de potencias, recurre a procedimientos estrictamente algebraicos, consistente con su visión de presentar las funciones sin hacer uso de las nociones de diferencial e integral y, quizá, para no emplear los procedimientos de Taylor, cuya base eran las fluxiones y los fluentes de Newton.

Euler muestra cómo es posible hacer la representación de algunas funciones por medio de series de potencias, tanto por medio de la división continua como con el procedimiento de asumir que se cuenta con la representación y determinar los valores de los coeficientes correspondientes. Pero la extensión del resultado al caso general, esto es, que toda función podía representarse por medio de una serie de potencias, sólo es explicable recurriendo a la ley de continuidad de Leibniz.

Otro aspecto que juega un papel importante en estos y otros casos, es que el universo de funciones conocido era entonces muy limitado y, aún sin prueba de algunos asertos, era natural que se dieran como válidos, pues no existían contraejemplos que los pusieran en tela de duda.

- Determinación de las integrales de las funciones empleando el principio fundamental del cálculo, esto es, a partir de conocer una fórmula diferencial, determinar la función a la que dicha fórmula diferencial corresponde. De hecho, aunque en determinados momentos Euler recurre a la idea de cálculo de áreas, privilegia la determinación de integrales por medios analíticos, salvo que existan dificultades infranqueables para proceder así.
- Empleo de sustituciones diversas para la determinación de las integrales de fórmulas diferenciales complicadas. En la determinación de las mismas, los procedimientos de Euler eran de naturaleza general o global. Por ejemplo, obtenía expresiones para la integral $\int \cos^n x\, dx$, para todos los posibles valores de *n*. En ocasiones es difícil seguir el curso de sus desarrollos, porque en esa búsqueda de casos generales o casos tipo, los procedimientos algebraicos son de una destreza y maestría notables.

Conceptos:

Los principales conceptos encontrados en Euler son:

- El concepto sobre el que se construye la propuesta euleriana del cálculo es el de función, con base en la idea de expresión algebraica para relacionar variables dependientes con variables independientes y cantidades constantes.

  La misma forma de clasificar y definir las cantidades constantes y las cantidades variables son propias de esta propuesta.

  Al descartar a las cantidades constantes del universo de las variables y, más propiamente, al dejar fuera del universo de funciones a lo que hoy conocemos como funciones constantes, se indujo una forma de percibir algunas situaciones que tardó mucho tiempo en modificarse.

  Similarmente, al definir a las funciones mediante las expresiones analíticas, diversas relaciones que hoy representamos por medio de funciones, quedaban fuera de esta clasificación, con sus correspondientes impactos en el desarrollo del cálculo. Nuevamente, sin embargo, debemos aclarar que en la época de Euler el universo de curvas y de situaciones en general, cuyas relaciones entre variables pudieran representarse funcionalmente, estaba limitado por los casos en los que las relaciones se podían establecer por una expresión analítica.

- Igualmente tenemos la caracterización de las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. Para defender la existencia de estos tipos de cantidades, Euler recurre a argumentos filosóficos profundos, relacionados con la concepción del mundo y del universo, con la continuidad o discontinuidad de la materia, con lo posibilidad o la imposibilidad de dividir la materia una infinidad de veces, con la existencia o no de los átomos.

  Aunque el cálculo de Euler se refería a variables generalizadas, sus argumentos filosóficos retoman los planteamientos generales de Leibniz sobre la materia y sus representaciones (como las figuras geométricas), con base en la idea de las mónadas, que permitían concebir la posibilidad de dividir una infinidad de veces la materia y a la vez aceptar la existencia de elementos básicos constituyentes.

  En el caso de Leibniz, un ejemplo de mónada sería un segmento diferencial y en el de Euler, el diferencial de una variable generalizada.

- Los diferenciales de las variables generalizadas y de las funciones se conciben como cantidades infinitamente pequeñas que son "realmente cero". Las cantidades infinitamente grandes no aparecen ya en referencia a las sumas sino, por una parte, a partir de la división infinita de un segmento, una figura o un cuerpo geométrico (el número de divisiones puede ser infinitamente grande) y, por otra, del cociente de una cantidad finita entre una cantidad infinitamente pequeña.

  La concepción de un tipo de cantidades así, conduce necesariamente a asumir la existencia del otro tipo.
- La integral es la operación inversa de la diferencial, aceptando el principio fundamental del cálculo. Aunque Euler trabajó con las variables generalizadas, su presentación y concepción de diferencial e integral son completamente congruentes con los desarrollos que le antecedieron y la naturaleza inversa de la diferenciación y la integración son evidentes, de tal manera que el principio fundamental del cálculo permanece inalterable.

Propiedades:

- La división por cero ofrece múltiples resultados válidos, como en el caso de los cocientes diferenciales. Se hace una diferenciación entre la división por cero como razón aritmética y el caso de la razón geométrica. En ambos casos se admite la multiplicidad de resultados, pero en el caso de la división geométrica se estipulan diferencias entre los "ceros". Por ejemplo, se admite, aritméticamente que, de la multiplicación $n \bullet 0 = 0,$ se tiene que $n = \frac{0}{0}$. Pero, con razones geométricas, dado que, en el mismo caso podemos ver que $n \bullet 0 = 1 \bullet 0$ y, de aquí, $\frac{n}{1} = \frac{0}{0},$ deducimos que el cuarto *0* es el *n* veces el segundo.
- Los diferenciales son cantidades infinitamente pequeñas que en realidad "son cero" pero con posibilidades de operarse, dado que como cocientes de una progresión geométrica, es posible determinar los respectivos valores.

  Esto es, al generalizar los diferenciales a las variables generalizadas, Euler procuró extender las propiedades que se les habían atribuido a los segmentos de longitud inasignable de Leibniz a los diferenciales de las variables generalizadas. Tratándose entonces de cantidades variables, en el sentido por él mismo definido, les atribuyó propiedades numéricas con base en su concepción como "ceros" involucrados en razones geométricas.

- Las integrales son objetos que surgen o se obtienen mediante el proceso inverso al de la diferenciación. Para ello se establece la noción de fórmula diferencial. No se abandona el significado de la integral como área pero, dado que ahora se trata de un proceso que no es exclusivamente geométrico, sino que se consideran las variables generalizadas, se atribuyen las propiedades anteriores por medio del principio fundamental del cálculo y la naturaleza inversa de la integral con relación al diferencial.
- Aceptación tácita de la Ley de Continuidad de Leibniz para casos como el de la representación de una función arbitraria como serie de potencias y la integral de una serie como la serie de integrales de los términos. Asimismo, la aplicación de la Ley de Continuidad se pone de manifiesto en la extensión de resultados válidos para números enteros y fraccionarios, hacia los irracionales.

Argumentaciones:

- Las ideas del cálculo de Leibniz, construido para el caso de las curvas son aplicables al caso de las variables generalizadas, en las que las curvas se conciben como un caso particular. La generalización de Euler no modifica la concepción existente de diferencial en su época, en el sentido de que los segmentos, las áreas y volúmenes infinitamente pequeños continúan siendo ejemplos de cantidades diferenciales, pero ahora se incluyen otras posibilidades, al considerar diferenciales de variables generalizadas y por lo tanto los diferenciales son ahora cantidades infinitamente pequeñas de cualquier variable.
- El estudio de las variables generalizadas se modela mediante el concepto de función, el cual se constituye como el objeto central de estudio del cálculo y/o análisis. Por una parte, la generalización de las técnicas del cálculo hacia casos distintos al geométrico y, por otra, la necesidad de resolver incongruencias como el

de la indeterminancia de las variables, condujo a Euler a la noción de función, en el sentido por él definida.

Con el manejo de las funciones se establecieron relaciones de dependencia de unas variables con respecto a otras y, consecuentemente, los diferenciales se concibieron como relaciones de dependencia. En el caso de los problemas geométricos se debería ahora partir de los diferenciales de la variable independiente, y los diferenciales de las ordenadas y los arcos dependerían ahora de ellos, asegurando la unicidad de los resultados obtenidos al resolver determinadas situaciones.

- Los resultados obtenidos para el caso de desarrollos en series de potencias con exponentes enteros o fraccionarios pueden extenderse al caso de exponentes irracionales, aplicando la Ley de Continuidad de Leibniz (sin declararlo). Así, si la fórmula diferencial de $y = x^k$, donde k es un número entero o fraccionario, es $dy = kx^{k-1}dx$, entonces la propiedad es válida aún para el caso en el que k es un número irracional. Su argumento es que los casos desarrollados son suficientes para establecer la validez general de la regla propuesta.
- El cálculo requiere de una estructuración que repose en los resultados algebraicos, pues es en este ámbito que se pueden generalizar los procedimientos del mismo para curvas al caso de las variables generalizadas.

  En el siglo XVII los procedimientos algebraicos eran aceptados como conocimientos sólidos, no sujetos a crítica respecto a sus fundamentos (como generalización de la aritmética) y, al apoyar el cálculo en el álgebra o análisis, Euler pretendía dejar fuera de toda duda la validez de las nociones y técnicas del cálculo.
- Complementariamente al uso de los recursos algebraicos o analíticos, se desarrollan argumentaciones en torno a las ideas del infinito, argumentando sobre la validez de emplear las cantidades infinitamente pequeñas y las cantidades infinitamente grandes.

  La discusión alrededor de estas cantidades infinitas se presenta no sólo en términos matemáticos, sino, más generalmente, con base en una discusión filosófica global sobre la concepción del mundo y del universo.

  Las disquisiciones filosóficas de Euler retoman las concepciones generales de Leibniz sobre las mónadas como los elementos fundamentales de cualquier entidad, material o ideal, ligadas a la concepción de que la materia pude ser dividida una infinidad de veces, lo cual, por una parte conduce a considerar las cantidades infinitamente pequeñas y, por otra, el número de divisiones debe concebirse como una cantidad infinitamente grande.

- La posibilidad de dividir un número infinito de veces a los objetos materiales o a los objetos ideales, como los segmentos de recta, conduce también a concebir los objetos como continuos y, ligados a ellos, a concebir la completez de los segmentos y curvas.

No existiendo una teoría de los números reales como la actual, estas características de continuidad y completez no se formulan como se hizo posteriormente en la segunda mitad del siglo XIX, pero en las argumentaciones de Euler se hace referencia explícita a ello, por ejemplo al señalar que la discontinuidad de la materia es una idea absurda.

3.6 VISIÓN GLOBAL DE LA INTEGRAL EN EULER

Con los trabajos de Euler el cálculo y/o el análisis alcanzó en buena medida el esplendor que lo convirtió en la herramienta matemática más poderosa creada por el hombre durante un periodo de trescientos años.

Por una parte su extensión del caso geométrico del estudio de las curvas, con la conexión entre los problemas de determinar las rectas tangentes a una curva arbitraria y la obtención de sus cuadraturas, al caso de las variables generalizadas. Por otra, al hacer esta extensión se puso al centro la noción de función y desde entonces ésta constituye el objeto matemático alrededor del cual gira el cálculo y/o el análisis. Como ejemplo de la importancia que se le atribuye al objeto función, podemos citar el caso del libro "Calculus" de Michael Spivak [1981: 47] en el que se asegura que "el concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones".

Una afirmación de este carácter nos parece particularmente temeraria pues caracteriza a las funciones como más importantes que las nociones de número y de figura geométrica, pero sin lugar a dudas es un consenso que se trata de una noción de gran trascendencia y aún en el caso de la matemática educativa es quizá, la noción más estudiada. Al tomarla como el eje del cálculo, Euler la convirtió en el eje central para la caracterización de los problemas de variación y los fenómenos físicos, geométricos, biológicos, económicos, etc. se han modelado desde entonces, con el empleo de las funciones.

Mediante la noción de función se superaron problemas del cálculo leibniziano como el de la indeterminancia de las diferenciales, pues al introducir la diferencia entre variables independientes y dependientes el tratamiento diferencial siguió el mismo derrotero y los diferenciales de las funciones se concibieron como dependientes de los diferenciales de las variables independientes.

Por otro lado, así como en el tratamiento geométrico-analítico del cálculo de Leibniz los problemas de la determinación de las cuadraturas eran más complejos y laboriosos que los de rectas tangentes, en el desarrollo algebraico de Euler, esta característica subsiste y la determinación de integrales es más complicada y laboriosa que la determinación de las fórmulas diferenciales. Los ingeniosos desarrollos algebraicos de Euler se concentran en la determinación de las integrales. Su preocupación didáctica de que los estudiantes contaran con una formación algebraica mínima obedecen en buena medida a la necesidad de emplear sustituciones y simplificaciones algebraicas para la determinación de las integrales.

Respecto a las ideas del infinito, de acuerdo al edificio matemático construido por la humanidad hasta ese tiempo, encontramos elementos de gran validez pero en los que se ponían de manifiesto algunos problemas fundamentales de las matemáticas, como el de la continuidad y la completez de nuestros sistemas numéricos. En las argumentaciones de Euler encontramos que concibe al mundo y a la materia como continuas y aún aceptando la posible existencia de indivisibles o átomos o mónadas, sostiene que la materia es infinitamente divisible. Consecuentemente los modelos matemáticos para la naturaleza los concibe como continuos. Esta concepción lo conduce a plantear que los diferenciales o cantidades infinitamente pequeñas son “realmente cero”, pero con las cuales es posible operar.

Entre los trabajos de Leibniz y los de Euler tenemos las de numerosos matemáticos que desarrollaron las ideas y técnicas no sólo de Leibniz sino también de Newton. Aunque muchos afirman que la notación de Newton era tan oscura que ello permitió el mayor desarrollo de la propuesta de Leibniz, existen opiniones en otra sentido, como la de Grathan Guiness quien afirmaba que la razón más importante fue la calidad de los seguidores de Leibniz, como los integrantes de la familia Bernoulli, L’Hospital, Euler y otros.

Euler fue discípulo de Johann Bernoulli y conoció sus trabajos, así como los de L’Hospital y otros. Con estas fuentes y sus intereses en el estudio de los fenómenos físicos, del movimiento, la hidrodinámica, el calor y otros, Euler generalizó la noción de diferencial al caso de las variables generalizadas, y con ello el cálculo diferencial e integral, quedando las curvas como un ejemplo, de primer grado de importancia si se quiere, pero concebido como caso particular de una serie de técnicas de validez y aplicación más general.

Indudablemente que Euler contribuyó significativamente al desarrollo del cálculo y, en términos prácticos, casi todos los resultados que se presentan en sus libros forman la base de la enseñanza del cálculo en nuestros días. La diferencia más notoria con los libros actuales está en los fundamentos, ahora basados en la convergencia, la continuidad y la derivada. Pero los procedimientos algorítmicos y las integrales que se revisan, por citar un ejemplo, son un subconjunto de las tratadas por Euler en sus libros, quizá con mayor claridad e idea didáctica, por cierto.

Su influencia fue de tal magnitud que a partir de Euler, tanto en los trabajos de los matemáticos como de quienes enseñan matemáticas, se ha privilegiado el tratamiento algebraico, aún en detrimento de los análisis gráficos y numéricos. Esta preponderancia de los tratamientos algebraicos abarca a todas las ramas de las matemáticas.

3.7 LA INTEGRAL EN CAUCHY Y RIEMANN

Como hemos visto, Leibniz desarrolló un cálculo analítico cuyos objetos primarios eran de naturaleza geométrica y sus resultados se referían fundamentalmente a objetos geométricos. Hablaba de segmentos de longitud "inasignable", infinitamente pequeños y, por otra parte, cantidades infinitamente grandes, como en el caso de las sumas de segmentos y de áreas.

Por su parte Euler estableció el cálculo para variables generalizadas, fueran o no de carácter geométrico, basándose en el concepto de función. Continuó con los planteamientos de Leibniz, considerando que los diferenciales o cantidades infinitamente pequeñas eran "realmente *0*" y aceptando también la existencia de cantidades infinitamente grandes.

Asimismo, en los trabajos de Newton y sus seguidores, quienes desarrollaron el cálculo con base en las nociones de fluxiones y fluentes (conocido como "cálculo fluxional"), en el cual también se involucraba a las cantidades infinitamente pequeñas o "evanescentes", así como "razones primeras" y "razones últimas" para establecer el valor de lo que, en notación moderna escribimos como $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, cuando h es una cantidad "evanescente". Este cociente fue desarrollado en muchos casos por medio del binomio de Newton, $(x+h)^n$, tratado no sólo para números naturales, sino también para enteros negativos y números fraccionarios precisamente por Newton.

Pero las explicaciones y validaciones que se daban para las cantidades evanescentes, las razones primeras y últimas, las magnitudes inasignables, los infinitamente pequeños, los infinitamente grandes, etc., no lograban convencer a la comunidad científica del todo y se continuó en el intento de establecer las bases del análisis de formas más convincentes.

La discusión al respecto, tendría impacto en todas las nociones del cálculo y, antes de retomar específicamente el caso de la integral de una función, es pertinente analizar las discusiones y construcciones alrededor de los fundamentos del cálculo y/o del análisis.

Entre los críticos a las formas de fundamentar el análisis se encontraba Joseph Lagrange, quien siendo presidente de la Academia de Ciencias y Bellas Artes de Berlín, en 1784 promovió el otorgamiento de un premio para el establecimiento de "una teoría clara y precisa de lo que es llamado el 'infinito' en matemáticas".[1][Grabiner 1990: 40]. Particularmente Lagrange rehusaba aceptar las argumentaciones de Leibniz, Newton, Euler y otros. Algunos intentos se habían hecho por medio de la noción de límite y entre ellos estaba el de D'alembert [1765: 542], quien en 1765 había escrito en la Enciclopedia la siguiente definición: "Se dice que una magnitud es el límite de otra magnitud cuando la segunda puede aproximarse a la primera más cerca que una magnitud dada, tan pequeña como la magnitud (dada) pueda ser supuesta; sin embargo, sin que la magnitud que se está acercando sea capaz de pasar a la magnitud a la cual se acerca; por tanto la diferencia entre una cantidad y su límite es absolutamente inasignable… La teoría de los límites es la base de la verdadera metafísica del cálculo diferencial. Ver DIFERENCIAL, FLUXIÓN, EXHAUCIÓN, INFINITO. Propiamente hablando, el límite nunca coincide, o nunca llega a ser igual a la cantidad de la cual es el límite; pero siempre puede acercarse más y más, y puede diferir de ella en tan poco como se desee".[2]

Pero Lagrange sostenía que la noción de límite no era sino otra forma de presentar las cantidades evanescentes de las razones primeras y las razones últimas de Newton, las cuales consideraba insatisfactorias. De cualquier manera el premio se otorgó por un trabajo encaminado en este sentido.

El premio fue otorgado a Simon L'Huilier en 1786, y, aunque se tomó una decisión unánime, los jueces del concurso, especialmente Lagrange, no la consideraron del todo satisfactoria. L'Huilier [1786:7] presentó su definición de forma verbal y es la siguiente: "Sea una cantidad variable, siempre más pequeña o siempre más grande que una cantidad constante propuesta; pero la cual puede diferir de la última por menos que cualquier cantidad propuesta, no importa qué tan pequeña sea: esta cantidad constante es llamada el límite en grandeza o pequeñez de la cantidad variable".[3]

---

[1] "A clear and precise theory of what is called 'infinity' in mathematics".

[2] "On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand le seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche, puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable…La théorie des limites est la base de la vraie Métaphysique du calcul différentiel. Voyez DIFFÉRENTIEL, FLUXION, EXHAUSTION, INFINITI. A proprement parler, la limite ne coïncide jamais, o une devienne jamais égale à la quantité dont elle est la limite; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, & peut en différer aussi peu qu'on voudra".

[3] "Soit une quantité variable, toujours plus petite ou toujours plus grande qu'une quantité constante proposée ; mais qui puisse différer de cette dernière moins que d'aucune quantité proposée plus petite qu'elle : cette quantité constante est dise la limite en grandeur ou en petitesse de la quantité variable ".

En el desarrollo de sus ideas, L'Huilier [1786: 31] llegó a decir que "Para abreviar y facilitar el cálculo con una notación más cómoda, convenimos en designar sin excepción por $\lim \frac{\Delta P}{\Delta x}$, al límite al cual convergen los cambios simultáneos de P y de x, a saber $\frac{dP}{dx}$; de tal manera que $\lim \frac{\Delta P}{\Delta x}$ o $\frac{dP}{dx}$ designan la misma cosa".[4]

Con esta definición y notación escribió entonces que eran válidas las reglas siguientes:

$$Lim \frac{\Delta x^n}{\Delta x} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

$$Lim \frac{\Delta xy}{\Delta x} = \frac{dxy}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$$

$$Lim \frac{\Delta \frac{x}{y}}{\Delta x} = \frac{d\frac{x}{y}}{dx} = \frac{y - x \bullet \frac{dy}{dx}}{yy}$$

$$Lim \frac{\Delta PQ}{\Delta x} = \frac{dPQ}{dx} = Q\frac{dP}{dx} + P\frac{dQ}{dx}$$

$$Lim \frac{\Delta \frac{P}{Q}}{\Delta x} = \frac{d\frac{P}{Q}}{dx} = \frac{Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx}}{QQ}$$

En el caso de la propuesta de L'Huilier se enfatiza el carácter que venía dándose a la integral de una función como la inversa de una forma diferencial y el cálculo integral como el estudio de los procesos de determinación de integrales a partir de conocer la forma diferencial de una función. Esto se manifiesta en el siguiente extracto de su trabajo merecedor al premio de la Academia de Berlín [L'Huilier 1786: 32].

"Definición. Llamaré razón diferencial de dos cantidades variables, a la razón que es el límite de sus cambios simultáneos; o a la razón al que estos cambios se acercan cuando

[4] "Pour abréger & pour faciliter le calcul par une notation plus commode, on est convenu de désigner autrement que par $\lim \frac{\Delta P}{\Delta x}$, la limite du rapport des changements simultanés de P y de x, savoir par $\frac{dP}{dx}$; ; en sorte que $\lim \frac{\Delta P}{\Delta x}$ ou $\frac{dP}{dx}$ désignent la même chose.".

son más pequeños. Y llamaré cálculo diferencial, al cálculo que se ocupa de la búsqueda de la razón diferencial de las cantidades variables. Lo mismo que el conocimiento de la relación de dos cantidades variables sirve para determinar su razón diferencial, recíprocamente, del conocimiento de la razón diferencial de dos cantidades variables, determinamos la misma relación de estas cantidades. Llamaré razón integral de dos cantidades variables, a la razón que reina entre estas cantidades, como es deducida de su razón diferencial. Y llamaré cálculo integral, el cálculo que se ocupa de la razón integral de las cantidades variables.

Así, siendo propuesta la razón diferencial $\frac{dP}{dx} = nx^{n-1}$, deducimos que la razón integral de P a x es $P = x^n$.

Igualmente, si $\frac{dP}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$, deducimos que $P = xy$.

Si $\frac{dP}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, deducimos la razón integral es $P = \sqrt{1+x^2}$ ”.[5]

Así pues, las propuestas para dotar de un fuerte sustento al análisis se estaban incrementando, pero Lagrange no concordaba con los caminos que se seguían e intentó una nueva manera de fundamentar el análisis, al margen de los infinitésimos, los límites y cualquier otra idea similar.

---

[5] “*Définition*. J’appellerai *rapport différentiel* de deux quantités variables, le rapport qui est la limite de celui de leurs changements simultanés ; ou le rapport dont ces changements approchent d’autant plus qu’ils sont plus petits. Et j’appellerai *calcul différentiel*, le calcul qui s’occupe de la recherche du rapport différentiel des quantités variables. De même que la connaissance de la relation de deux quantités variables sert è déterminer leur rapport différentiel, réciproquement, de la connaissance du rapport différentiel de deux quantités variables on détermine la relation même de ces quantités. J’appellerai *rapport intégral* de deux quantités variables, le rapport qui règne entre ces quantités, en tant qu’il est déduit de leur rapport différentiel. Et J’appellerai *calcul intégral*, le calcul qui s’occupe du rapport intégral des quantités variables.

Ainsi, étant proposé le rapport différentiel $\frac{dP}{dx} = nx^{n-1}$, on déduit le rapport intégral de P à x est $P = x^n$.

De même, si $\frac{dP}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$, on déduit $P = xy$.

Si $\frac{dP}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, on déduit le rapport intégral $P = \sqrt{1+x^2}$ ”.

Su punto de partida fue el primero de sus artículos científicos, publicado en 1754, cuando él tenía 18 años, donde notó que los coeficientes del desarrollo en series del diferencial de un producto son análogos a los coeficientes de la expansión binomial, en concordancia con el teorema del binomio de Newton.

En su notación Lagrange escribió

$(xy)^m = x^m y^0 + mx^{n-1} y^1 + m\frac{(m-1)}{2}x^{m-2}y^2 + m\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)}{3}x^{m-3}y^3 + \cdots$ para referirse a lo que en notación que nos es más familiar, podemos escribir como

$$d^m(xy) = (d^m x)y + md^{m-1}xdy + m\frac{(m-1)}{2}d^{m-2}xd^2y + m\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)}{3}d^{m-3}xd^3y + \cdots$$

en la que, con su notación, $x^m = d^m x$ y $x^0 = x$.

Por otro lado, en el teorema del binomio tenemos que

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + m\frac{(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 + m\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)}{3}a^{m-3}b^3 + \cdots$$

El desarrollo en series del diferencial del producto *xy* ya se había hecho antes y, como Euler le hizo ver a Lagrange, Leibniz ya había observado la analogía de los coeficientes de ambos desarrollos. Pero para Lagrange significó la posibilidad de conectar los procesos infinitos con los de la "grandeza finita". Así por ejemplo, dado que el teorema del binomio es válido para números negativos, Lagrange desarrolló el diferencial para casos también negativos, asociando $(dx)^{-1}$ con la integral de *dx*. El caso que desarrolla en su artículo es el de $m = -1$ y $x = dx$. En su notación original está expresado como

$$d^{-1}(ydx) = \int y\,dx = xy - \frac{x^2dy}{2dx} + \frac{x^3d^2y}{2\bullet 3dx^2} - \frac{x^4d^3y}{2\bullet 3\bullet 4dx^3} + \frac{x^5d^4y}{2\bullet 3\bullet 4\bullet 5dx^4} - \cdots$$

que corresponde a la "serie de Bernoulli" publicada en 1694.

Si bien no continuó inmediatamente con los resultados de este primer artículo, la idea de que podría expresar los diferenciales por medio de desarrollos en serie en los cuales los coeficientes son particularmente de interés. Esto lo hizo finalmente en 1797 con la publicación del libro "Teoría de las Funciones Analíticas", título con el que usualmente se conoce, pero que en realidad también incluye la nota "Conteniendo los principios del cálculo diferencial, liberado de toda consideración de las cantidades infinitamente pequeñas o de cantidades evanescentes, de límites o de fluxiones, y se reduce al análisis algebraico de las cantidades finitas”.[6]

En el libro señalado, Lagrange inicia con una crítica a los fundamentos del análisis con base en las ideas del siglo XVIII y presenta después su propuesta de cálculo o análisis con base en las series de Taylor, hoy de conocimiento generalizado para los estudiantes de cálculo universitario.

El nombre de la serie obedece a que fue originalmente presentada por Brook Taylor, un discípulo de Newton, quien en 1715 publicó el trabajo “Methodus incrementorum directa et inversa” con lo que dio inicio a la rama que hoy conocemos como “matemática de las diferencias finitas” y en la que desarrolla la serie mencionada, por medio de un teorema y dos corolarios, los cuales presentamos en la versión de Struik, la cual contiene ligeras modificaciones en la notación respecto del original:

“Proposición VII. Teorema III. Sean z y x dos cantidades variables, de las cuales z crece uniformemente con incrementos Δz dados. Sean $n\Delta z = v,\ v - \Delta z = \dot{v},\ \dot{v} - \Delta z = \ddot{v},$ etc. Digo entonces que cuando z crece a $z + v,$ entonces x crece en

$$z + \Delta x \frac{v}{1.\Delta z} + \Delta^2 x \frac{v\dot{v}}{1 \bullet 2 (\Delta z)^2} + \Delta^3 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1 \bullet 2 \bullet 3 (\Delta z)^3} + \cdots\text{”}^{7}\text{[Taylor 1715: 329].}$$

En el primer corolario el resultado es prácticamente el mismo, sólo que ahora considera la posibilidad de tener valores negativos de z y consecuentemente de v.

“Corolario I. Si $\Delta z, \Delta x, \Delta^2 x, \Delta^3 x$ permanecen iguales, pero el signo de v es cambiado de tal forma que z decrece y se convierte en $z - v,$ entonces a su vez x decrece para ser

$$x - \Delta x \frac{v}{1 \bullet \Delta z} - \Delta^2 x \frac{v\dot{v}}{1 \bullet 2 (\Delta z)^2} - \Delta^3 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1 \bullet 2 \bullet 3 (\Delta z)^3} - \quad \text{etc.}$$

o

[6] “Contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d’infiniment petits ou d’evanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits a l’analyse algébrique des quantités finies”. Lagrange (1797).

[7] “Let z and x be two variable quantities, of which z increases uniformly with given increments Δz. Let $n\Delta z = v,\ v - \Delta z = \dot{v},\ \dot{v} - \Delta z = \ddot{v},$ etc. Then I say that when z grows into $z + v,$ then x grows into

$$z + \Delta x \frac{v}{1.\Delta z} + \Delta^2 x \frac{v\dot{v}}{1 \bullet 2 (\Delta z)^2} + \Delta^3 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1 \bullet 2 \bullet 3 (\Delta x)^3} + \cdots\text{”}$$

$$x - \Delta x \frac{v}{1\bullet \Delta z} + \Delta^2 x \frac{v v_1}{1\bullet 2 (\Delta z)^2} - \Delta^3 x \frac{v v_1 v_{11}}{1\bullet 2\bullet 3 (\Delta z)^3} + \text{ etc.}$$

con $\dot{v}$, $\ddot{v}$, etc., convertidos en $-v_1$, v_{11}, etc.”.[8][Taylor 1715: 332].

“Corolario II. Si sustituimos por incrementos evanescentes las fluxiones proporcionales a ellos, entonces todos los $\ddot{v}, \dot{v}, v, v_1, v_{11}$ serán iguales. Cuando z fluye uniformemente a $z+v$, x deviene en

$$x + \dot{x}\frac{v}{1\bullet \dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1\bullet 2\dot{z}^2} + \dddot{x}\frac{v^3}{1\bullet 2\bullet 3\dot{z}^3} + \text{ etc.,}$$

o, con v cambiando se signo, cuando z decrece a $z-v$, x deviene en

$$x - \dot{x}\frac{v}{1\bullet \dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1\bullet 2\dot{z}^2} - \dddot{x}\frac{v^3}{1\bullet 2\bullet 3\dot{z}^3} + \text{ etc.”.}$$

[9][Taylor 1715: 332].

Lagrange [1797: 2] retoma la serie de Taylor expresándola de la forma más conveniente para su propuesta desde el inicio de su libro, donde escribe “Consideremos pues una función *fx* de una variable cualquiera *x*. Si en lugar de *x* se pone $x+i$, *i* siendo una

---

[8] “Corollary I. If the $\Delta z, \Delta x, \Delta^2 x, \Delta^3 x$ remain the same, but the sign of *v* is changed so that *z* decreases and becomes $z-v$, then *x* decreases at the same time and becomes

$$x - \Delta x \frac{v}{1\bullet \Delta z} - \Delta^2 x \frac{v\dot{v}}{1\bullet 2 (\Delta z)^2} - \Delta^3 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1\bullet 2\bullet 3 (\Delta z)^3} - \text{ etc.}$$

or

$$x - \Delta x \frac{v}{1\bullet \Delta z} + \Delta^2 x \frac{v v_1}{1\bullet 2 (\Delta z)^2} - \Delta^3 x \frac{v v_1 v_{11}}{1\bullet 2\bullet 3 (\Delta z)^3} + \text{ etc.}$$

with $\dot{v}$, $\ddot{v}$, etc., converted into $-v_1$, v_{11}, etc.”

[9] “Corollary II. If we substitute for evanescent increments the fluxions proportional to them, then all $\ddot{v}, \dot{v}, v, v_1, v_{11}$ become equal. When z flows uniformly into $z+v$, x becomes

$$x + \dot{x}\frac{v}{1\bullet \dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1\bullet 2\dot{z}^2} + \dddot{x}\frac{v^3}{1\bullet 2\bullet 3\dot{z}^3} + \text{ etc.,}$$

or with v changing its sign, when z decreases to $z-v$, x becomes

$$x - \dot{x}\frac{v}{1\bullet \dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1\bullet 2\dot{z}^2} - \dddot{x}\frac{v^3}{1\bullet 2\bullet 3\dot{z}^3} + \text{ etc.”}$$

cantidad indeterminada cualquiera, devendrá en $f(x+i)$; y por la teoría de series podremos desarrollarla en una continuación de esta forma en la cual los coeficientes de las potencias de *i*, serán de nuevo funciones de *x*, derivadas de la función primitiva *fx*, e independientes de la cantidad *i*.

Es claro que la forma de las funciones derivadas únicamente dependerá de la forma de la función *fx*; y determinaremos fácilmente estas funciones en los casos particulares por las reglas ordinarias del álgebra, desarrollando la función en una serie ordenada que seguirá las potencias de *i*”.[10]

Más adelante Lagrange [1797: 7] escribe “Pero para no adelantar nada gratuitamente, comenzaremos por examinar la misma forma de la serie que debe representar el desarrollo de toda función fx cuando se sustituye $x+i$ en lugar de *x*, y cuando supusimos que debe contener potencias enteras y positivas de *i”*.[11]

Así pues, Lagrange considera que $f(x+i)$ es la suma de dos partes o expresiones, una de las cuales depende de i y, dado que cuando $i=0,\ f(x+i)=f(x)$, escribió $f(x+i)=f(x)+iP$, donde *f(x)* es la parte independiente de *i*. Tenemos de aquí, que $P=\dfrac{f(x+i)-f(x)}{i}$, la cual es una nueva función de *x* y de *i*. Consecuentemente puede escribir ahora la función P de una forma similar, como $P=p+iQ$, siendo *p* el valor de *P* cuando $i=0$. Ahora *p* es una función que sólo depende de *x* y entonces $Q=\dfrac{P-p}{i}$. Continuando este proceso tendremos nuevas funciones que dependen de *x* y de *i*, como $Q=q+iR$, con $R=\dfrac{Q-q}{i}$, etc. y, entonces

---

[10] “Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x. Si à la place de x on met $x+i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$; et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme $fx+pi+qi^2+ri^3+\&c.$, dans laquelle les quantités $p,q,r,\&c.$, coëfficiens des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive fx, et indépendantes de la quantité i.

Il est clair que la forme des fonctions $p,q,r,\&c.$ dépendra uniquement de celle de la fonction fx ; et on déterminera aisément ces fonctions dans les cas particuliers par les règles ordinaires de l'algèbre, en développant la fonction dans une série ordonnée suivant les puissances de i”.

[11] “Mais pour ne rien avancer gratuitement, nous commencerons par examiner la forme même de la série qui doit représenter le développement de toute fonction fx, lorsqu'on y substitue $x+i$ à la place de *x*, et que nous avons supposée ne devoir contenir que des puissances entières et positives de *i*”.

$f(x+i) = f(x) + iP = f(x) + ip + i^2Q = f(x) + ip + i^2q + i^3R =$
$f(x) + ip + i^2q + i^3r + i^4S + \cdots$

De esta manera, Lagrange desarrolló en series, muchas funciones de las que se conocían en su época (con la noción de función de Euler), en donde los coeficientes de x eran los mismos que en el caso de la serie de Taylor, en la cual se usaban las cantidades evanescentes y las fluxiones y por tanto eran coincidentes también con los diferenciales de Leibniz. Pero Lagrange los encontraba sin emplear los recursos que a él, como a muchos otros matemáticos, le parecían fundamentos falaces.

Para obtener los valores de $p, q, r, s, etc.$ a partir de *f(x)* siguió un procedimiento estrictamente algebraico. Por ejemplo, el primer caso tratado en su libro es $f(x) = \frac{1}{x}$, en donde $f(x+i) = \frac{1}{x+i}$, $iP = \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x} = -\frac{i}{x(x+i)}$, de aquí que $P = -\frac{1}{x(x+i)}$ y, consecuentemente, $p = -\frac{1}{x^2}$. Continuando, $iQ = P - p = -\frac{1}{x(x+i)} + \frac{1}{x^2} = \frac{i}{x^2(x+i)}$. Entonces $Q = \frac{1}{x^2(x+i)}$ y $q = \frac{1}{x^3}$. Siguiendo este procedimiento se pueden obtener *r, s,* etc. Dado que los valores de $p, q, r, s, \cdots$ dependen de la función *f(x)* original, Lagrange las llamó "funciones derivadas de *f(x)*". A *p*, siendo la primer derivada de *f* le llamó primer derivada de *f*, y la denotó por *f'*; a q la llamó primer derivada de *p* o segunda derivada de *f*, denotándola por *p'* o *f''*; y así sucesivamente. De esta manera expresó el desarrollo en series de potencias por medio de derivadas, dándole al Teorema de Taylor la forma que hoy nos resulta más familiar:

$$f(x+i) = f(x) + f'x\,i + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x}{2 \bullet 3}i^3 + \frac{f^{IV}x}{2 \bullet 3 \bullet 4}i^4 + \&c.$$

En el desarrollo de la Teoría de las Funciones Analíticas, Lagrange presentó una prueba, incorrecta, de que todas las funciones podían expresarse mediante series de potencias. Ciertamente que para la mayoría de las funciones que se conocían en su época podía obtenerse tal desarrollo, pero no necesariamente en todos los puntos de su dominio de definición. Precisamente el hecho de que no todas las funciones admiten un desarrollo en series de potencias, es la razón principal por la cual su propuesta, finalmente, fracasó, pero su contribución fue importante por varios motivos, destacándose el de generar la noción de función derivada. Asimismo, se preocupó por tomar en cuenta el error que se cometía al aproximar el valor de una función, pues al calcularlo, la serie de Taylor se truncaba a partir de un determinado término. Sus consideraciones le llevaron a expresar lo que todavía hoy conocemos como "Residuo" a la manera de Lagrange.

Para estimar el residuo consideró la $n+1$-ésima derivada de f y la acotó por medio de desigualdades. Esto dio pie a que otro matemático, André Marie Ampère, más conocido por sus aportaciones al estudio de la electricidad, se planteara la posibilidad de definir a la derivada de una función en términos del cociente $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ y las desigualdades que este cociente debe satisfacer cuando i es muy pequeño. Ampère definió la derivada de la siguiente manera:

"La función derivada de *f(x)* es una función de x tal que $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ está siempre incluida entre dos de los valores que esta función derivada toma entre x y $x+i$, cualesquiera que x e i puedan ser.

El trabajo de Ampère es mucho más extenso pero no es nuestro propósito profundizar en su desarrollo. Con lo mostrado hasta aquí, vemos cómo los intentos de fundamentar el análisis y las prácticas desarrolladas por los matemáticos fueron desembocando en el surgimiento de nuevos objetos matemáticos que, teniendo mucho en común con los anteriores, no son precisamente los mismos. Aunque los diferenciales de Leibniz parecen los mismos objetos, presentados con otras formas o caminos, lo cierto es que la noción de límite y de derivada, formulados, por cierto, de diferentes maneras, uno con los recursos algebraicos de Lagrange y otro con la convergencia, tomando incrementos o decrementos, se trata de objetos conceptualmente diferentes. Quizá más parecidos a la propuesta de Newton, pero también diferentes.

Las ideas presentadas hasta el momento permiten ubicar contextualmente la situación en la cual se encontraba el análisis respecto de sus fundamentos. Pero obviamente que a la par del debate sobre la mejor forma de sentar las bases para el análisis, éste continuó desarrollándose y expandiendo su campo de aplicación. Entre los trabajos que se hicieron, con repercusiones sobre el tratamiento de la integral de una función, tenemos el de Jean Baptiste Joseph Fourier sobre la teoría analítica del calor.

En mucho, la integral, vista a través de la operatividad, como la inversa de los diferenciales, continuó intacta en su concepción hasta que surgió la noción de derivada, de la que no es inmediato deducir que se trata de objetos inversos uno de otro, salvo por la similitud entre los diferenciales y las derivadas. Entre los trabajos que tuvieron implicaciones importantes para el posterior tratamiento de integral en Cauchy, están los referentes a la teoría analítica del calor de Joseph Fourier.

Fourier expresó las funciones por medio de series de senos y cosenos, llegando a afirmar que toda función acotada *f* definida en el intervalo (-*a*,*a*) podía ser desarrollada en la forma $f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum[a_n\cos(n\pi x)+b_n sen(n\pi x)]$, donde los coeficientes están dados por

$$a_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx \qquad \text{y} \qquad b_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\, sen\,\frac{n\pi x}{a}dx$$

La afirmación de Fourier, en el sentido de que esta representación en series trigonométricas era de validez general para todas las funciones, es similar a las que, en su momento, hicieron Euler y Lagrange para el desarrollo en series de potencias. Al igual que ellos, debe resaltarse que para la mayoría de las funciones que eran de su conocimiento, la afirmación es válida.

Para la obtención de los coeficientes de las series trigonométricas, Fourier asumió, por una parte, que siempre podría integrar las funciones de la forma $f(x)\cos nx$, $f(x)\, sen\ nx$ y, por otra, integrar término a término los elementos de la serie.

Aunque la noción de función de Fourier era prácticamente la misma que la de Euler, el siguiente pasaje es de particular importancia para el estudio posterior de las condiciones de integrabilidad de una función, al tomar en cuenta un universo de funciones más amplio que el anterior:

"Es notable que se pueda expresar por series convergentes, y, como se verá a continuación, por integrales definidas, las ordenadas de las líneas y de las superficies que no están en absoluto sujetas a una ley continua. Veremos que debemos admitir en el análisis funciones que tienen valores iguales, toda vez que la variable recibe valores cualesquiera comprendidos entre dos límites, aún si sustituyendo en la variable, un número comprendido en otro intervalo los resultados de ambas sustituciones no son en absoluto los mismos. Las funciones que gozan de esta propiedad son representadas por líneas diferentes, que coinciden sólo en una porción determinada de su curso y ofrecen una especie singular de osculación finita. Estas consideraciones tienen su origen en el cálculo de las ecuaciones diferenciales parciales; ponen al día este cálculo, y servirán para facilitar el uso en las teorías físicas."[12][Fourier 1822: 250].

Al tomar funciones que no responden a una "ley continua" o "arbitrarias", Fourier lo hacía en el sentido de la noción de función de Euler. De cualquier manera al tomar funciones arbitrarias, los procesos de integración como procesos inversos de la diferenciación pueden complicarse y Fourier [1822: 234] regresó a la interpretación de la integral como la suma de áreas:

"En efecto, si la función es representada por la ordenada variable de una curva cualquiera cuya abscisa se extiende desde $x=0$ hasta $x=\pi$, y si se construye sobre la misma parte del eje la curva trigonométrica conocida, cuya ordenada es $y = sen\,x$, será fácil representar el valor de cualquier término integral. Debemos asumir que para cada abscisa x, a la cual corresponde un valor de φx y un valor de $sen\,x$, multiplicamos este último valor por el primero, y en el mismo punto del eje se eleva una ordenada proporcional al producto $\varphi x \bullet sen\,x$, se formará, por esta operación continua, una tercera curva, cuyas ordenadas son las de la curva trigonométrica, reducida proporcionalmente a las ordenadas de la curva arbitraria que representa φx. Hecho esto, el área de la curva reducida tomada desde $x=0$ hasta $x=\pi$ dará el valor exacto del coeficiente de $sen\,x$ y cualquiera que pueda ser la curva dada correspondiente a φx ya sea que podamos asignarle una ecuación analítica, o no dependa de ninguna ley regular, es evidente que servirá siempre para reducir de alguna manera cualquier curva trigonométrica; por tanto el área de la curva reducida tiene, en todos los casos posibles, un valor determinado que es el valor

[12] "Il est remarquable que l'on puisse exprimer par des séries convergentes, et, comme on le verra dans la suite, par des intégrales définies, les ordonnées des lignes et des surfaces qui ne sont point assujetties à une loi continue. Ou voit par-là qu'il est nécessaire d'admettre dans l'analyse des fonctions qui ont des valeurs égales, toutes le fois que la variable reçoit des valeurs quelconques comprises entre deux fonctions, au lieu de la variable, un nombre compris dans un autre intervalle les résultats des deux substitutions ne sont point les mêmes. Les fonctions qui jouissent de cette propriété sont représentées par des lignes différentes, qui ne coïncident que dans une portion déterminée de leur cours, et offrent une espèce singulière d'osculation finie. Ces considérations prennent leur origine dans le calcul des équations aux différences partielles; elles jettent un nouveau jour sur ce calcul, et serviront à en faciliter l'usage dans les théories physiques".

del coeficiente de $sen\, x$ en el desarrollo de la función. Es similar en el caso del coeficiente siguiente b o $\int \varphi\, x\, sen\, 2x\, dx$"[13]

Más adelante Fourier [1822: 252] modificó la forma de representar las integrales, al incluir los límites de integración en los extremos del símbolo de integral: "Designamos en general por el signo $\int\limits_a^b$ la integral que comienza cuando la variable equivale a *a*, y que es completa cuando la variable equivale a *b*; y escribiremos la ecuación (*n*) bajo la forma siguiente:

$$\frac{1}{2}\pi\,\varphi\, x = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \varphi\, x\, dx + \cos x \int\limits_0^\pi \varphi\, x \cos x\, dx + \cos 2x \int\limits_0^\pi \varphi\, x \cos 2x\, dx\pi$$

$$+ \cos 3x \int\limits_0^\pi \varphi\, x \cos 3x\, dx + etc. \qquad (n)$$[14]

Otro aspecto que Fourier asumió como de validez general, fue la igualdad de la integral de una suma infinita con el de la suma infinita de integrales, esto es, la igualdad

---

[13] "En effet, si la fonction φx est représentée par l'ordonnée variable d'une courbe quelconque dont l'abscisse s'étend depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, et si l'on construit sur cette même partie de l'axe la courbe trigonométrique connue, dont l'ordonnée est $y = \sin x$; il sera facile de se représenter la valeur d'un terme intégral. Il faut concevoir que pour chaque abscisse x, à laquelle répond une valeur de φx, et une valeur de $\sin x$, on multiple cette dernière valeur par la première, et qu'au même point de l'axe on élève une ordonnée proportionnelle au produit $\varphi x \bullet \sin x$. On formera, par cette opération continuelle, une troisième courbe, dont les ordonnées sont celles de la courbe trigonométrique, réduite proportionnellement aux ordonnées de la courbe arbitraire qui représente φx. Cela posé, l'aire de la courbe réduite étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, donnera la valeur exacte du coefficient de $\sin x$; et quelle que puisse être la courbe donnée qui répond à φx, soit qu'on puisse lui assigner une équation analytique, soit qu'elle ne dépende d'aucune loi régulière, il est évident qu'elle servira toujours à réduire d'une manière quelconque la courbe trigonométrique ; en sorte que l'aire de la courbe réduite a, dans tous les cas possibles, une valeur déterminée qui donne celle du coefficient de $\sin x$ dans le développement de la fonction Il en est de même du coefficient suivant *b* ou $S(\varphi x\, sen\, x\, dx)$".

[14] "Nous désignons en général par le signe $\int\limits_a^b$ l'intégrale qui commence lorsque la variable équivaut à *a*, et qui est complète lorsque la variable équivaut à *b*; et nous écrirons l'équation (*n*) sous la forme suivante:

$$\frac{1}{2}\pi\,\varphi\, x = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \varphi\, x\, dx + \cos x \int\limits_0^\pi \varphi\, x \cos x\, dx + \cos 2x \int\limits_0 \varphi\, x \cos 2x\, dx$$

$$+ \cos 3x \int\limits_0^\pi \varphi\, x \cos 3x\, dx + etc. \quad (n)".$$

$\int_{-r}^{r}\sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-r}^{r}$, lo cual tampoco tiene validez general (salvo en el caso de la posterior integral de Lebesgue y construcciones posteriores).

Con todos estos antecedentes, los siguientes pasos de trascendencia en el desarrollo del análisis y de la integral en particular, se dieron con los trabajos de Agustin Louis Cauchy, quien se dio a la tarea de ordenar las ideas existentes en su época, avanzando significativamente en la fundamentación y formalización de las ideas del análisis, reconociéndose en sus trabajos, el uso del “rigor” en cálculo.

Cauchy procede de una forma similar a Euler, en el sentido de que primero presenta un tratado de las funciones en las cuales desarrolla las ideas que le servirán de base para el tratamiento del cálculo diferencial e integral, con las ideas de derivada (ya no de diferenciales), de integrales y sumas de series. Estas ideas las presenta en el libro “Cours d’Analyse de l’École Royale Polytechnique (Analyse Algébrique)”, publicado en 1821.

Si bien las ideas fundamentales de Cauchy son diferentes a las de sus antecesores, parte del lenguaje que utiliza es el de ellos, dándoles otro sentido. Por ejemplo, aún cuando no incluye ya los infinitésimos en sus desarrollos, las nociones de cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes siguen apareciendo. Así, al iniciar el libro, en el primer párrafo de la introducción escribe “Hablando de la continuidad de las funciones, no pude evitar el dar a conocer las propiedades principales de las cantidades infinitamente pequeñas, propiedades que sirven de base al cálculo infinitesimal”.[15][Cauchy 1821: ii].

En mucho, el curso de análisis se hace reposar sobre la idea de continuidad pero indudablemente que una idea que permea el libro entero es la de límite de una función, el cual define en las notas preliminares, posteriores a la introducción. Ahí Cauchy [1821: 19] escribe: “Cuando los valores sucesivamente atribuidos a la misma variable se acercan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él tan poco como queramos, este último es llamado el límite de todos los demás. Así, por ejemplo, un número

[15] “En parlant de la continuité des fonctions, je n’ai pu me dispenser de faire connaître les propriétés principales des quantités infiniment petites, propriétés qui servent de base au calcul infinitésimal. Enfin, dans les préliminaires et dans quelques notes placées à la fin du volume, j’ai présenté des développements qui peuvent être utiles soit aux Professeurs et aux Élèves des Collèges royaux, soit à ceux qui veulent faire une étude spéciale de l’analyse”.

irracional es el límite de las fracciones diversas que proporcionan valores cada vez más cercanos al mismo".[16]

Ya en el inicio del Cours d'Analyse , Cauchy [1821: 31] se diferencia de Euler al comenzar con una definición de función que no pone el centro en las expresiones analíticicas sino en la relación entre los valores de una variable y otra: "Cuando cantidades variables están de tal forma relacionadas entre ellas que cuando el valor de una ellas es dado, podemos concluir los valores de todas las demás, concebimos comúnmente estas cantidades diversas expresadas por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de *variable independiente*; y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente las llamamos *funciones* de esta variable".[17]

Después de clasificar las funciones en el capítulo I, en el siguiente trata las cantidades infinitamente pequeñas y las infinitamente grandes y a partir de ellas establece la continuidad de las funciones. En una concatenación lógica típica de la matemática griega, particularmente de la geometría, podemos ver que el centro de las concepciones de Cauchy [1821: 37-38] es el límite de una función, con el que define a las cantidades infinitamente pequeñas y las infinitamente grandes.

"Decimos que una cantidad variable deviene infinitamente pequeña, cuando su valor numérico decrece indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero".[18]

"Decimos que una cantidad variable deviene infinitamente grande, cuando su valor numérico crece indefinidamente de manera que converge hacia el límite ∞".[19]

Así, de estas definiciones podemos observar que no se trata ya de infinitésimos sino de cantidades variables que toman magnitudes finitas, asignables, pero cuyo límite es cero

---

[16] "Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière â finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En Géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtes croit de plus en plus, etc.".

[17] "Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur d l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen d l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante ; et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable".

[18] " On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite, lorsque sa valeur numérique décroit indéfiniment de manière à converger vers la limite Zéro".

[19] "On dit que une quantité variable devient infiniment grande, lorsque sa valeur numérique croit indéfiniment de manière à converger vers la limite ∞".

o ∞, dependiendo del caso. Con base en estas nociones, la continuidad de las funciones es establecida en Cauchy [1821: 43] de la siguiente manera:

"Sea *f(x)* una función de la variable *x*, y supongamos que, para cada valor de *x* intermedio entre dos límites dados, esta función admite constantemente un valor único y finito. Si, hablando de un valor de *x* comprendido entre estos límites se atribuye a la variable *x* un crecimiento infinitamente pequeño α, la función misma recibirá como incremento la diferencia

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

que dependerá al mismo tiempo de la nueva variable α y del valor de *x*. Dado esto, la función *f(x)* será, entre ambos límites asignados a la variable *x*, función *continua* de esta variable si, para cada valor de *x* intermedio entre estos límites, el valor numérico de la diferencia

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

decrece indefinidamente con el de α. En otros términos, *la función f(x) permanecerá continua con relación a x entre los límites dados si, entre estos límites, un crecimiento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un crecimiento infinitamente pequeño de la función misma*".[20]

Así, contando con versiones formales tanto del límite como de la continuidad de una función, Cauchy aborda los problemas del análisis. Sin embargo, es de notarse que todavía los fundamentos eran insuficientes y como ejemplo tenemos que unas pocas líneas más adelante, al demostrar el teorema del valor intermedio para funciones continuas, en un razonamiento geométrico, asume que la gráfica de la función, cualquiera que esta sea, cortará a la gráfica de la recta $y=b$, siendo b precisamente la ordenada del punto

[20] "Soit *f(x)* une fonction de la variable *x*, et supposons que, pour chaque valeur de *x* intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en parlant d'une valeur de *x* comprise entre ces limites, on attribue à la variable *x* un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

Qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de le valeur de *x*. Cela posé, la fonction *f(x)* sera, entre les deux limites assignées à la variable *x*, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de *x* intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

décroit indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction f(x) restera continue par rapport à entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même*".

intermedio. Pero con ello asumió implícitamente, sin declararlo, la completez de la recta real. Otros ejemplos muestran algunas inconsistencias en las que los matemáticos del siglo XIX estuvieron ocupados.

Pero regresando a nuestra línea de razonamiento, tenemos que en el capítulo VI de Cauchy [l821: 114] se tratan las series y se caracteriza su convergencia por medio del límite, de la siguiente manera:

"Llamamos serie a una sucesión indefinida de cantidades

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \cdots$$

que se derivan unas de las otras siguiendo una ley determinada. Estas mismas cantidades son los diferentes términos de la serie que se considera. Sea

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

la suma de los *n* primeros términos, en la que *n* designa un número entero cualquiera. Si, para valores de *n* siempre crecientes, la suma s_n se aproxima indefinidamente a un cierto límite *s*, se dirá que la serie es *convergente*, y el límite en cuestión se llamará la *suma* de la serie. Al contrario, si, mientras que *n* crece indefinidamente, la suma s_n no se aproxima a ningún límite fijo, la serie será *divergente* y no tendrá más suma. En ambos casos, el término correspondiente al índice *n*, a saber u_n, será llamado el término general. Basta que se dé este término general en función del índice *n*, para que la serie esté completamente determinada".[21]

Respecto a la derivada y la integral, Cauchy las presentó en diversos trabajos, destacando de entre ellos dos publicaciones. Una es "Resume des leçons donnes a l'École

---

[21] "On appelle série une suite indéfinie de quantités

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \cdots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différents termes de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

la somme des *n* premiers termes, *n* désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite *s*, la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la somme de la série. Au contraire, si, tandis que *n* croit indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente* et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme correspond à l'indice *n*, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le terme général. Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice n, pour que la série sois complètement déterminée".

Royale Polytechnique sur le calcul infinitesimal", publicado en 1823 y "Leçons sur les calcul différentiel ", publicado en 1829.

En el primero de estos libros, Cauchy [1823: 22-23] escribió su concepción de derivada de una función por medio del siguiente párrafo:

"Cuando la función $y = f(x)$ permanece continua entre dos límites dados de la variable *x*, y cuando se asigna a esta variable un valor comprendido entre ambos límites de los que se trata, un incremento infinitamente pequeño, atribuido a la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma. Por consiguiente si se hace $\Delta x = i$, entonces ambos términos de la *razón de las diferencias*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero, mientras que estos dos términos se aproximarán indefinida y simultáneamente al límite cero, la razón misma podrá converger hacia un límite, ya sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado como cada valor particular de *x*; pero varía con *x*. Así, por ejemplo, si se toma $f(x) = x^m$, m designando un número entero, la razón entre las diferencias infinitamente pequeñas será

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \bullet 2} x^{m-i} i + \cdots i^{m-1}$$

y tendrá por límite la cantidad mx^{m-1}, es decir, una nueva función de la variable *x*. En general siempre será lo mismo, sólo que la forma de la nueva función que servirá de límite para la razón $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ dependerá de la forma de la función propuesta $y = f(x)$. Para indicar esta dependencia damos a la nueva función el nombre de *función derivada*, y lo designamos, con la ayuda de un apóstrofe, por la notación

y' o $f'(x)$".[22]

---

[22] "Lorsque la fonction $y = f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x, et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent si l'on pose alors $\Delta x = i$, les deux termes du *rapport aux différences*

(1) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

De esta manera, con esta definición, retomada de las aportaciones de Lagrange y Ampère, Cauchy construye el análisis, en su parte diferencial, sobre la base de la función derivada, lo cual a su vez tendrá su impacto en la noción de integral. Sin embargo, así como rescató o conservó a las cantidades infinitamente pequeñas, hace lo propio con el caso de las cantidades diferenciales, dándoles un sentido diferente, pero que permite plantear a la derivada como un cociente diferencial. Dado que las cantidades diferenciales eran la base del cálculo en las versiones anteriores a Lagrange y Cauchy, nos pareció trascendente revisar a fondo lo que Cauchy desarrolló y decidimos incluir una extensa cita sobre el particular, la que se encuentra en Cauchy [1823: 27-28].

"Sean como siempre $y = f(x)$ una función de la variable independiente *x*; *i* una cantidad infinitamente pequeña, y *h* una cantidad finita. Si se hace $i = \alpha h$, α también será una cantidad infinitamente pequeña, y tendremos la identidad

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h},$$

de donde concluiremos

(1) $$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i} h.$$

El límite hacia el cual converge el primer miembro de la ecuación (1), cuando la variable α se acerca indefinidamente a cero y la cantidad *h* permanece constante, es llamado la *diferencial* de la función $y = f(x)$. indicamos esta diferencial por la característica *d*, así como sigue:

Seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, sois positive, sois négative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée pour chaque valeur particulière de x; mais elle varie avec x. Ainsi, par exemple, si l'on prend $f(x) = x^m$, m désignant un nombre entier, le rapport entre les différences infiniment petites sera

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \bullet 2} x^{m-i} i + \cdots i^{m-1}$$

et il aura pour limite la quantité mx^{m-1}, c'est-à-dire une nouvelle fonction de la variable x. Il en sera de même en général; seulement la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dépendra de la forme de la fonction proposée $y = f(x)$. Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation

$$y' \text{ ou } f'(x)."$$

dy o *df(x)*.

Es fácil obtener su valor cuando se conoce el valor de la función derivada y' o $f'(x)$. En efecto, tomando los límites de ambos miembros de la ecuación (1), generalmente se encontrará que

(2) $$d\,f(x) = h\,f'(x).$$

En el caso particular $f(x) = x,$ donde la ecuación (2) se reduce a

(3) $$dx = h.$$

Así la diferencial de la variable independiente *x* no es otra cosa que la constante finita *h*. Dicho esto, la ecuación (2) deviene en

(4) $$d\,f(x) = f'(x)dx$$

O, lo que es lo mismo,

(5) $$dy = y'dx.$$

De estas últimas igualdades resulta que la derivada $y' = f'(x)$ de una función cualquiera $y = f(x)$ es precisamente igual a $\frac{dy}{dx}$, es decir, a la razón entre la diferencial de la función y la de la variable o, si se quiere, al coeficiente por el cual hay que multiplicar la segunda diferencial para obtener la primera. Es por esta razón que se da algunas veces a la función derivada el nombre de *coeficiente diferencial*”. [23]

---

[23] “Soient toujours $y = f(x)$ une fonction de la variable indépendante x ; i une quantité infiniment petite, et h une quantité finie. Si l’on pose $i = \alpha h$, α sera encore une quantité infiniment petite, et l’on aura identiquement

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha h},$$

d'où l’on conclura

(1) $$\frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} h.$$

La limite vers laquelle converge le premier membre de l’équation (1), tandis que la variable α s’approche indéfiniment de zéro, la quantité h demeurant constante, est de qu’on appelle la différentielle de la fonction $y = f(x)$. On indique cette différentielle par la caractéristique d, ainsi qu’il suit :

dy ou *d f(x)*.

Il est facile d’obtenir sa valeur lorsqu’on connait celle de la fonction dérivée y' ou $f'(x)$. En effet, en prenant les limites des deux membres de l’équation (1), on trouvera généralement

(2) $$d\,f(x) = h\,f'(x).$$

Dans le cas particulière où $f(x) = x,$ l’équation (2) se réduit à

(3) $$dx = h.$$

Una vez definidas las cantidades infinitamente pequeñas, las infinitamente grandes, la continuidad de funciones, la suma de una serie infinita, la derivada y las cantidades diferenciales, todas con sustento en la definición de límite, Cauchy se planteó el problema de definir la integral en concordancia con base en estas ideas.

Hasta antes de Fourier, aunque se reconocía a la integral como un proceso de suma infinita de diferenciales, a la manera de Leibniz y Euler, la visión preponderante para obtener las integrales de las funciones consistía en hacer uso del principio fundamental del cálculo e identificar a la integral por medio del proceso inverso a la diferenciación. Las sumas sólo se empleaban en caso de que la antidiferenciación resultara muy complicada o se pretendiera, quizá por lo mismo, hacer aproximaciones mediante el cálculo de áreas.

Cauchy tenía ante si el reto de definir a la integral con base en la noción de límite y apoyado en los objetos creados, como el de derivada y diferencial, que si bien, insistimos, son de algún modo similares a los diferenciales originalmente surgidos en el cálculo de Leibniz, se trataba ya de otros objetos matemáticos, son límites de cantidades variables de naturaleza finita.

Esta idea se expresó en los comentarios preliminares de Cauchy [1823: 11]:

"En el cálculo integral, me pareció necesario demostrar generalmente la existencia de las integrales o las funciones primitivas antes de dar a conocer sus propiedades diversas. Para lograr eso, primero hubo que establecer la noción de *integrales tomadas entre límites definidos dados* o *integrales definidas*. De estas últimas que podían ser algunas veces infinitas o indeterminadas, era esencial investigar en cuáles casos conservan un valor único y finito. El medio más simple de resolver la cuestión es el empleo de *integrales definidas singulares* que son el objeto de la 25 ª Lección. Además, entre los valores en número infinito, que se puede atribuir a una integral indeterminada, existe uno que merece una

---

Ainsi la différentielle de la variable indépendante x n'est autre chose que la constant finie h. Cela posé, l'équation (2) deviendra

(4) $$d\,f(x) = f'(x)dx$$

ou, ce qui revient au même,

(5) $$dy = y'dx.$$

Il résulte de ces dernières que la dérivée $y' = f'(x)$ d'une fonction quelconque $y = f(x)$ est précisément égale à $\frac{dy}{dx}$, c'est-à dire au rapport entre la différentielle de la fonction et celle de la variable ou, si l'on veut, au coefficient par lequel il faut multiplier la seconde différentielle pour obtenir la première. C'est pour cette raison qu'on donne quelquefois à la fonction dérivée le nom de coefficient différentiel".

atención particular, y que nombramos *valor principal*. La consideración de las integrales definidas singulares y la de los valores principales de las integrales indeterminadas son muy útiles en la solución de una gran cantidad de problemas. Deducimos de eso un gran número de fórmulas generales propias de la determinación de integrales definidas, y semejantes a aquellas a las que di en un Informe presentado al Instituto en 1814. Encontraremos en las Lecciones 34 y 39 una fórmula de este género aplicado a la valuación de varias integrales definidas, de la que algunas ya son conocidas".[24]

Como vemos, el camino de Cauchy eludió partir de los procesos de anitiderivación o antidiferenciación, y primero trató con las que hoy conocemos como integrales definidas. Este es el camino originalmente tomado por Leibniz, quien caracterizaba a las integrales como sumas de cantidades diferenciales y fue retomado por Fourier para integrar funciones de difícil antidiferenciación. En el caso de Cauchy, al elegir este camino, sin una versión de diferenciales como la de Leibniz y Euler, el proceso de antidiferenciación no conducía de manera clara a la obtención de funciones primitivas a las que fuera posible aplicar el principio fundamental del cálculo. Por ello debían probarse las propiedades de la integral y la relación entre las integrales definidas y las indefinidas o antiderivadas.

Cauchy estableció las propiedades que relacionan ambos tipos de integrales en tres teoremas, que en conjunto hoy podemos identificar con el nombre genérico de Teorema Fundamental del Cálculo. En las próximas líneas mostramos la presentación de Cauchy.

El punto de partida es considerar una función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[x_0, X]$, con la noción de continuidad establecida por él mismo, la cual persiste hasta nuestros días. Procede entonces, a tomar una partición del intervalo, con nuevos valores

[24] "Dans le calcul intégral, il m'a paru nécessaire de démontrer généralement l'existence des *intégrales* ou *fonctions primitives* avant de faire connaître leurs diverses propriétés. Pour y parvenir, il a fallu d'abord établir la notion *d'intégrales prises entre des limites données* ou *intégrales définies*. Ces dernières pouvant être quelquefois infinies ou indéterminées, il était essentiel de rechercher dans quels cas elles conservent une valeur unique et finie. Le moyen le plus simple de résoudre la question est l'emploi des *intégrales définies singulières* qui sont l'objet de la 25ª Leçon. De plus, parmi les valeurs en nombre infini, que l'on peut attribuer à une intégrale indéterminée, il en existe une qui mérite une attention particulière, et que nous avons nommée *valeur principale*. La considération des intégrales définies singulières et celle des valeurs principales des intégrales indéterminées sont très-utiles dans la solution d'une foule de problèmes. On en déduit un grand nombre de formules générales propres à la détermination des intégrales définies, et semblables à celles que j'ai données dans un Mémoire présenté à l'Institut en 1814. On trouvera dans les Leçons 34 et 39 une formule de ce genre appliqué à l'évaluation de plusieurs intégrales définies, dont quelques-unes étalent déjà connues." Página 11 de Résume des leçons donnes a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal.

$x_1, x_2, x_3, \cdots x_{n-1}$ que pueden ir creciendo o decreciendo desde el primer punto del intervalo hasta el segundo, dividiendo la diferencia $X - x_0$ en los elementos

(1) $$x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2,\ \cdots, X - x_{n-1}$$

que tendrán el mismo signo. Tomemos ahora los valores de *f(x)* al inicio de cada subintervalo formado y formemos la suma

(2) $$S = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + \cdots + f(x_{n-1})(X - x_{n-1})$$

La partición más sencilla que puede tomarse se reduce a los dos puntos extremos del intervalo, en cuyo caso tendremos

(3) $$S = (X - x_0) f(x_0)$$

Dado que el valor de la suma depende tanto del número de elementos en los cuales se dividió la diferencia $X - x_0$, como de la forma en que se hizo la división, que influye en la magnitud de las diferencias intermedias, Cauchy [1823: 123] se planteó la necesidad de demostrar que "…si los valores numéricos de los elementos se vuelven muy pequeños y el número *n* muy grande, el modo de división no tendrá más que una influencia insensible sobre el valor de *S*".[25]

Para su demostración emplea el teorema III (específicamente su corolario) de Cauchy [1821: 28], que dice

"TEOREMA III.- Sean $b, b', b'', \cdots$ *n* cantidades del mismo signo y $a, a', a'', \cdots$ otras *n* cantidades cualesquiera. Si $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots$ designan *n* cantidades del mismo signo, entonces la fracción

$$\frac{\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \cdots}{\alpha b + \alpha' b' + \alpha'' b'' + \cdots}$$

será la media entre las siguientes fracciones

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \cdots$$

[25] "… si les valeurs numériques des éléments deviennent très petites et le nombre n très considérable, le mode de division n'aura plus sur la valeur de S qu'une influence insensible".

Corolario.- Si suponemos $b = b' = b'' = \cdots = 1$, concluiremos del teorema precedente que la suma $\alpha a + \alpha' a + \alpha'' a'' + \cdots$ es equivalente al producto de $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \cdots$ por una media entre las cantidades $a, a', a'', \cdots$".[26]

Tomando en cuenta el corolario de este corolario, considera entonces que S es el producto de la suma de las diferencias entre los puntos de la partición y una media de los valores $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_{n-1})$ y, señala que cada coeficiente $f(x_i)$ puede expresarse por medio de $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$, donde θ es un número entre 0 y 1. Aplica entonces el teorema del valor intermedio para concluir que la media de los coeficientes es un número de esa forma, pues la media de $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_{n-1})$ debe ser un valor de la función continua en algún punto del intervalo. Consecuentemente la media también debe poder expresarse por $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$, para algún θ entre 0 y 1. Entonces podemos expresar la suma mediante

(4) $$S = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

Tomemos ahora una partición (Cauchy no usó la expresión "partición") más fina del intervalo $[x_0, X]$, de tal manera que cada uno de los nuevos subintervalos que se formen, quede dentro de los anteriores. De aquí que en (2) podemos sustituir $(x_1 - x_0) f(x_0)$ por $(x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)]$ donde $0 < \theta_0 < 1$. análogamente el producto $(x_2 - x_1) f(x_1)$

[26] "THÉOREME III.- Soient $b, b', b'', \cdots$ plusieurs quantités de même signe en nombre n, et $a, a', a'', \cdots$ des quantités quelconques en nombre égal à celui des premières. Si $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots$ désignent encore des quantités de même signe, fraction

$$\frac{\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \cdots}{\alpha b + \alpha' b' + \alpha'' b'' + \cdots}$$

sera moyenne entre les suivantes

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \cdots$$

Corollaire.-Si l'on suppose $b = b' = b'' = \cdots = 1$, on conclura du théorème précédent que la somme $\alpha a + \alpha' a + \alpha'' a'' + \cdots$ est équivalent au produit de $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \cdots$ par une moyenne entre les quantités $a, a', a'', \cdots$".

podemos sustituirlo por $(x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)]$, donde $0 < \theta_1 < 1$. Continuando con este proceso para cada producto de esta forma, llegamos a que la suma S puede expresarse ahora mediante

$$S = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \cdots$$
$$+ (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]$$

Hacemos ahora

$$f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] = f(x_0) \pm \varepsilon_0, \quad f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] = f(x_1) \pm \varepsilon_1, \cdots,$$
$$f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] = f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}$$

de tal manera que la suma S se puede expresar como

$$S = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \cdots + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}]$$

Desarrollando este producto tenemos

(7)
$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) +$$
$$+ (x_1 - x_0)\varepsilon_0 \pm (x_2 - x_1)\varepsilon_1 \pm \cdots \pm (X - x_{n-1})\varepsilon_{n-1}$$

Posteriormente en Cauchy [1823: 124] se dice:

"Añadamos que, si los elementos $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \cdots, X - x_{n-1}$ tienen valores numéricos muy pequeños, cada una de las cantidades $\pm\varepsilon_0, \pm\varepsilon_1, \cdots, \pm\varepsilon_{n-1}$ diferirá muy poco de cero y, en consecuencia, así será también la suma

$$\pm\varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \cdots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1})$$

que es equivalente al producto de $X - x_0$ por una media entre estas cantidades diversas".[27]

De aquí Cauchy argumenta que las expresiones (2) y (7) no son - como quería demostrar - sensiblemente diferentes, es decir, que el valor de S no se altera sensiblemente al pasar de una división de $X - x_0$ en subintervalos muy pequeños, a otra en la que cada subintervalo de éstos se encuentre a su vez subdivido en muchos otros. Continuando con este razonamiento, en Cauchy [1823: 125] escribe

---

[27] "Ajoutons que, si les éléments $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \cdots, X - x_{n-1}$ ont des valeurs numériques tres petite, chacune des quantités $\pm\varepsilon_0, \pm\varepsilon_1, \cdots, \pm\varepsilon_{n-1}$, diffèrera tres peu de zèro, et par suite il en sera de même de la somme

$$\pm\varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \cdots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1})$$

qui est équivalent au produit de $X - x_0$ par une moyenne entre ces diverses quantités".

"Concibamos ahora que se consideran a la vez dos modos de división de la diferencia $X - x_0$, en cada uno de los cuales los elementos de esta diferencia tuvieran valores numéricos muy pequeños. Podremos comparar estos dos modos con un tercer modo elegido de tal manera que cada elemento, ya sea del primero o del segundo modo se encuentre formado por la reunión de varios elementos del tercero. Para que esta condición se cumpla, bastará que todos los valores de x, interpuestos en los dos primeros modos entre los límites x_0, X, sean empleados en el tercero, y probaremos que se altera muy poco el valor de S pasando del primero o del segundo modo al tercero, por consiguiente pasando del primero al segundo. Luego, cuando los elementos de la diferencia $X - x_0$ devienen infinitamente pequeños, el modo de división no tiene sobre el valor de S más que una influencia insensible; y, si se hacen decrecer indefinidamente los valores numéricos de estos elementos, aumentando su número, el valor de S terminará por ser sensiblemente constante o, en otros términos, acabará por alcanzar un cierto límite que únicamente dependerá de la forma de la función *f(x)* y de los valores extremos x_0 y X atribuidos a la variable x. Este límite es lo que se llama *integral definida*".[28]

Para concluir la primera parte de su exposición de la integral como límite de una suma, Cauchy [1823: 126] atiende el problema de la notación diciendo "…convenimos colocar estos dos valores, el primero debajo, el segundo arriba de la letra $\int$, o de escribirlos al lado de la integral, que designamos en consecuencia, por una de las notaciones

[28] "Concevons a présent que l'on considère a la fois deux modes de division de la différence $X - x_0$, dans chacun desquels les éléments de cette différence aient de très petites valeurs numériques. On pourra comparer ces deux modes à un troisième tellement choisi que chaque élément, sois du premier, sois du second mode se trouve formé par la réunion de plusieurs éléments du troisième. Pour que cette condition sois remplie, il suffira que toutes les valeurs de x, interposées dans les deux premiers modes entre les limites x_0, X, soient employées dans le troisième, et l'on prouvera que l'on altère très peu la valeur de S en passant du premier ou de second mode au troisième, par conséquent en passant du premier au second. Donc, lorsque les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent infiniment petits, le mode de division n'a plus sur le valeur de S qu'une influence insensible; et, si l'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de ces éléments, en augmentant leur nombre, la valeur numériques de ces éléments, en augmentant leur nombre, la valeur de S finira par être sensiblement constante ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction *f(x)* et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x. Cette limite est ce qu'on appelle une intégrale définie".

(10) $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \qquad \int f(x)\,dx\begin{bmatrix} x_0 \\ X \end{bmatrix} \qquad \int f(x)\,dx\begin{bmatrix} x = x_0 \\ x = X \end{bmatrix}$

La primera de estas notaciones, imaginada por M. Fourier, es la más simple”.[29]

Como ejemplo de la notación, ejemplifica con los casos sencillos de obtener

$\int_{x_0}^{X} a\,dx = a(X - x_0)$ y, haciendo $a = 1$, $\int_{x_0}^{X} dx = X - x_0$.

De esta manera, Cauchy definió la integral retomando la concepción de la misma como suma, pero su tratamiento es aritmético, con el propósito de establecerla como un límite. Con los significados de sus predecesores, que asociaban estas sumas con las áreas de figuras, podemos establecer un nexo entre los procedimientos aritméticos y las nociones geométricas, sin dejar de reconocer la “limpieza” con la cual Cauchy elude los aspectos relacionados con el cálculo de áreas al definir la integral.

Por otra parte, en su demostración de existencia de la integral a partir de la continuidad de la función, Cauchy en realidad hace uso de la continuidad uniforme de una función, la cual asume sin distinción de la simple continuidad. Nos referimos a que, por ejemplo, para asegurar que la suma *S* no se altera sensiblemente al pasar de una subdivisión de $[x_0, X]$ a otra en la que cada subintervalo se encuentre a su vez, dividido en otros muy pequeños, se requiere de la continuidad uniforme. Este aspecto será posteriormente retomado por Riemann.

De cualquier manera, con la integral así definida, se avanza en la fundamentación del análisis un escalón más, pues ahora la integral puede tratarse por medio de las leyes del álgebra de las cantidades finitas, dando un tratamiento infinitesimal mediante la noción de límite. Sin embargo, ¿cuál es la relación entre la derivada, los diferenciales y la integral? En estas condiciones no es posible asumir el principio fundamental del cálculo y esta relación deberá establecerse por medio de tratamientos que demuestren la validez de aplicarlo, convirtiéndolo ya no en principio, sino en un teorema, nombre con el que precisamente se le conoce hasta nuestros días: teorema fundamental del cálculo. Cabe hacer la aclaración de

---

[29] “… on est convenu de placer ces deux valeurs, la première au-dessous, la seconde au-dessus de la lettre $\int$, ou de les écrire à côté de l’intégrale, que l’on désigne en conséquence par l’une des notations

(10) $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \qquad \int f(x)\,dx\begin{bmatrix} x_0 \\ X \end{bmatrix} \qquad \int f(x)\,dx\begin{bmatrix} x = x_0 \\ x = X \end{bmatrix}$

La première de ces notations, imaginée par M. Fourier, est la plus simple”.

que Cauchy no lo denominó con ese nombre, pero presentó y demostró una versión del mismo, con base en sus definiciones de derivada y de integral.

Para hacerlo, profundiza en su caracterización y tratamiento de la integral. A partir de considerar la división del intervalo $X - x_0$ en elementos infinitamente pequeños $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, $\cdots$, $X - x_{n-1}$, la suma

(2) $S = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + \cdots + f(x_{n-1})(X - x_{n-1})$ en Cauchy [1823: 129] escribe

"… convergerá hacia un límite representado por la integral definida $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$".[30]

Establece después, en Cauchy [1823: 129] que

$$\int_{X}^{x_0} f(x)\,dx = -\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

"Cuando se intercambian, en esta última fórmula, las cantidades x_0 y X, así como todos los términos colocados a distancias iguales de ambos extremos en la sucesión $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots x_{n-1}, X$, obtenemos un nuevo valor de S igual, pero opuesto en signo, …".[31]

Asimismo, señala que con la expresión (2) para S o, tomando los valores de la función en el extremos superior de cada subintervalo para obtener

(8) $S = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + f(x_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(X)(X - x_{n-1})$

las cuales se emplean … "en la búsqueda de valores aproximados de las integrales definidas".[32]

Sin embargo, dado que el límite de estas cantidades es la integral definida, Cauchy obtiene el valor de las mismas en algunos casos específicos. En sus cálculos toma una partición con puntos $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots x_{n-1}, X$ formando una progresión geométrica y hace el

---

[30] "… convergera vers une limite représentée par l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$". Página 128 de Résume des leçons donnes a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal.

[31] "Lorsque, dans cette dernière formule, on échange entre elles les deux quantités x_0 y X, ainsi que tous les termes placés à égales distances des deux extrêmes dans la suite $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots x_{n-1}, X$ on obtient une nouvelle valeur de S égale, mais opposée de signe, …".

[32] "… dans la recherche des valeurs approchées des intégrales définies".

cambio de variable $\left(\frac{X}{x_0}\right)^{\frac{1}{n}} = 1+\alpha$. Entre sus ejemplos están las siguientes integrales definidas:

$$\int_{x_0}^{X} x\,dx = \lim \frac{(X-x_0)(X+x-i)}{2} = \lim \frac{X^2 - x_0{}^2}{2+\alpha} = \frac{X^2 - x_0{}^2}{2},$$

$$\int_{x_0}^{X} A^x dx = \lim \frac{i(A^X - A^{x_0})}{A^i - 1} = \frac{A^X - A^{x_0}}{lA},$$

$$\int_{x_0}^{X} e^x dx = e^X - e^{x_0},$$

$$\int_{x_0}^{X} a^x dx = \lim \frac{\alpha\left(X^{a+1} - x_0{}^{a+1}\right)}{(1+\alpha)^{a+1} - 1} = \frac{X^{a+1} - x_0{}^{a+1}}{a+1},$$

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x} = \lim n\alpha = l\,\frac{X}{x_0}.$$

Con el mismo procedimiento de sólo considerar el límite de S en (2) y (8), determina algunas propiedades de la integral, que posteriormente emplea en el cálculo de otras integrales, a partir de las conocidas:

(9) $$\int_{x_0}^{X} a\,\varphi(x)\,dx = \lim a[(x_1 - x_0)\varphi(x) + \cdots + (X - x_{n-1})\varphi(x)] = a\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx,$$

(10) $$\int_{x_0}^{X} f(x+a)\,dx = \lim[(x_1 - x_0)f(x+a) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x+a)] = \int_{x_0+a}^{X+a} f(x)\,dx,$$

(11) $$\int_{x_0}^{X} f(x-a)\,dx = \int_{x_0-a}^{X-a} f(x)\,dx,$$

(12) $$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x-a} = \int_{x_0-a}^{X-a} \frac{dx}{x} = l\,\frac{X-a}{x_0-a}$$

Asimismo, demuestra lo que hoy llamamos "teorema del valor medio para integrales", esto es $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)]$, para algún θ entre *0* y *1*. Este resultado lo empleará después, como veremos, en la demostración del teorema fundamental del cálculo.

Establece también las siguientes propiedades:

Si $f(x) = \varphi(x) + \chi(x) + \psi(x) + \cdots$, entonces

(13) $$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} \chi(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} \psi(x)\,dx + \cdots$$

(14) $\int_{x_0}^{X}(u+v+w+\cdots)\,dx = \int_{x_0}^{X} u\,dx + \int_{x_0}^{X} v\,dx + \int_{x_0}^{X} w\,dx + \cdots,$

(15) $\int_{x_0}^{X}(u+v)\,dx = \int_{x_0}^{X} u\,dx + \int_{x_0}^{X} v\,dx,$

(16) $\int_{x_0}^{X}(u-v)\,dx = \int_{x_0}^{X} u\,dx - \int_{x_0}^{X} v\,dx,$

(17) $\int_{x_0}^{X}(au+bv+cw+\cdots)\,dx = a\int_{x_0}^{X} u\,dx + b\int_{x_0}^{X} v\,dx + c\int_{x_0}^{X} w\,dx + \cdots$

(18) $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx$

El siguiente paso en su exposición es la demostración de lo que llamamos el teorema fundamental del cálculo, sin recurrir a la intuición o al tratamiento de áreas. Su argumento es que si en lugar de un valor fijo X para el límite superior de la integral tomamos una cantidad variable x, entonces la integral misma será una nueva función, lo cual denota mediante $\mathfrak{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$. Aplica entonces la propiedad (18) para llegar a que $\mathfrak{F}(x+\alpha) - \mathfrak{F}(x) = \int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)\,dx$ y, aplicando el teorema del valor medio para integrales, $\mathfrak{F}(x+\alpha) - \mathfrak{F}(x) = \alpha\, f(x+\theta\alpha)$ para algún valor de θ entre *0* y *1*. Dividiendo por α y calculando el límite cuando $\alpha \to 0$, tenemos

$$\lim \frac{\mathfrak{F}(x+\alpha) - \mathfrak{F}(x)}{\alpha} = \mathfrak{F}'(x) = f(x)$$

la cual representa la primera versión del teorema fundamental del cálculo establecida por Cauchy, aunque, como ya dijimos, él no le pone tal denominación. Similarmente prueba que $\int_{x}^{X} f(x)\,dx = -\int_{X}^{x} f(x)\,dx$

Finalmente diremos que Cauchy se cuestionó sobre la integrabilidad de funciones que tienen discontinuidades infinitas aisladas, es decir aquellas en las que $\lim_{x\to X} f(x) = \pm\infty$ pero son continuas en el intervalo $[x_0, X-\varepsilon]$ para todo $\varepsilon > 0$, definió la integral de *f(x)* en $[x_0, X]$ como $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx$, siempre que este límite exista. Ésta es la llamada integral impropia.

De esta manera presentamos las nociones principales en la construcción de integral de Cauchy, en la cual hemos mostrado cómo en sus demostraciones, se modificaron las nociones esenciales del cálculo y/o el análisis, tomando como eje la convergencia y continuidad de las funciones, en el sentido establecido por él mismo. Con los trabajos de Cauchy se inauguró un periodo de las matemáticas identificado como de rigor lógico en el análisis, considerándolo, a él mismo como prototipo de lo que significa ser riguroso en matemáticas. Sin embargo, dado que las funciones conocidas en su época eran aún limitadas y no se vislumbraban algunos problemas propios de la formalidad, asumió concepciones que en su momento, fueron objeto de crítica, como el caso de la completez del sistema de los números reales o la continuidad uniforme, que en su momento señalamos.

Algunos de estos problemas surgieron con los trabajos de matemáticos como Bolzano, Dirichlet y otros. Precisamente para presentar los trabajos de Riemann, quien reformuló la integral de Cauchy para darle una forma que es prácticamente la misma que aparece en los cursos actuales de cálculo o de análisis, nos referiremos primero a los trabajos de Dirichlet, quien hizo algunas aportaciones importantes.

Dirichlet llamó la atención sobre la existencia de funciones que eran discontinuas en una infinidad de puntos y se cuestionó sobre la posibilidad de extender la noción de integrabilidad a este tipo de funciones. Su interés estuvo motivado por el tratamiento que dio a las series de Fourier, preguntándose cuándo una expresión de la forma

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k sen\, kx$$

era convergente, de tal manera que las funciones pudieran representarse por medio de una serie de senos y cosenos, cuestión que Fourier consideraba de validez general para todas las funciones. En este tipo de series, como había establecido Fourier, los coeficientes estaban dados por

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\, sen\frac{n\pi x}{a}dx$$

Pero Dirichlet mostró la existencia de funciones cuya integral no existía y por lo tanto la representación en series de senos y cosenos no era posible de realizarse. Quizá la más famosa de estas funciones es aquella que lleva su nombre y está determinada por

$$f(x)=\begin{Bmatrix} 0 & si & x\in Q \\ 1 & si & x\in I \end{Bmatrix} \qquad\qquad x\in[0,1]$$

Dirichlet construyó otras funciones que no eran integrables (con la definición de Cauchy) y de hecho se reconoce que fue el primer matemático que habló de funciones sin necesidad de tener expresiones algebraicas que establecieran la regla de correspondencia entre variables dependientes e independientes.

Regresando a la suma S_n, Dirichlet demostró que podía ser expresada mediante

$$S_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\frac{sen\,\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{sen\,\frac{x-\alpha}{2}} \tag{19}$$

Sin embargo, la representación no siempre es posible. Riemann [1854: 236-237] se refirió al trabajo de Dirichlet, publicado en 1829, describiendo que "… podemos, evidentemente, si la función no pasa un número infinito de veces de creciente a decreciente y vice-versa, descomponer la integral (19) en un número finito de términos, del que una converge hacia $\frac{1}{2}f(x+0)$, otra hacia $f(x-0)$, y todas las demás hacia *0*, cuando *n* crece al infinito.

De ahí resulta que se puede representar por una serie trigonométrica toda función que se reproduce periódicamente después del intervalo 2π. Y

1º Que sea generalmente susceptible de integración.

2º Que no tiene un número infinito de máximos y de mínimos;

3º Que, en caso de que su valor varíe precipitadamente, tome el valor medio entre los valores límites tomados de una y otra parte de la discontinuidad".[33]

---

[33] "… on peut, évidemment, si la fonction ne passe pas un nombre infini de fois d'une marche croissante à une marche décroissante et vice versa, décomposer l'intégrale (19) en un nombre fini de termes, dont l'un converge vers $\frac{1}{2}f(x+0)$, un autre vers $\frac{1}{2}f(x+0)$, et tous les autres vers *0*, lorsque *n* croît à l'infini.

De là résulte que l'on peut représenter par une série trigonométrique toute fonction se reproduisant périodiquement après l'intervalle 2π. Et

1º Qui este généralement susceptible d'intégration

2º Qui n'a pas un nombre infini de maxima et de minima ;

3º Qui, dans le cas où sa valeur varie brusquement, prend la valeur moyenne entre les valeurs limites prises de part et d'autre de la discontinuité".

Las condiciones establecidas por Dirichlet estaban orientadas a garantizar la integrabilidad de las funciones involucradas. La susceptibilidad de integración implicaba, entre otras cosas, que las funciones fueran discontinuas en a lo más una cantidad finita de puntos, aunque llegó a pensar que podría extender la noción de integral para incluir a funciones con una infinidad de puntos de discontinuidad. Sin embargo, jamás logró superar los "detalles" que le hacían falta para hacer esa extensión. La resolución de estas cuestiones le permitiría resolver definitivamente la pregunta sobre cuándo es posible desarrollar una función mediante su serie de Fourier.

Bernhard Riemann parte de este problema y en 1854 publica el artículo "Uber die Darstellbarket einer Function durch eine trigonometrische Reine", al cual hicimos ya referencia, de su traducción al francés con el nombre de "Représentation d'une fonction par une série trigonométrique" y es el mismo en que refiere a los trabajos de Dirichlet. Después de hacer una breve descripción histórica del problema de la representación en series trigonométricas, desde la solución de D'alembert y Euler al problema de la cuerda vibrante hasta los trabajos de Dirichlet, Riemann [1854: 239] retoma los trabajos de Dirichlet en el punto en el cual los dejó, con el siguiente cuestionamiento: "La incertidumbre que todavía reina en algunos conocidos puntos fundamentales de la teoría de las integrales definidas nos obliga a hacer aquí algunas observaciones sobre la noción de integral definida, y sobre la generalidad de la que es susceptible.

Y lo primero es ¿Qué se debe entender por

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ ?"}$$ [34]

La respuesta que Riemann [1854: 239-240] da inmediatamente después a esta pregunta es la reformulación de la integral de Cauchy.

"Para responder a esta cuestión, tomemos entre *a* y *b*, una sucesión de valores $x_1, x_2, x_3, \cdots x_{n-1}$, arreglados por orden de tamaño, desde *a* hasta *b*, y designemos, para

[34] "L'incertitude qui règne encore sus quelques points fondamentaux de la théorie des intégrales définies nous oblige à placer ici quelques remarques sur la notion de l'intégrale définie, et sur la généralité dont elle est susceptible.

Et d'abord que doit-on entendre par $\int_a^b f(x)\,dx$?".

abreviar, $x_1 - a$ por δ_1, $x_2 - x_1$ por $\delta_2, \cdots, b - x_{n-1}$ por δ_n; sean, además ε_i, números positivos más pequeños que la unidad. Es claro que el valor de la suma

$$S = \delta_1 f(a+\varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1+\varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2+\varepsilon_3\delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1}+\varepsilon_n\delta_n)$$

dependerá de la elección de los intervalos y la función. Si la misma tiene la propiedad, de que cualquiera que sea la forma en la cual los δ y los ε sean escogidos, de acercarse indefinidamente al límite fijo *A*, cuando las δ tienden todas hacia cero, este límite se llama *el valor de la integral definida* $\int_a^b f(x)\,dx$".[35]

Posteriormente se analiza el caso en el cual la función f "deviene a infinito" cuando *x* se acerca a un valor particular *c* en *(a,b)* pero $\int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx + \int_{c+\alpha}^b f(x)\,dx$ tiende a un límite fijo cuando α "deviene infinitamente pequeño", entonces ese límite es la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Notemos que en su presentación, Riemann hace algunas pequeñas variaciones a la definición de Cauchy. La primera de ellas es que no establece condiciones de continuidad ni de otro tipo, sobre las funciones a integrar, sólo condiciona la existencia de la integral a la existencia del límite de la suma especificada.

Otra modificación consiste en tomar valores $f(x_{i-1}+(x_i - x_{i-1})\varepsilon_i)$ de *f(x)* en puntos arbitrarios dentro de cada subintervalo de *[a,b]*, en lugar de hacerlo en el extremo inferior de cada uno de ellos.

El siguiente paso, consecuentemente, fue la determinación de las condiciones de integrabilidad de las funciones. En Riemann [1854: 241] tenemos "Investiguemos ahora la

[35]"Pour répondre à cette question, prenons entre *a* y *b* une série de valeurs $x_1, x_2, x_3, \cdots x_{n-1}$, rangées par ordre de grandeur, depuis *a* jusqu'à *b*, et désignons pour abréger $x_1 - a$ par δ_1, $x_2 - x_1$ par $\delta_2, \cdots, b - x_{n-1}$ par δ_n; soient, en outre, ε_i des nombres positifs plus petits que l'unité. Il est clair que le valeur de la somme

$$S = \delta_1 f(a+\varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1+\varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2+\varepsilon_3\delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1}+\varepsilon_n\delta_n)$$

Dépendra du choix des intervalles δ et des fractions ε. Si elle a la propriété, de quelque manière que les δ et les ε puissent être choisis, de s'approcher indéfiniment d'un limite fixe *A*, quand les δ tendent tous vers zéro, cette limite s'appelle *la valeur de l'intégrale définie* $\int_a^b f(x)\,dx$".

extensión y el límite de la definición precedente, y planteémonos esta cuestión: ¿en cuáles casos una función es susceptible de integración? ¿en cuáles casos no lo es? ”[36]

Para su análisis, Riemann comienza con el caso más estrecho de su definición, sin la extensión a las integrales impropias, por lo que sólo toma funciones acotadas y supone que la integral existe, esto es, que *S* tiende a un límite fijo cuando todas las δ tienden a cero. Consideremos ahora la partición del intervalo [a,b] como antes y denotemos por D_i la *oscilación* de la función en el *i*-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, esto es, la diferencia entre el mayor y el menor valor de f en $[x_{i-1}, x_i]$. Continuando, formemos ahora la suma $D = \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$, a la que llamaremos *oscilación total*. Entonces, obviando la completez del sistema de los números reales, establece que la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existe si y sólo si la oscilación total D tiende a cero cuando δ tiende a cero, esto es, $\lim_{\delta \to 0}(\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n) = 0$.

Denotemos ahora mediante Δ al máximo valor de todas las oscilaciones totales, considerando todas las particiones en las que todas las δ cumplen con $\delta \le d$. Claramente Δ depende de d, es decreciente y deviene infinitamente pequeña con *d*. Así, f será integrable si y sólo si $\lim_{d \to 0} \Delta = 0$.

Ahora, si tomamos $\sigma > 0$ y denotamos por *s* a la suma de las longitudes de todos los δ de los subintervalos en los cuales las oscilación de la función es mayor a σ, la contribución de esos subintervalos a la suma $D = \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ será mayor o igual a σs. Tendremos entonces que $\sigma s \le D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \cdots + D_n\delta_n$, de donde $s \le \dfrac{\Delta}{\sigma}$.

En Riemann [1854: 242] se escribe

“$\dfrac{\Delta}{\sigma}$ puede, por otra parte, si σ es fijo y dado, hacerse infinitamente pequeño por una elección conveniente de *d*; lo mismo podrá decirse para *s*, y podemos enunciar la proposición siguiente:

[36] “Recherchons maintenant l’étendue et la limite de la définition précédente, et posons-nous cette question : dans quels cas une fonction est-celle susceptible d’intégration ? dans quels cas ne l’est elle pas ?”.

Para que la suma *S* converja, cuando todos los δ devienen infinitamente pequeños, hace falta no sólo que la función permanezca finita, sino que la suma total de los intervalos para los cuales las oscilaciones son más grandes que σ, cualquiera que sea σ, pueda hacerse infinitamente pequeña por una elección conveniente de *d*.

Esta proposición admite una recíproca:

Si la función *f(x)* siempre es finita, y si, por el decrecimiento indefinido de todas las cantidades δ, el tamaño total de los intervalos en los cuales las oscilaciones de la función son más grandes que una cantidad dada σ siempre puede hacerse infinitamente pequeño, la suma S converge cuando todos los δ tienden hacia cero".[37]

De esta manera Riemann estableció las condiciones de suficiencia para que una función fuera integrable. Es de notarse que no incluyó el requisito de continuidad de las funciones para su integrabildad y, de hecho, tuvo cuidado de no incluirlo, atendiendo al problema de la continuidad uniforme, que sólo fue establecida formalmente con posterioridad, en los trabajos de 1870 de Weirstrass.

Para concluir con el análisis de los trabajos de Riemann diremos que lo que sí hizo fue tratar el caso inverso, esto es, mostrar una función discontinua en una infinidad de puntos que es integrable. Para dar un ejemplo de este tipo, ante el reducido espectro de funciones aún manejadas en su época, se da a la tarea de construirlo. Dicha función "extraña" es definida de la siguiente manera:

Primero construye la función cuyo valor es $x - m(x)$ para valores de x reales diferentes a los múltiplos impares de *1/2*, donde *m(x)* denota el entero más cercano a *x*. En caso de que *x* sea un múltiplo impar de *1/2* le asigna el valor *0*, esto es $(x) = 0.$ La gráfica de esta función es la siguiente:

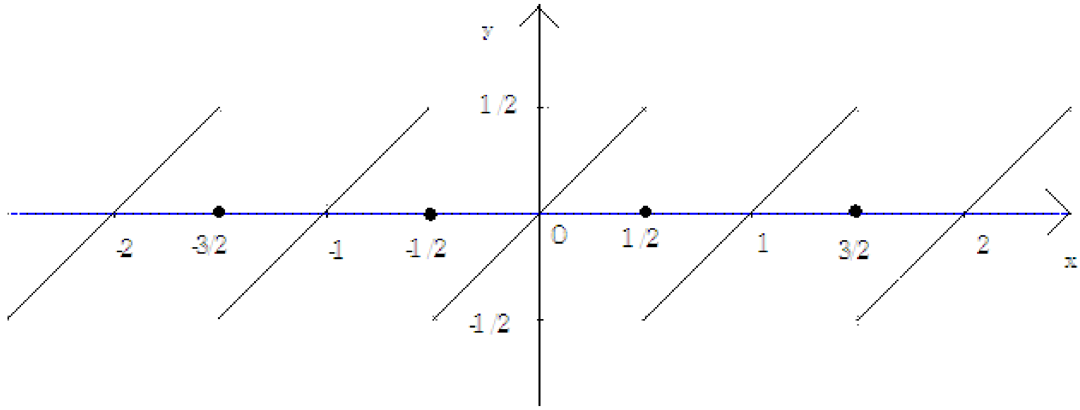
---

[37] "… $\frac{\Delta}{\sigma}$ peut d'ailleurs, si σ est fixe et donné, être rendu infiniment petit par un choix convenable de *d* ; il en sera donc de même de *s*, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Pour que la somme S converge, quand tous les δ deviennent infiniment petits, il faut non seulement que la fonction demeure finie, mais encore que la somme totale des intervalles pour lesquels les oscillations sont plus grandes que σ, quel que soit σ, puisse être rendue infiniment petite par un choix convenable de d.

Cette proposition admet une réciproque :

Si la fonction f(x) est toujours finie, et si, par le décroissement indéfini de toutes les quantités δ, la grandeur totale s des intervalles lesquels les oscillations de la fonction sont plus grandes qu'une quantité donnée σ peut toujours être rendue infiniment petite, la somme S converge quand tous les δ tendent vers zéro".



Aunque esta función es discontinua en cada múltiplo impar de ½ y es integrable en cualquier intervalo, no es aún el ejemplo de Riemann. Con base en *(x)* define ahora la siguiente función: $f(x)=\frac{(x)}{1^2}+\frac{(2x)}{2^2}+\frac{(3x)}{3^2}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(kx)}{k^2}$.

Esta función es discontinua en todos los valores racionales de x, tales que, expresados en la forma irreductible $\frac{p}{q}$, resulta que q es un múltiplo de *2*. La función es convergente para cualquier valor de x y además es integrable.

3.8 ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS EN CAUCHY Y RIEMANN

Situaciones:

Identificamos las siguientes situaciones problémicas fundamentales en los trabajos de Cauchy y Riemann:

- Fundamentación del cálculo y/o análisis, con base en los principios aritméticos aceptados como de validez general. Las bases sobre las que se había desarrollado el cálculo eran cada vez más cuestionadas y para muchos matemáticos y filósofos resultaba difícil de aceptar la validez de las técnicas que se aplicaban sobre segmentos, áreas y volúmenes infinitamente pequeños como lo hacía Leibniz, o como las cantidades infinitamente pequeñas de las variables generalizadas de Euler, las cuales concebía como "reales ceros" y sobre las nociones de Newton en torno a las razones primeras y razones últimas. Desde la segunda mitad del Siglo XVIII se habían incrementado las propuestas para crear bases más sólidas para el cálculo, cuyas técnicas se reconocían como de gran potencia y utilidad para la resolución de diversos problemas físicos y geométricos.

  Entre los intentos que se habían hecho podemos destacar dos de ellos, de diferente carácter. Por una parte los realizados por L'Huilier y presentados en 1786, en los que el concepto de límite juega el papel central para los fundamentos del cálculo. Por otro lado, los relativos a los trabajos de Lagrange en 1797, con la publicación de su libro Teoría de las Funciones Analíticas, en el que se pretende desarrollar el cálculo sobre bases estrictamente algebraicas, y emerge la noción de derivada de una función.

  Ambos acercamientos son retomados por Cauchy, quien en 1821 publicó su libro "Curso de Análisis", en el que se establecen los principios del cálculo con base en la noción de convergencia, asignando un papel relevante también a la noción de función continua. La noción de diferencial se recupera pero con otro sentido y los problemas de tangentes y razones instantáneas de cambio son ahora desarrolladas en torno a la noción de derivada de una función.

- Adecuación de los resultados y técnicas del cálculo para no modificar los resultados fundamentales como producto de la modificación de sus fundamentos y el empleo de la noción de derivada de una función.

  En algún sentido la derivada de una función podía determinarse con reglas análogas a las de las diferenciales y sus cocientes, pero eso debía ahora probarse con base en la noción de convergencia. Por otro lado, la relación entre las cantidades diferenciales y las integrales, de carácter evidente, que habían conducido a establecer el principio fundamental del cálculo, no era ahora una relación igual de evidente entre la derivada y la integral, lo que condujo a establecer lo que ahora conocemos como el teorema fundamental del cálculo.

  La idea de integral de una función tenía detrás la noción de sumas de áreas infinitamente pequeñas y, consecuentemente, las sumas de las que provenía eran sumas de diferenciales. Pero con la emergencia de la derivada de una función las integrales no podían establecerse de forma análoga, al menos no de forma directa. Para salvar esta situación era necesario buscar la manera de plantear las integrales de forma similar al pasado, lo cual condujo a Cauchy a establecer de nueva cuenta, aunque con una significación diferente, a la noción de diferencial y mantener el procedimiento de integrar diferenciales, no derivadas.

- Establecimiento de las condiciones mínimas para la integrabilidad de una función. Las nuevas situaciones problémicas que iban surgiendo condujeron a modificar la noción de función e incluir relaciones entre variables que no necesariamente podían representarse por medio de una expresión algebraica. Similarmente la concepción de continuidad de funciones vino a desempeñar un papel relevante en esta problemática.

  Ejemplos de funciones de comportamiento “extraño”, discontinuas en todos sus puntos de definición o continuas en todo su dominio de definición pero no derivable en punto alguno, o discontinuas en “muchos” puntos pero integrables, vinieron a plantear la necesidad de establecer las condiciones de integrabilidad de las funciones.

Lenguaje:

- El lenguaje empleado a partir de Cauchy gira en torno al límite y la continuidad de las funciones. Por una parte el límite se constituyó, junto con la noción de función, en el objeto clave para la estructuración del cálculo. Cauchy retomó de Euler el papel de las funciones como el centro de análisis para el estudio de las variables, pero la base con la cual se fundamentaban los objetos y técnicas del cálculo era el límite. Y, en alguna medida, la continuidad de funciones.

  Los objetos básicos del cálculo serán definidos con base en la noción de límite. La importancia que Cauchy le da a los límites queda establecida desde el hecho mismo de que en su libro Cours d'Analyse (1821), la definición de límite aparece en las notas preliminares y se emplea a lo largo del libro. En esos preliminares escribe que "cuando los valores sucesivos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acabará por diferir de éste tan poco como se quiera, este último se llamará el límite de todos los demás".
- Los objetos que se habían venido trabajando en el cálculo, desde la época de Leibniz son también retomados pero ahora con un carácter diferente, con base en la noción de límite. De cualquier manera, en el lenguaje de Cauchy aparecen expresiones como cantidades infinitamente pequeñas, cantidades infinitamente grandes, cantidades diferenciales.

  Pero en el cálculo de Cauchy aparecen ahora otros términos como el de derivada de una función, retomado de la propuesta de Lagrange. Se vuelven frecuentes además expresiones que incluyen la convergencia y la divergencia. Al referirse a la integral de las funciones y su conexión con la derivada y las cantidades diferenciales, aparece la expresión "Teorema Fundamental del Cálculo", en lugar de lo que antes era un principio.
- Con la continuación de la línea desarrollada a partir de Cauchy, aparecen con Riemann otras expresiones que se corresponden a su manera de definir la integral de una función y asumir nuevas situaciones problémicas, asociadas a la fundamentación y aritmetización del cálculo. Por ejemplo, la expresión "condiciones de integrabilidad", "representación de una función por medio de serie trigonométricas", "partición de un intervalo" "norma de una partición" y otros.

Procedimientos:

Aunque el llamado periodo de "aritmetización del análisis" se ubica en el último tercio del siglo XIX, fundamentalmente con los trabajos de Weierstrass, con su definición de límite mediante el criterio $\varepsilon-\delta$, y otros matemáticos como Dedekind, quien introdujo las llamadas cortaduras de los números reales, para asegurar la continuidad y la completez de la recta real. Aunque, en algún sentido, los trabajos de Cauchy abrieron el camino hacia la aritmetización del análisis, su objetivo no estaba orientado en este camino y él mismo empleó explícitamente los recursos geométricos, como en la demostración del teorema del valor intermedio, donde asumió implícitamente la completez de la recta real.

En el caso de la definición de límite de Cauchy, expresada verbalmente, se hacen consideraciones geométricas implícitas, pues el uso de expresiones como "se aproxima tanto como queramos" sugiere situaciones espaciales o, en su defecto, temporales, las cuales son eludidas por Weierstrass con su definición estrictamente aritmética del criterio $\varepsilon-\delta$.

- Caracterización de las funciones incluyendo categorías que se desprenden de los nuevos objetos introducidos, centralmente los de convergencia y continuidad. Anteriormente Euler había aceptado incluir en el universo de funciones a aquellas que requerían de más de una expresión algebraica para establecer la relación entre las variables, pero las caracterizaba como discontinuas.

  Con la definición de Cauchy algunas de esas funciones podían ahora reconocerse como continuas y otras que sólo requieren de una expresión algebraica podían ser discontinuas. El universo de funciones y de curvas que se conocían y trataban en la época de Cauchy eran, en esencia, las mismas que en la segunda mitad del Siglo XVIII y más que agregar nuevas funciones, la concepción establecida de continuidad hacía posible caracterizarlas de otra manera.

- Definición del objeto "derivada de una función" por medio del límite del cociente $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, cuando $h\to 0$. La derivada de una función la toma como la noción fundamental del cálculo diferencial, reemplazando a las diferenciales. Dado su interés en basar el cálculo y/o análisis en nociones que superaran los argumentos filosóficos y metafísicos de Leibniz y Euler, sujetos a numerosas críticas, Cauchy retomó de Lagrange la noción de derivada como eje de su propuesta, pero sin las pretensiones de éste en el sentido de reducir el cálculo al tratamiento algebraico.

El programa de lagrange había fracasado porque su propuesta requería que toda función pudiera expresarse por medio de un desarrollo en serie de potencias, derivado del tratamiento del Teorema de Taylor. Aunque Cauchy retoma a la derivada de una función como eje del cálculo diferencial, lo hace con base a la noción de límite, ubicando el objeto como parte esencial del cálculo y/o análisis, a diferencia de Lagrange, quien partía de la única consideración necesaria era la noción de función en tanto expresión algebraica, a la manera de Euler.

Cauchy demuestra el Teorema de Taylor a partir de la noción de derivada y lo extiende al caso de las funciones de varias variables.

- Definición, con base en la noción de límite, de los objetos del cálculo que se habían venido empleando desde la época de Leibniz. Entre ellos tenemos los de cantidades infinitamente pequeñas y cantidades infinitamente grandes.

  Análogamente, se recupera la noción de diferencial de una función , pero ahora está definida con base en la noción de derivada, en una presentación idéntica a la que tenemos hoy en día en los libros de cálculo y de análisis matemático.

- Caracterización de la integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ como el límite de una suma infinita de productos cuyos factores son de la forma $(x_i - x_{i-1})f(x_i),\ 0 \leq i \leq n,\ i \in \aleph,$ en donde $X = x_n$. Esto es, la definición de integral que expresó Cauchy, retoma la noción original de suma, expresándola sin ninguna referencia geométrica, para establecerla de forma independiente a las derivadas y las diferenciales.

  Una vez establecida la integral realiza procedimientos que lo conducen a establecer las relaciones entre las antiderivadas y las integrales, llegando a presentar una primera versión del Teorema Fundamental del Cálculo.

- Posterior a los desarrollos de Cauchy se multiplicaron las funciones analizadas en el cálculo, construyendo funciones que mostraran comportamientos anómalos, particularmente a la luz de la concepción de continuidad y la posibilidad de que funciones discontinuas fueran integrables.

Consecuentemente, se abordó el problema de determinar las condiciones que una función debería satisfacer para ser integrable.

- Redefinición, por parte de Riemann, de la integral de una función, con base en las nociones de partición de un intervalo, oscilación de la función y norma de la partición. Con base en esta nueva definición, establecimiento de las condiciones de integrabilidad que una función debería satisfacer.

Conceptos:

Los principales conceptos encontrados en Cauchy y Riemann son:

- Retomando al objeto función como base del cálculo y/o análisis, se incorpora el de límite como el eje a partir del cual se deben definir los objetos y las propiedades de los objetos del cálculo, incluyendo la caracterización de algunas de las propiedades de las funciones mismas, como la continuidad, otro de los conceptos que identificamos como central en esta propuesta.

  Aunque los significados atribuidos a los objetos son diferentes a los anteriores, se utilizan en una concatenación lógica que conduce siempre a la noción de convergencia. Así, con base en los límites se definen las cantidades infinitamente pequeñas y con base en éstas se define la continuidad de las funciones.

- Otros conceptos de primer orden son los de derivada, diferencial, integral de una función. Una vez definida la derivada de una función y establecidas las reglas básicas de derivación, Cauchy define a la diferencial de una función con base en la noción de derivada y con ello, una vez más de forma indirecta, define lo que entenderá por diferencial.

  En el caso de la integral, aparecen además las caracterizaciones de integrales definidas e integrales indefinidas. Por la forma en la que definió a la integral de una función, al margen de las derivadas y las diferenciales, tuvo que establecer la noción de integral indefinida, con la cual relaciona operativamente a la integral y la derivada y, finalmente, enunciar y demostrar el teorema fundamental del cálculo.

  Aunque se habla de los procesos de derivación y de integración como inversos y se concibe, operativamente, que la integral indefinida conduce a la obtención de antiderivadas, lo que se integra son cantidades diferenciales, como sucede hasta la actualidad.

Propiedades:

- La caracterización de los objetos del cálculo con base en las ideas de límite, conduce a establecer propiedades de los límites de funciones. Por ejemplo que el límite de una suma de funciones es la suma de los límites de las funciones, y otros similares.

  Una propiedad importante es la de la continuidad de funciones, de la que se desprenden otras propiedades que vienen a jugar un papel relevante en el cálculo. Entre tales propiedades tenemos las que se establecen en el teorema del valor intermedio y el teorema de los valores extremos (toda función continua en un intervalo cerrado toma una valor máximo y un valor mínimo en el intervalo).
- Algunos objetos del cálculo modifican su significado y con ello sus propiedades. Por ejemplo una cantidad infinitamente pequeña es ahora una variable y lo mismo sucede con las cantidades infinitamente grandes.

  Se habla de variables que “devienen infinitamente pequeñas” o que “devienen infinitamente grandes”, pero ya no se trata de “cantidades infinitamente pequeñas” o “cantidades infinitamente grandes”.

  En lo que respecta a las cantidades diferenciales, también se conciben ahora como variables, dependientes de la derivada de una función. Al definirlas como se hizo, se procuró establecer su relación con la integral de una función, pero modificando su naturaleza y, aparentemente, atribuyéndole una importancia menor en los procesos de integración, como si sólo se tratara de un asunto de notación y lenguaje, porque la relación verdadera se da entre derivada e integral.
- Las derivadas satisfacen la mayoría de las reglas de operación de las diferenciales o de los cocientes de diferenciales. Al establecer a la derivada como el límite de un cociente de cantidades variables, en las que el denominador es una variable infinitamente pequeña, las reglas de operación de las diferenciales se heredan a la

derivada, con las pequeñas adecuaciones (en términos operativos) que la nueva situación requiere.

Entre estas propiedades o reglas de operación tenemos la derivada de una suma de funciones, del producto de una constante por una función, del producto de dos funciones, del cociente de dos funciones y de la derivada de una función compuesta.

Consecuentemente las integrales indefinidas se pueden obtener de forma idéntica a como se hacía antes, cambiando únicamente la expresión de operación inversa de la diferenciación por la de "antiderivación" o alguna equivalente.

- Las integrales son procesos que se pueden aplicar a nuevas funciones, independientemente de su forma de definición y de que las funciones integrando tengan o no una antiderivada. Lo único que se requiere es que satisfagan las condiciones de integrabilidad establecidas por Riemann.

Argumentaciones:

- El desarrollo del cálculo desde su creación hasta principios del Siglo XIX había mostrado su potencial en la resolución de numerosos problemas geométricos y físicos, pero las bases sobre las que estaba fundado eran duramente cuestionadas y las argumentaciones para defender su validez reposaban en argumentos que se calificaban como metafísicos y ajenos a la matemática. Se habían hecho diferentes intentos por aportar elementos de validación de sus técnicas, pero, por una parte, la presentación de la noción de límite no se consideraba satisfactoria y, por otra, el programa algebraico de Lagrange no pudo prosperar porque existían funciones que no podían representarse como series de potencias, aspecto esencial para la determinación de funciones derivadas, creadas por él.

  Tomando ambas ideas, pero presentándolas de una manera diferente y estableciendo una concatenación entre ellas, Cauchy logró superar la problemática descrita. El camino que siguió fue el de tomar la noción de límite como eje de su argumentación, definiendo con la misma la función derivada de Lagrange (con base en el cálculo, con los límites y no en el álgebra), la convergencia de series y la integral.

- En esta actividad de fundamentación se vio forzado a retomar objetos del cálculo previamente construidos y que no satisfacían del todo su propuesta, lo cual expresó, en la introducción de Cours d'Analyse, Cauchy [1821: I], en la que escribe "Hablando de la continuidad de las funciones, no pude evitar el dar a conocer las propiedades principales de las cantidades infinitamente pequeñas, propiedades que sirven de base al cálculo infinitesimal".

  Al definir los objetos del cálculo por medio de los límites modificó el carácter o el significado de expresiones como las de infinitamente pequeños, infinitamente grandes y diferencial, por no decir que con Cauchy, en realidad se trata de objetos diferentes, aunque se conservan los nombres y se procura sostener el edificio previamente construido.

- Los métodos de validación son esencialmente deductivos y se abandona el uso de la Ley de Continuidad de Leibniz, no aceptando como válida ninguna propiedad que no sea demostrada lógicamente con base en la noción de convergencia, sea directa o indirectamente.

  En el caso específico de la integral de una función se procedió a probar la existencia del límite de una suma, que una vez obtenido se le identifica como la integral, sin asumir su existencia previa como antiderivada o producto del proceso inverso de la diferenciación de funciones.

  Este proceder general lo describió él mismo con la siguiente frase, en la introducción a Cauchy [1821: I-II]: "En cuanto a los métodos, procuré darles todo el rigor que se exige en geometría, para no recurrir jamás a las razones extraídas de la generalidad del álgebra. Las razones de esta especie… no pueden ser consideradas, me parece, mas que como inducciones adecuadas para hacer en ocasiones plausible la verdad, pero que tienen poco que ver con la exactitud tan celebrada en las ciencias matemáticas".[38]

[38] Quant aux méthodes, J'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, … ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques.

3.9 VISIÓN GLOBAL DE LA INTEGRAL EN CAUCHY Y RIEMANN

La importancia del cálculo en la resolución de problemas estaba fuera de toda duda, pero las bases sobre las que se había desarrollado eran fuertemente cuestionadas, tanto las de los diferenciales de Leibniz y de Euler, con sus infinitamente pequeños y sus infinitamente grandes, como las razones primeras y razones últimas de Newton. Las argumentaciones que se ofrecían no eran del todo convincentes y se ubicaban más en el terreno filosófico que en el de la precisión matemática, que tomaba a la geometría como el ejemplo de rigor y formalidad que se requerían en la producción matemática.

Los intentos de L'Huilier, quien fundamentó el cálculo en torno a la noción de límite, no logró convencer a la comunidad matemática y se intentaron otros caminos, como en el caso de Lagrange quien, retomando los desarrollos de las funciones en series de potencias, principalmente con la presentación del Teorema de Taylor, intentó desarrollar el cálculo sobre bases estrictamente algebraicas, sin alusión alguna a diferenciales, razones primeras y últimas, límites o cantidades infinitamente pequeñas o infinitamente grandes.

Pero el programa de Lagrange también fracasó, porque para completar su teoría se necesitaba de un resultado que, aunque él lo asumió y estableció como cierto, era insostenible: que toda función podía representarse por medio de un desarrollo en serie de potencias. De cualquier manera, Lagrange notó que cuando una función era desarrollada en serie de potencias, los coeficientes que se obtenían eran múltiplos de los cocientes diferenciales tomados en orden y a dichos coeficientes, multiplicados por el múltiplo correspondiente, dado que provenían de la función original, los denominó funciones derivadas.

Más tarde, Cauchy notó que si tomaba como eje del cálculo a la noción de convergencia, podía definir las funciones derivadas de Lagrange como el límite de un cociente que siempre se podía obtener y, por lo tanto, con este procedimiento era posible reescribir el cálculo con bases más sólidas, con fundamento en las propiedades aritméticas a que el límite conducía.

Al desarrollar su programa de cálculo, Cauchy conservó casi todo el aparato ya construido, pero los aspectos que consideraba menos sólidos los definió con base en los límites. Ese es el caso de las cantidades infinitamente pequeñas, las cantidades infinitamente grandes y las cantidades diferenciales. Una vez más tenemos que los significados de los objetos matemáticos (y los objetos matemáticos mismos) están fuertemente influenciados por los contextos en los que surgen y se desarrollan, modificándose como producto de los sistemas de prácticas hacia los que los nuevos contextos conducen.

Cuando afirmamos que no sólo los significados se modifican lo decimos porque una interrogante natural aquí es: ¿Sólo cambian los significados o en este caso hablamos de objetos diferentes a los que se denomina igual? Por ejemplo, ¿los diferenciales de Leibniz son los mismos objetos que las cantidades diferenciales de Cauchy? En ocasiones los significados de los objetos se modifican enriqueciéndose, agregando sentidos en los que resultan significativos, pero aquí no es que se hayan enriquecido los significados, han cambiado sustancialmente.

Similarmente, a partir de las nuevas situaciones problémicas surgidas de los estudios físicos y, principalmente influenciados por la caracterización de Cauchy respecto de las funciones continuas, matemáticos como Dirichlet, crearon nuevas funciones que, teniendo "muchos" puntos de discontinuidad eran integrables en el sentido definido por el mismo Cauchy. Asimismo, en sus estudios sobre la transmisión del calor, Fourier había trabajado el desarrollo de funciones mediante series trigonométricas, en las que se empleaban las integrales, sin que existiera claridad de poder hacerlo, esto es, si las funciones que se manejaban tenían una integral bien definida.

Con estos casos, y otros creados por él mismo, Riemann se propone determinar las condiciones que una función debe satisfacer para ser integrable, modificando ligeramente la definición de integral de Cauchy, dándole más o menos la misma forma que aparece en los libros actuales de cálculo y de análisis matemático. Es decir, al situarse en el contexto de otra situación problémica, la de la integrabilidad de funciones, la noción de integral volvió a ser modificada, aunque su significado no se alteró.

Un comentario adicional que queremos hacer es el relativo al rigor matemático de Cauchy, quien abrió el camino para que el análisis se fundamentara sobre bases matemáticas sólidas, en el sentido en el que la comunidad de expertos lo entiende hoy en día. Pero precisamente a la luz del rigor actual, en Cauchy todavía se encuentran aspectos que no tienen la debida justificación o validación de la época actual. Aquí hemos comentado dos de esos aspectos: Cauchy asumió, sin declararlo (lo más probable es que ni siquiera lo haya notado), la completez del sistema de los números reales y en otros problemas se apoyó, en su decir, en la continuidad de funciones, pero en realidad empleaba lo que ahora conocemos como continuidad uniforme.

El rigor y precisión de Cauchy es indudable, pero un error frecuente que encontramos en algunos textos y algunos análisis de su obra es que lo ubican dentro de los matemáticos que procuraron la aritmetización del análisis. En cierto sentido la afirmación es real, pero el llamado periodo de aritmetización del análisis es ubicado más correctamente en la segunda mitad del Siglo XIX, con los trabajos de Weierstrass, Dedekind, Cantor y otros.

3.10 VISIÓN GLOBAL DEL DESARROLLO DE LA INTEGRAL DE LEIBNIZ A RIEMANN

En la versión pragmático-relativista del significado que hemos asumido, conforme al marco teórico del enfoque ontosemiótico, decimos que el significado de un objeto matemático son los sistemas de prácticas matemáticas, discursivas y operatorias, que desarrollamos al abordar un determinado tipo de situaciones problémicas.

Cuando nos enfrentamos a una situación problémica usamos una o más prácticas matemáticas que nos parecen útiles para resolver la situación. Por ejemplo, en ciertos problemas de ecuaciones diferenciales, podemos necesitar obtener funciones primitivas, en cuyo caso el significado de integral que seguramente emplearemos, es el asociado a la noción de antiderivada. Pero si nuestro problema es determinar el área de una determinada figura, probablemente resolveremos una integral definida. En otros casos podemos estar interesados en calcular el límite de una suma de Riemann y así, dependiendo de la situación que estemos enfrentando, usaremos un significado u otro de la integral.

Una característica de cada una de las situaciones anteriores es que las significaciones que empleamos en una situación pueden usarse en otra y ello es lo que nos permite hablar del mismo objeto matemático, con diferentes sentidos del significado. Esto es, para calcular un área, por ejemplo, en lugar de plantearnos resolver una integral definida determinando primero una antiderivada que evaluamos posteriormente conforme a lo que establece el teorema fundamental del cálculo, podemos plantearnos resolver la integral como el límite de una suma de Riemann. El procedimiento no sería muy económico pero el resultado sería el mismo.

Los diferentes sentidos del significado de un objeto, enriquecen el significado completo del objeto. De aquí desprendemos que en los sistemas de enseñanza, si deseamos promover la riqueza de significados de un objeto entre los estudiantes, necesitamos enriquecer las prácticas matemáticas discutiendo diferentes situaciones problémicas.

Esto mismo sucedió en el caso de la evolución del objeto “integral de una función” a lo largo de la historia, pero en ciertos momentos, precisamente los que presentamos como claves en el desarrollo del cálculo, los significados y los objetos mismos fueron cambiados, son momentos que identificamos como de ruptura epistemológica.

Aunque las rupturas epistemológicas afectan a todos los objetos involucrados en el cálculo, ilustraremos la situación con sólo uno de los objetos claves en el cálculo y en la integral: el objeto “diferencial”.

Al inicio, para Leibniz un diferencial era un segmento infinitamente pequeño, de longitud “inasignable”. Aunque era difícil aceptar la existencia “real” de tal objeto, operándolo como tal, como segmento, se les podía estudiar geométricamente, con la salvedad de que no cumplían con la propiedad arquimediana. Posteriormente se concibieron figuras diferenciales y cuerpos geométricos diferenciales. En general, en los diferenciales, Leibniz concebía cantidades geométricas.

Pero rápidamente las aplicaciones del cálculo se multiplicaron y mostraron su eficacia para resolver problemas de física, que no necesariamente tenían un referente geométrico o tratarlos geométricamente no era el procedimiento más económico o adecuado. Para tratar estos problemas, Euler extendió el uso de las técnicas del cálculo, modificando el carácter geométrico y centrando su atención en las variables significativas en diferentes situaciones. En los problemas geométricos podían ser longitudes, áreas, volúmenes, curvaturas, etc., y en los problemas físicos podían ser velocidades, temperaturas, presiones, etc.

Para abordar las situaciones problémicas referentes a las variables, con las técnicas del cálculo, era necesario no centrar la atención en los objetos geométricos básicos, como lo hizo Leibniz, sino en las variables, lo cual consiguió por medio de las funciones, concebidas como las expresiones algebraicas que relacionaban a las variables dependientes con las independientes.

Una vez definidas las funciones, que serían los modelos para las situaciones físicas y geométricas, el siguiente paso debería consistir en determinar los objetos básicos que permitieran el uso del cálculo, lo cual logró con una nueva versión de cantidades diferenciales, que satisficieran las mismas reglas de operación que los anteriores.

Para conseguir esto, Euler retomó los principios filosóficos de Leibniz sobre el universo y sus objetos, las llamadas mónadas, partiendo de que en el caso geométrico, los diferenciales eran un ejemplo de mónadas en lo particular. A grandes rasgos, las mónadas eran los “elementos” de las cosas, los entes más pequeños que se obtenían como producto de la división de una “cosa”. No eran los átomos de la antigüedad, porque Leibniz planteaba que la materia era continua e infinitamente divisible, lo cual no es compatible con la idea de átomo, que tendría que concebirse como materia que ya no admite división. Las mónadas, a decir del mismo Leibniz, eran entes espirituales, lo que interpretamos como entes mentales.

Pero regresando a Euler, de cada variable, decía él, podemos tomar un elemento, una cantidad infinitamente pequeña (una mónada), y a esa cantidad la llamaremos diferencial de la variable. Las cantidades diferenciales así concebidas, en el caso geométrico ya no se concebían como segmentos, figuras o cuerpos geométricos, sino como partes infinitamente pequeñas de longitudes, áreas y volúmenes. Podía hablarse también de cantidades diferenciales de variables físicas. Ahora, en las diferenciales, Euler concebía números y la argumentación para mostrar la plausibilidad de su concepción lo orilló a señalar que las cantidades diferenciales eran "realmente ceros".

Dado que las diferenciales así concebidas satisfacían las mismas reglas de operación que las anteriores, el edificio construido seguía en pie, reposaba sobre otras bases, pero su estructura estaba salvada. En lo que toca a la integral, en lugar de hablar de sumas (lo cual podía hacerse y de hecho se hizo en algunos casos), se privilegió asumirla como el resultado del proceso inverso de la diferenciación, sin menoscabo de la subsistencia del principio fundamental del cálculo.

Éste es el primer momento de ruptura que identificamos. Aquí el significado de diferencial no fue enriquecido por la adición de prácticas matemáticas que le dieran otro sentido. El significado de diferencial se modificó, porque el objeto matemático mismo fue modificado, o, para expresarlo de otra manera, con el término "diferencial", ahora se hablaba de otro objeto.

El posterior desarrollo del cálculo, motivado por la búsqueda de bases más sólidas para técnicas que se reconocían como útiles y potentes, condujo a establecer las bases del mismo en la noción de límite y de convergencia. Nuevamente el problema consistía en preservar las reglas de operación y aplicabilidad de los objetos del cálculo, pero ahora el camino no permitía definir los diferenciales de otra forma y continuar adelante. Cada uno de los objetos básicos del cálculo requería definirse con base en los criterios de convergencia.

Para lograrlo, Cauchy asignó el papel fundamental que antes jugaba la diferencial a otro objeto, la derivada. Aunque surgida del cálculo algebraico de Lagrange, su conexión con el edificio anteriormente construido estaba en su parecido con los cocientes diferenciales y las reglas de operación de la derivada eran similares a las de la diferencial. De cualquier manera, con apoyo en este nuevo objeto, la derivada, Cauchy concibió y definió a las diferenciales y las utilizó para denotar, idénticamente a como lo hicieron sus predecesores, a la integral de una función, la que definió de forma independiente como el límite de una suma infinita.

Éste es otro momento de ruptura epistemológica, en el que la diferencial de una función es concebida de otra manera, como variable, pero se denota igual que antes. El objeto al que se refiere es distinto al de Leibniz y distinto al de Euler. Su uso obedece más a los esfuerzos por sostener intacto el aparato construido, pero su naturaleza es distinta. En los hechos, el papel fundamental del cálculo diferencial lo juega la derivada y la diferencial se usa más como notación (en el caso de las integrales y las ecuaciones diferenciales, pues, por otra parte, la diferencial juega un papel importante en la linealización de las funciones). No es ocioso agregar que el papel que se asigna a las diferenciales en el lenguaje del cálculo, que en realidad está referido a las derivadas, ocasiona grandes dificultades entre los estudiantes modernos.

Por otra parte, además de los momentos de ruptura epistemológica, en el desarrollo del cálculo podemos también identificar otros momentos o situaciones que nos parece relevante comentar, en la que se hacen presentes algunas de las dualidades cognitivas que hemos señalado como frecuentes en la actividad matemática.

Dualidad Personal-Institucional.

En lo que respecta a la dualidad personal-institucional, aunque aquí hemos abordado el problema en el marco de la comunidad de expertos que crearon y desarrollaron la integral, de cualquier forma la faceta personal juega un papel que no podemos soslayar. Para ilustrar la presencia de esta dualidad, nos referiremos al nombre asignado al principal objeto de nuestro trabajo: la integral.

Como hemos visto, la integral de una función surgió concebida como la suma de cantidades diferenciales, heredada de la suma de diferencias en las progresiones numéricas finitas. Posteriormente se aplicó al caso de las sumas infinitas de las sucesiones numéricas cuyos términos “devienen a cero”. Concebidas las sumas de las diferencias, tuvo sentido para Leibniz concebir las sumas de orden superior, así como concibió las diferencias de orden superior, los cuales fueron generalizados para el caso de los diferenciales.

Pero cuando Bernoulli usó el término integral, a Leibniz le pareció que lo mejor era continuar llamándole suma, dado el origen y las varias situaciones a las que se refería con el término. La respuesta de Bernoulli fue clara en el sentido de que le había llamado integral porque al resolver problemas de cuadraturas, el procedimiento que se seguía era descomponer una figura en figuras diferenciales, “integrándolas” después para calcular el área. Sin embargo, aceptó llamarles sumas.

Así, aún cuando estamos ubicados en el ambiente de los expertos, en la más representativa de las instituciones de referencia para la actividad matemática, vemos cómo surgen visiones personales que desempeñan un rol trascendente en la negociación institucional de significados. De esta discrepancia en el lenguaje, el nombre que ganó terreno y perdura hasta nuestros días es el de integral y la pregunta que nos formulamos es por qué es así. Suponer que sólo fue un asunto de costumbre o que la obra de Bernoulli fue más difundida (lo cual no sabemos por cierto), sería minimizar las cosas. Suponer que el nombre es inocuo también sería minimizar las cosas.

Desde nuestro punto de vista el nombre de integral se impuso porque los contextos en los que el objeto aparecía y se usaba, era en el de cálculo de áreas, con la aplicación del procedimiento señalado por Bernoulli. Pero difícilmente podemos encontrar situaciones problémicas y contextos generales en los que la suma de la suma de la suma juegue un papel importante. Son los sistemas de prácticas los que hacen emerger a los objetos, incluyendo sus nombres y, en general, el lenguaje y los signos semióticos con los cuales nos referimos a ellos.

Dualidad ostensiva-no ostensiva.

En lo que respecta a la dualidad ostensiva-no ostensiva, ésta aparece siempre en toda actividad matemática, toda vez que las propiedades, concepciones, etc., que ubicamos como componentes no ostensivas del significado, se expresan o se representan por medio de componentes ostensivas, como las gráficas, expresiones verbales, expresiones analíticas, etc.

En algunos casos, como en los desarrollos analíticos de Leibniz, los ostensivos usados están directamente relacionados con las propiedades geométricas que asume de los objetos del cálculo. Esto es, aún en la manipulación analítica se percibe la concepción geométrica de origen. Un ejemplo claro es la deducción y uso de la fórmula de transmutación.

Pero en otros casos la situación es particularmente interesante, porque en el cálculo se mantuvo constante el uso de los elementos ostensivos del lenguaje, para referirse a objetos diferentes, para aludir a elementos no ostensivos que eran diferentes. Éste es el caso de los diferenciales que estuvimos analizando líneas atrás.

Dualidad extensiva e intensiva (ejemplar y tipo).

En cada etapa del desarrollo de la integral, dependiendo de la situación que se esté analizando, podemos encontrar la presencia de estas dos facetas de la actividad matemática. Pero aquí queremos hacer notar que también existen diferencias en los diferentes momentos en los que se desarrolló el cálculo.

En el caso de Leibniz, al inicio de su exposición sobre las ideas fundamentales del cálculo, los tratamientos que se hacían de la integral eran de tipo extensivo, cada integral se obtenía como caso particular. Un ejemplo de ello lo tenemos cuando expusimos la forma en la que Leibniz obtuvo la fórmula para la integración por partes, la que aplicó para obtener las integrales particulares $\int x\,dx$, $\int x^2\,dx$, $\int x^3\,dx$, etc.

En la presentación de Euler el tratamiento es bastante distinto y, sus propios métodos analíticos son de suma generalidad, obteniendo integrales tales que para resolver los casos particulares, se pueden tomar diferentes opciones y resolver muchas integrales. Si asignamos valores a ángulos que empleó en sus sustituciones, obtenemos un tipo de integrales y, si lo que cambiamos son los exponentes que aparecen en las expresiones, las integrales particulares son de otro tipo, por señalar algunas.

Dualidad elemental y sistémica.

Estas facetas de la actividad aparecen también en cada etapa de la actividad matemática, pero referidas a la integral de una función, distinguimos que, en cada una de las épocas correspondientes a los que hemos ubicado como momentos claves, alguna de ellas es preponderante.

En la etapa del surgimiento de la integral, con los trabajos de Leibniz, de Jakob Johann Bernoulli y otros, la integral es abordada sistémicamente. La situación es natural porque primeramente se presenta y, posteriormente, toda vez que se están estableciendo las reglas de operación, cada nueva regla que se propone, se desarrolla con base en la definición de integral y las reglas ya aceptadas, para dar validez a las nuevas reglas. Leibniz, particularmente, además de la aplicación de los procedimientos analíticos, procuró mostrar un referente geométrico que diera validez o la regla o mostrara su plausibilidad.

En los trabajos de Euler, por el contrario, se asume que las reglas ya están establecidas, se concibe a la integral como el producto de la operación inversa a la de diferenciación (lo cual es una manera sistémica de verla, al relacionarla con la diferencial), y a partir de ahí se opera con ella y se determinan muchas fórmulas integrales, esto es, muchas expresiones cuya diferencial es lo que hoy llamamos función integrando.

En los tratamientos de Cauchy y Riemann, aunque presentan las técnicas de integración y se detienen en casos particulares o ejemplares de antiderivadas, hacen fundamentalmente un tratamiento sistémico. En el caso de Cauchy se establecen las integrales desde el principio, relacionándola con los límites de funciones, con las derivadas y con las cantidades diferenciales definidas a través de las derivadas. En Riemann encontramos que sus trabajos se refieren a la redefinición de la integral, con refinamientos a la definición de Cauchy, relacionando ahora también las particiones del intervalo de integración, las oscilaciones de las funciones y las normas de las particiones.

Dualidad expresión-contenido.

Esta dualidad también está presente a lo largo de toda la actividad matemática y esta dualidad enfatiza el carácter relacional de los objetos matemáticos y de la actividad matemática en la cual se construyen y se usan dichos objetos. La relación se establece por un sujeto (persona o institución), entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido), de acuerdo a un código de correspondencia o con un cierto criterio.

El hecho sobre el que queremos llamar la atención aquí, es que en la evolución del cálculo se conservaron los nombres de los objetos originales y la mayoría, si no todas, las reglas de operación para los mismos, pero los objetos y sus significados fueron modificados.

Consecuentemente, es posible que las expresiones que se utilicen en el cálculo sean similares en una u otra época, pero los contenidos de dichas expresiones serán diferentes. Esas diferencias sólo pueden percibirse estableciendo criterios o códigos de correspondencia que tengan como base un estudio epistemológico sobre los posibles significados de los objetos en cada etapa concreta. Un estudio que nos permita entender, por ejemplo, qué es un diferencial para Leibniz y qué es para cauchy.

CAPÍTULO 4
SIGNIFICADOS PERSONALES DE LA INTEGRAL

4.1 CONSIDERACIONES GENERALES

El análisis histórico epistemológico realizado en el capítulo anterior muestra que los sistemas de prácticas de los matemáticos que trabajaron en el área del cálculo, dieron lugar a la emergencia de objetos matemáticos de diferente índole, con significados diferentes, en dependencia del contexto en el cual se desenvolvían.

Estos significados diferentes podían representarse, sin embargo, con los mismos signos, como en el caso de una cantidad diferencial, la cual, en el caso de Leibniz tenía un significado y en el de Cauchy otro distinto. Para el primero, el diferencial era originalmente un segmento, ampliando su idea posteriormente para incluir diferenciales de área y diferenciales de volumen, pero siempre referidos a características geométricas, mientras que para el segundo era el producto de la derivada por el incremento de la variable independiente y, como tal, una cantidad variable.

La identificación de estos objetos con los mismos nombres y las mismas representaciones no son casuales y uno es la evolución del otro, como hemos visto en nuestro análisis histórico epistemológico. Sin embargo, si los analizáramos al margen de ese desarrollo, estaríamos ante dos objetos de diferente naturaleza. La definición que Cauchy hace de los diferenciales de ninguna manera admite la interpretación de un diferencial como segmento, como área o como volumen.

Las diferencias en los significados son el producto, en nuestra interpretación, de los diferentes contextos en los que se desarrollan ambas propuestas. Atendiendo al carácter pragmático que hemos asumido del significado, esto es lo mismo que afirmar la existencia de prácticas operativas y discursivas diferentes entre Leibniz y Cauchy.

Similarmente, planteamos que los significados que los estudiantes construyen en el salón de clases son diferentes, dependientes del contexto escolar en el que se desenvuelven. Esto es, los sistemas de prácticas que se promueven en los procesos de enseñanza son diversos y conducen a formaciones diferentes en los estudiantes. Con esta convicción, nos propusimos entonces indagar sobre las concepciones de profesores y estudiantes en diferentes comunidades escolares.

Para realizar esta actividad, elaboramos un instrumento de investigación o evaluación, que aplicamos a profesores de bachillerato de la Ciudad de México, a profesores de nivel superior del Instituto Tecnológico de Sonora en la Ciudad de Guaymas, Sonora, a estudiantes de cuarto semestre de las carreras de licenciado en matemáticas y licenciado en física de la Universidad de Sonora, en Hermosillo, Sonora, y a estudiantes del segundo semestre de las carreras de ingeniería de la misma universidad.

Los profesores tienen experiencia impartiendo cursos de cálculo diferencial e integral, los estudiantes de física y matemáticas habían llevado tres cursos de cálculo, uno de ecuaciones diferenciales y estaban cursando la asignatura "Cálculo Diferencial e Integral IV" e "Introducción al Análisis Matemático", en tanto que los estudiantes de ingeniería estaban en la parte final del curso de cálculo integral.

El instrumento de evaluación se lo aplicamos a un total de 73 individuos, de los cuales 26 eran estudiantes de ingeniería, 21 estudiantes de física o matemáticas, 19 profesores de bachillerato y 7 de educación superior.

Nuestro propósito fue estudiar los significados personales, globales y declarados, de estudiantes y profesores, sin que estuvieran siendo participantes de un curso sobre el tema y sometidos a las presiones que los procesos de evaluación ejercen. Por tal motivo, seleccionamos profesores de cálculo y estudiantes que hubieran tomado ya sus cursos de cálculo, y les aplicamos un instrumento diseñado (ex profeso) para obtener información sobre el particular.

Para la elaboración de dicho instrumento de evaluación revisamos algunos currículos escolares y libros de texto. Asimismo, tomamos en cuenta el análisis epistemológico realizado y nuestra experiencia tanto docente como de investigación en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo.

La revisión de libros de texto y de los currículos escolares nos muestra que los sistemas de prácticas que se promueven con mayor frecuencia entre los estudiantes sobre el objeto "integral de una función", son las de antiderivada (o integral indefinida) y la de integral definida, ligada al Teorema Fundamental del Cálculo. Asimismo, se promueve la significación de la integral como un área, la que en ocasiones aparece como el vehículo para construir el objeto y en otras como una "aplicación".

En lo que respecta a los sistemas de prácticas asociados con los procesos de antiderivación o antidiferenciación, algunos libros de texto los presentan al inicio del tema del tratamiento sobre la integral, de forma similar a como lo hace Euler (aunque Euler trataba con fórmulas diferenciales y no con antiderivadas), planteando que la antiderivada de una función, cuando se considera en su forma general, esto es, cuando al obtener una función $G(x)$ tal que $G'(x) = f(x)$, decimos que la integral indefinida de $f(x)$ es $G(x)+C,$ donde C es una constante arbitraria, y en ese caso escribimos $\int f(x)\,dx = G(x)+C$. Posteriormente se distingue a la integral indefinida de la integral definida, por el hecho de que en esta última se evalúa la integral indefinida en los extremos.

La presentación de estas ideas no es homogénea y en algunos libros aparece primero la integral como el proceso de cálculo de áreas y posteriormente se asocia con los procesos de antiderivación. En cualquiera de los casos, en la mayoría de los libros de texto que se usan frecuentemente, al menos en nuestra universidad, es notorio que se pone mucha atención en las llamadas técnicas de integración, esto es, en los procedimientos para la determinación de las antiderivadas o integrales indefinidas. En los cursos de cálculo sucede algo similar y se dedica bastante tiempo a la obtención de integrales indefinidas por medio de tablas de integración, con las antiderivadas más comunes y se revisan las siguientes técnicas de integración: cambios de variable o sustituciones, integración por partes, sustituciones trigonométricas e integración por medio de la descomposición en fracciones parciales.

Los acercamientos a la integral pueden ser diversos y en algunos casos, como sucede con los estudiantes de las carreras de ciencias y las de ingeniería en nuestra institución, la integral es inicialmente abordada a partir de la noción de área y de sumas de Riemann, ligadas a los procesos de convergencia. Sin embargo, a partir de cierto momento la atención se centra en las técnicas de integración y los sistemas de prácticas que se promueven preponderantemente son los de la obtención de antiderivadas y, en algunos casos, la evaluación en los límites de integración para obtener los correspondientes valores de las integrales definidas.

Sin embargo, no son las únicas significaciones que se promueven y en diferentes momentos, las integrales pueden surgir como herramientas para el cálculo de momentos de fuerza, centros de gravedad, volúmenes de sólidos de revolución, distancias recorridas, etc. Dentro de estas "aplicaciones" de la integral, la más común es la obtención de áreas de figuras delimitadas por curvas, ya no sólo a partir de la caracterización de la integral como "área bajo la curva", para el caso de las funciones de valores positivos, y las correspondientes adecuaciones cuando la función toma valores negativos, sino para determinar las áreas encerradas por dos curvas o gráficas de funciones.

Con base en nuestro marco teórico, partimos del análisis a priori de que los significados que más frecuente y sólidamente construyen los sujetos, son los ligados a los de antiderivada (o integral indefinida en el lenguaje de muchos libros de texto), el cálculo de integrales definidas y, en menor proporción, la determinación de áreas de figuras. Esto es, aunque la experiencia de los sujetos con la integral haya incluido la revisión de información sobre la riqueza de significaciones posibles para la integral, los sistemas de prácticas se centran en las nociones de antiderivada, integral definida y cálculo de áreas. Tomando en cuenta las experiencias del bachillerato, los sistemas de prácticas más frecuentes, están ligados a procesos operacionales, la mayoría de las veces centrados en las manipulaciones algebraicas o analíticas para la obtención de antiderivadas o integrales indefinidas.

Por otra parte, tenemos la hipótesis de que al asociar un significado con una situación o expresión, en la que el contexto que le da sentido a la expresión no es claro o único, los individuos recurrimos espontáneamente a aquél que nos es más familiar. Por ejemplo al escuchar la expresión "la silla está deteriorada", sin ubicar el contexto, lo más probable es que la imagen mental de silla a la que recurramos sea la de un mueble con respaldo, quizá con cuatro patas, quizá de madera o metal. Pero si después percibimos que el contexto en el que se habla es de caballos, seguramente que nuestra imagen o evocación será diferente. En el caso de las matemáticas sucede lo mismo, en nuestra hipótesis, y, al hablar de algunos objetos matemáticos, como la integral de una función, pensamos que recurriremos de inicio a aquella significación que nos es más familiar.

Ejemplos de este corte los encontramos en investigaciones en las cuales los sujetos ponen de manifiesto sus significaciones o sistemas de prácticas más comunes, a pesar de dar evidencias de contar con información sobre otras posibles maneras de concebir los objetos. Ese es el caso, desde nuestro punto de vista, de las investigaciones de Vinner y Tall sobre el "concepto imagen" y el "concepto definición", en la cual los profesores y los estudiantes encuestados en sus estudios, dieron evidencia de identificar una definición formal de función, pero restringen su universo de funciones a las funciones continuas.

Independientemente de la validez de sus resultados y de la caracterización de las nociones de "concepto imagen" y de "concepto definición", interpretamos que los participantes en los experimentos de Vinner y Tall, "conocen" la versión del objeto institucional de referencia "función", pero sus sistemas de prácticas sólo los conduce a accionar funciones continuas, lo cual nos muestra que el significado personal de función que resulta más familiar para dichos participantes es el correspondiente al de función continua.

En el caso de la integral de una función, el significado institucional de referencia y aún el pretendido en los currículos de la mayoría de los sistemas escolares, incluye las siguientes significaciones o sentidos de la integral de una función:

- Como una función primitiva o antiderivada, cuando se enseña a "resolver" integrales indefinidas y a "probar" que la función obtenida es la correcta, constatando que su derivada es la función integrando. Esto es, cuando pretendemos que se interprete $\int f(x)\,dx$ como la función $G(x)$ tal que $G'(x) = f(x)$.
- Como un número, cuando aplicamos los procedimientos analíticos anteriores y evaluamos en los límites de integración para obtener el valor de la integral definida. Esto es, para obtener el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$.
- Como el área de la región acotada entre la gráfica de $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje de las abscisas, cuando interpretamos así a $\int_a^b f(x)\,dx$, en el caso en el que $f(x) \geq 0$ para valores $x \in [a,b]$, o el negativo del área en caso de que $f(x) < 0$.

- Como una función del límite superior de la integral, al interpretar el signo $\int_a^x f(t)\,dt$. Esta forma funcional aparece con menor frecuencia y poco se trabaja con ella, restringiendo su uso al momento en el que se discute el Teorema Fundamental del Cálculo.
- Como el límite de una suma infinita: $\lim_{i \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)\Delta_i x$. Esta presentación es particularmente importante en las carreras de física y matemáticas, dado el especial énfasis que se pone en la caracterización de los objetos del cálculo con base en la noción de convergencia.
- De manera general, la concepción de la integral como antiderivada está también ligada a la determinación de ciertas magnitudes físicas, geométricas, económicas, etc., cuando conocemos la rapidez instantánea de cambio de una variable con respecto a otra. Ése es el caso de la posición de un objeto cuando conocemos una expresión analítica para determinar su velocidad instantánea.

4.2 EL DISEÑO DEL INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Hechas las consideraciones anteriores, nos dimos a la tarea de diseñar el instrumento de investigación, poniendo énfasis en los sistemas de prácticas que les resultaran más familiares a estudiantes y profesores.

La mayoría de los problemas que planteamos se relacionaban con la determinación de áreas de figuras, pero estaban referidos a las integrales. Adicionalmente se incluyeron problemas que hicieran alusión a otras posibles significaciones de la integral de una función.

En lo que respecta al contexto de las áreas planteamos problemas con dos tipos de características: unos podían resolverse recurriendo tanto al cálculo del área de una figura como obteniendo el valor de una integral definida, y otros en los que la obtención del valor de la integral definida no podía obtenerse por medio del Teorema Fundamental del Cálculo (o por lo menos era muy complicado) y necesariamente se debía emplear la significación de integral como área (o su negativo). Algunos de ellos tenían entre sus propósitos cerciorarnos de que los participantes efectivamente tenían, entre sus significaciones de integral, el cálculo de áreas.

Con base en estas consideraciones elaboramos el instrumento de evaluación para aplicarlo a los profesores y estudiantes que señalamos líneas atrás.

En esta parte del trabajo nuestro interés no estaba centrado en los significados que los estudiantes y/o los profesores construyen ante un determinado diseño didáctico previamente elaborado por nosotros, sino en tener evidencias de que las significaciones asignadas a los objetos matemáticos se ven influenciadas por los contextos escolares en los cuales se desempeñan.

En tal sentido aplicamos el instrumento diagnóstico a comunidades que hubieran tenido experiencia en cursos de cálculo integral, ya sea como estudiantes o como profesores. El análisis que haremos no pretende estudiar los resultados de un diseño didáctico en particular, ni estudiar casos individuales como tales.

El propósito central de la actividad es sólo observar los significados que se asignan al objeto “integral de una función”, analizados con base en la resolución de un determinado tipo de problemas.

Para profundizar en la interpretación de las respuestas y, a partir de los objetos ostensivos empleados (expresiones, símbolos, operaciones, gráficas, etc.) de los resolutores, desprender los objetos no ostensivos (propiedades, conceptos, etc.) puestos en juego, necesariamente tendremos que detenernos en algunos casos particulares. Sin embargo, dado que nuestro propósito no es hacer un estudio de casos, no incluimos actividades adicionales como entrevistas, otros cuestionarios, filmes, grabaciones, o cualquier otro recurso.

Por otra parte, dadas las diferencias de condiciones en las que se aplicó el instrumento de diagnóstico, algunos lo contestaron completamente y otros sólo una parte, procurando que en cada grupo o comunidad se cubrieran todos los reactivos.

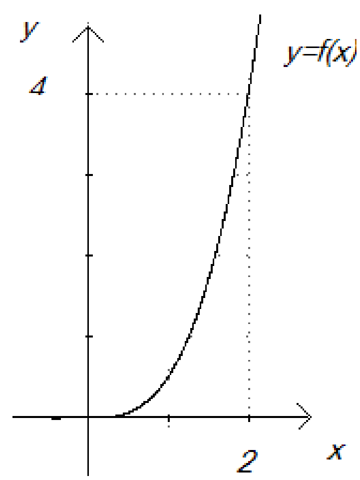
El instrumento de evaluación que se aplicó se muestra en la página siguiente.

4.2.1 INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Al contestar las siguientes preguntas o resolver los problemas propuestos, te solicitamos que lo hagas de tal forma que no borres ni taches las cosas que decidas cambiar, sólo vuelve a iniciar. Asimismo, si requieres más espacio para analizar la situación, escribe dentro del marco de la hoja que se anexa.

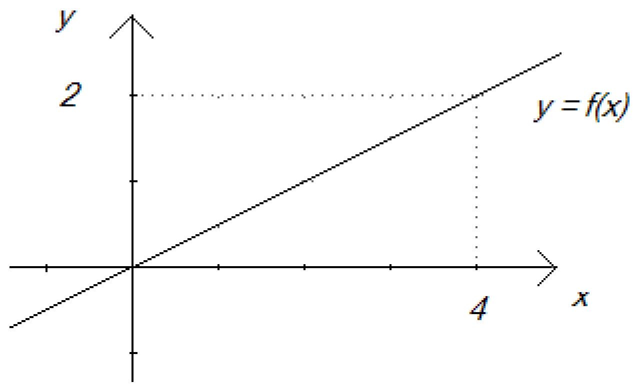
I.-A continuación mostramos las gráficas de algunas funciones. En cada caso contesta lo solicitado. Si no puedes hacerlo, te solicitamos que expreses las razones de ello.

1) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina si es verdadera o falsa la afirmación de que $\int_0^2 f(x)\,dx \leq 4.$. Cualquiera que sea tu respuesta, arguméntala.



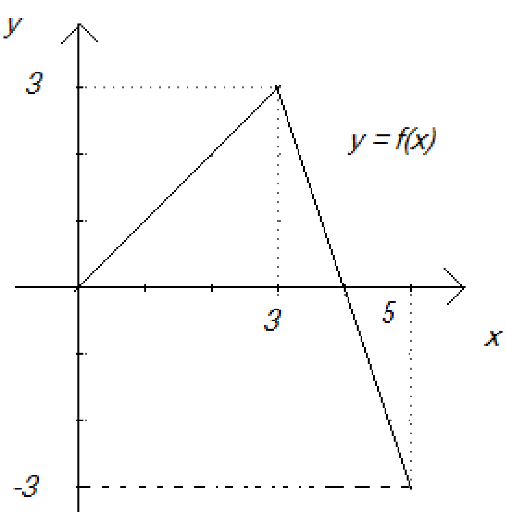
En caso de no poder hacerlo, las causas son:

2) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina el valor de $\int_0^4 f(x)\,dx$



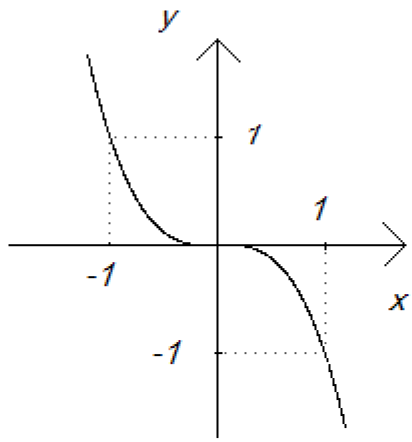
En caso de no poder hacerlo, las causas son:

3) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina el valor de $\int_0^5 f(x)\,dx$

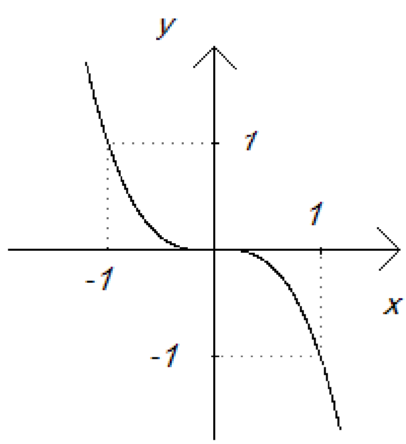


En caso de no poder hacerlo, las causas son:

4) La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = -x^3$. Determina el valor de $\int_0^1 f(x)\,dx$.



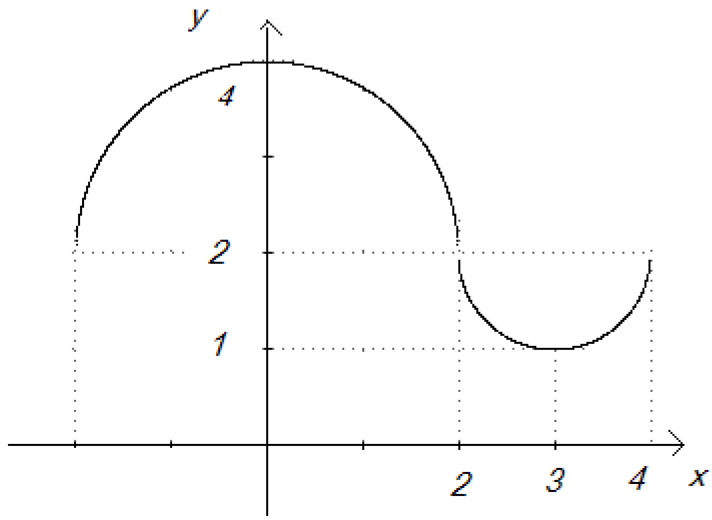
5) La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = -x^3$. Calcula el valor de $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$



En caso de no poder hacerlo, las causas son:

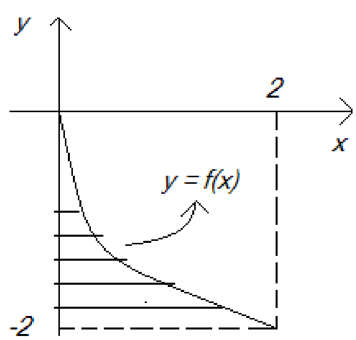
6) La siguiente es la gráfica de la función

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}+2 & si \quad 0\le x<2\\ -\sqrt{1-(x-3)^2}+2 & si \quad 2\le x\le 4\end{cases}$$ Calcula el valor de $\int_0^4 fx)\,dx$.



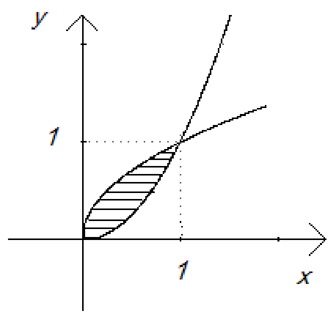
En caso de no poder hacerlo, las causas son:

7) Conociendo que el área de la región sombreada es $\frac{1}{4}$, determina el valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$, cuya gráfica se muestra a continuación.

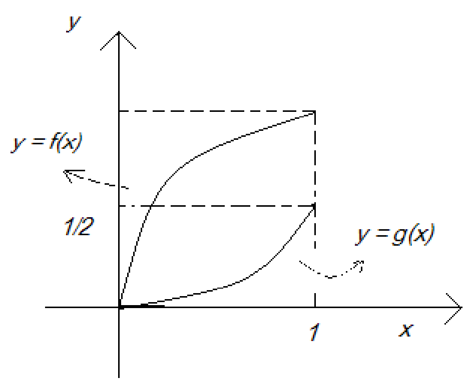


En caso de no poder hacerlo, las causas son:

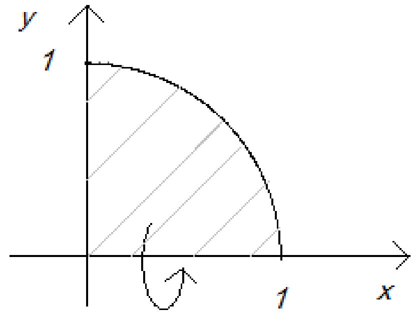
8) Las siguientes son las gráficas de $f(x) = x^2$ y de su inversa $y = f^{-1}(x)$. El valor de $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$. Determina el valor del área limitada por las gráficas de ambas funciones (el área sombreada).



9) A continuación se muestran las gráficas de las funciones *f(x)* y *g(x)*. Determina si es falsa o verdadera la afirmación de que $\frac{1}{4} \leq \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx \leq 1$ Argumenta tu repuesta



10) Al girar alrededor del eje de las abscisas la figura plana acotada por la gráfica de la función equivalente a un cuarto de círculo de radio 1, con centro en el origen que se muestra (su ecuación es $y = \sqrt{1-x^2}$) y los ejes cartesianos, se forma un sólido de revolución. ¿Qué es? Determina su volumen.



II.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones representa el significado de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$?

En todos los casos estamos considerando funciones continuas y positivas dentro de un intervalo $[a,b]$.

a) Es el área de la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$.

b) Es el límite siguiente:

$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$, donde consideramos la partición del intervalo $[a,b]$, con puntos $\{a = x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots x_{n-1}, x_n = b\}$ igualmente distanciados, de tal manera que $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ para todo valor $1 \le i \le n$ y $f(x_i)$ es un valor cualquiera de $f(x)$, con la condición $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

c) Dada $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Argumente su respuesta.

III.-Si las integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$ están siempre bien definidas en los intervalos correspondientes, ¿bajo qué condiciones se cumple que los valores de ambas integrales son iguales?

Argumente su respuesta.

4.2.2 PROPÓSITOS DE LOS PROBLEMAS DEL INSTRUMENTO

Las consideraciones más generales sobre el instrumento de evaluación ya se hicieron con anterioridad: los problemas que se aplicaron fueron diseñados considerando situaciones correspondientes a contextos familiares para la mayoría de quienes participaron en la investigación: cálculo de áreas y determinación de integrales por medio de la antiderivación y el teorema fundamental del cálculo.

Convencidos de que los significados se ponen de manifiesto ostensivamente al resolver problemas, escogimos situaciones sencillas, que pudieran resolverse con facilidad por participantes de todos los grupos o comunidades a quienes se les aplicaría. No se trataba de escudriñar los procedimientos y significados de los expertos o de los mejores estudiantes, sino de dar oportunidad de que surgieran elementos ostensivos que nos permitieran conocer la significación de integral que utilizan en cada situación sujetos con experiencia en cursos de cálculo.

Sucintamente, los propósitos de cada uno de los problemas se describen a continuación.

- El problema número 1 se diseñó con el objetivo primordial de llamar la atención sobre la significación de la integral como área. La razón para ello es que en experiencias anteriores nos hemos encontrado con estudiantes y profesores que para resolver situaciones que involucran integrales de funciones, sólo recurren a los procedimientos algorítmicos, por medio de la obtención de antiderivadas y la aplicación del teorema fundamental del cálculo.

  Con el primer problema esperábamos entonces que los sujetos de investigación evocaran la necesidad de asociar la integral de una función con la determinación de un área, de tal manera que al resolver el resto de los problemas pudieran hacer uso de esta significación.

  La asociación no era directa pues lo que solicitábamos era que determinaran si el valor de una integral estaba acotado entre dos valores que proporcionábamos, pero esperábamos inducir la noción de área y observar si en el resto de los problemas prevalecía la visión operativa de la integral –la cual identificamos a priori como la significación más fuerte y recurrente- o podían hacer uso de la significación como área.

- En este tenor el problema número 2 es un caso sencillo de integración, en el que el camino más fácil o rápido para encontrar la solución, es la determinación del área de un triángulo. La evocación de área del problema anterior podría ayudar a recurrir a esta vía de solución.

  Cualquiera de las dos formas que se elijan para resolver el problema es sencilla, pues la determinación de la ecuación de una recta les era familiar. El problema se puso inmediatamente después del anterior, en el que la significación de integral como área había sido inducida.

- El tercer problema es similar al anterior, pero presenta algunas variantes, siendo la más importante que en este caso optar por la determinación de una representación analítica de la función involucrada es un poco más complicado que en el problema anterior, y la determinación de área es sencilla, pero requiere que se considere como negativo el valor del área obtenida para los valores negativos de la función a integrar.

  La ubicación del problema en este lugar tenía el propósito de que, siendo, a primera vista, más sencillo hacer el cálculo de áreas que determinar las ecuaciones de las dos ramas de la función, con diferente expresión analítica cada una, aquellos que optaron por el camino analítico en el problema anterior, pudieran evocar, una vez más, la significación de integral como área.

- Los problema 4 y 5 están estrechamente ligados y lo que nos propusimos indagar es si los estudiantes y profesores podían reconocer la simetría de la función a integrar –con respecto al origen – y visualizar que la integral tiene un valor igual a *0*. Esto es, si asociaban la situación geométrica con la integral a calcular.

  En principio, la solución del problema 5 es inmediata a partir del análisis geométrico, requiriéndose para ello: la identificación de la simetría de la función con respecto al origen de coordenadas, la significación de integral como área en el caso de la parte positiva de la función y como el negativo del área en la parte negativa de la misma.

- En el sexto problema una vez más nuestro propósito fue observar la presencia del significado de la integral como área, con una función cuya antiderivada es difícil de obtener, en tanto que la determinación del área es relativamente fácil de calcular.

  Las dificultades que entraña la determinación de antiderivadas en este problema es otra forma de inducir la significación de integral como área, esta vez en una situación diferente, pues aquí sí es posible determinar los valores exactos de las áreas involucradas, sin depender de trazos auxiliares o recursos de visualización.

- En el problema número 7 el propósito era observar si la significación de la integral como área sólo se concebía con valores positivos o si la respuesta al problema incluía la consideración de que el valor de la integral era negativo.

  En este, como en otros problemas, partimos de la consideración a priori de que, a pesar de que este tipo de aspectos se discuten en el salón de clases, las prácticas que se realizan se centran, fundamentalmente, en el tratamiento de funciones positivas, con valores positivos del dominio. En esas circunstancias es posible que la versión más consolidada de integral sea la de “área”, aunada a expresiones empleadas por los profesores como “un área siempre es positiva”.

- El problema 8 se diseñó para observar si las respuestas sólo se producían encontrando antiderivadas o se tomaría en cuenta la simetría de las gráficas de dos funciones inversas con respecto a la recta $y = x$ y la determinación del valor de la integral se haría por medio del cálculo de áreas.

  Esto es, si la visión global de integral y sus valores correspondientes podía prevalecer sobre los procedimientos algorítmicos.

- El problema 9 es un planteamiento de cálculo del área entre dos funciones cuyas gráficas difícilmente se pueden asociar con alguna expresión analítica, de tal manera que su solución requiere la consideración de las áreas.

- El problema 10 no fue aplicado a todos los grupos o comunidades que respondieron el instrumento de evaluación y su intención fue observar las respuestas que se dieran en un contexto diferente al de las otras preguntas o problemas, relacionadas con áreas.
- En el problema II, se pretendía el reconocimiento de tres formas de presentar la integral de una función. Se planteó la situación de funciones continuas y positivas en su dominio de definición, de tal manera que la integrabilidad estuviera asegurada.
- Finalmente, en el problema III se presenta una situación que requiere la consideración global de la integral de una función, esto es, que no se puede referir a un valor numérico específico, con la finalidad de observar la forma en la cual el problema es abordado, de tal suerte que arrojara información sobre el significado asignado a la integral de una función.

4.3 APLICACIÓN Y ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

4.3.1 EL CASO GENERAL

Un primer acercamiento a las respuestas brindadas por los sujetos evaluados nos muestra que la significación más consolidada es la de integral como antiderivada y su conexión con el cálculo de integrales definidas, esto es, una significación operativa de la integral.

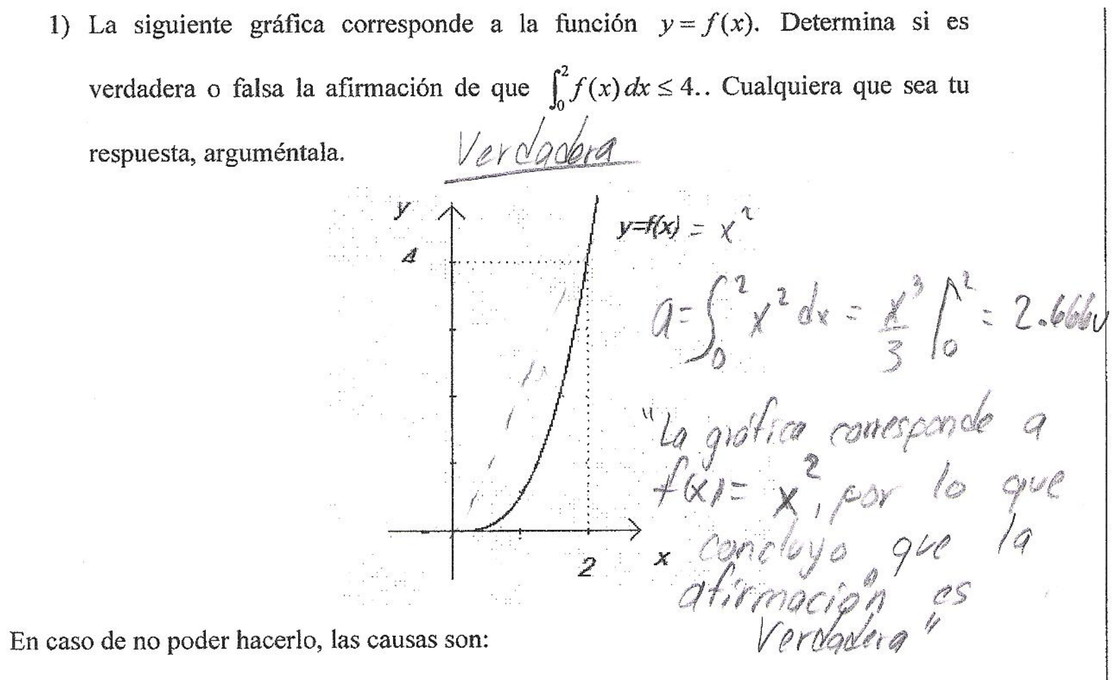
Así, a pesar de que prácticamente el 100% de los encuestados dio muestras de contar con información sobre la utilidad de la integral de una función para la determinación de áreas de figuras, la significación de integral para la mayoría es de carácter operativo. De hecho, mediante el cálculo de una integral pueden determinar el valor de un área, pero el proceso inverso es más complicado y en algunos casos los sujetos no pudieron obtener el valor de una integral definida por medio del cálculo de un área, aunque la figura involucrada les resultara familiar.

Para ilustrar las afirmaciones que hacemos y las que incluiremos posteriormente, mostraremos algunas de las respuestas a los reactivos que proporcionaron los participantes, las que hemos escaneado de los originales que obran en nuestro poder y trascribiremos y entrecomillaremos las expresiones empleadas por ellos, con la finalidad de facilitar su lectura en caso de dificultades para entenderlas. Posteriormente incluiremos algunos comentarios, los que indicaremos al acotarlos al principio y al final del comentario con el símbolo ۞

En el primer problema, con el que nos propusimos inducir el reconocimiento de una integral como área, se lo aplicamos a 39 participantes en la investigación. De los 39 casos, 25 optaron por determinar una expresión analítica de la función correspondiente a la gráfica mostrada y determinar el valor de la integral definida. Los 14 restantes emplearon recursos gráficos y la interpretación de la integral como área para dar sus respuestas.

En ambos tipos de respuestas los procedimientos fueron diversos y muchos de ellos - la mayoría - equivocados. Cualquiera que sea el caso, sus procedimientos son elementos ostensivos de los cuales podemos hacer interpretaciones de los aspectos no ostensivos que son de nuestro interés, de sus concepciones de integral de una función.

La siguiente es una de las respuestas típicas al problema.



1) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina si es verdadera o falsa la afirmación de que $\int_0^2 f(x)\,dx \le 4$.. Cualquiera que sea tu respuesta, arguméntala. Verdadera

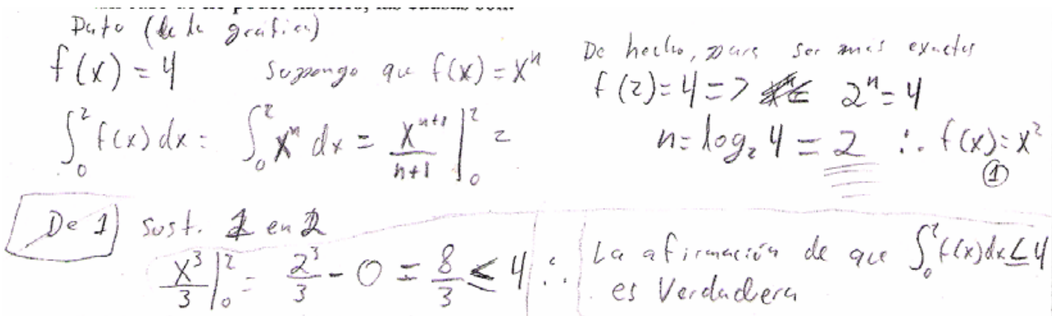
En caso de no poder hacerlo, las causas son:

"Verdadera $\quad = x^2 \qquad a = \int_0^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = 2.66\,u$

La gráfica corresponde a $f(x) = x^2$, por lo que concluyo que la afirmación es verdadera".

۞ De las expresiones escritas, podemos observar que para este estudiante, determinar el valor de una integral está asociado a la obtención de una función expresada analíticamente y la aplicación del teorema fundamental del cálculo para llegar al valor correspondiente de la integral definida. Sin embargo, dos aspectos son indicativos también, de que identifica a la integral con las áreas: la línea punteada que dibujó y aparentemente no usó para nada y la igualación de la integral con la literal *a*, la cual suponemos es una abreviatura de la palabra área. Cualquiera que sea el caso, su conclusión sobre la veracidad del acotamiento de la integral pareciera sólo apoyarse en el resultado obtenido: *2.66*.۞

La recurrencia a los casos particulares se presentó en varias de las respuestas e inclusive un estudiante de matemáticas planteó una generalización posible de la expresión algebraica, como se muestra a continuación.



"Dato (de la gráfica)

"$f(x) = 4$ Supongo que $f(x) = x^n$ De hecho, para ser más exacto

$f(2) = 4 \Rightarrow 2^n = 4$ $n = \log_2 4 = 2$ $\therefore f(x) = x^2$ (1)

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x^n\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^2 \quad (2)$$

De 1, sust. 1 en 2

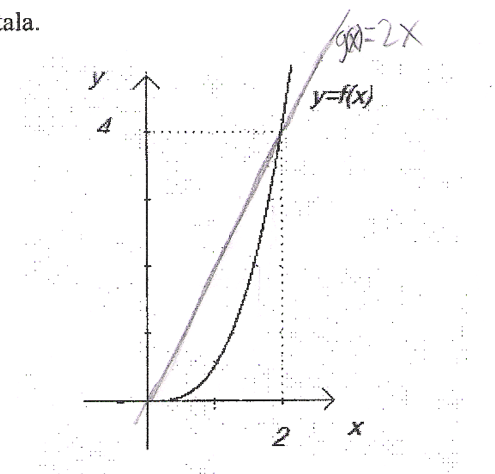
$\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{2^3}{3} - 0 = \frac{8}{3} \le 4$ $\therefore$ La afirmación de que $\int_0^2 f(x)\,dx \le 4$ es verdadera".

۞ A pesar de que el estudiante demuestra algunas habilidades para proceder algorítmicamente, y a partir de la expresión general de la función que seleccionó, deduce cuál debe ser la función que se muestra en la gráfica, nunca se preocupó por verificar su resultado, contrastándolo con algún otro dato de la gráfica, lo cual le hubiera permitido darse cuenta de su error.

Esta forma de proceder es reflejo de una significación operativa de la integral, en la que lo más importante es la determinación de un valor para lo que en los libros de texto y el lenguaje de los profesores, es la integral definida. Por otra parte, al partir de la suposición de un caso general, la función $f(x) = x^n$, para después determinar el valor de *n*, aunado al lenguaje empleado, observamos la etapa aún inicial de un estudiante cuya formación en matemáticas se forja a partir del formalismo, sin recurrir en ningún momento a consideraciones visuales o geométricas.۞

Otra respuesta que encontramos, única que utiliza explícitamente una notación analítica de comparación de funciones, es la que se ilustra a continuación.

1) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina si es verdadera o falsa la afirmación de que $\int_0^2 f(x)\,dx \leq 4.$. Cualquiera que sea tu respuesta, arguméntala.



En caso de no poder hacerlo, las causas son:

$\int_0^2 g(x)dx \geq \int_0^2 f(x)dx \quad g(x) \geq f(x)$ en $[0,2]$

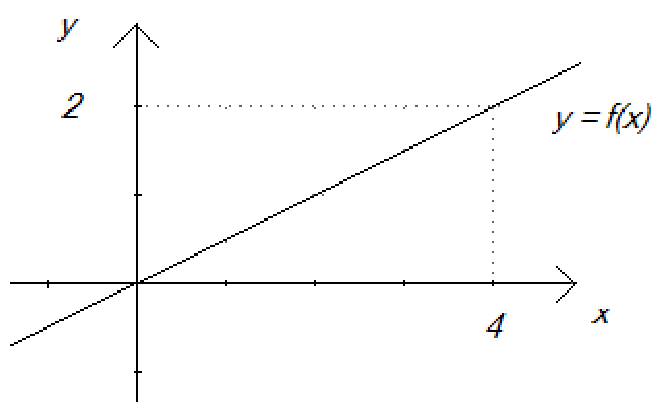
$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 2xdx = x^2\Big|_0^2 = 4 \quad \therefore 4 \geq \int_0^2 g(x)dx$

"$g(x) = 2x \qquad \int_0^2 g(x)\,dx \geq \int_0^2 f(x)\,dx \qquad g(x) \geq f(x)$ en $[0,2]$

$\int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^2 2x\,dx = [x^2]_0^2 = 4 \qquad \therefore 4 \geq \int_0^2 g(x)\,dx$".

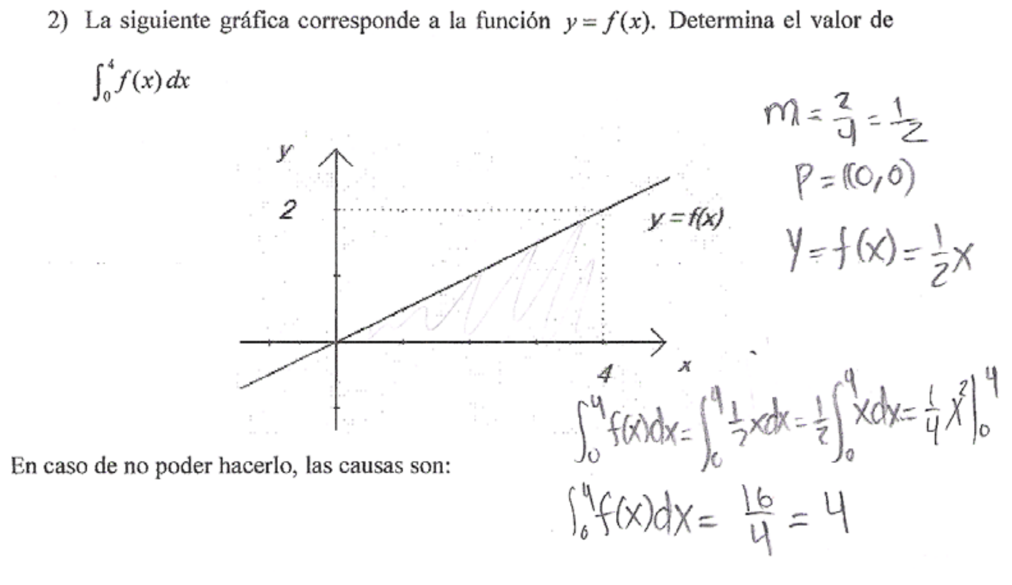
۞ En esta respuesta observamos que se traza la recta $y = 2x$, pero no se se utiliza para la determinación y comparación de áreas –como lo hacen la mayoría de quienes hicieron este trazo- y sólo es un recurso para establecer la relación entre dos funciones y a partir de dicha relación, establecer la comparación de las integrales. Esto es, el problema se resuelve empleando explícitamente la propiedad de que si $g(x) \geq f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, entonces, en caso de que ambas funciones sean integrables en el intervalo, $\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$.

El siguiente problema, el número 2, se pide que determinen el valor de $\int_0^4 f(x)\,dx$, el cual es más sencillo de obtener calculando el área de un triángulo, se le aplicó a 59 individuos, entre profesores y estudiantes. 31 optaron por resolverlo sólo por medio de un proceso algorítmico, determinando primero la ecuación de la recta de la figura mostrada y después aplicando el teorema fundamental del cálculo; 14 lo hicieron calculando el área; 7 usaron ambos procedimientos; y 7 no resolvieron el problema.



La forma de abordar el problema no obedece sólo a la sencillez del procedimiento de determinación de la ecuación de una recta, sino al significado de integral de algunos de los participantes. Así, de los 31 casos que atacaron este problema exclusivamente por medio de procedimientos algorítmicos, 21 intentaron usar el mismo procedimiento analítico en el problema 6, en el que es mucho más sencillo determinar áreas, lo cual hicieron sólo 8 de los participantes. De entre los 8 que hicieron cálculo de áreas, 2 pretendieron primero obtener antiderivadas pero desistieron al observar su complejidad, lo cual no pudieron hacer los restantes 21.

Pero regresando al problema 2, a continuación mostraremos dos de las respuestas, hechas por dos estudiantes y que ilustran los procedimientos seguidos por la mayoría de los participantes.


2) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina el valor de

$\int_0^4 f(x)\,dx$

En caso de no poder hacerlo, las causas son:

“$m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad p(0,0) \qquad y = f(x) = \frac{1}{2}x$

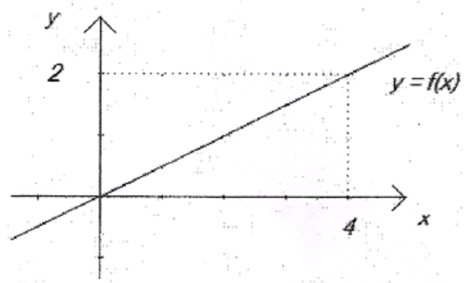
$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x\,dx = \frac{1}{4}x^2\Big|_0^4 \qquad \int_0^4 f(x)\,dx = \frac{16}{4} = 4$”.

۞ De la manera en la que este sujeto responde, se desprende que para él, la instrucción “determina el valor de $\int_0^4 f(x)\,dx$” implica la necesidad de contar con una función expresada analíticamente, sobre la que es entonces posible aplicar ciertas reglas que reconoce como propias a la determinación de una integral. Asimismo, nos muestra que entre sus significaciones es preponderante una concepción operativo-algorítmica de la integral, la que puede calcular empleando el teorema fundamental del cálculo, obteniendo la antiderivada de la función a integrar, evaluando en los extremos superior e inferior de la integral y restando los respectivos valores.۞

Esta concepción operativa de la integral es quizá más clara en el caso siguiente, en el cual el estudiante que respondió no supo como obtener la expresión algebraica de la función graficada y no recurrió a ninguna estrategia diferente para intentar resolver el problema, explicando las razones por las cuales no le es posible proporcionar una respuesta.

2) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina el valor de

$\int_0^4 f(x)\,dx$



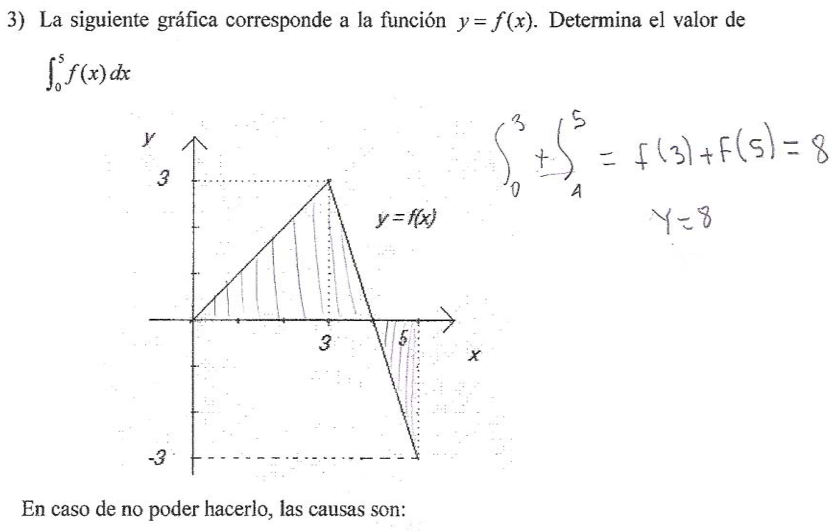
En caso de no poder hacerlo, las causas son:

no identifico bien la función, no sé que es lo que tengo q' antiderivar para empezar a trabajar.

"No identifico bien la función, no sé que es lo que tengo q' antiderivar para empezar a trabajar".

El comentario sobre las causas para no responder, sólo sugiere una concepción de la integral relacionada con la antiderivada, aunque en este caso el estudiante no muestra eficiencia respecto a la forma de determinar la ecuación de una recta y expresarla como una función.

Sin embargo, las respuestas que el mismo estudiante da a otros problemas, por ejemplo el tercero, que mostraremos aquí, indican que tiene noción de otras significaciones posibles, como las de área, aunque también procede mostrando serias deficiencias.


3) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina el valor de

$\int_0^5 f(x)\,dx$

En caso de no poder hacerlo, las causas son:

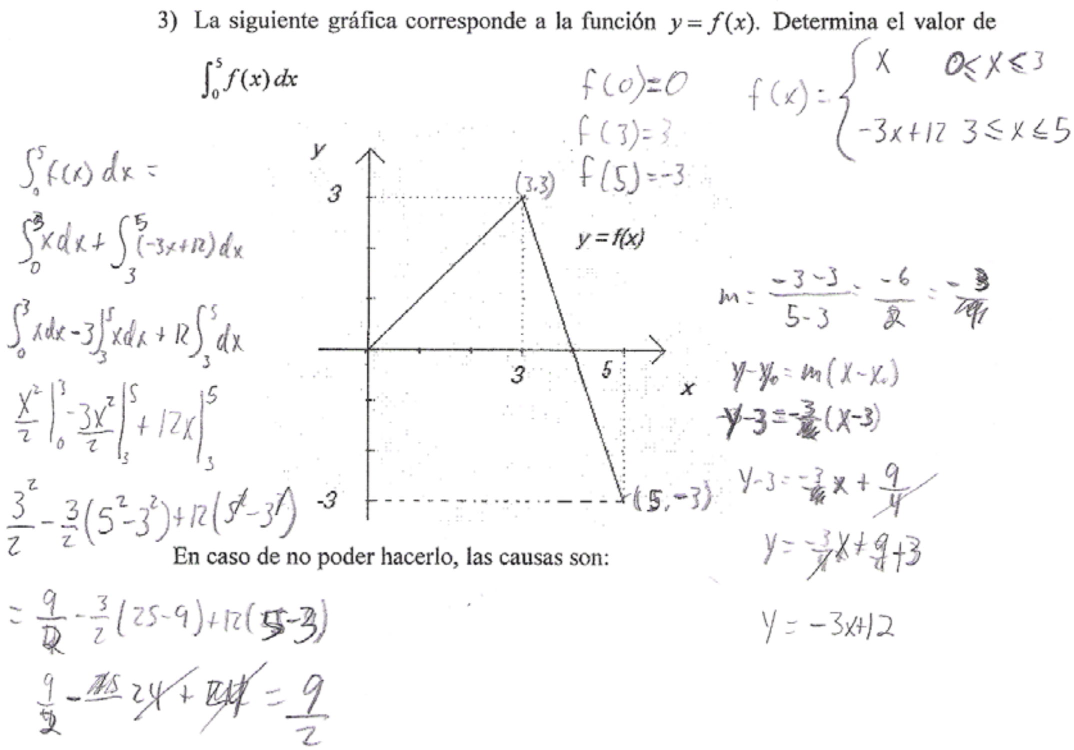
“ $\int_0^3 + \int_4^5 \;= f(3) + f(5) = 8$ $\qquad\qquad$ $y = 8$ ”.

۞ Independientemente de lo incorrecto de la respuesta y las dificultades para interpretar lo que escribió, las áreas sombreadas sugieren que adicionalmente a su concepción de la integral como antiderivada, cuenta también con una idea de la misma como área.۞

Las respuestas al tercer problema fueron también ilustrativas de las concepciones de los participantes, dado que en este caso la función involucrada tiene dos ramas o dos partes, requiriéndose determinar las ecuaciones de dos rectas para obtener su expresión algebraica, en tanto que determinar áreas es bastante más sencillo y rápido, pero una vez más, la situación no fue resuelta de esta manera. El problema se le aplicó a 39 de los participantes, de ellos 17 determinaron la integral por medio del cálculo de áreas, 13 lo hicieron por procedimientos algorítmicos, 7 no lo resolvieron y dos combinaron procedimientos algorítmicos y de cálculo de áreas.

Cabe hacer la aclaración de que en este problema, la función a integrar es positiva en una parte de su dominio de definición y negativo en otra, lo que condujo a errores a algunos de quienes optaron por el cálculo de áreas.

Para ilustrar los tipos de respuestas, mostraremos primero la de un estudiante de física que resolvió correctamente el problema.



$$“\ f(0)=0 \qquad f(3)=3 \qquad f(5)=-3 \qquad f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 3 \\ -3x+12 & 3\le x\le 5\end{cases}$$

$$m=\frac{-3-3}{5-3}=\frac{-6}{2}=-3 \qquad y-y_0=m(x-x_0) \qquad y-3=-3(x-3)$$

$$y-3=-3x+9 \qquad y=-3x+9+3 \qquad y=-3x+12$$

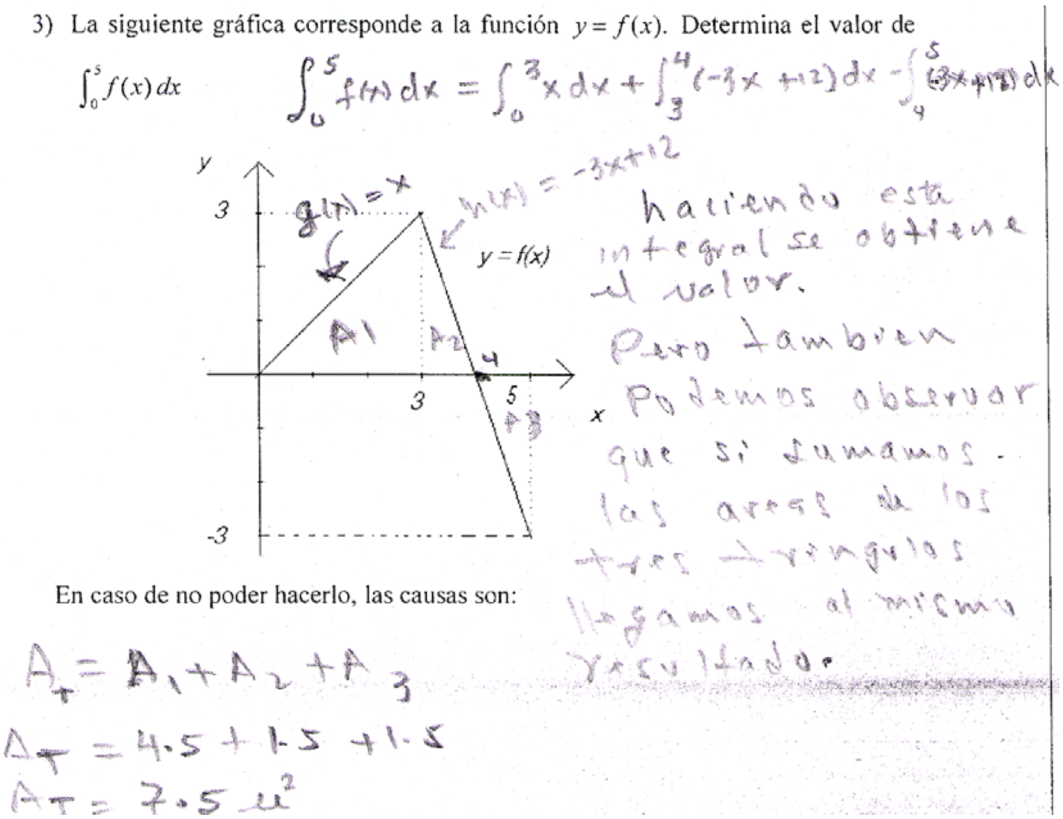
$$\int_0^5 f(x)\,dx=\int_0^3 x\,dx+\int_3^5(-3x+12)\,dx \qquad \int_0^3 x\,dx-\int_3^5 3x\,dx+\int_3^5 12\,dx$$

$$\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3-\left.\frac{3x^2}{2}\right|_3^5+12x\Big|_3^5 \qquad \frac{3^2}{2}-\frac{3}{2}(5^2-3^2)+12(5-3)$$

$$\frac{9}{2}-\frac{3}{2}(25-9)+12(5-3) \qquad \frac{9}{2}-24+24=\frac{9}{2}$$

۞ La respuesta del estudiante es del mismo tenor que una de las ya discutidas previamente, sólo que en este caso, el procedimiento es bastante más laborioso. ۞

Con el mismo problema, tenemos la respuesta que dio uno de los profesores del nivel superior que participó en la investigación.



"$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^3 x\,dx + \int_3^4 (-3x+12)\,dx - \int_3^5 (3x+12)\,dx$

Haciendo esta integral se obtiene el valor. Pero también podemos observar que si sumamos las áreas de los tres triángulos llegamos al mismo resultado.

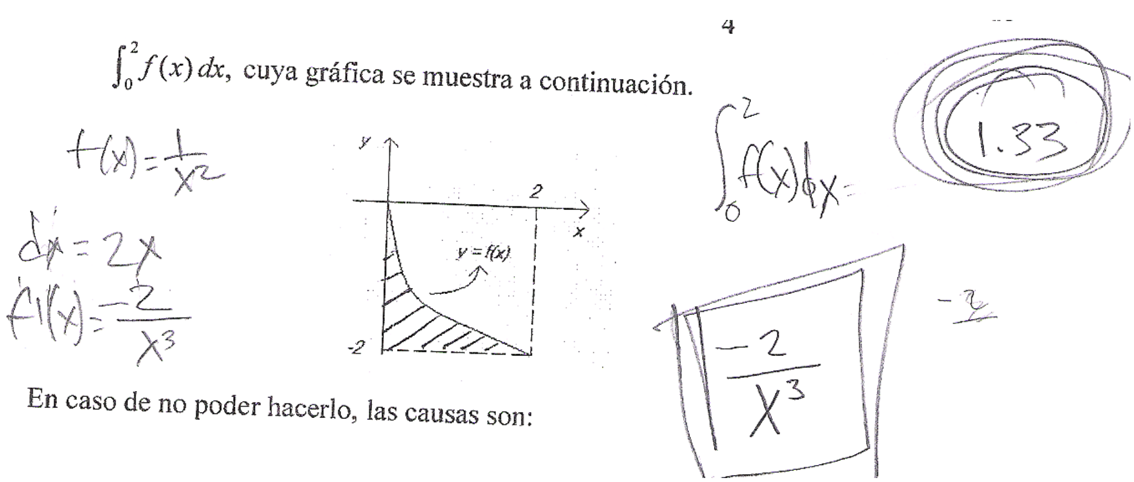
$A_T = A_1 + A_2 + A_3$ $\qquad$ $A_T = 4.5 + 1.5 + 1.5$ $\qquad$ $A_T = 7.5u^2$".

۞ Esta respuesta nos parece ilustrativa porque primeramente se plantea el problema en términos analíticos, con la particularidad de que en la parte donde la gráfica de la función corresponde a una recta con pendiente negativa, el profesor se planteó resolver dos integrales definidas, separando la parte positiva de la función de su parte negativa. En la parte negativa de la función, en el intervalo *[4,5]*, el profesor resta la integral, con lo cual obtendría un valor positivo. Esta forma de percibir las cosas nos indica que el profesor asume que el resultado final de la integración debe ser el área total involucrada, pero a la vez es una versión inconsistente con el hecho de que si sólo estuviera resolviendo la integral en el intervalo *[4,5]*, tiene conciencia de que la integral correspondiente sería negativa. Aunque en esta parte analítica no tenemos elementos para hacer una interpretación más sólida sobre la forma de concebir la situación por parte del profesor, su agregado en el sentido de que la integral corresponde a la suma de tres áreas, las cuales determina, son en el sentido de que finalmente la integral debe ser la suma de las áreas de todas las regiones involucradas.

Otro problema de cuyas respuestas se pudieron establecer interpretaciones interesantes e importantes sobre las concepciones de integral que mostraron los participantes en la investigación, fue el número 7. Con este problema sólo esperábamos observar si se reconocía el valor negativo de las integrales de funciones con valores negativos, pero las respuestas que se dieron mostraron también otros aspectos.

El problema fue aplicado a 56 participantes y de éstos, hubo 10 que asignaron una expresión analítica a la función y la integraron, 15 que no respondieron el problema. De los restante 31, 20 dieron una respuesta con valores positivos y sólo 11 respondieron correctamente.

Una de las respuestas que se intentaron por medio de procedimientos algorítmicos es la siguiente.

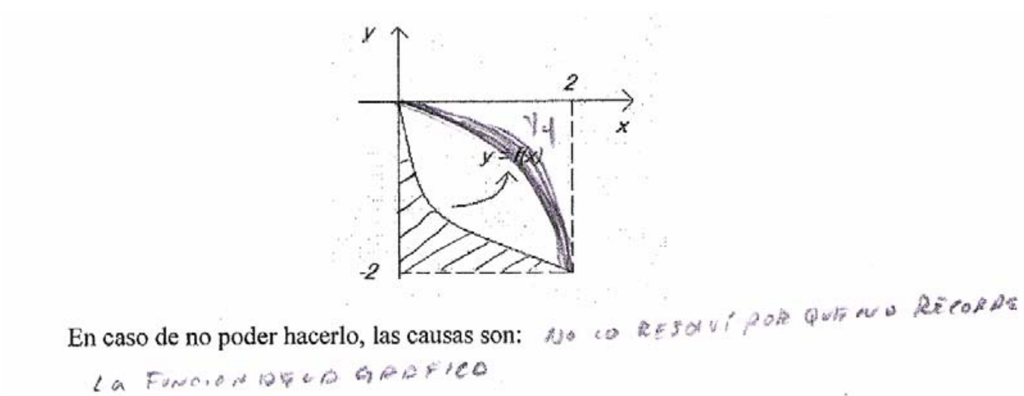


“$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $\quad dx = 2x \quad$ $f'(x)=\dfrac{-2}{x^3}$

$\int_0^2 f(x)\,dx$ $\quad 1.33 \quad$ $\dfrac{-2}{x^3}$”.

۞ Independientemente de las deficiencias en las manipulaciones analíticas, queremos destacar el intento de resolver una situación geométricamente sencilla, partiendo del significado de integral como área (el negativo de un área en este caso), por medio de la determinación de la expresión analítica de una función y la posterior obtención de su integral definida. Este tipo de respuestas son indicativas de que los sistemas de prácticas dominantes son los relativos a las antiderivadas y determinación de integrales definidas a partir de ellas.۞

Una situación que se salía del entorno de nuestros análisis a priori para elaborar el instrumento de evaluación era el elevado número de participantes que dejaron este reactivo sin respuesta. Pero quizá la principal razón es, otra vez, la preponderancia del significado de integral indefinida o definida, pero siempre asociado a la antiderivada. La razón de esta hipótesis la tenemos en algunas de las expresiones de este grupo de participantes, una de las más clarificadoras es la que se muestra a continuación.



“No lo resolví porque no recordé la función de la gráfica”.

۞ De esta respuesta se desprende que, a pesar de que se tiene el dato del área sombreada, para este estudiante la interpretación de la expresión “determina el valor de la integral” significa hacer una serie de operaciones a partir de una expresión analítica, la función integrando. En otros casos similares a obtener su antiderivada, evaluarla en los límites con lo cual es posible determinar el valor de la integral solicitada, el estudiante no supo resolver la situación porque para él era necesario tener una expresión analítica de la función, con la cual poder proceder a obtener el valor de la integral. “No me sé estos ejercicios y no entiendo lo que pide”. “no sé hacerla”.”no sé integrar” “no sé integrar todavía y no traía calculadora” l.

Continuando con este análisis general de algunas de las respuestas que dieron los participantes a los problemas propuestos, tenemos el relativo al significado de la integral, en la cual se plantean tres opciones, la primera como área, la segunda como el límite de una suma y la tercera como un número obtenido aplicando el teorema fundamental del cálculo, se le aplicó a 52 estudiantes, de los cuales 18 optaron por asumir la integral como número (por que identificaban lo que según ellos, era una versión del teorema fundamental del cálculo); 12 la asociaron con un área; 2 dijeron que se trataba de un límite; 12 argumentaron que las tres opciones eran correctas; 4 sostuvieron que era tanto un área como un límite; y 4 no contestaron.

Aunque la mayoría seleccionó la opción operativa de evaluar una antiderivada en los límites de integración, situación congruente con la resolución del problema al que aludimos antes, la proporción de respuestas en este sentido es menor a la proporción de quienes resolvieron operativamente el problema indicado y más del 90% de los sujetos de investigación dieron muestras de tener más de un significado para la integral, particularmente el de área.

La baja cantidad de respuestas de la integral como un límite nos llamó la atención porque, al menos en el caso de los estudiantes de física y matemáticas, los profesores ponen especial énfasis en los aspectos formales de la matemática y la integral se presenta y se define precisamente como límite. En la estrategia que siguen para la enseñanza de la integral, inician con el problema de la determinación de áreas, por medio de las sumas de Riemann, calculando sumas superiores y sumas inferiores y, sin embargo, pocos reconocieron siquiera a la integral como límite.

En el caso específico de los 21 estudiantes de las carreras de física y matemáticas, sólo 8 incluyeron entre sus respuestas la caracterización de la integral como un límite. Una vez más, en nuestra interpretación, planteamos que esta situación se presenta porque, aún con el énfasis que se pone en estas carreras hacia la presentación formal de los objetos matemáticos, los sistemas de prácticas principales que se promueven son los relativos al cálculo de antiderivadas y aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo para la obtención de integrales definidas.

Éste es un caso similar al del concepto imagen y concepto definición, con el agravante de que estudiantes que revisaron exhaustivamente a la integral como límite (de lo cual nos percatamos de diferentes maneras), ni siquiera reconocían o identificaban la integral presentada de esta manera.

En cuanto al problema de determinar las condiciones para la igualdad de las integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$ se lo aplicamos a 26 personas y de ellas 13 contestaron que la solución se obtenía sólo en caso de que $c=0$, 7 no contestaron, uno resolvió un caso particular pero no dio mayor explicación y 6 dieron una respuesta correcta.

De los seis que resolvieron correctamente el problema, sólo uno de ellos empleó, además de argumentos geométricos, un procedimiento algorítmico.

4.3.2 ALGUNOS CASOS PARTICULARES

Para profundizar un poco en el análisis de las respuestas, mostraremos algunos casos particulares de estudiantes y profesores en varias de sus respuestas al instrumento de evaluación. No se trata de seguir una metodología de análisis de casos, sólo de mostrar las respuestas a varios de los problemas de los sujetos que presentaremos, con el fin de estudiar con un poco más de detalle los significados que asignan al objeto “integral de una función”. En tal sentido, los casos que presentamos no fueron tratados especialmente ni estuvieron sujetos a entrevistas o exámenes posteriores.

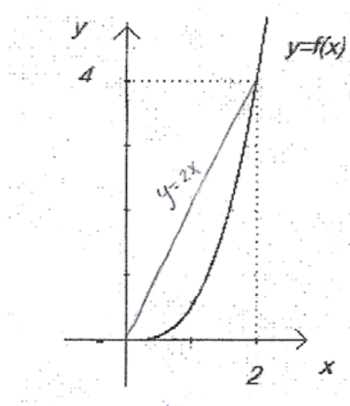
Para identificarlos, sólo nos referiremos a ellos como casos A,B,C,D, etc.

Caso A:

Este caso es el de un estudiante del cuarto semestre de la carrera de licenciado en matemáticas. El primer problema lo resolvió como se ilustra a continuación

.

1) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina si es verdadera o falsa la afirmación de que $\int_0^2 f(x)\,dx \leq 4$.. Cualquiera que sea tu respuesta, arguméntala.



$\int_0^2 2x\,dx = 4$

$y=2x$ Claramente tiene mucho mayor área en $[0,2]$ que $y=f(x)$, así que

la $\int_0^2 2x\,dx = 4$ y es mayor que la $\int_0^2 f(x)\,d$ ya que pasa por arriba de ella entonces

$\int_0^2 f(x)\,dx < 4$ Verdadero

En caso de no poder hacerlo, las causas son:

“ $\int_0^2 2x\,dx = 4$ $y = 2x$ claramente tiene mucho mayor área en [0,2] que $y = f(x)$, así que

la $\int_0^2 2x\,dx = 4$ y es mayor que la $\int_0^2 f(x)\,dx$ ya que pasa por arriba de ella. Entonces

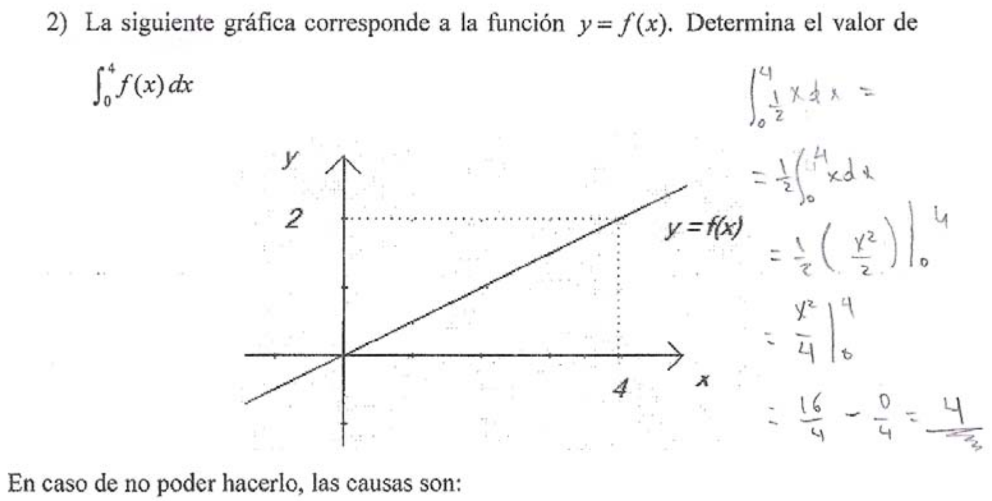
$\int_0^2 f(x)\,dx < 4$ Verdadero”.

۞ En este caso podemos observar que para resolver el problema, el estudiante primero procedió a trazar la línea recta $y = 2x$ y, sin especificar la forma de cálculo, estableció que $\int_0^2 2x\,dx = 4$, la cual considera mayor a $\int_0^2 f(x)\,dx$ porque “tiene mucho mayor área”. De esta manera manifiesta que entre las significaciones de integral, tiene la de área de figuras y de su comparación establece la relación entre las integrales.

Sin embargo, parece dudar de la validez del argumento de área y procura dar una argumentación más convincente, recurriendo a la propiedad de que si $g(x) \geq f(x)$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$. Pero su forma de escribirlo no es precisamente esta y, su argumento no es ni analítico ni numérico, toda vez que vuelve a recurrir a los aspectos geométricos, estableciendo ahora que “pasa por arriba de ella”.

El lenguaje empleado es muestra de que, a pesar de tener un significado adecuado de la integral, que incluye la interpretación de la integral como área y el reconocimiento de que si los valores de una función son mayores a los de otra, lo mismo sucederá con los correspondientes valores de la integral y, también, su sistema de prácticas le posibilita coordinar las representaciones geométricas con las analíticas, pero con un lenguaje que, de acuerdo a la formalidad, es impreciso, como “tiene mucha mayor área” o “pasa por arriba de ella”.۞

La solución que acabamos de mostrar nos ilustra que el estudiante fue capaz de establecer relaciones generales, sin recurrir a casos específicos, basándose en su concepción de integral como área o en la caracterización de los valores de las integrales de funciones, cuando una “pasa por arriba de otra”. Pero estas argumentaciones gráficas no se ponen de manifiesto en otras situaciones como la siguiente, en la cual es posible determinar fácilmente la expresión analítica de la función en juego.


2) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina el valor de

$\int_0^4 f(x)\,dx$

$\int_0^4 \frac{1}{2} x\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int_0^4 x\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^4$

$= \frac{y^2}{4}\Big|_0^4$

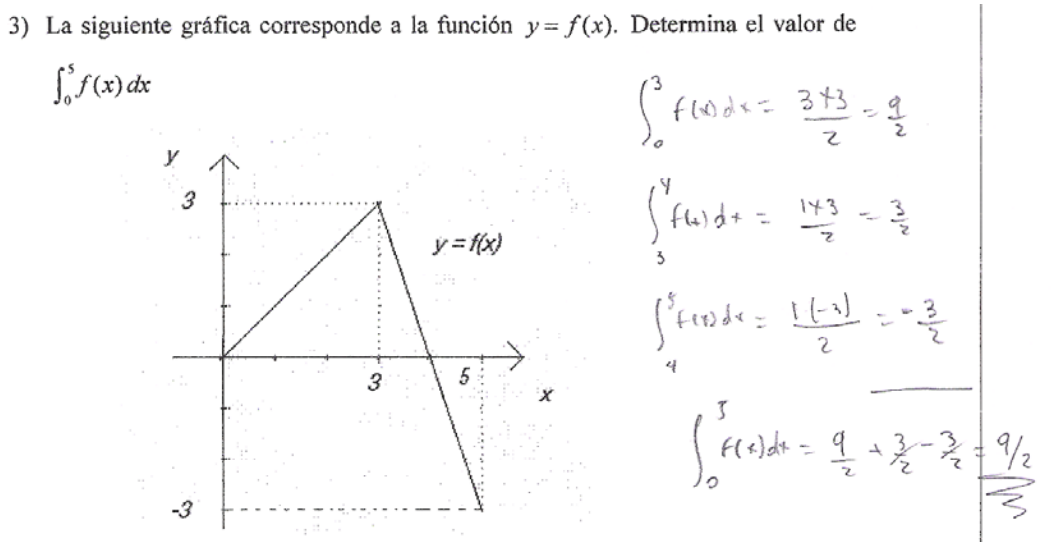
$= \frac{16}{4} - \frac{0}{4} = 4$

En caso de no poder hacerlo, las causas son:

$$“\int_0^4 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^4 = \frac{16}{4} - \frac{0}{4} = 4”.$$

En este problema vemos que el estudiante puede determinar la ecuación de la recta graficada, escribirla como función e integrarla usando el teorema fundamental del cálculo, sin ninguna alusión a las áreas, que, en este caso, se reduce al área de un triángulo. Es de notarse que, aún y cuando el estudiante ha dado muestras de tener entre sus significaciones de integral la de área, y, sin embargo, recurre a un procedimiento que se corresponde con la significación que le es más familiar, esto es, la del cálculo de antiderivadas.

En el siguiente problema retorna a su concepción de integral como área, quizá porque aquí sí reconoció que el procedimiento geométrico es más sencillo.



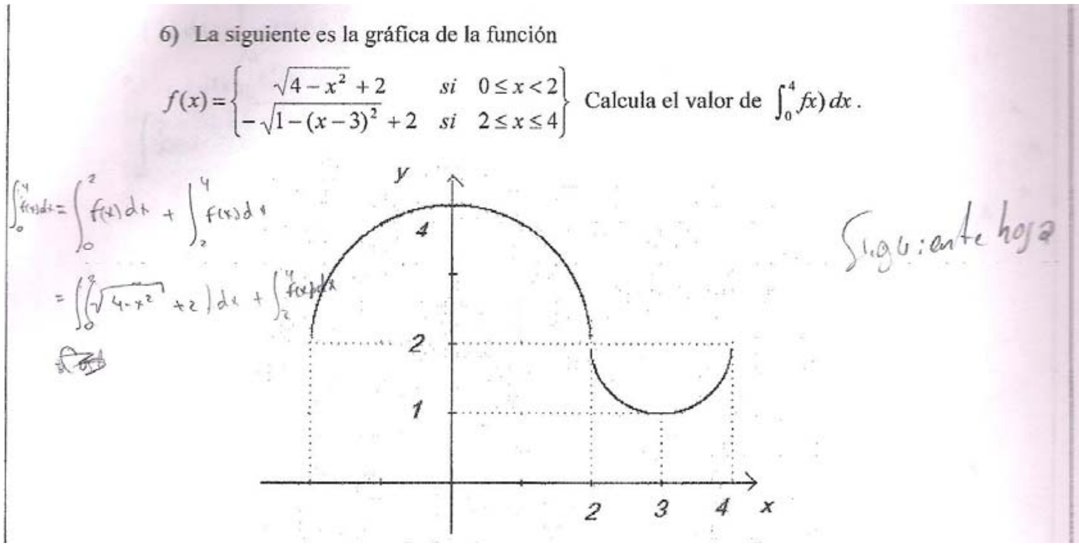
$$\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{3\times 3}{2} = \frac{9}{2} \qquad \int_3^4 f(x)\,dx = \frac{1\times 3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_4^5 f(x)\,dx = \frac{1(-3)}{2} = \frac{-3}{2} \qquad \int_0^5 f(x)\,dx = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}\text{”.}$$

El problema está correctamente resuelto y el estudiante reconoce el valor negativo de la integral cuando la función es negativa. Pero, por otra parte, la pregunta que nos formulamos es ¿por qué en la parte positiva de la función se hace el cálculo de las áreas de dos triángulos si puede hacerse la de uno solo? Esto es, si se asocia el valor de las áreas entre figuras y los valores de las integrales, ¿por qué se hace esa separación?

Esta forma de proceder pone de manifiesto que aún reconociendo las áreas como el valor de la integral, la visión global del problema es difícil de percibir y el sujeto de investigación hace una separación porque está pensando en dos integrales (quizá en tres), haciéndola en trozos. Incluso es posible pensar que no sólo piensa en dos integrales sino en dos funciones distintas, asociando cada segmento de recta a una función diferente y con tal concepción decide la estrategia de solución.

A pesar de mostrar una diversidad de significaciones para la integral de una función y haber dado evidencia de recursos geométricos y algorítmicos, en el siguiente problema, como le sucedió a muchos otros, sólo fue capaz de abordarlo por medio de la búsqueda de antiderivadas.



6) La siguiente es la gráfica de la función

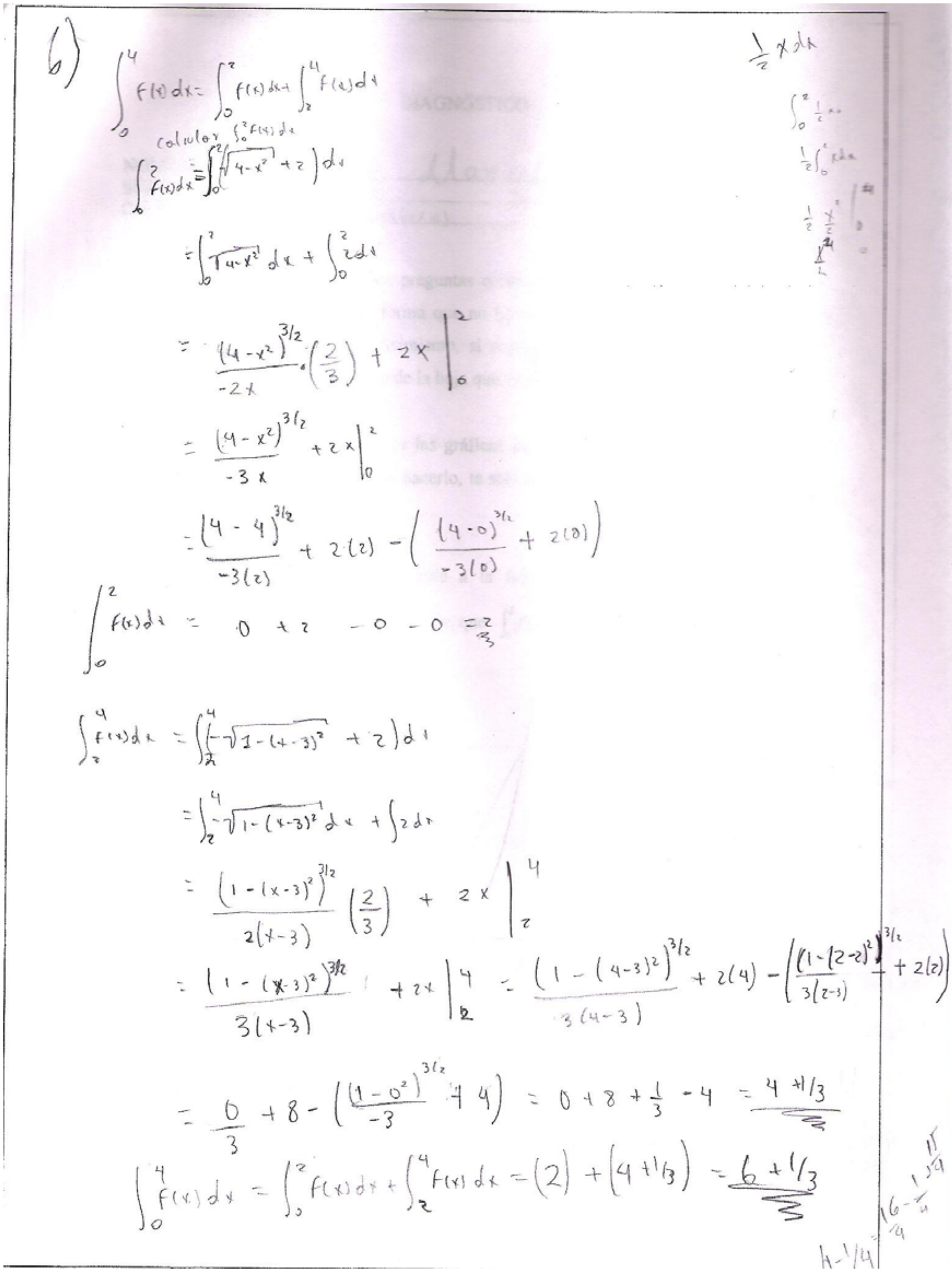
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}+2 & si \quad 0\le x<2\\ -\sqrt{1-(x-3)^2}+2 & si \quad 2\le x\le 4\end{cases}$$ Calcula el valor de $\int_0^4 f\!x)\,dx$.

$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$

$= \int_0^2 (\sqrt{4-x^2}+2)\,dx + \int_2^4 f(x)dx$

Siguiente hoja

“ $\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(\sqrt{4-x^2}+2\right)dx + \int_2^4 f(x)\,dx$ Siguiente hoja



b) $\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$

calcular $\int_0^2 f(x)\,dx$

$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(\sqrt{4-x^2} + 2\right) dx$

$= \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx + \int_0^2 2\,dx$

$= \left.\frac{(4-x^2)^{3/2}}{-2x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right) + 2x \right|_0^2$

$= \left.\frac{(4-x^2)^{3/2}}{-3x} + 2x \right|_0^2$

$= \frac{(4-4)^{3/2}}{-3(2)} + 2(2) - \left(\frac{(4-0)^{3/2}}{-3(0)} + 2(0)\right)$

$\int_0^2 f(x)\,dx = 0 + 2 - 0 - 0 = 2$

$\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 \left(-\sqrt{1-(x-3)^2} + 2\right) dx$

$= \int_2^4 -\sqrt{1-(x-3)^2}\,dx + \int 2\,dx$

$= \left.\frac{(1-(x-3)^2)^{3/2}}{2(x-3)}\left(\frac{2}{3}\right) + 2x \right|_2^4$

$= \left.\frac{(1-(x-3)^2)^{3/2}}{3(x-3)} + 2x \right|_2^4 = \frac{(1-(4-3)^2)^{3/2}}{3(4-3)} + 2(4) - \left(\frac{(1-(2-3)^2)^{3/2}}{3(2-3)} + 2(2)\right)$

$= \frac{0}{3} + 8 - \left(\frac{(1-0^2)^{3/2}}{-3} + 4\right) = 0 + 8 + \frac{1}{3} - 4 = 4 + 1/3$

$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx = (2) + (4 + 1/3) = 6 + 1/3$

$\frac{1}{2} x\,dx$ $\quad \int_0^2 \frac{1}{2} x\,dx$ $\quad \frac{1}{2}\int_0^2 x\,dx$ $\quad \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^2$

“ $\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$

Calcular $\int_0^2 f(x)\,dx$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(\sqrt{4-x^2}+2\right)dx = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx + \int_0^2 2\,dx = \frac{\left(4-x^2\right)^{3/2}}{-2x} \bullet \left(\frac{2}{3}\right) + 2x \Big|_0^2$$

$$= \frac{\left(4-x^2\right)^{3/2}}{-3(2)} + 2x \Big|_0^2 = \frac{\left(4-4\right)^{3/2}}{-3(2)} + 2(2) - \left(\frac{\left(4-0\right)^{3/2}}{-3(0)} + 2(0)\right)$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 0+2-0-0 = 2$$

$$\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 \left(-\sqrt{1-(x-3)^2}+2\right)dx = \int_2^4 -\sqrt{1-(x-3)^2}\,dx + 2\int dx$$

$$= \frac{\left(1-(x-3)^2\right)^{3/2}}{2(x-3)}\left(\frac{2}{3}\right) + 2x \Big|_2^4 = \frac{\left(1-(x-3)^2\right)^{3/2}}{3(x-3)} + 2x \Big|_2^4$$

$$= \frac{\left(1-(4-3)^2\right)^{3/2}}{3(4-3)} + 2(4) - \frac{\left(1-(2-3)^2\right)^{3/2}}{3(2-3)} + 2(2) = \frac{0}{3} + 8 - \frac{\left(1-0^2\right)^{3/2}}{-3} + 4$$

$$= 0 + 8 + \frac{1}{3} - 4 = 4 + \frac{1}{3}$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx = (2) + \left(4 + \tfrac{1}{3}\right) = 6 + \tfrac{1}{3}$$".

La falta de percepción sobre la naturaleza geométrica o la dificultad para visualizar rápidamente la forma de calcular áreas, como en los casos de las rectas de los problemas anteriores, hacen surgir la búsqueda única de solución por medio de la determinación de antiderivadas.

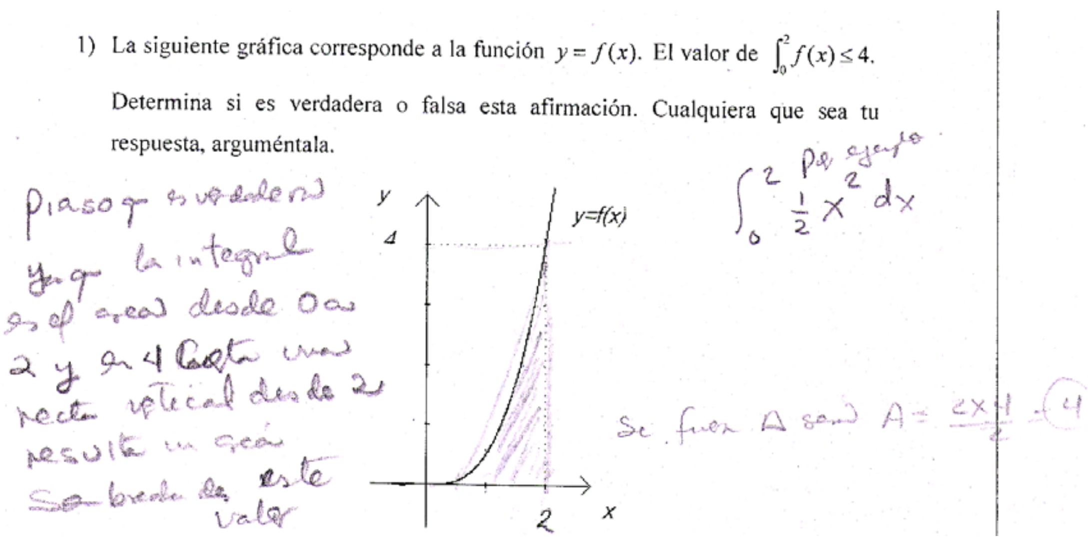
Caso B:

El sujeto de investigación que designamos por medio de la letra B, es el caso de un profesor de matemáticas de educación superior, que tiene además, varios años de experiencia impartiendo cursos de cálculo en el bachillerato.

Al entregar la hoja de soluciones, el profesor aclaró que lo que realizó fue la obtención de integrales, y la determinación de áreas fue un recurso de comprobación o verificación de los resultados. Al cuestionársele las razones para proceder de esa manera, respondió que, por una parte las integrales son una cosa y, por otra, como son útiles para obtener “el área bajo una curva”, el cálculo de áreas le permitía comprobar sus resultados.

Esta declaración la interpretamos, en principio, como muestra de que el profesor tiene una significación de la integral tanto en términos operativos como de asociación con el “área bajo la curva”. Sin embargo, la forma de expresarlo y la afirmación de que la determinación de un área sólo le es útil para comprobar resultados, es indicio de que las significaciones asignadas a la integral están aún en etapa de consolidación.

Para observar con más detalle la significación de integral, reproducimos a continuación algunas de las respuestas del sujeto B.



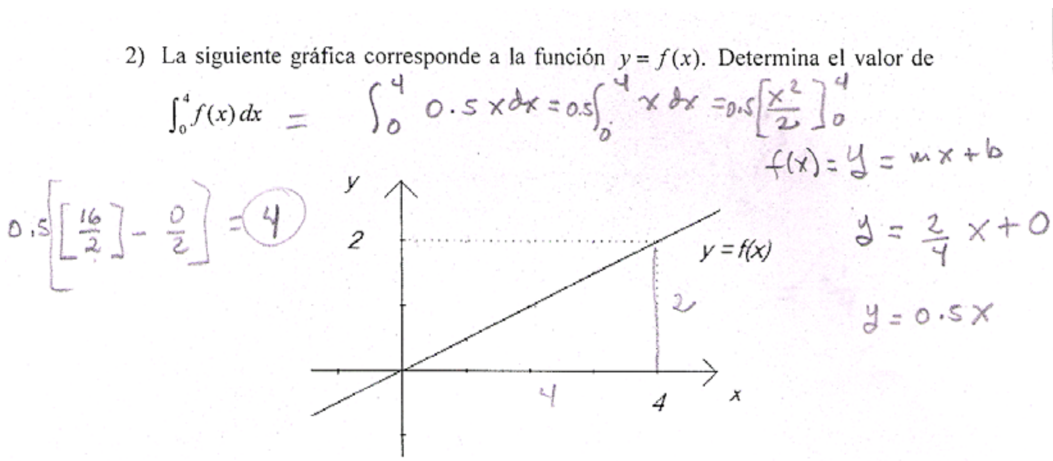
“Pienso que es verdadera ya que la integral es el área desde *0* a *2* y en *4* corta una recta vertical desde *2* resulta un área sombreada de este valor.

$\int_0^2 \frac{1}{2} x^2\, dx$ por ejemplo

Si fuera Δ sería $A = \dfrac{2 \times 4}{2} = 4$”

En este caso observamos que el sujeto de análisis asocia la integral de una función con el área y resuelve el problema trazando el segmento de recta que une al origen de coordenadas con el punto $(2,4)$. Por otra parte “ejemplifica” con el valor de $\int_0^2 \frac{1}{2} x^2\, dx$. De acuerdo con su declaración original, al cuestionársele su respuesta, nos dijo que en realidad primero hizo el cálculo de $\int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx$ y después tomó en cuenta el área del triángulo formado.

El siguiente problema lo resolvió sólo de forma operativa:



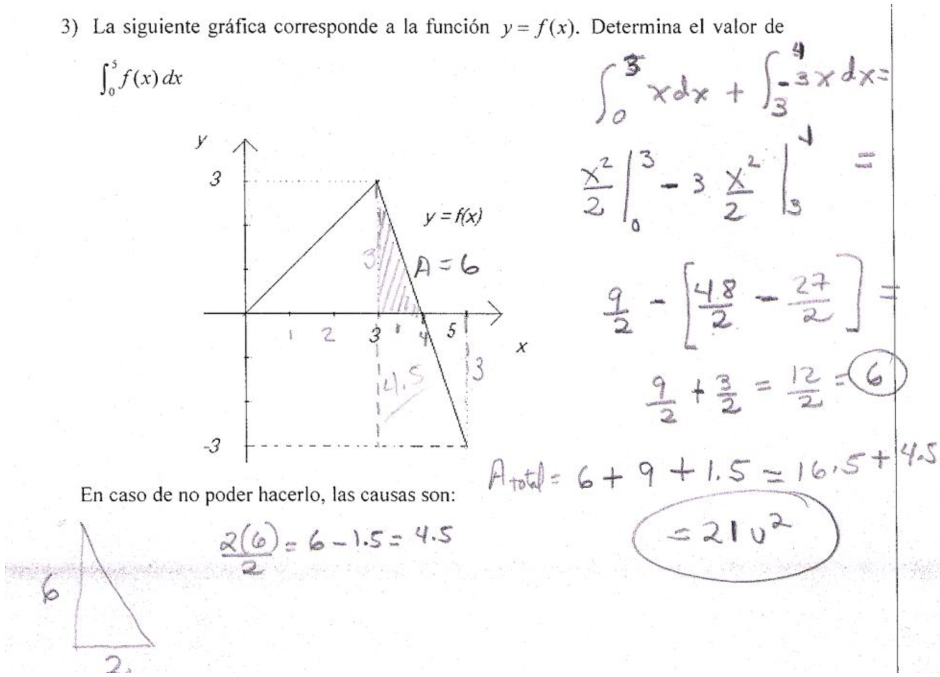
“ $\int_0^4 0.5x\,dx = 0.5\int_0^4 x\,dx = 0.5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$ $\qquad f(x) = y = mx + b$

$0.5\left[\left[\frac{16}{2} - \frac{0}{2}\right]\right] = 4$ $\qquad y = \frac{2}{4}x + 0$

$y = 0.5x$".

En este caso su seguridad sobre el resultado, obtenido operativamente es tal que, aparentemente no necesitó recurrir a la comprobación por medio de las áreas.

El siguiente problema es bastante ilustrativo de la significación de la integral del sujeto B, y de la forma en la que concibe la frase “área baja la curva”.



$$\text{“}\int_0^3 x\,dx + \int_3^4 -3x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 - 3\left.\frac{x^2}{2}\right|_3^4 = \frac{9}{2} - \left[\frac{48}{2} - \frac{27}{2}\right] = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$A_{Total} = 6 + 9 + 1.5 = 16.5 + 4.5 = 21\,u^2$$

$$\frac{2(6)}{2} = 6.5 - 1.5 = 4.5\text{”.}$$

۞ Para interpretar la respuesta que se da a este problema, ante la falta de una entrevista con el sujeto, tuvo que hacerse interpretando el resultado global del problema, y considerando procedimientos de otros sujetos cuyos procedimientos fueron similares pero que expresaron con mayor claridad.

Al principio, el sujeto intenta resolver la suma de integrales $\int_0^3 x\,dx + \int_3^4 -3x\,dx$, asignando incorrectamente la expresión algebraica $y = -3x$ a la recta que une los puntos $(4,0)$ y $(3,3)$. Aquí nos surgió una primer interrogante: ¿Por qué excluyó un intervalo en la integral de $y = -3x$ y no trató de obtener $\int_3^5 -3x\,dx$? Esto es, excluyó de la integración al intervalo en el cual la función es negativa.

Después resuelve la suma de integrales señaladas pero el resultado que se obtendrá es – *6* y lo escribe como un número positivo, *6*, al darse cuenta de que corresponde al área de la integración en el intervalo [0,4], como fue tomado, pero con una función que no corresponde a la situación. Posiblemente ni se dio cuenta de que el resultado que obtendría era negativo pues escribió $\frac{9}{2}-\left[\frac{48}{2}-\frac{27}{2}\right]=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=6,$ cambiando la resta de $\left[\frac{48}{2}-\frac{27}{2}\right]$ por la suma de $\frac{3}{2},$ la cual corresponde al área del triángulo sombreado por el sujeto.

Nuestra interpretación es que para el sujeto la significación de la integral como área juega un papel más importante que el declarado respecto a las posibilidades de comprobación de resultados. Esta significación de la integral como área se ve más claramente al observar sus siguientes anotaciones, particularmente al escribir el resultado final por medio de $A_{Total}=6+9+1.5=16.5+4.5=21\,u^2$, posterior al cálculo del área del trapecio que une los puntos $(3,0),(4,0),(3,-3)\,y\,(5,-3)$. Pero ¿a qué corresponde su suma, independientemente de lo pésimamente expresada? Corresponde al área de la figura cuyos vértices son $(0,0),(0,-3),(3,3)\,y\,(5,-3)$ más el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $(4,0),(5,0)\,y\,(5,-3)$.

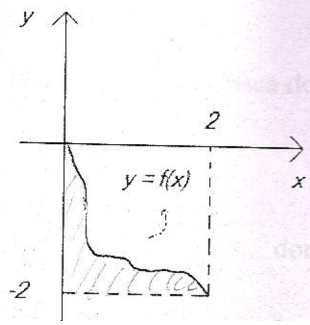
De esta manera logró obtener un valor que correspondiera con su concepción de lo que interpreta como “área bajo la curva”.

El sujeto en cuestión dio muestras de que al tener problemas para determinar operativamente el valor de la integral, privilegió su concepción de integral como área, con una significación muy peculiar.

Esta versión de “área bajo la curva”, se pone también de manifiesto al observar su respuesta al siguiente problema:

7) Conociendo que el área de la región sombreada es $\frac{1}{4}$, determina el valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$, cuya gráfica se muestra a continuación.

el Área es $\frac{1}{4}u^2$



"El área es $\frac{1}{4}u^2$".

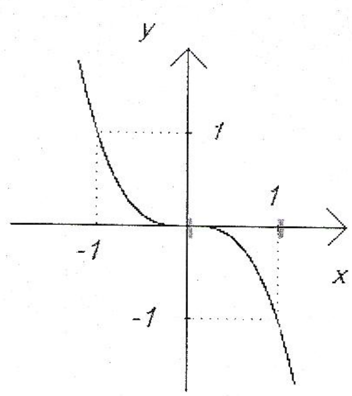
Nótese además que al hacer referencia al área como respuesta, sin siquiera escribir el signo para la integral, las considera como equivalentes.

En otros casos, cuando según el sujeto B no se presentan problemas de carácter operativo, las integrales las resuelve empleando el teorema fundamental del cálculo, como en los casos siguientes:

4) La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = -x^3$. Determina el valor de $\int_0^1 f(x)\,dx$.

$$-\int_0^1 x^3\,dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_0^1$$

$$= \frac{-1}{4}u^2$$



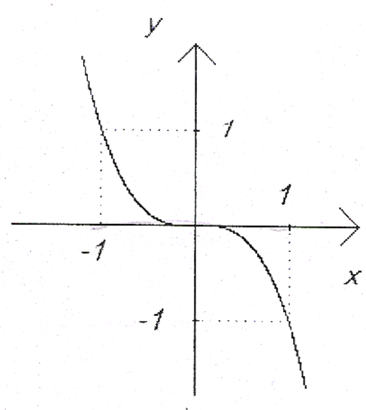
$$“-\int_0^1 x^3\,dx = -\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{-1}{4}u^2”.$$

5) La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = -x^3$. Calcula el valor de $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$$-\int_{-1}^{1} x^3 dx = -\frac{x^4}{4}\bigg|_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{4} - \left[\frac{-(-1)^4}{4}\right]$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

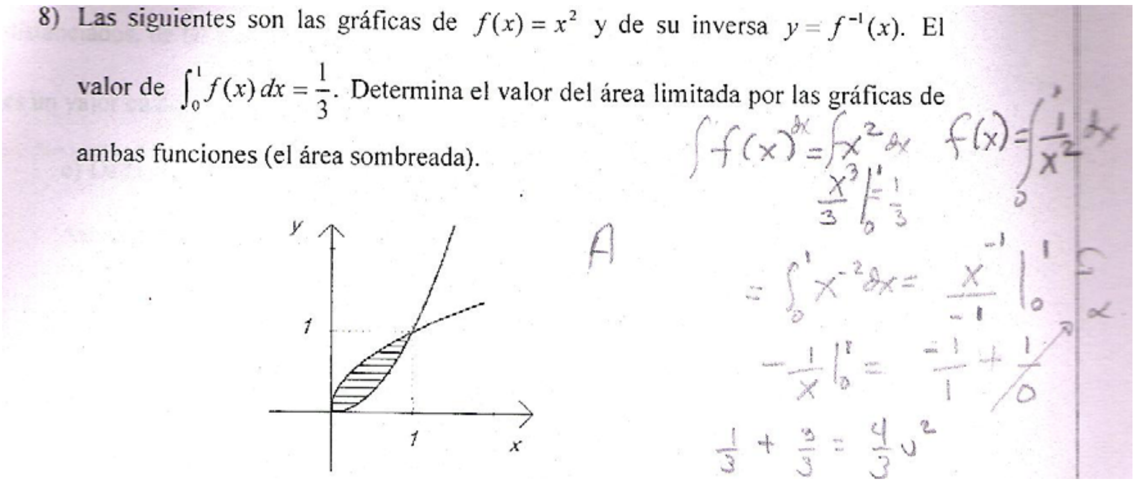


$$“-\int_{-1}^{1} x^3\,dx = -\frac{x^4}{4}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{-1}{4} - \left[\frac{-(-1)^4}{4}\right] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0”.$$

۞ En este caso, en el cual la solución podía obtenerse a partir del resultado anterior, considerando la simetría de la gráfica de la función respecto al origen, el sujeto de investigación recurrió nuevamente al procedimiento algorítmico. La integral a resolver es analíticamente sencilla y no se hace ninguna referencia al área ni se sombrean las áreas involucradas como en otros casos. Ciertamente no se solicita una reflexión sobre el resultado y la actitud espontánea es simplemente hacer el cálculo algorítmicamente.

Sin embargo, el resultado de la primera de las integrales lo escribe como $-\frac{1}{4}u^2$, de donde se desprende que al resolver la integral piensa que está calculando un área (u^2 se suele usar para denotar “unidades cuadradas”). Pero por sus respuestas, pareciera más un acto mecánico, ligado a su significación, pero sin que necesariamente interprete la situación concreta que está resolviendo.۞

Pero si se presentan problemas operativos, en los cuales tiene alguna versión geométrica respecto del área de una figura, sustituye sin dificultades los resultados incongruentes con los de su versión geométrica, aunque ésta también resulte incorrecta o incongruente, como en el caso siguiente:


8) Las siguientes son las gráficas de $f(x) = x^2$ y de su inversa $y = f^{-1}(x)$. El valor de $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$. Determina el valor del área limitada por las gráficas de ambas funciones (el área sombreada).

$$“\int f(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

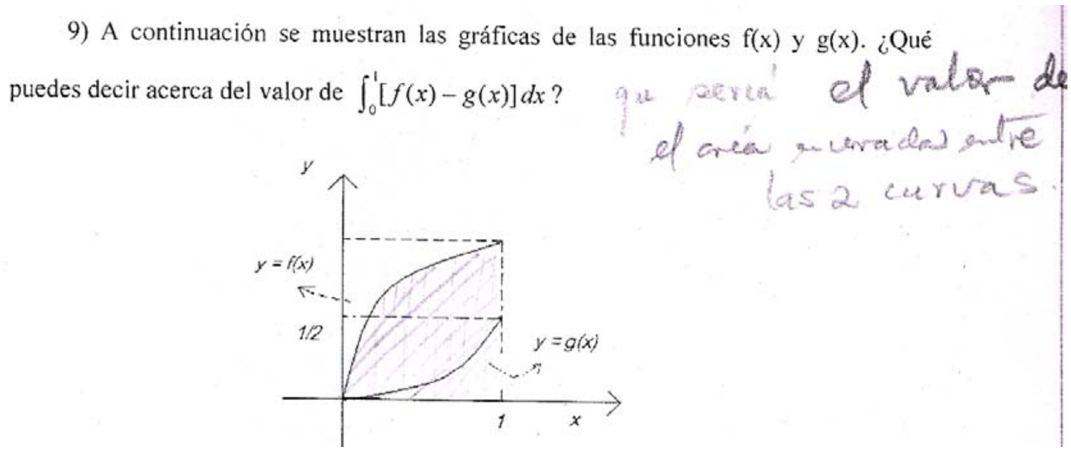
$$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_0^1 x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{x}\Bigg|_0^1 = \frac{-1}{1} + \frac{1}{0} \to \infty$$

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3}u^2 ”.$$

۞ Aquí se confunde la función inversa y se coloca en su lugar una función que al antiderivarse y evaluarse en los límites de integración conduce a una indeterminación que se elude haciendo caso omiso de su anotación $\frac{1}{0} \to \infty$, reduce la situación a considerar como resultado de la integral a - *1* y determina el área de la figura invirtiendo las funciones, restando entonces $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 f^{-1}(x)\,dx$ para obtener $\frac{4}{3}u^2$.

Con este proceder hace, de alguna manera, congruente su resultado con la situación gráfica del problema, obteniendo un resultado que le parece adecuado, sin mayores reflexiones, por ejemplo que el área buscada es menor a la unidad por estar dentro de un cuadrado unitario. Finalmente es más fuerte su manipulación algorítmica (incorrecta por cierto) que la situación geométrica.

La inversión de la resta de integrales es una forma de hacer congruente lo que se observa en la gráfica, a pesar de que existe claridad de la forma correcta de hacerlo, como se desprende de la respuesta que da al problema siguiente:



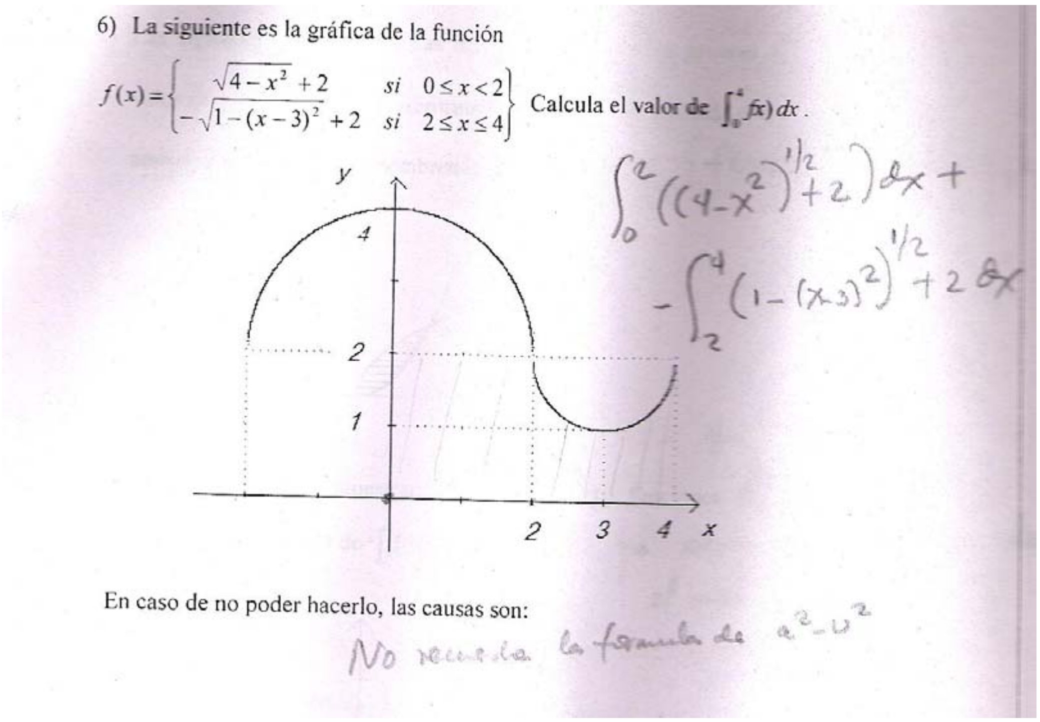
"que será el valor de el área encerrada entre las dos curvas".

Como puede observarse, la respuesta es muy limitada y pobre, sin poder hacer consideraciones de otra naturaleza, como acotar los valores de la integral solicitada, pero con claridad respecto al significado global de la misma como área de la figura.

En general observamos que el sujeto le asigna a la integral un significado operativo y de área, pero al "comprobar" sus resultados por medio de áreas, lo que pone de manifiesto es que procura hacer congruentes los cálculos aritméticos con alguna versión geométrica de área en las figuras, privilegiando precisamente la significación operativa de la integral.

Sin embargo, en su interpretación existen deficiencias tanto en la operatividad como en la determinación de áreas, a la vez que deficiencias en diferentes campos, como la posibilidad de determinar la expresión algebraica de una función a partir de su gráfica, obtener la expresión analítica de una función inversa, establecer propiedades de las funciones inversas, etc.

En el siguiente problema se observa que ante la imposibilidad de establecer el área de la figura involucrada en la determinación de una integral y, no pudiendo tampoco obtener las antiderivadas, abandona el problema. Esta situación es conforme con nuestro análisis a priori, en el sentido de que ante las dificultades para obtener las antiderivadas correspondientes a las expresiones analíticas de la función, es posible que el conocimiento de dichas expresiones haga privilegiar la significación más familiar de integral entre los participantes de la investigación, esto es, la determinación de antiderivadas.

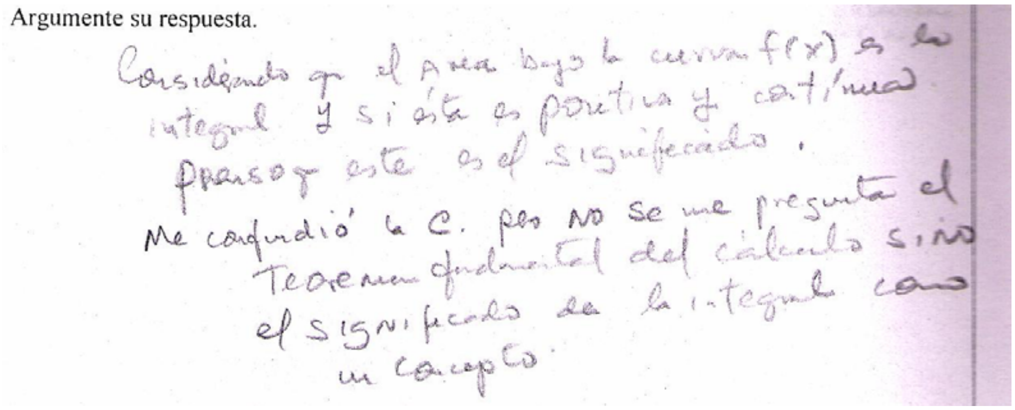


“ $\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx-\int_2^4 (1-(x-3)^2)^{\frac{1}{2}}+2\,dx$

No recuerdo la fórmula de a^2-u^2”.

۞ Una vez más el procedimiento algorítmico es privilegiado y la anotación principal establece que no puede obtener el valor de la integral porque no recuerda una fórmula, probablemente entresacando de su memoria las técnicas de “sustitución trigonométrica”. Las áreas sombreadas reflejan también una visión incompleta del valor a obtener.۞

Por último, en el problema en el cual les solicitamos que identificaran el enunciado que representaba el significado de la integral, de entre tres opciones, como área, como límite o como resultado numérico, reproducimos su respuesta.


Argumente su respuesta.
Considero que el Área bajo la curva f(x) es la integral y si ésta es positiva y continua pienso que éste es el significado.
Me confundió la c. pues no se me pregunta el Teorema fundamental del cálculo sino el significado de la integral como un concepto.

"Considero que el Área bajo la curva $f(x)$ es la integral y si ésta es positiva y continua pienso que éste es el significado.

Me confundió la c pues no se me pregunta el Teorema fundamental del cálculo, sino el significado de la integral como concepto".

Aquí, por una parte, es congruente con la significación de integral como área, la cual utilizó en sus respuestas, y, por otra, identifica en el inciso c) una opción válida, pero a la cual no le atribuye significación de integral, sino que identifica el enunciado como el teorema fundamental del cálculo.

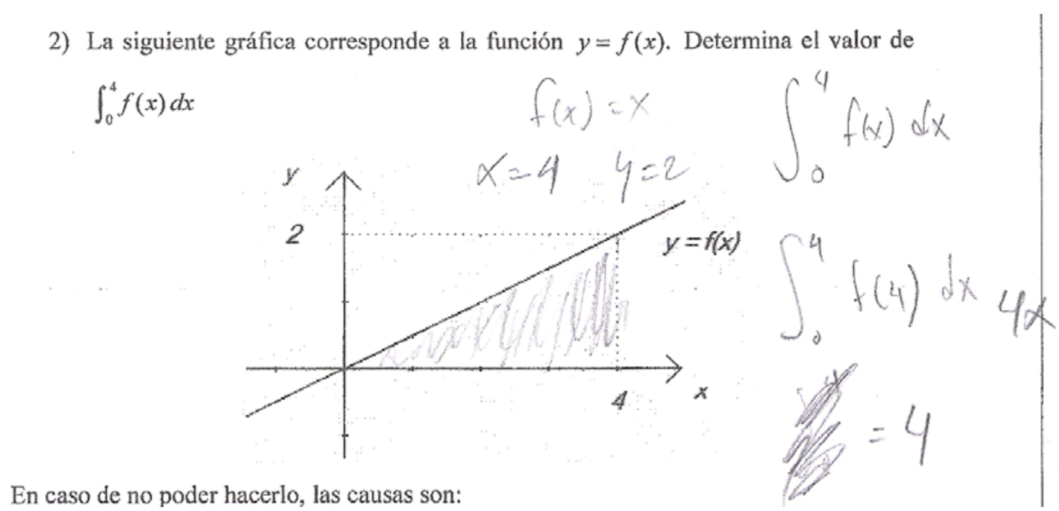
Esto es, aún cuando preponderantemente resuelve integrales con procesos algorítmicos, obteniendo valores específicos, al resultado lo asocia con la determinación de un área y en tal sentido pareciera limitar su comprensión a esta noción, en tanto la aplicación del teorema fundamental del cálculo es sólo una regla o algoritmo que debe seguir para obtener dicho resultado.

De acuerdo a nuestra interpretación, con base en nuestro marco teórico, el significado de la integral que se desprende de las soluciones a los problemas planteados es tanto de obtención de antiderivadas como de cálculo de áreas, pero sólo puede expresar el relativo a las áreas, porque la parte operacional se identifica sólo como el proceso para determinar los valores de la integral. En el teorema fundamental del cálculo no observa un resultado matemático en el que se establecen condiciones antecedentes para producir un consecuente, lo importante es tomar la conclusión del teorema para aplicarlo y determinar los valores de las integrales, las cuales representan áreas y por lo tanto siempre escribe en el resultado u^2, esto es , unidades cuadradas..۞

Caso C:

Este caso es el de un estudiante de ingeniería de segundo semestre, quien dio muestras de significaciones poco desarrolladas de la integral y sólo pudo resolver una pequeña parte de los problemas del instrumento de evaluación, prácticamente sólo los dos que presentaremos.

El primero de ellos es el siguiente, en el que da muestras de que su significado de integral es el de área.

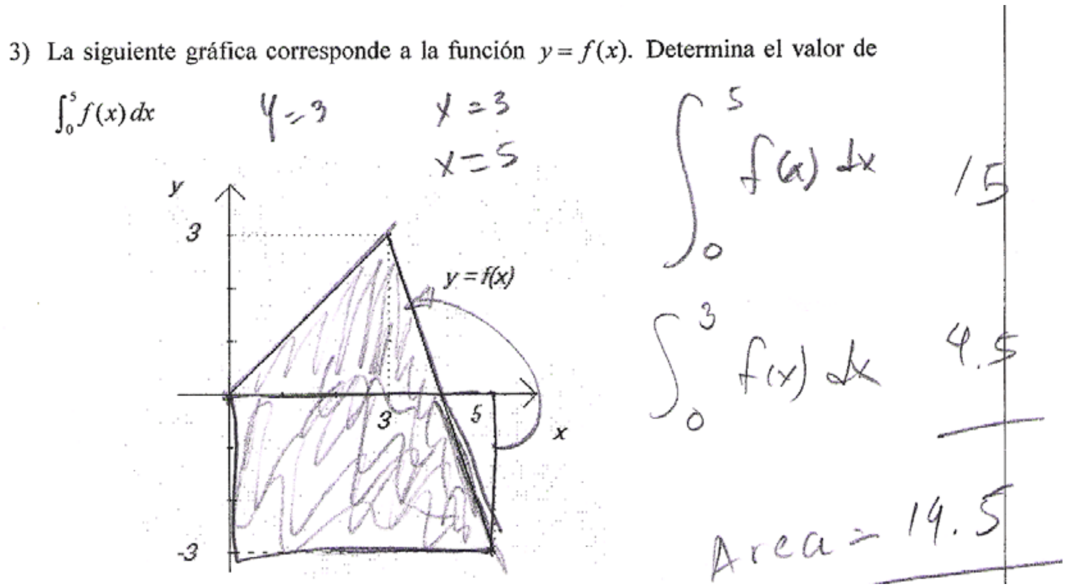


“ $f(x) = x$ $\int_0^4 f(x)\,dx$

$x = 4$ $y = 2$ $\int_0^4 f(4)\,dx$ $4x$ $= 4$”

۞ En su hoja no hay más anotaciones. El sujeto muestra deficiencias en la forma de obtener la expresión algebraica de una función lineal y de cómo determinar algorítmicamente el valor de la integral, pero sombreando la gráfica y obteniendo el valor de su área, determina el valor correcto de la misma, reflejando que asigna a la integral el significado de área.

Esta forma de proceder y de asignarle a la integral el significado de área bajo la curva se ve fortalecida con su respuesta al siguiente problema.



“$y = 3$ $x = 3$ $x = 5$ $\int_0^5 f(x)\,dx$ 15

$\int_0^3 f(x)\,dx$ 4.5 $Área = 19.5$”

En esta respuesta aparece la significación que tiene el estudiante de la integral como “área bajo la curva”, interpretando la expresión por medio de la figura sombreada, en la cual adquiere sentido literal la frase indicada.

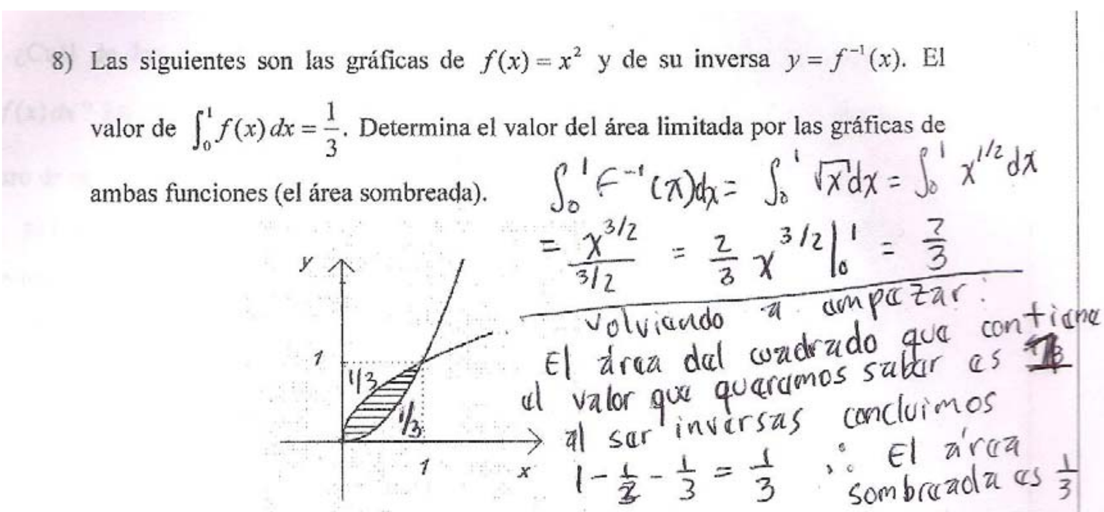
La frase “área bajo la curva” es común en los cursos de cálculo cuando aparece por primera vez la integral de una función o cuando por primera vez se le “interpreta” geométricamente. Pero la interpretación que le dan tanto el sujeto del caso B, como el presente, son una muestra más de que el lenguaje empleado en matemáticas no es neutro y tiene una carga semántica que se corresponde con el sistema de prácticas de quien lo emplea y de quien lo capta o recibe.

Cuando aparece la expresión “área bajo la curva” en un libro de texto o en el discurso de un profesor es al tratar funciones positivas, y aún cuando los ejemplos de funciones integrables se enriquezca con otras funciones y aparezcan funciones con integrales negativas y se interpreten dichos resultados geométricamente, las situaciones más comunes son las de las funciones positivas.

Caso D:

El caso que identificamos como D es el de un estudiante del cuarto semestre de la carrera de licenciado en matemáticas.

En los siguientes problemas, el sujeto da muestras de que entre las significaciones de la integral incluye la de área.



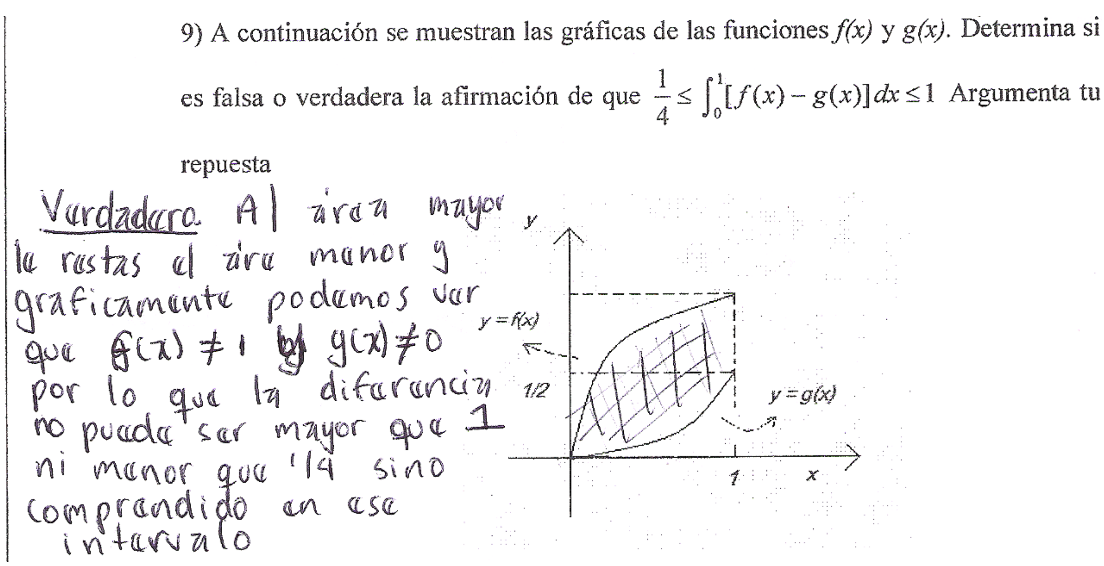
“ $\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

Volviendo a empezar: El área del cuadrado que contiene el valor que queremos saber es *1* al ser inversas concluimos $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ $\therefore$ el área sombreada es $\frac{1}{3}$.”

El sujeto D puede, aparentemente, determinar el valor del área que se le solicita, tanto de forma algorítmica como recurriendo a las áreas. Algorítmicamente, puede determinar la expresión algebraica de la función inversa y obtener el valor de su integral en el intervalo correspondiente. Para concluir con este procedimiento, se requiere obtener la integral de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo $[0,1]$ y después restarla de la integral anterior. Pero el procedimiento que este sujeto estaba siguiendo lo interrumpe para resolver el problema de manera distinta. Por eso decimos que aparentemente lo puede resolver por esta vía.

En el procedimiento alternativo, el cual desarrolla y completa para obtener una respuesta adecuada, el sujeto da muestras de tener conocimientos sobre la simetría de las gráficas de funciones inversas respecto a la recta $y=x$, de tal forma que conociendo el resultado de una de las integrales puede hacer el cálculo de áreas mostrado, interpretando a la integral como un área.

En otro de los problemas su respuesta se ilustra a continuación:

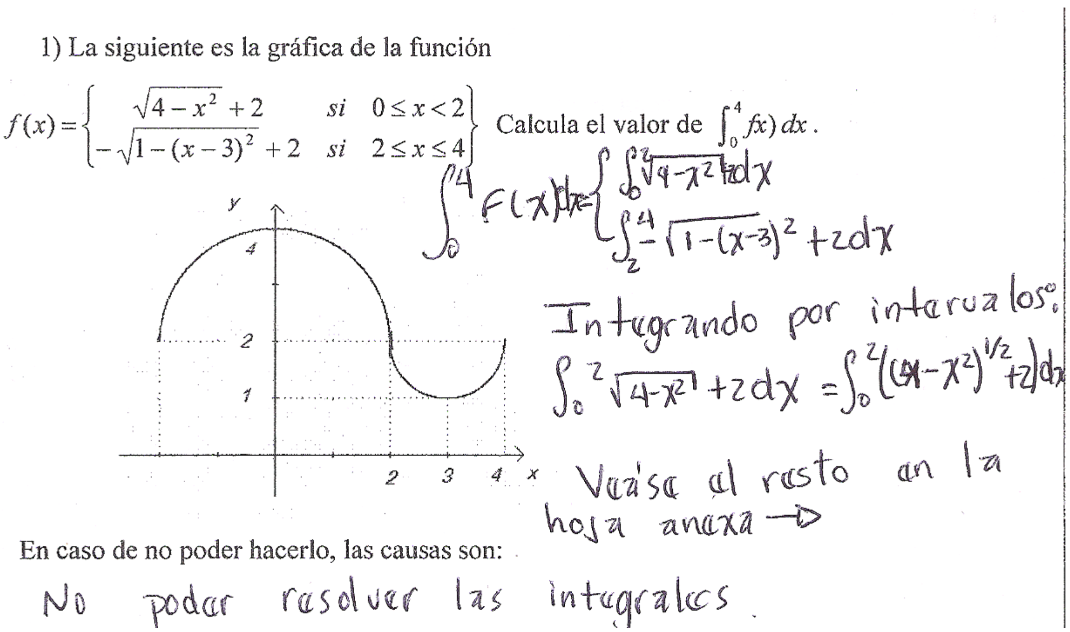

9) A continuación se muestran las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Determina si es falsa o verdadera la afirmación de que $\frac{1}{4} \le \int_0^1 [f(x)-g(x)]\,dx \le 1$ Argumenta tu repuesta

<u>Verdadero.</u> Al área mayor le restas el área menor y graficamente podemos ver que f(x) ≠ 1 y g(x) ≠ 0 por lo que la diferencia no puede ser mayor que 1 ni menor que 1/4 sino comprendido en ese intervalo

"<u>Verdadero.</u> Al área mayor le restas el área menor y gráficamente podemos ver que $f(x)\neq 1$ y $g(x)\neq 0$ por lo que la diferencia no puede ser mayor que 1 ni menor que $1/4$ sino comprendido en ese intervalo".

Como puede verse la respuesta indica que existe una significación de la integral como área, aunque el único argumento válido o correcto es para el caso de la cota superior de la integral involucrada, no así en el caso de la cota inferior, la cual parece haberse establecido por simple inspección visual.

A pesar de la interpretación de la integral como área, en otros problemas el sujeto pone de manifiesto que su significación preponderante es de corte operacional y algorítmica. Así, veamos su respuesta al siguiente problema.


1) La siguiente es la gráfica de la función

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}+2 & si \quad 0\le x<2\\ -\sqrt{1-(x-3)^2}+2 & si \quad 2\le x\le 4\end{cases}$$ Calcula el valor de $\int_0^4 fx)\,dx$.

En caso de no poder hacerlo, las causas son:

"$$\int_0^4 f(x)\,dx=\begin{cases}\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx\\ \int_2^4 -\sqrt{1-(x-3)^2}+2\,dx\end{cases}$$

Integrando por intervalos: $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx+2\,dx=\int_0^2 \left(4-x^2\right)^{1/2}$

Veáse el resto en la hoja anexa →

No poder resolver las integrales".

En la hoja anexa se agregan algunas modificaciones menores a las expresiones algebraicas, en la búsqueda de un procedimiento algorítmico para la obtención de antiderivadas. Si consideramos además su declaración de que no puede resolver el problema por "no poder resolver las integrales" (lo cual interpretamos como que no le fue posible obtener las antiderivadas), concluimos que la significación preponderante en este caso es la de la integral como un procedimiento algorítmico.

Esta idea se ve reforzada con su respuesta en lo que respecta al significado de la integral, que mostramos a continuación.

c Dada $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Argumente su respuesta.

Por el TFC y la idea de que la integral es la antiderivada.

"Por el TFC y la idea de que la integral es la antiderivada".

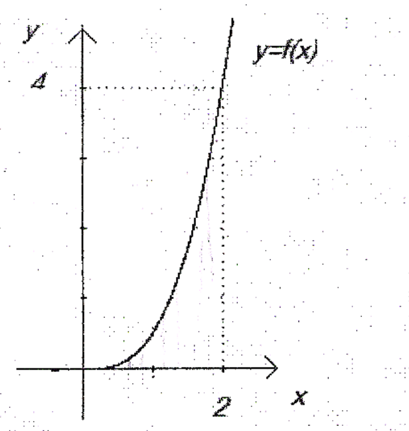
Caso E:

Este caso es el de un estudiante de cuarto semestre de la carrera de licenciado en física.

En el problema que mostramos a continuación, el sujeto de investigación identifica la integral de una función como un área y afirma que la desigualdad involucrada es verdadera sin presentar argumentos.

1) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina si es verdadera o falsa la afirmación de que $\int_0^2 f(x)\,dx \le 4$.. Cualquiera que sea tu respuesta, arguméntala.

es verdadera porque la integral calcula el area bajo la curva y tiene que ser menor o igual a 4



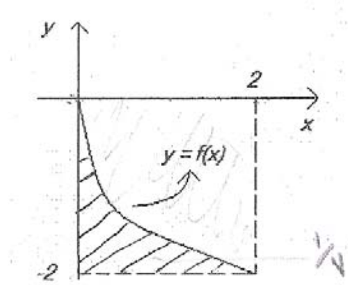
"Es verdadera porque la integral calcula el área bajo la curva y tiene que ser menor o igual a 4".

En el siguiente problema se enfatiza su concepción de la integral como área bajo la curva

7) Conociendo que el área de la región sombreada es $\frac{1}{4}$, determina el valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$, cuya gráfica se muestra a continuación.

$\int_0^2 f(x) = \frac{15}{4}$

$\frac{15}{4}$

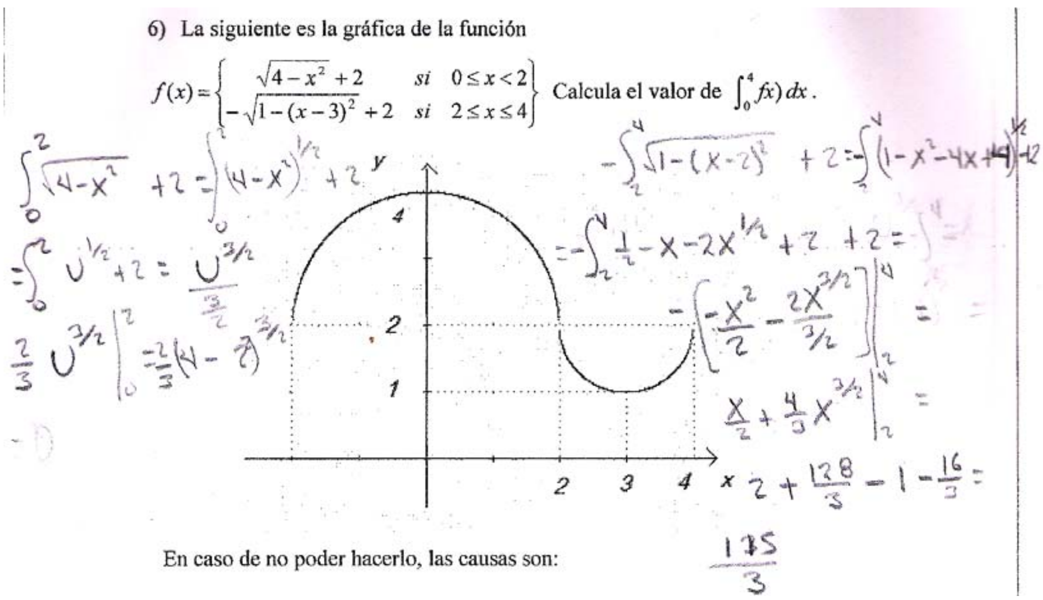


En caso de no poder hacerlo, las causas son:

" $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{15}{4}$ $\frac{15}{4}$ "

Notemos que su concepción de la integral de una función como área, lo conduce a establecer que el valor de la integral es la resta del área del cuadrado menos el área de la región sombreada, y, en estas circunstancias, asigna a la integral un valor positivo aunque la función sea negativa en el intervalo de integración.۞

Sin embargo, como le sucedió a la mayoría, en el problema siguiente nunca recurre a su concepción de integral como área y procura resolver la situación recurriendo sólo al procedimiento de búsqueda de antiderivadas para aplicar el teorema fundamental del cálculo.



$$“\int_0^2 \sqrt{4-x^2}+2=\int_0^2 (4-x^2)^{1/2}=\int_0^2 u^{1/2}+2=\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^2=\frac{2}{3}(4-x^2)^{3/2}$$

$$-\int_2^4 \sqrt{1-(x-2)^2}+2=-\int_2^4 \left(-x^2-4x+4\right)^{1/2}+2=-\int \frac{1}{2}-x-2x^{1/2}+2+2=$$

$$-\left[-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^{3/2}}{3/2}\right]_2^4=\frac{x}{2}+\frac{4}{3}x^{3/2}\Big|_2^4=2+\frac{128}{3}-1-\frac{16}{3}=\frac{175}{3}”.$$

۞ Destaca, en este caso, la aplicación de técnicas de antiderivación erróneas, las cuales utiliza sin ninguna conciencia de lo inadecuadas. La aplicación de estos procedimientos resultan difíciles de explicar en un estudiante de estas características pues pareciera que la manipulación algebraica en general y la de cambios de variables o sustituciones para antiderivar en particular, pudieran hacerse arbitrariamente, sin mayor criterio que el de escribir expresiones ad hoc para proceder a resolver situaciones que le son familiares.

Por último en este caso, presentamos su respuesta al problema siguiente:

III.-Si las integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$ están siempre bien definidas en los intervalos correspondientes, ¿bajo qué condiciones se cumple que los valores de ambas integrales son iguales?
Argumente su respuesta.

I. Si $c=0$
Si $c \neq 0$ nunca son iguales ya q' para $x-c$ nunca se compensa con ningún intervalo.
$\int_a^b f(x)dx$ y $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)$

"I. Si $c=0$

Si $c \neq 0$ nunca son iguales ya q' para $x-c$ nunca se compensa con ningún intervalo

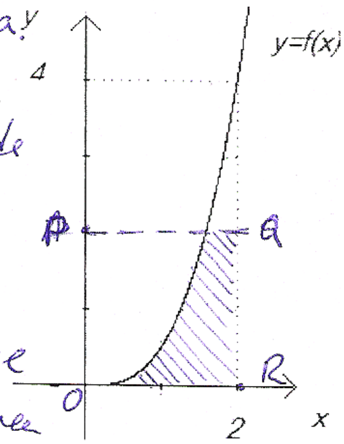
$\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)$".

Una vez más se pone de manifiesto la argumentación en el sentido del caso trivial, con el agregado de la compensación, el cual pudiera deberse a una búsqueda numérica de la situación propuesta.

Caso F:

Este caso corresponde al de un profesor del nivel superior con experiencia también en el bachillerato. Una de sus características distintivas es su paso por programas de formación de profesores que han incluido la revisión del papel de las representaciones gráficas en la enseñanza de las matemáticas, lo cual se refleja en sus respuestas.

La afirmación es verdadera y
Si A(x) es el área bajo la
gráfica de una función desde
$x_0 = 0$ hasta x, entonces
$A(x) = \int_{x_0=0}^{x} f(x)\,dx.$
En la figura puede verse
que si trazamos $\overline{PQ}$, el area
del cuadrado OPQR es 4.



En caso de no poder hacerlo, las causas son:

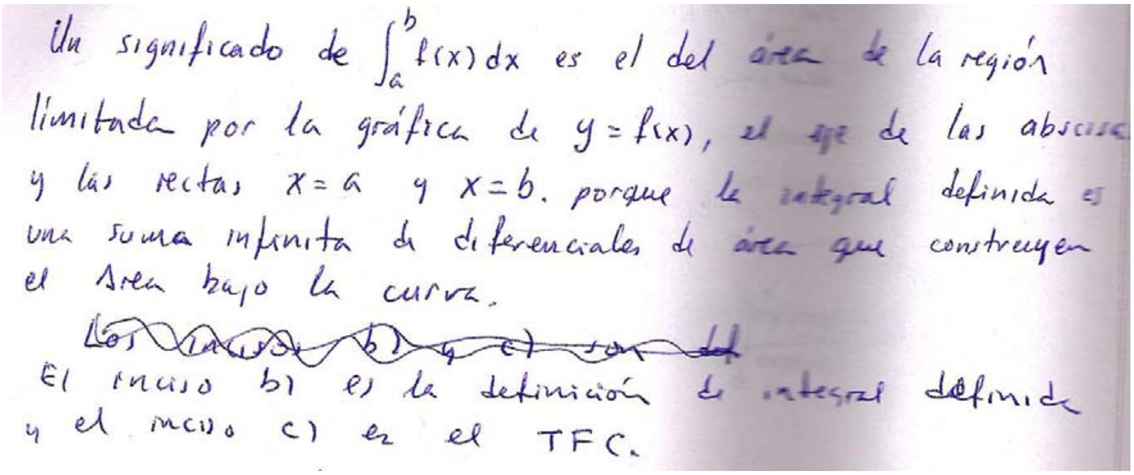
Además, tambien puede observarse
que el área bajo la gráfica de $y = f(x)$
es menor que el área del cuadrado
OPQR.
Por lo tanto, $\boxed{\int_0^2 f(x)\,dx \leq 4}$

"La afirmación es verdadera. Si $A(x)$ es el área bajo la gráfica de una función desde $x_0 = 0$ hasta x, entonces $A(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$. En la figura puede observarse que si trazamos $\overline{PQ}$, el área del cuadrado $OPQR$ es 4. Además, también puede observarse que el área bajo la gráfica de $y = f(x)$ es menor que el área del cuadrado $OPQR$. Por lo tanto $\int_0^2 f(x)\,dx \leq 4$".

۞ En su respuesta se pone de manifiesto la significación que atribuye a la integral como área, a la vez de su visión geométrica, al emplear argumentos en los cuales incluye como criterio de validación la percepción visual.۞

El resto de los problemas, en todos donde le es posible hacerlo, los resuelve de esta manera, empleando los recursos geométricos y de cálculo de áreas.

En el problema sobre el significado de la integral su respuesta se muestra a continuación.


Un significado de $\int_a^b f(x)\,dx$ es el del área de la región limitada por la gráfica de $y=f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$. porque la integral definida es una suma infinita de diferenciales de área que construyen el Area bajo la curva.
~~Los incisos b) y c) son def~~
El inciso b) es la definición de integral definida y el inciso c) es el TFC.

"Un significado de $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área de la región limitada por la gráfica de $y=f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$, porque la integral definida es una suma infinita de diferenciales de área que construyen el área bajo la curva.

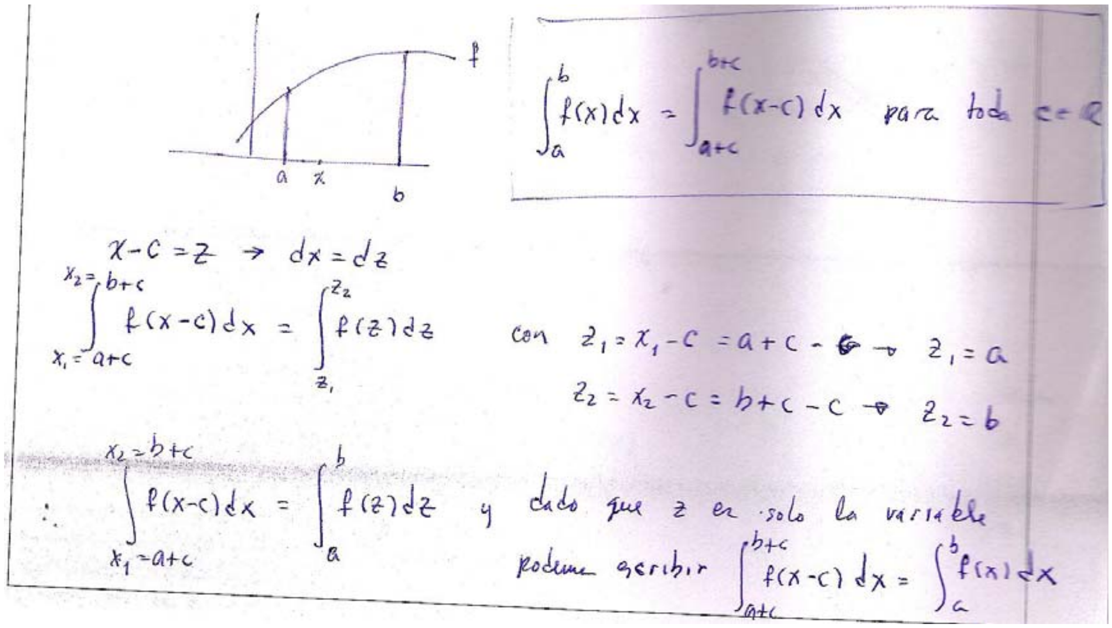
El inciso b) es la definición de integral definida y el inciso c) es el TFC".

La respuesta puede interpretarse como la muestra de una significación múltiple de la integral, en la cual se le identifica como área, como límite y como teorema.

Asimismo, la diferenciación que hace entre significado, definición y teorema es indicativa de que reconoce en la versión de límite a una definición, al establecimiento conceptual de la integral como parte de la estructura matemática, centrada en la noción de convergencia. El reconocimiento del área como el significado de la integral lo interpretamos como la concepción de que en ese contexto la integral cobra sentido, esto es, la integral deja de ser sólo un enunciado para tener una "concreción" en determinado tipo de situaciones, en este caso los problemas de determinación de áreas.

En lo que respecta a la clasificación del inciso c) como teorema y no como el resultado numérico de un proceso de integración, puede interpretarse como una significación de la integral como proceso y no sólo como producto.

Su resolución al problema que mostramos a continuación refuerza esta interpretación.



“ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$ para toda $c \in R$

$x - c = z \quad \Rightarrow dx = dz$ con $\begin{array}{l} z_1 = x_1 - c = a + c - c \rightarrow z_1 = a \\ z_2 = x_2 - c = b + c - c \rightarrow z_2 = b \end{array}$

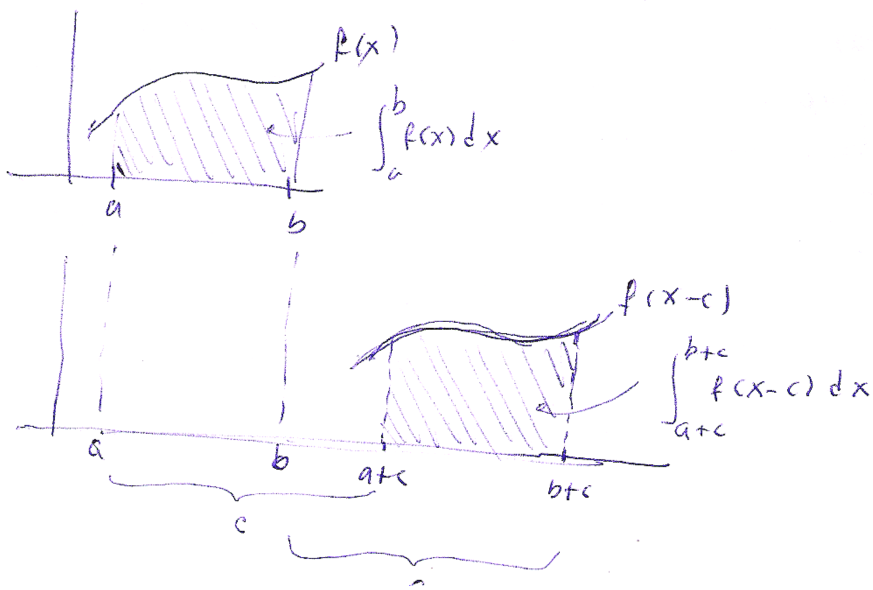
$\therefore \int_{x_1=a+c}^{x_2=b+c} f(x-c)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz$ y dado que z es solo la variable podemos escribir $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$”.

۞ Ésta es la única respuesta de este tipo al problema. Es la única respuesta que incluye las consideraciones mostradas, pues en el resto encontramos que, o no resolvieron el problema, o sólo les pareció válido en el caso trivial $c = 0$, o lo resolvieron recurriendo a argumentos geométricos.

El sujeto de investigación cuenta con una significación de la integral como proceso, en la cual se pueden hacer manipulaciones algebraicas para transformarla, más allá de las que se efectúan al aplicar técnicas de integración, las cuales con frecuencia sólo se hacen en los procesos de antiderivación, sin tomar en cuenta aspectos como la necesidad de hacer modificaciones en los límites de integración, aspecto que no pasa desapercibido en esta respuesta.۞

Además de esta respuesta, también incluyó la siguiente:

La gráfica de f(x-c) es una traslación hacia la derecha de la gráfica de f(x). Así, si se integra f(x) desde a hasta b, es equivalente a integrar su gráfica trasladada c unidades hacia la derecha pero desde a+c hasta b+c



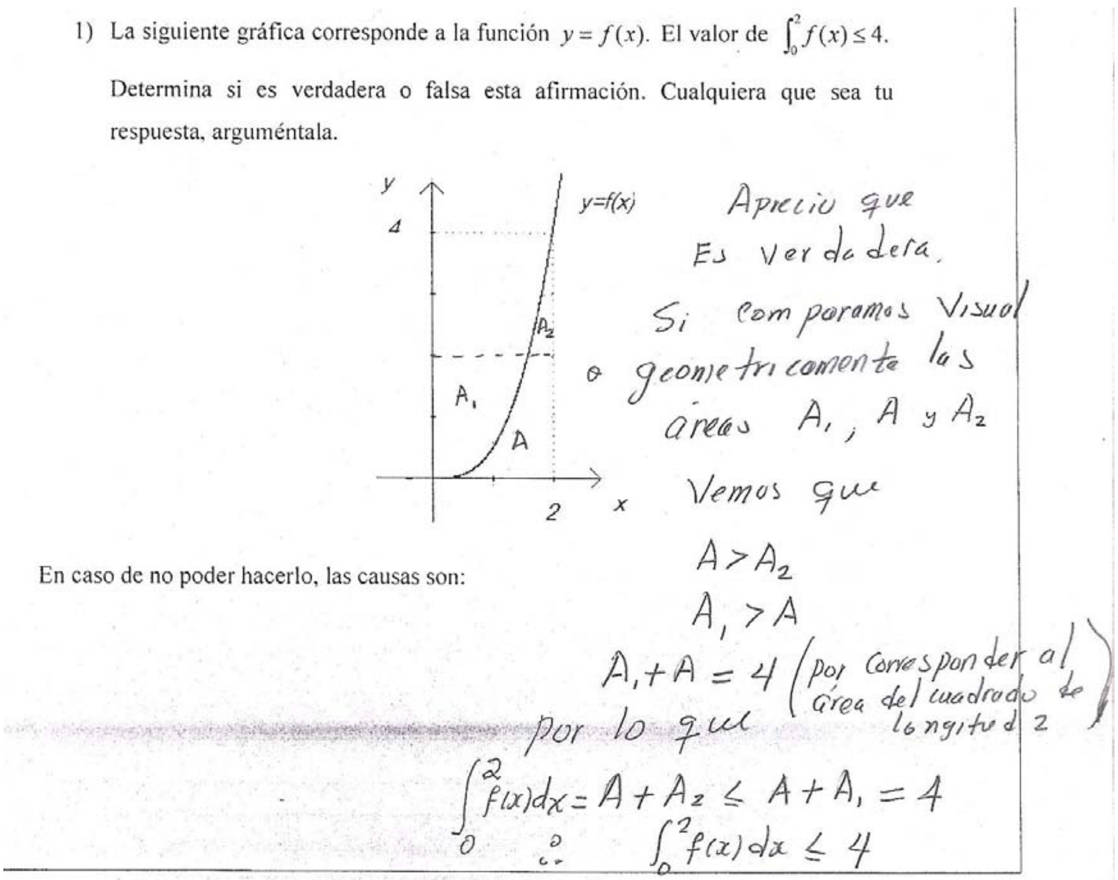
"La gráfica de $f(x-c)$ es una traslación hacia la derecha de la gráfica de $f(x)$. Así, si se integra $f(x)$ desde *a* hasta *b*, es equivalente a integrar su gráfica trasladada *c* unidades hacia la derecha pero desde *a*+*c* hasta *b*+*c*".

۞ Con la inclusión del análisis gráfico, el sujeto da una muestra más de la diversidad de sus significados de la integral, poniendo ahora el énfasis en el cálculo de áreas y sus conocimientos sobre las transformaciones geométricas de las funciones al modificar el argumento *x* por el de *x*-*c*.۞

Caso G:

El caso que hemos identificado como G es el de un profesor egresado de la licenciatura en matemáticas de la Universidad de Sonora, quien además realizó estudios de posgrado en matemática educativa.

En sus respuestas podemos detectar una riqueza de significados para el objeto "integral de una función", recurriendo siempre a la significación que le reporte mayor economía de trabajo para resolver los problemas.



1) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. El valor de $\int_0^2 f(x) \le 4$.

Determina si es verdadera o falsa esta afirmación. Cualquiera que sea tu respuesta, arguméntala.

Aprecio que Es verdadera.

Si comparamos Visual o geometricamente las áreas A_1, A y A_2

Vemos que

$A > A_2$

$A_1 > A$

$A_1 + A = 4$ (por corresponder al área del cuadrado de longitud 2)

por lo que

$\int_0^2 f(x)dx = A + A_2 \le A + A_1 = 4$

$\therefore \int_0^2 f(x)dx \le 4$

En caso de no poder hacerlo, las causas son:

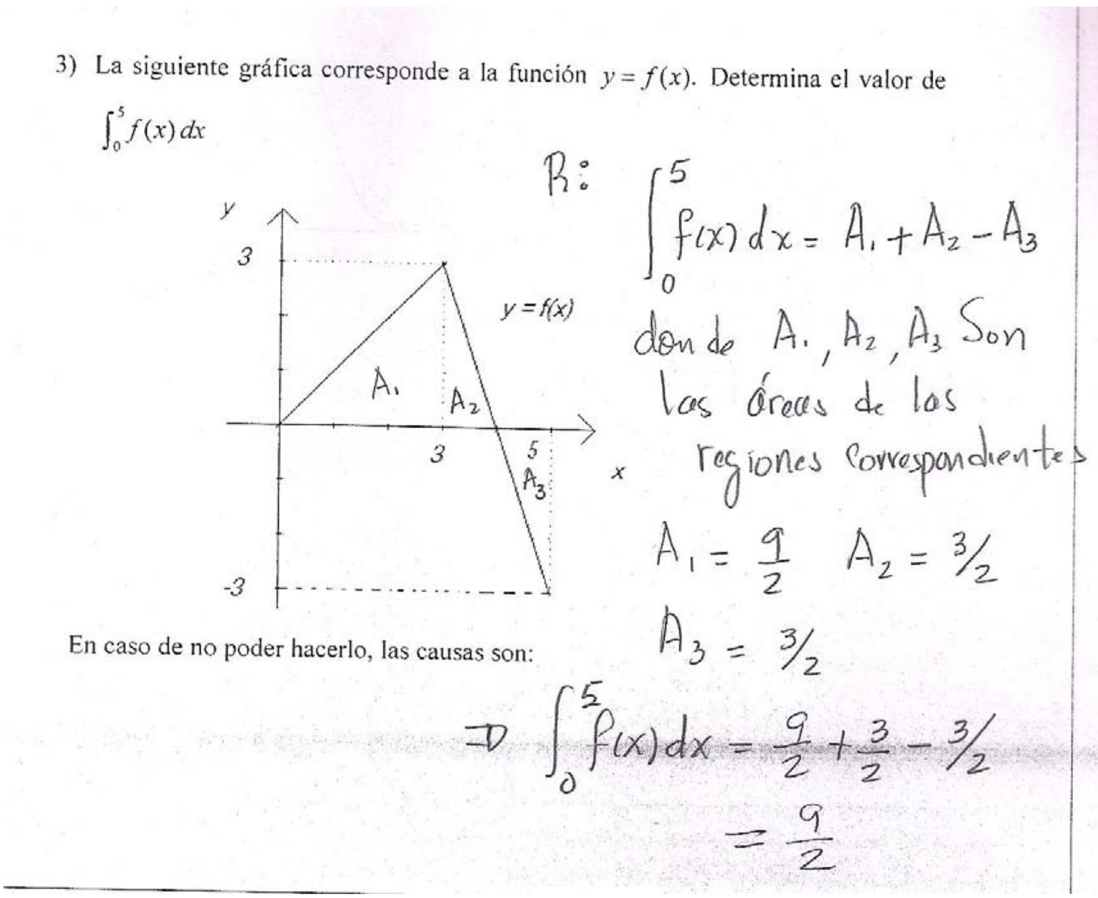
"Aprecio que es verdadera. Si comparamos visual o geométricamente las áreas $A_1, A\ y\ A_2$ vemos que $A > A_2,\ A_1 > A$. $A_1 + A = 4$ (por corresponder al área del cuadrado de longitud 2).

$\int_0^2 f(x)\,dx = A + A_2 \le A + A_1 = 4$ $\therefore$ $\int_0^2 f(x)\,dx \le 4$".

Una vez más podemos observar que la argumentación pretende validar el resultado apoyándose en la percepción visual, como en el caso anterior. Aunque en esta ocasión se incluyen las relaciones de las áreas y se establecen explícitamente las desigualdades correspondientes, el argumento visual parte de aceptar que $A > A_2$ y $A_1 > A$.

Quizá por ello, en lugar de simplemente afirmar la veracidad, el sujeto de análisis escribió "aprecio que es verdadera".

Similarmente, en otros problemas recurre a la interpretación de la integral como área, como lo hace en el siguiente problema.



3) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina el valor de $\int_0^5 f(x)\,dx$

R: $\int_0^5 f(x)\,dx = A_1 + A_2 - A_3$ donde A_1, A_2, A_3 son las áreas de las regiones correspondientes

$A_1 = \frac{9}{2}$ $A_2 = 3/2$

$A_3 = 3/2$

En caso de no poder hacerlo, las causas son:

$\Rightarrow \int_0^5 f(x)\,dx = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} - 3/2$

$= \frac{9}{2}$

" $\int_0^5 f(x)\,dx = A_1 + A_2 - A_3$ son las áreas de las regiones correspondientes.

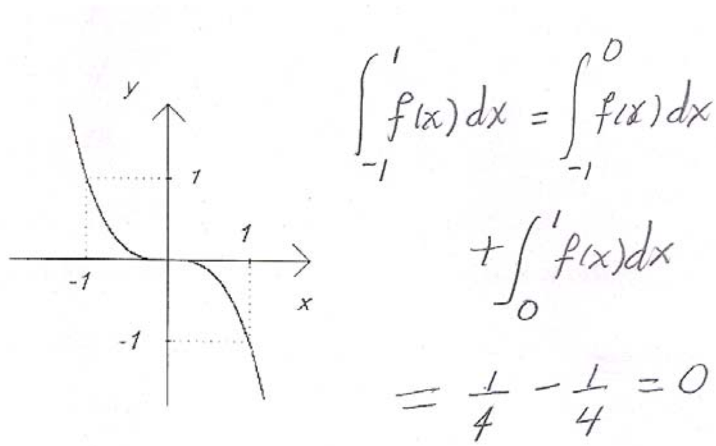
$A_1 = \frac{9}{2}$ $A_2 = \frac{3}{2}$ $A_3 = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $\int_0^5 f(x)\,dx = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$".

En este como en otros casos en los que se recurrió al cálculo de áreas, el procedimiento fue similar, determinándose las áreas de los triángulos que aquí se representan como A_1 y A_2.

Nuestra interpretación es que aunque el sujeto cuente con una significación de la integral como área, la noción está asociada a los procesos algebraicos u operatorios. En este caso, se concibe A_1 como el área asociada a la rama $y = x$ de la función y A_2 como la parte positiva de la integral asociada a la rama $y = -3x + 12$ de la función. Esto es, aún con la significación de la integral como área, pareciera muy complicado desprenderla de la significación operatoria.

Como en el caso A, quizá la raíz de esta situación esté desde la forma misma de visualizar y concebir a las funciones.

En el problema siguiente se recurre nuevamente a la interpretación de la integral como área, pero ahora se añaden evidencias de que el sujeto tiene una significación adecuada de la simetría de las funciones impares y sus consecuencias para simplificar el cálculo de integrales.



En lo que respecta al significado de la integral su respuesta fue:

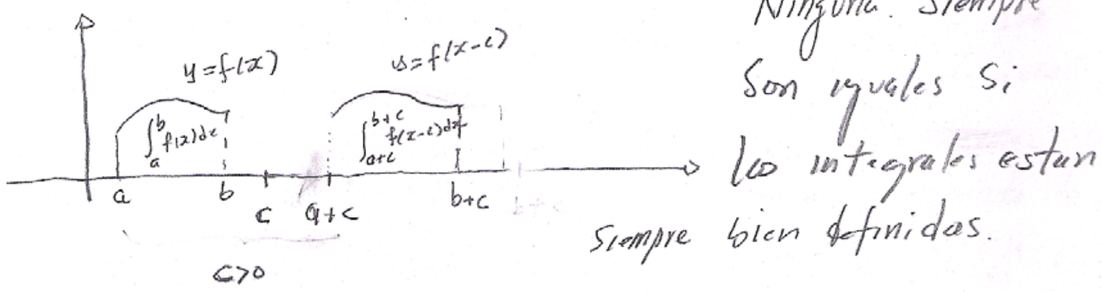
Argumente su respuesta.

Rigurosamento hablando ninguna de los afirmacione
por si misma dan una representación exacta
del significado de la integral. Para hablar
del significado del objeto "integral" debemos
Asumir un enfoque sistémico del objeto. Con
esto quiero decir que los objetos no adquieren
su significado en la Parcialidad si no en la
Totalidad en el que este se vea implicado.

"Rigurosamente hablando ninguna de las afirmaciones por si misma dan una representación exacta del significado de la integral. Para hablar del significado del objeto 'integral' debemos asumir un enfoque sistémico del objeto. Con esto quiero decir que los objetos no adquieren su significado en la parcialidad si no en la totalidad en el que este se vea implicado".

۞ Aunque no lo señala explícitamente, se reconoce que cada una de las opciones propuestas en el problema es válida y tiene sentido, pero asume que para hablar el significado se requiere contar con un enfoque que las incluya a todas. La respuesta también hace ostensivo que el sujeto de investigación cuenta con una versión consciente del término "significado".۞

Por último, su respuesta al siguiente problema.



III.-Si las integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$ están siempre bien definidas en los intervalos correspondientes, ¿bajo qué condiciones se cumple que los valores de ambas integrales son iguales?

Argumente su respuesta.

"Ninguna. Siempre son iguales si las integrales están siempre bien definidas"

۞ Aquí el proceso de argumentación es nuevamente geométrico, aportando evidencias de su conocimiento sobre los efectos gráficos de la transformación algebraica de la función y sobre las áreas. El sujeto de investigación tiene cuidado de establecer la necesidad de que las integrales estén bien definidas en ambos casos.۞

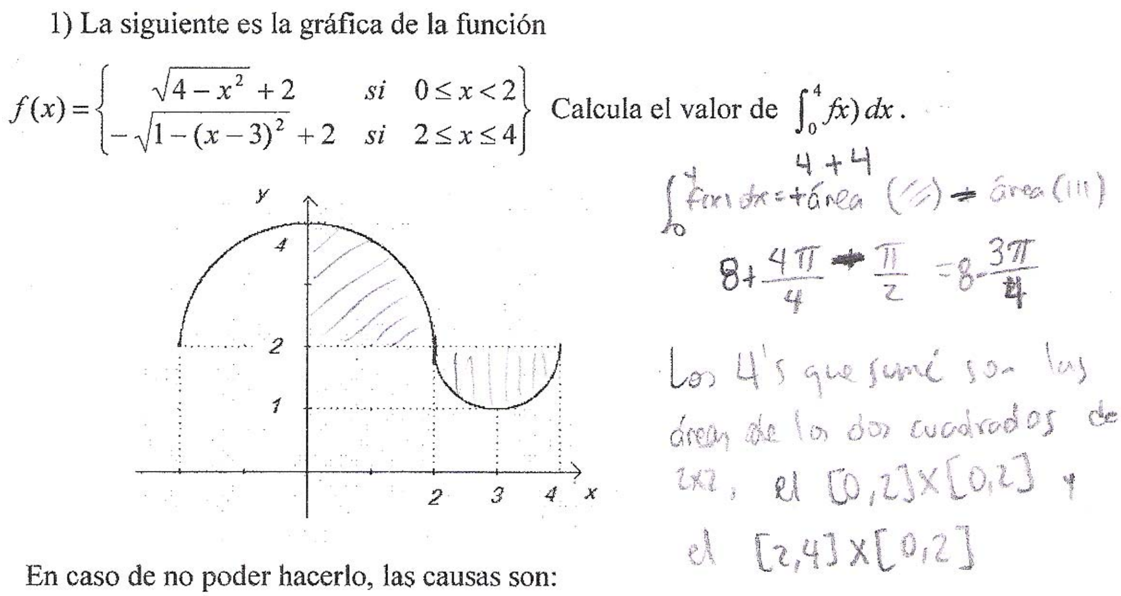
Caso H:

Aquí identificamos a un estudiante de matemáticas que adicionalmente ha tenido preparación especial para participar en los concursos nacionales e internacionales conocidos como "Olimpiadas de Matemáticas". Un rasgo distintivo de estos estudiantes es que tienen una preparación para abordar y resolver problemas con los recursos que estén a su alcance, sin necesariamente restringirse a un tipo de soluciones, esto es, sin enmarcarse dentro de una disciplina o rama de las matemáticas.

En tal sentido, en todos los casos en los cuales le era más sencillo hacer cálculo operatorio, procedió de esa manera y donde era más fácil recurrir a la noción de área, procedió en consecuencia.

Sus respuestas son, en algún modo, similares a las del caso anterior, el G, pero aquí se denota una menor preocupación por emplear un lenguaje formal. Aunque la notación y el lenguaje son precisos, pero de carácter intuitivo, reflejando más la preocupación por la resolución de los problemas que de su enunciación formal.

El primero de los problemas que presentaremos es el siguiente:



1) La siguiente es la gráfica de la función

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{4-x^2}+2 & si \quad 0\le x<2 \\ -\sqrt{1-(x-3)^2}+2 & si \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$$ Calcula el valor de $\int_0^4 f(x)\,dx$.

4+4

$\int_0^4 f(x)\,dx = +área(\ ) - área(\ )$

$8+\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=8-\frac{3\pi}{4}$

Los 4's que sumé son las áreas de los dos cuadrados de 2x2, el [0,2]x[0,2] y el [2,4]x[0,2]

En caso de no poder hacerlo, las causas son:

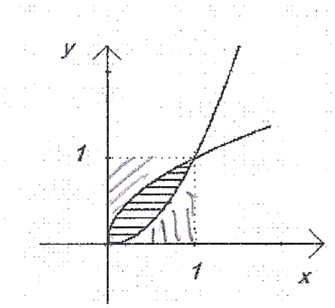
"4+4 $\quad \int_0^4 f(x)\,dx = área(\ ) - área(\ ) \quad 8+\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=8-\frac{3\pi}{4}$

Los 4's que sumé son las áreas de los dos cuadrados de 2×2, el $[0,2]\times[0,2]$ y el $[2,4]\times[0,2]$".

۞ Como podemos ver, recurre al cálculo de áreas y la determinación de la integral se hace por medio de las mismas. Por cierto que el resultado es incorrecto porque hizo mal la última resta, la cual debió haber sido $8-\frac{\pi}{2}$.۞

Para simplificar la notación usó las orientaciones de las rayas con las cuales sombreó las figuras, sin mayor preocupación que la de darse a entender.

8) Las siguientes son las gráficas de $f(x)=x^2$ y de su inversa $y=f^{-1}(x)$. El valor de $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{3}$. Determina el valor del área limitada por las gráficas de ambas funciones (el área sombreada).



Como $f^{-1}(x)$ es la inversa, es simétrica respecto al eje X, y por lo tanto el área sombreada es:

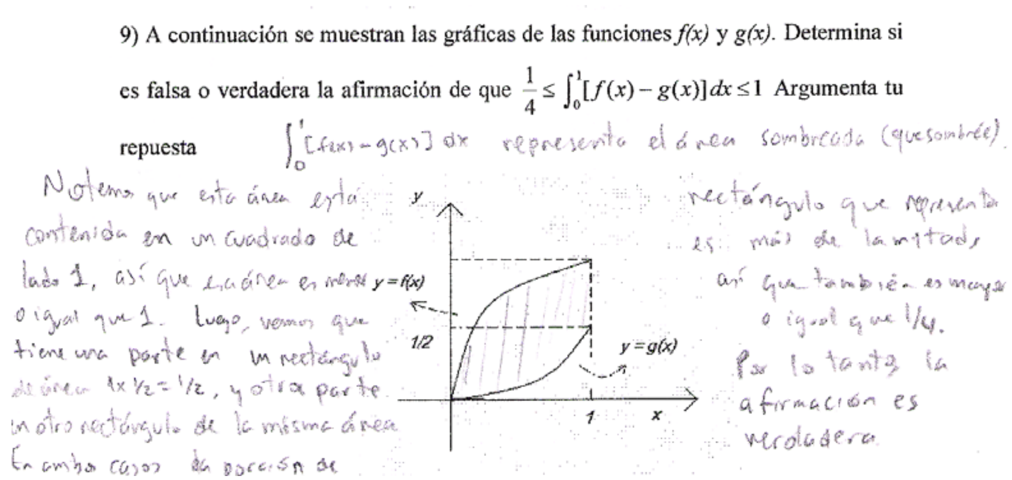
$$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

área del cuadrado — área ||| — área /// — área ≡

"Como $f^{-1}(x)$ es la inversa, es simétrica respecto al eje x, y por lo tanto el área sombreada es: $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$".

۞ En este problema el estudiante recurre nuevamente a la representación de áreas por medio de sombreados con líneas de diferente orientación, las cuales utiliza al referirse a sus valores numéricos y obtener el resultado. Explícitamente el estudiante muestra su conocimiento respecto a la simetría de las gráficas inversas con respecto a la recta $y=x$, reconoce cuáles áreas son iguales y con ello determina el valor del área solicitada, sin recurrir a la obtención de la expresión analítica de la función inversa ni obtener integrales por medio de antiderivadas.۞

El siguiente problema es nuevamente resuelto por medio de la visualización de valores para las áreas.

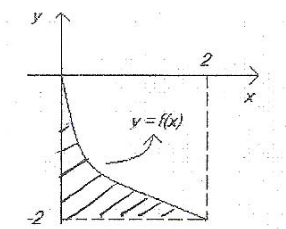


"$\int_0^1 [f(x)-g(x)\,dx]$ representa el área sombreada (que sombreé). Notemos que esta área está contenida en un cuadrado de lado 1, así que el área es menor o igual que 1. Luego vemos que tiene una parte en un rectángulo de área $1\times\frac{1}{2}$ y otra parte en otro rectángulo de la misma área. En ambos casos la porción de rectángulo que representa es más de la mitad, así que también es mayor o igual que $\frac{1}{4}$. Por lo tanto la afirmación es verdadera".

۞ En este problema, el estudiante argumenta correctamente pero al igual que en algunos de los problemas de los casos F y G, recurre libremente a argumentos que se basan en la visualización, afirmando que cada una de las porciones de la figura señaladas tienen área mayor que $\frac{1}{4}$. Sin embargo, no se traza una sola línea auxiliar o algún signo que identifique las partes de la figura y todos los argumentos, aunque se refieran a la situación geométrica, se presentan por medio del lenguaje común.۞

El uso de la visualización y de las expresiones del lenguaje común están presentes también en otras situaciones y problemas, en los que la sencillez de las situaciones que se presentan pudiera hacerlas pasar desapercibidas. Como un ejemplo veamos la solución al siguiente problema.

2) Conociendo que el área de la región sombreada es $\frac{1}{4}$, determina el valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$, cuya gráfica se muestra a continuación.



El área del cuadrado $= 4$
Área blanca $= 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$
Como está por debajo del eje X:
$\int_0^2 f(x)\,dx = -\frac{15}{4}$

En caso de no poder hacerlo, las causas son:

"El área del cuadrado $= 4$. Área blanca $= 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$.

Como está por debajo del eje x: $\int_0^2 f(x)\,dx = -\frac{15}{4}$".

۞ El problema está bien resuelto y en el marco de las respuestas esperadas. Nuestro comentario respecto al uso del lenguaje común, estriba en que el estudiante señala con naturalidad el resultado como el negativo del área, porque la función o la figura a la que hace referencia "está por debajo del eje *x*". Esto es, su argumento es geométrico, basado en la visualización y no numérico, como pudo hacerlo diciendo que la función tomaba valores negativos o alguna expresión equivalente.۞

En general, los recursos empleados por este estudiante en la resolución de los problemas fue de carácter geométrico, determinando integrales por medio del cálculo de áreas. Pero su significación de integral es rica en significados y sólida, lo cual se pone de manifiesto en su respuesta al enunciado sobre cuál es el significado de la integral, que mostramos a continuación.

Creo que para funciones continuas y positivas en el intervalo [a,b] son equivalentes las tres afirmaciones. El problema de las integrales se empieza con el problema de calcular el área mencionada en a), y se llega a que esa área está dada por el límite mencionado en b), y después de demostrar el teorema fundamental del cálculo (el primero) se obtiene como consecuencia la afirmación c).

"Creo que para funciones continuas y positivas en el intervalo $[a,b]$ son equivalentes las transformaciones. El problema de las integrales se empieza con el problema de calcular el área mencionada a), y se llega a que esa área está dada por el límite mencionado b) y después de demostrar el teorema fundamental del cálculo (el primero), se obtiene como consecuencia la afirmación c)".

En la respuesta se reconoce la riqueza de la significación y en particular nos parece importante resaltar lo que indica a la tercera de las opciones. En otras respuestas, aún las de aquéllos que marcaron las tres opciones como válidas, en el inciso c) reconocen el teorema fundamental del cálculo. En este caso, esa no es la situación pues, como podemos ver, el argumento aquí es que el resultado es consecuencia del teorema fundamental del cálculo, pero no es el teorema. La integral es entonces concebida, en nuestra interpretación, como un número, como el resultado de aplicar el teorema fundamental del cálculo.

Por último, en este caso, presentamos su respuesta al problema de las condiciones de igualdad para las integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$.

Creo que siempre son iguales. Un argumento geométrico es el siguiente: La gráfica de la función f(x-c) es la misma que la de f(x) pero deslizada sobre el eje x, en c, es decir, como si dejé f(x) estuviera situado sobre x-c en lugar de 0. Entonces, el área bajo la gráfica de f(x) en el intervalo [a,b] será la misma que la de f(x-c) en el intervalo [a+c, b+c], y esas áreas están dadas por $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$, respectivamente.

“Creo que siempre son iguales. Un argumento geométrico es el siguiente: la gráfica de la función $f(x-c)$ es la misma que la de $f(x)$ pero deslizada sobre el eje x, en c, es decir, como si el eje $f(x)$ estuviera situado sobre $x-c$ en lugar de *0*. Entonces, el área bajo la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ sería la misma que la de $f(x-c)$ en el intervalo $[a+c,b+c]$, y esas áreas están dadas por $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$, respectivamente”.

En su respuesta, el estudiante argumenta correctamente en términos geométricos, pero no ilustra la situación con figura alguna. La situación es descrita con claridad y él mismo la clasifica como argumento geométrico, referido tanto al desplazamiento de la función como a la igualdad entre las áreas “bajo la gráfica” de la función $f(x)$ como la de $f(x-c)$.

4.4 ANÁLISIS GLOBAL DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN

Las respuestas de estudiantes y profesores al instrumento de evaluación, posibilitan enriquecer nuestra visión sobre los significados que asignan a la integral de una función y las interpretaciones que se dan a determinadas situaciones, expresiones y procedimientos.

Un primer aspecto que surge del análisis de las respuestas es la preponderancia de la significación de integral como un proceso de obtención de antiderivadas o integrales indefinidas y el de integrales definidas, diferenciado del otro por la evaluación y resta de valores en los límites de integración. Otra significación presente es la de área de figuras en las que se identifica a uno de los lados como la gráfica de una función.

Es de notarse que aún en los casos de quienes no contestaron algunas de las preguntas que se les formularon, o sólo recurren a los procedimientos algorítmicos para resolver las situaciones, los enunciados y dibujos que utilizan, esto es, los elementos ostensivos que emplean, ponen de manifiesto que de alguna manera relacionan la integral de una función con un área.

Sin embargo, en algunos casos la significación se muestra con debilidad y sólo se exterioriza con enunciados imprecisos o sombreados incompletos en las gráficas y en otros, de quienes no resuelven correctamente los problemas, pareciera que por medio del cálculo de integrales pueden determinar valores de áreas pero el proceso inverso les resulta complicado y no recurren al cálculo de áreas para determinar el valor de las integrales.

En otros casos, tenemos que los sujetos de investigación sólo pueden recurrir a las situaciones "concretas", a los ejemplos específicos, para resolver un problema. Así, el único recurso con que algunos estudiantes y profesores intentaron determinar la veracidad de que el número 4 era la cota superior de una integral, fue la obtención de la expresión algebraica de la función analizada (lo que no necesariamente hicieron correctamente), para proceder a determinar su antiderivada. Ante un problema similar, pero en el que era muy complicado establecer la expresión analítica de las funciones involucradas, no pudieron contestar nada.

Las respuestas a los problemas que hacemos alusión son un ejemplo de la dualidad extensivo-intensivo, en la que algunos de los participantes pudieron establecer relaciones a partir de situaciones generales, basadas en argumentos geométricos, y otros sólo pudieron establecer casos particulares, ejemplos específicos que los condujeran a proporcionar una respuesta satisfactoria.

A su vez, dentro del grupo de quienes resolvieron estos problemas, algunos lo hicieron construyendo líneas auxiliares, haciendo comparaciones entre valores “bajo la curva” para extraer conclusiones, en tanto otros lo hicieron por medio de recursos visuales. En el primero de los casos tenemos la significación, explícita o no, de que si en intervalo $[a,b]$ determinado $f(x) \leq g(x)$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ y, en el segundo, los recursos visuales de comparación de áreas es argumento suficiente para establecer conclusiones. Lo más probable es que todos los que se basan en su percepción visual tienen también la otra significación, pero su concepción de integral como área les permite buscar caminos o estrategias diversas, en las que las afirmaciones a establecer resulten plausibles.

La preponderancia de las técnicas algorítmicas para la determinación de valores de integrales se puso especialmente de manifiesto en los problemas en los que era posible proceder de diferentes maneras para obtener las integrales y la mayoría optó por los procesos de antiderivación, aún cuando previamente tuviera que determinar las expresiones analíticas de las funciones.

En el problema de determinación de una integral de una función cuya gráfica era una línea recta, por ejemplo, la situación geométrica era sencilla y el problema se resolvía fácilmente obteniendo el área de un triángulo, pero en lugar de ello, la mayoría de los estudiantes y los profesores optaron por determinar la ecuación de la recta y antiderivar la función correspondiente.

Cuando se enfrentaron a un problema similar pero ahora con una función que requería definirse analíticamente por medio de dos expresiones algebraicas. Unos pocos de los sujetos de investigación procedieron a determinar dichas expresiones y determinar la integral con el teorema fundamental del cálculo, antiderivando las expresiones y evaluándolas en donde correspondía.

Otros procedieron a determinar las áreas correspondientes, pero lo hicieron considerando tres triángulos, diferenciando los segmentos de rectas, como si se trataran de tres funciones diferentes. De hecho, el cambio de expresión analítica pareció sugerirles el trazo de una línea auxiliar para formar tres triángulos (en la gráfica del problema sólo se muestran dos) lo que, a su vez, pareció sugerirles la necesidad de determinar el valor de tres integrales.

Otros más interpretaron el problema mediante una peculiar forma de darle sentido a la expresión "área bajo la curva", haciendo una especie de traslación del eje de las abscisas y obteniendo el área de la figura obtenida a partir de esta traslación, la gráfica de la función y las rectas $x = a$ y $x = b$ correspondientes al problema. Consecuentemente con esta concepción resolvieron también así otro de los problemas en el que su interpretación para funciones negativas o con valores negativos era aplicable.

También se encontraron casos en los cuales los valores de las integrales para funciones negativas se hicieron calculando áreas de regiones "correctas", pero a las cuales se les asignó valores positivos de la integral.

Asimismo, en otro de los problemas, el que incluye arcos de circunferencia, la búsqueda de la mayoría se centró en la obtención de antiderivadas, a pesar de las evidentes dificultades para obtenerlas. En algunos casos esta situación se detectó y sólo escribieron notas aclaratorias de que no podían resolver las integrales y en otros la búsqueda de antiderivadas se continuó con tenacidad, pero no modificaron su estrategia hacia la determinación de áreas.

Con respecto al reconocimiento de un enunciado que expresara lo que identificaban como significado de la integral, la mayoría optó por seleccionar una sola de tres opciones posibles y adecuadas, preponderantemente la que reconocían como teorema fundamental del cálculo y la de área de una figura.

Ambas opciones se corresponden de una u otra manera con las prácticas operativas de los estudiantes y muy pocos identificaron como significado posible de la integral la del límite de una suma de Riemann, ligada a las prácticas discursivas de los libros de texto y los profesores de matemáticas. Esta respuesta la resaltamos porque precisamente la opción menos reconocida es, de alguna manera, la más fomentada como la definición precisa y formal de la integral, aspecto que ha sido resaltado en los textos y en las prácticas de los profesores de matemáticas.

Los tipos de respuestas han sido ilustrados en las páginas anteriores y de ahí nos surgen interrogantes sobre las causas para la construcción de significados como los mostrados por determinados individuos, algunos de los cuales no esperábamos, por ejemplo la interpretación que hemos mostrado y descrito de “área bajo la curva”.

Nuestra hipótesis central estriba en que los sistemas de prácticas que se promueven en las aulas de cálculo están orientados en los sentidos que hemos ilustrado. Así, la unión de expresiones comunes en el discurso de los profesores como “el área de una figura siempre tiene un valor positivo” y “la integral de una función es el área bajo la curva” se unen para generar un significado de la integral siempre con valores positivos. En ocasiones el valor asignado corresponderá a la del área de una figura conforme con los objetos y significados institucionales, pero con signo numérico diferente y, en otros, la misma figura se modifica para interpretar de alguna manera “el área bajo la curva”.

Ambas situaciones son producto, sin embargo, de que la mayoría de los ejemplos con los que se introduce y se ilustra lo que es una integral, corresponde a funciones positivas. En el caso de los profesores de la Universidad de Sonora hemos podido constatar que la integral de una función se introduce a partir de las llamadas sumas de Riemann, en la que casi todos los ejemplos son de funciones positivas.

Posteriormente, en prácticas de otra naturaleza, como la determinación de áreas de figuras formadas por las intersecciones de gráficas de funciones o de cálculo de volúmenes de revolución, la mayoría de las funciones tratadas son también funciones positivas.

Por otro lado, hemos podido también constatar que bastante tiempo de los cursos se destina al aprendizaje de las técnicas de integración, con la revisión de las principales técnicas que aparecen en los libros de texto, lo cual contribuye a generar una significación preponderante de la integral como antiderivada, distinguiéndola pragmáticamente de la llamada integral definida porque ésta se evalúa en los límites de integración.

En resumidas cuentas, los significados que se desprenden de las respuestas de estudiantes y profesores a quienes se aplicó el instrumento de evaluación son consecuencia de los sistemas de prácticas que se promueven en los cursos de cálculo integral y refuerzan nuestra convicción de que son los contextos, en este caso los contextos escolares los que determinan el significado que los individuos y las comunidades asignan a los objetos matemáticos.

CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES

En este último apartado del trabajo, presentamos nuestras conclusiones generales sobre el problema de investigación que hemos abordado, tomando como eje de análisis los objetivos de investigación que nos formulamos.

Para la formulación de nuestro problema de investigación, mostramos una serie de experiencias y reportes sobre las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, en los que los elementos en juego son de diferente carácter, en ocasiones por el tipo de situaciones problémicas que se resuelven, en otras por el lenguaje empleado para plantear las situaciones, en otras más por las propiedades que previamente se asigna o reconoce en los objetos matemáticos involucrados, etc.

En general, los elementos en juego al realizar actividad matemática, son los que en el enfoque ontosemiótico de Juan Díaz Godino se reconocen como objetos matemáticos primarios y como componentes del significado. A estos elementos los reconocemos, en esta tesis, como los elementos constituyentes del contexto en el que se realiza la actividad matemática, ya sea de personas en lo individual o de comunidades que comparten la búsqueda de soluciones a un mismo tipo de situaciones problémicas.

Asumimos el significado en un sentido pragmático y relativista, como el sistema de prácticas matemáticas significativas prototípicas desarrollado al resolver un determinado tipo de situaciones problémicas. Si los sistemas de prácticas son propios de un individuo en lo particular, decimos que se trata de un significado personal y si son compartidas en el seno de una comunidad, decimos que se trata de un significado institucional.

Con base en nuestra concepción de contexto y de significado, expresamos el problema de investigación por medio de una pregunta que resumiera la problemática que nos interesaba abordar y que escribimos de la siguiente manera:

¿Cuál es el papel que juega el contexto en la construcción de significados para la integral de una función?

Reiterando que en la formulación del problema hemos concebido al contexto como las componentes del significado que se introducen en un salón de clases o las que están presentes en la actividad matemática de una determinada comunidad en una época específica, establecimos la siguiente tesis:

Los significados que se asignan a los objetos matemáticos dependen de las componentes del significado que se ponen en juego al enfrentar problemas, esto es, dependen de las situaciones problémicas que se intentan resolver, el lenguaje empleado, las procedimientos que se realizan, los conceptos que se establecen, las propiedades que se reconocen de los objetos y las argumentaciones con las que se validan los resultados.

Consecuentemente, la investigación que aquí se reporta ha tenido como objetivo general y primordial aportar elementos que sustenten la afirmación que hacemos. El problema lo hemos abordado desde dos perspectivas o niveles diferentes, uno, en el desarrollo histórico-epistemológico de la integral de una función, en el marco de la generación de significados institucionales, y otro, en el nivel de profesores y estudiantes de cálculo actuales, con las consecuentes significaciones personales.

De aquí desprendemos los dos objetivos específicos que nos hemos propuesto alcanzar para lograr el objetivo general:

Aportar elementos que muestren el papel de los contextos en la construcción de significados institucionales para el objeto matemático "integral de una función", en las comunidades matemáticas que dieron origen y desarrollaron dicho objeto.

Aportar elementos que muestren el papel de los contextos en la construcción de significados personales para el objeto matemático "integral de una función", por parte de estudiantes y profesores de cálculo y/o análisis matemático.

Nuestras conclusiones las estableceremos con base en cada uno de estos objetivos particulares.

Significados institucionales.

En el análisis del desarrollo del objeto "integral de una función", tomamos tres momentos o etapas importantes: el surgimiento del objeto en la propuesta de Leibniz, las concepciones de Euler y los trabajos de Cauchy y Riemann.

☼ En la etapa de Leibniz encontramos elementos a favor de nuestra tesis sobre el papel de los contextos en varios aspectos, algunos de los cuales trataremos brevemente.

- Uno de los problemas que se abordaban en la comunidad matemática o científica de la época de Leibniz, en la segunda mitad del Siglo XVII, era la determinación de las sumas infinitas y a Leibniz le fueron planteados algunos de los problemas específicos que se estaban tratando de resolver.

  Leibniz resolvió satisfactoriamente dichos problemas, empleando técnicas derivadas de su sistema de prácticas para el caso de sumas finitas, en las que previamente había trabajado. Nos referimos a las sumas de los términos de sucesiones finitas, en las que él había encontrado que la suma de las diferencias de los términos de las sucesiones era igual a la resta del último y el primero de los términos de la sucesión original. Esto es, Si tenemos la sucesión finita de números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ y tomamos la suma de sus diferencias, obtendremos que $(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_{n-2} - a_{n-3}) + \cdots + (a_1 - a_0) = a_n - a_0$.

  Los casos que Leibniz resolvió después, fueron los de las sumas infinitas en la que los términos de la sucesión "devienen a cero". En estas sumas infinitas se empezó a concebir las cantidades infinitamente pequeñas y, en otras situaciones, por ejemplo en la suma infinita de los números naturales, surge la noción de cantidades infinitamente grandes.

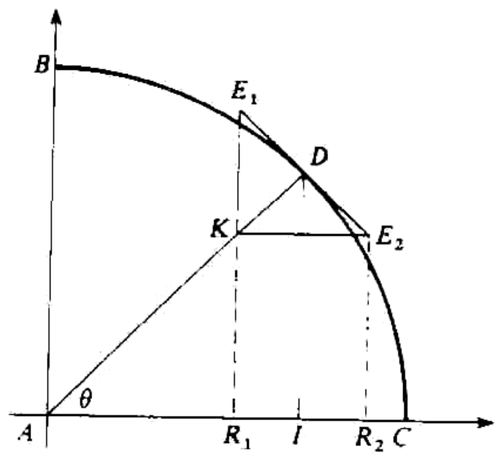
  ¿Qué es lo que permitió a Leibniz determinar las sumas infinitas como el caso que le planteó Huygens de la suma $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)/2} + \cdots$?

  Leibniz vio aquí lo que otros no veían, porque sus prácticas matemáticas en el caso de las sumas finitas, con el que no obtuvo resultados originales, eran el contexto que no tenían los demás.

- Posteriormente Leibniz abordó los problemas de las cuadraturas de figuras con un lado curvilíneo y la determinación de las rectas tangentes a curvas arbitrarias. Ambos eran problemas de primer orden en su época y numerosos matemáticos habían tratado de resolverlos, pero sólo lo habían logrado hacer para ciertos casos específicos y no existían métodos generales de solución a los problemas.

Una vez más, los sistemas de prácticas o significados que Leibniz había construido para los casos numéricos, incluyendo ahora el de las sumas infinitas, le permitió concebir una forma general para abordar la situación.

Partiendo de la resolución de un problema de cuadraturas resuelto por Pascal, en el que había utilizado la siguiente figura



en la que el segmento $\overline{E_1E_2}$ es tangente a la curva BC. Al conocer la solución de Pascal, Leibniz concibió a la tangente de un modo distinto, como la unión de dos puntos consecutivos de la curva y, consecuentemente, a la curva misma la concibió de forma diferente, formada por una infinidad de segmentos tangentes, que en general, lo llevaron a concebir que las figuras con un lado curvo, eran polígonos infinitoangulares.

De esta forma de percibir siguieron los desarrollos de resolver, en un solo proceso, no sólo el problema de la cuadratura, sino también el de la obtención de las tangentes a una curva arbitraria. Leibniz declaró que no entendía cómo es que Pascal no había visto esto y la pregunta que nosotros nos formulamos es cómo Leibniz sí lo vio.

Una vez más, la clave son los sistemas de prácticas previamente desarrollados. Leibniz vio en el segmento de recta tangente a la curva la unión de dos puntos consecutivos, esto es, concibió a la curva como una sucesión infinita de puntos y los segmentos que los unen venían a ser las “diferencias”, las que al sumarse cubren toda la curva, o, pensado en términos de las longitudes, la suma de las longitudes de cada segmento es la longitud total de la curva o la diferencia del punto final con el punto inicial.

Pero considerar longitudes llevaba, a la postre, a contradecir la idea de que la curva podía estar formada por una infinidad de segmentos de este tipo. Leibniz adecuó entonces su sistema conceptual para tomar no las longitudes de los segmentos, sino los segmentos mismos, a los que llamó “diferenciales” por analogía con las diferencias numéricas y los definió como segmentos de “longitud inasignable”.

Estos nuevos objetos, los “diferenciales”, son emergentes de la generalización a las situaciones geométricas de los significados o sistemas de prácticas desarrollados en los problemas de tipo numérico. En consecuencia, tienen propiedades similares a las diferencias y se les pueden aplicar las mismas reglas de funcionamiento, sólo que por la naturaleza de los problemas geométricos, resultaba ahora imprescindible desarrollar dichas propiedades y reglas de forma precisa. Esto dio pie al surgimiento del cálculo analítico, que consistía en establecer y desarrollar las reglas de manipulación a las que se sujetarían los nuevos objetos.

- Habiendo establecido las reglas de operación de los diferenciales, Leibniz se abocó a la resolución de diversos problemas de cuadraturas y de caracterización de curvas, incluyendo las llamadas curvas mecánicas, que no habían podido estudiarse con las técnicas de la geometría analítica. La caracterización de curvas y sus propiedades condujo al desarrollo de las ecuaciones diferenciales, aspecto que no tratamos en este trabajo.

  Pero en los problemas de cuadraturas, en los que Leibniz empleó sus métodos analíticos, también se pone de manifiesto el papel determinante de los contextos en los significados o sistemas de prácticas desarrollados, pues a pesar de que dichos métodos pueden generarse con la sola manipulación analítica de las sumas y los diferenciales, se procede a la determinación de los mismos a partir de las figuras geométricas o, en última instancia, se argumenta la validez con apoyo en las figuras geométricas.

Dos ejemplos que fueron desarrollados en este trabajo, son los de la obtención de la fórmula de transmutación y de la integración por partes.

- Otro aspecto que viene a mostrar el papel de los contextos es el mismo nombre de integral. En su desarrollo del cálculo analítico, Leibniz había concebido diferenciales y sumas, con referencia a los primeros problemas numéricos por él resueltos. Consecuentemente, las reglas de su cálculo analítico trataban ambos aspectos y se incluían sumas de sumas, o sumas de sumas de las sumas, etc., y lo mismo para los diferenciales, creando un cálculo analítico con diferenciales y sumas de diferentes órdenes de magnitud.

  Pero en lugar del término suma, Johann Bernoulli empleó el de integral, aduciendo que él concebía que los problemas de cuadraturas se resolvían dividiendo una figura en una infinidad de figuras de área diferencial y con el proceso de la suma lo que se hacía era "integrar" dichas figuras diferenciales. Aceptó ante Leibniz, sin embargo, emplear el término suma en lugar del suyo de integral, para respetar la concepción original.

  Este es un caso típico de "negociación" de significados y términos al seno de una comunidad científica, que ilustra los papeles que juegan los significados personales de sus participantes y los significados institucionales que se van estableciendo, al compartir finalmente un sistema de prácticas.

  En este sentido nos planteamos la interrogante ¿Por qué el término finalmente establecido en el cálculo fue el de integral? La respuesta que damos la extraemos nuevamente del contexto y los sistemas de prácticas matemáticas relativos al uso del objeto: las situaciones problémicas de interés estaban en el cálculo de áreas y no en el uso de sumas arbitrarias, con menor razón las dobles, triples y demás sumas de orden superior. El interés por la concepción del objeto como lo planteó Bernoulli se reforzó con el uso de la integral para la solución de problemas de física e ingeniería.

☼ En los trabajos de Euler, encontramos también algunos elementos a favor de la hipótesis formulada. Entre ellos están los siguientes:

- El éxito del cálculo en la resolución de problemas geométricos y su extensión en el tratamiento de las situaciones físicas (en mucho influidas por las aportaciones de Newton y su propia versión del cálculo), llevaron a Euler a estudiar de forma más sistemática los métodos del cálculo en problemas de movimiento, de hidrodinámica y otros.

  Consecuentemente, Euler se planteó la forma de extender las técnicas del cálculo para incluir el tratamiento de variables no geométricas, como temperaturas, presiones, velocidades, etc. La cuestión es ¿Cuál era el lenguaje que permitía hablar de estas variables? La respuesta general es que para tratar con cantidades físicas variables se requería del álgebra y, para tratar con las expresiones que modelan el comportamiento de cada situación por discutir, Euler se refirió a la función, definida precisamente como la expresión analítica que relaciona a una variable con otra.

  Esto es, las nuevas situaciones problémicas que podían abordarse con las técnicas del cálculo no necesariamente involucraban referentes geométricos. ¿Cómo usar diferenciales si su naturaleza era geométrica? Euler rescató entonces la noción de "infinitamente pequeño" para referirse ahora a cantidades diferenciales de las variables arbitrarias o variables generalizadas.

  Esta extensión de las cantidades diferenciales hacia situaciones no geométricas tuvo su origen en el nuevo contexto, en las nuevas situaciones problémicas, pero generó, a su vez, otras nuevas situaciones. Por ejemplo, si los diferenciales de origen de Leibniz eran segmentos que unían dos puntos consecutivos, ¿Qué podían ser las cantidades diferenciales de una variable generalizada? ¿Podían concebirse como diferencias de dos valores numéricos consecutivos de la variable? Si en el caso geométrico era complicado aceptar la existencia de puntos consecutivos, en el caso aritmético-algebraico era imposible de concebir pues entre dos números siempre es posible encontrar otro (aunque no se tenían las modernas concepciones de continuidad y completez de la recta real, la propiedad de densidad de los números era ya aceptada en esa época).

La respuesta de Euler fue entonces que las cantidades diferenciales de las variables generalizadas eran "realmente cero", desarrollando sus explicaciones sobre la existencia de ceros de diferente magnitud u orden de magnitud. Por cierto que en esas circunstancias los diferenciales de Leibniz fueron modificados y, al hablar de un diferencial geométrico tendría que hablarse de las variables involucradas. Ya no se trataba de segmentos, sino de diferenciales de longitud; no de figuras diferenciales, sino áreas diferenciales; ya no cuerpos geométricos diferenciales sino diferenciales de volumen.

Si asumimos que los diferenciales de Euler son los mismos que los de Leibniz, lo que no es fácil de hacer, por lo menos debemos asumir que su significado ha sido modificado y conceptualmente son diferentes.

- A estos nuevos objetos o, si se prefiere, a los mismos objetos pero asumiendo que tienen significados diferentes a los anteriores, Euler les atribuyó las mismas propiedades y las mismas reglas de operación que a los diferenciales de Leibniz, haciendo algunas adecuaciones o modificaciones. Entre las modificaciones hechas podemos señalar el hecho de que ahora, al determinar la diferencial de una función, congruentemente con la definición de la misma en términos de las expresiones analíticas, se habla de una fórmula diferencial. En el caso en el que centramos nuestra atención, ahora se dice que la integral de una función es la operación inversa de la correspondiente a la determinación de una fórmula diferencial.

  Si bien es cierto que esta posición es compatible con el desarrollo del cálculo en la versión de Leibniz, el punto de partida es diferente. Mientras que antes se partía de las sumas de diferenciales, ahora se parte de las fórmulas diferenciales, aceptando el principio fundamental del cálculo.

  El contexto algebraico en el que se plantea a la integral lleva entonces a nuevos procedimientos y técnicas que no se apoyan, ni se justifican, ni se ilustran geométricamente. Los procedimientos que Euler emplea para la determinación de integrales de funciones son estrictamente algebraicos, realizados con notable destreza, por cierto.

☼ En el desarrollo posterior de la integral de una función, el que ubicamos con los trabajos de Cauchy, algunos de los elementos que consideramos son los siguientes:

- Las justificaciones que se habían dado a la existencia de los diferenciales, los infinitamente pequeños, los infinitamente grandes y otros, no convencieron a la comunidad matemática, quien, sin embargo, reconocía la potencia de las técnicas del cálculo para la resolución de numerosos problemas físicos y geométricos. Se hicieron entonces intentos de sentar los procedimientos del cálculo sobre bases diferentes, destacándose las que consideraron la noción de límite y la emergencia de la noción de derivada.

  Ambas ideas fueron retomadas por Cauchy, quien se dio a la tarea de reformular las bases del cálculo, centrando su atención en las nociones de límite y de continuidad de las funciones, las cuales caracterizó con base en los principios de la aritmética de los números de las cantidades finitas, por medio del uso de las desigualdades.

  La situación problémica principal de Cauchy no fue la extensión de las técnicas del cálculo a nuevas situaciones de aplicación, sino a las de la justificación matemática de la validez de dichas técnicas. Al abordar esta situación problémica se generaron objetos matemáticos nuevos o, si se prefiere, se le dieron nuevas significaciones a los objetos matemáticos del cálculo que ya existían.

  Veamos algunos de estos casos:

  Cauchy establece que una cantidad variable “deviene infinitamente pequeña, cuando su valor numérico decrece indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero”. Esta definición nos muestra que su concepción de cantidad infinitamente pequeña es la de una variable, en tanto que en Leibniz y Euler las cantidades infinitamente pequeñas no son variables, sino partes de objetos geométricos o de cantidades variables, cuyo tratamiento numérico puede observarse en la caracterización de Euler de las funciones exponenciales y logarítmicas.

  En cuanto a las cantidades infinitamente grandes, establece que son aquellas que crecen indefinidamente o que su límite es ∞. Esto es, son variables, no son ellas mismas una cantidad que se pueda manipular, como lo hacía Euler en algunos desarrollos, como los ya citados de las funciones exponenciales y logarítmicas.

- El estudio de las rectas tangentes no se hace con base en las cantidades diferenciales, sino en el de derivada, que viene a convertirse en el objeto central del cálculo diferencial (de hecho, quizá lo más adecuado hubiera sido llamarle cálculo "derivacional" o alguno equivalente). La derivada es definida como se hace en la actualidad en los libros y las clases de matemáticas, como un límite.

  Pero como el propósito central de Cauchy era la validación de las técnicas del cálculo, conservó prácticamente todas las expresiones fundamentales del cálculo de Leibniz, y definió, con base en la derivada a las cantidades diferenciales, en el sentido que la conocemos hasta la actualidad. Como sucedió con las cantidades infinitamente pequeñas y las cantidades infinitamente grandes, las diferenciales eran ahora variables, ya no se conciben como partes de una cantidad variable, como segmentos o como "realmente ceros".

- El camino elegido por Cauchy no permitía, de origen, concebir a la integral como el producto de la operación inversa de la derivación de funciones y la definió a partir de considerar sumas que en su forma son muy similares a las que formulaba Leibniz para la obtención de áreas de figuras. Sin embargo, aquí lo más importante era demostrar que las sumas infinitas que se consideraban tenían un límite determinado, el que se asumía como la integral de una función.

  Adicionalmente, la forma de definir a la integral no la ligaba directamente con la derivada de una función ni con la diferencial de la misma. Para establecer dicha relación se estableció el Teorema Fundamental del Cálculo, que viene a ser el equivalente a lo que en Leibniz y Euler era un principio que no requería demostración, toda vez que era evidente en su construcción de diferencial e integral.

- Con la caracterización de convergencia y de continuidad, aunado a los nuevos problemas que surgían en la aplicación del cálculo, como el estudio de los fenómenos del calor hechos por Fourier, surgieron nuevas funciones, con comportamientos peculiares y "extraños". Algunas de estas funciones tenían "muchos" puntos de discontinuidad, en el sentido de la definición de Cauchy, pero a la vez eran integrables, de acuerdo con su propia caracterización.

Este hecho llevó a la formulación de una nueva situación problémica de interés para la comunidad matemática: ¿Cuáles eran las condiciones que debía satisfacer una función para ser integrable?

La respuesta a esta interrogante se produjo con una nueva caracterización de integral, establecida ahora por Riemann, quien tomó como base la definición de Cauchy, pero introdujo algunas modificaciones. La definición de Riemann es prácticamente la misma que se estudia hoy en la enseñanza del cálculo.

Significados personales.

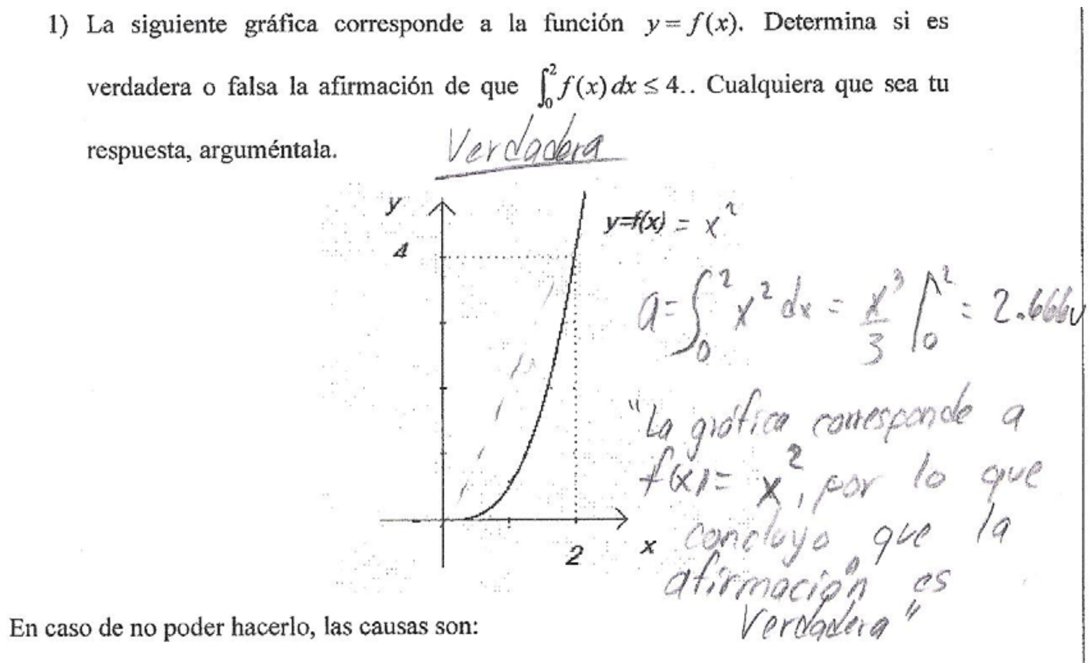
Con la aplicación del instrumento de evaluación a algunos profesores y estudiantes, también encontramos elementos a favor de nuestra tesis sobre el papel de los contextos en la asignación de significados para la integral de una función.

Desde la elaboración del instrumento de investigación consideramos que las prácticas matemáticas preponderantes que se promueven en la enseñanza de la integral son las de carácter operativo: las de determinación de integrales indefinidas e integrales definidas. Asimismo, se promueve también la interpretación de la integral como área de figuras.

En ambos sentidos encontramos elementos de importancia y, para efectos de ilustrar el logro del segundo de nuestros objetivos específicos, consistente en aportar elementos que muestren el papel de los contextos en la asignación de significados personales para la integral de una función, mostramos a continuación algunos de ellos.

☼ Respecto a la significación operativa de la integral.

Uno de los problemas que les planteamos a los participantes en la investigación consistía en solicitarles que dieran argumentos a favor de que el valor de la integral de una función tenía por cota superior al número *4*. La situación se planteaba geométricamente y no se especificaba la expresión analítica que la representara y, aunque no era difícil de obtener, tampoco se podía determinar de inmediato. Algunos de los estudiantes respondieron, de todas maneras, a partir de la que, según ellos, era la expresión analítica de la función y procedieron a obtener una integral definida empleando el teorema fundamental del cálculo. Algunos de esos ejemplos son los siguientes dos:



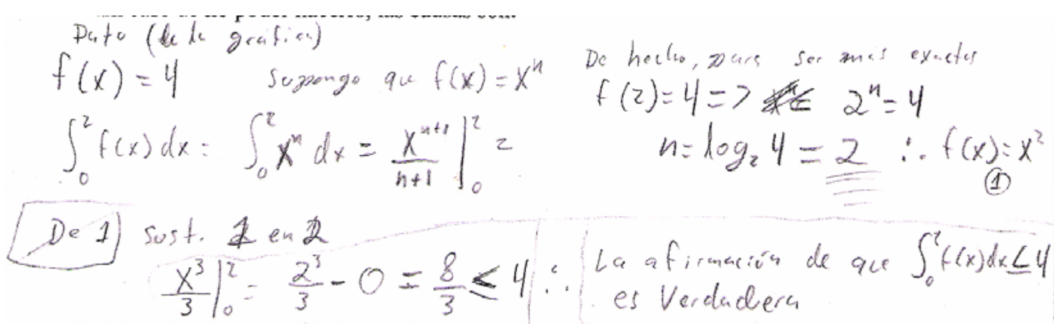
1) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina si es verdadera o falsa la afirmación de que $\int_0^2 f(x)\,dx \leq 4$.. Cualquiera que sea tu respuesta, arguméntala. Verdadera

$y=f(x) = x^2$

$a = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 2.666u$

"La gráfica corresponde a $f(x) = x^2$, por lo que concluyo que la afirmación es Verdadera"

En caso de no poder hacerlo, las causas son:



Dato (de la gráfica)

$f(x) = 4$ Supongo que $f(x) = x^n$

$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^2$ ②

De hecho, para ser más exactos

$f(2) = 4 \Rightarrow 2^n = 4$

$n = \log_2 4 = 2 \quad \therefore f(x) = x^2$ ①

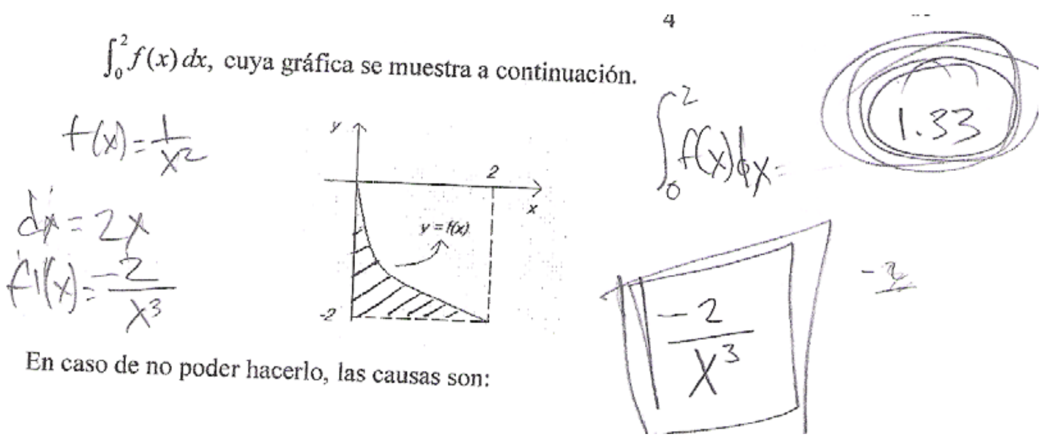
$\boxed{\text{De 1}}$ Sust. 1 en 2

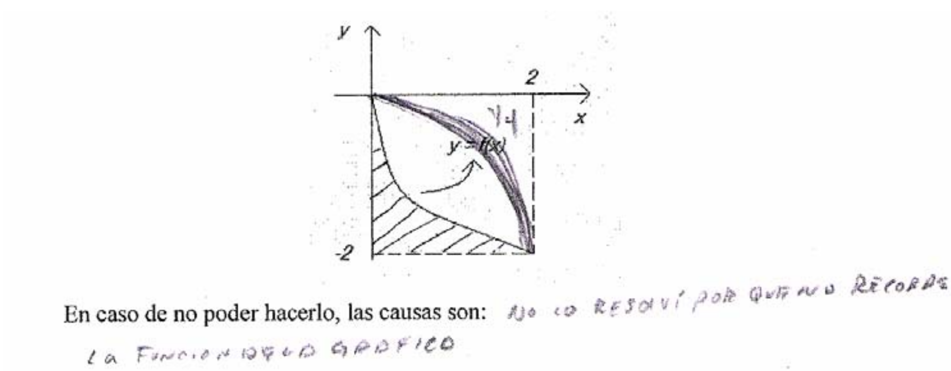
$\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - 0 = \frac{8}{3} \leq 4 \therefore$ La afirmación de que $\int_0^2 f(x)\,dx \leq 4$ es Verdadera

Independientemente de que ambas respuestas están equivocadas, aquí se pone de manifiesto que la significación que estos estudiantes dan a la integral consiste en partir de la expresión analítica de una función, determinar una función primitiva (la antiderivada) y evaluarla en los límites de integración y restar sus valores.

Pudiera pensarse que ello no necesariamente es así, sino que se les hacía más fácil proceder de esta manera pues la respuesta no se podía formular directamente. Pero otros casos, en los que no había muchos elementos para obtener la expresión analítica de la función involucrada, son indicio de que la razón de su proceder obedece a su concepción. Por ejemplo, en otro de los problemas se solicitaba que proporcionaran el valor de la integral de una función, conociendo un área encerrada en un cuadrado, y que se resolvía fácilmente tomando en cuenta el significado de la integral como área.

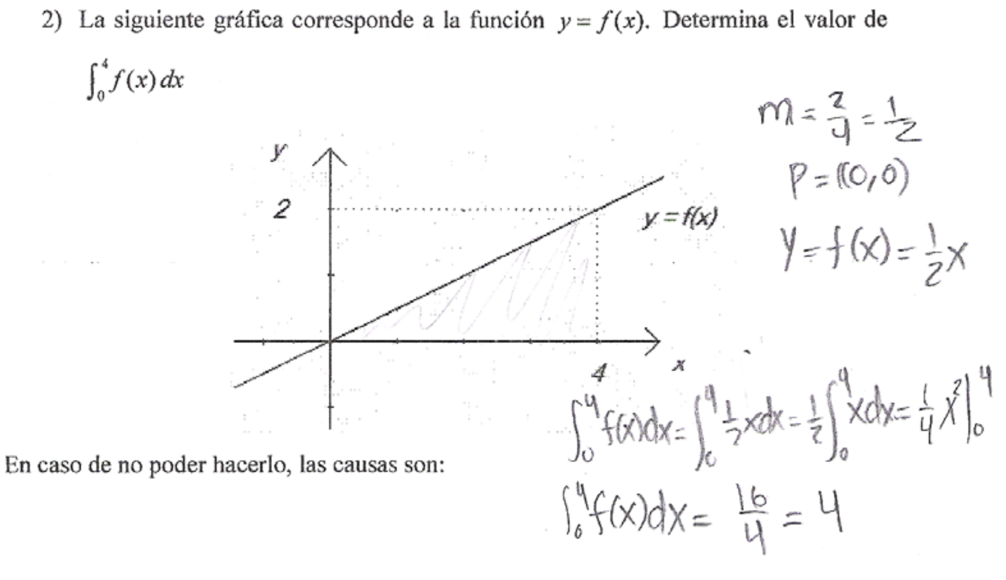
Algunas de las respuestas obtenidas fueron:

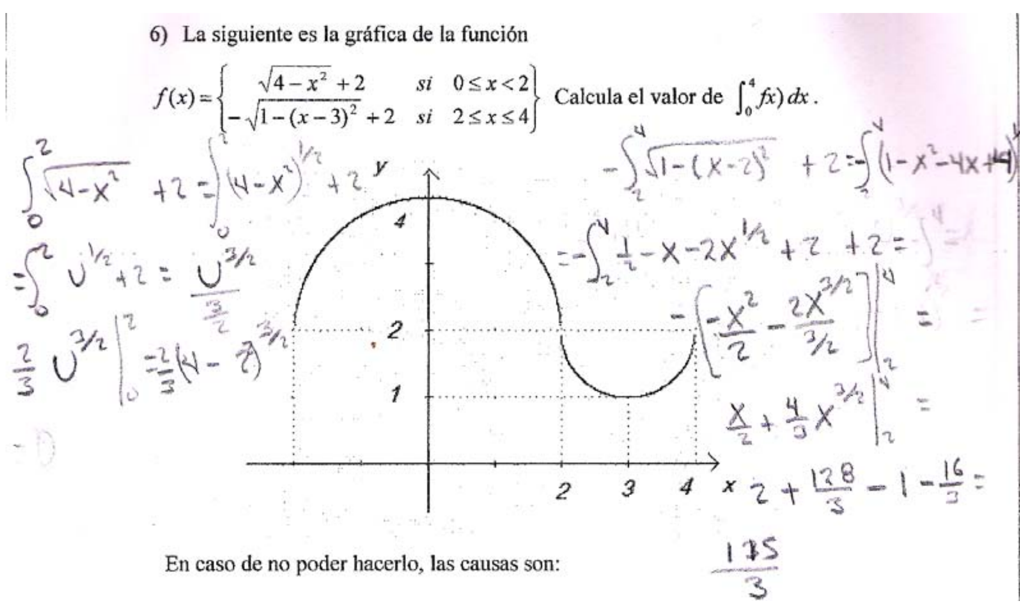




Como vemos, tanto en la primera como en la segunda de las respuestas se dan elementos que muestran la concepción de integral de una función en el sentido operativo que hemos descrito.

Otros casos son los de funciones cuya integral se obtiene fácilmente por medio del cálculo de un área y los participantes en la investigación procedieron (a veces con éxito y a veces no) siguiendo la estrategia de determinar las antiderivadas. Entre los ejemplos de este corte están los siguientes dos:

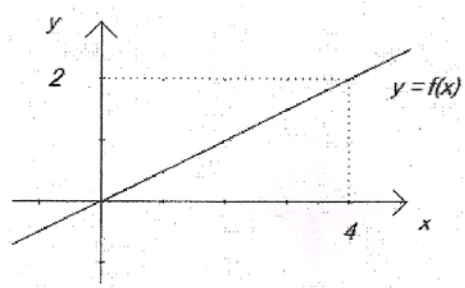




Otro más lo encontramos en la respuesta de un estudiante sobre las causas por las que no pudo determinar el valor de una integral.

2) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina el valor de

$\int_0^4 f(x)\,dx$



En caso de no poder hacerlo, las causas son:

no identifico bien la función, no sé que es lo que tengo q' antiderivar para empezar a trabajar.

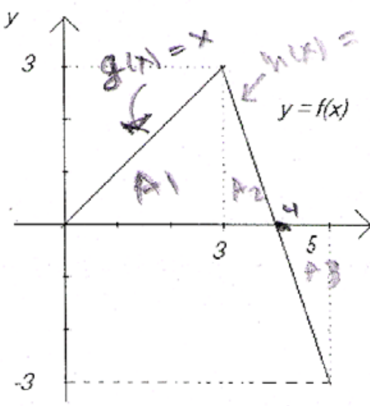
Las respuestas que mostramos ilustran nuestra afirmación, y, debemos agregar, la mayoría de los participantes en la investigación trataron de resolver los problemas planteados siguiendo procedimientos algorítmicos.

☼ Respecto de los significados como área.

En este caso se pusieron también de manifiesto los significados que estudiantes y profesores asignan a la integral como área. Las dos respuestas siguientes muestran que al interpretar a la integral como área, algunos de los participantes la consideran siempre como positiva.

3) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina el valor de

$\int_0^5 f(x)\,dx$ $\quad \int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^3 x\,dx + \int_3^4 (-3x+12)\,dx - \int_4^5 (-3x+12)\,dx$



haciendo esta integral se obtiene el valor. Pero tambien podemos observar que si sumamos las areas de los tres triangulos llegamos al mismo resultado.

En caso de no poder hacerlo, las causas son:

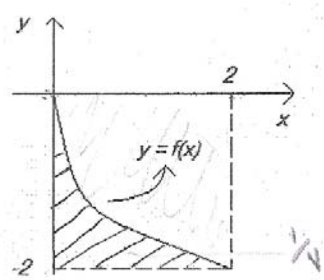
$A_T = A_1 + A_2 + A_3$

$A_T = 4.5 + 1.5 + 1.5$

$A_T = 7.5\,u^2$

7) Conociendo que el área de la región sombreada es $\frac{1}{4}$, determina el valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$, cuya gráfica se muestra a continuación.

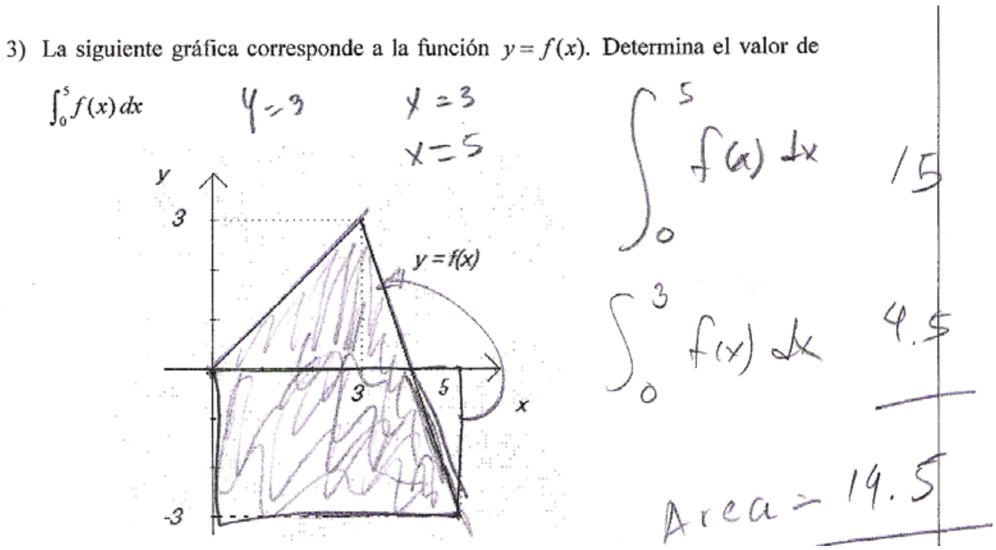
$\int_0^2 f(x) = \frac{15}{4}$ $\qquad \frac{15}{4}$

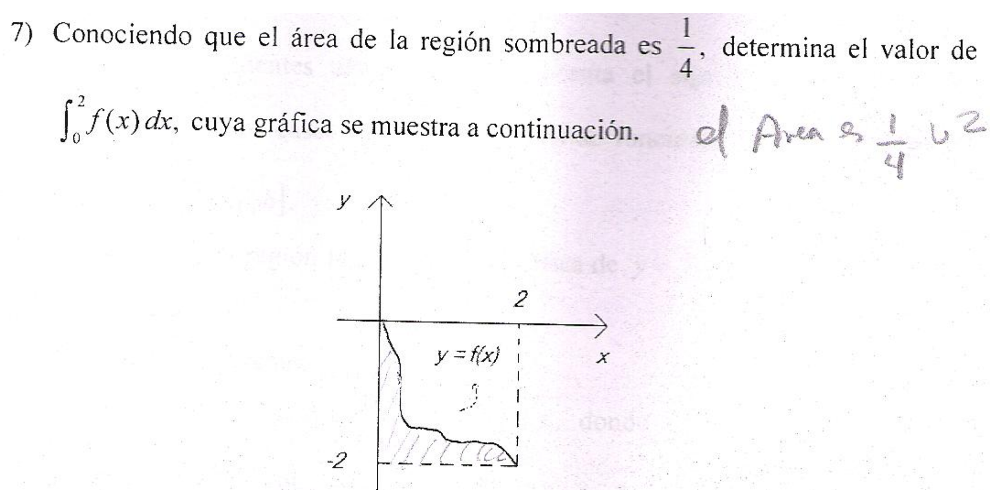


En caso de no poder hacerlo, las causas son:

En nuestra interpretación las razones para esta respuesta, es la conjunción de tres factores. El primero de ellos es el conocimiento, de que en algún sentido, la integral es un área. El segundo es que en el salón de clases se escucha con frecuencia la frase “un área siempre es positiva” y el tercero es que, aunque los profesores señalen que en caso de que la función sea negativa, el valor de la integral es el negativo del área, la mayoría de los ejemplos que se revisan y se resuelven en las tareas son los de funciones positivas. Consecuentemente el significado de integral como área es asociado con la obtención de valores positivos.

Otro caso de interés es el de la interpretación que algunos participantes dieron a la frase, también común en el salón de clases, de que la integral es el "área bajo la curva". Los dos ejemplos siguientes ilustran la situación.





Una vez más, aunque se interprete a la integral como un área, los ejemplos que en su mayoría se revisan en el salón de clases, son los de las funciones positivas y, ante una nueva situación, estudiantes y profesores procuran dar una interpretación que haga compatible la situación con sus conocimientos y significados previamente construidos.

Resumiendo, nuestra conclusión general es que los significados que se asignan a los objetos matemáticos están determinados por los contextos en los que se construyen, y si nuestro propósito es incidir favorablemente en el sistema educativo, requerimos diseñar situaciones de aprendizaje que favorezcan la riqueza de significados para los objetos matemáticos.

Una actividad de aprendizaje puede ser exitosa, en alguna medida, si tomamos en cuenta factores como las situaciones problémicas que motiven a los estudiantes, el uso de diversas representaciones semióticas, gráficas, numéricas y analíticas, por mencionar algunas. Pero estas consideraciones no son suficientes.

Si nuestro propósito es que los estudiantes construyan significaciones sólidas y diversas sobre los objetos matemáticos, es necesario diseñar actividades que contemplen aspectos como los indicados en el párrafo anterior, pero a los cuales es necesario adicionar otros factores. La construcción de significados será más sólida y diversa en la medida que las actividades de enseñanza y de aprendizaje incluyan diferentes prácticas matemáticas, con situaciones problémicas que conduzcan a usar unas u otras.

Dado que el interés de nuestro trabajo no incluye el diseño y ejecución de actividades de enseñanza, no nos hemos detenido en este aspecto. Sin embargo, en el marco de nuestro enfoque teórico, consideramos que una educación rica en significados de los objetos matemáticos debe incluir al menos los tres factores siguientes:

Un estudio epistemológico que nos permita establecer las posibles significaciones institucionales de los objetos matemáticos en juego. Con los elementos que nos proporcione el estudio epistemológico podremos establecer una trayectoria epistémica que lleve al estudiante a desarrollar diversos sistemas de prácticas y a superar posibles dificultades. Pero ello no es aún suficiente.

Las situaciones problémicas que se planteen a los estudiantes deben no sólo contemplar los aspectos epistemológicos, sino también los mecanismos de aprendizaje de los individuos. Las situaciones problémicas implican generar en el estudiante el deseo de resolverlas, la identificación de los conceptos y procedimientos que le pueden ser útiles e ir detectando la necesidad de aplicar nuevos procedimientos.

Asimismo, es necesario considerar la aplicación de técnicas didácticas e instrumentos tecnológicos que favorezcan el desarrollo de sistemas de prácticas significativas de variada naturaleza y tomen en cuenta tanto los aspectos epistemológicos como los mecanismos de aprendizaje de los alumnos.

En general, consideramos seis dimensiones o subprocesos, para cada uno de los cuales es necesario establecer una trayectoria que señale los estados potenciales: trayectoria epistémica relativa al tratamiento de los componentes del significado institucional implementado en los tiempos de un curso; trayectoria docente, referida a las tareas del profesor durante el proceso de enseñanza; trayectoria discente, que se refiere a las funciones y actividades de los estudiantes en el proceso de aprendizaje; trayectoria cognitiva, relativa a los significados personales que los estudiantes deberán ir construyendo en el proceso de instrucción; trayectoria mediacional, relativa a la planificación de los recursos tecnológicos; y, finalmente, trayectoria emocional, relativa a las actitudes y estados emocionales de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y a los procesos de estudio.

La interacción entre todas las trayectorias y estados pueden analizarse por medio de lo que se denomina configuración didáctica.

Sin embargo, estos últimos apuntes sólo pretenden mostrar algunos de los elementos que a nuestro juicio, deben considerarse al diseñar las actividades de enseñanza, sin que constituyan precisamente una conclusión que se desprende de nuestro trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

Alexandrov, A.; Kolmogorov, A.; Laurentiev, M. (1973). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madird, España: Alianza Editorial.

Apostol, T. (1989). *Análisis Matemático*. Barcelona, España: Reverté.

Arrieta, J. (2002). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN, México.

Artigue, M. (1988). "Ingéniere Didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, no. 3, pp. 281-308.

Artigue, M. (1995) *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos.* En Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial América y una empresa docente.

Ávila Godoy, R. (2006). *Uso de representaciones de los conceptos de función y derivada en la resolución de problemas no rutinarios por resolutores expertos, pp. 279-307*. En Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas. España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Ayala, José de Jesús (2003). Obstáculos en la comprensión del teorema fundamental del cálculo. Tesis de maestría. Universidad de Sonora, México.

Becerril Espinoza, José Ventura (1987). *Algunos resultados clásicos sobre la integración de funciones elementales*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Bernoulli, Johann (1691). *First Lecture. On the method of integrals and other matters, pp. 324-328.* En Struik, D. J. (1969). A source book in mathematics, 1200-1800. Cambridge, Massachusetts, USA: Harvard University Press.

Blumer, H. (1969). *Symbolicc interactionism: Perspective and method*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 14, pp. 1-90.

Boyer, C.B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York, USA: Dover.

Boyer, C.B. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 7., No. 2: 33-115. [Traducción de Julia Centeno, Bergoña Melendo y Jesús Murillo].

Cabañas, G., Cantoral, R. (2007). La integral definida: un enfoque socioepistemológico. En C. Dolores, Martínez, G., Farfán, R., Carrillo, C., López, I. y Navarro, C. (Eds.). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*. España: Ediciones Díaz de Santos. URL: http://cimate.uagro.mx/cantoral/

Cabañas, G., Cantoral, R. La conservación en el estudio del área. En R. Cantoral, Covián, O., Farfán, R., Lezama, J., Romo, A. (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. España: Ediciones Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, versión preliminar. URL: http://cimate.uagro.mx/cantoral/

Cambray, R., Cantoral, R. (1990). *Lecciones de Cálculo Antiguo*. Serie Lecturas de Cálculo para docentes de Ingeniería. Núm. 1 CONACYT, CINVESTAV, PNFAPM, México.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. En R. Cantoral (Ed.), El futuro del cálculo infinitesimal (pp. 69-91), México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis, pp. 69-92.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Lezama, J.; Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial. 83-102.*

Castañeda Alonso, Apolo (2004). Un acercamiento a las construcción de l conocimiento: estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.

Cauchy, A. (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique (Analyse Algébrique)*. Paris, France: Gauthier-Villars Imprimeur.

Cauchy, A. (1829). L*eçons donnes a l'École Royale Polytechnique sur le calcul différentiel*. Paris, France: Chez de Bure Frères, Libraires du Roi de la Bibliothèque du Roi.

Cauchy, A. (1823). *Resume des leçons donnes a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitesimal*. Paris, France : Gauthier-Villars Imprimeur.

Cajori, F. (1995). *A History of Mathematics*. England : Chelsea Publishing Company.

Collete, J. P. (1985). *Historia de las Matemáticas*. España : Siglo veintiuno de España Editores.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, no. 2 : 221-266. [Traducción de Ricardo Barroso].

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. SEP-Cooperación Española, España (Colección "Biblioteca del Normalista").

Cordero Osorio, francisco (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados (Un estudio del discurso matemático escolar*. Tesis de doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.

Courant, R. (1979). *Differential and integral calculus*. USA: Interscience Publishers.

Crisóstomo, E.; Ordóñez, L.; Contreras, Á.; y Godino, J. D. (2006). *Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática, pp. 125-166*. En Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas. España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

D'Alembert, J.L. (1765). *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonne des Arts et des Métiers, par une Société de Gens de Lettres*. *Tomo IX.* Paris, France: Chez Samuel Faulche & Compagnie, Libraires & Imprimeurs.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Prefacio de Guy Brosseau. Prefacio a la edición en idioma español de Ricardo Cantoral. Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla. México DF, México: Reverté-Relime.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial. 177-194.*

Dubinsky, Ed (1991). *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*. En Advanced Mathematical Thinking (D. Tall, ed.). Holanda. Kluwer

Dubinsky, Ed; Czarnocha B.; Loch, S.; Prabhu, V.; Vidakovic, D. (2000). *Calculus Students Intuition of Area and the Definite Integral: Chopping Up or Sweeping Out*. USA. Collegiate Mathematics Journal.

Douady, R. (1986). Jeux des Cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, no. 2, pp. 5-31.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva*? México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1996). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173-201). Cinvestav, México.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Edwards, Ch. (1979). *The historical development of the calculus*. New York, USA: Springer-Verlag.

Encinas Bringas, Álvaro (2001). *Obstáculos en la transferencia de algunos conceptos del cálculo aprendidos en el contexto del movimiento a otros.* Tesis de maestría. Universidad de Sonora, México.

Ernest, P. (1994). Variedades de constructivismo. Sus metáforas, epistemologías e implicaciones pedagógicas. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*. 2: 1-14. [Traducción de Juan Díaz Godino].

Euler, L. (1755). *Instititutiones Calculi Differentialis*. Traducido al inglés (2000) como Foundations of differential calculus. Rochester NY, USA: Springer-Verlag.

Euler, L. (1768). *Instititutionum Calculi Integralis. Volumen primum*. Tercera edición (1824). San Petersburgo, Rusia: Impensis Academiae Imperialis Scientiarum.

Euler, L. (1748). *Introductio in Analysin Infinitorum, tomus primus.* Traducido al ingles (1990) como Introduction to analysis of the infinite, Book I. USA: Springer-Verlag.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*. 14, 1-35.

Font, V. (2006). *La dimensión dual «personal/institucional» y el problema del encaje de los objetos personales del profesorado en la teoría de las funciones semióticas, pp. 69-103.* En Primer Congreso Internacional sobre aplicaciones y desarrollos de la teoría de las funciones semióticas. España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Fourier, J.L. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Paris, France: Chez Firmin, Didon, Père et fils. Libraires pur les Mathématiques.

Galilei, Galileo. (1636). *La matemática del movimiento*. En Sigma, El mundo de las matemáticas (1969). Barcelona, España: Grijalbo.

García González, E. (2001). Vigotsky, *La construcción social de la Psique*. México: Trillas.

Godino, J. D. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados semióticos. URL : http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D.; Bencomo, D.; Font, V,; y Wilhelmi, M. R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, Volumen XXVII, No. 2 : 221-252.

Godino, J. D.; Bencomo, D.; Font,V.; y Wilhelmi, M.R. (2007). Pauta de análisis y valoración de la idonedidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. URL : http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D.; Contreras, A.; y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques.*

Godino, J. D. (2003b). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias. Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2003). *Perspectivas de la didácticas de las matemáticas como disciplina científica*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Godino, J. (2003a). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias. Universidad de Granada.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 14, No. 3, pp. 325-355*. Paris, France.

Godino, J. D.; Batanero, C,; y Font, V. (2006) *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Grabiner, J. V. (1990). The *Calculus as Algebra*. New York & London: Garland Publishing, Inc.

Granville, W. A. y otros (1986). *Cálculo diferencial e integral*, reimpresión de 1974. México: UTEHA.

Grattan-Guiness, I. (1980). *From the calculus to set theory 1630-1910. An introductory history*. London, England: Duckworth.

Katz, V. J. (1998). *History of Mathematics: An Introduction*. USA: Addison Wesley.

Lagrange, J.L. (1797). *Théorie des fonctions analytiques*. Paris, France: Chez Bernard, libraire, quai des Augustins, no. 37

Lave, J. (1988). Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life. Cambridge: Cambridge University Press.

L'Hospital, A. (1696). *Analyse des infiniment petits pour l'intellignece des lignes courbes*. Paris, France: ACL Editions [reimpresión, 1988].

L'Huilier, M. (1786). *Exposition Élémentaire des Principes des Calcul Supérieurs, qui a Remporté le Prix Proposé par L'académie Royale des Sciences et Belles Lettres*. Paris, France: Académie Royale des Sciences et Belles Lettres.

Larson, R.; Hostetler, R. y Edwards, B. (1998). *Cálculo y geometría analítica*. Madrid, España: McGraw-Hill.

Lave, J. (1988). Cognition in Practice: Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life (Learning in Doing). Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Leibniz, G. W. (1692). De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concorrentibus formata. En Struik, D. J. (1969). A source book in mathematics, 1200-1800. Cambridge, Massachusetts, USA: Harvard University Press.

Leibniz, G. W. (1691). *Construction d'une voûte hemispherique quarrable*. En Oeuvre concernant le calcul infinitesimal, traducido del latín al francés por Jean Peyroux. Paris, France: Bibliothèque National. Original publicada en las Actas de Leipzig.

Leibniz, G. W. (1701). *Extrait d'une lettre de Mr. Leibniz a Mr. Varignon, (NI)*. En Oeuvre concernant le calcul infinitesimal, traducido del latín al francés por Jean Peyroux. Paris, France: Bibliothèque National. Original publicada en las Actas de Leipzig.

Leibniz, G. W. (1714). *Historia et Origo Calculi Differentialis*. The Royal Library of Hanover (1846). En The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz (1920). Chicago, USA, London, England: The Open Court Publishing Company.

Leibniz, G. W. (1684). *Reply to Nieuwentijt.* The Royal Library of Hanover (1846). En The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz (1920). Chicago, USA, London, England: The Open Court Publishing Company.

Leibniz, G. W. (1680). *The elements of the new calculus for differences and sums, tangents and quadratures, maxima and minima, dimensions of lines, surfaces, and solids, and for other things that transcend other means of calculation*. The Royal Library of Hanover (1846). En The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz (1920). Chicago, USA, London, England: The Open Court Publishing Company.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN, México.

Muñoz Ortega, Germán (2006). *Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a un campo de prácticas sociales asociadas al cálculo integral: aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos*. Tesis de doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN, México.

Ogden, C. K. y Richards, I. A. (1923). *El significado del significado*. Barcelona, España: Paidos, 1984.

Quevedo G. Filiberto (1990). *Enseñanza del cálculo integral, haciendo uso de la microcomputadora*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Quezada Batalla, María de Lourdes y Ramírez González, Roberto (1986). *Cálculo de primitivas en el bachillerato: su correlación con los algoritmos algebraicos y de cálculo diferencial*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Radford, L. (2006a). Introducción. Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial. 7-21.*

Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial. 103-129.*

Riemann, B. (1854). Représentation d'une fonction par une série trigonométrique. *Mémoires de la Societé Royale des Sciences de Göttingue, t. XIII. Traduction publiée dans le Bulletin des Sciences mathém, et astron., tome V. (Juillet 1873).*

Saldaña Acosta, Ramiro (1988). *Del Área a la integral: De la noción al concepto y de ahí a su definición. (Ensayo histórico)*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y Estudio Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Sierpinska, A. (1995). *Mathematics: "in context", "pure", or "with applications"? A contribution to the question of transfer in the learning of mathematics*. Canada: FLM Publishing Association Vancouver, British Columbia.

Spivak, Michael (1981) *Calculus*. Barcerlona, España: Reverté.

Swokowski, E. (1982). *Cálculo con geometría analítica*. EU: Wadsworth Internacional.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12 (2), 151-169.*

Taylor, B. (1715). *Methodus incrementorum directa et inversa, pp. 329-333*. En Struik, D. J. (1969). A source book in mathematics, 1200-1800. Cambridge, Massachusetts, USA: Harvard University Press.

Thomas, G., y Finney, R. (1998). *Cálculo con geometría analítica*. Buenos Aires, Argentina: Addison-Wesley Iberoamérica.

Vigotsky, L. S. (1996). *Pensamiento y lenguaje*. México: Ediciones Quinto SolVigotsky, Lev (1929). *The problem of the cultural development of the child.* En Vigotsky Reader, Blacwell 1994.

Walkerdine, V. (1988). The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality. London: Routledge & Kegan Paul.

Wilhelmi, M. R.; Godino, J.D.; y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicos asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27 (1): 77-120.

Youschkevitech, A. P. (1976). The concept of function up the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 16, pp. 37-85.