INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACION EN CIENCIA
APLICADA Y TECNOLOGIA AVANZADA

PROPUESTA DIDÁCTICA EN OPTIMIZACIÓN DINÁMICA: EL CASO DEL CÁLCULO DE VARIACIONES Y LA TEORÍA DE CONTROL

Tesis que para obtener el grado de
Doctor en Matemática Educativa

Presenta:

José del Niño Jesús Campero Pardo

Directores de Tesis:

Dra. María Trigueros Gaisman
Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

México, D.F. , Febrero de 2010

SIP-14 BIS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 17:30 horas del día 08 del mes de febrero de 2010 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis titulada:

"Propuesta didáctica en optimización dinámica: el caso del cálculo en variaciones y la teoría de control"

Presentada por el alumno:

Campero	Pardo	José del Niño Jesús
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 7 | 0 | 6 | 2 | 1 |

aspirante de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron ***APROBAR LA DEFENSA DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

Dra. María Trigueros Gaisman

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza

Dra. Gabriela Buendía Abalos

CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Guillermo Pastor Jiménez

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 17 del mes de febrero del año 2010, el (la) que suscribe José del Niño Jesús Campero Pardo alumno (a) del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A070621, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de la Dra. María Trigueros Gaisman y del Dr. Francisco Javier Lezama Andalón y cede los derechos del trabajo intitulado "Propuesta didáctica en optimización dinámica: el caso del Cálculo de Variaciones y la Teoría de Control", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

José del Niño Jesús Campero Pardo

ÍNDICE

Capítulo I

PRELIMINARES

Capítulo II

INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN

Capítulo III

BREVE ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO

Capítulo IV

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

Capítulo V

DISEÑO DE LOS INSTRUMENTOS DIDÁCTICOS

Capítulo VI

DISEÑO DE LOS INSTRUMENTOS DE VALIDACIÓN

Capítulo VII

RESULTADOS OBTENIDOS A TRAVÉS DE LOS INSTRUMENTOS DE VALIDACIÓN

ANEXOS

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo central el planteamiento y validación de una propuesta didáctica en optimización dinámica. En particular, en Cálculo de Variaciones y Teoría de Control.

La Teoría APOE comienza con una descomposición genética del concepto matemático bajo estudio, o en otras palabras, con las construcciones mentales que suponemos hacen los estudiantes para la comprensión de dicho concepto matemático. La descomposición genética para este estudio se diseñó en base a nuestra experiencia como profesores de este curso por varios años y también en los resultados de un estudio histórico-epistemológico de la optimización, en particular de la optimización dinámica y muy particularmente, en el cálculo de variaciones y la teoría de control que se llevó a cabo al inicio de la investigación que aquí se presenta. Este estudio histórico- epistemológico nos proporcionó los contextos en los que se originaron tanto el cálculo de variaciones como la teoría de control y nos proporcionó información que se utilizó en el diseño de la descomposición genética y de las actividades para la propuesta didáctica.

Una vez que hicimos la descomposición genética para el esquema de funcional, elaboramos lo que llamamos instrumentos didácticos constituidos por un conjunto de siete actividades basadas en ella y en las se buscó que los estudiantes ejercieran acciones sobre objetos conocidos por ellos y los interiorizaran en los procesos necesarios para construir el concepto de funcional y los conceptos ligados a éste por la idea de variación y que constituyen el núcleo de nuestra propuesta.

Posteriormente, elaboramos los que llamamos instrumentos de validación, cuyo objetivo fue, evaluar la propuesta presentada. Dichos instrumentos están formados por tres cuestionarios y una entrevista. En algunos casos, estos instrumentos se aplicaron los integrantes del grupo "piloto" con el que se trabajó durante todo el semestre; en otros casos, como en el caso de la entrevista, a sólo una muestra de ellos. Uno de los cuestionarios, así como la entrevista se aplicaron a una muestra del grupo "piloto" y a una muestra de un grupo con el que no se trabajó durante el semestre. Este grupo está formado por estudiantes que siguen el área teórica de la carrera de Economía, que incluye mayor formación matemática. Esto último, con la finalidad de obtener algunos indicadores extra de carácter cualitativo. No se pretendió en ningún momento hacer comparación de tipo estadístico formal.

Dentro de nuestras conclusiones, encontramos resultados positivos para la presente propuesta Didáctica, entre los que destacan: i) El hecho de que el tipo de concepción sobre todos y cada uno de los conceptos de funcional evolucionara hacia construcciones más completas para todos y cada uno de los estudiantes de la muestra del grupo piloto, ii) La aceptación general por los estudiantes de este grupo de la forma en la que el curso se desarrolló, iii) La comparación favorable al grupo piloto con respecto al grupo de Optimización, del que podrían esperarse mejores resultados dado el currículo que cursan,. Aunque esencialmente sean capaces de hacer lo mismo ambos grupos, los resultados numéricos favorecen por buen margen al grupo piloto, iv) La percepción de la profesora del grupo piloto, con amplia experiencia en estos cursos es también ampliamente favorable a la presente propuesta didáctica.

Finalmente, reportamos los resultados obtenidos, nuestras conclusiones, y describimos algunas posibilidades de profundización en aspectos que esta investigación deja abiertos para trabajos futuros.

ABSTRACT

The goal of this research study is to elaborate on and validate a didactical proposal on dynamical optimization. We are going to focus on calculus of variations and control theory.

The theoretical background for this study is APOS theory (Action, Process, Objects, Schema). We chose this theory for several reasons. The first being that within its limits the researcher has a frame to observe compare the difficulties the students have when faced to a mathematical concept with the constructions expected from the model. On the other hand, it is important to take into account that this theory has shown to be successful when it has been applied to teaching several concepts. Several research works have demonstrated that students in groups that have followed a teaching sequence based on the genetic decomposition involved in this theory for one or several concepts, show that they have a deeper knowledge of the concepts involved than students who have been taught using other didactical approaches.

In this study we present the design of a genetic decomposition. It was based on our experience as teachers of the course to be redesigned, during several years, and on the results of a historical- epistemological study which was carried out at the beginning of this study on the development of dynamic optimization, and in particular, of the Calculus of Variations and Control Theory. The historical research results involved the contexts in which both, Calculus of Variations and Control Theory originated and gave us useful information to include in the above mentioned genetic decomposition.

Once we had our genetic decomposition we designed our didactical tools, constituted by a set of seven activities that were designed following the constructions model provided by the genetic decomposition; that is, in each activity opportunities for students to perform actions and interiorize them into processes were provided; to help them construct the mathematical concept of functional and those others linked to it through the idea of variation. These activities are the nucleus of our proposal.

Then, validation instruments were designed to be able to assess the didactical proposal presented in this study. Those instruments are three questionnaires and questions for a semistructured interview. These instruments were used with all the students of the pilot group while the course was developed in the semester. Other instruments, as the interviews, were used with a simple of students who were not part of the pilot group and who did not use the didactical proposal. These last students are also in the Economics program but in a theoretical line characterized by more exposition to Mathematics courses. The purpose of interviewing these last students was to obtain some indicators to compare students learning of the concepts and to evaluate the didactical proposal; there was no intention to carry out a statistical analysis of the data.

Both the didactical and the evaluation tools' design were based on the genetic decomposition.

Conclusions that can be obtained from the results of this research study are, in general, positive for the didactic proposal. We can mention as some of the most important ones: i) The fact that conceptions of all students in the pilot group regarding all the concepts involved in the proposal related to the concept of functional evolved into richer conceptions, ii) The proposal, in terms of how the course was taught, had a good acceptance by students in the pilot group, iii) The comparison between the pilot group and the Optimization group was favorable to the first one, even though it could be expected the contrary to happen given the curriculum followed by the students in the optimization group. Even though students in both groups seem to show similar conceptions, the numerical results favor students of the pilot group, iv) The teacher of the pilot group, who had a lot of experience teaching these courses, had also a favorable perception of how the didactic proposal worked.

Finally we report our results and we come up with some conclusions. The conclusions open up the possibility for further research.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN, OBJETIVO Y ANTECEDENTES

1.1 INTRODUCCIÓN

Después de haber dedicado más de veinte años a la enseñanza de las Matemáticas en el nivel superior, principalmente a través de cursos de Cálculo Diferencial e Integral y en cursos de Matemáticas Aplicadas a la Economía en donde se estudian temas de Cálculo en Variaciones y Teoría de Control, he podido percibir tanto algunas dificultades que surgen con la presentación de estos temas, como algunos elementos que facilitan un aprendizaje más efectivo y profundo de los mismos.

Uno de mis principales intereses ha sido el de tratar de presentar los conceptos de los cursos que he impartido dentro de un contexto cercano a la realidad del estudiante. Aquí recuerdo lo que afirmaba el gran filósofo español José Ortega y Gasset: "Para que yo entienda de verdad una ciencia, no basta con que tenga la voluntad de estudiarla. Es preciso que sienta auténticamente su necesidad; sólo así entenderé las soluciones que ella da o pretende dar a estas cuestiones. Mal puedo entender una respuesta cuando no he sentido la pregunta a que ella responde", y luego continúa: "Es preciso volver del revés la enseñanza y decir: enseñar no es primaria y fundamentalmente sino enseñar la necesidad de una ciencia y no enseñar la ciencia cuya necesidad es imposible hacer sentir al estudiante". Ortega, (1986, p.38)

Uno de los objetivos centrales y que constituyen un común denominador a todos los cursos antes mencionados, es el tema de la Optimización. Siguiendo la sugerencia de Ortega y Gasset, al introducir el tema de Optimización, tanto en los cursos de Cálculo diferencial e integral como en aquellos donde aparecen elementos de Cálculo de Variaciones o de Teoría de Control, sería conveniente empezar presentando problemas de optimización, en contexto que puedan ser interesantes para los estudiantes de la carrera de Economía del ITAM.

En el ITAM los cursos para estudiantes de la carrera de Economía en los que aparecen elementos de Cálculo de Variaciones y Teoría de Control son: Matemáticas Aplicadas a la Economía y Optimización. En el primer curso mencionado, se estudian en una primera parte sistemas dinámicos continuos y discretos (ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias) y en una segunda parte (que representa menos de la mitad del semestre) se estudian algunos conceptos elementales de Cálculo de Variaciones y Teoría de Control. (Ver temario en el anexo B). El segundo curso mencionado se centra únicamente en el estudio de los conceptos de Optimización, en particular en Cálculo de Variaciones y Teoría de Control y está dirigido a los estudiantes de la carrera de Economía que escogen el área teórica. Antes de llevar este curso, estos alumnos llevan un curso (semestre completo) de Sistemas Dinámicos.

Generalmente, los estudiantes que cursan estas materias, están en el quinto o sexto semestre, pues tuvieron que haber aprobado tres cursos de Cálculo, uno de Álgebra Lineal y en la gran mayoría de los casos un curso de pre-cálculo.

Durante los últimos años, nos ha tocado impartir varias veces el curso de Matemáticas Aplicadas a la Economía a estudiantes de esta carrera. Anteriormente, habíamos impartido los cursos de Cálculo, en los que el tema de Optimización es relevante. Sobre el tema de Optimización que aparece en los diferentes cursos de Cálculo, en su momento, llevé a cabo algunos proyectos de investigación (Campero, 1991, Campero, 1992, Campero, 1993, Campero, 1994), Campero, 1995).

Sin embargo, hay un salto cualitativo entre lo que es la Optimización que se ve en los cursos de Cálculo, que estarían dentro de la llamada Optimización estática, ya que se busca optimizar en un instante, por lo que el tiempo no es una variable relevante. En Optimización Dinámica, en particular en el Cálculo de Variaciones y la Teoría de Control, se busca optimizar a través del tiempo, por lo que no se encuentran soluciones de puntos óptimos, sino de trayectorias óptimas. Evidentemente, el cambio no es trivial y generalmente, a los estudiantes les presenta varias dificultades.

Como detallaremos al hablar del objetivo de este trabajo de investigación, la finalidad que tiene es proponer y validar una propuesta didáctica para los conceptos que se ven en Cálculo de Variaciones y Teoría de Control dentro del curso de Matemáticas Aplicadas a la Economía. Básicamente, los conceptos serían específicamente: el concepto de funcional que es básico y otros conceptos relacionados con él a través de la idea de variación y que específicamente serían: la primera y segunda variación y las condiciones de transversalidad. Evidentemente, la propuesta didáctica busca ayudar a los estudiantes a construir de manera más eficiente los conceptos mencionados que aparecen en el curso de Matemáticas Aplicadas a la Economía.

1.2 OBJETIVO

Debido a lo expuesto en la introducción, el objetivo central del presente trabajo de investigación es el planteamiento y validación de una propuesta didáctica en Optimización Dinámica. Concretamente, la Propuesta Didáctica se desarrolló en torno al problema de optimización en Cálculo de Variaciones y Teoría de Control y lo que pretende es ayudar a los estudiantes a construir el concepto de funcional y demás conceptos ligados a él por la idea de variación, que son esenciales para resolver cualquier problema de Optimización Dinámica. En este trabajo, la dimensión epistemológica tendrá un lugar importante, ya que a partir del análisis histórico-epistemológico, descubrimos tanto el contexto en el que surgen dichas disciplinas, así como su desarrollo, además de servir de base para proponer una descomposición genética inicial. También, esta investigación, nos permitirá detectar algunas de las principales dificultades que tienen los estudiantes a través del análisis sobre las construcciones que elaboren sobre cada uno de los conceptos bajo estudio mencionados en este párrafo.

Una vez llevada a cabo la investigación histórico-epistemológica, pasaríamos a analizar los elementos necesarios para alcanzar el objetivo central.

Para alcanzar el objetivo central recién mencionado necesitamos contestar las siguientes preguntas:

i) Partiendo de la base de que tanto el Cálculo de Variaciones como la Teoría de Control se fundamentan en el concepto de funcional y conceptos relacionados con éste por la idea de variación, que serían básicamente: concepto de primera y segunda variación y condiciones de transversalidad ¿Qué conceptos previos debe tener un estudiante para abordar exitosamente el concepto de funcional y conceptos asociados a éste por la idea de variación?

ii) Debido a que el objetivo central es proponer y validar una propuesta didáctica, la Teoría APOE podría ser un marco teórico ideal (cuando revisemos marco teórico la detallaremos), ya que con este marco, el investigador puede comparar las dificultades de un estudiante sobre un concepto matemático cualquiera, con las construcciones mentales que dicho estudiante pueda haber hecho o le falten por hacer. Entonces, la siguiente pregunta sería: ¿Qué construcciones mentales realizan los estudiantes cuando siguen una propuesta didáctica basada en el marco teórico y cuando no la siguen?, ¿Cuáles quedan pendientes? y ¿Cuáles son los mecanismos cognitivos asociados a la construcción del concepto de funcional y de los conceptos asociados a él por la idea de variación?

iii) ¿Es posible diseñar una propuesta didáctica basada en un modelo epistemológico que permita a los estudiantes elaborar dichas construcciones?

De estos incisos, se desprenden los siguientes Objetivos particulares:

i) Diseño de una descomposición genética preliminar (detallaremos su significado en marco teórico) de los conceptos bajo estudio. (Funcional, primera y segunda variación y condiciones de transversalidad). Esta descomposición genética preliminar estará basada en nuestra experiencia previa en los cursos en que se estudian estos conceptos y en el análisis de la evoluvión histórica de dichos conceptos. (En el ITAM serían el curso de “Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Económicas”y “Optimización”).

ii) En base a la descomposición genética mencionada en el inciso anterior, diseñar y aplicar tanto los instrumentos didácticos para ayudar a los estudiantes a construir los conceptos bajo estudio, como los instrumentos de validación, para determinar el tipo de concepción que tienen dichos estudiantes sobre los conceptos bajo estudio y llevar a cabo una comparación con alumnos que llevaron un curso tradicional mediante una entrevista.

iii) Llevar a cabo un análisis de los resultados obtenidos a través de los instrumentos de validación y si fuera necesario, presentar una descomposición genética refinada como resultado de dicho análisis.

iv) Presentar algunas sugerencias para el estudio del concepto de funcional y conceptos ligados a él por la idea de variación.

El objetivo central, junto con los objetivos particulares y el marco teórico, inducen un orden para desarrollar el presente trabajo de investigación, dicho orden se corresponde con el orden que aparece en el índice.

1.3 ANTECEDENTES

Antes de iniciar propiamente nuestro trabajo, revisamos algunos sitios* y consultamos profesores dentro del área de la Matemática Educativa para determinar lo que se había escrito respecto al tema que es el objeto de nuestro trabajo de investigación.

En particular, revisamos los siguientes sitios*:

- Dentro de la página del CLAME (Congreso Latinoamericano de Matemática Educativa), buscamos en el índice correspondiente a presentaciones dentro de las veintiun Reuniones Latinoamericanas en Matemática Educativa.

- Dentro de la página del ICME (International Congress in Mathematical Education), buscamos en el índice correspondiente a presentaciones dentro de las Reuniones internacionales que han tenido.

Además, hemos preguntado a Profesores del Area de Matemática Educativa, con gran experiencia en este tema, dentro del ITAM y del CICATA del IPN.

En ninguno de dichos sitios, encontramos referencias al respecto. Los profesores consultados no creen haber visto publicado algún trabajo sobre el tema propuesto en el presente trabajo de investigación. Mencionaron que en Ecuaciones Diferenciales, que es un tema muy cercano al Cálculo de Variaciones y a la Teoría de Control, debido a que en particular, las condiciones necesarias de primer orden en estas disciplinas que forman parte de la Optimización Dinámica se expresan por medio de Ecuaciones Diferenciales de por lo menos órden dos, existen varios y muy interesantes trabajos de investigación, que sería muy útil revisar, pues son herramienta indispensable para desarrollar eficientemente los temas de Optimización Dinámica, tanto en Cálculo de Variaciones como en Teoría de Control. Pero, directamente sobre los temas de estudio en estas dos disciplinas, no conocían ninguno que se hubiera publicado hasta ahora.

La falta de antecedentes directos hace de este trabajo una aportación original a la literatura en educación matemática. Los antecedentes indirectos de este trabajo están relacionados sobre todo con trabajos realizados en el marco de la Teoría APOE que proporcionan elementos para considerar que una propuesta didáctica basada en esta teoría pueda ser exitosa en términos del aprendizaje de los estudiantes. Como ejemplo de artículos relacionados con el éxito de la Teoría APOE en el diseño de cursos, podríamos mencionar los siguientes: Weller, K., Clark, J.M., Dubinsky, E., Loch, S., Mc. Donald, M. y Merkowsky, R., 2003, Weller, K., Clark, J.M., Dubinsky, E., Loch, S., Mc. Donald, M. y Merkowsky, R., 2000, Salgado, H. y Trigueros M., 2009, Salgado, H.M., 2007.

CAPÍTULO II

CLASIFICACIÓN Y BOSQUEJO HISTÓRICO-GLOBAL DE LA OPTIMIZACIÓN

2.1 Clasificación de los problemas de optimización que se estudian en la carrera de Economía del ITAM

Con el fin de ubicar en primer término a la Optimización Dinámica dentro de la Optimización en general, y en segundo término al Cálculo de Variaciones y a la Teoría de Control dentro de la Optimización Dinámica, presentaremos a continuación este resúmen. Consideraremos, básicamente aquellas materias de optimización que se imparten en la licenciatura en Economía en el ITAM.

Podríamos decir de forma muy general y esquemática, que la optimización puede clasificarse de acuerdo al siguiente cuadro:

$$Optimización\begin{cases} Estática \\ Dinámica\begin{cases} continua \\ discreta \end{cases} \end{cases}$$

La optimización estática prescinde del tiempo, resuelve problemas de optimización como si únicamente fuéramos a vivir un instante. Se inició formalmente con los griegos y desde un punto de vista escolar, tiene que ver con los problemas de optimización que se ven en los cursos de Cálculo, tal como lo he mencionado párrafos atrás.

La optimización dinámica, como su nombre lo indica, estudia la optimización de sistemas que evolucionan en el tiempo. Dado un sistema que evoluciona en el tiempo, se trata de guiar o controlar el sistema de manera óptima a lo largo de un horizonte temporal dado, de acuerdo a un objetivo previamente fijado.

La optimización dinámica involucra, entonces, la dimensión temporal, no pregunta por un punto óptimo, sino por la trayectoria óptima. Tiene raíces en el cálculo de variaciones, la teoría clásica de control y la programación lineal y no lineal, por lo que éstas ramas de la optimización se estudiarán más a fondo. Sin embargo, por ahora, haré sólo un breve resumen que permita ubicarlas globalmente.

El cálculo de variaciones surgió en el siglo XVIII y recibió en los trabajos de Euler (1707-1783) y de Lagrange (1736-1813) la forma de una teoría matemática rigurosa. Podríamos considerar un origen análogo para la Teoría de Control, que constituye una generalización al Cálculo de Variaciones.

Sin embargo y debido al salto cualitativo entre las llamadas “Optimización Estática”y “Optimización Dinámica”y con el fin de ubicarlas adecuadamente, continuaremos con un resúmen donde en primer lugar hablaremos sobre lo que es la Optimización en general, para después ver la diferencia esencial entre los dos tipos de Optimización y terminaremos hablando de algunos saltos cualitativos que haya tenido este tema a lo largo del tiempo. Debido a la amplitud del tema, nos restringiremos a los tipos de Optimización que se presentan en los distintos cursos de Matemáticas dentro de la licenciatura de Economía en el ITAM.

2.2 BREVE BOSQUEJO HISTÓRICO DE LA OPTIMIZACIÓN

La cumbre del saber matemático encuentra una de sus máximas expresiones en la Teoría de la Optimización. Esta Teoría, estudia el cómo describir y cómo definir lo que es mejor, una vez que se conoce algún criterio que sirva de base de comparación.

La Optimización tiene, por decirlo así, dos enfoques, uno optimista y otro pesimista. En el punto de vista optimista se desea maximizar algún objetivo, mientras que desde el punto de vista pesimista, el objetivo sería minimizar las pérdidas.

La Optimización se ha vuelto un término técnico que tiene que ver con medidas cuantitativas y análisis matemático, mientras que decir "mejor", permanece como un término con menor precisión. El verbo técnico "optimizar"se refiere al acto de optimizar y no solamente a llegar a ese óptimo.

Muchas decisiones en nuestros días se toman escogiendo medidas cuantitativas de efectividad y optimizándolas bajo algún criterio. Decidir cómo diseñar, construir, regular, operar un sistema físico o económico involucra idealmente tres etapas: primero, uno debe conocer cualitativa y cuantitativamente cómo interactúan las variables, segundo, uno requiere de una medida sencilla sobre la efectividad de un sistema expresable en términos de las variables de dicho sistema. Finalmente, uno debe escoger aquellos valores del sistema de variables que nos conduzcan a una efectividad óptima. Así, la optimización y la elección están estrechamente relacionadas.

El primer paso, el conocimiento del sistema, es de importancia capital, por lo que el tomador de decisiones tendrá que estar muy bien asesorado por un profesional calificado como puede ser un Matemático, un Físico, un Ingeniero ó un Operador analista.

Desde el punto de vista de la enseñanza en el aula, sabemos que los cursos de Cálculo abordan el tema de Optimización (en una ó en varias variables) desde un punto de vista "estático", es decir, se obtiene la solución óptima bajo algún criterio, pero suponiendo implícitamente que solamente vivimos "un instante". En dichos cursos se estudian los famosos teoremas "de condición necesaria"de primer orden y los de "condición suficiente"de segundo orden. En cálculo con funciones de una variable, el teorema de condición necesaria de primer orden afirma que si una función derivable alcanza un extremo relativo en un punto interior de su dominio, entonces la derivada evaluada en dicho punto vale cero. La generalización a varias variables afirma lo mismo para cada una de las derivadas parciales en dicho punto interior.

El teorema de condición suficiente de segundo orden para funciones de una variable está íntimamente conectado por el concepto de concavidad o convexidad de una función y que está determinado por la derivada de segundo orden. La generalización a varias variables se hace mediante un análisis de la matriz "Hessiana"formada por las derivadas de orden dos.

Después de haber estudiado problemas "estáticos"de optimización en una y varias variables, a los estudiantes de Economía del ITAM, se les presenta en un curso de

Cálculo de varias variables el problema de optimizar una función “objetivo”pero sujeta a restricciones en forma de igualdad, con lo que el problema de optimización permanece esencialmente estático. En este caso se usa el método de los “Multiplicadores de Lagrange”, que se presenta y justifica desde un punto de vista geométrico, por lo que las funciones tienen únicamente dos variables independientes.

De aquí surgen de una manera natural las condiciones necesarias de primer orden y las condiciones suficientes de segundo orden representadas mediante el Hessiano orlado que no es otra cosa que el Hessiano definido anteriormente, añadiéndole columnas (renglones) llamadas orlas, una por cada restricción.

En el ITAM, en un curso de Álgebra Matricial, a los estudiantes de la carrera de Economía se les presenta el método Simplex de Programación Lineal, debido al gran Matemático George Dantzig y del que más adelante hablaré con más profundidad. En general, a los estudiantes se les define un problema de Programación Lineal como aquel en el que se quiere optimizar una “función objetivo”que es lineal, sujeta a restricciones en forma de desigualdad también lineales.

.

Dentro de los problemas que observo en la presentación de estos temas, uno, a mi juicio importante, es que se ven como temas aislados, no se ve el común denominador que existe entre ellos. La situación se complica pues lo que tiene que ver con Programación Lineal y el Método Simplex se ve en Álgebra y no en Cálculo y por otro lado, en los problemas de optimización que se presentan tanto en Cálculo de Variaciones como en Teoría de Control, las condiciones necesarias de primer orden se reducen a resolver ecuaciones diferenciales, que de entrada no se asocian con la solución de problemas de optimización.

Aunado a lo anterior, el hecho de presentar problemas de optimización generalmente con un máximo de dos variables, simplifica en exceso la situación real, por lo que, en principio, deberíamos presentar problemas reales, dentro de su contexto natural, con el fin de que el estudiante pudiera apreciar su verdadera complejidad.

Un simple ejemplo puede servir para ilustrar la dificultad fundamental de encontrar una solución a un problema de planeación una vez que es formulado.

Podemos considerar el problema de asignar 70 trabajos a 70 personas. Supongamos que podemos asignar un valor de beneficio v_{ij} si la i-ésima persona es asignada al j-ésimo trabajo.

Una actividad consiste en dicha asignación de la i-ésima persona al j-ésimo trabajo. Las restricciones son:

i) Cada persona debe tener asignado un trabajo (hay 70 trabajos).
ii) Cada trabajo debe ser ocupado. (También hay 70).

Puede definirse el nivel de una actividad mediante una función característica en donde su valor sería 1 si la i-ésima persona estuviera asignada al j-ésimo trabajo y 0 en el caso contrario.

De esta forma, podemos observar que hay 2 x 70 = 140 restricciones, 70 x 70 = 4900 actividades con 4900 variables de decisión que se corresponden con unos ó ceros.

Existen 70! diferentes posibles soluciones o formas de asignación entre ambas variables. Pero el problema mayor es comparar éstas 70! entre sí, para seleccionar la que brinda la máxima suma de beneficios de dichas asignaciones.

Para darnos una idea de la dimensión de este problema, tenemos que ubicar en primer lugar, la dimensión del número 70!, que es mayor que 10^{100}. Para tener una idea más precisa sobre la dimensión de este número, supongamos que tenemos una computadora capaz de llevar a cabo un millón de cálculos por segundo, y que la tuvimos disponible cuando el Big-Bang ($15 \, x \, 10^{9}$ años antes). ¿Podría haber sido capaz de poder ver las 70! combinaciones para el año 1990? La respuesta es ¡no! Supongamos ahora que la computadora pueda llevar a cabo los cálculos cada nano-segundo. ¡Pues todavía no podría hacerlo! Incluso, si la tierra se llenara con tales computadoras, todas trabajando paralelamente, ¡la respuesta seguiría siendo negativa! Si igualmente hubiera 10^{40} tierras circulando al sol, cada una de ellas llena de sólidas computadoras con la velocidad descrita antes y desde el Big-Bang a cuando el sol se enfríe, entonces, quizá, la respuesta pueda ser que sí.

Ante la situación antes descrita, un estudiante podría afirmar que es un problema imposible de resolver y por lo tanto cualquiera que se le equipare resulta también de imposible solución. Entonces, ¿para qué tratar de resolver problemas como los que tienen los gobiernos de todos los países a diario, como el de la distribución óptima de recursos, o cualquier otro similar?

Esta era la situación a mediados del siglo pasado, antes de que Dantzig propusiera un modelo. Dantzig afirma que la falta de tecnología (Computación en particular) es la causa de que este tipo de problemas no se hubieran estudiado mucho antes, sin embargo, como él mismo opina, toda la tecnología, incluida la computación no es suficiente para resolver este problema. Desde luego, son condiciones necesarias, pero no suficientes.

Dantzig afirma que la computación hay que usarla inteligentemente, por lo que antes de usar la computadora habría que formular un modelo y desarrollar buenos algoritmos. Y agrega que para construir un Modelo, se requiere la axiomatización de una materia. Esta axiomatización, debe llegar a construir una nueva disciplina matemática.

Otro de los hechos importantes que podemos rescatar del ejemplo anterior es el de que las matemáticas aparecen siempre dentro de un contexto real que es importante estudiar para que, basados en la investigación histórica que abarca su origen y génesis, nos ayuda en la búsqueda de un discurso más cercano al estudiante, tal y como lo afirmamos al principio de esta introducción.

La optimización ha sido vista también desde un punto de vista filosófico, por ejemplo en 1710 Leibniz usa la palabra “óptimo”en su “Teodicea: ensayo sobre las bondades de Dios, la libertad del hombre y el origen del pecado”Beighter., Douglass, (1967, p.4). Independientemente de sus conclusiones teológicas y metafísicas, que están fuera de los objetivos de este trabajo, su línea de investigación ilustra bien el papel que juega la optimización tanto en el análisis como en la síntesis. Leibniz, continuó buscando verdades filosóficas a través de las matemáticas, especuló sobre la naturaleza del mundo, así como sobre su creación, que en nuestro lenguaje es parte de la “síntesis”.

El reconocido matemático Leonhard Euler (1707-1783) también manifestó puntos de vista filosóficos optimistas, como por ejemplo cuando escribe: “El mundo es la fábrica más perfecta que se haya establecido por el Creador”y continúa: “No sucede nada en este mundo en que por alguna razón no aparezcan los conceptos de máximo y de mínimo”Beighter, et al. (1967, p.5)

Esta afirmación de Euler, la podríamos poner en lenguaje moderno de la siguiente manera en los cursos tradicionales de Cálculo:

“El Cálculo es la parte de las Matemáticas que estudia el cambio y la razón de cambio”y por otro lado continuar: “y el cambio es la única constante en la vida”, para concluir: “Los máximos y mínimos aparecen en todos los contextos humanos”.

Desde Esopo hasta George Ade, pasando por Tomás de Iriarte y Félix María de Samaniego, el hombre ha deducido reglas que sirven para construir sus fábulas y parábolas. Esas historias, abstracciones del mundo real, ponen su foco en detalles mundanos buscando que la atención se centre en la situación bajo estudio.

En cierto sentido, los problemas de optimización pueden verse como fábulas matemáticas, abstracciones que simplifican las situaciones reales.

Al revisar la historia de la Optimización, podemos apreciar que antes de la aparición del Cálculo en el siglo XVII, no había instrumentos “dinámicos”para medir el cambio y la razón de cambio. Cuando surge el Cálculo en el siglo XVII, se desarrollan los conceptos de derivada e integral que podemos considerar instrumentos “dinámicos”porque sirven para medir la razón de cambio y el cambio respectivamente. Por esta razón podríamos definir al Cálculo como la parte de las Matemáticas que estudia el cambio y la razón de cambio. Debido a que la única constante que hay en la vida es el cambio, el Cálculo se convirtió en piedra angular para prácticamente todas las ciencias y disciplinas donde el cambio está presente.

Dentro de la historia de las Matemáticas podemos apreciar la forma y el tiempo en que fueron gestándose sus distintas ramas. La que apareció primero fue la Geometría, quizá debido a su cercanía con el hombre. En cierto y muy limitado sentido el hombre es una “computadora geométrica”, pues distingue a otras personas o cosas por su forma, sin llevar a cabo ningún proceso racional. Así como las computadoras nos ayudan a resolver en particular complicados problemas algebraicos en instantes de tiempo, la persona humana lo hace con el aspecto geométrico de las cosas. Así los egipcios desarrollaron una Geometría primitiva que les permitía resolver algunos de sus problemas cotidianos, como por ejemplo, el deslinde de tierras, pues con cierta frecuencia el río Nilo o el Tigris y Éufrates (en Mesopotamia) se desbordaban.

Los griegos, se distinguieron por ser un pueblo de pensadores profundos, que no se conformaban con resolver problemas, sino querían conocer el por qué de las cosas. No es de extrañar entonces, que la Geometría se llegara a desarrollar “plenamente”en el sentido de quedar axiomatizada, desde Euclides (siglo III a.c.).

Después de la cultura griega, la tradición pasó a los romanos. Este pueblo que dio excelentes juristas, artistas y guerreros, se caracterizaba por ser pragmático, por lo que matemáticamente hablando, lo más grande que hicieron fue llevar la cultura matemática griega a todo el mundo conocido hasta entonces.

A la caída del imperio romano (siglos V y VI, d.c.) la tradición matemática pasó a los Hindúes y a los Arabes. Estos pueblos, también pragmáticos, pero con inclinaciones hacia el comercio y los negocios, le dieron más importancia al desarrollo del Álgebra que al de la Geometría.

Después del invento de la imprenta por Gutenberg y la aparición de las primeras universidades (Padua, Cambridge, Oxford, París) a lo largo del siglo XII, la humanidad se preparaba para un cambio global que "se destapa"a partir del siglo XV en la ciudad italiana de Florencia. A esta época, que abarca los siglos XV y XVI se le conoce con el nombre de Renacimiento. La imprenta y las universidades globalizan el conocimiento. A fines del siglo XVI, con los trabajos de los matemáticos italianos Tartaglia, Cardano y Ferrari que encuentran las fórmulas para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grados el Álgebra llegó a un gran nivel de desarrollo. (Nunca se pudo axiomatizar como la Geometría, pese a los intentos del gran matemático francés Galois[1]).

Una vez desarrolladas la Geometría y el Álgebra, Descartes (siglo XVII) unió la potencialidad de ambas fundando la Geometría Analítica que resultó un parteaguas en la historia de las matemáticas y permitió la aparición unos años más tarde del Cálculo (Newton y Leibniz), considerada como la cima del pensamiento matemático.

Es interesante por otra parte hacer notar un cierto paralelismo en el desarrollo histórico de las matemáticas con el aprendizaje individual de estas. El camino es claro: empieza con la Geometría que la aprende rápidamente, después el álgebra que le da mucho más trabajo (hasta el siglo XVI llega a un desarrollo importante comparado con la Geometría que es axiomatizada desde el siglo III a.c.), después y conociendo tanto a la Geometría como el Álgebra de manera natural aparece la Geometría Analítica que es el antecedente matemático del Cálculo.

Por lo tanto, los problemas de optimización que aparecieran antes del siglo XVII sólo podían resolverse con los instrumentos proporcionados por la Geometría y el Álgebra. Evidentemente, el desarrollo de las soluciones a dichos problemas fue muy limitado.

Inmediatamente después de la aparición del Cálculo y debido a la gran complejidad de los conceptos manejados en él, la solución a dichos problemas continuó limitada, pese a que formalmente existían las herramientas adecuadas para resolverlos.

En el siglo XVIII, Lagrange establece un método para resolver problemas de optimización sujetos a restricciones en forma de igualdad. Este método es conocido como "Método de los multiplicadores de Lagrange". Desde luego, con la aparición de este método pueden resolverse más problemas de optimización y de una manera más eficiente.

[1] Ver por ejemplo la novela: "El elegido de los dioses", de la editorial siglo XXI, que en forma novelesca presenta una biografía de Galois.

El método de los multiplicadores de Lagrange, será retomado en el siglo XX por los matemáticos Kühn y Tucker, quienes utilizando este método plantean las condiciones necesarias para resolver problemas de optimización con restricciones de desigualdad, no lineales. Hablaremos más de este tema cuando veamos Programación no lineal. Posteriormente y como veremos más adelante, los trabajos Lagrange serán un pilar en la formalización del Cálculo de Variaciones.

Podemos considerar entonces, un primer salto cualitativo para resolver problemas de optimización, cuando aparece el Cálculo y se utiliza a la derivada como un instrumento para medir la razón de cambio instantánea entre dos variables relacionadas funcionalmente. Un segundo salto cualitativo se da con la aparición del método de los multiplicadores de Lagrange.

Sin embargo, creemos que el gran salto cualitativo para resolver problemas de optimización se da hasta casi mediados del siglo XX, en parte, debido como afirmaba Dantzig a la gran revolución tecnológica (particularmente en computadoras) que hubo a partir de ese siglo y en la que aún estamos inmersos.

A partir de entonces, las técnicas de optimización han crecido a un ritmo que pocos años atrás se hubieran considerado imposible y por consiguiente la aparición de ramas de la Optimización también han crecido a un ritmo similar.

Sin embargo, como también afirmó Dantzig, la tecnología por sí sola no es suficiente. Se requiere de usar la inteligencia para organizar y descartar en su caso muchas respuestas que por distintas razones no podrían satisfacer las condiciones de óptimo.

Es quizá con Dantzig y su uso inteligente de la tecnología del siglo XX, muy particularmente de la computadora que se da un parteaguas en la historia de la Optimización.

Debido a lo anterior, después de detallar el objetivo general, los objetivos particulares y las preguntas de investigación del presente trabajo, iniciaremos nuestra investigación histórico-epistemológica sobre Optimización a partir de Dantzig y el desarrollo de su trabajo en Programación Lineal, porque es a partir de su trabajo principalmente, y desde luego apoyados en el trabajo de otros matemáticos como Newton, Lagrange, y Johann Bernoulli, que se desarrollan el Cálculo de Variaciones y la Teoría de Control.

Después de Dantzig se da un intenso desarrollo de la Optimización. Basados en el trabajo del propio Dantzig y apoyados en el Método de Lagrange, surgen las condiciones de Kühn-Tucker para resolver problemas de optimización con restricciones de desigualdad no lineales que forman parte de lo que llamamos Programación no lineal. Este desarrollo sigue hasta nuestros días. En particular, el propio Dantzig trabajando en el Pentágono durante la II Guerra mundial, requería de instrumentos de Optimización Dinámica, es decir, no le bastaban soluciones óptimas en un instante, sino trayectorias solución óptimas. En base al trabajo de Johann Bernoulli (finales del siglo XVII), Lagrange (siglo XVIII), Dantzig, Kühn, Tucker, Pontryagin, Boltiansky (todos ellos de la segunda mitad del siglo XX) y otros matemáticos famosos de la época surgen dos ramas (entre otras) de la Optimización Dinámica: el Cálculo de Variaciones y la Teoría de Control, a las que dedicaremos una atención especial, pues contienen los conceptos bajo estudio en el presente trabajo de investigación.

CAPÍTULO III

BREVE ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO

3.1 PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Como muchas otras ramas de las Matemáticas, la Programación Matemática se origina de sus aplicaciones. La diferencia que hay con otras ramas de las Matemáticas es que no tenemos que irnos centurias atrás, pues la Programación Matemática tiene su origen a partir de mediados del siglo XX. Esto puede resultar sorpresivo pues la Optimización es un problema muy natural, tanto en teoría como en la práctica.

Durante miles de años la humanidad ha buscado soluciones para sistemas de ecuaciones, buscando, por ejemplo ajustar las observaciones astronómicas en Babilonia, o para determinar precios en el mercado chino de la comida, o para calcular posiciones y velocidades de partículas. Estos problemas han contribuido al crecimiento de varias ramas de las Matemáticas, como Álgebra, Teoría de los Números y Métodos Numéricos.

Mientras que resolver una variedad de tipos de ecuaciones para los matemáticos fue central, resolver desigualdades ha tenido sólo un interés marginal. No se había puesto una atención sistemática a esta cuestión, ni se había planteado lo que quiere decir encontrar "soluciones óptimas".

Solamente encontramos casos aislados como sucedió con Fourier quien introdujo desigualdades a la Mecánica y relacionó el equilibrio mecánico a un tipo de multiplicadores duales introducidos por Lagrange para restricciones de igualdad.

Fourier también describió un método de eliminación sistemática para resolver desigualdades lineales, similar (pero mucho más complicado) al método de eliminación Gaussiano que era aplicado por los chinos antes de nuestra era.

Otra excepción la constituyen Farkas, que también aplicó desigualdades en Mecánica y Minkowski que las necesitó para su importante Geometría de números. Pero, no fue sino hasta los años 40´s del siglo XX cuando se dio atención a este tema y su motivación fueron las aplicaciones.

La Optimización prosperó más cuando el ambiente era de competencia, donde cada investigador trataba de hacer las cosas mejor que el otro. Obviamente una situación de guerra (segunda guerra mundial) y posteriormente la necesidad de industrialización que requería de competencia económica requirió las más avanzadas técnicas de optimización.

Los pioneros que hicieron posible su desarrollo fueron George Dantzig en Washington y Leonid Kantorovich en Leningrado. Ellos ilustran muy bien las fuentes de aplicación. Dantzig estaba trabajando en el Pentágono, ocupado del problema de asignación de recursos para la fuerza aérea de Estados Unidos, mientras que Kantorovich buscando resolver también un problema de asignación de recursos, pero en un contexto muy diferente, en este caso era el contexto económico motivado por el plan Soviético para la Economía. Koopmans y Hitchcock también tomaron parte en el desarrollo del Modelo de Planeación.

La profundidad de estos pioneros tanto en el aspecto teórico como práctico de este nuevo campo fue de decisiva importancia. Ellos inspiraron a un grupo de otros científicos a participar en la construcción de este nuevo campo. Nombres como Arrow, Beale, Charnes, Cooper, Gale, Goldman, Hoffman, Kühn, Von Neumann, Orchard-Hays, Orden, Tucker, Wagner, Wolfe,... se asocian con los desarrollos en este campo.

A partir de los 40´s y 50´s se llevó a cabo una gran actividad de investigación y es entonces, cuando la Programación Matemática fue transformada en una sólida disciplina tanto dentro de las Matemáticas como en la Administración y la Economía.

Matemáticamente, una rica variedad de teoremas y teoría estaba esperando a ser descubierta, así como un estudio extensivo de conceptos tales como sistemas de desigualdades, poliedros y dualidad. La teoría de la convexidad es en nuestros días una extensión de la optimización.

Este nuevo campo, hizo uso de antiguas ramas de las Matemáticas a las que, al mezclarse, las llevó a un alto nivel de sofisticación en un pequeño período.

Prácticamente, el método Simplex, desarrollado por Dantzig, hizo posible resolver problemas de optimización a gran escala en diferentes tipos de problemas como de transporte, producción y horarios. Es más, la Programación estimuló el estudio de fenómenos económicos tales como equilibrio y precios-sombra; y por supuesto, tuvo interacción con la nueva tecnología de computadoras. Las computadoras permitieron la aplicación del Método Simplex a grandes problemas, mientras que por otro lado ayudaron a encontrar problemas numéricos que pueden ocurrir en cálculos en la computadora y vitalizaron la solución de dichos problemas.

En la introducción afirmamos que las computadoras por sí mismas no podrían resolver muchos problemas reales y que Dantzig afirmaba que había que usar con inteligencia esta maravillosa herramienta tecnológica. Más aún, afirmó que en primer lugar se requería construir un Modelo y desarrollar buenos algoritmos, y que para construir un Modelo se requiere la axiomatización de una materia. A continuación profundizaré en lo dicho.

A mediados de 1947, Dantzig formuló su Modelo representando satisfactoriamente las relaciones tecnológicas generalmente encontradas en la práctica. Decidió que las “reglas ad hoc”debían ser descartadas y reemplazadas por una función objetivo. Formuló el problema de Planeación en términos matemáticos usando un conjunto de axiomas. Los axiomas concernientes a las relaciones entre dos clases de conjuntos: el primero, formado por las unidades que deben ser producidas o consumidas y el segundo formado por las actividades o procesos de producción en los cuales las unidades del primer conjunto deben entrar en proporciones fijas. El sistema resultante resolvió el problema de minimizar una forma lineal sujeta a ecuaciones y desigualdades lineales. El uso de una forma lineal como función objetivo fue una novedad dentro del Modelo.

Para el desarrollo de su Modelo, Dantzig afirmó que las influencias más importantes antes de 1947 fueron los trabajos de Leontief sobre el modelo de entradas y salidas de una Economía (1933), un artículo importante de Von Neumann sobre Teoría de Juegos (1928) y otro de él mismo sobre crecimiento económico (1937).

De hecho, el trabajo de Dantzig generalizó lo hecho por el economista, ganador del premio Nobel, Wassily Leontief. Dantzig pronto se dio cuenta de que los problemas de planeación con los que se encontraba eran muy complejos (como ya se dijo) para las computadoras de 1947 (y aún para las de la actualidad), por lo que este problema llevó a Dantzig a una reflexión muy profunda que lo condujo al descubrimiento del método Simplex, que puede, de manera notable resolver este tipo de problemas, utilizando una computadora moderna en muchas ocasiones en fracciones de segundo.

Antes de que Dantzig pudiese desarrollar el método Simplex, le fue necesario primero tener un modelo práctico de programación lineal. He aquí la descripción de Dantzig del proceso: "Cuando el problema de la planeación fue formulado inicialmente para la fuerza aérea, no existía la noción exacta de una función objetivo, la idea de una meta claramente definida. Por supuesto, teníamos sólo un falso respeto hacia el concepto de objetivo. En el discurso de los militares escuché a menudo decir, "nuestro objetivo es ganar la guerra"Lenstra, Rinnoy, Schrijver, (1991, p. 22). En el mundo de los negocios se escucharía quizás "nuestro objetivo es obtener ganancias". Sin embargo, era imposible hallar alguna relación directa entre la meta establecida y las acciones emprendidas para tal fin. Si se estudiaba con cuidado el paso siguiente, se podía ver que algún líder había promulgado un montón de reglas básicas que, en su concepto, llevarían hacia la meta. Esto distaba mucho de lo que sería honestamente estudiar todas las combinaciones alternativas de las acciones para elegir la mejor combinación. Los que mandan generalmente mueven las manos y dicen: "He considerado todas las alternativas", pero es casi siempre basura. Lo más probable es que no pudiesen estudiar todas las combinaciones. No había algoritmo o herramienta computacional que pudiera hacer eso". Lenstra, et al. (1991, p. 21).

Luego prosigue: "No desarrollé el modelo de la programación lineal en un instante, sino que tuvo un proceso de evolución."Lenstra, et al. (1991, p.19).

Se dedicó un año completo a la tarea de decidir si mi modelo podría ser utilizado en la formulación de problemas prácticos de distribución de tiempos. Como ud. sabe, la planeación y la distribución de tiempos se llevaron a una escala inmensa durante la guerra. El funcionamiento de la Fuerza Aérea fue equivalente al funcionamiento de la economía de toda una nación. En el proceso intervinieron cientos de miles de personas. La logística tuvo una magnitud difícil de entender para alguien que no haya estado ahí. Mi colega Marshall Word y yo revisamos miles de situaciones tomadas de nuestra experiencia durante la guerra."Lenstra, et al. (1991, p.19).

"Las reglas básicas empleadas en la planeación se expresaban en un formato completamente distinto del que se emplea en la actualidad para formular un programa lineal. Lo que hicimos fue revisar estas reglas una por una y demostrar que casi todas ellas podían reformularse aceptablemente en un formato de programación lineal. Pero no todas. En algunos casos era necesario tomar en cuenta el carácter discreto de las variables y las no convexidades."Lenstra, et al. (1991, p. 20).

“Cuando formulé por primera vez mi modelo de programación lineal, lo hice sin una función objetivo. Estuve luchando por algún tiempo con la adición de reglas básicas para elegir de entre las soluciones factibles la que en algún sentido fuese “óptima”. Pero pronto abandoné esta idea y la sustituí por la de una función objetivo a ser maximizada. El modelo que formulé no estaba hecho específicamente para fines militares. Podía aplicarse a toda clase de problemas de planeación; todo lo que tenía que hacerse era cambiar los nombres de las columnas y los renglones, y entonces era aplicable a un problema de planeación económica lo mismo que a un problema de planeación industrial.”Lenstra, et al. (1991, p. 21).

Habiéndose ya establecido el problema general de programación lineal, fue necesario hallar soluciones en un tiempo razonable. Aquí rindió frutos la intuición geométrica de Dantzig: “Comencé observando que la región factible es un cuerpo convexo, es decir, un conjunto poliédrico. Por tanto, el proceso se podría mejorar si se hacían movimientos a lo largo de los bordes desde un punto extremo al siguiente. Sin embargo, este procedimiento parecía ser demasiado ineficiente. En tres dimensiones, la región se podía visualizar como un diamante con caras, aristas y vértices. En los casos de muchos bordes, el proceso llevaría a todo un recorrido a lo largo de ellos antes de que se pudiese alcanzar el punto de esquina óptimo del diamante.”Lenstra, et al. (1991, pp. 23).

Esta intuición llevó a la primera formulación del método simplex en el verano de 1947. El primer problema práctico que se resolvió con este método fue uno de nutrición.

El 3 de octubre de 1947 Dantzig visitó el Institute for Advanced Study donde conoció a John Von Neumann, quien por entonces era considerado por muchos como el mejor matemático del mundo. Von Neumann le platicó a Dantzig del trabajo conjunto que estaba realizando con Oscar Morgenstern acerca de la Teoría de Juegos. Fue entonces cuando Dantzig supo por primera vez del importante teorema de la dualidad.

El mismo Dantzig quedó sorprendido de la forma tan eficiente con que funcionaba el método simplex. Citando de nuevo sus palabras: “La mayor parte de las ocasiones el método simplex resolvía problemas de m ecuaciones en 2m o 3m pasos, algo realmente impresionante. En realidad nunca pensé que fuese a resultar tan eficiente. En ese entonces yo aún no había tenido experiencias con problemas en dimensiones mayores, y no confiaba en mi intuición geométrica. Por ejemplo, mi intuición me decía que el procedimiento requeriría demasiados pasos de un vértice al siguiente. En la práctica son muy pocos pasos. Dicho con pocas palabras, la intuición en espacios de dimensiones mayores no es muy buena guía. Solo ahora, casi 40 años después de haber propuesto el método simplex por primera vez, la gente está comenzando a tener una idea de por qué el método funciona tan bien como lo hace.”Lenstra, et al. (1991, p. 24).

El método simplex se sigue utilizando ampliamente hasta nuestros días porque es muy eficiente.

Una precisión acerca de la terminología: un **simplejo** es un tipo especial de conjunto convexo poliédrico. Mas concretamente, sean $P_1, P_2, ...P_{n+1}$, $(n+1)$ puntos o vectores en

R^k, $k \geq n$. Se dice que los vectores tienen independencia afín si los n vectores: $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \ldots \overrightarrow{P_1P_{n+1}}$ son linealmente independientes. Si los puntos tienen independencia afín, entonces el conjunto convexo más pequeño que contiene los $n+1$ puntos en R^{n+1} se llama **n-simplejo**. En R^3, tres puntos tienen independencia afín si no son colineales. El conjunto convexo más pequeño que contiene tres puntos no colineales es un triángulo. Por tanto un **2-simplejo** es un triángulo. En R^4, cuatro puntos tienen independencia afín si no son coplanares. El conjunto convexo más pequeño que contiene 4 de tales puntos es un tetraedro. Este es el **3-simplejo**.

Los triángulos y los tetraedros son conjuntos poliédricos convexos, no obstante que los conjuntos convexos poliédricos no son necesariamente simplex. Por ejemplo, en R^3 un rectángulo es un conjunto convexo poliédrico según la definición de convexo poliédrico, pero no es un simplex.

El método simplex fue llamado así por Dantzig, aunque no es claro el por qué eligió ese nombre. Quizás hubiera sido más adecuado llamarlo: “método del conjunto convexo poliédrico.”

Dantzig trabajó en el Pentágono entre 1941 y 1945 en medio de la segunda guerra mundial, de la cual obtuvo una gran experiencia técnica y que le permitió el desarrollo de su Modelo hacia 1947. En esa época el era experto en Planeación de Métodos de Programación usando solamente calculadoras de escritorio. En 1946 obtuvo su doctorado cuya investigación había llevado durante la segunda guerra mundial, entonces empezó a buscar una posición académica que le permitiera vivir razonablemente y dedicado a temas académicos de su interés, cuando lo llamaron de Berkeley.

Consistente con su formación académica, Dantzig formuló un Modelo, que como mencionamos anteriormente tuvo como motivación inmediata los trabajos de Wassily Leontief. En dichos trabajos de 1932 surge una larga pero simple estructura matricial que Leontief llamó: “Modelo interindustrial de entradas y salidas de la Economía Americana”. Dantzig admiró mucho los tres pasos que siguió Leontief y que son necesarios para una fructífera aplicación. Dichos pasos son:

i) Formulación del Modelo interindustrial

ii) Recolectar los datos de entrada durante la Gran Depresión (1929).

iii) Convencer a los líderes políticos usar las salidas que proporcionaba el Modelo.

Leontief recibió el Premio Nobel en 1976 por desarrollar dicho modelo.

Dantzig se planteó como propósito generalizar el Modelo de Leontief, pues dicho modelo era estático y la fuerza aérea requería un modelo dinámico que pudiera cambiar con el tiempo. En el Modelo de Leontief hay una correspondencia biunívoca entre el proceso de producción y los bienes producidos en ese proceso. Lo que Dantzig quería era un Modelo con actividades alternativas y donde se pudiera usar la Computación. Una vez que el Modelo quedara formulado, se requería una vía práctica para calcular qué cantidades de esas actividades eran consistentes con sus respectivas características de entrada-salida y con sus fuentes dadas. Esto no significaba que la aplicación tuviera que ser a gran escala con cientos y cientos de unidades y actividades.

El Modelo de análisis de actividades que Dantzig formuló podría describirse ahora como un Programa Dinámico Lineal con una estructura matricial y donde inicialmente no había función "objetivo".

Dantzig opinó que este tipo de problemas no habían interesado antes debido principalmente a la ausencia de la Computación, y si a esto le agregamos que hay motivaciones prácticas en contexto también explica el por qué de su rápido desarrollo.

Una vez formulado su modelo, se le presentó una pregunta no trivial: ¿se pueden resolver en principio dichos sistemas? En principio, Dantzig asumió que los economistas habían trabajado en este problema desde que tuvieron el problema de colocación de recursos. Entonces, Dantzig visitó a Koopmans en junio de 1947 en la Fundación Cowles que entonces estaba dentro de la Universidad de Chicago. Koopmans había trabajado durante la segunda guerra mundial para Allied Schipping Borrad en un Modelo de Transporte, por lo que tenía tanto el conocimiento teórico como práctico para apreciar lo que se le presentaba. Vió inmediatamente las implicaciones que tendría para una planeación económica general.

A partir de entonces, Koopmans no dejó de hablar de las potencialidades de los Modelos de Programación Lineal a los jóvenes economistas que empezaban sus carreras. Algunos de ellos fueron: Arrow, Paul Samuelson, Herbert Simon, Dortman, Hurwicz y Scarf. Algunos de ellos obtuvieron el Premio Nobel por sus trabajos e investigación.

Viendo que los economistas no tenían un método de solución, Dantzig trató por una parte de encontrar un algoritmo que funcionara para su Modelo y por otro lado decidió visitar a Jerzy Neyman, líder de los Estadísticos Matemáticos en esos días en Berkeley. Un resultado de los trabajos de Neyman fue el lema de Neyman-Pearson.

Dantzig, sin lugar a dudas es considerado el pilar más importante de la Programación Lineal. En 1946, obtuvo su doctorado cuya investigación la había iniciado durante la segunda guerra mundial. Es famosa la anécdota de cuando era estudiante en Berkeley y llegando tarde a un curso de Jerzy Neyman copió lo que estaba escrito en el pizarrón pensando que era tarea. La dificultad de dicha tarea puso en duda su capacidad para realizar el trabajo. Sin embargo, lo que estaba escrito en el pizarrón no era tarea, sino problemas que no habían sido resueltos y dichas soluciones constituyeron la tesis doctoral de Dantzig.

La Programación Lineal que desarrolló puede ser vista como parte de un gran desarrollo revolucionario que ha dado a la humanidad la capacidad de establecer metas generales que le permitan tomar decisiones "Optimas"en situaciones prácticas de gran complejidad. Las herramientas para poder lograr esto tienen que ver con Modelos, Técnicas para resolver los Modelos (Algoritmos), así como la gran ayuda proveniente de la computación.

Dantzig propuso el método Simplex durante el verano de 1947, estando en contacto muy estrecho con sus colegas del Pentágono, en donde pudieron darse cuenta del poder del Método. Entonces, decidió consultar con Von Neumann y pedirle sugerencias que ayudaran en las técnicas de solución. Von Neumann era considerado el mejor matemático del mundo en aquella época.

Von Neumann le comentó a Dantzig que había terminado un libro con Oscar Morgenstern sobre Teoría de Juegos y que conjeturaba que los dos problemas eran equivalentes. Así, Dantzig aprendió sobre el Lema de Farkas y sobre el concepto de Dualidad por primera vez. Al final del encuentro, Von Neumann prometió a Dantzig pensar en el problema computacional que éste le presentó y Von Neumann le propuso en principio un esquema no lineal. Más tarde, Hoffman y su grupo hicieron una prueba de comparación entre el Simplex y otro método propuesto por Motzkin. El método Simplex resultó claramente el ganador.

En junio de 1948, Dantzig se reunió con Albert Tucker que acababa de llegar a la jefatura del Departamento de Matemáticas de Princeton. Pronto, Tucker y su grupo de estudiantes entre los cuales destacaban Harold Kühn y David Gale empezaron su histórico trabajo sobre Teoría de Juegos, Programación no lineal y Teoría de la Dualidad. Este grupo de Princeton llegó a ser el centro de la investigación en ése campo.

La computación, llegó a escena en el tiempo justo. Economistas y matemáticos estaban esperanzados con la posibilidad de que el Problema fundamental de colocación óptima de recursos escasos pudiera ser numéricamente resuelto. No mucho tiempo después de este encuentro entre Tucker y Dantzig, hubo una reunión de la Sociedad de Econometría en Wisconsin, a la cual asistieron Matemáticos como Hotelling, Von Neumann y Economistas como Koopmans. Dantzig, entonces joven, estaba muy entusiasmado por presentar sus conceptos de Programación Lineal ante tan distinguida audiencia. Después de presentar su ponencia, el jefe del Departamento convocó a una discusión. Por momentos, hubo un profundo silencio. Repentinamente, se levantó una mano y del fondo del salón se puso de pie Hotelling quien dijo: “Pero todos sabemos que el mundo no es lineal”. Entonces, Dantzig enmudeció y esperó a preparar su réplica. Pero, casi al mismo tiempo, se levantó otra mano. Era Von Neumann quien dirigiéndose al jefe del Departamento dijo: “Si al ponente no le importa, daré yo la réplica”, y prosiguió: “El Ponente tituló su plática (“Programación Lineal”) y con mucho cuidado estableció los axiomas. Si usted tiene una aplicación que satisfaga los axiomas, dígalo, si no es mejor no decir nada”. Al final del análisis, Hotelling tenía razón: el mundo no es lineal. Afortunadamente, los sistemas de desigualdades lineales (al contrario que otras desigualdades) nos permiten aproximarnos más a la clase de relaciones no-lineales encontradas en la Planeación práctica.

En 1949, exactamente dos años después de que la Programación Lineal fuera concebida por primera vez, la primera reunión (a veces llamada el Simposio cero), sobre Programación Matemática fue llevada a cabo en la Universidad de Chicago. El organizador Tjalling Koopmans, la tituló más tarde como “Análisis de actividades de producción y colocación”. A ella asistieron economistas como Koopmans, Arrow, Samuelson, Hurwitz, Dorfman y matemáticos como Albert Tucker, Harold Kühn y David Gale e incluso asistieron miembros de la Fuerza Aérea como Marshall Word y Murray Geisler.

El Método Simplex ha llegado a ser una herramienta teórica, poderosa para probar teoremas y al mismo tiempo ha llegado a ser también una herramienta computacional muy poderosa.

A principios de los años 50 muchas áreas que fueron llamadas “Programación Matemática”empezaron a emerger. Estos subcampos crecieron rápidamente junto con la “Programación Lineal”, jugando un papel fundamental en su desarrollo.

A continuación daré una breve descripción de éstos subcampos.

3.2 SUBCAMPOS DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

- Programación no lineal: (A reserva de estudiarla con más atención y profundidad en el siguiente apartado) se puede decir que empezó alrededor de 1951 con las famosas condiciones de Karush-Kühn-Tucker que están relacionadas con las condiciones de Fritz-John de 1948. En 1954, Ragnar Frish (que mas tarde ganaría el premio Nobel de Economía) propuso un método no lineal de punto interior para resolver programas lineales. Al principio, su objetivo fue como los que tuvieron Von Neumann y Motzkin que también pueden ser vistos como métodos interiores. Más tarde, en los 60´s, G. Zoutendijk, T. Rockafellar, P. Wolfe, R. Cottle, Fiaco y Mc.Cormick, así como algunos otros, desarrollaron la teoría de Programación no Lineal y extendieron los conceptos de dualidad.

- Las aplicaciones comerciales empezaron en 1952 con Charnes, Cooper y Mellon con sus (ahora clásicos) productos óptimos derivados del Petróleo y que permitieron hacer gasolina. Las aplicaciones han crecido rápidamente a otras áreas comerciales y pronto eclipsaron las aplicaciones militares con las que inició este campo.

- Software y el papel de Orchard-Hays: En 1954, William Orchard-Hays escribió el primer software comercial para resolver programas lineales. El resultado de sus ideas, que dominaron el campo durante décadas, permitió las aplicaciones comerciales.

La importancia de sus contribuciones, ayudó al desarrollo completo de este campo, extendiéndolo y haciéndolo más poderoso.

- Los Métodos a gran escala empezaron en 1955 con “Cotas superiores, Sistemas de bloques triangulares y restricciones secundarias”del propio Dantzig. En 1959-60 Wolfe y Dantzig publicaron sus artículos sobre “El principio de Descomposición”. Su forma dual fue descubierta por Benders en 1962 y al principio fue aplicada a la solución de programas enteros. Estos métodos se usan mucho actualmente para resolver programas estocásticos.

- Programación Estocástica: Empezó en 1955 con el artículo de Dantzig “Programación Lineal bajo incertidumbre”que es una aproximación que ha sido profusamente extendida por R.J.B. Wets en los 60´s y por J.R. Birge en los 80´s. En forma independiente, también en 1955 E.M.L. Beale propuso formas para resolver programas estocásticos. Importantes contribuciones a este campo se deben a A. Charnes y a W.W. Cooper al final de los 50´s utilizando restricciones que se satisfacen para una probabilidad establecida. La Programación Estocástica es uno de los campos más promisorios para investigaciones futuras, alguna muy cercana a los Métodos a gran escala.

- Programación Entera: Empezó en 1958 con el trabajo de R.E. Gomory. A diferencia del trabajo inicial sobre el problema de viajes marinos de D.R. Fulkerson, S.M. Jonson y Dantzig, Gomory mostró como generar sistemáticamente los planos”cortantes”. Los cortes son condiciones extra necesarias que cuando se agregan a un sistema de desigualdades, garantizan que la solución óptima se resuelva con enteros.

Sin duda, el personaje que más ha contribuido al desarrollo de la Programación Lineal ha sido George Dantzig, por lo que a continuación presentaremos un breve resumen de sus aportaciones.

i) Reconocer (como resultado de su experiencia como "Planeador práctico"de la Fuerza Aérea Estadounidense en la época de la segunda guerra mundial), las más prácticas relaciones que pueden ser reformuladas como un sistema de desigualdades lineales.

ii) Reemplazar algunas reglas para seleccionar "buenos planes"por funciones objetivo. (Dichas reglas, en el mejor de los casos buscaban ayudar a alcanzar el objetivo, pero no eran el objetivo en sí mismo).

iii) Inventar el Método Simplex que transformó a la Programación Lineal de un sistema poco sofisticado para una aproximación a la teoría económica en una herramienta básica para planeaciones prácticas de largos y complejos sistemas.

El tremendo poder del Método Simplex es una constante sorpresa para muchas personas. Resolver por medio de la fuerza bruta el problema de Asignación de recursos que había mencionado en el primer capítulo y que, como pudimos apreciar, requeriría de un sistema solar lleno de computadoras electrónicas que puedan procesar un millón de datos cada nano-segundo desde el Big-Bang hasta nuestros días, puede resolverse con el Método Simplex y una computadora personal en unos instantes.

A partir de 1990, la Programación Estocástica ha venido siendo un muy interesante campo de investigación y aplicación, en muchos países se están llevando a cabo dichas investigaciones. Este activo y difícil campo ha permitido resolver muchos y muy importantes problemas de planeación.

La habilidad para establecer objetivos generales y a partir de ellos ser capaces de encontrar políticas de solución óptimas para resolver problemas prácticos de decisión de gran complejidad, consiste en el desarrollo revolucionario que sería la meta a futuro de la Programación lineal, sin embargo, todavía hay mucho por hacer, en particular, en el área de incertidumbre. La prueba final la tendremos cuando podamos resolver los problemas prácticos que se originaron en 1947.

3.3 ORIGEN DE CIERTOS TÉRMINOS

En Estados Unidos, los militares se refieren a sus distintos planes o fechas propuestas de entrenamiento, de logística y de combate como un programa. Cuando Dantzig analizó por primera vez el problema de planeación de la fuerza aérea y vió que se podía formular como un sistema de desigualdades lineales, llamó a su primer artículo: “Programación en una estructura lineal”. Hay que hacer notar que el término “programa”fue usado para programas lineales mucho antes que se usara como un conjunto de instrucciones dadas a una computadora para resolver problemas. Al principio, dichas instrucciones fueron llamadas códigos.

En el verano de 1948, Koopmans y Dantzig estaban en la Bahía de Santa Mónica, cuando Koopmans dijo: ¿por qué no acortar el nombre de “Programación en una estructura lineal”por “Programación Lineal”. Dantzig respondió: “¡Eso es!, desde ahora ése será su nombre”. Más tarde Dantzig dio una plática titulada: “Programación Lineal”y años más tarde, Tucker acortó el nombre aún más, llamándole: “Programa Lineal”Lenstra, et al., (1991, p. 29).

El término Programación Matemática se debe a Robert Dorfman de Harvard quien sintió a principios de 1949 que el término “Programación Lineal”era muy restrictivo.
0

El término “Método Simplex”surgió de una discusión entre Dantzig y T. Motzkin quien sintió que el Modelo que Dantzig estaba usando visualizando la geometría de las columnas era mejor describirlo como un movimiento de un simplex a una vecindad.

La Programación Matemática es también responsable de muchos términos que aparecen en la literatura matemática. Algunos ejemplos serían los siguientes:

Arg Min, Arg Max, Lexico-Max, Lexico-Min. El término “dual”es un término antiguo en Matemáticas, sin embargo, sorpresivamente el término “primal”fue propuesto por el padre de Dantzig alrededor de 1954 después de que William Orchard-Hays estableciera la necesidad de una palabra para llamar al problema original cuyo dual se definió como tal.

3.4 PROGRAMACIÓN NO LINEAL

Se inició alrededor de 1951 con las famosas condiciones de Karush-Kühn-Tucker que están relacionadas con las condiciones de Fritz-John en 1948. En 1954 Ragnar Frisch que más tarde recibió el premio Nobel de Economía propuso un Método de punto interior no lineal para resolver problemas lineales. Los primeros intentos para desarrollar este tipo de métodos son los de Von Neumann y Motzkin que pueden verse también como Métodos Interiores.

Más tarde en los años 60, Zoutedijk, T. Rockefellar, P. Wolfe, R. Cottle, Fiaco, Mc. Cormick y otros desarrollaron la Teoría de Programación no lineal y extendieron las nociones de dualidad.

Para poder discutir las influencias sociales y matemáticas en un contexto preciso, unos cuantos resultados clave serán establecidos y "probados". Dichos resultados nos servirán para comparar los resultados de varios matemáticos que fueron los primeros en contribuir a la Programación no-lineal. De manera importante, podemos mencionar a A. Tucker, W. Karush, H. Kühn y F. John.

¿Qué es la Programación no lineal?

Podríamos definir un problema de Programación no lineal como aquel definido de la siguiente manera:

max. $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ sujeto a las siguientes restricciones:

$$g_1(x_1, x_2, \dots x_n) - b_1 = -y_1$$
$$\vdots$$
$$g_m(x_1, x_2, \dots x_n) - b_m = -y_m$$

$y_i \geq 0$, y_i son las variables de holgura

Para funciones $f, g_1, g_2, \dots g_m$ y constantes reales $b_1, b_2, \dots b_m$. Suponiendo además que x_i, y_j se requieran no negativas, cero ó libres. Naturalmente, sería irrazonable pretender que una variable independiente x_i fuera cero ó que una variable y_j fuera libre.

El siguiente ejemplo muestra que esta definición se satisface de manera natural en muchos casos importantes.

1) Si especificamos que todas las x_i son libres, todas las y_j son cero y todas las b_i son cero, entonces el problema se leería:

$$\max \ f(x_1, x_2, \ldots x_n) \text{ sujeta a:}$$

$$g_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$g_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

que es el clásico problema de optimización, que fue tratado por primera vez por Lagrange, mediante el Método de multiplicadores de Lagrange, como se estudia en los cursos de Cálculo avanzado.

2) Si $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ es lineal, es decir, si $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ y cada restricción $g_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ y todas las x_i, y_j deben de ser no negativas, entonces el problema puede escribirse como(notación matricial):

$$\max \quad f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x} \text{, sujeta a:}$$

$$A\,\bar{x} \leq \bar{b}; \quad x_i \geq 0 \ \forall i, 1 \leq i \leq n$$

Este es el caso de un problema de Programación Lineal, escrito en forma canónica.

3) Si f y todas las g_i son funciones lineales como en el inciso anterior, y se requiere que todas las x_i sean no negativas y todas las y_j cero, el problema podría establecerse como:

$$\max \ f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x} \quad \text{sujeta a:}$$

$$A\,\bar{x} = \bar{b}; \ x_i \geq 0 \ \forall i, 1 \leq i \leq n$$

que es un problema de Programación Lineal en la forma estándar.

4) Sea $S \subseteq R^n$ y sea $g_1(\bar{x})$ la ecuación característica de S, es decir:

$$g_1(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & si \quad \bar{x} \in S \\ 0 & si \quad \bar{x} \notin S \end{cases} \quad \text{, entonces}$$

si $m = 1, b = 1$, todas las x_i libres y $y_1 = 0$, el problema se escribiría como:

$$\max \ f(\bar{x}) \text{, sujeta a } \ \bar{x} \in S$$

Por supuesto, la generalidad de la afirmación anterior revela que la definición de un programa lineal es demasiado amplia.

Con un ejemplo concreto podemos ilustrar la diferencia cuando un problema de Programación no lineal es estudiado bajo las particularidades antes presentadas. Mostraremos también con el siguiente ejemplo que si $S \subseteq R^2$ podemos representar el problema de max $f(\bar{x})$, sujeta a $\bar{x} \in S$ como un problema de Programación no Lineal.

Sea S el conjunto de "soluciones factibles"y en este ejemplo particular el triángulo en el plano $x_1 x_2$ con vértices en: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Consideremos el problema de max $f(\bar{x})$, sujeta a $\bar{x} \in S$. Este problema lo podemos escribir como:

a)

max $f(x_1, x_2)$ sujeta a:

$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_2 - 1 = -y_1 \\
& x_1 + 2x_2 - 1 = y_2 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

b)

max $f(x_1, x_2)$ sujeta a:

$$
\begin{aligned}
& (x_1 + x_2 - 1)(x_1 + 2x_2 - 1) = -y_1 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ y_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

En el inciso a) si $f(x_1, x_2)$ es lineal, es un problema de Programación Lineal escrito en forma canónica, mientras que en b) aunque se puede demostrar que el problema es equivalente, está planteado como un problema de Programación no lineal.

Para motivar la deducción de condiciones necesarias para la optimización nos pondremos en la posición de los programadores matemáticos de finales de los 40´s. Sabemos que después de que Dantzig visitó a Von Neumann circuló privadamente una nota que fue publicada 15 años después. Esta nota formulaba el dual de un problema de Programación Lineal y daba una prueba de la igualdad de la función objetivo en los valores óptimos basada en el Lema de Farkas. Motivados por esta nota, Gale, Kühn y Tucker encontraron rigurosos teoremas sobre dualidad, así como algunas generalizaciones. Hace poco tiempo relativamente que el mismo Dantzig reveló que al mismo tiempo construyó su propia prueba sobre el resultado de Von Neumann.

Empecemos suponiendo que f y todas las g_i son funciones lineales, entonces:

max $f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x}$ para soluciones factibles de $A\,\bar{x} - \bar{b} = -\bar{y}$; como antes, aquí factible quiere decir que x_i, y_j son no negativas, cero ó libres.

Esta especificación induce una noción de "dual factible"para relacionar el problema dual mínimo con los mismos datos.

Este problema lo podríamos escribir como:

$$\min\ h(\bar{x}) = \bar{v}\bar{b}$$

para soluciones factibles de $\bar{v}A - \bar{c} = \bar{u}$.

Para este problema lineal dual cada u_j y cada v_i se requieren no negativas, cero ó libres si las variables correspondientes x_j ó y_i han sido requeridas no negativas, cero ó libres respectivamente en el problema de Programación Lineal original. El par de programas puede hacerse ver convenientemente por medio de un diagrama debido a Albert Tucker. Las restricciones de factibilidad son el par de variables (al final de cada renglón columna) y ambas deben ser no negativas ó una cero y la otra libre.

	x	-1	
v	A	B	= - y
-1	C	0	= f (max)

Con este diagrama, es obvio que para todas las soluciones, factibles o no:

$$h - f = \bar{u}\bar{x} + \bar{v}\bar{y}$$

Para ver este resultado del diagrama, podemos considerar:

$$h - f = \bar{v}\bar{b} - \bar{c}\bar{x}, \qquad \bar{u} = \bar{v}A - \bar{c}, \qquad A\bar{x} - \bar{b} = -\bar{y},$$

y de aquí: $\bar{c} = \bar{v}A - \bar{u}$ y $\bar{b} = A\bar{x} + \bar{y}$, por lo que:

$$\bar{v}\bar{b} - \bar{c}\bar{x} = \bar{v}(A\bar{x} + \bar{y}) - (\bar{v}A - \bar{u})\bar{x} = \bar{u}\bar{x} + \bar{v}\bar{y}$$

Mientras que por definición de factibilidad para el par dual implica que $h - f \geq 0$. De aquí que trivialmente $h - f \geq 0$ es una condición suficiente para la optimalidad de un par de soluciones factibles. Las condiciones necesarias se establecen en el siguiente:

<u>Teorema</u> Si $f(\bar{x}, \bar{y})$ es una solución óptima factible del problema original entonces existe una solución factible $(\bar{u}, \bar{v})$ para el programa dual, con $\bar{u}\bar{x} + \bar{v}\bar{y} = 0$.(Solución óptima factible para el problema dual).

Este teorema de dualidad fue descubierto y explorado con sorpresa y deleite en los primeros días en que surgiera ésta disciplina.

Courant y Hilbert comentaron al respecto: “El Método de los multiplicadores de Lagrange nos lleva a diversas transformaciones que son importantes desde un punto de vista tanto teórico como práctico. Por medio de estas transformaciones, nuevos

problemas equivalentes a un problema dado pueden ser formulados y hay condiciones estacionarias que ocurren simultáneamente en problemas equivalentes. De esta manera, somos conducidos a problemas importantes debido a su carácter simétrico. Es más, para un problema de maximizar con máximo M, a menudo podemos plantear un problema equivalente de minimizar con el mismo valor mínimo M. Esta es una herramienta muy útil para acotar a M por arriba y por abajo"Lenstra, et al. (1991, p. 86).
.

Desde un punto de vista escolar, para descubrir la ocurrencia de los elementos en tal dualidad se requieren tres elementos:

- Un par de problemas de optimización, uno que trate de maximizar una función objetivo f y el otro que trate de minimizar una función objetivo h, ambos con los mismos datos.

- Para soluciones factibles del par de problemas, una condición suficiente es que $h \geq f$.

- Las condiciones necesarias y suficientes para optimalidad son que $h = f$.

A continuación, presentaremos cómo, en base a generalizaciones del problema anterior, se llegó a establecer las condiciones necesarias de optimalidad en un problema de Programación no Lineal.

Condiciones de Karush

La generalización del teorema anterior podría expresar un problema de Programación no Lineal en forma canónica:

max $f(x)$ para soluciones factibles sujetas a:

$$g(x) - b = -y$$

donde, en este caso, "factible"quiere decir x_j y y_i no negativas. Aquí se usa la notación $g(x) = (g_1(x),...g_m(x))$ y se puede tratar como vector columna. Tenemos que buscar las condiciones necesarias que deben ser satisfechas por una solución factible $(\bar{x}, \bar{y})$ para ser un óptimo local. Es entonces natural usar una aproximación lineal, usando a la derivada para obtener un programa lineal:

max $df = f'(x)dx$, para soluciones factibles, sujetas a:

$$g'(\bar{x})dx = -dy$$

Aquí, se requiere la diferenciabilidad de f y g_i. De la misma forma, usamos la notación $f'(\bar{x})$ y $g'(\bar{x})$ para denotar el gradiente de f y el Jacobiano de g respectivamente, evaluados en $\bar{x}$.

Teorema: Supongamos que $df \leq 0$ para todas las soluciones factibles (dx, dy) para el problema no lineal, aproximado linealmente y escrito en la forma canónica en el punto factible $(\bar{x}, \bar{y})$. Entonces, existe $(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0$ tal que:

$$\bar{v}\, g'(\bar{x}) - f'(\bar{x}) = \bar{u},$$
$$\bar{u}\bar{x} + \bar{v}\bar{y} = 0$$

Debido al trabajo de Kühn y Tucker, éstos supuestos han sido llamados restricciones de cualificación.

3.5 CONDICIONES DE KÜHN Y TUCKER

Los antecedentes del trabajo de Karush fueron muy diferentes al de Kühn y Tucker, al punto que uno se admira que hayan llegado al mismo teorema.

A mediados de los 30´s, Tucker había estado muy interesado en la dualidad entre covarianza y contravarianza que aparece en el Cálculo Tensorial, así como en la dualidad entre homología y cohomología que aparece en la Topología Combinatoria.

En mayo de 1948, cuando Dantzig visitó a Von Neumann en Princeton para discutir sobre potenciales conexiones entre la entonces muy nueva Programación Lineal y la Teoría de los Juegos, Tucker dio un "aventón"a Dantzig cuando éste iba a tomar el tren de regreso a casa. En el camino, Dantzig dio una breve exposición de lo que era la Programación Lineal, usando el problema de transporte como un simple problema ilustrativo. La explicación de Dantzig le sonó a Tucker de algún modo como las leyes de Kirkhoff y Tucker se lo comentó a Dantzig, y después de dejarlo en la terminal de trenes, pensó en esto nuevamente.

La visita de Dantzig a Princeton resultó en el inicio de un proyecto de investigación cuyo objetivo original era el estudio de las relaciones entre programas lineales y matrices de juegos. Hay que recordar que en el verano de 1948, el proyecto de investigación tenía a Tucker como investigador principal, ayudado por David Gale y Kühn, que eran alumnos graduados de Princeton. El costo de este proyecto fue financiado por la Oficina de Investigación Naval hasta 1972.

Estimulados por una nota privada de Von Neumann que circuló privadamente, el teorema de dualidad para Programación Lineal, que enunciamos anteriormente, fue probado y se pudieron establecer varias conexiones entre las soluciones de matrices de juegos y programas lineales. Como ejemplo, en el verano de 1949, Kühn produjo una nota de trabajo de una página expresando la dualidad de la Programación Lineal como una propiedad de punto silla de la expresión Lagrangeana:

$$L(x,v) = c \cdot x + v(b - Ax) \text{ definida para } x \geq 0, v \geq 0 .$$

Así definida, los problemas de optimización que involucran maximizar en x y minimizar en v tienen como condiciones necesarias, las muy familiares condiciones que se desprenden de la función Lagrangeana, con únicamente modificaciones menores en la frontera del cero.

Por supuesto, la expresión anterior, se generaliza fácilmente a:

$$L(x,v) = f(x) - vg(x)$$

en el caso no-lineal y este problema de punto de silla fue posteriormente elegido como el punto de partida para la exposición del análisis de Kühn-Tucker.

Cuando Tucker llegó a Stanford en otoño de 1949, tuvo oportunidad de regresar a la pregunta: ¿qué relación existe entre la Programación Lineal y el tratamiento de

Kirkhoff-Maxwell sobre circuitos eléctricos? En ese momento, Tucker había reconocido el paralelismo entre los potenciales de Maxwell y los multiplicadores de Lagrange y había identificado el problema de optimización de minimizar la pérdida de calor. Entonces, Tucker les escribió a Gale y a Kühn, invitándolos en la investigación de generalizar la dualidad de programas lineales a programas cuadráticos. Gale, declinó, mientras Kühn aceptó y desarrolló un artículo mediante correspondencia entre Princeton y Stanford.

Los primeros resultados en programación no-lineal fueron extensiones de la regla de los multiplicadores de Lagrange al caso donde las restricciones son desigualdades en lugar de ecuaciones. Debido a que la regla de los multiplicadores de Lagrange era bien conocida desde principios del siglo XIX, es de alguna manera sorprendente que su extensión a restricciones en forma de desigualdad no se hayan estudiado sino hasta el siglo XX.

3.6 **CÁLCULO DE VARIACIONES**

"En la vida, la única constante es el cambio"

Anónimo

Según el poeta Virgilio, el cálculo de variaciones nació en 850 a.c., cuando la reina Dido fundó la ciudad de Cartago: su ciudad sería tan grande como pudiera encerrar una piel de toro. Dido cortó la piel en tiras muy finas y logró hacer una cuerda de longitud ℓ. Usando la costa del mar Mediterráneo como un lado de la ciudad, la reina tenía que encontrar la curva, con longitud ℓ, encerrando la mayor área y empezando y terminando sobre la costa.

Aunque, como mencionamos, según el poeta Virgilio, el cálculo de variaciones nació en 850 a.C., el nacimiento moderno del Cálculo de Variaciones fue con fanfarrias poco usadas en el mundo matemático cuando en junio de 1696, en el Acta Eruditorum, Johann Bernoulli desafió públicamente a los mejores matemáticos de su tiempo, proponiéndoles el problema siguiente:

Si una partícula se desliza sobre una curva que une a dos puntos del plano, bajo la acción de la gravedad, ésta tardará un cierto tiempo que depende de la curva en llegar al punto fial. ¿Cuál es la curva que da el tiempo mínimo?, ¿la braquistrócrona?

Para Galileo, que había estudiado este problema en 1638, en su famoso trabajo "Discurso sobre dos nuevas ciencias". Su primera propuesta de solución del problema fue encontrar la línea recta desde el punto A hasta un punto sobre una recta vertical al que pudiera llegar más rápidamente. Galileo calculó correctamente que el ángulo formado entre estas dos rectas debería de ser de 45°.

Galileo, respondió correctamente a esta pregunta, pero cometió un error cuando enseguida argumentó que la curva de más rápido descenso, entre los puntos A y B debería ser un arco de círculo, lo que constituye un error de deducción.

Regresando a Bernoulli, podemos agregar que antes de plantear su problema (conocido actualmente como de la Braquistrócona), hizo la siguiente introducción:

"Yo, Johann Bernoulli, el más brillante matemático en el mundo. No hay nada más atractivo a la inteligencia humana que un problema serio, que involucre el cambio y cuya posible solución lleve a la fama y permanezca en la historia mediante un monumento. Siguiendo el ejemplo de Pascal, Fermat, etc., espero obtener la gratitud de la comunidad científica entera por haber sido el primer matemático que planteó un problema que constituye un verdadero reto al intelecto. Si alguno de ustedes me comunica la solución del problema propuesto, le haré la publicidad y lo declararé digno de tal premio"Troutman, (1996, p. 15). Se dice que cuando Johann Bernoulli propuso el problema de la Braquistrócona en el Acta Eruditorum, aunque el ya conocía la solución, la puso como reto a otros matemáticos. Leibniz pidió a Bernoulli permitir que la solución se alargara de los seis meses originalmente propuestos por Bernoulli.

Ahora sabemos que se obtuvieron cinco soluciones: Newton, Jacob Bernoulli, Leibniz, L´Hopital y la del propio Johann Bernoulli.

Johann Bernoulli y Leibniz deliberadamente “tentaron”a Newton con este problema. Esto no puede considerarse una sorpresa ya que Johann Bernoulli incluyó las siguientes palabras:

“… hay unas cuantas personas a las que les gustaría resolver nuestro excelente problema, pero solamente unos cuantos matemáticos, dentro de las cuantas personas que se interesarían por su solución, podrían lograrla” Troutman, (1996, p. 18).

Newton envió su solución a Charles Montague, quien fue un innovador primer ministro y fundador del Banco de Inglaterra. Montague fue el principal patrón y amigo de Newton, además de haber sido parientes políticos. Montague fue presidente de la “Royal Society”en el período 1695-1698, y entonces también resultó natural que Newton acudiera a Montague.

La “Royal Society”publicó la solución de Newton en forma anónima en el “Philosophical Transactions of the Royal Society”en enero de 1697.

La publicación del Acta Eruditorum de mayo de 1697 publicó la solución de Leibniz al problema de la Braquistrócona en la página 205, la de Johann Bernoulli en las páginas 206-211, la de Jacob Bernoulli en las páginas 211-214 y la traducción latina de la de Newton en la página 223. La solución de L Hópital no fue publicada hasta 1988, casi 300 años más tarde. Troutman, (1996, pp. 32-35).

Cuando el Acta Eruditorum publica las soluciones mencionadas, Johann Bernoulli se dirigió a los matemáticos que dieron sus respectivas soluciones:

“…my elder brother made up the fourth of these, that the three great nations, Germany, England, France, each one of their own to unite with myself in Duch a beatiful search, all finding the same truth. Troutman, (1996, p. 43).

Otra categoría de problemas que han intrigado (y siguen haciéndolo) a los matemáticos, son las geodésicas, es decir, ¿cuál es la curva, sobre una superficie, de longitud mínima?

Podríamos mencionar también los problemas de área mínima, o problemas de Plateau (químico belga del siglo pasado), es decir, dada una curva en el espacio, ¿cuál es la superficie de área mínima que tiene a esa curva como frontera? Uno puede materializar esas superficies con películas de jabón (el área mínima se traduce en tensión mínima) y por lo tanto hacer experimentos. El nombre de Courant está íntimamente ligado a este tipo de problemas, pero la investigación no ha concluido.

Como habíamos mencionado, el cálculo de variaciones surgió a finales del siglo XVII y se convirtió en una rama de las matemáticas, sólida y rigurosa con los trabajos de Euler (1707-1783) y de Lagrange (1736-1813).

Tras algunos trabajos previos, Euler elaboró el primer método general de resolución de problemas de variaciones entre los años 1726 y 1744 y los publicó en 1744 en el libro “Método de búsqueda de líneas curvas con propiedades de máximo o mínimo, o la resolución del problema isoperimétrico tomado en su sentido más amplio”, que es el primer libro en la historia sobre cálculo de variaciones. En este trabajo, Euler generaliza problemas estudiados por los hermanos Bernoulli (en particular, el de la braquistrócona), pero retiene la aproximación geométrica desarrollada por Johann Bernoulli para resolverlos. Encuentra la conocida ecuación diferencial de Euler-Lagrange que resulta la condición necesaria de primer orden en el Cálculo de Variaciones.

En el libro mencionado en el párrafo anterior, Euler cita más de 60 ejemplos que ilustran las posibilidades del nuevo método. En ellos se demuestra el valor práctico del Cálculo y se establece su estrecha relación con la mecánica en particular, y la física en general. El objetivo de este método general era la búsqueda de líneas curvas para las cuales cierta magnitud prefijable, alcanza su valor máximo o mínimo. Pese a la practicidad del método, éste adolecía de cierta falta de rigor sobre todo en cuestiones relacionadas con los pasos al límite. Esta situación cambió en 1755 como consecuencia de la puesta en común de ideas por parte de Euler y Lagrange, al comunicar éste último, el método general analítico de cálculo de variación de la integral, mediante la integración por partes.

Lagrange comunicó a Euler el método general analítico, creado por él, en el que introduce la variación de una función y en donde extiende a las variaciones las reglas del cálculo diferencial. Esta idea de variaciones daría el nombre a la nueva disciplina. En 1760 publicó: "Ensayo de un nuevo método para determinar los máximos y mínimos de fórmulas integrales indefinidas". Dio un método analítico para resolver los problemas típicos del Cálculo de Variaciones. En la introducción de su artículo, Lagrange habla del desarrollo histórico de las ideas que forman parte de dicho artículo. En sus palabras:

"El primer problema de este tipo (Cálculo de Variaciones) que algunos matemáticos han resuelto, es el problema de la braquistrócona, o la curva de descenso más rápida y que Johann Bernoulli propuso a fines del siglo pasado. La solución fue encontrada al considerar casos particulares, y no fue sino hasta tiempo después, al investigar sobre curvas isoperimétricas, que el gran matemático, de quienes hemos hablado, y de su famoso hermano Jacob Bernoulli, dieron algunas reglas generales para resolver otros varios problemas del mismo tipo. Debido a que las reglas no son suficientemente generales, el famoso matemático Euler buscó reducir todo este tipo de investigaciones a un método general que doy (Lagrange) en mi trabajo: "Ensayo de un nuevo método para determinar los máximos y los mínimos de formas integrales indefinidas", un trabajo original en el que están presentes la profundidad y la brillantez. Con todo, así como el método es ingenioso y rico, uno debe admitir que no es tan simple como uno esperaría de un trabajo en análisis puro"Troutman, (1996, p.16).

Más adelante, Lagrange describe su introducción al símbolo diferencial: δ

Por medio de la analogía y observando que en el cálculo diferencial e integral, el estudiante aprende, entre otras cosas, a encontrar puntos críticos y puntos extremos de funciones de una o varias variables, por analogía, el paso que sigue es llevar a cabo el mismo estudio, pero ahora con funcionales. Este paso debería de ser natural, pues los mismos fundadores del cálculo (Newton y Leibniz) lo dieron intuitivamente y la siguiente generación de matemáticos trató de formalizarlo. Sin embargo, así como la idea de infinitesimal fue rápidamente desplazada en la definición formal de la derivada (y tardó siglos en encontrar una construcción matemática rigurosa), la noción equivalente de variación tuvo que esperar el principio del siglo XX para encontrar su sustituta en la definición de una derivada definida en un espacio de dimensión infinita.

Para lograr la generalización por medio de la analogía, del Cálculo de Funciones al Cálculo de Variaciones, necesitamos, en primer lugar, definir el problema del cálculo en variaciones para el caso escalar, con extremos fijos. A continuación definimos dicho problema:

Sea $f(x) \in C^2[D_f]$ (se lee: $f(x)$ una función de clase c-2 en su dominio, es decir que tiene todas sus derivadas hasta de segundo orden inclusive y son continuas en su dominio). Se considera el siguiente funcional:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f\left(x(t), \dot{x}(t), t \right) dt$$

en donde $\dot{x}(t)$ es la derivada de $x(t)$ con respecto a t.

Se trata de encontrar aquella función (trayectoria) $x^*(t)$, con derivadas primera y segunda continuas en $[t_0, t_1]$, verificando que $x^*(t_0) = x_{0,}\ x^*(t_1) = x_1$, siendo $x_{0,}\ x_1$ dados, para que el funcional J alcance el valor máximo o el valor mínimo.

Este problema se puede generalizar, fundamentalmente de tres maneras:

i) Con más variables. Al presentar el problema típico de Cálculo de Variaciones, supusimos que x es función de t. Sin embargo pueden aparecer cualquier número de funciones (desde luego, derivables sobre el intervalo de tiempo dado).

ii) Pueden aparecer derivadas de orden superior a uno ya sea que se trate de una sóla función o varias funciones, todas ellas con derivada superior a uno.

iii) Cambios en el intervalo de tiempo. En el problema original, supusimos fijo el tiempo final, sin embargo puede considerarse fijo con un valor de la función para dicho tiempo libre, o el tiempo puede ser libre, pero el valor de la función en dicho tiempo dado, o ambos pueden ser libres.

En el primer caso la condición necesaria de primer orden se extenderá a todas y cada una de las variables, en el segundo caso dicha condición necesaria (Ecuación de Euler se extenderá a la Ecuación de Euler-Poisson, mientras que del tercer inciso surgirán las condiciones de transversalidad.

La deducción a partir de un conjunto de acciones y procesos de los casos mencionados se darán en las Actividades.

Otros matemáticos que continuaron con los estudios de Newton, Euler, Lagrange y Laplace y por lo mismo aportaron al Cálculo de Variaciones han sido:Legendre (1752-1833) que estudió con éxito el problema de la inversión, Jacobi (1804-1851) que fue un gran algorista, como Euler, pensaba que había que estudiar muy a fondo en particular a Euler, Lagrange y Laplace. Tuvo gran éxito estudiando funciones elípticas, Hamilton (1805-1865), que estudió a Newton y a Lagrange a profundidad ha sido el mejor matemático irlandés, al grado de ser conocido como el “Lagrange irlandés”, fue muy amigo de Jacobi, Una ecuación diferencial de gran importancia es la de Hamilton-Jacobi, Weierstrass (1815-1897) y Bolza (1857-1942) son matemáticos cuyos nombres son recordados en importantes teoremas del Cálculo y Bliss (1876-1951) matemático más moderno que profundizó algunos trabajos de sus antecesores mencionados aquí.

Como hemos visto, el cálculo de variaciones surgió en el contexto de la física (principalmente la mecánica) y de la geometría (por ejemplo, problemas isoperimétricos), específicamente con el problema de la Braquistócrona (tiempo más corto, en griego) mencionado anteriormente y cuya solución se propone mediante un conjunto de acciones y procesos a los estudiantes. (Ver primera actividad). Sin embargo, como ha pasado con prácticamente todos los conceptos de Economía, muchas de sus aplicaciones se pueden modelar muy eficientemente en forma matemática y el Cálculo de Variaciones no es la excepción.

Actualmente, el Cálculo de Variaciones, tiene múltiples aplicaciones en la Economía. Desde el problema de maximizar el valor presente de una inversión con una tasa de descuento dada (generalmente por la inflación), al de minimizar una función de costos en la que se incluye la razón de cambio de alguna de las variables, son problemas que podemos resolver muy eficientemente con las herramientas que nos provee el Cálculo de Variaciones.

3.7 **TEORÍA DE CONTROL**

"…si cada instrumento pudiera llevar a cabo su propia función, respondiendo o anticipándose al trabajo de otros…si la lanzadera tejiese y la púa tocase el arpa sin una mano que los guiara, los patronos no necesitarían ni sirvientes ni capataces."

Aristóteles

Para muchos de nosotros la palabra "control"implica "actuación". Es verdad también que, a veces, en nuestra sociedad, la palabra "control"puede ser percibida con un matiz un tanto negativo, en la medida en que puede asociarse a "falta de libertad". Pero no es éste el sentido en el que ha de entenderse en el contexto de la Teoría de Control. En este caso la palabra "control"refleja el esfuerzo humano para intervenir en el medio que le rodea con vistas a garantizar su supervivencia y una permanente mejora en el nivel de vida

Como ocurre en muchas disciplinas, ésta, la Teoría de Control existía mucho antes de que se le pusiera su nombre. En efecto, en el mundo de lo viviente, los organismos están dotados de mecanismos de regulación que garantizan el mantenimiento de las variables esenciales.

La esencia de la Teoría de Control está inspirada en algunas nociones que a todos nos resultan familiares. Una de ellas es la de "feedback". Este término se incorporó a lo que hoy conocemos como Teoría de Control en los años veinte por los ingenieros del "Bell Telephone Laboratory". La traducción del término "feedback"al castellano produce palabras mucho más largas como "realimentación"o "retroalimentación". Pero, como decíamos, este término se adopta en los años veinte para la Teoría de Control pero no se acuña en esta disciplina

En Economía, el término "feedback"está consolidado, como se menciona en 1907 en Hall, 1907. Por ejemplo:

"Es un hecho curioso que, mientras que los economistas políticos reconocen que para un correcto funcionamiento de la ley de la oferta y la demanda ha de haber fluctuaciones, esto no ha sido reconocido por los mecánicos en relación a la máquina de vapor. El objetivo de los economistas no es suprimir estas fluctuaciones completamente (puesto que entonces se suprimiría también el principio de la autorregulación), sino disimularlas lo más posible, permitiéndoles que sean lo bastante grandes como para mantener suficiente poder regulador"Hall, (1907, p.121).

Esta frase desvela un principio que es válido en muchos aspectos de la vida diaria. Por ejemplo: cuando, yendo a velocidad alta, deseamos frenar un vehículo, no lo haremos de una sola vez sino que el frenado habrá de ejercerse de manera intermitente para no perder el control del vehículo.

En el ámbito de las relaciones humanas no cabe tampoco ninguna duda que insistir cotidiana y permanentemente sobre lo mismo no es necesariamente la mejor manera de convencer a nadie de nada. En el control de sistemas pasa exactamente lo mismo.

Para adentrarnos en la Teoría de Control, hemos pues de aceptar que, para controlar los sistemas que surgen en la naturaleza o en el desarrollo tecnológico, frecuentemente muy complejos y con un gran número de parámetros, no se trata simplemente de forzar el sistema para conducirlo de manera monótona e ininterrumpida al objetivo buscado sino que, a menudo, hemos primero de alejarnos del objetivo buscado en armonía con el sistema para después alcanzar el objetivo con un esfuerzo adecuado pero no excesivo.

La Naturaleza nos ofrece ejemplos difíciles de mejorar en este terreno. Basta simplemente observar el ritual del depredador que acecha a su presa.

Hoy en día la noción de "feedback"es también común, además de en Economía, en Biología, Psicología y otras ciencias sociales. El principio de causa-efecto ha dejado de entenderse como un fenómeno estático y se aborda ahora desde una perspectiva dinámica a causa de los mecanismos de "feedback". Estamos ante el principio causa-efecto-causa.

Otra de las nociones que subyace en todo lo que hoy puede considerarse parte del ámbito de la Teoría de Control es la de "Optimización". La Optimización es una técnica que tiene como objetivo aumentar o mejorar el valor de una variable que, en la práctica, puede tomar las formas más variadas: temperatura, flujo de aire, velocidad, rentabilidad, beneficio, información, capacidad de destrucción, etc.

Las técnicas de Optimización son tan variadas que resulta imposible hacer una presentación global y unificada de todas ellas. Por otra parte, la tecnología informática y de la computación han jugado un papel crítico en las aplicaciones de las técnicas de Optimización, tal y como ocurre en el control óptimo de cohetes y proyectiles. En efecto, en vista de la complejidad de los sistemas a los que la Teoría de Control ha de hacer en la actualidad, es imposible realizar una implementación eficiente de los métodos de control, sin previamente realizar un riguroso trabajo de simulación numérica.

Hemos mencionado que las dos grandes ideas que han servido de inspiración y de motor a la Teoría de Control son: el mecanismo de "feedback"y la Optimización. Otro de los términos ligados a la Teoría de Control y a la Optimización es el de Cibernética, propuesto por el físico francés A.M. Ampere en el siglo XIX en su clasificación de las Ciencias para referirse a la aún no existente ciencia del control de los procesos. Este término fue rápidamente olvidado hasta que en 1948 el matemático americano Norbert Wiener lo adoptó como título de su libro.

El "sueño"de Wiener estaba basado en la idea de que surgiría una creciente sinergia entre el ser humano y la máquina que abarcaría tanto a las Matemáticas como a la Psicología: "La máquina al servicio del ser humano, imitando al ser humano".

Buscando más atrás en la Historia llegaríamos a la conclusión de que en el diseño de los acueductos romanos, en los que se usaba un sistema de válvulas para mantener un nivel de agua constante, había elementos propios de la Teoría de Control. Hay quien cree que el control de los sistemas de irrigación era un arte bien dominado en Mesopotamia 2000 a.C. En el antiguo Egipto, había trabajadores que se denominaban "harpenodaptai"o "estiradores de cuerdas"que estaban especializados en estirar cuerdas para producir largos segmentos rectos. Esto se considera como una evidencia de que ya por entonces se había comprendido no sólo que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta (lo cual podría considerarse el problema más clásico de la Optimización y del Cálculo de Variaciones) sino que éste es equivalente a su versión dual: entre todos los caminos de longitud dada, encontrar el que maximiza la distancia entre los dos extremos. Obviamente, la respuesta es nuevamente la línea recta. El trabajo de los “harpenodaptai”consistía precisamente en producir estas curvas (rectas) maximales.

Pero, no cabe duda, que después de la invención del Cálculo, por Newton y por Leibniz y, posteriormente, con el gran apoyo de la revolución tecnológica y en particular, con el desarrollo de la computación el ritmo de desarrollo de la Teoría de Control ha alcanzado un máximo. Así, podemos apreciar que a través de la revolución industrial, las ideas propias de lo que hoy se denomina Teoría de Control fueron haciéndose más y más presentes. Ya en los años veinte los empresarios e ingenieros preferían el procesamiento continuo frente al más tradicional, por lotes, y cuando era posible, utilizaban el control semi-automático o automático. De este modo, la Ingeniería de Control germinó y fue comenzando a ser reconocida como una disciplina. Durante los años treinta se produjo un importante avance en todo lo relacionado con el control automático y las técnicas de diseño y análisis. Las aplicaciones fueron numerosas: amplificadores en sistemas telefónicos, el sistema de distribución de plantas eléctricas, estabilización de aviones, mecanismos eléctricos para la industria papelera, química, del petróleo y del acero, etc.

El mencionado desarrollo sistemático de la teoría de control de los años treinta, se inició en Estados Unidos, en el campo de las ingenierías eléctrica y mecánica. Sabemos que hasta 1940 aproximadamente, los sistemas de control construidos eran sistemas de regulación: la velocidad de un motor o de una turbina hidráulica debían ser mantenidas en un entorno de un valor constante. Los diseños trataban de evitar inestabilidad.

De este modo, fueron surgiendo gradualmente conceptos sólidos y para finales de los cuarenta se contaba ya con dos métodos emergentes pero diferenciados: un primer método basado en la utilización de ecuaciones diferenciales y un método frecuencial basado en el análisis de la relación entre la amplitud y fase de entrada (“input”) y salida (“output”). Ya para entonces las instituciones comenzaban a tomar conciencia de la relevancia del control automático. Era el caso, por ejemplo, de la ASME (Sociedad americana de ingenieros mecánicos) de Estados Unidos y la IEE (Institución de ingenieros eléctricos) Británica.

Durante la segunda guerra mundial aparecieron sistemas de control en los que la transición era más importante que la quietud: es la clase de los servomecanismos, sistemas de persecución. Por ejemplo: el sistema de control para un arma de fuego requerida para alcanzar un objetivo móvil, con la ayuda de un radar. Los ingenieros y científicos tuvieron que afinar su experiencia en los mecanismos de control de seguimiento de aviones y de los proyectiles antiaéreos y en el diseño de baterías antiaéreas. Esto supuso un desarrollo aún más importante de los métodos frecuenciales.

Sin embargo, se descubrió que gran parte de la teoría necesaria para el diseño de tales sistemas ya había sido desarrollada en el campo de ingeniería de la comunicación. A patir de la década de los sesenta, aparece la llamada teoría clásica de control, basada fundamentalmente en los mencionados métodos frecuenciales.

Se comprobó que las ecuaciones diferenciales o en diferencias que describían la dinámica del sistema eran a menudo intratables, pero pasando al dominio frecuencia a través de la transformada de Laplace o z-transformada, se producían resultados algebraicos a partir de los cuales se podían inferir características del sistema.

Sin embargo, esta teoría presentaba serias limitaciones, pues restringía el estudio a sistemas lineales, con una sola variable de entrada y una de salida, e invariantes en el tiempo. Por otra parte, había que considerar, en determinados problemas, otros criterios (dependientes del problema) que valorasen la evolución del sistema.

Como mencionamos anteriormente, a partir de 1960, todo lo que acabamos de describir comenzó a conocerse como la Teoría de Control "clásica"y es a partir de entonces que comienza una nueva era en la que se pretende hacer frente a algo que se había puesto de manifiesto durante la guerra y que también mencionamos: los modelos utilizados hasta ese momento eran inadecuados para representar la complejidad del mundo real puesto que los sistemas reales son no-lineales y están sujetos frecuentemente a perturbaciones ruidosas, no deterministas.

Las contribuciones de Bellman (Programación Dinámica), de Kalman (filtrado y análisis algebraico de problemas de control) en los Estados Unidos y de Pontryagin (Principio del máximo en el control óptimo no-lineal) en la Unión Soviética establecieron los pilares fundamentales de la investigación en Teoría de Control de las últimas décadas.

Por otra parte, los conceptos de controlabilidad y observabilidad introducidos por Kalman (1974), así como los métodos de optimización de Bellman (1957) y Pontryagin, L., Boltyansky, V., Gamkrelidze, R., Mishenko, E. (1962) fueron específicamente los que dieron origen de lo que se conoce como teoría moderna de control o teoría de control óptimo, basada en la descripción de un sistema según el enfoque del espacio de los estados. Los nuevos avances ya no sólo fueron dentro del campo de la ingeniería, sino también en el de la economía, la biología, medicina y ciencias sociales. En esos años tuvieron lugar las aplicaciones más importantes del control óptimo al programa espacial americano.

En particular, en economía, aparecen dichas aplicaciones en los años cincuenta y sesenta del siglo XX, algunas aportaciones que utilizan la teoría de control, aunque se trata de contribuciones aisladas. En los años sesenta se utilizan ya sistemáticamente técnicas de control óptimo en la investigación de la teoría de crecimiento.

A partir de 1970 hay ya gran interés por la teoría de control en distintos campos de la economía, tanto en trabajos teóricos como empíricos, y desde entonces proliferan los trabajos sobre el tema, que ha sido el instrumento básico para describir el comportamiento de individuos y empresas cuando la actividad económica se desarrolla a través del tiempo.

En economía de la empresa se utilizan éstas técnicas, con muy buenos resultados, para el estudio de problemas como, por ejemplo, control de inventarios, selección de inversiones, mantenimiento y reemplazamiento de máquinas, planificación de la producción, política de publicidad, etc., todo ello desde la segunda mitad de los años setenta.

En macroeconomía hubo en los años setenta gran interés por la utilización de la teoría de control Kendrick en 1976 analiza alrededor de noventa aplicaciones. En dicha década, la modelización econométrica y la teoría de control alcanzan un alto grado de madurez y, al mismo tiempo, había importantes apoyos de software que permitían tratar problemas con altos requerimientos computacionales. Al igual que pasó con la Programación lineal (como veremos más adelante), la nueva tecnología, en particular la computacional ha permitido a la optimización llegar a niveles nunca antes imaginados, desarrollando al mismo tiempo subcampos de especialización como los que mencionamos en el capítulo referente a la optimización en general y que cada vez captan un mayor número de investigadores.

A finales de los setenta, se atenuó aparentemente el entusiasmo inicial de la macroeconomía por el control óptimo, a partir de las críticas procedentes de la escuela de la nueva macroeconomía clásica a su utilización en el análisis de políticas alternativas en modelos econométricos.

Paradójicamente, sin embargo, los métodos de teoría de control aunque utilizados en un contexto diferente, constituyen hoy en día el principal instrumento matemático de la nueva macroeconomía clásica

Por tanto, ya sea en el tratamiento “tradicional”o en el tratamiento “nuevo”, los métodos de teoría de control son ampliamente utilizados en el análisis macroeconómico actual. En la literatura económica se habla cada vez con más insistencia de economía dinámica, en la cual la teoría de control es un instrumento fundamental.

Por otro lado, podemos ver en la teoría de control un instrumento de relativo poco tiempo de aparición, por lo que hay un vasto campo de investigación dentro de él mismo, así como desde el punto de vista de la investigación en matemática educativa.

Kalman, uno de los grandes protagonistas de la Teoría de Control moderna, en su artículo (Kalman, 1974), señalaba que, en el futuro, los avances en la Teoría de Control y Optimización de sistemas complejos vendrían de la mano de progresos matemáticos más que de los tecnológicos. Hoy en día es tan fuerte el impulso de las nuevas tecnologías que es un tanto arriesgado sostener dicha afirmación. Lo que si se puede garantizar es que un avance sustancial en Teoría de Control exige esfuerzos tanto en el ámbito de la teoría matemática correspondiente como de las tecnologías necesarias para implementar nuevas, más eficientes y robustas estrategias de control.

Cabe preguntarse si una disciplina como la Teoría de Control, con un pasado tan rico, y que cuenta con tal diversidad de resultados relevantes está ya cerrada y conclusa. Nada más lejos de la realidad. El incesante avance de las nuevas tecnologías y el progreso de nuestra sociedad no hacen más que aumentar el número de ámbitos en los que la Teoría de Control es necesaria para resolver problemas matemáticos nuevos y estimulantes.

Por otro lado, tratando de ver las relaciones entre la Teoría de Control y el Cálculo de Variaciones, podemos ver que, en primer lugar, tienen raíces comunes e, incluso, algunas veces son disciplinas difíciles de distinguir.

La historia del Cálculo de Variaciones está también repleta de grandes "hazañas"matemáticas. Como ya mencionamos anteriormente, la comprensión de que el camino más corto entre dos puntos es el rectilíneo, puede considerarse el punto de partida del Cálculo de Variaciones. En el siglo I de nuestra era, Herón de Alejandría en su obra: "La Catoptrique"mostró que la reflexión de la luz (ángulo de incidencia igual al de reflexión) puede deducirse de un principio variacional simple que garantiza que la luz sigue el camino más corto.

En el siglo XVII Fermat generalizó la observación de Herón y formuló el "principio del tiempo mínimo"según el cual la luz en un medio de velocidad variable sigue el camino que garantiza el tiempo mínimo de recorrido.

Leibniz y Huygens mostraron que la ley de Snell de la refracción se puede obtener a partir del principio de Fermat. En 1691 Jean Bernoulli probó que la catenaria es la curva que proporciona la configuración de una curva de longitud dada y de densidad de masa constante cuyos extremos están fijos.

Aunque, como hemos visto, el Cálculo de Variaciones es una herramienta muy útil, sin embargo, no es suficientemente poderosa para resolver otros muchos de los problemas que se presentan en las aplicaciones.

Así por ejemplo, nos gustaría poder considerar casos donde la función $f\left(x, \dot{x}, t\right)$ es lineal, casos en donde las trayectorias $x(t)$ son funciones más generales y no son necesariamente doblemente diferenciables, casos con restricciones sobre las trayectorias y otras generalizaciones.

Históricamente, los primeros trabajos que buscaron generalizar los resultados obtenidos en el Cálculo de Variaciones, fueron efectuados por Valentine en 1937, Mc.Shane en 1939 y Esténse en 1947. Sin embargo, el tema no atrajo una gran atención sino hasta mediados del siglo XX cuando el matemático ruso Pontryagin y sus colaboradores Boltyanski, Gamkrelidze y Mishchenko, desarrollaron la teoría de control óptimo.

El resultado básico que presentaron es conocido como "el principio del máximo de Pontryagin", que fue publicado, en ruso, en 1958. (La versión en inglés es de 1962).

El problema de control óptimo en tiempo continuo podría plantearse de la siguiente forma:

Se considera un sistema dinámico, formulado en tiempo continuo, en un horizonte temporal dado $\lfloor 0, T \rfloor$, cuya situación inicial viene dada por el vector n-dimensional x_0, y que evoluciona en el tiempo. Dicha evolución depende del valor que se de a ciertas variables, llamadas variables de control, que permiten influir en el sistema.

Sea $\bar{U} = \left\{ u(t) : u \in \bar{U} \right\}$ el conjunto de controles admisibles, donde cada una de las funciones $u(t)$ es continua por pedazos. El conjunto $\bar{U}$ se conoce como región de control y $x(t)$ que supondremos continua y con derivadas continuas por pedazos, la llamaremos variable de estado.

Existe un teorema en ecuaciones diferenciales, conocido como teorema de Peano que garantiza que dada una trayectoria $u^* = u(t)$ y la condición inicial $x(t_0) = x_0$, existe (localmente) una solución única de la ecuación diferencial $\dot{x} = g(x,u^*,t)$, donde $g(x,u^*,t)$ tiene derivadas parciales continuas.

Entonces, un control óptimo es definido como un control admisible que maximiza la funcional objetivo. Por tanto, el problema que nos ocupa es el siguiente:

Dado un sistema dinámico con condición inicial x_0, y que evoluciona en el tiempo de acuerdo con la ecuación de estado $\dot{x} = g(x,u\ \ ,t)$, se trata de encontrar el vector de control admisible y que haga que la funcional objetivo alcance su valor máximo. Expresado en términos matemáticos:

$$\max \quad J(x) = \int_0^T f(x,u,t)dt$$

$$\text{sujeto a: } \dot{x} = g(x,u^*,t),\ x(0) = x_0,\ T \text{ dado y } x(T) \text{ libre}$$

El principio del máximo nos dice cómo resolver este problema y podemos expresarlo de la siguiente manera:

Teorema (Principio del máximo) Supongamos que u^* y x^* resuelven el problema de control óptimo, entonces existe $\lambda(t)$ continua, llamada variable de coestado, tal que el hamiltoniano definido por:

$$H(x,u,\lambda,t) = f(x,u,t) + \lambda(t)(g(x,u,t)),$$

posee un máximo (mínimo) en u^*, es decir,

$$H(x^*,u^*,\lambda,t) \geq H(x,u,\lambda,t), \forall\ u \in \bar{U},\ t \in [0,T]$$

(o bien $\leq$ si se trata de un mínimo). Adicionalmente, $\lambda(t)$, $u^*(t)$ y $x^*(t)$ resuelven el sistema dinámico:

$$\dot{\lambda} = -H_x$$
$$\dot{x} = H_\lambda$$

con la condición inicial $x(0) = x_0$ y posiblemente, alguna condición de transversalidad que surgiría de considerar intervalos de tiempo infinitos, o cualquier variante sobre el intervalo temporal.

Al igual que el Cálculo de Variaciones, la Teoría de Control puede generalizarse por el número de variables, el orden de las derivadas que aparecen y las consideraciones sobre el intervalo de tiempo que son las mismas que vimos en Cálculo de Variaciones y que también en Teoría de Control darán origen a ciertas condiciones de transversalidad que desarrollaremos en las Actividades del curso.

Se puede demostrar que todo problema de cálculo de variaciones puede formularse y resolverse como un problema de control óptimo en tiempo continuo. De hecho, el control óptimo en tiempo continuo es más general y ha desplazado al cálculo de variaciones.

Es importante hacer notar que el cálculo de variaciones se sigue enseñando, pese a la afirmación hecha en el párrafo anterior, entre otras cosas porque muchos artículos sobre problemas económicos están escritos en el contexto de cálculo de variaciones, incluyendo artículos recientes. Por otro lado, la demostración rigurosa del principio del máximo, resultado fundamental en control óptimo, pueden ser mejor comprendidas abordando primero casos particulares que utilizan métodos de cálculo de variaciones, por lo que el cálculo de variaciones facilita una mejor comprensión del control óptimo, y además el cálculo de variaciones permite relacionar de una manera natural la optimización de funciones (optimización dinámica) con la optimización en el epacio R^n.

Una nota que me parece interesante es el hecho de que toda la teoría de control puede desarrollarse a partir del principio de optimalidad de Bellman en lugar del principio del máximo de Pontryagin. La diferencia es que, por un lado, el método de Bellman es intrínsecamente recursivo y su finalidad es encontrar la forma del valor óptimo o función valor. El método de Pontryagin, por otro lado, pone el énfasis en encontrar las trayectorias de las variables de control que conducen a éste valor óptimo. Como una tercera opción, el cálculo en variaciones enfatiza las trayectorias de las variables de estado.

La teoría de control en tiempo continuo puede derivarse a partir del principio de optimalidad; sin embargo, la ecuación diferencial que debe resolverse para obtener la función valor involucra sus derivadas parciales, cuya solución en general, queda fuera del objetivo de las materias sobre optimización dinámica que se imparten en el ITAM.

Sin embargo, si consideramos al tiempo como variable discreta, o sea que t toma valores en el conjunto: $\{0,1,\dots n,\dots\}$, la estructura recursiva del principio de optimalidad resulta sumamente útil. La idea es resolver para el último período, después para los dos últimos períodos, luego para los tres últimos y así sucesivamente. Cuando el número de períodos es grande, este mecanismo resulta extremadamente complejo, pero hoy en día cada vez un mayor número de problemas pueden resolverse por medio de computadoras.

Una ventaja adicional de utilizar el modelo de Bellman es que resulta relativamente simple introducir variables estocásticas en el problema de control.

CAPÍTULO IV

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

4.1 MARCO TEÓRICO

El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas con el fin de manejar las situaciones (Dubinsky, 1996)

Debido a que el objetivo central es proponer y validar una propuesta didáctica, buscamos un Marco Teórico acorde a nuestra necesidad. Buscando dentro de las posibles opciones, encontramos que la Teoría APOE resulta ser un marco teórico ideal debido a que, por un lado ha demostrado su eficiencia en trabajos de investigación en la que el investigador requiere comparar las dificultades de un estudiante sobre un concepto matemático cualquiera, con las construcciones mentales que dicho estudiante pueda haber hecho o le falten por hacer (Ver ejemplos en la pag. 10), que es precisamente lo que requerimos para nuestra Propuesta. Además del éxito en los resultados mencionados en la pag. 10, la Teoría APOE está diseñada para trabajar con conceptos de las matemáticas universitarias, en particular conceptos que requieren de grados altos de abstracción como los que trata la presente investigación.

Debido a que el objetivo central de este trabajo es la construcción y validación de una propuesta didáctica en optimización dinámica y más particularmente, en cálculo de variaciones y teoría de control, hemos considerado que la Teoría APOE sea el marco teórico de este trabajo de investigación.

En la Teoría APOE o APOS (por sus siglas en inglés: Acción, Proceso, Objeto, Esquema), el investigador puede comparar las construcciones de un estudiante sobre un concepto matemático cualquiera, con las construcciones mentales que dicho estudiante pueda haber hecho o le falten por hacer. Esta teoría fue desarrollada por Ed Dubinsky a partir de lo que Piaget llamaba "Abstracción Reflexiva".

Dicha "Abstracción reflexiva"es un mecanismo, introducido por Piaget para describir el desarrollo del pensamiento lógico en niños, y Dubinsky extiende esta idea al mecanismo de construcción de los conceptos matemáticos más avanzados. Este trabajo, de extensión de las ideas de Piaget, fue iniciado por Dubinsky y ha sido retomado y desarrollado por un pequeño grupo de investigadores llamados "Research in Undergraduate Mathematics Education Community"(RUMEC), que han colaborado en proyectos de investigación específicos, usando la Teoría APOS como marco teórico.

La Teoría APOE consiste esencialmente de tres componentes: un análisis teórico sobre las construcciones mentales requeridas para construir algún concepto matemático por parte del estudiante, (en una primera instancia este primer análisis puede depender de la experiencia del profesor). A esta primera componente, se le llama también Descomposición Genética del concepto bajo estudio. Una segunda componente sería el desarrollo e implementación de instrumentos, es decir, por un conjunto de actividades constituídas por un conjunto de acciones y procesos que facilitan la construcción del concepto bajo estudio al alumno. (En algunos casos usando varias estrategias pedagógicas no estándar, tales como aprendizaje cooperativo y construcción de conceptos matemáticos en una computadora) basadas en en el análisis teórico (descomposición genética), así como el desarrollo de instrumentos de validación, con base también en la descomposición genética y, una tercera componente tendría que ver con el análisis y verificación de datos, siguiendo los criterios proporcionados por la propia Teoría APOE, que utiliza los instrumentos de validación mencionados en la segunda componente y que sirve tanto para probar como para refinar tanto el análisis teórico (descomposición genética), como los instrumentos constituídos por las actividades, cuestionarios, exámenes y entrevistas conjuntamente con criterios propuestos en base a dicha descomposición genética. Este ciclo, de tres componentes, se repite tantas veces como sea necesario.

Como podemos observar del párrafo anterior, la Teoría APOE cuenta con un elemento que permite dar una descripción idealizada de las representaciones, vínculos, objetos, procesos y acciones esperadas matemáticamente, que pueden antribuirse a la construcción del concepto. Este elemento que constituye la primera componente en el párrafo anterior se conocee como descomposición genética, y proporciona una hipótesis sobre una descripción detallada de las construcciones que los estudiantes pueden hacer para aprender un concepto. La descomposición genética propuesta se pone a prueba con los estudiantes y los datos que se obtienen pueden aprovecharse, como mencionamos en la tercera componente del párrafo anterior, para refinarla con el objetivo de que explique mejor las construcciones que hacen los estudiantes sobre el concepto matemático bajo estudio. (Dubinsky, 1991 mencionado en Meel, 2003). La descomposición genética también se puede utilizar como una guía en el diseño de material didáctico como se menciona en la segunda componente del párrafo anterior. Es importante destacar que la descomposición genética no es única; distintos investigadores pueden formular descomposiciones genéticas diferentes, pero todas ellas deben validarse a través del análisis experimental, es decir, a través de las construcciones que pueden observarse en las actividades de los alumnos cuando construyen el concepto en cuestión.

El análisis teórico permite mediante la descripción de las construcciones mentales, modelar la epistemología y cognición del concepto matemático estudiado. En su elaboración pueden tomarse en cuenta ya sea la experiencia de profesores e investigadores, datos experimentales surgidos de investigaciones previas y el análisis histórico- epistemológico de los conceptos bajo estudio.

Asiala, M., A. Brown, DeVries D., Dubinsky, E., Mathews D. y Thomas K., (1996), en su trabajo, plantean dos preguntas que deben guiar el trabajo en esta primera componente: ¿qué significa comprender un concepto matemático? y ¿cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un individuo? Este planteamiento promueve la reflexión sobre lo que significa comprender un concepto determinado y las implicaciones que dicha reflexión tiene en la forma como un estudiante lo concibe. Va mucho más allá de la repetición mecánica de algoritmos o de la supuesta construcción de un concepto aislado. De aquí que el objetivo principal del análisis teórico es definir una descomposición genética del concepto que determine un camino viable para que los estudiantes construyan un concepto determinado. Hay que hacer notar que cualquier descomposición genética debe ser el resultado de la aplicación completa de las tres componentes mencionadas, lo que permite documentarla con datos empíricos y refinarla. Desde luego, una descomposición genética refinada en varias ocasiones deberá poder abordar con más detalle y profundidad la construcción de un concepto determinado.

Después del análisis teórico y en particular, después de haber definido la descomposición genética preliminar, es necesario documentarla, es decir, tener alguna certeza de la viabilidad del camino señalado en ella. Para ésto, la segunda componente del marco teórico consiste en el diseño y aplicación de los instrumentos que permitan identificar las construcciones mencionadas en la descomposición genética y aquellas que no se hayan incluído pero que persistan en los procedimientos de los estudiantes. Estos instrumentos deben estar construídos en base a la descomposición genética, para que reflejen las mismas construcciones y mecanismos de construcción expuestas en ella y mediante los cuales, se supone, los estudiantes pueden construir dichos conceptos.

La tercera componente tiene que ver con el análisis de los datos empíricos, obtenidos según se describió en el párrafo anterior. Los resultados obtenidos con la aplicación de los instrumentos de validación deben ser analizados a la luz de la descomposición genética original, para detectar qué elementos no se consideraron en la descomposición genética original o cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se perciben. Esto puede llevar a una reformulación de la descomposición genética y a la determinación de una versión refinada de la descomposición genética original. Este proceso de refinamiento para la descomposición genética, puede repetirse o iterarse varias veces, hasta llegar a una que a criterio de la comunidad educativa interesada, pueda considerarse como suficientemente razonable.

Una descomposición genética parte, como ya se mencionó del análisis de las construcciones que el sujeto hace conforme aprende el concepto matemático en términos de lo que es observable. Estas construcciones se caracterizan bajo los rubros de acción, proceso y objeto.

Cabe mencionar que es posible que distintas descomposiciones coexistan para un mismo concepto, pero es importante que cualquier descomposición genética del concepto matemático sea un instrumento que describa efectivamente las observaciones de los trabajos de los estudiantes (Trigueros y Oktac, 2005)

A continuación, daremos las definiciones de los principales conceptos que forman parte de la Teoría APOE, así como algunos ejemplos de su aplicación. Dichas definiciones las tomamos de RUMEC.

- Accion / Concepción acción: Una acción es una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa. La transformación es llevada a cabo por reacción a una indicación externa que da precisos detalles sobre los pasos a dar. Decimos que un individuo está a nivel de una concepción acción de una transformación dada, si su profundidad de comprensión está limitada a realizar acciones para llevar a cabo esa transformación. Debe indicarse que alguien con una profunda comprensión de una transformación puede realizar bien acciones cuando es apropiado pero no está limitado a realizar acciones.

Ejemplos:

i) Una acción es resolver una ecuación dada siguiendo los pasos de un ejemplo para una ecuación similar. S i uno sólo comprende la resolución de una ecuación siguiendo un ejemplo que puede ser imitado, entonces está a nivel de concepción acción para la resolución de una ecuación. El ejemplo utilizado puede ser un ejemplo previamente memorizado.

ii) En Optimización Dinámica, en particular en Cálculo de Variaciones, un individuo sólo puede resolver el problema aplicando mecánicamente lo hecho en un problema similar, resuelto con anterioridad o bien si se le dan una a una las condiciones de la ecuación de Euler, podríamos afirmar que tiene una concepción acción sobre solución de problemas de optimización en Cálculo de Variaciones. (Podríamos poner un ejemplo análogo en Teoría de Control, entonces, en lugar de ecuación de Euler, hablaríamos del Hamiltoniano.

- Proceso / Concepción Proceso: Cuando una acción es repetida, y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un proceso. Esto es, una construcción interna se hace y realiza la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que ha construído un proceso puede describirlo, o igualmente invertir los pasos del proceso sin hacer los mismos. En contraste con una acción, un proceso es percibido por el individuo como interno, y bajo su control más que algo que se hace en respuesta a indicaciones externas. Decimos que un individuo está al nivel de concepción proceso de una transformación dada, si la profundidad de su comprensión está limitada a pensar sobre la transformación como un proceso.

Ejemplos:

i) Un individuo realiza un proceso cuando resuelve una ecuación guiado por el formulario que puede dar la solución. En este caso, un individuo es capaz de describir los pasos necesarios para resolver una ecuación sin realmente hacerlos. Tal estudiante puede también ser capaz de invertir los pasos para mostrar que una posible solución es en realidad una solución. Uno está a nivel de concepción proceso de la resolución de una ecuación si tiene un proceso para encontrar la solución, pero no es capaz de realizar una acción sobre el conjunto solución sin realmente encontrar las soluciones.

ii) Si un individuo resuelve el problema de optimización en cálculo de variaciones porque conoce la ecuación de Euler (o el Hamiltoniano en Teoría de control). Además, puede invertir los pasos y dada cualquier trayectoria puede determinar si es o no solución. Está a nivel de concepción proceso si no es capaz de realizar una acción sobre la trayectoria solución, sin haber obtenido a esta última.

- Objeto / Concepción Objeto: Los individuos pueden construir objetos cognitivos de dos formas. Cuando un individuo reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso concreto, llega a ser consciente del proceso como una totalidad, se da cuenta que la transformación (que es acción o proceso) puede actuar sobre él, y es capaz realmente de construir tal transformación, entonces podemos decir que el individuo ha reconstruído este proceso como un objeto cognitivo. En este caso decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. Una segunda forma de construir un objeto cognitivo sucede cuando un individuo reflexiona sobre un esquema, llega a ser consciente del esquema como una totalidad, y es capaz de realizar acciones sobre él, entonces decimos que el individuo ha tematizado el esquema en un objeto. Decimos que un individuo tiene una comprensión al nivel de concepción objeto de un concepto matemático cuando la profundidad de comprensión del individuo de una idea o concepto incluye esa idea o concepto como un objeto. El individuo es capaz de realizar acciones sobre el objeto. Tal individuo es capaz también de desencapsular un objeto en el proceso del cual proviene cuando es necesario, o en el caso de un esquema tematizado deshacerlo en sus distintos componentes.

Ejemplos:

i) La Geometría Euclideana es un ejemplo de esquema tematizado, que es un objeto para aquel que conoce varias geometrías, se traslada entre ellas, las compara y contrasta y selecciona la Geometría adecuada para resolver un problema determinado.

ii) Un estudiante que ha tematizado su esquema para resolver ecuaciones algebraicas puede seleccionar los métodos apropiados y comprender las relaciones entre procedimientos para hallar las posibles soluciones y encontrar conjuntos de soluciones.

iii) Un estudiante que puede resolver problemas de optimización dinámica, escogiendo el método apropiado (ecuación de Euler en Cálculo de Variaciones o el Hamiltoniano en Teoría de Control) y comprendiendo la relación entre ambos métodos para hallar las soluciones.

Según vimos, desde el punto de vista de la Teoría APOE la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: acción, proceso y objeto, sin embargo, hay que aclarar que el paso por estas tres etapas no es necesariamente secuencial. Una persona puede pasar mucho tiempo en etapas intermedias e incluso estar en una etapa de construcción para ciertos aspectos de un concepto y en otra para otros. Lo que sí puede afirmarse es que el manejo que una persona hace de un concepto ante distintas situaciones problemáticas es diferente cuando un individuo responde con un nivel caracterizado por proceso en la teoría que cuando lo hace a nivel acción, y cuando lo hace a nivel objeto que cuando lo hace a nivel proceso. Es claro además, que el tipo de respuesta del sujeto dependerá en gran medida de la demanda cognitiva del tipo de problema al que responde.

- Esquema: La noción de esquema también proviene de las ideas de Piaget (Piaget, 1971, 1972), sin embargo daremos la definición de esquema que da RUMEC. Un esquema para una determinada parte de Matemáticas es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en una estructura coherente en la mente del individuo y que puede ser evocado para tratar una situación problemática que involucra esa area de las Matemáticas. Una importante función y definitiva característica de la coherencia es su uso en determinar qué está en el ámbito del esquema y qué no.

Habría que aclarar, sin embargo que, el uso en investigación y en enseñanza de la noción de esquema es más reciente y por lo mismo se cuenta con menos referencias de su aplicación al análisis de la manera como los estudiantes construyen los conceptos matemáticos.

Ejemplos

i) Un estudiante puede tener un esquema para resolver ecuaciones que incluya varios métodos a través de transformar las ecuaciones y una concepción de lo que significa resolver una ecuación.

ii) El ejemplo del inciso anterior se puede aplicar también a la solución de problemas de Optimización Dinámica (ya sea en Cálculo de Variaciones o Teoría de Control)

iii) Un estudiante tiene un esquema de funcional si puede distinguir quienes son funcionales, quiénes no y por qué.

A continuación, veremos la forma en que se puede medir la evolución de los esquemas en un individuo.

- Triada del desarrollo de un esquema: Los esquemas se desarrollan a través de estados o niveles en un orden concreto. Inicialmente, en el desarrollo de un esquema, está en el estado o nivel intra. Este es seguido por el estado o nivel Inter, y finalmente, por el estado o nivel trans. Esta terminología fue introducida por Piaget y García en su discusión del desarrollo del conocimiento. Específicamente, donde hablan más explícitamente de la evolución de los esquemas, así como de los mecanismos involucrados en esta evolución es en su trabajo conjunto: “Psicogénesis e historia de la ciencia”(1996). RUMEC ha aplicado sus ideas específicamente al desarrollo de un esquema.

Ejemplos

- En un esquema geométrico pueden ser referidos como intrafigural, interfigural y transfigural.

- En un esquema analítico pueden ser referidos como intraoperacional, interoperacional y transoperacional.

Nota: Generalmente RUMEC simplifica el uso a los términos intra, inter, y trans.

- Estado intra de desarrollo del esquema: El estado intra está caracterizado por centrarse sobre aspectos individuales aislados de otras acciones, procesos y objetos de naturaleza similar. El individuo no ha construído ninguna relación entre ellos.

Ejemplos:

i) En el desarrollo de un esquema de la regla de la cadena, un estudiante puede usar distintas reglas tales como la regla general de potencias y no reconocerlas como relacionadas de ninguna manera o como casos especiales de la regla de la cadena.

ii) En el desarrollo de un esquema de funcional, un estudiante puede ver a una función de varias variables y no reconocerla como un caso particular de funcional.

- Estado Inter. De desarrollo de un esquema: El estado Inter. está caracterizado por la construcción de relaciones entre acciones, procesos y objetos. Por ejemplo, uno puede comenzar a ver distintos ejemplos como casos especiales de un concepto más general. A este nivel, uno comienza a agrupar información de naturaleza similar y quizás hasta los llame por el mismo nombre.

Ejemplos:

i) Calculando la derivada de una función, el estudiante ve la regla general de potencias y otras situaciones especiales tales como aquellas que involucran funciones trigonométricas para las cuales las reglas han sido aprendidas como casos especiales de la “regla de la cadena”y las vincula bajo esa descripción. El estudiante todavía no comprende por qué son casos especiales, pero quizás piensa en términos de procedimientos similares implicando entradas y salidas de funciones. Tal estudiante podría estar en el estado Inter. del desarrollo del esquema de la regla de la cadena.

ii) Si un estudiante observa una función de varias variables y sabe que es un caso particular de una funcional, aunque todavía no comprende por qué es un caso particular. Tal estudiante podría estar en el estado Inter. del desarrollo del esquema de funcional.

- Estado Trans de desarrollo del esquema: Este estado está caracterizado por tener construída una estructura subyacente completa en la que las relaciones descubiertas en el estado inter. son comprendidas y que da al esquema coherencia. Una importante función y característica de la coherencia es usarla en decidir qué está dentro del esquema y qué no. En el estado trans la comprensión va desde una lista a una regla. En el estado trans de desarrollo la colección (acciones, procesos, …) puede ahora ser referida como un esquema y ahora tiene la necesaria coherencia y puede ser tematizado.

Ejemplos

i) Uno está en el estado trans de desarrollo del esquema de la regla de la cadena si comprende varios casos especiales como aplicación de la regla de la cadena, identificando ciertas funciones que están compuestas. El estudiante es también capaz de aplicar la regla de la cadena a nuevas situaciones buscando una composición de funciones. En este caso decimos que el estudiante tiene un esquema trans para la regla de la cadena.

ii) Un estudiante está en el estado trans de desarrollo del esquema de funcional si comprende varios casos especiales de funcional. Además, el estudiante puede distinguir los distintos casos especiales, aglutinando al dominio de la función bajo el concepto de espacio vectorial normado y de ahí puede construir distintos casos especiales de funcional.. En este caso decimos que el estudiante tiene un esquema trans para el concepto de funcional.

Madurez de un esquema: Las discusiones que involucran la efectividad de un esquema son referidas por la etiqueta: “madurez del esquema”. Esto es análogo a lo que sucede con el concepto de función. Si el proceso se reduce a un proceso sintáctico de organizar símbolos según una fórmula, según ciertas reglas sintácticas, y si es este proceso el que es encapsulado para obtener un objeto, entonces el estudiante termina con una concepción débil de función. Por otra parte, la causa no es un fracaso al encapsular, sino la encapsulación de un proceso que no es muy rico. Análogamente, uno puede tematizar un esquema que tiene una estructura de débil coherencia y de este modo uno puede no ser capaz de aplicar el esquema a muchas nuevas situaciones.

Ejemplos

i) Uno puede tener un esquema para regla de la cadena que permita diferenciar funciones definidas por fórmulas algebraicas estándar, pero no ser capaz de reconocer la composición de funciones que involucran funciones definidas por integrales definidas y de ete modo ser incapaz de aplicar la regla de la cadena a este último tipo de funciones. Un esquema débil para la composición de funciones podría llevar a un esquema débil de regla de la cadena.

ii) Un estudiante puede tener un esquema para funcional que permita obtener su valor para aquellos integrandos de la funcional en que haya una sóla variable y aparezca únicamente la derivada de primer orden y no ser capaz de determinar el valor de una funcional donde el integrando tenga varias variables o aparezcan derivadas de orden superior. Un esquema débil para este tipo de funciones que aparecen en el integrando de una funcional podría llevar a un esquema débil de funcional.

Es conveniente hacer notar que los esquemas que forman la estructura matemática de un individuo no están acabados, son estructuras dinámicas que evolucionan constantemente cada vez que un nuevo objeto matemático es agregado a sus estructuras previas. Estos pueden ser más o menos coherentes y esta coherencia está relacionada con la capacidad del individuo para determinar si un esquema le permite solucionar un problema particular. Dubinsky (1994) menciona que un esquema puede utilizarse para resolver una situación matemática y éste puede ser tematizado en un objeto para realizar nuevas acciones y procesos sobre él. Esta cualidad fractal de considerar los esquemas como nuevos objetos permite establecer múltiples relaciones entre los conceptos previos y aquellos nuevos conceptos que el individuo busca integrar a sus estructuras. (Meel, 2003).

Este modelo de construcción del conocimiento matemático puede ser representado como una espiral donde la profundidad con la que un estudiante comprende un concepto está ligada con las relaciones que logra establecer con otros conceptos preexistentes y aquellos que se construyen simultáneamente. Así, un individuo puede establecer conexiones entre dos o más construcciones y elaborar nuevas estructuras en un nivel más elevado, estableciendo una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos.

Al respecto, afirma Dubinsky (1997): “Los objetos una vez construídos pueden ser transformados a través de acciones en un nivel más alto y construir nuevos procesos y objetos y así sucesivamente. Esto puede continuar indefinidamente. Una acción, proceso u objeto puede ser reconstruído, como resultado de experiencias con nuevos problemas en un plano superior, interiorizando acciones más sofisticadas y encapsulando procesos enriquecidos. El nivel inferior de construcción no se pierde, sino que forma parte de una concepción enriquecida”.

- Abstracción Reflexiva

El mecanismo para pasar de un nivel a otro es siempre, y como ya se mencionó, la abstracción reflexiva, entendida en el sentido de la reflexión que hace el sujeto sobre el sentido de las operaciones que se efectúan sobre el objeto matemático y del efecto que tienen sobre él. Este mecanismo, es en la Teoría APOE como en la de Piaget un proceso que permite al individuo, a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos en un cierto nivel de pensamiento, lo que implica, entre otras cosas, la organización o la toma de conciencia de dichas acciones y separar la forma de su contenido, e insertar este descubrimiento en un marco intelectual reorganizado en un nivel superior (Dubinsky, 1991, 1992). Este mecanismo se activa a través de las acciones físicas o mentales que el sujeto hace sobre el objeto de conocimiento. La interacción entre el sujeto y el objeto de conocimiento, al igual que en el caso de la Teoría de Piaget, es dialéctica, es decir, no es posible separar al objeto de conocimiento del sujeto que conoce.

Dubinsky considera al mecanismo de la “abstracción reflexiva”como un mecanismo general que puede ser usado, en principio, para describir la forma en que cualquier concepto matemático se construye, suponiendo desde luego, que el investigador necesita hacer uso de sus conocimientos matemáticos.

Piaget distinguió tres clases principales de abstracción: i) Abstracción empírica, mediante este mecanismo se da significación a las propiedades de los objetos sobre los cuales se ejercen acciones físicas concretas, Dubinsky interpreta en esta afirmación que las experiencias proceden de acciones sobre un objeto externo. El conocimiento de dichas propiedades es, igualmente, interno y es el resultado de construcciones hechas internamente por el sujeto. De acuerdo a Piaget, esta clase de abstracción nos conduce a la obtención de propiedades comunes de objetos y algunas generalizaciones, esto es, el paso de “algunos”a “todos”. ii) Abstracción pseudo-empírica, que sería un tipo de abstracción intermedia entre la abstracción empírica y la abstracción reflexiva, este tipo de abstracción se presenta cuando se ponen de manifiesto en forma externa propiedades que las acciones del sujeto han introducido en los objetos. Por ejemplo si consideramos la correspondencia uno-uno entre dos conjuntos de objetos que el sujeto de alguna forma ha establecido, podríamos pensar que es un tipo de abstracción pseudo-empírica porque el sujeto lo ha hecho con objetos, sin embargo, las relaciones que ha establecido entre los elementos de ambos conjuntos nos permite ver que son debidas a las acciones del sujeto. En este caso, el entender lo que es una relación uno-uno entre dos conjuntos es el resultado de construcciones internas hechas por el sujeto. Finalmente, iii) la abstracción reflexiva se presenta cuando (en el lenguaje de Piaget) se han dado las “coordinaciones generales”de acciones por lo que la fuente de conocimiento es completamente endógena. Un ejemplo de este tipo de abstracción es el concepto de anillo euclidiano, al que se llega en base a una abstracción y generalización del concepto de enteros.

Se puede ver también que las diferentes clases de abstracción no son completamente independientes. Las acciones que conducen a las abstracciones pseudo-empírica y reflexiva son hechas sobre objetos cuyas propiedades únicamente las puede conocer el sujeto a través de una nueva abstracción empírica. Por otro lado, la abstracción empírica se hace posible a través de esquemas de asimilación que son construidos por medio de abstracción reflexiva.

En la abstracción empírica el sujeto observa un número de objetos y abstrae una propiedad común. La abstracción pseudo-empírica procede de la misma manera, después que las acciones se han transformado en objeto. La abstracción reflexiva, es mucho mas complicada. No hay sorpresa cuando de acuerdo a Piaget: “El desarrollo de las estructuras cognitivas es debida a la abstracción reflexiva…”

Dentro de su obra de Piaget, dedicó dos libros a la interpretación de resultados de múltiples experimentos con niños en términos de la abstracción reflexiva, pues de hecho no llevó a cabo experimentos con adultos. Algunos ejemplos de lo hecho por Piaget serían los siguientes:

i) Conmutatividad en la suma. El descubrimiento de que el número de objetos de una colección es independiente del orden en el cual los objetos fueron colocados, requiere primero que los niños cuenten los objetos, los recuerden, los vuelvan a contar, los vuelvan a recordar, etc. Cada una de esas acciones es interiorizada y representada internamente de alguna manera para que de esta forma los niños puedan reflexionar sobre lo hecho, comparando las sumas hasta darse cuenta de que siempre obtienen el mismo resultado.

ii) El concepto de número. De acuerdo a Piaget, el concepto de número es construido mediante la coordinación de dos esquemas, un primer esquema (de clasificación) sería la construcción de un conjunto cuyos elementos son unidades (indistinguibles entre si), y el segundo esquema (de seriación) el cual sería en sí mismo una coordinación de varias acciones como hacer pares, ternas, etc.

Como podemos observar de lo dicho en los últimos párrafos, la abstracción reflexiva difiere de la empírica en que la primera se lleva a cabo con acciones sobre objetos físicos, mientras la segunda lo hace con objetos mentales y la primera difiere de la pseudo-empírica en que la abstracción reflexiva trata no tanto con acciones en sí mismas como lo haría la abstracción pseudo-empírica, sino con las interrelaciones entre dichas acciones.

Como decíamos líneas arriba, estos tres tipos de abstracciones no son independientes, la abstracción reflexiva depende de la empírica y de la pseudo-empírica. La abstracción empírica le permite a un individuo abstraer propiedades comunes de varios objetos, logrando realizar acciones sobre dichos objetos mediante la abstracción pseudo-empírica, y la abstracción reflexiva le permite la interiorización y coordinación de dichas acciones en nuevas acciones y finalmente en nuevos objetos (Dubinsky, 1991).

Dubinsky considera cinco tipos de abstracción reflexiva, cuatro de ellos determinados por Piaget. A continuación presentamos su descripción (Dubinsky, 1991):

- Interiorización: Piaget caracterizó este mecanismo como la traducción de una sucesión de acciones materiales a un sistema de operaciones interiorizado. Dubinsky resume este mecanismo como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno. Así, mediante este mecanismo es posible que una acción sea transformada en un proceso.

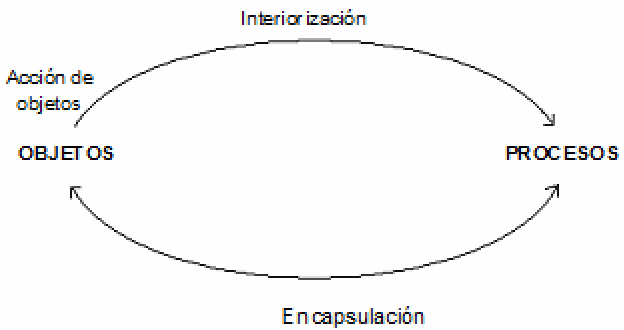
- Coordinación: Este mecanismo fue descrito por Piaget como la coordinación general de acciones, refiriéndose a todas las maneras de usar una o más acciones para construir nuevos objetos o acciones. Mediante este mecanismo, dos ó más procesos pueden coordinarse para generar nuevos procesos.

- Encapsulación: Este mecanismo es considerado como el más importante para la construcción del conocimiento matemático y consiste básicamente en la conversión de un proceso (una estructura dinámica) en un objeto (una construcción estática).

- Generalización: Este mecanismo está relacionado con la capacidad del individuo para aplicar un determinado esquema en un contexto distinto, está determinado por su capacidad para determinar los alcances de sus construcciones. En este mecanismo, los esquemas no cambian, pero otros objetos pueden ser asimilados por un esquema para ser contextualizados en otros contextos.

- Reversión: Este mecanismo fue agregado por Dubinsky como un caso particular de abstracción reflexiva. Consiste básicamente en desencapsular un objeto o revertir el mecanismo que lo generó. De esta manera, un individuo puede regresar sobre el proceso siempre que lo requiera.

A continuación, ilustramos mediante un diagrama, el proceso dinámico por el cual un individuo construye sus estructuras matemáticas.



Una cualidad muy importante de la Teoría APOE es que parte de la reflexión sobre los conceptos desde la propia Matemática, reconociendo que los procesos involucrados en la construcción de los conceptos matemáticos son distintos a los requeridos en otras disciplinas (Trigueros, 2005).

La Teoría APOE inicia con el análisis de los conceptos matemáticos y determina un camino cognitivo para su construcción mediante el establecimiento de conexiones con otros conceptos. Dubinsky considera que los conceptos matemáticos no se aprenden directamente, ya que un individuo está en capacidad de aprender dichos conceptos si posee las estructuras mentales apropiadas para comprenderlo.

- Descomposición Genética: El primer paso en la Metodología RUMEC está dedicado a un análisis teórico de un concepto matemático en términos de las construcciones mentales que un aprendiz puede hacer en orden a desarrollar la comprensión del concepto. El resultado de este análisis teórico se denomina descomposición genética para el concepto. Es una detallada descripción de las construcciones mentales que un individuo puede hacer para trabajar con éxito con un concepto matemático concreto. Es importante enfatizar que una descomposición genética no es única (Vidakovic, 1993).

Para un concepto concreto de estudio, nosotros presentamos una descomposición genética que está basada en un marco teórico de aprendizaje general, la totalidad de nuestras observaciones y experiencias y nuestra propia comprensión de las matemáticas implicadas. Esto nos sirve como un posible “guía del camino / mapa a recorrer”por alguien que aprende este concepto.

El proceso de construcción de una buena descomposición genética, o al menos de una adecuada, es, en general, bastante largo. En este momento se cuenta con descomposiciones genéticas para muchos conceptos del Cálculo, del Álgebra Lineal, del Álgebra Abstracta, de Ecuaciones Diferenciales y de Lógica.

- Problema Complejo: Para fines de nuestra investigación, podemos considerar un problema complejo aquél cuyo proceso de solución o análisis implica, más que la yuxtaposición de conceptos independientes, su interrelación. En problemas de esta naturaleza el estudiante requiere considerar esos distintos conceptos además de la manera en la que afectan a la solución cuando se tienen en cuenta de manera conjunta.

- Ciclo ACE: Un instrumento pedagógico usado por Dubinsky es el Ciclo de enseñanza ACE, llamado así por las siglas de sus componentes: (Actividades, discusión en clase y ejercicios). A diferencia de otras teorías, en la Teoría APOE no se trata únicamente de describir cómo se construye el conocimiento matemático, sino también provee de una estrategia didáctica que promueva la construcción cabal de ese conocimiento por parte de los estudiantes. Aquí podemos encontrar una dimensión didáctica de la Teoría APOE. Las componentes del Ciclo ACE son:

    - Actividades: diseñadas en base a la descomposición genética y en muchas ocasiones se ofrece en un laboratorio con computadoras, donde los estudiantes diseñan programas que les permiten hacer las construcciones mentales sugeridas por el análisis teórico.

    - Discusión en clase: Dentro del salón (sin computadoras) los estudiantes discuten sobre las actividades. El profesor se convierte en mediador de la discusión, aunque la induce hacia el fin deseado.

    - Ejercicios: Generalmente, se asignan ejercicios tradicionales a los estudiantes, a los que se les pide trabajar en equipos. Su objetivo es promover nuevamente la reflexión sobre los conceptos que se han trabajado en clase y así brindar a los estudiantes de nuevas oportunidades de construcción de conocimiento. En esta última componente se destaca el aprendizaje colaborativo, que tiene evidentemente una dimensión social.

Para poder explicar con más claridad los elementos básicos del Marco Teórico, retomaremos algunos resultados teóricos fundamentales de la teoría piageteana.

¿Por qué regresar en esta época al trabajo de Piaget?, ¿No es un trabajo superado?, ¿Qué nos puede aportar en el ámbito de la Matemática Educativa?

El trabajo de Piaget es tan amplio, la gama de ideas que trabajó en el desarrollo de su epistemología es tan vasta que aún hay mucho por explorar en la relación de sus ideas sobre la construcción del conocimiento con la investigación en la enseñanza de matemáticas.

El interés de Piaget consistía en desarrollar una teoría del conocimiento que pudiera sustentarse experimentalmente. La Epistemología, desde la perspectiva de Piaget puede dejar de ser una parte de la Filosofía, dejar de ser especulativa, para volverse una Ciencia.

Piaget cambió la pregunta que había regido el pensamiento epistemológico por muchos años: ¿cómo se adquiere el conocimiento?, por una nueva pregunta que pudiera ser contrastada experimentalmente: ¿cómo se pasa de un nivel de conocimiento a otro? Si bien al buscar la respuesta a esta pregunta Piaget no se involucró directamente con el problema de la educación, las consecuencias de su teoría han servido como fundamento de una gran cantidad de teorías en este ámbito y de muchas experiencias educativas.

La obra de Piaget es un parteaguas en la historia de la Epistemología. Profundizar en ella ayuda a buscar caminos e ideas que sirven para mejorar la comprensión de la manera en que los individuos aprenden Matemáticas.

Piaget es un autor fundamental en el desarrollo de la teoría epistemológica llamada “constructivismo”, en la que entre otras cosas, se afirma que la mente (incluso la de un niño), no está en “blanco”y que al interactuar con el medio a través de sus propios instrumentos de conocimiento y mediante un proceso dialéctico, la percepción de los objetos del entorno y sus significaciones pasan a ser propias del sujeto, que puede ser niño, adolescente o adulto.

Un postulado de la teoría de Piaget consiste en afirmar que existe un “cierto paralelismo”entre la forma en que el conocimiento colectivo (de la humanidad) evoluciona (su génesis) y la forma en la que el individuo construye su propio conocimiento, lo que resalta la importancia de conocer la evolución epistemológica de los conceptos en la historia de cada disciplina y en el individuo, para poder construir a partir de éstas una adecuada didáctica.

Como afirmamos algunos párrafos atrás, Piaget introduce el mecanismo de “Abstracción reflexiva”para describir la construcción de estructuras lógico-matemáticas en el niño en el transcurso de su desarrollo cognitivo. Dubinsky menciona dos características importantes sobre la abstracción reflexiva dada por Piaget: La primera afirma que la abstracción reflexiva no tiene de manera absoluta ningún principio (la mente del niño no está en blanco), pero está presente desde los primeros años en coordinación con las estructuras sensoriales y motoras del individuo (instrumentos de conocimiento del sujeto en los primeros años). La segunda observación tiene que ver con que esta forma de conocer por parte del niño, se continúa en el transcurso del tiempo hasta la edad adulta en que llega, a conocer conceptos matemáticos avanzados, extendiendo ésta suposición hasta llegar a decir que toda la historia del desarrollo de las matemáticas, desde la antigüedad hasta nuestros días pueden ser consideradas como un ejemplo de la forma en que actúa el mecanismo de “abstracción reflexiva”.

Habría que enfatizar que Piaget trabajó únicamente con niños y escribió alrededor de 6 artículos y dos libros sobre educación. Hay quienes piensan (en particular, Dubinsky) que una razón por la que Piaget escribió tan poco sobre educación se puede encontrar en los mismos límites de la Pedagogía Escolar tradicional. Quizá, sintió que el aprendizaje escolar tradicional, resultaba una influencia negativa para el desarrollo intelectual. Piaget se opuso también a la manera de examinar a los niños, considerando a esta forma de examinar como “una verdadera plaga en la educación” (Dubinsky, 1996.c)
.

Uno de los temas principales del trabajo de Piaget y García (Piaget, García, 1996) es que la historia del desarrollo intelectual no tiene que ver con la adquisición de gran cantidad de conocimiento específico, sino más bien, tiene que ver con los poderosos mecanismos emergentes por los que un individuo crece en su habilidad de darle sentido a situaciones complejas. Estos mecanismos incluyen: abstracción reflexiva, las dicotomías de asimilación / acomodación y desequilibración / reequilibración, así como la tricotomía de Intra, Inter, y Trans. Más específicamente, de acuerdo a la adaptación que Dubinsky hace de la epistemología de Piaget, el entendimiento conceptual de un concepto o teoría matemática dada pasa, de manera no secuencial, a través de las concepciones acción, proceso y objeto y dichas concepciones son coordinadas dentro de esquemas que son usados para desarrollar actividades ligadas a la solución de problemas matemáticos relacionados con dicho fenómeno.

El desarrollo de dichos mecanismos sólo se da con la presencia de experiencias apropiadas y, como muchas veces mencionó Piaget, bajo la influencia de la interacción social.

Una seria dificultad para llevar a cabo la transición en la Teoría de Piaget, es que el entendimiento de los conceptos tiene como base la manipulación de objetos físicos. Como el nivel matemático de los conceptos crece, es necesario, de acuerdo a Piaget, construir nuevos objetos, ya no físicos sino mentales, y manipularlos con el fin de construir ideas matemáticas; esto implica la necesidad de buscar maneras en que los estudiantes ejerzan acciones sobre objetos abstractos. (Piaget et al., 1996 y Dubinsky, 1991, b).

La dificultad mencionada en el párrafo anterior estriba en extender las ideas de Piaget para encontrar sustitutos apropiados para los objetos físicos. En algunos casos, por ejemplo en el trabajo de Dubinsky, la computadora ha sido usada con tal propósito. Para precisar este punto es conveniente recordar que Dubinsky considera que la Pedagogía asociada a la Teoría APOE debe tener principalmente las siguientes tres metas:

- Investigación en el Aprendizaje
- El ciclo de enseñanza ACE
- El aprendizaje colaborativo

En cuanto a la investigación en el aprendizaje piensa que hay que entrevistar a los estudiantes para conocer cómo razonan y hacen que una situación matemática tenga sentido. Así como diseñar instrumentos de validación, que deben (al igual que las entrevistas) estar basados en la Descomposición Genética.

Sobre el ciclo de enseñanza ACE dice que la estructura de un curso podría hacerse en un ciclo con tres componentes: Actividades (propuestas en base a la descomposición genética) y que pueden ser diseñadas para resolver en un laboratorio de cómputo, la segunda componente sería la discusión en clase de dichas actividades, discutiendo los problemas y sus soluciones y finalmente, la tercera componente sería dejar ejercicios de tarea basados en las mismas actividades y que tienen como objetivo reforzar lo que se ha aprendido, así como servir de punto de partida para trabajo futuro.

La actividades en la computadora buscan suplir los objetos físicos de Piaget. En general todas las actividades y en particular, las que son diseñadas para la computadora deben estar hechas de tal forma que lleven al estudiante a una desequilibración y al mismo tiempo deben de proveerlo con lo necesario para dar una oportunidad al estudiante, para que con una base experimental llegue a construir conceptos matemáticos y a descubrir ideas matemáticas específicas. De aquí el estudiante volvería a la reequilibración sobre el concepto matemático que se trate.

En cuanto al aprendizaje colaborativo Dubinsky dice que si los estudiantes llevan a cabo todo este trabajo incluyendo las tareas y exámenes en lo que denomina “grupos cooperativos", están creando un ambiente propicio para la interacción social que ayude al crecimiento del aprendizaje

Hay que hacer notar que la metodología recién descrita no implica que todos los trabajos de investigación que tengan a la Teoría APOS como marco teórico deban utilizar actividades mediadas por computadoras dentro del ciclo ACE.

Dubinsky llevó a cabo una transposición de la epistemología piagetiana al contexto de la investigación en Educación Matemática. Él propone que las ideas de Piaget son susceptibles de extensión a la construcción de conceptos matemáticos que aparecen en los estudios universitarios. En particular, afirma Dubinsky que hay evidencias de que conceptos como inducción matemática, funciones, independencia lineal, espacios topológicos, etc., podrían ser analizados utilizando las mismas nociones que Piaget usó para describir la construcción de conceptos por parte de los niños, tales como aritmética, proporción y medidas simples, tomando en consideración además la naturaleza propia de la didáctica de las matemáticas. (Trigueros, 2005).

Dubinsky, fundador de la Teoría APOE, desarrolló su teoría con base en la epistemología de Piaget, como ya se ha mencionado. Con base en las ideas de Piaget y en su propio interés por el aprendizaje de los alumnos, Dubinsky considera como fines del trabajo de investigación usando la Teoría APOE los siguientes:

- Centrarse en los mecanismos, por medio de los cuales se logra el desarrollo intelectual. Estos mecanismos incluyen a la abstracción reflexiva, y a la dicotomía de desequilibración / reequilibración.

- Ayudar a los estudiantes en la construcción de acciones, interiorizarlas en procesos y encapsular procesos en objetos.

- Ayudar a los estudiantes a ser conscientes de las estructuras que han construído, para conectarlas con conceptos matemáticos y llevar a cabo nuevas construcciones para afrontar nuevas situaciones.

- Cambiar el papel del maestro del papel de "dar información"al de guía y líder de discusiones que permitan la construcción de los conceptos.

- Poner atención a lo que dicen los estudiantes, sus errores y sus aciertos, para tratar de entender su manera de razonar y apoyarlos en la construcción de los conceptos.

- Crear situaciones que forcen a los estudiantes a hacer construcciones mentales para resolver situaciones-problema matemáticos.

- Dar a los estudiantes bases experimentales para los conceptos antes de dar definiciones formales que estructuran los conceptos.

- Dar a los estudiantes la oportunidad de descubrir los conceptos matemáticos antes de ser explicados por otros estudiantes o por el profesor.

- Tratar de crear un ambiente en el cual los estudiantes tengan la oportunidad de tener una rica interacción social tanto con otros estudiantes, como con el profesor. (Dubinsky, 1991, b, p.139)

Al ser la Teoría APOE una teoría cognitiva constructivista, supone que la comprensión de un individuo de los conceptos matemáticos resulta de la construcción o reconstrucción de acciones matemáticas, procesos y objetos y organiza éstos en esquemas a fin de usarlos en situaciones de resolución de problemas. El progreso en la comprensión se hace generalmente haciendo una reconstrucción en una situación problemática donde el problema tal vez es similar pero es diferente de manera importante de situaciones problemáticas previas.

La reconstrucción no es exactamente la misma como la que existía previamente, y puede de hecho contener uno o más avances a un nivel más sofisticado de construcción. Un aspecto más de esta aproximación es la creencia de que la construcción o reconstrucción de estructuras existentes se realiza por tener lugar en un contexto social.

En esta teoría, del mismo modo que en la mayor parte de las teorías que existen en la educación matemática, se toma en consideración que el proceso de aprendizaje de los conceptos matemáticos no termina en la escuela, sino que sigue en el tiempo ante la necesidad de entender nuevas situaciones y resolver nuevos problemas.

Para los investigadores de RUMEC, el punto de vista de la Teoría APOE está relacionado con las ideas Piagetianas de desequilibración, acomodación, asimilación, reflexión, la tríada y la evoluació de los esquemas. De hecho para RUMEC su perspectiva teórica es en sí misma el resultado de una reconstrucción de su comprensión de la Teoría de Piaget para extender esta Teoría al aprendizaje de las Matemáticas después de la Secundaria y Preparatoria.

Podríamos resumir lo dicho en el marco teórico con lo siguiente:

La Teoría APOE es una teoría de tipo cognitivo-constructivista iniciada por Dubinsky y continuada por el grupo de investigadores de RUMEC; es una adaptación de la Teoría de Piaget sobre la abstracción reflexiva. Persigue modelizar las construcciones mentales utilizadas en el aprendizaje matemático avanzado. Considera que "comprender un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construídos sobre los que se ejercen acciones; las acciones son luego interiorizadas para formar procesos que son despúes encapsulados para formar objetos.

Los objetos pueden ser desencapsulados de nuevo a los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente, las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas" (Asiala, et al., 1996).

Los investigadores que siguen esta teoría la utilizan para construir descomposiciones genéticas de los conceptos matemáticos avanzados y diseñar secuencias (instrumentos) de enseñanza y validación que reflejan las estructuras genéticas que han construído y probado.

La Teoría APOE es básicamente una teoría que epistemológica y cognitivamente presenta explícitamente un modelo didáctico, aunque tiene otras dimensiones que en algunas ocasiones sólo aparecen implícitamente, como son la dimensión social y cultural. Para dar un ejemplo sobre la dimensión epistemológica, recordemos que un postulado de la teoría de Piaget consiste en afirmar que existe un "cierto paralelismo"entre la forma en que el conocimiento colectivo (de la humanidad) evoluciona (su génesis) y la forma en la que el individuo construye su propio conocimiento, lo que resalta la importancia de conocer la evolución epistemológica de los conceptos en la historia de cada disciplina y en el individuo, para poder construir a partir de éstas una adecuada didáctica. Desde luego, Dubinsky parte de la epistemología Piageteana. La teoría APOE se interesa además y de manera preponderante en la forma como los individuos cambian de un estado de conocimiento matemático a otro.

Otro ejemplo, referente a la dimensión social, aparece cuando al hablar Piaget de los mecanismos que permiten construir los conceptos matemáticos (abstracción reflexiva, las dicotomías de asimilación / acomodación y desequilibración / reequilibración, así como la tricotomía de Intra, Inter, y Trans), afirmó muchas veces, que, el desarrollo de dichos mecanismos sólo se da con la presencia de experiencias apropiadas y, bajo la influencia de la interacción social.

Dentro de las ideas sobre educación de Piaget, que Dubinsky explícitamente implementó en su obra estuvo la de tratar de crear un ambiente en el cual los estudiantes tengan la oportunidad de tener una rica interacción social tanto con otros estudiantes, como con el profesor. Evidentemente, la dimensión cultural se da en cada uno de los grupos que buscan aprender conceptos matemáticos siguiendo a la Teoría APOE.

La dimensión didáctica de la Teoría APOE está dada explícitamente por la misma teoría, mediante el ciclo ACE, ya que en esta Teoría no se trata únicamente de describir cómo se construye el conocimiento matemático, sino también provee de una estrategia didáctica que promueva la construcción cabal de ese conocimiento por parte de los estudiantes. Aquí podemos encontrar una dimensión didáctica de la Teoría APOE.

Algunos investigadores, sin embargo, se han acercado a la teoría mediante la lectura de algunos artículos de investigación que ponen énfasis en la dimensión cognitiva y han formulado afirmaciones que no dan crédito a la teoría en su totalidad. Por ejemplo, Michelle Artigue, afirma que: "Igual que sucede con cualquier modelo, el modelo APOE ofrece solamente una visión parcial del desarrollo cognitivo en Matemáticas"(Artigue, 2003), sin embargo, más adelante afirma que: "…pero, es innegable hoy día que presta atención a una discontinuidad cualitativa crucial en las relaciones que los alumnos desarrollan con respecto a los conceptos matemáticos. Esta discontinuidad es la transición desde una concepción de proceso a una de objeto, la complejidad de su adquisición y los efectos dramáticos de su subestimación por las prácticas habituales de enseñanza. La investigación relativa a la Teoría APOE da también evidencia experimental del papel positivo que pueden jugar las actividades de programación en lenguajes adecuados (como el lenguaje ISETL) para ayudar a los alumnos a encapsular procesos en objetos”(Artigue, 2003).

Más allá de la discusión sobre las dimensiones de la Teoría APOE, consideramos por todo lo dicho anteriormente que esta Teoría es el Marco Teórico idóneo para nuestro trabajo de investigación.

4.2 METODOLOGÍA

“There are no empirical method without speculative concepts and systems; and there is no speculative thinking whose concepts do not reveal, on closer investigation, the empirical material from which they stem”

Albert Einstein

He who seeks for methods without having a definite problem in mind seeks for the most part in vain.

David Hilbert

Etimológicamente, la palabra Metodología viene del griego metá (más allá), “odós”camino y “logos”estudio. Se refiere a los métodos de investigación que se siguen para alcanzar un objetivo dentro de una ciencia.

Hay que distinguir entre Método y Metodología. Método es el procedimiento para alcanzar los objetivos, mientras que Metodología es el estudio del método.

Por ello, entenderemos por Metodología en general, como la parte del proceso de investigación (vías), (Método Científico), que facilita el descubrimiento de conocimientos seguros y confiables para solucionar problemas que la vida nos plantea.

Una investigación basada en un marco teórico conveniente y sólido, con una metodología igualmente conveniente y cercana al marco teórico, son los instrumentos indispensables para que al obtener datos empíricos a través de dichos instrumentos, los “resultados”así obtenidos lleguen a ser validadas por una comunidad de expertos, con la posibilidad de ampliar la teoría (en nuestro caso la Matemática Educativa).

Para este trabajo de investigación, hemos escogido como marco teórico a la Teoría APOE que permite diseños exitosos de actividades docentes, en particular por dos características: es una teoría consistente y permite analizar con mucha claridad el proceso enseñanza-aprendizaje. También permite delimitar las condiciones en que se da el fenómeno didáctico que es muy complejo y así es posible delimitar también algunas de las variables que interesa considerar.

Un marco teórico, es una teoría o modelo específico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje (en nuestro caso particular de las Matemáticas). Explica la manera en que se forma el conocimiento matemático, o como en el caso de Piaget explica como se pasa de un estadio del conocimiento a otro, así como indica los medios para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Desde un punto de vista coloquial, el Marco Teórico es “el piso”o “la base”del edificio del “conocimiento”.

El Marco Teórico es fundamental para guiar la investigación. Permite por una parte diseñar los instrumentos, hacer un análisis previo de lo que se espera que suceda, sea en la clase o en las entrevistas y con ello posibilita hacer una lectura más objetiva de la información una vez que se lleva a cabo el experimento. Es cierto que muchas veces no sucede en el experimento lo que se previó con anterioridad, pero el hecho de haberlo previsto permite reconocer que NO sucede, en ese sentido le da también objetividad al análisis de los datos, pero además la teoría misma permite tomar en cuenta estos resultados para refinar los análisis previos y para llevar a cabo nuevos experimentos y nuevos diseños de enseñanza más cercanos a la forma en que la Teoría propone que los estudiantes construyen el conocimiento.

El marco teórico elegido supone el hacer un análisis muy cuidadoso, previo al fenómeno a estudiar. Además, permite una comparación también muy detallada entre el análisis previo del fenómeno y el análisis de los datos del experimento. Este detalle en el análisis es importante para garantizar la fiabilidad del propio análisis. La Teoría APOE es una teoría que ha demostrado a lo largo de muchos años y a través de numerosas investigaciones variadas, una gran fortaleza en términos de confiabilidad de los datos obtenidos. (Ver ejemplos en la pag. 10)

Junto con el marco teórico debe existir una metodología muy cercana al marco para garantizar la fiabilidad de los resultados. Así como decíamos que un marco teórico explica fenómenos generales relacionados con el aprendizaje de las matemáticas (o en Piaget:¿ cómo se pasa de un estadio a otro?) e indica los medios para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje, la metodología es la que lleva a cabo los medios que el marco teórico indica. Por lo tanto, la metodología debe ser muy cercana al marco teórico. Volviendo a lo coloquial, así como decíamos que el marco teórico es "la base"del edificio del conocimiento, podemos decir que la metodología es el "camino"que pasa por la "base"para lograr la construcción del edificio.

La teoría no trata de describir las construcciones mentales, que ciertamente no se pueden ver, sino más bien propone una forma de modelar la manera en como los estudiantes aprenden y se diseña instrucción con base en esos modelos. La metodología debe basarse justamente en el análisis de lo que va a enseñarse de acuerdo a la teoría y después ese análisis se compara con los datos que se obtienen para encontrar en qué se parecen y en qué difieren. A partir de ese análisis es posible dar, en términos del modelo, una explicación de por qué pasa lo que pasa y por qué no pasó lo que se esperaba en los casos en que eso sucede.

Al utilizar un marco teórico que ha demostrado a lo largo del tiempo y a través de muchos trabajos de investigación ser sólido y exitoso (Ver referencias al final del primer capítulo), junto con una metodología muy cercana y coherente con el marco teórico, permite que los resultados obtenidos empíricamente de la forma señalada anteriormente, tengan una gran solidez.

La metodología que utilizamos en este trabajo está íntimamente relacionada con el marco teórico. En primer lugar, consideramos a la dimensión epistemológica que creemos debe estar presente en cualquier trabajo de investigación en Matemática Educativa.

La epistemología clarifica la relación del conocimiento matemático a los problemas. Para ello, necesita estar en todos los pisos del edificio matemático. Con el objetivo de clarificar la mencionada relación entre conocimiento matemático y problemas, iniciamos nuestro trabajo de investigación, en el capítulo anterior, haciendo un estudio histórico-epistemológico sobre la optimización en general (sobre todo a partir de la gran revolución tecnológica, particularmente desde la aparición de las computadoras a mediados del siglo XX), tratando de tener un panorama global sobre la optimización y desde luego, dimos énfasis a dos ramas de la optimización dinámica: cálculo de variaciones y teoría de control, debido a que nuestro objetivo de estudio se encuentra incluído en dichas dos ramas. (Capítulos “II”y “III”)

Inmediatamente después, continuaremos con los siguientes pasos, que constituyen el ciclo metodológico de investigación de la Teoría APOE:

i) Análisis teórico: En este punto, hicimos un análisis teórico sobre el concepto de funcional y los conceptos ligados a él por la idea de Variación. El objetivo central del análisis teórico, es diseñar la descomposición genética de los conceptos mencionados. En este punto, además de nuestro estudio histórico-epistemológico, apelamos a nuestra propia experiencia como profesores de esta materia. (Ver Descomposición Genética Preliminar en el capítulo “IV”).

ii) Diseño y aplicación de instrumentos: Una vez definida la descomposición genética original, es necesario documentarla. El objetivo central en este punto es el diseño y aplicación primero de los instrumentos que ayuden a construir los conceptos bajo estudio a los estudiantes (Ver Instrumentos Didácticos en el capítulo “V”) y posteriormente el diseño y aplicación de los instrumentos de validación que nos ayudarán a validar la propuesta didáctica y nos ayudarán a identificar las construcciones mencionadas en la descomposición genética. (Ver Instrumentos de Validación en el capítulo “VI”). Hay que enfatizar que nuestra propuesta didáctica está basada en la descomposición genética mencionada en el primer punto.

iii) Análisis y verificación de datos: El objetivo central de esta componente fue llevar a cabo el análisis de los datos empíricos obtenidos de la componente anterior. (Ver capítulo “VII”). Las conclusiones que pudimos obtener de este punto nos ayudarán en el diseño de futuros cursos. Aquí se pudo ver si hubo elementos de la descomposición genética que no se consideraron o si hubo alguna construcción dada que no se percibió o si la descomposición genética original fue razonable.

En cuanto a nuestro estudio histórico-epistemológico que nos sirvió entre otras cosas para nuestro diseño de una descomposición genética, consideramos que tuvo la ventaja de que se remontó básicamente a la segunda mitad del siglo XX, en el que hay más que suficientes referencias bibliográficas. Con la bibliografía disponible, pudimos obtener una idea sólida sobre la génesis y desarrollo de los problemas de optimización en general y en particular, dimos principal atención a problemas de optimización dinámica, particularmente los que aparecen en Cálculo de Variaciones y Teoría de Control, como por ejemplo el problema de la braquistrócona, con el que surge el Cálculo de Variaciones de manera formal. (Ver Actividad 1, en el capítulo “V”)

Simultáneamente a la investigación histórico-epistemológica sobre optimización, llevamos a cabo una investigación sobre lo que se ha escrito sobre el tema, (ver Antecedentes), para tal efecto, revisamos artículos publicados por el CLAME

(Congreso Latinoamericano de Matemática Educativa) y por el ICME (International Congress in Mathematical Education) dentro de sus reuniones internacionales, así como consultamos con profesores expertos en temas de Matemática Educativa. (www.icme.09.org/), (www.icme.10.org/), (www.icme.11.org/).

Enseguida y con el fin de precisar los elementos de una descomposición genética original, elaboramos un cuestionario (Ver anexo “E”) que se aplicó a un grupo de estudiantes de un curso: “Matemáticas Aplicadas a la Economía”. En esta materia, se enseñan los elementos básicos de Optimización Dinámica, en particular de Cálculo de Variaciones y Teoría de Control. En promedio, un estudiante que lleva este curso está en el sexto semestre de la carrera de Economía. Los grupos son mixtos y tienen una edad promedio de 20-21 años. Para cursar esta materia debieron haber aprobado todos los cursos previos de Cálculo, donde se estudia en particular el tema de optimización estática en una y varias variables. La aplicación del mencionado cuestionario se planeó para llevarse a cabo durante el segundo semestre de 2007.

Nuestro estudio histórico-epistemológico junto con los resultados del análisis del cuestionario mencionado en el párrafo anterior y nuestra experiencia como profesores de esta materia nos sirvieron para proponer una descomposición genética preliminar de la que hablaremos en detalle en la sección 4 del capítulo “IV”.

Después de haber reflexionado en el temario de esta materia (Ver anexo “B”) tanto en su composición como en el orden en que aparecen los temas y, antes de revisar los resultados del cuestionario, pensamos en la conveniencia de cambiar el orden del temario en la propuesta didáctica, para iniciar con el planteamiento de problemas del Cálculo de Variaciones con el fin de hacer sentir al estudiante la necesidad del estudio de las Ecuaciones Diferenciales. Juzgamos conveniente que el planteamiento de problemas del Cálculo Variacional sirviera de “motivación”para la presentación de los temas de Ecuaciones Diferenciales.

Evidentemente, el ir complicando los problemas del Cálculo de Variaciones, exigiría el dominio de más temas de Ecuaciones Diferenciales, por lo que, el curso estuvo planeado para iniciar con problemas de Cálculo Variacional, para seguir con temas de Ecuaciones Diferenciales y continuar oscilando en la enseñanza de temas relacionados de alguna manera en ambas disciplinas y lo mismo en cuanto a los temas relacionados con la Teoría de Control.

Debemos enfatizar que nuestra propuesta didáctica se basa en la descomposición genética y aunque históricamente las ecuaciones diferenciales se desarrollaron antes que los métodos modernos de la optimización dinámica, los problemas relacionados con ella estaban presentes desde la época de Newton y en su obra se empiezan a tratar.Esto también se tomó en consideración para el diseño del curso al plantear empezar con cálculo de variaciones.

La parte Teórica de estas dos secciones del capítulo IV se basaron en gran parte en: (Dubinsky, 1991, b), y de manera importante en (Trigueros, 2005). En particular, todos los ejemplos sobre optimización dinámica son propios y algún otro ejemplo se tomó de: (De Vries, 2001).

Para obtener ejemplos para nuestras actividades revisamos la siguiente bibliografía: Blume, L., Simon, C. (1994), Brezis, H. (1983), Cerdá, E. (2001), Coddington, E.A., Levinson, N. (1955), Chiang, A.C. (1984), Chiang A.C. (1992), Courant R., Hilbert, D. (1962), Craggs, J.W. (1973), Dorf, R.C. (1989), Edwards, C.H., Penney, D.E. (2000), Ekeland, I., Temam, R. (1974), Elsgoltz, L. (1997), Fuller, A.T. (1976), Seierstad, A., Sydsaeter, K. (1987), Shone, R. (1997), Spiegel, M.R. (1981), Takayama, A. (1985).

Para poder apreciar las diferencias didácticas entre el Principio del Máximo de Pontryagin y el Modelo de Bellman, revisamos los siguientes textos: Bellman, R., Kalaba, R. (1965), Bellman, R., Dreyfus, S. (1962), Bennet, S. (1979), Bennet, S. (1993), Fattorini, H.O. (1999), Kalman, R.E. (1974).

En cuanto a las perspectivas sobre el futuro del Cálculo de Variaciones y la Teoría de Control, revisamos los siguientes textos: Athans, M. (1976), Baratta, A. (1997), Brezis, H. (1983), Zuazua, E. (2000).

Para complementar nuestra visión histórico-epistemológica, revisamos: Artigue, M. (1990), Bernoulli, D. (1753), Costabel, P. (1998), Kline, M. (1972), Mayr, O. (1970), Wilde, D.J., Beightler, Ch. S. (1967).

Como complemento para problemas de modelización: Bosch, M., García, F.J., Gascón, J., Ruiz, L.H. (2006), Nelly, A.E., Lesh, R.A. (2000).

Para complementar el Marco Teórico revisamos: Dubinsky, E., Mc. Donald M. (2001).

4.3 DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PRELIMINAR

"El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas, reflexionando sobre ellas en un contexto social, y, construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas con el fin de manejar las situaciones". (Dubinsky, 1996).

Nuestro objetivo central es explicar en detalle como llegamos a proponer una descomposición genética, en donde se presenten el conjunto de construcciones mentales que suponemos los estudiantes deben desarrollar para la comprensión de los conceptos necesarios para estudiar eficientemente la optimización dinámica. Desde luego, el proponer una descomposición genética tiene como fin tener una herramienta teórica que pueda utilizarse como una guía en el diseño del material didáctico y en general, para la construcción de los instrumentos para sustentar y evaluar la propuesta didáctica, que fue lo que hicimos en el presente trabajo de investigación.

Para lograr lo anterior, tuvimos que contestarnos al menos las dos siguientes preguntas:

i) ¿Es la descomposición genética viable para explicar la construcción de este tema?
ii) ¿Qué modelos de pensamiento son empleados por los estudiantes en relación a este tema?

De las respuestas dadas a las preguntas anteriores, en caso necesario, habría que modificar la descomposición genética original a la luz de los resultados empíricos.

En relación a los conceptos que se requieren para el estudio de la optimización dinámica, podemos dividirlos en dos tipos: los que tienen que ver con el estudio de las ecuaciones diferenciales (o en diferencias en el caso discreto), o las que tienen que ver con Espacios Vectoriales.

Para los conceptos que tienen que ver con ecuaciones diferenciales o espacios vectoriales existe ya al menos una descomposiciónes genética, que en general ha mostrado su eficiencia y, por ser conceptos de apoyo en el tema que nos interesa, no nos ocuparemos de ellas, más que al establecer las relaciones que suponemos existen entre estos conceptos y los conceptos a construir.

La descomposición genética propuesta se basa en nuestro estudio histórico-epistemológico, la experiencia didáctica del profesor, refinada con el cuestionario que se aplicaró a dos grupos de la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Económicas en el ITAM durante el segundo semestre de 2007. (Ver Anexo "E").

Una observación sobre la terminología que usaremos: cuando hablamos de construir un concepto, que constituye un término técnico de la teoría APOE, nos referimos a llevar a cabo las construcciones predichas por la descomposición genética a través del uso de actividades que dan al alumno oportunidad de reflexionar sobre sus acciones.

El Esquema que se propuso construir es el siguiente:

ESQUEMA DE FUNCIONAL

a. Funcionales lineales $f : V \to R$ donde V es un espacio vectorial

b. Primera y segunda variación — Nivel esperado: Proceso
c. Condiciones necesarias y suficientes para extremos
d. Condiciones de transversalidad

Para construir el concepto de funcional, se supone que los estudiantes tienen conocimientos previos de, en particular, dos esquemas:

1) ESQUEMA DE FUNCIÓN que incluye:

i) Concepto de Función de una y varias variables
ii) Derivadas e integrales de funciones de una y varias variables.
iii) Funciones vectoriales de variable real (Trayectorias)
iv) Derivadas e integrales de funciones vectoriales de variable real.

2) ESQUEMA DE ESPACIO VECTORIAL que incluye:

i) Concepto de Espacio Vectorial
ii) Base

3) ESQUEMA DE CONJUNTO

Los esquemas que se supone debían haber construido los alumnos, para poder iniciar el tema de optimización dinámica son el esquema de función que incluye funciones de una y varias variables, sus derivadas, sus integrales, así como la integral de línea, todas ellas a nivel de proceso y el esquema de espacio vectorial que debe incluir el manejo de los axiomas que definen al espacio vectorial y se suponía que al menos podían trabajar con él mostrando una concepción de acción. También, en relación con este esquema se esperó que los alumnos hubieran construido una concepción de acción del concepto de base.

Para construir el concepto de funcional, es necesario desencapsular el esquema de función y el de espacio vectorial para construir las acciones o procesos que permiten definir distintos tipos de funciones (primero con dominio en R^n y después aquéllas con dominio cualquier espacio vectorial normado, en particular, los espacios de funciones, funciones continuas, funciones integrables, funciones derivables, etc.). La definición de dichas funciones es indispensable para poder considerar a las funciones con dominio en R^n como dominio de una función más general cuyo rango son los reales, que es lo que Newton hizo cuando trabajó el problema de la braquistócrona y fue retomado Bernoulli. La posibilidad de considerar estas funciones, permitió a los autores antes mencionados, incorporar la variación, es decir la variable tiempo, en los problemas de optimización. Estos procesos se pueden coordinar para llevar a cabo el proceso de comparación entre las funciones de una y varias variables y aquellas funciones con dominio en un espacio vectorial normado con el fin de generalizar la noción de función conocida por los alumnos hacia una definición general de funcionales como un proceso que podría ser encapsulado en un objeto sobre el cual se pueden ejercer nuevas acciones. (Evidentemente, las funciones reales que aparecen en el esquema de funciones también serían funcionales; de hecho fueron este tipo de funciones las que Newton usó para definir las variaciones, aunque él no las llamaba aún funciones). La reflexión sobre las acciones que permitan a los alumnos construir funcionales y compararlas, con el fin de distinguir entre conjuntos definidos mediante funciones y conjuntos definidos con funcionales, permite interiorizarlas en un proceso en el que se distinguen las características de aquellas que no se pueden considerar como funcionales de las que si lo son. Este proceso puede coordinarse además con el esquema de función de manera que dicho esquema se enriquezca al incorporar en él la noción de funcional.

El esquema de función puede ser también, desencapsulado, para considerar el proceso que permite encontrar los valores en los una función tiene máximos y mínimos, y generalizarse cuando se considera el mismo proceso para distintos tipos de funciones reales (con dominio R^n). Por otra parte, se efectúan acciones sobre diversas funciones para calcular una integral sobre una trayectoria (integral de línea). Estas acciones se interiorizan en el proceso que permite generalizar la noción de función para considerar a esta operación como una función cuyo dominio es una trayectoria y cuyo rango (en los reales) está dado por el conjunto de valores obtenidos para cada trayectoria. La coordinación de este proceso con aquel que lleva a la interiorización de la noción de funcional permite a los alumnos considerar que una integral de línea es un caso particular de funcional.

En todos los casos, las funcionales pueden proceder de problemas abstractos o de problemas concretos de aplicación en los que la trayectoria y su valor tienen un significado específico. Estos problemas de aplicación conjuntamente con la definición de espacio vectorial jugaron un papel importante en el renacimiento de la optimización dinámica: Pontryagin, Boltiansky y Mishenko utilizaron el trabajo de Newton y Bernoulli conjuntamente con las aplicaciones para desarrollar la definición de funcional que ahora conocemos. Dado que históricamente el proceso de definición de las funcionales se inició con el trabajo sobre aplicaciones, en particular los relacionados con la asignación de óptima de recursos, se considera que las acciones con las que el trabajo de construcción del esquema de funcional debe iniciar deben justamente hacerse sobre problemas de la naturaleza que dio origen al Cálculo de Variaciones y a la teoría de Control. Pero, no debemos olvidar que la construcción de los conceptos abstractos requiere de la ejecución de acciones sobre objetos de la matemática misma, que, dicho sea de paso, fue lo que los autores antes mencionados hicieron en sus desarrollos. Mediante ellas será posible coordinar con los esquemas de variable y variación para definir las funcionales adecuadas para su modelación. Este proceso se debe coordinar con el proceso requerido para representar gráficamente las curvas para las que se calcula la integral sobre una trayectoria y con el resultado de este cálculo. Además, se pueden efectuar acciones sobre distintas trayectorias para calcular el valor de la integral para cada una de ellas. La reflexión sobre estas acciones se interioriza en el proceso por el cual es posible calcular integrales sobre una trayectoria cualquiera y establecer que el resultado de ese cálculo es un número real, para posteriormente coordinar este proceso con aquél en el que se comparan los valores de distintas integrales para considerar aquél para el cual el valor obtenido es óptimo.

La interiorización de las acciones antes mencionadas en un proceso debe coordinarse con el proceso resultado de la interiorización de las acciones que permiten considerar la primera variación, que permitirán encontrar una condición de primer orden para encontrar valores óptimos. Este proceso requiere del cálculo de la derivada de la funcional a través de acciones o procesos que se efectúan sobre la integral para determinar la trayectoria para la cual la primera variación de la funcional sea cero (e.d. $DJ(x^*)=0$, pues esto quiere decir que no hay variación.

La construcción de este proceso parte de la comparación entre los problemas de optimización que son familiares para los alumnos y que forman parte de su esquema de función. Nuevamente, desencapsulando el esquema de función, se efectúan acciones que permiten calcular incrementos en funciones y funcionales. Estas últimas consisten en considerar la variación: $J(x(t)+h(t))-J(x(t))=\int_a^b f\left(x(t)+h(t),\dot{x}(t)+\dot{h}(t),t\right)dt-\int_a^b f\left(x(t),\dot{x}(t),t\right)dt$, que requiere de desencapsular del esquema de funciones el objeto integral y la posibilidad de utilizar sus propiedades elementales, así como el proceso de aproximación lineal de funciones para coordinarla con los procesos necesarios para simplificar la definición de incremento, considerar la derivada del funcional y expresarla de manera conveniente. La coordinación de estos procesos permite encontrar una condición necesaria para optimizar la funcional

($DJ(x(t))h(t)=\int_a^b h(f_x-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}})dt=0$), que se reduce a la ecuación de Euler:

$$f_x-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}=0$$

Esta ecuación, resulta ser entonces, la condición necesaria de primer orden en cálculo de variaciones.

Si desencapsulamos del esquema de función, lo que corresponde a derivadas, podemos efectuar el proceso de establecer la equivalencia entre la ecuación de Euler y la correspondiente ecuación diferencial de segundo orden. Este resultado motivará por un lado la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales, y por otro lado permitirá la coordinación del proceso funcional con el proceso de optimización y el esquema de ecuaciones diferenciales de manera que los estudiantes puedan efectuar las acciones que les permitan encontrar el valor óptimo de problemas especíicos.

La construcción del proceso que permite obtener la segunda variación del funcional es análoga al de la construccién de proceso para la primera variación. Es decir, en este caso, y una vez desencapsulados del esquema de funciones los mismos procesos que utilizaron para la construcción del proceso primera variación, se efectúan las acciones o procesos sobre una funcional particular que en este caso es la misma primera variación.

Para construir las condiciones de suficiencia, se desencapsula el esquema de función, para considerar el proceso que permite obtener las condiciones de suficiencia para que una función con dominio en R^n, en un punto crítico alcance un máximo o un mínimo, junto con el concepto de integral (de este mismo tipo de funciones) y sus propiedades elementales, para coordinarlos con procesos análogos con funcionales que nos permitan llegar a las condiciones suficientes de segundo orden para funcionales. Dicha coordinación permite interiorizar un proceso para determinar (para este tipo de funcionales) si una trayectoria que cumple con la condición necesaria para la primera variación es un máximo o un mínimo.

Las condiciones de Transversalidad se pueden construir generalizando el proceso de construcción del funcional y las condiciones de frontera para incluir al tiempo como una nueva variable. Al desencapsular del esquema de función los mismos conceptos que se han considerado anteriormente para construir el concepto de funcional, conjuntamente con el tiempo, se pueden repetir los procesos mencionados anteriormente para encontrar las condiciones que se deben considerar al variar las condiciones a la frontera.

CAPÍTULO V

DISEÑO DE LOS INSTRUMENTOS DIDÁCTICOS DE LA PROPUESTA

5.1 INTRODUCCIÓN

Los instrumentos didácticos que diseñamos, estuvieron basados desde luego, en la Descomposición Genética original y están constituídos por un conjunto de Actividades, que involucran a su vez, conjuntos de acciones y procesos que buscan ayudar a los estudiantes a construir los conceptos de funcional, así como aquellos otros conceptos ligados al concepto de funcional por la idea de Variación. Específicamente, dichos conceptos son: el concepto de primera y segunda variación y el concepto de condiciones de transversalidad.

5.2 PLANEACIÓN DE ACTIVIDADES

Después de haber llevado a cabo un estudio histórico-epistemológico, en particular sobre el Cálculo de Variaciones y la Teoría de Control, nos dimos cuenta, que estas ramas de la Optimización Dinámica surgieron de problemas de la Física y la Geometría, para extenderse con relativa rapidez a las aplicaciones, particularmente las de tipo económico.

Por tanto, según lo dicho en el capítulo sobre Marco Teórico y Metodología (capítulo “IV”), empezamos presentando en el curso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Económicas (Ver temario en el anexo “B”) dos problemas: el primero físico-geométrico, el mismo con el que se inició el Cálculo de Variaciones: el problema de la braquistrócrona. Lo presentamos guiando a los estudiantes mediante algunas acciones y procesos a su solución. El segundo problema que presentamos fue de tipo económico, buscando que mediante dichas presentaciones, pudiéramos lograr, en primer lugar, alguna justificación para requerir de la generalización, primero del concepto de función al concepto de funcional, y en segundo lugar, de las mismas técnicas de Optimización estática a las de Optimización Dinámica. (Ver primera y segunda actividad)

En el diseño de las actividades, hicimos continuamente uso de la analogía, pues es una herramienta que en muchas ocasiones ha demostrado ser una manera natural de generalizar conceptos. Por medio de la analogía, estrechamente vinculada con la Descomposición Genética original generalizamos el concepto de función para presentar entonces, el concepto de funcional, para de ahí y en base a las herramientas matemáticas de los estudiantes, principalmente las relativas a optimización estática, ayudamos a construir las condiciones necesarias y suficientes de la optimización dinámica que se requieren para resolver dichos problemas, buscando con esto un paso natural en la generalización de la optimización estática a la dinámica.

Como las condiciones necesarias para resolver problemas de Cálculo en Variaciones y Teoría de Control se expresan en términos de ecuaciones diferenciales, el buscar resolver dichos problemas nos dió la justificación para abordar el estudio de dichas ecuaciones.

Los Instrumentos didácticos que desarrollamos buscando ayudar a los estudiantes en la construcción del concepto de funcional y demás conceptos ligados a él por la idea de variación fueron, como hemos comentado, consecuencia de la descomposición genética mencionada en el capítulo anterior y que a su vez, fue producto de tres factores: en primer lugar, del estudio histórico-epistemológico mencionado en los capítulos dos y tres, en segundo lugar, de la prueba de diagnóstico a un grupo piloto, mencionada en el capítulo cinco (Descomposición Genética) y expuesta en detalle en el anexo “E”, y por último, en base a nuestra propia experiencia como profesores de esta materia durante varios años.

Presentaremos a continuación el conjunto de Actividades que propusimos para el curso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Económicas durante el primer semestre de 2008. El grupo estuvo integrado por estudiantes de la carrera de Economía del ITAM, que en promedio cursan entre el quinto y sexto semestre.

5.3 PRIMERA ACTIVIDAD

Introducción a la Optimización Dinámica

Como se comentó anteriormente, cuando se presentó la descomposición genética sobre la cual se basó el diseño de las actividades para el curso, se inician las acciones que llevan a las construcciones necesarias para contruir el esquema de funcional mediante la introducción de problemas de aplicación. El primero es el problema que resolvió originalmente Newton, aunque no exactamente de la misma manera que se plantea aquí pues en la descomposición genética se consideran las construcciones introducidas por los autores más modernos. Posteriormente se retoma la solución de problemas de corte económico.

I) Problema de la Braquistrócona

Planteamiento del problema: Dados dos puntos A y B en un plano vertical, pero no en la misma recta vertical y a diferentes alturas, se trata de encontrar la forma de la curva que los une, de manera que una partícula que se deslice por ella vaya desde A hasta B en un tiempo mínimo, suponiendo gravedad constante y que no hay fricción.

Actividades que se pide lleven a cabo los estudiantes:

i) Dibujar en un plano los puntos A y B donde el punto A lo colocamos en el origen y el punto B con las coordenadas (a, b), ambas coordenadas estrictamente positivas.

ii) Girar los ejes 90° de modo que la parte positiva del eje Y coincida con la parte positiva del eje X, y la parte positiva del eje X con la parte negativa del eje Y.

iii) Considerar las posibles trayectorias que tengan primera derivada continua y que unan dichos puntos. De todas ellas, queremos encontrar aquella en la que el tiempo para ir de A a B sea mínimo. (No es lo mismo que la trayectoria que una dichos puntos y cuya longitud sea mínima).

iv) Sea y = y (x) una de las funciones candidatas a óptimo. (Es importante hacer notar que hablamos de trayectorias óptimas y no de puntos óptimos). La gráfica de la función (dibujar alguna que sea candidata) parte del punto A por lo que se verifica que y (0) = 0 y llega al punto B por lo que se verifica que y (a) = b. Sea P (x, y) un punto de la gráfica de dicha función (graficarlo). Sea s la longitud del arco de curva que une A con P. ¿Cuál será la velocidad de la partícula en el punto P? La respuesta no se les da a los estudiantes está dada por: $v = \frac{ds}{dt}$

v) Suponiendo que $\frac{ds}{dt}$ puede tratarse como si fuera un cociente, determinar dt.

(Respuesta no proporcionada a los estudiantes: $dt = \frac{ds}{v}$)

vi) De aquí, que, utilizando el Teorema fundamental del Cálculo, ¿cómo se puede expresar el tiempo que tarda una partícula desde el punto A hasta el punto P?

(Respuesta no proporcionada a los estudiantes: $t = \int_0^s \frac{ds}{v}$)

vii) ¿Cómo podemos expresar v y ds en términos de x y de y (x)?

TIPS a los estudiantes:

II) Para expresar v en términos de x y de y (x)

a) Suponer que la partícula parte de A, desde el reposo. Puesto que no hay fricción, se tiene que cumplir el principio de conservación de la energía. Esto significa que al moverse la partícula partiendo del reposo, desde un punto más alto a otro más bajo, la energía potencial se convierte en energía cinética.

b) La energía potencial en un punto con elevación vertical h es igual a mgh, donde m es la masa y g la constante gravitatoria.

c) La energía cinética es $\frac{1}{2}mv^2$, donde v es la velocidad.

d) La energía cinética en el punto A es cero, entonces debe cumplirse que la energía cinética en el punto P es igual a la variación de la energía potencial entre los puntos A y P. Escribir dicha relación matemáticamente. (Respuesta no proporcionada a los estudiantes: $\frac{1}{2}mv^2 = mgx$), y de esta última relación despejar v. (Respuesta no proporcionada a los estudiantes: $v = \sqrt{2gx}$

.

II) Para poder expresar ds en términos de x y de y (x):

a) Considerar los puntos: $P(x, y)$ y $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ en la gráfica de la función y = y (x) (Dibujarlos). Sea Δs la variación de la longitud del arco de curva al pasar de un punto al otro.

b) Si Δx es pequeño, ¿ Δs ? (Respuesta no proporcionada a los estudiantes; $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$)

c) Del punto anterior: ¿ $\frac{\Delta s}{\Delta x}$? (Respuesta no proporcionada a los estudiantes: $\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$)

d) Tomar límite cuando $x \to 0$ (Respuesta no proporcionada a los estudiantes:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

De los cálculos realizados, obtener el tiempo que tarda una partícula en ir desde el punto A hasta el punto B, siguiendo la trayectoria y = y (x). (Respuesta no proporcionada a los estudiantes:

$$T(y(x)) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \left(\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} dx$$, con y (0) = 0, y (a) = b)

Podemos observar que aunque $T(y(x))$ es una función, su dominio no son números reales como usualmente teníamos. El dominio de esta función es a su vez un conjunto de funciones, por lo que tenemos que extender el concepto de función, para más adelante ver como resolvemos el problema de maximizar o minimizar este tipo de funciones.

5.4 SEGUNDA ACTIVIDAD
Condiciones necesarias de primer orden

Retomemos los problemas que presentamos al inicio del curso. Por ejemplo:

1) Una empresa tiene un pedido de N unidades que debe surtir en un tiempo por determinar. Si $x(t)$ denota el número de unidades producidas en $[0,t]$, que puede interpretarse como el inventario acumulado en el tiempo. El costo en el tiempo está dado por: $C(x,x')=2x+x'^2$. Resolver el problema de minimizar los costos de la empresa: min $\int_0^1 (2x+x'^2)dt$ con $x(0)=0$ y $x(1)=N$.
(Resolverlo o revisar su solución).

2) ¿En qué curvas puede alcanzar su extremo la funcional:
$J(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\dot{x}^2-x^2\right)dx; \quad x(0)=0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, (Respuesta no dada a los alumnos: $x=sen(t)$).

3) $J(x)=\int_0^1 \left(\dot{x}^2+12tx\right)dx; \quad x(0)=0,\ x(1)=1$, (Respuesta no dada a los alumnos: $x=t^3$)

Sin embargo, a menudo pueden aparecer varias variables. Supongamos que $\bar{x}=(x_1,x_2,...x_n)$, donde cada x_i tiene las mismas características que tenía la función x (como por ejemplo ser dos veces derivable, empezar y terminar en el mismo punto, etc.). Una funcional análoga a la que teníamos con una variable se escribiría como: $J\left(\bar{x}\right)=\int_a^b f\left(\bar{x},\dot{\bar{x}},t\right)dt$. (La función que aparece en el integrando tiene también las mismas propiedades que la que aparecía con una sola variable). Si queremos obtener $DJ\left(\bar{x}\right)$ para encontrar las condiciones necesarias de primer orden, debemos proceder de manera análoga a como lo hicimos con una variable, es decir:

i) ¿Quién sería la función incremento $\bar{h}$ y qué características análogas a la función incremento de una variable h tendría? (Solución no dada a los alumnos: $\bar{h}=(h_1,h_2,...h_n)$, cada h_i con las mismas propiedades que h, es decir, ($h_i(a)=h_i(b)=0$, h_i diferenciable en el intervalo $[a,b]$).

ii) Calcular: $J\left(\bar{x}+\bar{h}\right)-J\left(\bar{x}\right)$ y en base a éste cálculo encontrar: $DJ\left(\bar{x}\right)\left(\bar{h}\right)$

(Respuesta no dada a los alumnos: $DJ\left(\bar{x}\right)\left(\bar{h}\right)=DJ\left(\bar{x}\right)\bar{h}_1+...DJ\left(\bar{x}\right)\bar{h}_n$),

donde $\bar{h}_i=(0_1,h_i,...0)$).

iii) En base al inciso anterior, encontrar las condiciones de primer orden para extremos.

(Respuesta no dada a los alumnos: $DJ\left(\bar{x}\right)h_i=0$, $1\le i\le n$). Por lo que obtendríamos la Ecuación de Euler para cada variable).

iv) ¿Cuántas condiciones iniciales se requieren en este caso, para encontrar una solución única?

v) Hallar los extremos de la funcional: $J(x,y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+2xy)\,dt$, con las

condiciones iniciales:
$$x(0)=0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$
$$y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

(Respuesta no dada a los alumnos: $x=sen(t),\ y=-sen(t)$)

En otras ocasiones, puede aparecer sólo una variable, pero puede aparecer hasta la derivada enésima de dicha variable. En este caso la funcional análoga se escribiría como:

$$J(x)=\int_a^b f\left(x,\dot{x},\ddot{x},...\overset{(m)}{x},t\right)dt$$

i) ¿Cuál sería en este caso la función incremento y qué propiedades tendría? (Respuesta no dada a los alumnos:

$h:[a,b]\to R,\ h\in C^m[a,b],\ h(a)=h(b)=\dot{h}(a)=\dot{h}(b)=...=\overset{(m-1)}{h}(a)=\overset{(m-1)}{h}(b)=0$

ii) Calcular $J(x+h)-J(x)$ y a partir de este resultado determinar: $DJ(x)(h)$. (Respuesta no dada a los estudiantes:

$DJ\left(x\right)\left(h\right)=\int_a^b(f_xh+f_{\dot{x}}\dot{h}+...f_{\overset{(m)}{x}}h^{(m)})dt$)

iii) Integrar por partes iteradamente los términos: $f_{\dot{x}}\dot{h},\ f_{\ddot{x}}\ddot{h},...f_{\overset{(m)}{x}}h^{(m)}$

(Respuesta no dada a los alumnos:

$$DJ\left(\bar{x}\right)\left(\bar{h}\right)=\int_a^b h\left(f_x-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}+\frac{d^2}{dt^2}f_{\ddot{x}}+\ldots+(-1)^m\frac{d^m}{dt^m}f_{\overset{(m)}{x}}\right)dt\;)$$

iv) De la expresión anterior, expresar las condiciones de primer orden. (Respuesta no dada a los alumnos: El integrando en la expresión anterior (quitando la h) debe ser cero. A esta expresión se le conoce como ecuación de Euler-Poisson. Como puede observarse, representa una generalización a la ecuación de Euler.

v) ¿Cuántas condiciones iniciales se requieren en este caso, para encontrar una solución única?

vi) Determinar los extremos de la funcional: $J(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x''^2-x^2+t^2\right)dt$, sabiendo que: $x(0)=1,\ x'(0)=0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ x'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ (Respuesta no dada a los alumnos: $x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos(t)+c_4sen(t)$).

Desde luego, pueden considerarse varias variables y cada una con derivadas de cualquier orden. En este caso hay que combinar los resultados obtenidos en ambos casos.

(Para motivar la necesidad de estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales)

Ejercicios propuestos:

1) Hallar los extremos para la funcional: $J(x)=\int_a^b\frac{\sqrt{1+x'^2}}{x}dx$. (Respuesta no dada a los alumnos: Las trayectorias óptimas son las circunferencias: $(t-c_1)^2+x^2=c_2{}^2$. En este caso el problema variacional no tiene sentido).

2) $J(x,y)=\int_a^b\left(2xy-2x^2+x'^2-y'^2\right)dt$. (Respuesta no dada a los alumnos: $x=(c_1t+c_2)\cos(t)+(c_3t+c_4)sen(t),\ y=2x+x''$, de donde y se determina fácilmente.

5.5 TERCERA ACTIVIDAD

Aplicaciones del Cálculo de Variaciones

1) En un cierto instante t_0, una empresa dispone de un stock $x(t_0) = x_0$ de un determinado producto. El costo de almacenaje por unidad de dicho producto es de c unidades monetarias. La empresa puede utilizar las unidades que tiene en el stock para venderlas en cierto mercado. La venta de q unidades de este bien en el mercado proporciona un ingreso $I(q)$.

i) En economía se supone que la función de ingreso es cóncava. Dar argumentos de tipo económico que justifiquen esta hipótesis.

ii) Escribir la función de utilidad en cada instante de tiempo. (Respuesta no dada a los alumnos: $\pi(q, x) = I(q) - cx$; donde $\pi(q, x)$ representa la función utilidad).

iii) ¿La función de beneficios es cóncava o convexa? (Justificar)

iv) ¿Qué relación existe entre q y x? (Respuesta no dada a los alumnos: $\dot{x} = -q$

v) La empresa desea distribuir sus existencias de modo óptimo durante cierto horizonte de planificación $[t_0, t_1]$, de modo que maximice su beneficio total a lo largo de ese período. (Se supone que en ese tiempo la empresa no puede obtener más unidades del bien, y que las unidades no vendidas en el horizonte temporal dado no tienen ningún valor después del instante t_1). Utilizando, en particular los incisos ii) y iv). Escribir analíticamente el problema de optimización de la empresa. (Respuesta no dada a los estudiantes:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} \pi(q, x)dt = \int_{t_0}^{t_1} (I(q) - cx)dt$$

$$\text{sujeto a: } \dot{x} = -q$$

$$\text{con: } x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1$$

vi) Utilizar la restricción para eliminar la variable q. (Respuesta no dada a los alumnos: $\max \int_{t_0}^{t_1} (I\left(-\dot{x}\right) - cx)dt$, con: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

vii) Resolver el problema de optimización. (Sugerencia: aplicar el teorema de condición necesaria de primer orden (teorema de Euler)). (Respuesta no dada a los alumnos: En este caso $f\left(x, \dot{x}, t\right) = I\left(-\dot{x}\right) - cx$. Por lo que:

$f_x = -c,\ f_{\dot{x}} = -I'$; y de aquí la ecuación de Euler sería: $c = \frac{d}{dt} I'$

viii) Dar una interpretación económica a la ecuación de Euler. (Respuesta no dada a los estudiantes: Al decidir qué cantidad de producto (q) debe extraerse del stock, la empresa compara las ganancias y pérdidas de mantener el stock o venderlo. El lado izquierdo en la ecuación de Euler representa el costo marginal de mantener una unidad de producto en stock, que es el costo de almacenaje. El lado derecho representa la ganancia derivada de mantener una unidad de stock, es decir, cuánto aumenta en el tiempo el ingreso marginal que se podrá obtener por esa unidad).

ix) ¿Cómo podríamos verificar que efectivamente se trata de un máximo? (Respuesta no dada a los alumnos:

a) Considerar el integrando de la funcional a maximizar y verificar que es una función cóncava.
b) Si dicho integrando es una función cóncava, ¿qué argumentos de tipo intuitivo pueden darse para establecer la condición de maximalidad? (Más adelante daremos otro tipo de argumentos)

2) Supongamos que como caso particular, la función de utilidad tiene la forma:

$\pi(q, x, t) = e^{-\delta t}\left(pq - C(x)\right)$, donde δ representa el factor de descuento en el tiempo, p es el precio de mercado del recurso extraído (variable, depende del tiempo) y $C(x)$ representa los costos de extracción. Podemos suponer que $C'(x) < 0$, es decir, cuanto mayor sea el stock de recursos disponibles, menos costosa resultará la extracción.

i) ¿Qué relación existe entre las variables q y x? (Respuesta no dada a los alumnos: $\dot{x} = -q$)

ii) Supongamos que se quieren maximizar los beneficios en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$. Escribir analíticamente el problema de la empresa.

(Respuesta no dada a los alumnos: max $\int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta t}\left(pq - C(x)\right)dt$, con:

$x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$).

iii) Sustituir q, utilizando su relación con x.

iv) Sabemos que maximizar una funcional equivale a minimizar su negativo, por lo que(justificar que):

$$\max \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta t}\left(pq - C(x)\right)dt = \min \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta t}\left(p\dot{x} - C(x)\right)dt.$$

v) Obtener la ecuación de Euler. (Respuesta no dada a los alumnos: $C'(x) = -\delta\, p + \dot{p}$, que también puede escribirse como: $\delta\, p = \dot{p} - C'(x)$.

vi) Dar una interpretación económica a la ecuación de Euler del inciso anterior. (Respuesta no dada a los alumnos: Globalmente expresa el equilibrio entre dos alternativas: extraer o conservar el recurso. El lado izquierdo representa la ganancia marginal de extraer inmediatamente una unidad del recurso: el precio obtenido por ella multiplicado por la rentabilidad intertemporal obtenida. El lado derecho representa la ganancia marginal de esperar: el incremento del precio, más ($C'(x) < 0$) el ahorro en los costos futuros de extracción debidos a un mayor stock. La ecuación de Euler del inciso anterior recibe el nombre de regla de Hotelling.

vi) ¿Estaremos hablando de máximo o de mínimo? ¿Qué procedimiento se puede seguir? (Sugerencia: Revisar el integrando en la funcional a optimizar y como en el ejercicio anterior, ver si dicho integrando es una función cóncava o convexa).

3) Una empresa desea encontrar la trayectoria óptima $x(t)$ en el período $[0,1]$ (puede estar medido en años o en cualquier otra unidad de tiempo). Dicha empresa sabe que su función de costos está dada por: $c\left(x, \dot{x}\right) = \dot{x}^2 + x^2$. El precio de venta del producto se mantiene fijo e igual a \$4.00 y la tasa de descuento es igual a $\delta = 0.1$. La producción inicial es $x(0) = 0$ y la producción al final del período es $x(1) = 10$ (donde las unidades de producción pueden estar en miles, millones, etc.).

i) Escribir la función de utilidad en cada instante de tiempo. (Respuesta no dada a los alumnos: $\pi\left(x, \dot{x}, t\right) = \left(4x - \dot{x}^2 - x^2\right)$)

ii) Expresar analíticamente el problema que resuelve la producción óptima. (Respuesta no dada a los alumnos: max $\int_0^1 \left(4x - \dot{x}^2 - x^2\right) e^{-0.1t} dt$, con: $x(0) = 0$ y $x(1) = 10$.

iii) Encontrar la ecuación de Euler. (Respuesta no dada a los alumnos: $e^{-0.1t(\ )}(4 - 2x) - \frac{d}{dt}\left(\left(-2\dot{x}\right)e^{-0.1t}\right) = 0$)

iv) Resolver la ecuación de Euler. (Respuesta no dada a los alumnos: $x^*(t) = 2 + 0.92e^{-0.951t} - 2.92e^{1.051t}$)

v) En base a lo hecho en los problemas anteriores, verificar que efectivamente se trata de un máximo.

4) Supongamos que una familia única vive durante un intervalo de tiempo $[0,T]$. Dicha familia se encarga de la producción, la inversión y el consumo. Sea $c(t)$el consumo de la familia en el tiempo t y supongamos que dicha familia posee una función de utilidad $u(c(t))$ dos veces diferenciable y tal que $u' > 0, u'' < 0$. ¿Qué explicación de tipo económico se le podría dar a este hecho? La producción está representada por una función $f(k(t))$ que depende del capital en el tiempo. Supongamos que esta última función es también dos veces derivable, estrictamente cóncava (¿qué razón de tipo económico nos lleva a esta determinación?), y además $f(0)=0$, lo que significa que sin capital no hay producción. En general, con el paso del tiempo el capital se deprecia, sin embargo podemos empezar suponiendo que no tenemos que tomar ningún factor de descuento. Evidentemente, esta familia busca optimizar su utilidad en el tiempo.

i) Expresar analíticamente el problema que maximiza la utilidad.

ii) La restricción en este caso sería que en todo tiempo la producción es igual al consumo más la inversión bruta que se expresaría como: $\dot{k}(t)+\delta k(t)$ donde δ es una constante tal que, $f'(0) > \delta$. Expresar analíticamente la restricción. (Respuesta no dada a los alumnos: $f(k)=c+\dot{k}+\delta k$. El resto de las restricciones son: $k(0)=k_0, k(T)=k_T$).

iii) Escribir la ecuación de Euler.

iv) Expresar analíticamente el problema que maximiza la utilidad, pero ahora tomando un factor de descuento ρ.

v) Escribir la ecuación de Euler para el inciso anterior.

5) Una persona invierte k_0 unidades monetarias en un banco, además recibe un salario constante w y tiene una función de utilidad: $u(c(t))=1-e^{-\beta c(t)}$, donde $c(t)$ representa el consumo en el tiempo t y $\beta > 0$. La restricción presupuestal está dada por: $\dot{k}(t)+c(t)=rk(t)+w$, en donde $k(t)$ representa el nivel de activos en el banco y r la tasa de interés. Dicha persona desea planear su trayectoria de consumo durante un período de 10 años y así maximizar el valor presente de su utilidad, descontada a una tasa subjetiva $\rho > r$.

i) Encontrar la trayectoria óptima de consumo. (Sugerencia: Despejar $c(t)$ de la restricción presupuestal y sustituirla en la función utilidad).

ii) ¿Cómo podríamos verificar que efectivamente se trata de un máximo? (Sugerencia: Ver los problemas anteriores).

5.6 CUARTA ACTIVIDAD
Condiciones suficientes de segundo orden

Hemos estado aplicando el Teorema de condición necesaria de primer orden (Ecuación de Euler) para determinar trayectorias óptimas. Sin embargo, dada una trayectoria óptima, no sabemos si ésta representa un máximo o un mínimo.

En los ejercicios de la actividad pasada, se buscó de manera intuitiva una forma de hacerlo, basada en el concepto de concavidad y convexidad de una función de una o de varias variables. En los siguientes ejercicios formalizaremos lo anterior.

1) Si una función $f(x)$ es cóncava en una vecindad del punto x_0, entonces se cumple que: $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, para algún $\delta \in R$. Si la función fuera cóncava siempre quitaríamos la restricción del intervalo.

Análogamente, una función $f(x)$ es convexa en una vecindad del punto x_0, si se cumple que: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, para algún $\delta \in R$. Si la función fuera cóncava siempre quitaríamos la restricción del intervalo.

Mostrar de manera geométrica las afirmaciones anteriores. (Sugerencia: El lado derecho en las desigualdades anteriores representan la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$. El lado izquierdo representa la ordenada correspondiente al punto x (puede ser cualquier punto dentro del intervalo considerado). Entonces, geométricamente, una función es cóncava en x_0 si la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en x_0, queda por arriba de cualquier otra ordenada correspondiente a los puntos x dentro del intervalo considerado. Análogamente, si la función fuera convexa.

2) El resultado anterior se generaliza fácilmente, primero a dos variables, y de aquí a n variables.

i) Escribir la definición de concavidad y convexidad para funciones de dos variables haciendo una analogía con el ejercicio anterior. (Respuesta no dada a los alumnos: Si una función $f(x, y)$ es cóncava en una vecindad del punto (x_0, y_0), entonces se cumple que:

$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),\ \forall\, (x, y) \in V_\delta(x_0, y_0)$, para algún $\delta \in R$. Si la función fuera cóncava siempre quitaríamos la restricción de la vecindad.

Análogamente, una función $f(x)$ es convexa en una vecindad del punto x_0, si se cumple que:

$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),\ \forall\, (x, y) \in V_\delta(x_0, y_0)$, para algún $\delta \in R$. Si la función fuera cóncava siempre quitaríamos la restricción de la vecindad.).

ii) Mostrar geométricamente los resultados anteriores. (Sugerencia: Hacer lo análogo al ejercicio anterior. En lugar de curva $y = f(x)$, hablaríamos de superficie $z = f(x,y)$, y en lugar de recta tangente estaríamos hablando de plano tangente).

3) El integrando de las funcionales que hemos estado considerando son funciones de la forma: $f\left(x,\dot{x},t\right)$, donde suponemos que las variables independientes son: x y $\dot{x}$, y que ambas dependen del tiempo t. Por lo tanto, este tipo de funciones son de dos variables independientes.

i) Escribir la definición de concavidad y convexidad para estas funciones. (Sugerencia: Al incremento de las funciones $x(t)$ o bien simplemente x, llamarle h (es una función cuyas características se dieron cuando se definió el concepto de incremento de funcionales), y al incremento de las funciones $\dot{x}(t)$ o simplemente $\dot{x}$ llamarle $\dot{h}$. (Respuesta no dada a los alumnos: $f\left(x,\dot{x},t\right) \le f\left(x^*,\dot{x}^*,t\right) + f_x\left(x^*,\dot{x}^*,t\right)h + f_{\dot{x}}\left(x^*,\dot{x}^*,t\right)\dot{h}$, donde $x = x^*+h$. (En el caso de concavidad.
$f\left(x,\dot{x},t\right) \ge f\left(x^*,\dot{x}^*,t\right) + f_x\left(x^*,\dot{x}^*,t\right)h + f_{\dot{x}}\left(x^*,\dot{x}^*,t\right)\dot{h}$, donde $x = x^*+h$. (En el caso de convexidad).

4) En base a los argumentos geométricos dados para concavidad y convexidad de funciones de una y de varias variables, justifique que si una función es cóncava en una vecindad (intervalo en el caso de una variable) de un punto crítico, entonces la función debe alcanzar un máximo en dicho punto crítico. (Análogamente para funciones convexas y mínimos)

i) Hacerlo para funciones de una variable. (Respuesta no dada a los alumnos: En un punto crítico x_0, la tangente es paralela al eje x, lo que implica que la derivada en dicho punto es cero. Si además la función es cóncava en dicho punto, de la definición de concavidad, existe una vecindad $V_\partial(x_0)$ tal que $\forall\, x \in V_\partial(x_0) \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$ que es la definición de máximo). (Análogamente para mínimo).

ii) Hacerlo para funciones de dos variables y de aquí generalizarlo a n variables. (Respuesta análoga al inciso anterior).

5) Con base en la definición de concavidad para el integrando de las funcionales que hemos estado estudiando y de la misma definición de funcional, así como de propiedades elementales de la integral definida, justificar que:

i) $J(x) \le J(x^*) + \int_a^b \left(f_x\left(x^*,\dot{x}^*,t\right)h + f_{\dot{x}}\left(x^*,\dot{x}^*,t\right)\dot{h}\right)dt$ (Respuesta no dada a los alumnos: Como f es cóncava, implica que:
$f\left(x,\dot{x},t\right) \le f\left(x^*,\dot{x}^*,t\right) + f_x\left(x^*,\dot{x}^*,t\right)h + f_{\dot{x}}\left(x^*,\dot{x}^*,t\right)\dot{h}$, $\forall\ x = x^*+h$, integrando

ambos lados sobre el intervalo $[a,b]$, el lado izquierdo quedará como: $J(x)$ por la definición de funcional. De la misma forma, el primer término del lado derecho se expresará como: $J(x^*)$, dejando el resto del lado derecho bajo el signo de la integral)

ii) De la definición de primera variación, justificar que:

$$J(x) \le J(x^*) + \int_a^b \left(f_x\left(x^*, \dot{x}^*, t \right) h + f_{\dot{x}}\left(x^*, \dot{x}^*, t \right) \dot{h} \right) dt \iff J(x) \le J(x^*) + DJ(x^*)$$

(Respuesta no dada a los alumnos: Cuando se estudió la funcional $J(x) = \int_a^b f\left(x, \dot{x}, t \right) dt$, se vió que: $DJ(x^*) = \int_a^b \left(f_x\left(x^*, \dot{x}^*, t \right) h + f_{\dot{x}}\left(x^*, \dot{x}^*, t \right) \dot{h} \right) dt$)

iii) Una condición necesaria para que una funcional alcance un extremo (según se vió), es que $DJ(x^*) = 0$, por lo que si $f\left(x, \dot{x}, t \right)$ es cóncava en alguna vecindad de $(x^*, \dot{x}^*)$ y su funcional asociada $J(x)$ es tal que $DJ(x^*) = 0$, entonces $J(x) \le J(x^*), \forall \left(x, \dot{x} \right) \in V_\delta \left(x^*, \dot{x}^* \right)$, para algún $\delta \in R$. Si $f\left(x, \dot{x}, t \right)$ fuera cóncava siempre, se quitaría la última restricción y estaríamos hablando de un máximo absoluto. Escribir este inciso suponiendo que $f\left(x, \dot{x}, t \right)$ es convexa ya sea en una vecindad o siempre. (Respuesta no dada a los alumnos: Es completamente análoga, sólo se invertiría el sentido de la desigualdad).

6) De lo anterior, se deduce la siguiente proposición: Sea $J(x) = \int_a^b f\left(x, \dot{x}, t \right) dt$ una funcional con $f\left(x, \dot{x}, t \right)$ cóncava (convexa) como función de x y $\dot{x}$. Entonces, x^* es un máximo global (mínimo global) si y sólo si $DJ(x^*) = 0$. Si además, $f\left(x, \dot{x}, t \right)$ es estrictamente cóncava (es decir, se cumple la desigualdad estrictamente) o (estrictamente convexa), el máximo (mínimo) global es único.

i) Escribir ésta misma proposición para el caso de que la concavidad y convexidad sean sólo localmente (dentro de alguna vecindad).(Respuesta no dada a los alumnos: El argumento es el que se presenta al comienzo del ejercicio, sólo que hay que restringirlo a una vecindad).

ii) Escribir de manera continua toda la argumentación geométrica para justificar esta proposición en alguno de sus casos. (Respuesta no dada a los alumnos: Repetir la argumentación dada para funciones desde el principio, haciéndolo ahora para funcionales. El objetivo de este ejercicio es que se vea el argumento de corrido, sin enfocarnos a ningún paso intermedio, esto por un lado, por otro que se aprecie la analogía de argumentos dados para funciones, con los dados para funcionales).

7) Sabemos por cálculo que una forma cuadrática se puede clasificar en definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) e indefinida. Sabemos de cálculo como clasificar una forma cuadrática por menores o por valores propios (recordar la matriz Hessiana). En las funcionales que hemos estado estudiando, el integrando es una función dos veces diferenciable, por lo que si estudiamos la matriz Hessiana asociada a dicha función, podemos clasificar la forma cuadrática asociada al integrando $f\left(x, \dot{x}, t\right)$ lo que nos permitiría determinar la naturaleza (máximo o mínimo) de una trayectoria x^*.

i) Escribir la matriz Hessiana correspondiente a la forma cuadrática asociada a la función $f\left(x, \dot{x}, t\right)$. (Respuesta no dada a los alumnos:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{\dot{x}x} \\ f_{x\dot{x}} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix}_{x=x^*}$$)

ii) En base a lo anterior, determinar las condiciones suficientes para que la funcional $J(x)=\int_a^b f\left(x, \dot{x}, t\right)dt$ y tal que para la trayectoria x^*, $DJ(x^*)=0$, alcance un máximo o un mínimo. (Respuesta no dada a los alumnos: Si x^* es tal que $DJ(x^*)=0$ y denotamos por $f^*_{xx}, f^*_{x\dot{x}}, f^*_{\dot{x}\dot{x}}$ a las segundas derivadas parciales de la función f evaluadas en $\left(x^*, \dot{x}^*, t\right)$, entonces una condición suficiente para que x^* sea un máximo (mínimo) local es que se cumpla:

$$D^2J(x^*)\left(h, \dot{h}\right) = \int_a^b \left(f^*_{xx}\, h^2 + 2 f^*_{x\dot{x}}\, h\dot{h} + f^*_{\dot{x}\dot{x}}\, \dot{h}^2 \right)dt < 0\ (>0).$$ (Se puede expresar en términos de la matriz Hessiana, escrita en la respuesta al inciso anterior).

8) Dadas las siguientes funcionales: a) $J(x)=\int_0^1 \left(4x - \dot{x}^2 - x^2\right)e^{-0.1t}dt$, (tercer problema de la actividad tres) b) $J(x)=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt$.

i) Encontrar la trayectoria que optimice la funcional (Aplicar teorema de condición necesaria de primer orden, es decir, la ecuación de Euler)

ii) Aplicar alguna de las dos proposiciones vistas sobre condiciones suficientes de segundo orden para determinar si son máximos o mínimos

iii) Interpretar geométricamente el ejercicio del inciso b). (Respuesta no dada a los alumnos: La distancia (longitud de la curva) más corta entre dos puntos es la línea recta).

(Sugerencias: En el primer ejercicio se pueden aplicar ambas proposiciones. En el segundo no funciona el criterio del Hessiano y para efectos de ver la concavidad podemos apreciar que únicamente aparece $\dot{x}$ como variable. En este caso podemos hacer $y = \dot{x}$ y considerar la concavidad de la función $z = \sqrt{1 + y^2}$ que es estrictamente convexa).

(Respuesta no dada a los alumnos: Para el primer inciso len el a), la solución aparece junto con el problema 3 de la actividad 3. El segundo inciso de la a) nos da un máximo global único. Para el b), el primer inciso la solución es de la forma: $x(t) = at + b$, y en el segundo se trata de un mínimo absoluto).

9) Aplicar alguna de las dos proposiciones de condición suficiente (de segundo orden) a todos los ejercicios de la actividad tres.

5.7 QUINTA ACTIVIDAD
Condiciones de Transversalidad

Hasta ahora hemos considerado funcionales en los que el intervalo de tiempo está dado. Sin embargo, en la práctica puede pasar que el tiempo final sea libre y condicionado a un valor determinado (por ejemplo producción). En este caso, T es libre y $x(T)=x_T$ dado. Podría ser también que aunque el tiempo T esté dado, $x(T)$ esté libre o bien que tanto T como $x(T)$ sean libres. Estas consideraciones cambian ligeramente las condiciones necesarias de primer orden (Ecuación de Euler). Por ejemplo, al deducir la ecuación de Euler lo primero que hicimos fue calcular el incremento de la funcional, sin considerar al tiempo como variable dependiente. También a la función de incremento $h(t)$ la supusimos diferenciable y tal que: $h(0)=h(T)=0$, ahora seguiremos considerando a $h(t)$ diferenciable y tal que $h(0)=0$, pero ahora puede ser que $h(T)\neq 0$. Con estas consideraciones, calcularemos otra vez la primera variación.

1) Supongamos que tenemos la siguiente funcional con dos variables independientes: $J(x,T)=\int_0^T f\left(x,\dot{x},t\right)dt$ definida como lo hicimos originalmente, salvo en las condiciones mencionadas en la introducción.

i) Determinar $J(x+h,T+\Delta T)-J(x,T)$. (Respuesta no dada a los alumnos: $\int_0^{T+\Delta T} f\left(x+h,\dot{x}+\dot{h},t\right)dt-\int_0^T f\left(x,\dot{x},t\right)dt$).

ii) En base a propiedades elementales de la integral justificar que:
$$\int_0^{T+\Delta T} f\left(x+h,\dot{x}+\dot{h},t\right)dt-\int_0^T f\left(x,\dot{x},t\right)dt=\int_0^T\left(f\left(x+h,\dot{x}+\dot{h},t\right)-f\left(x,\dot{x},t\right)\right)dt+$$
$$\int_T^{T+\Delta T} f\left(x+h,\dot{x}+\dot{h},t\right)dt$$
(Respuesta no dada a los alumnos: Utilizar la propiedad elemental de la integral que dice: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

iii) En la última expresión del inciso anterior, determinar la aproximación lineal de la serie de Taylor para funciones de dos variables a la primera integral del lado derecho, y la definición de incremento de una funcional a la segunda integral del lado derecho, para justificar que:
$$\int_0^T\left(f\left(x+h,\dot{x}+\dot{h},t\right)-f\left(x,\dot{x},t\right)\right)dt \;+\; \int_T^{T+\Delta T} f\left(x+h,\dot{x}+\dot{h},t\right)dt$$
$$\approx\; \int_0^T\left(f_x h+f_{\dot{x}}\dot{h}\right)dt+\left(J(x+h,T+\Delta T)-J(x+h,T)\right)$$
(Notar que en el incremento de la funcional, la x no se incrementa).

iv) Usando el teorema fundamental del cálculo sobre la variable T , justificar que: $\left(J\left(x+h,T+\Delta T\right)-J\left(x+h,T\right)\right)=f\left(x(T),\dot{x}(T),T\right)\Delta T$ (Respuesta no dada a los alumnos: Por el teorema fundamental del cálculo, al derivar una integral cuyo límite de integración superior es la variable T , nos dice que queda el integrando en términos de dicha variable T).

v) Sustituir la expresión del inciso iv) en el iii) para obtener:

$$DJ\left(x,T\right)\left(h,\Delta T\right)=\int_0^T\left(f_x h+f_{\dot{x}}\dot{h}\right)dt+f\left(x(T),\dot{x}(T),T\right)\Delta T$$

vi) Sabemos que para alcanzar un óptimo es necesario que $DJ\left(x,T\right)=0$. Para lograr esto, en la expresión del inciso anterior, cada uno de los sumandos debe ser cero.

El primer sumando tenemos que considerarlo con cuidado pues $h(T)$ puede no ser cero. Integrar por partes el segundo término de la integral y simplificar. (Respuesta no dada a los alumnos: $\int_0^T f_{\dot{x}}\dot{h}\,dt=\left(hf_{\dot{x}}\right)_0^T-\int_0^T hdf_{\dot{x}}=h(T)(f_{\dot{x}})_{t=T}-\int_0^T hdf_{\dot{x}}$)

vii) La expresión anterior, sustituirla en la última expresión del inciso v). (Respuesta no dada a los alumnos:

$$DJ\left(x,T\right)\left(h,\Delta T\right)=\int_0^T h\left(f_x-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}\right)dt+f\left(x(T),\dot{x}(T),T\right)\Delta T+h(T)\left(f_{\dot{x}}\right)_{t=T}$$

viii) Se puede ver geométricamente que: $h(T)\approx\Delta x(T)-\dot{x}(T)\Delta T$ (Tomar ésto como un hecho). Sustituir esta expresión en la del inciso anterior. (Respuesta no dada a los alumnos:

$$DJ\left(x,T\right)\left(h,\Delta T\right)=\int_0^T h\left(f_x-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}\right)dt+\left(f_{\dot{x}}\right)_{t=t}\Delta x(T)+\left(f-\dot{x}f_{\dot{x}}\right)_{t=T}\Delta T$$

ix) Para que $DJ\left(x,T\right)=0$ se requiere que cada uno de los tres sumandos en la expresión anterior sean cero. En particular, para que el primer sumando sea cero, se requiere que la función trayectoria satisfaga la Ecuación de Euler. Sin embargo, al considerar que el tiempo es variable dependiente tenemos que buscar que los otros dos sumandos sean cero. Si T es dado, entonces $\Delta T=0$, y si $x(T)$ es libre, entonces $\Delta x(T)\neq 0$. Encontrar las condiciones necesarias para optimizar la funcional dada, suponiendo la última condición dada en este inciso. (Respuesta no dada a los alumnos: Ecuación de Euler y $\left(f_{\dot{x}}\right)_{t=T}=0$. Para dar esta respuesta supusimos $\Delta T=0$ y $\Delta x(T)\neq 0$)

x) Suponiendo la misma funcional del ejercicio anterior, pero teniendo la condición T libre ($\Delta T\neq 0$) y $x(T)$ dado ($\Delta x(T)=0$), encontrar las condiciones necesarias. (Respuesta no dada a los alumnos: Ecuación de Euler y $\left(f-\dot{x}f_{\dot{x}}\right)_{t=T}$. Para llegar a esta respuesta consideramos: $\Delta T\neq 0$ y $\Delta x(T)=0$).

xi) ¿Cuáles serían las condiciones si tanto T como $x(T)$ son libres? (Respuesta no dada a los alumnos: Ecuación de Euler y las correspondientes a los dos incisos anteriores: $\left(f_{\dot{x}}\right)_{t=T} = 0$ y $\left(f - \dot{x}\, f_{\dot{x}}\right)_{t=T}$. Aquí consideramos $\Delta T \neq 0$ y $\Delta x(T) \neq 0$)

xii) Hemos podido observar que la Ecuación de Euler es siempre parte de las condiciones necesarias para optimizar este tipo de funcionales. Las otras condiciones dependen de las combinaciones de que tanto T como $x(T)$ sean o no sean libres. Estas condiciones reciben el nombre de condiciones de transversalidad. Enunciar mediante una sóla definición las condiciones de transversalidad. (Sugerencia: Hay tres casos posibles).(Respuesta no dada a los alumnos: Escribir los incisos anteriores en uno solo).

Puede mostrarse sin mayor problema que las condiciones suficientes de segundo orden, son las mismas que ya habíamos enunciado.

2) Encontrar los extremos para las siguientes funcionales y clasificar dichos extremos.

i) $\int_0^2 \left(t^2 + \dot{x}^2 + x^2\right) dt$, dado que $x(0) = 1$ y $x(2)$ libre.

ii) $\int_0^T \left(t\,\dot{x} + \dot{x}^2\right) dt$, con: $x(0) = 1$ y $x(T) = 10,$ T libre.

3) A dos funcionales estudiadas con anterioridad y a su elección, plantear condiciones iniciales que representen las condiciones de transversalidad vistas.

4) Resolver los ejercicios del capítulo 11 de B. Rumbos

5.8 SEXTA ACTIVIDAD
Generalización a Teoría de Control

En el cálculo variacional suponemos siempre que el integrando de las funcionales que hemos visto, es decir, las funciones $f\left(x, \dot{x}, t\right)$ no son lineales. Por ejemplo:

1) Tratar de encontrar la ecuación de Euler para la funcional: $\int_0^T \left(ax + b\dot{x}\right)dt$. ¿Qué problema aparece?

Sin embargo, nos gustaría poder resolver ese tipo de funcionales. También nos gustaría tratar con trayectorias más generales que las consideradas en el cálculo de variaciones que eran dos veces diferenciables, así como otro tipo de generalizaciones.

La Teoría de Control nos proporciona dicha herramienta. Veremos que efectivamente, por un lado, resuelve problemas que no podíamos resolver con cálculo de variaciones, y por otro lado, los problemas que pueden plantearse y resolverse con el cálculo de variaciones, también pueden resolverse en términos de teoría de control.

2) Encontrar un extremo para la funcional: $\int_0^1 \left(x + \dot{x}^2\right)dt$, sabiendo que: $x(0) = 0;\ x(1)\ libre$.

3) Plantear el ejercicio anterior expresado en la forma de cálculo de variaciones como un ejercicio expresado en la forma de teoría de control. (Sugerencia: Escribir $u = \dot{x}$). (Respuesta no dada a los alumnos: Encontrar el extremo para la funcional $\int_0^1 \left(x + u^2\right)dt$, sujeto a: $\dot{x} = -u$ y sabiendo que: $x(0) = 0;\ x(1)\ libre$).

4) Resolver el ejercicio anterior utilizando el Principio del Máximo y comparar con la solución encontrada en el ejercicio tres. (Ver al final de estas actividades lo que dice el Principio del máximo. Resolver siguiendo mecánicamente dicho principio).

5) Mostraremos ahora, que en general, un problema escrito en la forma de cálculo de variaciones, se puede escribir en la forma de un problema de control. Para lograr este objetivo consideraremos los siguientes pasos:

i) Supongamos que queremos encontrar el extremo de la funcional:
$J(x) = \int_0^T f\left(x, \dot{x}, t\right)dt$, con $x(0) = x_0;\ T\ dado,\ x(T)\ libre$. (Escrito en la forma de cálculo de variaciones). Escribirlo en la forma de teoría de control. (Sugerencia:

Hacer $u=\dot{x}$). (Respuesta no dada a los alumnos: Encontrar el extremo de la funcional $J(x)=\int_0^T f(x,u,t)dt$, sujeto a: $\dot{x}=-u$, sabiendo que: $x(0)=x_0$; T *dado*, $x(T)$ *libre*.

ii) Escribir el Hamiltoniano asociado al problema del inciso anterior.

iii) Escribir las condiciones de primer orden en el Principio del Máximo. (Respuesta no dada a los alumnos: $H_u = f_u + \lambda = 0$, $\dot{\lambda} = -H_x = -f_x$, $\dot{x} = H_\lambda = u$.

iv) De la primera condición necesaria, deducir que $\lambda = -f_u$ y en base a esto, reescribir la segunda condición. (Respuesta no dada a los alumnos: $f_x - \frac{d}{dt} f_u = f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} = 0$, que no es otra cosa que la ecuación de Euler. Evidentemente podemos regresar por el mismo camino, demostrándose de esta forma la equivalencia entre la ecuación de Euler y las primera y segunda condiciones del principio del máximo.

v) La condición de transversalidad en cálculo de variaciones debida a considerar que T *dado*, $x(T)$ *libre* está dada por: $\left(f_{\dot{x}}\right)_{t=T} = 0$ según se vió en cálculo de variaciones. Deducir de esta condición, la condición de transversalidad en el principio del máximo y que está dada por: $\lambda(T)=0$. (Sugerencia: Hacer $u=\dot{x}$, y demostrar que: $\lambda(T)=(-f_u)_{t=T}=0$)). Evidentemente, la condición de que $x(0)=x_0$ se cumple en ambos casos.

vi) Por lo tanto, todo problema de cálculo de variaciones puede escribirse como un problema de control. ¿El recíproco siempre será cierto?, ¿qué sucede si el integrando es lineal como en el ejercicio uno de esta actividad? (Respuesta no dada a los alumnos: No necesariamente, pues un problema como el primero de esta actividad no puede resolverse con cálculo de variaciones y sí puede resolverse con Teoría de Control. La Teoría de Control generaliza al cálculo de variaciones. También es cierto que hay muchos problemas que se pueden resolver tanto en la forma de cálculo de variaciones como en la de Teoría de Control. Más adelante se ilustrará como se puede resolver un problema de éstos con Teoría de Control).

6) Dado el problema de: max $\int_0^{30} -\dot{x}^2\, dt$, con $x(0)=20$, $x(30)=0$.

i) Resolverlo como problema de cálculo de variaciones.

ii) Plantearlo y resolverlo como problema de control. (Respuesta no dada a los alumnos: max $\int_0^{30} -u^2 dt$, sujeto a: $\dot{x} = u$ con $x(0) = 20,\ x(30) = 0$).

7) Encontrar los extremos de la siguiente funcional: $J(x,u) = \int_0^2 \left(2x - 3u - \frac{u^2}{2}\right) dt$,

sujeto a: $\dot{x} = x + u$, $x(0) = 5,\ x(2)\ libre$, planteándolo y resolviéndolo primero como un problema de cálculo de variaciones y después como un problema de control.

8) Dados dos puntos, encontrar la trayectoria más corta entre ellos. Planteándolo y resolviéndolo primero como un problema de cálculo de variaciones y después como un problema de control. (Respuesta no dada a los alumnos: En cálculo de variaciones tendríamos el problema de: min $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + 1}\, dt$, sabiendo que: $x_{t_0} = x_0$ y $x_{t_1} = x_1$. En Teoría de Control el problema se escribiría como: min $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{u^2 + 1}\, dt$, con $\dot{x} = u$ y sabiendo que $x_{t_0} = x_0$ y $x_{t_1} = x_1$).(Sugerencia: Tomar el cuadrado de la distancia).

9) Si el integrando de una funcional es lineal (como en el ejercicio uno), no se puede resolver utilizando cálculo de variaciones. Se pueden resolver en general, como un problema de control, sólo que el principio del máximo cambia ligeramente. Por ejemplo, resolver el siguiente problema: max $\int_0^2 (2x - 3u) dt$,

sujeto a: $\dot{x} = x + u$, $x(0) = 4,\ x(2)\ libre$, $u(t) \in [0,2]$.

i) Intentar resolverlo como un problema de cálculo de variaciones.
ii) Escribir el Hamiltoniano asociado a este problema.
iii) Si aplicáramos como antes el Principio del Máximo, haríamos que: $H_u = 0$. ¿Qué obtendríamos en este caso?
iv) ¿Qué valor de u deberíamos dar si queremos maximizar la funcional. (Sugerencia: Como $u \in [0,2]$, tomar aquel extremo que maximice al Hamiltoniano que conviene escribirlo como: $H = (2+\lambda)x + (\lambda - 3)u$). (Respuesta no dada a los alumnos: $u^*(t) = \begin{cases} 2 \ si\ \lambda > 3 \\ 0 \ si\ \lambda < 3 \end{cases}$)
v) ¿Qué valor de u deberíamos dar si queremos minimizar la funcional?

vi) La primera condición del Principio del Máximo es sustituída por lo que acabamos de hacer. Sin embargo, las otras condiciones permanecen intactas, es decir: $\dot{\lambda} = -H_x = -(2+\lambda)$ y $\dot{x} = H_\lambda = x + u$. Además, se considera la condición de transversalidad $\lambda(2) = 0$. Resolver el problema usando todas estas condiciones. (Respuesta no dada a los alumnos: $\lambda^*(t) = 2e^{2-t} - 2$,

$x^*(t) = 6e^t - 2$). Observación: $x^*(t) = Ae^t - 2$ si $t \in (0,1.08)$, podemos aplicar la condición inicial: $x(0) = 4$, lo que nos lleva a que $A = 6$. Sin embargo, si $t \in (1.08,2)$ como $u^* = 0$, entonces $x^*(t) = Ae^t$ y aquí no se puede aplicar la condición inicial pues el tiempo igual a cero no aparece en este intervalo. Tenemos que determinar el parámetro utilizando el hecho de que la función es continua, para obtener: $6e^{1.08} - 2 = 15.668 = Ae^{1.08}$, lo que implica que $A = 5.32$. ($\lambda = 3$ si $t \approx 1.08$)

vii) Del inciso anterior, graficar la función $\lambda^*(t) = 2e^{2-t} - 2$, y en base a esta gráfica determinar el tiempo en el que $\lambda = 3$. (Observar que sólo para un instante de tiempo $\lambda = 3$. Si hubiera un intervalo en donde $\lambda = 3$, estaríamos ante un problema de control singular (fuera del alcance de esta materia).

viii) Análogamente al ejercicio anterior, graficar $u^*(t)$ y $x^*(t) = 6e^t - 2$. Tener cuidado al obtener dichas funciones de aplicar correctamente las condiciones iniciales. Este tipo de problemas se denominan de "bang-bang", dado que la variable de control sólo toma (quizá de manera intermitente) sus valores extremos.

Una pregunta muy natural que podría hacerse sería: ¿por qué si todos los problemas (e incluso más) de los que pueden resolverse con cálculo de variaciones pueden resolverse con teoría de control, entonces para qué estudiar cálculo de variaciones? Desde un punto de vista formal, no hay necesidad de estudiar cálculo de variaciones y podríamos quedarnos con el estudio de teoría de control. Sin embargo, muchos resultados importantes están dados en términos del cálculo de variaciones. También, como veremos, el resultado principal de la teoría de control que es el teorema de condición necesaria de primer orden para optimizar trayectorias (también conocido como principio del máximo de Pontryagin) es posible deducirlo mucho más fácilmente utilizando las armas del cálculo variacional.

La Teoría de Control fue desarrollada a partir de los trabajos de Valentine (1937), Mc. Shane (1939), Herstens (1947). Pero alcanzó su plenitud con los trabajos de los matemáticos rusos: Pontryagin y sus colaboradores: Boltyanski, Gamkrelidze y Mishchenko que terminaron el desarrollo de la teoría de control óptimo.

En la teoría de control se consideran dos tipos de variables: variables de estado y variables de control. Las variables de estado las denotaremos como en cálculo de variaciones a las trayectorias, es decir, por $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$ o $y_1(t), y_2(t), \ldots y_n(t)$ o la letra que hubiéramos usado para trayectorias. Estas llamadas variables de estado pueden representar en Economía, por ejemplo al capital, la inflación, salarios, cantidad de activos, etc., en Biología podrían representar por ejemplo el número de especies que conviven en un lago. Pediremos que cada una de dichas funciones sea continua y sus derivadas existan y sean continuas por pedazos (notar que se han generalizado mucho dichas trayectorias respecto de lo que se pedía en cálculo de variaciones).

El otro tipo de variables a considerar son las llamadas variables de control, que denotaremos por: $u(t)$ que pediremos que sean continuas por pedazos y se puedan elegir de un conjunto de funciones U , llamado el conjunto de controles admisibles. En Economía, dichos factores pueden ser: el consumo, política monetaria, política fiscal, etc. En Biología, los controles podrían tener que ver con el ritmo con que se puede pescar alguna especie determinada (política de pesca), o una política forestal, etc.

El problema que se plantea en teoría de control es obtener trayectorias óptimas para las variables de estado, de manera que se maximice un objetivo dado. En Economía el objetivo puede ser el valor presente del bienestar social, o el valor presente de la deuda pública. ¿Cuál podría ser un ejemplo en Biología?

Desde luego, las variables de estado están controladas por las variables de control. (Estas últimas son las restricciones que se imponen al problema de optimización).

En ecuaciones diferenciales, hay un teorema (de Peano) que garantiza que dada una trayectoria $u^* = u(t)$ y la condición inicial $x(t_0) = x_0$, existe localmente (en una vecindad), una solución única de la ecuación diferencial $\dot{x} = g(x, u^*, t)$. El problema en teoría de control es escoger el control u^* de manera que se optimice el valor de la funcional $\int_0^T f(x,u,t)dt$ (llamada función objetivo).

Es decir, el problema de teoría de control es escoger una trayectoria $u^* \in U$ que resuelva el problema de: max $\int_0^T f(x,u,t)dt$, sujeto a: $\dot{x} = g(x,u,t)$, $x(0) = x_0$, T dado y $x(T)$ libre. (1)

El teorema de condición necesaria para resolver este problema (Principio del máximo de Pontryagin) afirma lo siguiente:

Supongamos que u^* y x^* resuelven el problema de control (1), entonces existe una función $\lambda(t)$ continua (llamada variable de coestado), tal que el Hamiltoniano, definido por:

$$H(x,u,\lambda,t) = f(x,u,t) + \lambda(t)g(x,u,t)$$

posee un máximo (mínimo) en u^*, es decir,
$H(x^*,u^*,\lambda,t) \geq H(x^*,u,\lambda,t), \quad \forall u \in U, t \in [0,T]$ (O bien, $\leq$ en caso de mínimo).
Adicionalmente, $\lambda(t)$, $u^*(t)$ y $x^*(t)$, resuelven el sistema dinámico:

$$\dot{\lambda} = -H_x$$

$$\dot{x} = H_\lambda$$

y además, se satisface la condición de transversalidad (debida a que T dado y $x(T)$ libre): $\lambda(T)=0$.

10) En cálculo de variaciones, si T era libre y $x(T)$ dado, la condición de transversalidad estaba dada por: $\left(f-\dot{x}\, f_{\dot{x}}\right)_{t=T}=0$. ¿Cuál sería la correspondiente condición de transversalidad en teoría de control? (Respuesta no dada a los alumnos: $H^*(T)=0$).

11) En este ejercicio daremos una "justificación"del Principio del Máximo, en versión discreta. Utilizaremos herramientas que se desarrollan al estudiar cálculo.

Nuestro problema es Maximizar (minimizar) $\int_0^T f(x,u,t)dt$, sujeto a: $\dot{x}=g(x,u,t)$, con: $x(0)=x_0$, $x(T)=x_T$, T dado, $x(T)$ libre.

i) Escribir el problema en versión discreta. (Respuesta no dada a los alumnos: Maximizar (minimizar) $\sum_0^T f(x_t,u_{t,}t)$, sujeto a: $x_{t+1}-x_t=g(x_{t,}u_t,t)$, con x_0 dado, $t=0,1,...T$).

ii) Podemos considerar este problema como un problema de optimización (como los vistos en el Cálculo) con $2T+1$ variables: $x_1,x_2,...x_T,u_0,u_1,...u_T$, y $T+1$ restricciones: $x_{t+1}-x_t-g(x_t,u_t,t)=0$. Escribir (como en el Cálculo), la función Lagrangeana asociada de $2T+1$ variables con $T+1$ restricciones. (Respuesta no dada a los alumnos: $\ell=\sum_0^T f(x_t,u_t,t)+\sum\lambda_{t+1}(x_t+g(x_t,u_t,t)-x_{t+1})$).

iii) Escribir las condiciones necesarias de primer orden que debe satisfacer el óptimo. (Respuesta no dada a los alumnos: $\frac{\partial\ell}{\partial x_t}=0,\ t=1,...T$, $\frac{\partial\ell}{\partial u_t}=0,\ t=0,...T$, $\frac{\partial\ell}{\partial\lambda_{t+1}}=0,\ t=0,...T$)

iv) Desarrollar las condiciones de primer orden encontradas en el inciso anterior. (Respuesta no dada a los alumnos:

$$a)\ f_u(x_t,u_t,t)+\lambda_{t+1}g_u(x_t,u_t,t)=0,\quad t=0,...T$$
$$b)\ f_x(x_t,u_t,t)+\lambda_{t+1}g_x(x_t,u_t,t)+\lambda_{t+1}-\lambda_t=0,\quad t=1,...T$$
$$c)\ x_{t+1}-x_t=g(x_t,u_t,t),\quad t=0,...T$$
)

v) Verificar que una manera fácil de obtener los resultados del inciso anterior, es, definiendo la función Hamiltoniana: $H(x,u,\lambda,t) = f(x,u,\lambda,t) + \lambda g(x,u,t)$. (Sugerencia: El inciso a) del inciso iv) equivale a elegir u_t que maximice $H(x_t,u_t,\lambda_{t+1},t)$, ya que: $H_u = f_u + \lambda_{t+1} g_u$. Denotemos por: $H^*(x_t,\lambda_{t+1},t)$ a dicho valor óptimo. El inciso b) equivale a $\lambda_{t+1} - \lambda_t = -H_x(x_t,u_t,\lambda_{t+1},t)$. Finalmente, aplicar el teorema de la envolvente a la función Hamiltoniana: $\frac{\partial H}{\partial \lambda_{t+1}} = H_\lambda(x_t,u_t,\lambda_{t+1},t) = g(x_t,u_t,t)$. Entonces, el inciso C) equivale a $x_{t+1} - x_t = H_\lambda(x_t,u_t,\lambda_{t+1},t)$).

vi) Según lo visto en el inciso anterior para optimizar $\sum_0^T f(x_t,u_{t,}t)$, sujeto a: $x_{t+1} - x_t = g(x_{t,}u_t,t)$, con x_0 dado, $t = 0,1,...T$, se debe satisfacer:

1) $\forall t, u_t$ optimiza $H(x_t,u_t,\lambda_{t+1},t)$.

5.9 SÉPTIMA ACTIVIDAD

Aplicaciones y Hamiltoniano en tiempo corriente

1) Un monopolio tiene una función de costos dada por $C(x)=x^2+1$, donde $x(t)$ es la tasa (nivel) de producción. La demanda satisface $p\acute{}=\frac{1}{10}p-\frac{1}{20}x-1$, donde p es el precio. ¿Cuál es la trayectoria de producción óptima si se desea que $p(0)=14\ y\ p\left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)=16$?

(Respuesta no dada a los alumnos: Se debe entonces maximizar $\int_0^{\frac{20}{\sqrt{2}}}(px-C(x))dt$, sujeto a $p\acute{}=\frac{1}{10}p-\frac{1}{20}x-1$ y con $p(0)=14\ y\ p\left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)=16$. El Hamiltoniano asociado está dado por: $H=px-x^2-1+\lambda\left(\frac{1}{10}p-\frac{1}{20}x-1\right)$. Las condiciones necesarias de primer orden (principio del máximo) están dadas por:

$$H_x=p-2x-\frac{1}{20}\lambda=0,\ \lambda\acute{}=-H_p=-x-\frac{1}{10}\lambda,\quad p\acute{}=H_\lambda=\frac{1}{10}p-\frac{1}{20}x-1$$

De lo anterior surge el sistema: $\begin{pmatrix}\lambda\acute{}\\ p\acute{}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-3}{40} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{800} & \frac{3}{40}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$. Finalmente:

$$p^*(t)=\frac{1}{e-1}\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{20}t}-e^{1-\frac{\sqrt{2}}{20}t}\right)+15$$

$$\lambda^*(t)=\frac{20}{e-1}((2\sqrt{2}-3)e^{\frac{\sqrt{2}}{20}t}+(2\sqrt{2}+3)e^{1-\frac{\sqrt{2}}{20}t})-100\quad)$$

$$x^*(t)=\frac{1}{e-1}\left((2-\sqrt{2})e^{\frac{\sqrt{2}}{20}t}-(2+\sqrt{2})e^{1-\frac{\sqrt{2}}{20}t}\right)+10$$

2) Una empresa desea maximizar su función de utilidades $\int_0^T\left(K-K^2-\frac{I^2}{2}\right)dt$ sujeto a $K\acute{}=I-\frac{1}{2}K$, sabiendo que $K(0)=\frac{13}{9}$, donde K representa el capital e I la inversión bruta. Encontrar las trayectorias óptimas de $K^*(t)$ y de $I^*(t)$ para que la utilidad sea máxima, si:

i) $T=4$, $K(4)$ libre

ii) $T = 4,\ K(4) = \frac{6}{9}$

iii) T libre, $K(T) = \frac{6}{9}$, ¿existe solución?, ¿por qué?

iv) ¿Cuál es la variable de estado y cuál la de control?, ¿por qué?

3) En Economía son frecuentes problemas de control del tipo $\max \int_{t0}^{T} f(x,u)e^{-\rho t}dt$, sujeto a $x' = g(x,u)$. Este tipo de problemas son autónomos salvo por el factor de descuento $e^{-\rho t}$.

i) Escribir el Hamiltoniano asociado. (Respuesta no dada a los alumnos: $H = f(x,u)e^{-\rho t} + \lambda g(x,u)$).

ii) Escribir las condiciones del Principio del Máximo. (Respuesta no dada a los alumnos:

$$\begin{aligned} &f_u e^{-\rho t} + \lambda g_u = 0 \\ &\lambda' = -H_x = -f_x e^{-\rho t} - \lambda g_x \\ &x' = H_\lambda = g \\ &\lambda(T) = 0 \end{aligned}$$

iii) Para simplificar los cálculos del inciso anterior, definamos $\bar{H} = He^{\rho t}$. A $\bar{H}$ le llamaremos Hamiltoniano en tiempo corriente. Análogamente, definimos $\bar{\lambda} = \lambda e^{\rho t}$. Demostrar que las condiciones del principio del máximo quedan ahora como:

$$\begin{aligned} &\bar{H}_u = 0 \\ &\bar{\lambda}' = -\bar{H}_x + \bar{\lambda}\rho \\ &x' = \bar{H}_{\bar{\lambda}} \\ &\bar{\lambda}(T) = 0 \end{aligned}$$

(Sugerencia: Basados en las condiciones del problema anterior, usar regla de la cadena y en general reglas del álgebra elemental).

4) Supongamos que queremos $\max \int_0^{10} (x - u^2)e^{-t}dt$ sujeto a $\dot{x} = x + u$, $x(0) = \frac{1}{2}$, $x(10)\ libre$.

i) Plantear y resolver el problema con Hamiltoniano normal.

ii) Plantear y resolver el problema con Hamiltoniano en tiempo corriente.

iii) Independientemente de que se llega al mismo resultado, comparar los cálculos hechos en c/u de los incisos anteriores.

5) min $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x^2 + u^2)dt$, sujeto a $x´= x + u$, $x(0) = 0,\ x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = b > 0$. (Sugerencia: expresar este problema como de maximización. A la hora de escribir el Hamiltoniano, se le cambia el signo <u>únicamente</u> a la función objetivo).

6) Problema de tiempo óptimo. Minimizar $T = \int_0^T 1dt$ sujeto a

$x´= g(x,u,t)$, sabiendo que $x(0) = x_0,\ x(T) = x_T,\ T$ *libre.*

i) Resolver el problema para el caso particular $x´= x + u$, $x(0) = 1,\ x(T) = 5,\ T\ libre$. (Sugerencia: Observar que el Hamiltoniano es lineal). (Respuesta no dada a los alumnos: $x*(t) = 2e^t - 1,\ T = Ln(5),\ u*(t) = 1\ \forall t,\ \lambda(t = Ae^{-t},\ A < O)$. ¿Se puede determinar el valor de A?

Antes de pasar a presentar el diseño de los Instrumentos de Validación, creemos conveniente hacer las siguientes observaciones:

- Cada una de las Actividades mencionadas tomó entre una y dos semanas de trabajo en clase y en casa.

- Los temas relacionados con las ecuaciones diferenciales se introdujeron cuando el problema de optimización dinámica demandaba su solución, pero se introdujeron no sólo los métodos de solución sino también los métodos de interpretación y de análisis cualitativo mediante actividades que ya se tenían disponibles diseñadas con la misma teoría y que habían sido probadas en otros cursos.

CAPÍTULO VI

DISEÑO DE INSTRUMENTOS DE VALIDACIÓN

6.1 CONSIDERACIONES GENERALES

Para validar a la Propuesta Didáctica, objetivo central de este trabajo de investigación, diseñamos, desde luego, en base a la Descomposición Genética original, un conjunto de tres cuestionarios, así como una entrevista que se aplicó a ocho estudiantes, cuatro del grupo de M.A.E. con el que se trabajó a lo largo del semestre y cuatro de un grupo de Optimización. También llevamos a cabo una entrevista a la Profesora del curso de Matemáticas Aplicadas a la Economía.

Principalmente del análisis de estos instrumentos, pudimos obtener conclusiones que deben permitir mejorar nuestra propuesta didáctica incorporando las conclusiones de este trabajo de investigación. (Ver capítulo "VIII").

Con el fin de obtener algunos indicadores extra que nos ayudaran a mejorar la Propuesta Didáctica original, aplicamos el último cuestionario que diseñamos a algunos estudiantes de otro grupo. En particular, de un grupo de estudiantes de Economía del área teórica del ITAM que a lo largo de todo el semestre estudiaron conceptos de Cálculo de Variaciones y de Teoría de Control. La materia que llevaron estos estudiantes se llama "Optimización"(la edad de los alumnos a esta materia es similar a la del grupo estudiado). El grupo de estudiantes que cursa la materia de "Optimización", deben de ver con más profundidad tanto los temas de Cálculo de Variaciones como los de Teoría de Control. El temario de esta materia se puede ver en el anexo "B". Como una nota extra podemos decir que los estudiantes de "Optimización"debieron haber cursado durante todo un semestre anterior la materia: "Sistemas Dinámicos"donde se estudian ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencia.

Los alumnos de "Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Económicas"en un solo semestre ven lo que los estudiantes de Economía del área teórica ven en dos semestres. Sería de esperarse por lo tanto, mejor nivel de concepción en los estudiantes de Economía del área teórica.

Para determinar el tipo de concepción de un estudiante sobre un concepto en particular, nos basamos en la Teoría APOE. Un resúmen sobre los distintos tipos de concepción que puede tener un estudiante sobre un concepto, así como los criterios generales para asignarle uno de dichos tipos de concepción aparecen al final del capítulo "V"sobre Descomposición Genética.

Ante la falta de respuesta a ciertas preguntas por parte de algún estudiante que, en principio, podría deberse a distintas circunstancias como por ejemplo, a la falta de comprensión de la misma pregunta, consideramos que, dado que dichos estudiantes trabajaron en todas las actividades propuestas durante el curso, deberían estar en condiciones de entender las preguntas a pesar de ser de tipo teórico. Por ello, la interpretación que se hizo de la no respuesta fue que dichos estudiantes no recordaron en el momento de responder algo que consideraran posible; esto indica que en ese momento no estaban en condiciones de utilizar el conocimiento adquirido y, de acuerdo a la teoría APOE, su construcción está basada en la memoria y por ello podría considerarse de tipo acción o de tipo pre- acción.

Asimismo, debido a la múltiple posibilidad de respuestas, los criterios concretos para determinar un tipo de concepción sobre un concepto determinado por parte del estudiante quedan determinados por la descomposición genética y, en el análisis se triangulan mediante la opinión de, en este caso, dos investigadores. Es decir, si la respuesta del estudiante coincide básicamente con el criterio concreto para determinar un tipo de concepción, se tienen los elementos suficientes para así considerarlo puesto que para ello se analizaron todas las actividades en términos de la descomposición genética.

A continuación presentamos el diseño de los instrumentos de validación, empezando por los cuestionarios y terminando con las entrevistas.

6.2 PRIMER CUESTIONARIO

ANÁLISIS DE LAS PREGUNTAS DEL PRIMER CUESTIONARIO PARA EVALUAR LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA SOBRE EL ESQUEMA DE FUNCIONAL

El primer problema busca determinar en su primer inciso el nivel de concepción de un estudiante sobre un problema general de Optimización Dinámica, en su segundo inciso pretende determinar el nivel de concepción sobre la Ecuación de Euler en la solución de un problema general de Optimización Dinámica

1) Explica con tus palabras:

    a) ¿En qué consiste un problema de optimización dinámica?

    b) ¿Qué papel juega la Ecuación de Euler en el problema de optimización dinámica?

    c) ¿Qué es una funcional?

Si al primer inciso un estudiante responde que es aquel problema en el que aparece el tiempo, podríamos suponer que tiene un nivel de concepción acción sobre este concepto. Si además, da algunos ejemplos concretos sobre lo que es un problema de optimización dinámica, podríamos suponer que ha interiorizado las acciones para determinar cuándo un problema es de Optimización Dinámica en un proceso. Si además menciona ejemplos de Optimización Dinámica no vistos en clase, o si puede, además mencionar lo que es esencial para que un problema se considere de Optimización Dinámica, podríamos suponer que ha encapsulado el proceso para determinar si un problema es de Optimización Dinámica en un objeto.

En el segundo inciso, si el estudiante repite de memoria la Ecuación de Euler y afirma de alguna manera que dicha ecuación representa las condiciones necesarias de primer orden en un problema de Cálculo de Variaciones (mencionando posiblemente que el Cálculo de Variaciones es un caso particular dentro de la Optimización Dinámica), podríamos suponer una concepción acción sobre el papel que juega la Ecuación de Euler. Si además para el ejemplo dado en el Cuestionario en la pregunta dos, plantea la Ecuación de Euler y muestra que dicha ecuación implica resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, nos llevaría a suponer que dicho estudiante ha interiorizado las acciones sobre el papel que juega la Ecuación de Euler en un proceso. Si además de lo anterior, muestra como obtener la ecuación de Euler para cualquier problema de Cálculo de Variaciones y muestra que resolver dicha ecuación en general implica necesariamente resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, podríamos suponer que el estudiante ha encapsulado el proceso definido anteriormente en un objeto.

Para el tercer inciso, si el estudiante afirma que son funcionales aquellas expresiones solamente si aparecen x o $\dot{x}$, o estas mismas variables dentro de alguna integral, podemos afirmar que no ha construido el concepto de funcional ni a nivel de acción. Si responde que son funcionales cuando sean funciones con dominio un espacio vectorial normado y rango los números reales, podríamos suponer al menos una concepción acción del concepto de funcional. Si además se pueden dar varios ejemplos de funcionales podríamos suponer que ha interiorizado las acciones para distinguir a una funcional en un proceso, y si puede dar ejemplos de funcionales diferentes a los que se ven en clase (por ejemplo, las mismas funciones o donde no aparezca la integral) y ejemplos de funciones en las que diga por qué no pueden ser funcionales, podríamos suponer que ha encapsulado el proceso de distinguir una funcional en un objeto.

2) Encuentra el valor extremo de:

$$V[x]=\int_0^2 \left(12tx + x'^2\right)dt \text{, sujeto a: } x(0)=0 \text{ y } x(2)=17$$

Esta pregunta, pretende determinar si el estudiante puede resolver un problema de optimización de funcionales (en Cálculo de Variaciones), con condiciones iniciales y en caso afirmativo, determinar la forma en la que lo hace. La solución del problema requiere que el estudiante utilice correctamente la ecuación de Euler. Si el estudiante utiliza la ecuación de manera memorística y no muestra señales de comprensión de su significado matemático, y si, por otro lado, resuelve la ecuación diferencial que resulta de la aplicación de la Ecuación de Euler de manera memorística, se considerará que la concepción que muestra el estudiante acerca del proceso de optimización es de tipo acción. Si el estudiante muestra comprensión del significado de la ecuación de Euler y del proceso de solución de la ecuación diferencial resultante, se considerará que el estudiante tiene una concepción proceso del algoritmo de solución del problema de optimización. Puede ser que el estudiante de muestras de tener una concepción proceso de la solución de la ecuación diferencial pero no de la solución del problema de optimización (ecuación de Euler) o viceversa. En tal caso se considerará que el estudiante tiene una concepción acción de un concepto y concepción proceso del otro. En el caso de que incluso comente acerca de diferentes formas de resolver el problema de optimización (por ejemplo, comentando cómo se resolvería este problema con el enfoque de Teoría de Control y eligiendo el método más adecuado para resolver el problema dado), podríamos suponer que el estudiante ha encapsulado el proceso de optimización en un objeto sobre el cual puede hacer nuevas acciones o el cual puede ser desencapsulado en el proceso que le dio origen.. Análogamente en el caso de solución del sistema de ecuaciones diferenciales al que dan lugar las condiciones necesarias de primer orden. Si comenta diferentes formas de resolver dicho sistema y elige la que por alguna razón conviene al sistema dado, podríamos suponer que tiene una concepción objeto de la noción de solución de tales sistemas.

6.3 SEGUNDO CUESTIONARIO

ANÁLISIS DE LAS PREGUNTAS DEL SEGUNDO CUESTIONARIO PARA EVALUAR LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA SOBRE EL ESQUEMA DE FUNCIONAL

La primera pregunta pretende determinar el nivel de cognición de un estudiante sobre el concepto de solución de un problema de Optimización Dinámica.

1) ¿Qué es la solución de un problema de Optimización dinámica?

Sobre el concepto solución, si no dice que es una trayectoria, podríamos afirmar que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre el concepto solución de un problema de optimización dinámica. En caso de responder basado en la memoria, que es una trayectoria, podríamos suponer una concepción acción sobre el concepto solución. Si además puede dar ejemplos de algunas trayectorias (en forma analítica o geométrica) y explicar correctamente por qué una de ellas es la óptima, nos llevaría a suponer que el estudiante ha interiorizado las acciones que permiten distinguir la forma de la solución a un problema de Optimización Dinámica en un proceso analítico o geométrico (dependiendo de los ejemplos dados). Si además puede coordinar los procesos algebraicos con los geométricos, nos permitiría suponer que ha encapsulado el proceso recién definido en un objeto (el concepto solución de un problema de optimización dinámica).

El problema dos pretende determinar el nivel cognitivo de un estudiante sobre el concepto de solución de un problema de Optimización Dinámica desde el punto de vista geométrico.

2) Representa en un plano t-x las posibles soluciones al problema de optimización señalando la que consideras óptima.

   Si el estudiante responde dibujando algunas trayectorias, sin explicar cual es el criterio para elegir la trayectoria óptima, nos llevaría a suponer que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre el concepto de solución de un problema de Optimización desde un punto de vista geométrico. Si es capaz de explicar el criterio para escoger la trayectoria óptima de manera memorística, nos llevaría a suponer que tiene una concepción acción de este concepto. En el caso de que pueda dar varios ejemplos concretos y pueda elegir la trayectoria óptima en base al criterio establecido por el mismo ejemplo dado, podríamos suponer al menos una concepción proceso del concepto y si puede explicarlo en forma general, podríamos suponer una concepción objeto de este concepto.

La pregunta tres aborda un problema particular de Optimización Dinámica y busca determinar el nivel de cognición sobre la solución de este problema.

3) Si se quisiera resolver el problema de min $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+x'^2}\, dt$ (que representa la longitud de una curva entre los puntos $P(t_1, x(t_1))$ y $Q(t_2, x(t_2))$). Intuitivamente, ¿cuál sería la solución óptima? Grafícala.

Si un estudiante responde intuitivamente que es la recta, podríamos suponer que tiene al menos un nivel de cognición acción para este problema. Si es capaz de explicar correctamente (y no de memoria) el por qué es la recta, nos llevaría a suponer que dicho estudiante tiene al menos una concepción proceso sobre la solución de este problema.En caso de que en su respuesta involucre explícitamente el criterio de optimización implícito en el integrando que aparece en este problema y lo asocie correctamente con la solución (en este caso la recta) nos llevaría a suponer que para este problema ha logrado coordinar los procesos de solución óptima con el objeto o proceso trayectoria y por lo tanto nos llevaría a suponer una concepción objeto sobre la solución a este problema.

La pregunta cuatro tiene como objetivo determinar el nivel de concepción de un estudiante sobre el papel que juegan las condiciones de transversalidad en la solución de un problema de Optimización Dinámica y por qué son necesarias.

4) ¿De qué cambios específicos al considerar el intervalo de tiempo en un problema de optimización dinámica surgen las condiciones de transversalidad? Grafica los distintos casos.

Si un estudiante sólo las enuncia memorísticamente, pero no puede explicar su función, podríamos suponer que tiene una concepción acción sobre este concepto. Si el estudiante es capaz de graficar las distintas condiciones y explicar su función podríamos suponer que ha interiorizado la acción de explicar su función en un proceso geométrico. Si confunde las condiciones de transversalidad con las condiciones necesarias de primer orden o con las condiciones suficientes de segundo orden, podríamos afirmar que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre ellas. En el caso de que pueda coordinar de manera general los procesos geométrico y analítico de condiciones de transversalidad, podríamos suponer que ha encapsulado el proceso de explicar la función de las condiciones de transversalidad en un objeto.

El primer inciso de la pregunta cinco, busca determinar el nivel de concepción de un estudiante sobre la solución de un problema concreto de Optimización Dinámica. El segundo inciso de la misma pregunta, pretende determinar el nivel de concepción de dicho estudiante sobre las condiciones suficientes de segundo orden del mismo problema del primer inciso.

5)

a) Encuentra las funciones x y x' que satisfacen las condiciones necesarias para optimizar el siguiente problema:

$$\text{Opt} \quad J[x(t)] = \int_0^1 \left(x^2 + x'^2 + 2xe^t\right)dt$$

b) Determina si la solución encontrada en el inciso anterior es un máximo o un mínimo.

El primer inciso pretende determinar si el estudiante puede resolver un problema de optimización de funcionales, y en caso afirmativo, determinar la forma en la que lo hace. La solución del problema requiere que el estudiante utilice correctamente la ecuación de Euler. Si el estudiante repite de memoria la Ecuación de Euler y afirma de alguna manera que dicha ecuación representa las condiciones necesarias de primer orden en un problema de Cálculo de Variaciones (mencionando posiblemente que el Cálculo de Variaciones es un caso particular dentro de la Optimización Dinámica), podríamos suponer una concepción acción sobre el papel que juega la Ecuación de Euler. Si además para el ejemplo dado en el Cuestionario, plantea la Ecuación de Euler y muestra que dicha ecuación implica resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, nos llevaría a suponer que dicho estudiante ha interiorizado las acciones sobre el papel que juega la Ecuación de Euler en un proceso. Si además de lo anterior, muestra como obtener la ecuación de Euler para cualquier problema de Cálculo de Variaciones y muestra que resolver dicha ecuación en general implica necesariamente resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, podríamos suponer que el estudiante ha encapsulado el proceso definido anteriormente en un objeto.

En el segundo inciso, si aplica memorísticamente pero de manera correcta algún teorema sobre condiciones suficientes de segundo orden, podríamos suponer al menos una concepción acción sobre este concepto. Si el estudiante puede dar valor a distintas trayectorias y de ahí encontrar la óptima nos llevaría a suponer que ha interiorizado las acciones que llevan a dar un valor a las trayectorias en un proceso y que puede coordinarlo con el proceso de comparación de trayectorias en términos del valor de la funcional, podríamos suponer que el estudiante ha reflexionado sobre la acción de obtener el valor de la funcional para distintas trayectorias y sobre las características que distinguen a las trayectorias posibles, y por lo tanto, nuestra suposición podría ser en el sentido de que el estudiante ha interiorizado la acción de comparación de trayectorias en términos del valor de la funcional para determinar la trayectoria óptima como un proceso. En caso de que pueda coordinar ambos procesos para trayectorias en general, podríamos suponer que tiene una concepción objeto sobre trayectoria óptima.

La pregunta seis, busca determinar en su primer inciso el nivel de concepción para plantear un problema de optimización. En el segundo inciso se pregunta además si el estudiante puede plantear el problema en la forma en la que se escribe en Cálculo de Variaciones.

6) Una población de peces en una reserva en la que está permitida la pesca crece de acuerdo a la ecuación: $n'(t) = an(t) - bn^2(t) - q(t)$, en la que $n(t)$ es el número de peces en el tiempo t y $q(t)$ es el número de peces pescados en el tiempo t.

a) ¿Cuál será la utilidad de los dueños de la reserva por los permisos de pesca si se cobra una cantidad c por cada pescado?

b) Suponiendo que las utilidades futuras de los dueños de la reserva se descuentan a una tasa constante r, escribe el problema de Cálculo de Variaciones que describe un plan de utilidades para los dueños de la reserva entre el tiempo actual $t = 0$ y un tiempo futuro t_1 dado. NO RESUELVAS EL PROBLEMA, SE TRATA DE PLANTEARLO UNICAMENTE.

Si un estudiante trata de expresar la utilidad de manera estática (tratando de evitar las derivadas) podríamos suponer que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre el planteamiento de este problema de Optimización Dinámica. Si puede expresar a la utilidad correctamente (involucrando derivadas) y menciona que de alguna manera (no conocida por él), habría que optimizar una ecuación o un sistema de ecuaciones diferenciales, dando valores numéricos a los parámetros, podríamos suponer que tiene una concepción acción sobre el planteamiento de este problema. Si plantea correctamente el problema como en el caso anterior, pero lo hace en general, sin dar ningún valor numérico a los parámetros, podríamos suponer una concepción proceso del planteamiento del problema.

Suponiendo que el primer inciso lo responde correctamente y podemos suponer una concepción proceso del planteamiento del problema e introduce correctamente el factor de descuento y de esta manera plantea correctamente en la forma en que se plantean estos problemas en Cálculo de Variaciones, podríamos suponer que tiene una concepción objeto sobre el planteamiento de este problema.

Si la respuesta final no es analíticamente correcta, pero el procedimiento es correcto podríamos suponer al menos una concepción proceso en dicho planteamiento (habría que ver las razones de su error, pues si únicamente son algebraicos, podría tener una concepción objeto sobre el planteamiento de dicho problema).

Si la respuesta final es correcta (o contiene errores de tipo algebraico únicamente), pero se les asignó valores numéricos a los parámetros, nos llevará a suponer una concepción proceso del planteamiento de dicho problema.

Si falla el procedimiento sólo en algún inciso, podríamos suponer una concepción acción o proceso (según la respuesta dada) al inciso que contestó correctamente. Si falla el procedimiento en ambos incisos, no podríamos suponer ni siquiera una concepción acción a este concepto.

6.4 TERCER CUESTIONARIO

ANÁLISIS DE LAS PREGUNTAS PARA EVALUAR LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA SOBRE EL ESQUEMA DE FUNCIONAL

Responder lo más claramente posible, justificando todas las respuestas.

En la primera pregunta, queremos determinar el nivel de cognición de un estudiante sobre lo que significa la Optimización Dinámica y si sabe distinguirla de la Optimización Estática.

1) ¿Cuál es la diferencia entre un problema de control óptimo y uno de cálculo de variaciones?

   Si el estudiante no puede determinar diferencia alguna, nos llevaría a suponer que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre el concepto Optimización Dinámica. En el caso de que pueda establecer adecuadamente las diferencias entre ambos tipos de optimización, pero sólo pueda definir memorísticamente Optimización Dinámica, nos llevaría a suponer una concepción acción sobre este concepto. Si además puede explicar adecuadamente las diferencias sin recurrir sólo a la definición formal que se les dio en el curso, aunque sea utilizando ejemplos concretos, o establezca la equivalencia entre ambas ramas de la Optimización Dinámica podríamos suponer que ha interiorizado la acción de distinguir entre ambos tipos de optimización en un proceso. Si esboza con claridad además de las similitudes vistas en la equivalencia entre ambas ramas, las diferencias entre ambos tipos de optimización de manera general, podríamos suponer que ha encapsulado dicho proceso en un objeto.

   La pregunta dos pretende determinar el nivel de cognición de un estudiante sobre las condiciones suficientes de segundo orden.

2)

a) Tanto en cálculo de variaciones como en teoría de control ¿cuáles son las condiciones suficientes de segundo orden?

b) ¿Para qué sirven?

Las respuestas correctas pero memorísticas de los incisos anteriores nos llevaría a suponer por lo menos una concepción acción del concepto “condiciones suficientes”en Optimización Dinámica. Si sus respuestas a ambos incisos son correctas y las puede explicar en forma general, podríamos suponer que tiene una concepción proceso de dichas “condiciones suficientes”. Si además, se puede apreciar en sus respuestas que puede coordinar los procesos geométrico y analítico para determinar máximos y mínimos, podríamos suponer que tiene una concepción objeto sobre dichas condiciones.

La pregunta tres trata de determinar si el estudiante es capaz de explicar la función que juegan las condiciones de transversalidad en la solución de un problema de optimización y por qué son necesarias.

3) ¿Cuál es el papel de las condiciones de transversalidad en un problema de optimización dinámica?

Si un estudiante sólo las enuncia memorísticamente, pero no puede explicar su función, podríamos suponer que tiene una concepción acción sobre este concepto. Si el estudiante es capaz de graficar las distintas condiciones y explicar su función podríamos suponer que tiene al menos una concepción proceso sobre ellas. Si confunde las condiciones de transversalidad con las condiciones necesarias de primer orden o con las condiciones suficientes de segundo orden, podríamos afirmar que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre ellas. En el caso de que pueda coordinar de manera general los esquemas geométrico y analítico de condiciones de transversalidad, podríamos suponer que tiene una concepción objeto sobre ellas.

En el primer inciso de la siguiente pregunta queremos determinar el nivel cognitivo del estudiante sobre el concepto de funcional. En el segundo inciso queremos determinar si el estudiante puede coordinar el proceso de comparación entre funciones de una y de varias variables, en el que se puedan establecer sus semejanzas y diferencias con el proceso de comparación de funciones con dominio sobre cualquier espacio vectorial normado, en un proceso de generalización de la noción de función al concepto más general de funcional. Este último proceso podría ser encapsulado en un nuevo objeto sobre el que se podrían ejercer nuevas acciones.

4)

a) ¿Qué es una funcional?

b) ¿Cuáles de las siguientes son funcionales y por qué?

En el primer inciso, si un estudiante puede definir correcta pero memorísticamente el concepto de funcional, podríamos suponer que tiene una concepción acción de funcional. Si además da ejemplos concretos de funcional, podríamos suponer una concepción proceso de funcional y si puede dar ejemplos abstractos de funcional, podríamos suponer una concepción objeto sobre este concepto.

En el segundo inciso, si el estudiante determina que son funcionales aquellas expresiones solamente si aparecen x o x, o estas mismas variables dentro de alguna integral, podemos afirmar que no ha construido el concepto de funcional ni a nivel de acción. Si el estudiante determina que son funcionales aquellas expresiones en las que el dominio es un espacio vectorial normado y el rango los números reales, podríamos suponer que tiene por lo menos una concepción acción de funcional. Evidentemente, si el estudiante responde equivocadamente sobre el dominio y rango de alguna función, tendríamos un indicador de que su esquema de función no incluye los elementos necesarios para poder establecer una coordinación con el de funcional, pese a que originalmente supusimos lo contrario. Si además, justifica el hecho de que el dominio sea un espacio vectorial normado y el rango un número real, podemos suponer que al menos tiene una concepción proceso de funcional.

i) $f(x)=\int_0^x (2t^2+5)dt$; ii) $f(x,y)=x^2+y^2$; iii) $f(x,x',t)=\sqrt{1+x'^2}$

iv) $J(x)=\left(\int_0^5 x^2(t)dt, \sqrt{1+x'^2}\right)$; v) $J(x)=\int_0^T (x^2+x'^2)dt$

En la pregunta cinco, se pretende determinar el nivel cognitivo de un estudiante sobre dos conceptos: i) Lo que es en sí mismo un problema de Optimización Dinámica y ii) El significado de solución a un problema de Optimización Dinámica.

5) Explica lo más claramente posible en qué consiste un problema de optimización dinámica y qué es lo que se busca como solución utilizando el cálculo de variaciones.

Si el estudiante contesta correctamente, pero sólo repitiendo de memoria la definición de problema de Optimización Dinámica que se dio en clase, nos llevaría a suponer una concepción acción sobre el concepto Optimización Dinámica. Si además, puede dar ejemplos concretos de problemas de Optimización Dinámica, podríamos suponer una concepción proceso sobre este concepto y si puede mencionar en forma abstracta los elementos que definen un problema de Optimización Dinámica, podríamos suponer una concepción objeto de dicho concepto. Sobre el concepto solución, si no dice que es una trayectoria, podríamos afirmar que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre el concepto solución de un problema de optimización dinámica. En caso de responder basado en la memoria, que es una trayectoria, podríamos suponer una concepción acción sobre el concepto solución. Si además puede dar ejemplos de algunas trayectorias y explicar correctamente por qué una de ellas es la óptima, nos llevaría a suponer al menos una concepción proceso del concepto bajo estudio. Si además puede coordinar los esquemas algebraicos con los geométricos de una manera correcta, nos permitiría suponer una concepción objeto del concepto solución de un problema de optimización dinámica.

En el problema seis, queremos determinar el nivel de concepción del estudiante sobre el concepto de aplicaciones del Hamiltoniano en tiempo corriente.

6) ¿Para que tipo de problemas funciona muy bien el Hamiltoniano en tiempo corriente? ¿Por qué?

Si un estudiante responde de manera semejante a lo que se dijo en clase (de memoria) podríamos suponer una concepción acción sobre este concepto. Si además puede dar ejemplos concretos sobre la conveniencia de usar dicho Hamiltoniano, podríamos suponer una concepción proceso sobre dicho concepto y si puede dar las condiciones abstractas para que dicho Hamiltoniano sea de especial utilidad, podríamos suponer una concepción objeto de este concepto.

La siguiente pregunta en Teoría de Control, pretende determinar el nivel de concepción que tiene un estudiante sobre los conceptos: variable de estado y variable de control y si mediante un proceso puede comparar adecuadamente dichas variables.

7) ¿Cuál es la diferencia entre una variable de estado y una de control en un problema de control óptimo?

Si el estudiante responde correctamente lo que es una variable de estado o lo que es una variable de control, podemos suponer que tiene por lo menos una concepción acción sobre estas variables. Si responde correctamente no solo de memoria, sino dando algún ejemplo concreto y habiendo respondido correctamente para las dos variables, podemos suponer que tiene una concepción proceso sobre ambas variables. Si además, explica los incisos anteriores justificando adecuadamente la razón por la cual se pueden considerar de una u otra categoría podríamos suponer que tiene una concepción objeto de este concepto.

La siguiente pregunta pretende determinar en el primer inciso, el nivel de cognición de condiciones necesarias de primer orden en Cálculo de Variaciones, el segundo inciso pretende determinar el nivel de cognición de las condiciones suficientes de segundo orden. En el tercer inciso se pretende determinar el tipo de concepción de un estudiante sobre la equivalencia de un problema de cálculo de variaciones con otro de teoría de control.

8)

a) Encontrar la función que hace que el valor de $J[x(t)]$ sea óptimo si:

$$J[x(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - 3x'^2 + x'e^t - 3tx + 5xx'\right)dt\,;\ \text{sujeto a: } x(0) = 1 \text{ y } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

b) Determinar si es un máximo o un mínimo

c) Escribe el problema como un problema de control (no lo resuelvas)

El primer inciso de la pregunta 8 pretende determinar si el estudiante puede resolver un problema de optimización de funcionales, y en caso afirmativo, determinar la forma en la que lo hace. La solución del problema requiere que el estudiante utilice la ecuación de Euler correctamente utilizando adecuadamente las condiciones iniciales. Si el estudiante utiliza la ecuación de manera memorística y no muestra señales de comprensión de su significado matemático, y si, por otro lado, resuelve la ecuación diferencial que resulta de la aplicación de la Ecuación de Euler de manera memorística, se considerará que la concepción que muestra el estudiante acerca del proceso de optimización es de tipo acción. Si el estudiante muestra comprensión del significado de la ecuación de Euler y del proceso de solución de la ecuación diferencial resultante, se considerará que el estudiante tiene una concepción proceso del algoritmo de solución del problema de optimización. Puede ser que el estudiante de muestras de tener una concepción proceso de la solución de la ecuación diferencial pero no de la solución del problema de optimización (ecuación de Euler) o viceversa. En tal caso se considerará que el estudiante tiene una concepción acción de un concepto y concepción proceso del otro. En el caso de que incluso comente acerca de diferentes formas de resolver el problema de optimización (por ejemplo, comentando cómo se resolvería este problema con el enfoque de Teoría de Control y eligiendo el método más adecuado para resolver el problema dado), podríamos suponer que el estudiante ha encapsulado el proceso de optimización en un objeto sobre el cual puede hacer nuevas acciones o el cual puede ser desencapsulado en el proceso que le dio origen.. Análogamente en el caso de solución del sistema de ecuaciones diferenciales al que dan lugar las condiciones necesarias de primer orden. Si comenta diferentes formas de resolver dicho sistema y elige la que por alguna razón conviene al sistema dado, podríamos suponer que tiene una concepción objeto de la noción de solución de tales sistemas.

En el segundo inciso, si el estudiante aplica memorísticamente algún teorema sobre condiciones suficientes de segundo orden y las aplica de esta manera a algún ejercicio práctico dentro del Cuestionario, podríamos suponer al menos una concepción acción sobre este concepto. Si el estudiante puede dar por lo menos dos condiciones suficientes equivalentes y aplicar (alguna de ellas) a algún ejercicio práctico dentro del Cuestionario, nos llevaría a suponer que ha interiorizado las acciones para determinar máximos ó mínimos en un proceso. O bien si logra determinar su valor a distintas trayectorias y de ahí encontrar la óptima. Esto último nos llevaría a suponer que ha interiorizado las acciones que llevan a dar un valor a las trayectorias en un proceso y que puede coordinarlo con el proceso de comparación de trayectorias en términos del valor de la funcional, por lo que, podríamos suponer entonces que el estudiante ha reflexionado sobre la acción de obtener el valor de la funcional para distintas trayectorias y sobre las características que distinguen a las trayectorias posibles, y por lo tanto, nuestra suposición podría ser en el sentido de que el estudiante ha interiorizado la acción de comparación de trayectorias en términos del valor de la funcional para determinar la trayectoria óptima como un proceso. En caso de que pueda coordinar los procesos geométrico y analítico ya sea al utilizar las condiciones suficientes o utilizando trayectorias en general, podríamos suponer que ha logrado encapsular las condiciones suficientes en un objeto o bien en el caso de trayectorias, habría logrado encapsular la trayectoria óptima en un objeto.

En el tercer inciso, si el estudiante responde correctamente podemos suponer que tiene por lo menos una concepción acción sobre la equivalencia de un problema de cálculo de variaciones con otro de teoría de control. Si explica el procedimiento para lograr la equivalencia, podríamos suponer una concepción proceso sobre dicha equivalencia. Si además, comenta correctamente en qué casos puede convenir más un enfoque que otro, podríamos suponer una concepción objeto sobre el concepto bajo estudio.

9) Encontrar la función que hace que el valor de $J[x(t)]$ sea óptimo si:

$$J[x(t)] = \int_1^5 \left(ux - u^2 - x^2\right)dt \text{; sujeto a: } x' = x + u \text{ , } \quad x(1) = 2 \text{ y } \quad x(5) \textit{ libre}$$

(Recuerda que conviene despejar u de la condición necesaria para el Hamiltoniano).

La pregunta 9 pretende determinar si el estudiante puede resolver un problema de optimización de funcionales en Teoría de Control, y en caso afirmativo, determinar la forma en la que lo hace. Los criterios para determinar el nivel de cognición de un estudiante sobre este problema es completamente análoga a la dada al primer inciso de la pregunta anterior. La solución del problema requiere que el estudiante utilice el Hamiltoniano asociado al problema correctamente utilizando adecuadamente las condiciones iniciales. Si el estudiante utiliza el Hamiltoniano de manera memorística y no muestra señales de comprensión de su significado matemático, y si, por otro lado, resuelve las ecuaciónes diferenciales que resultan de la aplicación del Principio del Máximo de manera memorística, se considerará que la concepción que muestra el estudiante acerca del proceso de optimización es de tipo acción. Si el estudiante muestra comprensión del significado del Hamiltoniano y del proceso de solución del sistema de ecuaciones diferenciales resultante, se considerará que el estudiante tiene una concepción proceso del algoritmo de solución del problema de optimización. Puede ser que el estudiante de muestras de tener una concepción proceso de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales pero no de la solución del problema de optimización (Principio del máximo) o viceversa. En tal caso se considerará que el estudiante tiene una concepción acción de un concepto y concepción proceso del otro. En el caso de que incluso comente acerca de diferentes formas de resolver el problema de optimización (por ejemplo, comentando cómo se resolvería este problema con el enfoque de Cálculo de Variaciones y eligiendo el método más adecuado para resolver el problema dado), podríamos suponer que el estudiante ha encapsulado el proceso de optimización en un objeto sobre el cual puede hacer nuevas acciones o el cual puede ser desencapsulado en el proceso que le dio origen.. Análogamente en el caso de solución del sistema de ecuaciones diferenciales al que dan lugar las condiciones necesarias de primer orden. Si comenta diferentes formas de resolver dicho sistema y elige la que por alguna razón conviene al sistema dado, podríamos suponer que tiene una concepción objeto de la noción de solución de tales sistemas.

6.5 ENTREVISTA A ESTUDIANTES

ANÁLISIS DE LAS PREGUNTAS PARA EVALUAR LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA SOBRE EL ESQUEMA DE FUNCIONAL

Para construir el concepto de funcional, se desencapsula el esquema de función y el de espacio vectorial para construir acciones o procesos que permitan generalizar el concepto de función. Las acciones para construir funciones de una y de varias variables pueden interiorizarse en un proceso de comparación entre dichas funciones que permita distinguir sus semejanzas y diferencias. Por otra parte, las acciones que permiten la construcción de funciones con dominio sobre cualquier espacio vectorial normado, en particular, los espacios de funciones (continuas, integrables, derivables, etc.) permiten, análogamente al caso anterior, su interiorización mediante el proceso de comparación de estas funciones con las trabajadas anteriormente. Ambos procesos se pueden coordinar en un proceso de comparación entre las funciones de una y varias variables y aquellas funciones con dominio en un espacio vectorial normado, es decir en un proceso de generalización de la noción de función que se ha trabajado en los cursos de cálculo, en una definición general de funcionales, como un proceso que podría ser encapsulado en un objeto sobre el cual se pueden ejercer nuevas acciones.

Así, en la primera pregunta queremos determinar si el estudiante puede coordinar el primer proceso descrito anteriormente, para funciones con una y varias variables, con el correspondiente a funciones con dominio cualquier espacio vectorial normado para distinguir las semejanzas y diferencias entre los distintos tipos de funciones y, en particular, con las funcionales. En el caso de que sea capaz de coordinarlos, se puede considerar que el estudiante ha logrado generalizar la noción de función, y que ha incorporado en el esquema correspondiente al concepto de función la noción general de funcional, como un proceso.

1) a) Dadas las siguientes expresiones determinar cuáles son funcionales y cuáles son únicamente funciones, (en caso de sólo ser relaciones, (justificarlo).

i) $f(x)=\int_0^x (t^2+5)dt$, ii) $f(x,y)=\int_0^3 (\int_{y=0}^{y=x^2} (5x^3y+8x)dy)dx$, iii) $f\left(x,\dot{x},t\right)=\sqrt{1+\dot{x}^2}$,

considerando a x y a $\dot{x}$ como variables independientes, iv) $J(x)=\left(\int_0^5 x(t)^2\,dt, \sqrt{1+\dot{x}^2},\right)$,

$$\text{v)}\quad J(x)=\int_0^T \left(x^2+\dot{x}^2\right)dt$$

b) Determinar el dominio y el rango de cada una de las expresiones anteriores.

c) En base a la respuesta dada en el inciso anterior, ¿Cambiaría alguna de las respuestas del inciso a) ? En caso positivo, ¿en qué consistirían dichos cambios?

d) Dada una expresión analítica como en este ejemplo. ¿Cómo hacer para determinar si es sólo una relación, o si es función, o bien si es funcional?

Si el estudiante determina en el primer inciso que son funcionales aquellas expresiones solamente si aparecen x o $\dot{x}$, o estas mismas variables dentro de alguna integral, podemos afirmar que no ha construido el concepto de funcional ni a nivel de acción. El segundo inciso, tiene la finalidad de analizar si el estudiante recuerda la definición de funcional y cambia alguna decisión con respecto del primer inciso en el tercero. Evidentemente, si el estudiante responde equivocadamente el inciso segundo se tiene un indicador de que su esquema de función no incluye los elementos necesarios para poder establecer una coordinación con el de funcional, pese a que originalmente supusimos lo contrario. Si el estudiante determina (ya sea en el primer o tercer inciso) que son funcionales aquellas expresiones en las que el dominio es un espacio vectorial normado y el rango los números reales, podríamos suponer que tiene por lo menos una concepción acción de funcional. Si además, responden adecuadamente el inciso cuarto y en sus respuestas justifica el hecho de que el dominio sea un espacio vectorial normado y el rango un número real, podemos suponer que al menos tiene una concepción proceso de funcional.

La siguiente pregunta está muy relacionada con la anterior y sirve entre otras cosas para confirmar o poner en duda las hipótesis obtenidas en la primera pregunta sobre las construcciones de los estudiantes sobre el concepto de funcional. Y es que la reflexión sobre las acciones y procesos mencionados en la pregunta anterior, que permite a los estudiantes construir funcionales y compararlas entre si y con otras funciones, puede inducir la abstracción y la interiorización de la noción de funcional en un proceso por el cual es posible distinguir las características de aquellas funciones que no se pueden considerar como funcionales de las que sí lo son. La segunda pregunta tiene la intención de determinar si los estudiantes han logrado interiorizar el concepto de funcional en un proceso.

2) Dar tres ejemplos de funcionales. Justificar que sean funcionales.

Si el estudiante da tres ejemplos correctos de funcional, pero los tres son del mismo tipo de los que se ven en clase, podríamos suponer que tiene por lo menos una concepción acción de funcional. Si da ejemplos correctos y por lo menos alguno de ellos distinto a los vistos en clase, podríamos suponer que tiene una concepción proceso de funcional.

Aunque al llevar a cabo la descomposición genética original se supuso que los estudiantes habían construido el esquema de función (en particular, dentro de este esquema, los conceptos de trayectoria e integral de línea) y que podían utilizarlo por lo menos como un proceso, al responder preguntas de otros instrumentos de evaluación elaborados y utilizados previamente, se hizo evidente que no era así para varios estudiantes. Algunos entre ellos, no eran capaces de identificar analíticamente las trayectorias, y, en otros muchos casos no conocían la integral de línea. La siguiente pregunta busca determinar por un lado, si efectivamente los estudiantes conocen estos conceptos y por otro lado, si los han estudiado previamente y si pueden relacionarlos con el concepto de funcional.

3) i) ¿Qué es una integral de línea? ¿Habías estudiado este concepto en cursos previos?

ii) ¿Cómo puede calcularse una integral de línea? En cursos previos, ¿habías calculado integrales de línea?

iii) ¿Cuál es la representación analítica de una trayectoria? ¿Las habías estudiado en cursos previos?

iv) Dada una funcional, ¿de qué manera se puede relacionar con una trayectoria?

v) ¿Cuál es la diferencia entre una funcional y una trayectoria?

Evidentemente, si un estudiante no responde a ninguno de los incisos, quiere decir que no tiene ni una concepción acción de los conceptos de trayectoria e integral de línea. En caso de contestar correctamente los dos primeros incisos, se podría suponer que tiene por lo menos una concepción acción respecto del concepto de trayectoria. Si además contesta correctamente el tercer inciso, explicando en general, la representación analítica de una trayectoria, podríamos suponer que tiene por lo menos una concepción proceso de trayectoria. Si únicamente contesta este inciso (aunque de forma correcta) a través de ejemplos particulares, no podríamos suponer más que lo supuesto de sus respuestas a los dos primeros incisos. Si dicho estudiante contesta correctamente los incisos cuatro y cinco nos llevaría a suponer una concepción objeto de funcional y de trayectoria, además de suponer que pueden establecer relaciones entre el esquema de función y el objeto funcional a través del concepto de trayectoria.

El primer inciso de la pregunta 4 pretende determinar si el estudiante puede resolver un problema de optimización de funcionales, y en caso afirmativo, determinar la forma en la que lo hace. La solución del problema requiere que el estudiante utilice la ecuación de Euler correctamente utilizando adecuadamente las condiciones iniciales. Si el estudiante utiliza la ecuación de manera memorística y no muestra señales de comprensión de su significado matemático, y si, por otro lado, resuelve la ecuación diferencial que resulta de la aplicación de la Ecuación de Euler de manera memorística, se considerará que la concepción que muestra el estudiante acerca del proceso de optimización es de tipo acción. Si el estudiante muestra comprensión del significado de la ecuación de Euler y del proceso de solución de la ecuación diferencial resultante, se considerará que el estudiante tiene una concepción proceso del algoritmo de solución del problema de optimización. Puede ser que el estudiante de muestras de tener una concepción proceso de la solución de la ecuación diferencial pero no de la solución del problema de optimización (ecuación de Euler) o viceversa. En tal caso se considerará que el estudiante tiene una concepción acción de un concepto y concepción proceso del otro. En el caso de que incluso comente acerca de diferentes formas de resolver el problema de optimización (por ejemplo, comentando cómo se resolvería este problema con el enfoque de Teoría de Control y eligiendo el método más adecuado para resolver el problema dado), podríamos suponer que el estudiante ha encapsulado el proceso de optimización en un objeto sobre el cual puede hacer nuevas acciones o el cual puede ser desencapsulado en el proceso que le dio origen.. Análogamente en el caso de solución del sistema de ecuaciones diferenciales al que dan lugar las condiciones necesarias de primer orden. Si comenta diferentes formas de resolver dicho sistema y elige la que por alguna razón conviene al sistema dado, podríamos suponer que tiene una concepción objeto de la noción de solución de tales sistemas. El segundo inciso de esta pregunta, pretende determinar en primer lugar si el estudiante ha logrado coordinar las acciones que resultan en la obtención de un valor para un caso particular de una funcional para una trayectoria, con el proceso de comparación entre los valores correspondientes a distintas trayectorias para determinar cuál es la trayectoria óptima en un proceso en el que es capaz de determinar entre varias trayectorias aquella que resulta óptima en los términos planteados por un problema dado. En caso de que el estudiante haya interiorizado las acciones que llevan a dar un valor a las trayectorias, en un proceso y pueda coordinarlo con el proceso de comparación de trayectorias en términos del valor de la funcional, se puede decir que el estudiante ha reflexionado sobre la acción de obtener el valor de la funcional para distintas trayectorias y sobre las características que distinguen a las trayectorias posibles, y por lo tanto podemos suponer que ha interiorizado la acción de comparación de trayectorias en términos del valor del funcional para determinar la trayectoria óptima como un proceso. En caso de que pueda coordinar ambos procesos sólo para dos o tres trayectorias particulares, podríamos suponer que tiene una concepción acción sobre trayectoria óptima.

El tercer inciso busca determinar el tipo de concepción del estudiante sobre el concepto "trayectorias vecinas". Si lo hace intuitivamente para dos o tres trayectorias particulares, podríamos suponer que tiene una concepción acción del concepto trayectorias "vecinas". Si puede explicar, dicho concepto sin tener que recurrir a casos particulares, podríamos suponer que tiene una concepción proceso de este concepto.

4) a) Encontrar los extremos de las siguientes funcionales y verificar que para cualquier otra trayectoria que supusiéramos solución (proponer al menos dos), el valor de la funcional para estas trayectorias es mayor (en el caso de mínimo) o menor (en el caso de máximo):

$$\text{i)}\quad J(x) = \int_0^{40} -\frac{\dot{x}^2}{2}\,dt, \quad x(0) = 20,\ x(40) = 0\,;$$

$$\text{ii)}\quad J(x) = \int_0^{2} \left(12tx + \dot{x}^2\right)dt, \quad x(0) = 1,\ x(2) = 17$$

c) Intuitivamente, ¿Qué quiere decir que dos trayectorias son "vecinas"?

En la pregunta cinco, se pretende determinar si el alumno ha logrado coordinar el esquema de función (en particular, en cuanto a trayectorias e integrales de línea) y el objeto o proceso funcional. Queremos determinar si el estudiante es capaz de coordinar el proceso del cálculo de la solución de un problema de optimización dinámica con el proceso de identificación de trayectorias que implica la coordinación de la noción de función a nivel proceso con el del valor de integral de línea para dicha función, al menos como una acción. En el primer inciso se aborda el problema de manera general, es decir, sin plantear un ejercicio específico y en el inciso segundo, se aborda el caso de un problema particular de optimización dinámica. El inciso tercero, pretende determinar si el estudiante es capaz de coordinar las acciones que se hacen sobre la función que se encuentra en el integrando de la funcional con la representación geométrica de la solución de un problema concreto de optimización dinámica cuyo significado puede ser familiar para el estudiante. El inciso cuatro pretende determinar si el estudiante ha interiorizado las acciones determinadas por las condiciones suficientes del problema. En particular, cuáles de entre las acciones que se pueden realizar al utilizar los principios de segundo orden han sido interiorizadas por el estudiante. Los incisos quinto y sexto, pretenden determinar si los estudiantes han podido generalizar las acciones mencionadas en el inciso tres.

5) Dibujar en un plano cartesiano:

i) Las posibles soluciones al problema de optimización, señalando la que consideras óptima.

ii) Si se quisiera resolver el problema de min $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+\dot{x}^2}\, dt$ (que representa la longitud de una curva entre los puntos $P(t_1, x(t_1))$ y $Q(t_2, x(t_2))$). Intuitivamente, ¿cuál sería la solución óptima? Grafícala.

iii) En el inciso anterior, ¿qué tiene que ver la solución óptima con el integrando de la funcional asociada?, ¿podría ser que la trayectoria óptima estuviera en el lugar geométrico que representa el integrando, o no tiene nada que ver? Justifica brevemente.

iv) Del mismo inciso ii), puede mostrarse que es un mínimo. ¿Cómo podemos interpretar geométricamente este hecho?

v) De los incisos anteriores: Si queremos optimizar una funcional, necesitamos un criterio, que generalmente queda implícito en la funcional. ¿Cuál es dicho criterio? (Sugerencia: Observar con detalle el segundo inciso de esta pregunta)

vi) Dar un ejemplo de una funcional que se quiera optimizar, indicando cual es el criterio bajo el cual se busca la optimización.

Si un estudiante contesta correctamente los tres primeros incisos, nos llevaría a suponer que el estudiante ha logrado coordinar los procesos de solución óptima con el objeto o proceso trayectoria. La respuesta correcta pero memorística del inciso cuatro, nos lleva a suponer por lo menos una concepción acción del concepto condiciones suficientes de optimización. En caso de que en el inciso cuatro el estudiante comente correctamente, en general, por qué una trayectoria tiene un valor que es un mínimo o un máximo, podríamos suponer que tiene una concepción proceso de las condiciones suficientes. Si además, puede coordinar los procesos geométrico y analítico para determinar máximos y mínimos y ante el problema concreto a resolver considera más apropiado alguno de ellos, podríamos considerar que dicho estudiante tiene una concepción objeto del concepto condiciones suficientes de segundo orden. Los incisos quinto y sexto, si son respondidos correctamente, nos llevan a suponer, que el estudiante puede generalizar el contenido del inciso tres, y que posiblemente tenga una concepción objeto de trayectoria óptima.

La pregunta seis trata de determinar si el estudiante es capaz de explicar la función que juegan las condiciones de transversalidad en la solución de un problema de optimización y por qué son necesarias.

> 6) ¿De qué cambios específicos, al considerar el intervalo de tiempo en un problema de optimización dinámica, surgen las condiciones de transversalidad? Grafica los distintos casos.

Si un estudiante grafica correctamente las distintas condiciones y es capaz de explicar su función en la solución del problema y el por qué son necesarias, podríamos decir que al menos tiene una concepción proceso de dichas condiciones. Si únicamente recuerda cuáles son de manera memorística, pero no puede explicar su función podríamos decir que tiene una concepción acción sobre las condiciones de transversalidad, y si confunde estas condiciones con las condiciones necesarias o suficientes podríamos decir que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre ellas.

La pregunta siete pretende determinar por un lado, el tipo de concepción de un estudiante sobre la equivalencia de un problema de cálculo de variaciones con otro de teoría de control, y por otro lado, su concepción sobre las condiciones necesarias tanto en cálculo de variaciones como en teoría de control. También busca determinar si el estudiante coordina los procesos de solución en cálculo de variaciones y teoría de control. Esta coordinación de procesos, desde luego implicaría una concepción proceso sobre los mismos.

7) i) Dado el siguiente problema de cálculo de variaciones:

Min $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+\dot{x}^2}\, dt$, dado que $x(t_0)=x_0$ y $x(t_1)=x_1$. Expresarlo como un problema de control.

ii) <u>Plantear sin resolver</u> las soluciones del problema del inciso anterior.

Si el estudiante responde correctamente el primer inciso podemos suponer que tiene por lo menos una concepción acción sobre la equivalencia de un problema de Cálculo de variaciones con otro de teoría de control. Si contesta correctamente el segundo inciso (respecto a las condiciones necesarias en cálculo de variaciones o teoría de control) nos lleva a suponer por lo menos una concepción acción (en cálculo de variaciones o teoría de control). Si la respuesta al segundo inciso es correcta tanto en cálculo de variaciones y en teoría de control, podemos suponer que coordina los esquemas de solución en cálculo de variaciones y teoría de control lo que implicaría una concepción proceso sobre el concepto solución. En general, si al dar las respuestas a alguno de los incisos anteriores, explica en general lo que hay que hacer, independientemente del problema particular, podríamos suponer una concepción proceso del concepto involucrado en dicho inciso. Si además de explicar en general comentara en qué casos y por qué razones puede convenir más una forma que otra, podríamos suponer que su concepción es de tipo objeto para el concepto involucrado en el inciso.

La siguiente pregunta en Teoría de Control pretende determinar el nivel de concepción que tiene un estudiante sobre los conceptos: variable de estado y variable de control y por otro, si mediante un proceso compara adecuadamente a dichas variables.

8) En Teoría de Control:
i) ¿Qué es una variable de estado y qué es una variable de control?
ii) ¿cómo puedes saber cual es la variable de estado y cual es la de control?

Si el estudiante responde correctamente lo que es una variable de estado o lo que es una variable de control, podemos suponer que tiene por lo menos una concepción acción sobre estas variables. Si responde correctamente al segundo inciso, no memorísticamente, habiendo respondido correctamente el primero para las dos variables, podemos suponer que tiene una concepción proceso sobre ambas variables. Si además, explica los incisos anteriores justificando adecuadamente la razón por la cual se pueden considerar de una u otra categoría podríamos suponer que tiene una concepción objeto de este concepto.

Las siguientes preguntas buscan obtener información acerca de la percepción de los propios estudiantes. En particular tienen la finalidad de determinar: i) Su percepción sobre las dificultades involucradas en las acciones llevadas a cabo para construir el concepto de funcional, ii) Su percepción acerca del proceso de optimización y iii) Su percepción acerca de las condiciones de trasversalidad y la forma en que se utilizan, mediante un proceso deductivo que parte de conceptos construídos, o si solamente tienen una concepción acción de estos conceptos. Las otras preguntas tienen la finalidad de relacionar el análisis general de sus respuestas con su percepción de cómo aprendieron los conceptos y brindarles la oportunidad de sugerir estrategias de enseñanza que consideran más adecuadas para dicha construcción. El análisis de las respuestas a estas preguntas pueden, por otra parte, contribuir a refinar la descomposición genética propuesta originalmente.

9) ¿Qué es lo que más se te ha dificultado para:

i) Entender bien el concepto de funcional
ii) Resolver problemas de optimización con funcionales.
iii) Determinar las condiciones de transversalidad.

10) ¿En general, qué conceptos del cálculo de variaciones o de la teoría de control te han costado más trabajo construir? ¿Por qué?

11) ¿Podrías a partir del concepto de funcional, construir los conceptos que tienen que ver con los principios necesarios, suficientes y de transversalidad? O simplemente, ¿los conoces de memoria? ¿A qué crees que se debe ésto?

12) ¿Qué sugerencias darías para mejorar la enseñanza de los conceptos que aparecen en cálculo de variaciones o teoría de control?

Si el estudiante responde que puede construir los conceptos que tienen que ver con los principios necesarios, suficientes y de transversalidad, podemos suponer que tiene una concepción objeto de los aquellos conceptos que sea capaz de construir mediante un proceso deductivo. Si no puede deducir dichos conceptos, pero los puede aplicar y sabe teóricamente cómo aplicarlos, podemos suponer que tiene por lo menos una concepción proceso sobre dichos conceptos. Mientras que si sólo sabe aplicarlos de manera memorística podríamos suponer que su concepción es de tipo acción sobre dichos conceptos.

Como esta última clasificación se obtiene del análisis de la perspectiva del estudiante, sería necesario profundizar en la pregunta durante la entrevista, agregando nuevas preguntas. Por ejemplo, si el estudiante afirma que es capaz de deducir las condiciones de optimización: ¿cómo harías para llegar a las condiciones necesarias de primer orden, en Cálculo de Variaciones o Teoría de Control?, o si afirma que los conoce teóricamente, se le podría preguntar por ejemplo: ¿Qué es lo que dicen las condiciones necesarias de primer orden en Cálculo de Variaciones o Teoría de Control? Además, sería necesario analizar de forma “cruzada”estas respuestas con las que dio a los otros instrumentos como fuente de validación.

Una vez presentados los instrumentos de validación de la experiencia y la entrevista a una muestra de estudiantes, así como establecidos los criterios particulares para la determinación del tipo de concepción de cada uno de los estudiantes sobre cada uno de los conceptos bajo estudio, a continuación pondremos algunos ejemplos que nos ayuden a clarificar la manera en que determinamos el tipo de concepción ante un concepto dado. Habría que enfatizar que el análisis de lo que hace el estudiante es lo que permite, en términos de la descomposición genética, determinar el tipo de construcción que tiene, por esta razón se puede asociar el tipo de respuesta del estudiante con el tipo de concepción de acuerdo a las construcciones descritas en la misma descomposición genética.

Empezaremos con el concepto de Funcional. Dada la pregunta:

a) ¿Qué es una funcional?

b) ¿Cuáles de las siguientes son funcionales y por qué?

i) $f(x)=\int_0^x (2t^2+5)dt$; ii) $f(x,y)=x^2+y^2$; iii) $f(x,x',t)=\sqrt{1+x'^2}$

iv) $J(x)=\left(\int_0^5 x^2(t)dt, \sqrt{1+x'^2}\right)$; v) $J(x)=\int_0^T (x^2+x'^2)dt$

Si la respuesta del estudiante fue:

R: “Es una función que va de un campo vectorial a los reales.”Y del segundo inciso eligió al inciso iii) y al v)

Responde al primer inciso sobre el concepto de funcional, sin dar ejemplos o más explicaciones que la misma definición.
En el segundo inciso responde correctamente únicamente en dos respuestas por lo que no tenemos suficiente información para suponer que tiene más que un tipo de concepción acción sobre este concepto.

En cambio si un estudiante, ante la misma pregunta hubiera respondido:

R: “Es un conjunto de funciones derivables que van de un campo de vectores a los reales”Y del segundo inciso i), ii), iii) y v)

En su respuesta da los elementos esenciales de lo que es una funcional y en el segundo inciso responde correctamente en tres casos. Los errores que comete son por suponer que es un espacio vectorial un conjunto que no lo es (R). Es decir, sus errores no tienen que ver con su concepción sobre funcional.
Por lo anterior, podemos suponer que ha interiorizado las acciones para distinguir funcionales en un proceso.

Y si su respuesta hubiera sido:

R: “Una funcional es una función que se encuentra en un espacio vectorial normado, su dominio y su región son los reales. $F: V \to R$”. Damos un ejemplo de su respuesta a la expresión: $J(x)=\left(\int_0^5 x(t)^2 dt, \sqrt{1+x'^2}\right)$: “No, pues el rango no son los reales”.

Sobre la justificación de que el dominio es espacio vectorial dijo: “Por lo visto en clase el conjunto de las funciones derivables es un espacio vectorial de dimensión infinita.”

En el primer inciso, define el concepto de funcional y a partir de ésta determina entre 5 expresiones, aquellas que son funcionales. Contestó correctamente las 5 justificándolas en base a la definición, por lo que podemos suponer que ha interiorizado el concepto de funcional en un proceso. En todos los casos justificó brevemente que el dominio era un espacio vectorial, por lo que podemos suponer que ha encapsulado el concepto de funcional en un objeto.

Habría que observar que además de la aplicación de los criterios propuestos, la determinación del tipo de concepción se hizo considerando globalmente sus respuestas.

Otro ejemplo podría darse con las Condiciones Suficientes de segundo orden:

A la pregunta:

a) Tanto en cálculo de variaciones como en teoría de control ¿cuáles son las condiciones suficientes de segundo orden?

b) ¿Para qué sirven?

c) Determinar si es un máximo o un mínimo la Trayectoria óptima del ejercicio cuatro o seis.

Si su respuesta fue:

b) Para determinar si es un máximo o un mínimo es necesario que $f_{xx} > 0$ ó $f_{xx} < 0$ $|H| > 0$

$f_x = 2x - 3t + 5\dot{x}$

$f_{xx} = 2$ $\Rightarrow$ se trata de un mínimo

2. Las condiciones suficientes de segundo orden las obtengo gracias a f_{xx} y $|H|$. San útiles para saber si es un máximo o un mínimo, y es lo que no me garantiza las condiciones necesarias o de primer orden. ”

Responde por el papel de las condiciones suficientes de segundo orden y expresa y aplica un tipo de dichas condiciones suficientes, por lo que podríamos suponer al menos una concepción acción sobre las condiciones suficientes de segundo orden.

Si su respuesta hubiera sido:

$$\text{R: “} H\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xx'} \\ f_{x'x} & f_{x'x'} \end{pmatrix}$$

Para determinar si es máximo o mínimo.

b)

$f_x = 2x - 3t + 5\dot{x}$ $\quad f_{\dot{x}} = -6\dot{x} + e^t + 5x$ $\quad H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{x\dot{x}} \\ f_{\dot{x}x} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix}$

$f_{xx} = 2$ $\quad f_{\dot{x}\dot{x}} = -6$

$f_{x\dot{x}} = 5$ $\quad f_{\dot{x}x} = 5$ $\quad \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$

$H_1 = 2 > 0$

$H_2 = -12 - (10) = -22 < 0$

$\Rightarrow$ máximo

Se puede aplicar también la condición de Legendre que dice

$$\begin{cases} f_{x'x'} > 0 \; \textit{mínimo} \\ f_{x'x'} < 0 \; \textit{máximo} \end{cases}$$

Plantea dos tipos de condiciones suficientes equivalentes y aplica una de ellas para resolver un ejercicio que se le planteó resolver. Por lo anterior, podemos suponer que ha interiorizado las acciones para determinar máximos ó mínimos en un proceso.

Y si su respuesta hubiera sido:

"Cálculo de Variaciones:
Condición de Legendre:

$$\begin{cases} f_{x'x'} > 0 \ mínimo \\ f_{x'x'} < 0 \ máximo \end{cases}$$

ó

$$\begin{cases} f_{xx'} > 0 \ y \ |H| > 0 \ mínimo \\ f_{xx'} < 0 \ y \ |H| < 0 \ máximo \end{cases}$$

Teoría de Control:

$$H_{uu} < 0 \ es \ un \ máximo$$

$$H_{uu} > 0 \ es \ un \ mínimo$$

Estas soluciones sirven para saber la solución de equilibrio que se ha obtenido es un máximo o un mínimo.

Condición de Legendre:

$f_{x'x'} = -6 < 0 \Rightarrow$ es un máximo.

Condición de Legendre:

$f_{x'x'} = -6 < 0 \Rightarrow$ es un máximo

Responde con dos tipos equivalentes de condiciones suficientes en Cálculo de Variaciones coordinando ambos procesos, lo que nos lleva a suponer que ha logrado encapsular las condiciones suficientes en un objeto.

Finalmente, ponemos un ejemplo con las Condiciones de Transversalidad:

Si la pregunta hubiera sido:

> ¿Cuál es el papel de las condiciones de transversalidad en un problema de optimización dinámica?

R: "Las condiciones de Transversalidad son útiles cuando se desea optimizar sujeto a cierto límite de tiempo, a querer llegar a una cantidad determinada sin importar el tiempo, para lograr el mejor camino, el óptimo que nos lleve a la solución deseada."

En su respuesta resalta la función de las condiciones de transversalidad, sin embargo no las menciona ni las plantea en el problema del ejercicio anterior, por lo que podemos suponer que tiene al menos una concepción tipo acción sobre dichas condiciones.

Si la respuesta hubiera sido:

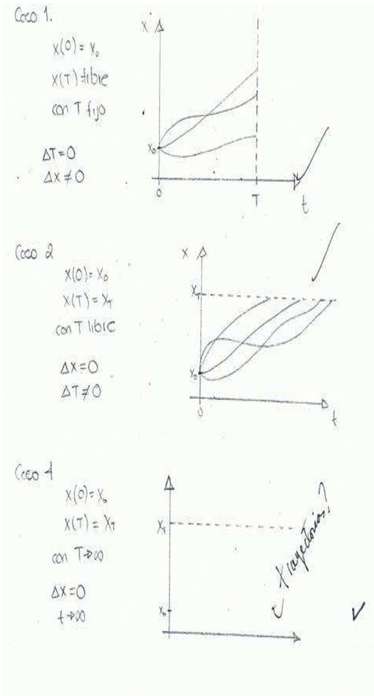
“Las condiciones de Transversalidad sirven para calcular las incógnitas constantes que resultan de la solución del problema de optimización cuando se tienen condiciones iniciales del tipo:

i) $x(1) = libre$

ii) $x(T) = 10, T\ libre$

iii) $x(T) = 10, con\ T \to \infty$

iv) $x(T) = libre\ con\ T, x \to \infty$”



Responde graficando cada uno de los cuatro casos, asociándolos a sus respectivas condiciones analíticas. Coordinando de manera general los procesos geométrico y analítico de condiciones de transversalidad, por lo que podemos suponer que ha encapsulado el proceso de explicar la función de las condiciones de transversalidad en un objeto.

CAPÍTULO *VII*

PRESENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS POR LOS INSTRUMENTOS DE VALIDACIÓN

7.1 CRITERIOS GENERALES PARA LA EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA

El curso de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Económicas, en el tema de Optimización Dinámica que se divide en Cálculo de Variaciones y Teoría de Control, tiene como objetivo principal que los estudiantes construyan el concepto de funcional y otros conceptos relacionados a él por la idea de variación. En concreto, consideramos conceptos relacionados al concepto de funcional por la idea de variación a los siguientes:

- Funcional
- Trayectoria
- Integral de Línea
- Solución de Problemas de Optimización Dinámica
- Condiciones necesarias de primer orden
- Condiciones suficientes de segundo orden
- Trayectoria óptima
- Trayectorias "vecinas"
- Condiciones de Transversalidad
- Variable de Estado y Variable de Control

A partir de la Descomposición Genética desarrollamos un conjunto de Instrumentos Didácticos (compuestos por siete actividades) cuyo objetivo fué ayudar a los estudiantes que cursan la materia Matemáticas aplicadas a las Ciencias Económicas a construir los conceptos arriba mencionados. (Ver capítulo "VI")

Para poder apreciar lo que se logró del párrafo anterior, se diseñaron Instrumentos de Validación formados por tres cuestionarios y una entrevista. Con estos instrumentos llevamos a cabo la evaluación de la Propuesta Didáctica formada esencialmente por los Instrumentos Didácticos. (Ver capítulo "VII"hasta la sección cinco).

La evaluación de dicha Propuesta Didáctica consistió de cuatro partes:

i) Evaluación sobre la evolución en la construcción de conceptos. En esta parte evaluamos como fue cambiando el tipo de cognición de cada estudiante de una muestra aleatoria, pero representativa del grupo sobre cada uno de los conceptos de la lista mencionada párrafos atrás.

ii) Evaluación “global”sobre construcción de conceptos. En esta parte evaluamos el tipo de cognición del grupo respecto a la misma lista de conceptos del inciso anterior. Así por ejemplo, obtuvimos el porcentaje del grupo que tiene un tipo de concepción acción, proceso o bien objeto sobre cada uno de los conceptos de la lista. Este análisis lo hicimos sobre el tercer cuestionario por ser el del final del semestre, por lo que pudimos considerar representativo del tipo de concepción con la que terminan los estudiantes.

iii) Evaluación sobre el tipo de relación que existe entre los distintos conceptos de la lista. Este estudio fué “global”y también se concentró en el tercer cuestionario, por la misma razón dada en el inciso anterior.

iv) Algunas observaciones que pudieran ser pertinentes para el trabajo de investigación. Por ejemplo, comparamos las respuestas que dieron los estudiantes en la entrevista final pues de diez estudiantes entrevistados 6 fueron del grupo de María Trigueros, por lo que respondieron los Instrumentos Didácticos y los otros 4 fueron de otro grupo, pero que cursaron la materia de Optimización en la que se estudia Optimización Didáctica, en particular Cálculo de Variaciones y Teoría de Control, pero a un nivel más profundo, pues la materia Optimización pertenece al área teórica de la carrera de Economía.

Junto a las evaluaciones mencionadas y aunque no es una parte formal de la Evaluación a la Propuesta Didáctica presentada en este trabajo, las opiniones que expresó la profesora del grupo de M.A.E., con el que se trabajó a lo largo del semestre, en la entrevista que le hicimos sobre el funcionamiento de su curso incluyendo esta propuesta, fueron de gran importancia para proponer mejoras en nuestra Propuesta Didáctica.

7.2 REVISIÓN INSTRUMENTOS DE VALIDACIÓN

En este capítulo presentaremos y llevaremos a cabo una discusión de los resultados obtenidos a partir los Instrumentos de Validación, que estuvieron constituídos por:

i) Un cuestionario que busca determinar el tipo de concepción de los conceptos bajo estudio de una muestra de cuatro estudiantes del grupo M.A.E*. Se utilizó el cuestionario #3.

ii) Un cuestionario que busca determinar el tipo de concepción sobre los conceptos bajo estudio de una muestra de cuatro estudiantes del grupo de Optimización**. Se utilizó el cuestionario #3.

iii) Una entrevista a una muestra de ocho estudiantes: cuatro de cada uno de los grupos mencionados en los dos primeros incisos.

iv) Un instrumento que busca determinar la evolución en el tipo de concepción de los conceptos bajo estudio a una muestra de cuatro estudiantes del grupo M.A.E.*. Consta de tres cuestionarios y una entrevista.

v) Una entrevista a la profesora del curso piloto (M.A.E.), a partir de la cuál, obtener su apreciación sobre los resultados obtenidos en el curso.

El cuestionario utilizado en el primero y segundo incisos fue esencialmente el mismo y corresponde al tercer cuestionario. La entrevista mencionada en el cuarto inciso fue esencialmente la misma para ambos grupos. [2]

A continuación presentaremos y llevaremos a cabo una discusión sobre los resultados obtenidos por cada uno de los cuatro instrumentos mencionados.

[2] * M.A.E. es el grupo de Matemáticas aplicadas a la Economía, con el que se trabajó a lo largo del semestre. Como puede apreciarse en el temario (ver anexo “A”), este grupo lleva en un mismo semestre Sistemas Dinámicos y una introducción al Cálculo de Variaciones y Teoría de Control. Esta materia pertenece al área menos teórica (matemática) de la licenciatura en Economía del ITAM.

** Optimización (ver temario en anexo “A”) es un grupo que lleva durante todo el semestre conceptos de optimización que incluyen Cálculo de Variaciones y Teoría de Control. Durante un semestre anterior llevaron Sistemas Dinámicos. Esta materia pertenece al área teórica (más matemática) del ITAM.

7.3 INSTRUMENTO PARA TRATAR DE DETERMINAR EL TIPO DE CONCEPCIÓN DE LOS CONCEPTOS BAJO ESTUDIO DE UNA MUESTRA DE CUATRO ESTUDIANTES DEL GRUPO DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA

A cada estudiante del grupo se les aplicó el cuestionario # 3 dentro de los Instrumentos de Validación. A continuación se presenta el análisis de cada pregunta por separado y el resumen de los resultados considerando el conjunto de respuestas se presenta al final de las preguntas. En la última parte de esta sección presentamos los resultados en forma matricial.

Con la finalidad de evitar repeticiones innecesarias, empezaremos mostrando las preguntas, para una vez presentadas, sólo mostrar las respuestas a dichas preguntas por cada uno de los estudiantes:

1) ¿Cuál es la diferencia entre un problema de control óptimo y uno de cálculo de variaciones?

2) Cuál es la diferencia entre una variable de estado y una de control en un problema de control óptimo?

3) i) ¿Qué es una funcional?

ii)¿Cuáles de las siguientes son funcionales y por qué?

i) $f(x)=\int_0^x (2t^2+5)dt$; ii) $f(x,y)=x^2+y^2$; iii) $f(x,x',t)=\sqrt{1+x'^2}$

iv) $J(x)=\left(\int_0^5 x^2(t)dt, \sqrt{1+x'^2}\right)$; v) $J(x)=\int_0^T (x^2+x'^2)dt$

4) a) ¿Cuáles son las condiciones necesarias de primer orden en Cálculo de Variaciones?

b) Encontrar la función que hace que el valor de $J[x(t)]$ sea óptimo si:

$J[x(t)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2-3x'^2+x'e^t-3tx+5xx')dt$; sujeto a: $x(0)=1$ y $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$

c) Escribe el problema como un problema de control (no lo resuelvas)

5) a) Tanto en cálculo de variaciones como en teoría de control ¿cuáles son las condiciones suficientes de segundo orden?

b) ¿Para qué sirven?

c) Determinar si es un máximo o un mínimo la Trayectoria óptima del ejercicio cuatro o seis.

6) Encontrar la función que hace que el valor de $J[x(t)]$ sea óptimo si:

$$J[x(t)] = \int_1^5 (ux - u^2 - x^2)dt\text{; sujeto a: } x' = x + u\text{, } x(1) = 2 \text{ y } x(5)\ libre$$

(Sólo plantearlo)

(Recuerda que conviene despejar u de la condición necesaria para el Hamiltoniano).

7) ¿Cuál es el papel de las condiciones de transversalidad en un problema de optimización dinámica?

Los análisis respectivos a las respuestas de esta muestra de estudiantes se presentarán en el orden de menor a mayor tipo de concepción (global).

A continuación los análisis de dichos resultados:

Nombre del estudiante: **Ed**

1)

Podemos percibir que las acciones que lleva a cabo para distinguir problemas de ambas ramas de la optimización dinámica están basadas en la memoria. De aquí, podemos suponer que tiene sólo una concepción acción sobre este concepto.

"En Teoría de Control se permite maximizar y minimizar.", "En Cálculo de Variaciones deben ser doblemente diferenciables", "En Teoría de Control existen las funciones control".

2)

Su falta de respuesta nos lleva a suponer que no ha construído el concepto sobre la diferencia entre variable de estado y variable de control ni siquiera como acción..

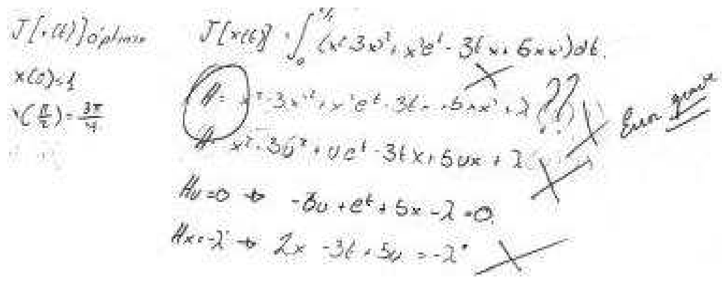
3)

Responde a lo que es una funcional, sin embargo, en el segundo inciso no lleva a cabo las acciones pertinentes que lo lleven a distinguir funcionales, por lo que no tenemos elementos para suponer más que una concepción acción sobre este concepto.

"Una $f : V \to R$
y tiene su dominio en los reales"

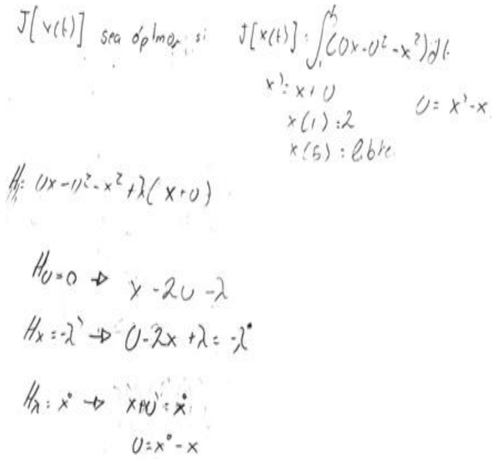
4)

Al no plantear la Ecuación de Euler, no puede llevar a cabo las acciones necesarias sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Evidentemente no puede resolver el problema planteado ni llevar a cabo las acciones necesarias para establecer la equivalencia con un problema de control. De aquí, podemos suponer que no ha llegado a construir este concepto ni siquiera como acción.



5)

Al no poder plantear el Hamiltoniano y sólo las condiciones de primer orden nos lleva a suponer que las acciones que lleva a cabo para plantear el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente están basadas únicamente en la memoria, por lo que no podemos suponer más que una concepción acción del concepto de condiciones necesarias de primer orden para optimizar un problema de control.



6)

Al no responder ni al primer ni al tercer incisos, podemos suponer que las acciones que toma para determinar la función de las condiciones suficientes de segundo orden están basadas exclusivamente en la memoria, por lo que no podemos suponer mas que una concepción acción sobre este concepto.

"Para saber como se comporta la función objetivo, para indicar si es un máximo o un mínimo."

7)

Al no responder ni analítica ni geométricamente sobre el papel de las condiciones de transversalidad, podemos suponer que las acciones que lleva a cabo para determinar su función están basadas en la memoria, por lo que no podemos suponer más que una concepción acción sobre este concepto.

"El papel es acotar o asegurar que se cumplan algunas restricciones del problema."

En resumen podemos suponer que tiene una concepción tipo acción sobre los conceptos: Diferencia entre un problema en cálculo de variaciones y Teoría de Control, funcional, condiciones de primer orden en control, condiciones suficientes y condiciones de transversalidad. Suponemos que no ha llegado a construir los conceptos: diferencia entre variable de estado y variable de control así como condiciones necesarias de primer orden en cálculo de variaciones.

Al considerar el trabajo de este alumno en forma global en este cuestionario, muestra por un lado construcciones de conceptos con una concepción a lo más tipo acción, por lo que no es capaz de relacionar los distintos conceptos entre sí. Esto nos lleva a suponer que su esquema de optimización dinámica muestra un nivel de evolución Intra-estructura.

Nombre del estudiante: **Fr**

1)

En la parte de Teoría de Control aunque mezcla variables propias de cada una de las dos ramas de la Optimización, muestra comprensión de los elementos que caracterizan el caso de la Teoría de Control. En Cálculo de Variaciones su descripción es muy escueta, sin embargo, caracteriza con claridad los elementos esenciales a la Teoría de Control. Podemos entonces suponer que ha interiorizado las acciones de distinción entre problemas de Cálculo de Variaciones de un problema de Teoría de Control como un proceso.

"En un problema de control óptimo tenemos una variable de estado y una variable de control, en él tenemos que plantear un Hamiltoniano de la forma: $H = f(x, x', h) + \lambda g(x, u, x')$. Un problema de Cálculo de Variaciones implica tener una condición de eficiencia. Ec. de Euler".

2)¿Cuál es la diferencia entre una variable de estado y una de control en un problema de control óptimo?

En relación a la diferencia entre variables, el aspecto básico de dicha relación menciona únicamente que puede hacer acciones de relación entre ambos tipos de variables, por lo que podemos suponer un tipo de concepción acción sobre este concepto. Por lo escueto de la respuesta no podemos suponer que ha interiorizado dichas acciones para diferenciar ambas variables en un proceso.

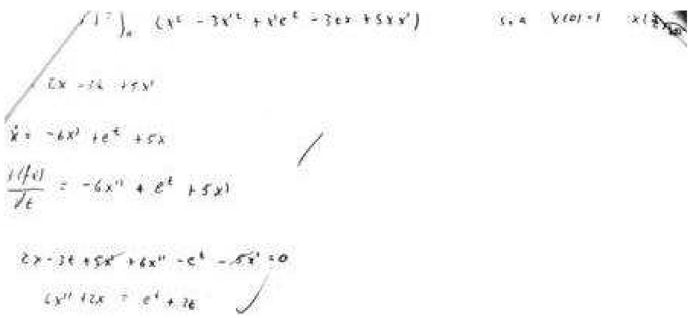
"La variable de estado está subordinada a la variable de control"

3)

No responde qué es una funcional y sólo tiene problema de identificación de funcionales, lo cual indica que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre este concepto.

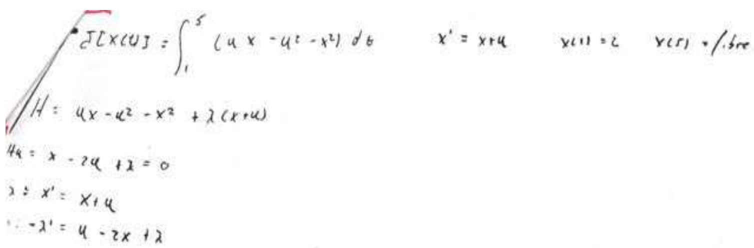
4)

En el caso de las condiciones de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada a ésta, mostrando que conoce la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Dado que resuelve el problema sin dificultades se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que permite resolver cualquier problema de optimización por cálculo de variaciones. No responde a la pregunta donde se pide establecer la equivalencia con Teoría de Control, por lo que suponemos que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre esta relación.



5)

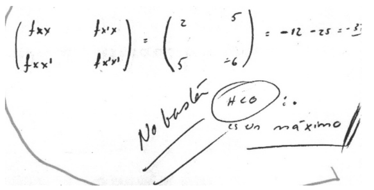
En el caso del problema de Teoría de Control, plantea el Hamiltoniano y ecuación diferencial asociada a éste mostrando que ha interiorizado las acciones necesarias para plantear el Hamiltoniano y aquellas que permiten operar con él a través del uso de las condiciones necesarias de primer orden para resolver cualquier problema de Teoría de Control de este tipo.



.

6)

Respecto a las condiciones suficientes de segundo orden, plantea y aplica sólo un tipo de éstas. La evidencia en su respuesta indica una condición acción sobre dichas condiciones.



7)

En cuanto a las condiciones de transversalidad, enfatiza el papel que juegan en el problema; sin embargo, no las aplica al problema concreto presentado, por lo que parece tener únicamente una concepción acción de dichas condiciones.

"Analizar su comportamiento en los extremos"

En resumen, podemos considerar que tiene una concepción tipo acción de los siguientes conceptos: Diferencia entre variable de estado y variable de control, condiciones suficientes de segundo orden y condiciones de transversalidad. Suponemos una concepción tipo proceso de los conceptos: Diferencia entre un problema de cálculo de variaciones y uno de Teoría de Control y condiciones necesarias de primer orden tanto en cálculo de variaciones y Teoría de Control. Suponemos que no ha construído el concepto de funcional ni siquiera como acción.

La revisión general del trabajo de este alumno, en el cuestionario en su conjunto muestra que su esquema de optimización dinámica muestra un nivel de evolución Intra-estructura, dado que si bien el alumno es capaz de hacer procesos sobre algunos objetos, éstos no han sido coordinados entre sí para considerar que se ha empezado a construir una estructura. Se puede apreciar alguna coordinación entre las condiciones de primero y segundo orden, pero suponemos que es consecuencia de la generalización de dichas condiciones en sus cursos de cálculo (optimización estática). Sin embargo, la coordinación recién mencionada no es elemento suficiente para considerar que ha empezado a construir una estructura.

Nombre del estudiante: **Mi**

1)

Menciona algunas características esenciales de las diferencias entre ambas ramas de la Optimización Dinámica mostrando comprensión de los elementos que caracterizan un problema de Teoría de Control y también plantea la equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y un problema de Teoría de Control en el problema cinco, por lo que tenemos elementos para suponer que ha interiorizado las acciones sobre las similitudes y diferencias entre ambas ramas de la Optimización Dinámica en un proceso.

“En control hay una variable de estado y otra de control, además control óptimo permite max o min funciones lineales y no necesariamente tienen que ser doblemente diferenciables como en cálculo en variaciones.”

2)

En cuanto a las diferencias entre variable de estado y variable de control, menciona específicamente las acciones que deben llevarse a cabo para establecer dicha diferencia. Sin embargo, por lo escueto de su respuesta no tenemos información suficiente que nos permita suponer que ha interiorizado las acciones mencionadas en un proceso que permita clasificar adecuadamente a cada una de dichas variables. Por lo tanto, podemos suponer una concepción acción de este concepto.

“La variable de control controla los movimientos y la de estado no cambia, la de control garantiza la trayectoria óptima.”

.

3)

De la respuesta al primer inciso, podemos observar que involucra a todas las acciones que se requieren para determinar si una expresión dada es o no es funcional. Además, por el segundo inciso, sus respuestas (tres de cinco correctas) y las dos incorrectas por causas ajenas a su concepción de funcional, nos lleva a suponer que ha interiorizado dichas acciones en el proceso de distinguir funcionales de una expresión matemática dada.

“Es una función que va de un espacio vectorial normado hacia los números reales.”

4)

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

$$J(x(t)) = \int_0^{\pi/2} (x^2 - 3\dot{x}^2 + \dot{x}e^t - 3tx + 5x\dot{x})\,dt$$

s.a. $x(0)=1$

$x(\pi/2) = 3\pi/4$

Sea $f(x,\dot{x},t) = x^2 - 3\dot{x}^2 + \dot{x}e^t - 3tx + 5x\dot{x}$

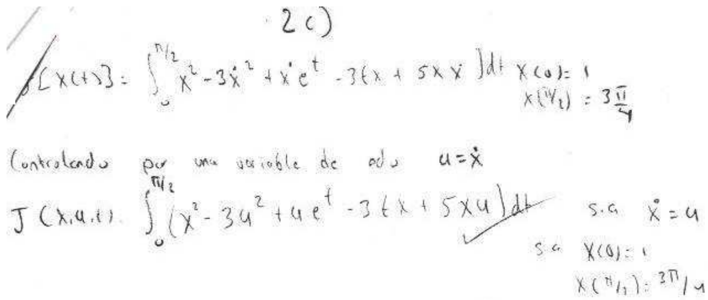
$f_x = 2x - 3t + 5\dot{x}$

$f_{\dot{x}} = -6\dot{x} + e^t + 5x$

$\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} = -6\ddot{x} + e^t + 5\dot{x}$ $\Rightarrow$ Ec. Euler $2x - 3t + 5\dot{x} - (-6\ddot{x} + e^t + 5\dot{x})$

$2x - 3t + \cancel{5\dot{x}} + 6\ddot{x} - e^t - \cancel{5\dot{x}}$

$6\ddot{x} + 2x = e^t + 3t \;/\; 6$


2 c)

$J[x(t)] = \int_0^{\pi/2} x^2 - 3\dot{x}^2 + \dot{x}e^t - 3tx + 5x\dot{x} \,)dt \quad x(0) = 1, \quad x(\pi/2) = 3\frac{\pi}{4}$

Controlado por una variable de ado $u = \dot{x}$

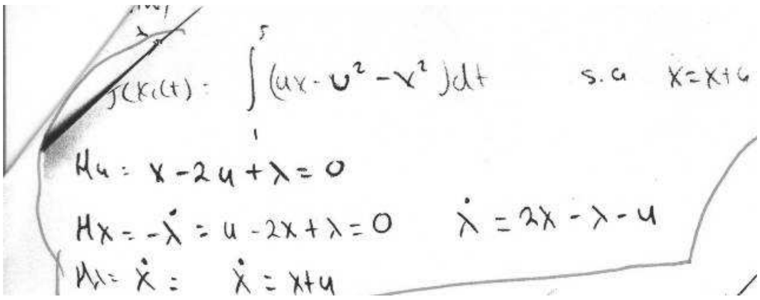
$J(x,u,t) \int_0^{\pi/2} (x^2 - 3u^2 + ue^t - 3tx + 5xu)dt \quad$ s.a $\dot{x} = u$

s.a $x(0) = 1$

$x(\pi/2) = 3\pi/4$

5)

En el caso del problema de Teoría de Control, plantea el Hamiltoniano y el sistema de ecuaciones diferenciales asociado, mostrando que ha interiorizado las acciones necesarias para plantear el Hamiltoniano y aquellas que permiten operar con él a través del uso de las condiciones necesarias de primer orden para resolver cualquier problema de este tipo en Teoría de Control en un proceso.


$J(x,(t)) : \int_1^5 (ux - u^2 - x^2)dt \quad$ s.a $\dot{x} = x + u$

$H_u : x - 2u + \lambda = 0$

$H_x = -\dot{\lambda} = u - 2x + \lambda = 0 \quad \dot{\lambda} = 2x - \lambda - u$

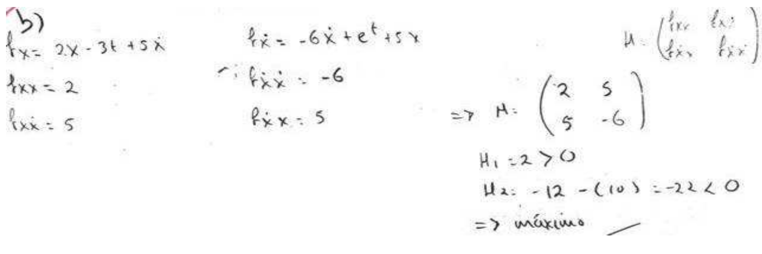
$H_\lambda = \dot{x} : \quad \dot{x} = x + u$

6)

En cuanto a las condiciones suficientes, plantea dos tipos de condiciones suficientes equivalentes y aplica una de ellas para resolver el ejercicio que se le planteó resolver, mostrando que ha interiorizado las acciones necesarias para plantear dichas condiciones y aplicarlas a cualquier problema de este tipo, en un proceso.

“ $H\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xx'} \\ f_{x'x} & f_{x'x'} \end{pmatrix}$

Para determinar si es máximo o mínimo.


b)

$f_x = 2x - 3t + 5\dot{x} \quad f_{\dot{x}} = -6\dot{x} + e^t + 5x \quad H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{x\dot{x}} \\ f_{\dot{x}x} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix}$

$f_{xx} = 2 \quad f_{\dot{x}\dot{x}} = -6$

$f_{x\dot{x}} = 5 \quad f_{\dot{x}x} = 5 \quad \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$

$H_1 = 2 > 0$

$H_2 = -12 - (10) = -22 < 0$

$\Rightarrow$ máximo

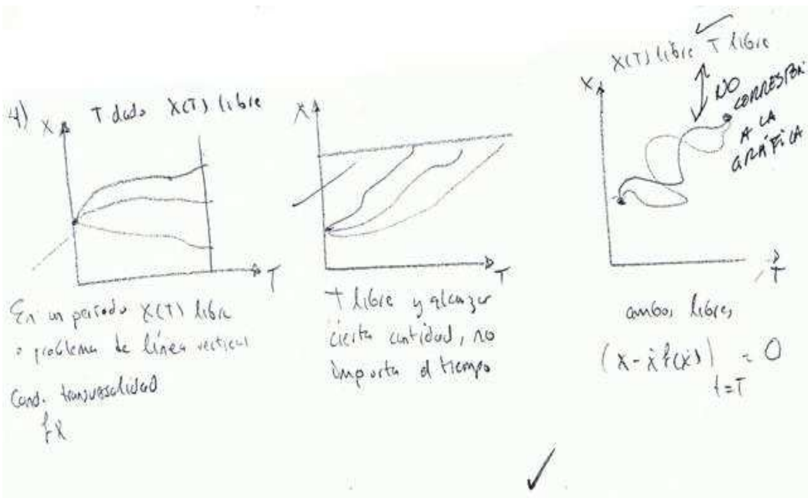
Se puede aplicar también la condición de Lagrange que dice

$$\begin{cases} f_{x'x'} > 0 \ \textit{mínimo} \\ f_{x'x'} < 0 \ \textit{máximo} \end{cases}$$

7)

En un cuestionario anterior, llevó a cabo las acciones necesarias para determinar las condiciones de transversalidad correspondientes desde un punto de vista tanto analítico como geométrico mostrando que dichas acciones las había interiorizado en un proceso (analítico y geométrico, respectivamente) y coordinó ambos procesos encapsulándolo en un objeto. En este cuestionario enfatiza el papel de dichas condiciones. Si consideramos globalmente sus rerspuestas podemos suponer que ha encapsulado el concepto condiciones de transversalidad en un objeto.

Respuesta al Segundo Cuestionario:



Respuesta al tercer cuestionario:

"Las condiciones de Transversalidad no son condiciones iniciales sino condiciones finales. Se ocupan sobre el transcurso del problema y no al inicio"

En resumen, podemos suponer un tipo de concepción acción sobre las Diferencias entre Variable de Estado y Variable de Control y Equivalencia entre ambas ramas de la Optimización Dinámica. Suponemos un tipo de concepción proceso sobre el concepto de Funcional, Condiciones Necesarias de primer orden tanto en Cálculo de Variaciones como en Teoría de Control y Condiciones suficientes de segundo orden. Finalmente, suponemos un tipo de concepción objeto sobre las Condiciones de Transversalidad.

Revisando su trabajo en forma global, el estudiante, de sus respuestas nos hace suponer que su esquema de optimización dinámica está en un nivel Intra-estructura, pues aunque el estudiante es capaz de hacer procesos sobre algunos objetos o por ejemplo en el caso de las condiciones de transversalidad las ha logrado encapsular en un objeto, las relaciones entre los distintos elementos de su esquema no han sido

coordinados entre sí como para considerar que ha empezado a construir una estructura. Se puede apreciar alguna coordinación entre las condiciones de primero y segundo orden, pero suponemos que es consecuencia de la generalización de dichas condiciones en sus cursos de cálculo (optimización estática). Sin embargo, la coordinación recién mencionada no es elemento suficiente para considerar que ha empezado a construir una estructura.

Nombre del Estudiante: **Ma**

1)

Al afirmar:: "…se puede "controlar"la variable x escogiendo adecuadamente otra variable u, llamada de control…" podemos suponer que ha interiorizado la acción de distinguir entre problemas de optimización en un proceso. Más adelante (problema cinco) plantea la equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y un problema de Teoría de Control en el problema cinco, por lo que tenemos elementos para reforzar nuestra hipótesis de que ha interiorizado las acciones sobre la diferencia entre ambas ramas de la Optimización Dinámica en un proceso.

"La diferencia es que en un problema de control óptimo se puede "controlar"la variable x escogiendo adecuadamente otra variable u, llamada de control para obtener una solución que optimice $J(x(t))$".

2)

Expresa las acciones que llevan a establecer la diferencia entre ambas variables y establece el papel que juega tiene la variable de control sobre la variable de estado, por lo que suponemos que ha interiorizado la acción de distinguir entre ambas variables en un proceso.

"La variable de control es con la cual se va a manipular el comportamiento de la variable de estado."

3)

De su respuesta al primer inciso, aunque su respuesta es un caso particular importante (posiblemente el más visto en clase), contiene todos los elementos esenciales de funcional. Además, en el segundo inciso responde correctamente en 4 de 5 ocasiones cuando una expresión matemática es o no es una funcional, con lo que nos muestra que ha interiorizado las acciones para distinguir funcionales en un proceso.

" $f: V \to R$, con V un espacio de funciones diferenciales"

4)

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

a) $J[x(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 3\dot{x}^2 + \dot{x}e^t - 3tx + 5x\dot{x})\,dt \quad x(0)=1, \quad x(\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{4}$

$f_x = 2x - 3t + 5\dot{x} \qquad f_{\dot{x}} = -6\dot{x} + e^t + 5x$

$\frac{df_{\dot{x}}}{dt} = -6\ddot{x} + e^t + 5\dot{x}$

Ecuación Euler: $2x - 3t + \cancel{5\dot{x}} + 6\ddot{x} - e^t - \cancel{5\dot{x}} = 0$

$6\ddot{x} + 2x = e^t + 3t$

5)

En el caso del problema de Teoría de Control, plantea el Hamiltoniano y el sistema de ecuaciones diferenciales asociado, mostrando que ha interiorizado las acciones necesarias para plantear el Hamiltoniano y aquellas que permiten operar con él a través del uso de las condiciones necesarias de primer orden para resolver cualquier problema de este tipo en Teoría de Control en un proceso.

3. $J[x(t)] = \int_1^5 (ux - u^2 - x^2)\,dt \quad$ s.a $\quad \dot{x} = x + u \quad x(1) = 2, \quad x(5) =$ libre

$H = ux - u^2 - x^2 + \lambda(x+u)$

$H_u: \; -2u + x + \lambda = 0 \qquad u = \frac{x+\lambda}{2}$

$H_\lambda: \; x + u = \dot{x}$

$H_x: \; u - 2x + \lambda = -\dot{\lambda}$

$u = \dot{x} \quad J(x(t)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - 3u^2 + ue^t - 3tx + 5xu \right) dt$

$s.a \quad x(0) = 1 \qquad u = \dot{x}$

$\qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \qquad \dot{x} = u$

6)

En cuanto a las condiciones suficientes de segundo orden plantea dos tipos equivalentes de condiciones y las aplica al problema que se le presenta para resolver, mostrando por un lado que ha interiorizado las acciones que le llevan a plantear y aplicar dichas condiciones en un proceso (uno por cada condición) y por otro lado, muestra una coordinación entre ambos procesos, que le permite decidir cuál de las condiciones suficientes aplicar ante cualquier problema de optimización de este tipo, encapsulando dichos procesos en un objeto.

"Cálculo de Variaciones:
Condición de Lagrange:

$$\begin{cases} f_{x'x'} > 0 \ \textit{mínimo} \\ f_{x'x'} < 0 \ \textit{máximo} \end{cases}$$

ó

$$\begin{cases} f_{xx'} > 0 \ y \ |H| > 0 \ \textit{mínimo} \\ f_{xx'} < 0 \ y \ |H| < 0 \ \textit{máximo} \end{cases}$$

Teoría de Control:

$H_{uu} < 0$ *es un máximo*

$H_{uu} > 0$ *es un mínimo*

Estas soluciones sirven para saber la solución de equilibrio que se ha obtenido es un máximo o un mínimo.

Condición de Lagrange:

$f_{x'x'} = -6 < 0 \Rightarrow$ es un máximo.

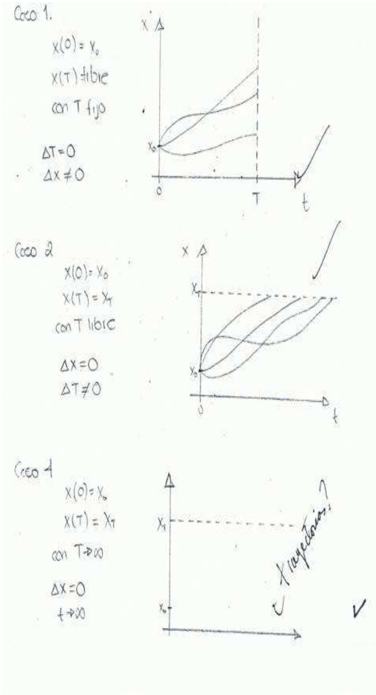
Condición de Lagrange:

$f_{x'x'} = -6 < 0 \Rightarrow$ es un máximo

7)

En un cuestionario anterior, llevó a cabo las acciones necesarias para determinar las condiciones de transversalidad correspondientes desde un punto de vista tanto analítico como geométrico mostrando que dichas acciones las había interiorizado en un proceso (analítico y geométrico, respectivamente) y coordinó ambos procesos encapsulándolo en un objeto. En este cuestionario enfatiza el papel de dichas condiciones. Si consideramos globalmente sus rerspuestas podemos suponer que ha encapsulado el concepto condiciones de transversalidad en un objeto.

Respuesta al cuestionario anterior:



Respuesta al tercer cuestionario:

"Las condiciones de Transversalidad sirven para calcular las incógnitas constantes que resultan de la solución del problema de optimización cuando se tienen condiciones iniciales del tipo:

i) $x(1) = libre$

ii) $x(T) = 10, T\ libre$

iii) $x(T) = 10,\ con\ T \to \infty$

iv) $x(T) = libre\ con\ T, x \to \infty$"

En resumen podemos suponer que no tiene ni siquiera un tipo de concepción acción sobre la equivalencia entre ambas ramas de la Optimización Dinámica, un tipo de concepción proceso sobre los conceptos: Diferencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y otro de Control, Diferencia entre Variable de Estado y Variable de Control, Funcional, Condiciones Necesarias de primer orden, tanto en Cálculo de Variaciones como en Teoría de Control. Finalmente, suponemos una concepción objeto sobre Condiciones Suficientes de segundo orden y Condiciones de Transversalidad.

Revisando su trabajo en forma global, el estudiante, de sus respuestas nos hace suponer que su esquema de optimización dinámica está en un nivel Intra-estructura, pues aunque el estudiante es capaz de hacer procesos sobre algunos objetos o por ejemplo en el caso de las condiciones suficientes de segundo orden o en el caso de las condiciones de transversalidad las ha logrado encapsular en un objeto, las relaciones entre los distintos elementos de su esquema no han sido coordinados entre sí como

para considerar que ha empezado a construir una estructura. Se puede apreciar alguna coordinación entre las condiciones de primero y segundo orden, pero suponemos que es consecuencia de la generalización de dichas condiciones en sus cursos de cálculo (optimización estática). Sin embargo, la coordinación recién mencionada no es elemento suficiente para considerar que ha empezado a construir una estructura.

Finalmente, podemos concluir que en base a las respuestas dadas por los estudiantes a este cuestionario en su conjunto, muestra que su nivel de evolución es Intra-estructura, pues aunque hubo estudiantes capaces de hacer procesos o incluso encapsular en objetos a ciertos conceptos, demostraron no haber coordinado a dichos conceptos entre sí. En algunos casos mostraron cierta coordinación entre las condiciones necesarias de primer orden y las condiciones suficientes de segundo orden. Sin embargo, dicha coordinación es explicable en base a la coordinación que posiblemente establecieron entre los conceptos análogos en optimización estática. En cualquier caso, los resultados no nos permiten establecer que hayan empezado a construir una estructura. Esto sucedió no sólo para la muestra tomada del grupo de M.A.E. de donde elegimos estudiantes con construcciones de conceptos cuyo tipo de concepción era sólo tipo acción, hasta llegar a algunos que lograron hacer procesos sobre varios conceptos y lograron encapsular algunos procesos en objetos (desde luego pasando por casos intermedios), sucedió para todo el grupo.

A continuación presentamos los resultados obtenidos, primero para la muestra elegida y después para todo el grupo.

RESUMEN DEL ANÁLISIS EN FORMA MATRICIAL

La información hasta aquí obtenida la presentamos a continuación en forma matricial:

a) Para la muestra presentada en este apartado:

RESUMEN DEL ANÁLISIS EN FORMA MATRICIAL

	Dif. V. o C	Dif. Estado o Cont	Func.	Cond 1er. Ord V	Cond 1er. Ord C	Cond Sufs.	Cond Transv
Ed	1	0	1	0	1	1	1
Fr	2	1	0	2	2	1	1
Mi	2	1	2	2	2	2	3
Ma	2	2	2	2	2	3	3

CLAVES

Dif. V o C: Diferencia entre Cálculo de Var. y T. de Control

Dif. Estado o Cont: Diferencia entre variable de edo. y V. de Control

Func: Funcional

Cond. 1er. Ord. V.: Condiciones primer orden, Cálculo de Variaciones

Cond. 1er. Ord. C.: Condiciones primer orden, Teoría de Control

Cond. Sufs.: Condiciones suficientes

Cond. Transv.: Condiciones de Transversalidad

Iniciales de los estudiantes:

Ed Fr Mi Ma

0: No tiene ni siquiera concepción Acción 1: Concepción Acción

2: Concepción Proceso 3: Concepción Objeto

b) Para todo el grupo

RESUMEN DEL ANÁLISIS EN FORMA MATRICIAL

Inicial Estudiantes	Dif. V. o C	Dif. Estado o Cont	Func.	Cond 1er. Ord V	Cond 1er. Ord C	Cond Sufs.	Cond Transv
Ge	1	2	3	2	2	1	1
Er	1	1	1	2	2	0	1
Ya	2	0	1	2	2	1	3
Jr	2	3	2	2	2	1	3
Ed	1	0	1	0	1	1	1
Fr	1	1	0	2	2	1	1
Ar	0	1	2	2	2	1	3
Pe	1	1|	1	1	1	1	1
Al	1	0	0	2	1	1	1
Mi	2	1	2	2	2	2	3
Er	2	2	2	2	2	1	1
Ma	2	2	2	2	2	3	3
Hu	2	3	1	2	2	3	1
Na	2	1	0	2	2	2	3

CLAVES

Dif. V o C: Diferencia entre Cálculo de Var. y T. de Control

Dif. Estado o Cont: Diferencia entre variable de edo. y V. de Control

Func: Funcional

Cond. 1er. Ord. V.: Condiciones primer orden, Cálculo de Variaciones

Cond. 1er. Ord. C.: Condiciones primer orden, Teoría de Control

Cond. Sufs.: Condiciones suficientes

Cond. Transv.: Condiciones de Transversalidad

0: No tiene ni siquiera concepción Acción 1: Concepción Acción

2: Concepción Proceso 3: Concepción Objeto

7.4 INSTRUMENTOS PARA DETERMINAR EL TIPO DE CONCEPCIÓN DE UNA MUESTRA DE ESTUDIANTES DEL GRUPO DE OPTIMIZACIÓN

Presentaremos, como en el instrumento anterior los resultados de cada estudiante de una muestra de cuatro estudiantes del grupo de Optimización.

Antes de presentar las respuestas de los estudiantes, presentaremos el cuestionario que se aplicó a este grupo. Como se podrá notar, esencialmente es el mismo que se aplicó al grupo de M.A.E, aunque hubo algunas diferencias más de forma que de fondo.

A nosotros nos interesó hacer una comparación (no estadística) entre los grupos de M.A.E y Optimización únicamente sobre los conceptos que consideramos esenciales del curso: funcional, condiciones necesarias de primer orden (principalmente en Cálculo de Variaciones), condiciones suficientes de segundo orden y condiciones de transversalidad. De aquí la omisión de algunas preguntas que hicimos (porque nos interesaban de alguna manera para el grupo piloto) al grupo de M.A.E.

A continuación presentaremos el cuestionario y por razones prácticas de lectura, en las respuestas sólo nos referiremos al número de la pregunta.

1)
   a) ¿Qué es una Funcional?

   b) ¿Cuáles de las siguientes expresiones son Funcionales y por qué?

i) $f(x)=\int_0^x (2t^2+5)dt$; ii) $f(x,y)=x^2+y^2$; iii) $f(x,x',t)=\sqrt{1+x'^2}$

iv) $J(x)=\left(\int_0^5 x(t\ \ )^2 dt, \sqrt{1+x'^2}\right)$; v) $J(x)=\int_0^T (x^2+x'^2)dt$

2) Encontrar y clasificar el extremo de la Funcional

$$J(x)=\int_0^3 (xx'-x'^2)dt,\ x(0)=5,\ x(3)\ libre$$

3) a) Tanto en Cálculo de Variaciones como en Teoría de Control, ¿cuáles son las condiciones suficientes de segundo orden?
b)¿Para qué sirven?

4) ¿Cuál es el papel de las Condiciones de Transversalidad en un problema de Optimización Dinámica?

A continuación las respuestas de los estudiantes de la muestra:

Nombre del Estudiante: **Er**

1)

De la definición que da de funcional y el hecho de que no siempre sabe aplicar dicha definición para determinar si una expresión matemática es funcional o no lo es (por ejemplo en el inciso tres,), podemos suponer que las acciones que lleva a cabo para determinar si una expresión matemática dada es o no es funcional no las ha interiorizado en el proceso correspondiente, por lo que suponemos que tiene una concepción tipo acción sobre este concepto.

"Una función que va de un espacio vectorial al campo sobre el cual está definido el espacio vectorial".

i) Si es Funcional, ii) No, porque no es función, iii) No (falta la integral) , iv) No porque el espacio de llegada no es el campo en que se define el espacio de salida."

2)

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

CP.O:

3. Encuentra y clasifica el extremo de la funcional

$$J(x) = \int_0^3 (x\dot{x} - \dot{x}^2)\,dt, \quad x(0)=5, \quad x(3) \text{ libre.}$$

sea $f(x,\dot{x},t) = x\dot{x} - \dot{x}^2$

CPO $f_x - \frac{d}{dt}(f_{\dot{x}}) = 0$ $\quad f_x = \dot{x} \quad f_{\dot{x}} = x - 2\dot{x}$

$\Rightarrow \dot{x} - \frac{d}{dt}(x - 2\dot{x}) = 0 \Rightarrow \dot{x} - (\dot{x} - 2\ddot{x}) = 0$ 1

$\Rightarrow 2\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0$ ✓

C Transversalidad.

$(f_{\dot{x}})_{t=3} = 0 \Rightarrow x(3) - 2\dot{x}(3) = 0$ ✓

$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = A \Rightarrow x = At + B$

$x(0) = 5 \Rightarrow 5 = B$ $\quad X^* = -5t + 5$

$\Rightarrow x(t) = At + 5$ $\quad \dot{X} = A$, (no 3A)

$x(3) - 2\dot{x}(3) = 0 \Rightarrow x(3) - 2(3A) = 0$,5

$\Rightarrow 6A = x(3) \Rightarrow A = \frac{x(3)}{6} = \frac{3A+5}{6} \Rightarrow 6A = 3A + 5 \Rightarrow$

$3A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{3}$

$\therefore \boxed{x(t) = \frac{5}{3}t + 5 \quad x(3) = 10 \quad \text{optimiza } J(x)}$

¿Max, Mín, silla? ,5

3)

Respecto a las condiciones suficientes de segundo orden enuncia sólo una y no la puede aplicar al problema que se le presenta en la pregunta dos, por lo que no tenemos información suficiente que nos permita suponer que ha interiorizado las acciones que llevan a determinar si una trayectoria es máxima o mínima en un

proceso. Suponemos entonces que tiene una concepción acción sobre este concepto.

“

a) Signo del Hessiano de la función (no de la funcional)
b) Para determinar si se trata de máximo o mínimo al ver si la función involucrada es cóncava (max) o convexa (min).”

4)

En cuanto a las condiciones de transversalidad, al expresar el papel que juegan dichas condiciones y aplicarlas al problema que se le presentó (ver problema dos), muestra que ha interiorizado las acciones de plantearlas y aplicarlas a un problema cualquiera de variaciones de este tipo en un proceso.

“Son para determinar el máximo cuando el tiempo final o el valor final son libres o fijos o algunas combinaciones.”

En resumen podemos suponer que este estudiante tiene una concepción tipo acción del concepto de funcional y una concepción tipo proceso de los conceptos: condiciones de primer orden en variaciones, condiciones suficientes de segundo orden y condiciones de transversalidad.

Revisando su trabajo en forma global, el estudiante, de sus respuestas nos hace suponer que su esquema de optimización dinámica está en un nivel Intra-estructura, pues aunque el estudiante es capaz de hacer procesos sobre algunos objetos, las relaciones entre los distintos elementos de su esquema no han sido coordinados entre sí como para considerar que ha empezado a construir una estructura. Se puede apreciar alguna coordinación entre las condiciones de primero y segundo orden, pero suponemos que es consecuencia de la generalización de dichas condiciones en sus cursos de cálculo (optimización estática). Sin embargo, la coordinación recién mencionada no es elemento suficiente para considerar que ha empezado a construir una estructura.

Nombre del Estudiante: **Pa**

1)

Por lo que respecta al concepto de funcional, establece su definición, pero no la aplica al no llevar a cabo las acciones que le permitirían determinar si una expresión matemática es funcional o no lo es. Ejemplos de dichas acciones serían en primer lugar observar dominios y rangos de las expresiones dadas, para poder determinar en base a la definición si dichas expresiones son o no son funcionales. Esto nos lleva a suponer que su respuesta al concepto de funcional está basada únicamente en la memoria, por lo que podemos suponer un tipo de concepción acción sobre este concepto.

a)
"Es una regla de correspondencia que toma valores de un espacio vectorial de funciones y lo lleva a R."

b)
"Todas"

2)

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

$\lambda = \frac{1}{xP_1} = \frac{1}{m}$

$\therefore$ Ambas restricciones están activas

con $P_2 > m$ y $P_1 > 0$ cualquiera.

(3) $J[X] = \int_0^3 (x\dot{x} - \dot{x}^2)\,dt$, $x(0) = 5$, $x(3)$ libre.

$f(x, \dot{x}, t) = x\dot{x} - \dot{x}^2$

$f_x = \dot{x}$ $\qquad f_{xx} = 0 \quad f_{\dot{x}\dot{x}} = -2$.

$f_{\dot{x}} = x - 2\dot{x}$ $\qquad f_{x\dot{x}} = 1$

2

CPO

$\dot{x} - \frac{d}{dt}(x - 2\dot{x}) = 0$.

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(x - 2\dot{x}) = \dot{x}$

$\Rightarrow \dot{x} - 2\ddot{x} = \dot{x}$

$\Rightarrow 2\ddot{x} = 0$

$\Rightarrow \ddot{x} = 0$

$\Rightarrow \dot{x} = A$

$\Rightarrow x = At + B$

$x(0) = 5$

$\Rightarrow B = 5$.

C. Transversalidad

$x(3)$ libre

$\Rightarrow (f_{\dot{x}})_{t=3} = 0$

$\Rightarrow x - 2\dot{x} = 0$

$\Rightarrow (At + 5 - 2A)_{t=3} = 0$

$\Rightarrow 3A + 5 - 2A = 0$

$\Rightarrow A + 5 = 0$

$\Rightarrow A = -5$.

$\therefore x(t) = \cancel{-5t} + 5$.

$x(T) = x(3) = -10$.

cont.

3)

Respecto a las condiciones suficientes de segundo orden, en su respuesta a esta pregunta no menciona cuáles son. Sin embargo, en el problema que se le presentó

para resolver (ver problema dos), menciona una condición suficiente y la aplica sin dificultad aparente mostrando que ha interiorizado las acciones para determinar si una trayectoria es máxima o mínima para cualquier problema de variaciones de este tipo en un proceso.

"

a) Que el Hamiltoniano se maximice o minimice en la variable de control (concavidad o convexidad de u).
b) Para saber si el extremo de la funcional es máximo o mínimo.

4)

En cuanto a las condiciones de transversalidad, al expresar el papel que juegan dichas condiciones y aplicarlas al problema que se le presentó (ver problema dos), muestra que ha interiorizado las acciones de plantearlas y aplicarlas a un problema cualquiera de variaciones de este tipo en un proceso.

"Determinar a las constantes de integración para fijar un valor final deseado y/o un tiempo final en el que se desea terminar. Hacen que no haya una familia de soluciones sino una sóla particular que resuelve el problema"

En resumen podemos suponer que este estudiante tiene una concepción tipo acción del concepto de funcional y una concepción tipo proceso de los conceptos: condiciones de primer orden en variaciones, condiciones suficientes de segundo orden y condiciones de transversalidad.

Revisando su trabajo en forma global, el estudiante, de sus respuestas nos hace suponer que su esquema de optimización dinámica está en un nivel Intra-estructura, pues aunque el estudiante es capaz de hacer procesos sobre algunos objetos, las relaciones entre los distintos elementos de su esquema no han sido coordinados entre sí como para considerar que ha empezado a construir una estructura. Se puede apreciar alguna coordinación entre las condiciones de primero y segundo orden, pero suponemos que es consecuencia de la generalización de dichas condiciones en sus cursos de cálculo (optimización estática). Sin embargo, la coordinación recién mencionada no es elemento suficiente para considerar que ha empezado a construir una estructura.

Nombre del Estudiante: **Sa**

1)

En lo que respecta al concepto de funcional, expresa una definición (matemáticamente incorrecta), sin embargo las acciones que hace para determinar si una expresión matemática es funcional no están de acuerdo con su definición. Por ejemplo, determina que son funcionales cuando son funciones que no tienen su rango en un espacio vectorial. Por lo anterior, suponemos que a lo más tiene una concepción acción sobre este concepto.

“Es una función que va de un espacio vectorial a otro”

“La del inciso tres y la del inciso cinco.”

2)

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

) Encuentra y clasifica el extremo de la funcional

$$J[x] = \int_0^3 \left(x\dot{x} - \dot{x}^2\right) dt \qquad x(0) = 5\ ,\ x(3)\ \text{libre}$$

$$f(x,\dot{x},t) = x\dot{x} - \dot{x}^2$$

$$f_x = \dot{x}\ ,\quad f_{\dot{x}} = x - 2\dot{x}$$

La ecuación Euler - Lagrange

$$\dot{x} - \frac{d}{dt} x - 2\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x} - \dot{x} + 2\ddot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = C_0$$

$$\Rightarrow x(t) = C_0 t + C_1$$

2

Por un lado se que

$$x(0) = 5 = \cancel{C_0 t} + C_1 \qquad \boxed{\therefore\ C_1 = 5}$$

Al tener $x(3)$ libre

tenemos la condición de transversalidad

$$\left(f_{\dot{x}}\right)_{t=3} = 0 \Rightarrow \left(x - 2\dot{x}\right)_{t=3} = 0 \Rightarrow$$

$$x(3) - 2(\dot{x}(3)) = 0$$

$$x(3) = 2(\dot{x}(3))$$

Por un lado tenemos

$$\Rightarrow x(3) = C_0 3 + 5$$

$$2\dot{x}(3) = 2[C_0]$$

$$\Rightarrow 2C_0 = 3C_0 + 5$$

$$\Rightarrow -C_0 = 5 \quad \therefore \boxed{C_0 = -5}$$

$$\therefore x(t) = -5t + 5$$

Para clasificarlo chequemos

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{x\dot{x}} \\ f_{\dot{x}x} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \det < 0$$

∴ El extremo de la funcional es un punto silla

3)

Con relación a las condiciones suficientes de segundo orden, plantea su papel al responder a esta pregunta y (ver problema dos) en el problema que se le presenta para resolver, lleva a cabo las acciones de plantear una condición suficiente y aplicarla para determinar si la trayectoria es máxima o mínima, mostrando de esta manera que ha interiorizado dichas condiciones en un proceso que le permite

determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima para cualquier problema de variaciones de este tipo.

"a) A sea max con respecto al control o f cóncava (convexa) con respecto a x y a x´.

b) Para determinar si la respuesta nos da un máximo o un mínimo.

4)

Por lo que toca a las condiciones de transversalidad, expresa el papel que juegan y en el problema dos lleva a cabo las acciones que se requieren como condición para encontrar la trayectoria óptima y al resolver dicho problema sin aparentes dificultades, nos muestra que ha interiorizado las mencionadas acciones en un proceso para determinar de la familia de trayectorias óptimas posibles la que cumpla con las condiciones dadas para cualquier problema de este tipo en variaciones.

"Son para poder determinar el valor óptimo de variables como el tiempo final y el valor final si no están dados."

En resumen podemos suponer que este estudiante tiene una concepción tipo acción del concepto de funcional y una concepción tipo proceso de los conceptos: condiciones de primer orden en variaciones, condiciones suficientes de segundo orden y condiciones de transversalidad.

Revisando su trabajo en forma global, el estudiante, de sus respuestas nos hace suponer que su esquema de optimización dinámica está en un nivel Intra-estructura, pues aunque el estudiante es capaz de hacer procesos sobre algunos objetos, las relaciones entre los distintos elementos de su esquema no han sido coordinados entre sí como para considerar que ha empezado a construir una estructura. Se puede apreciar alguna coordinación entre las condiciones de primero y segundo orden, pero suponemos que es consecuencia de la generalización de dichas condiciones en sus cursos de cálculo (optimización estática). Sin embargo, la coordinación recién mencionada no es elemento suficiente para considerar que ha empezado a construir una estructura.

Nombre del Estudiante: **Al**

1)

En lo que respecta al concepto de funcional podemos observar que las respuestas comienzan con una definición de funcional a partir de la cual se llevan a cabo las acciones necesarias para determinar si una expresión matemática es o no es funcional, mostrando así que ha logrado interiorizar dichas acciones en un proceso que permite distinguir funcionales de cualquier expresión matemática. Sin embargo, de sus respuestas al segundo inciso, vemos que cuando falla no se debe a su concepción de funcional sino a su concepción de espacio vectorial que aparentemente no ha llegado a construir.

a)
“Una funcional es una función de un espacio vectorial a los reales.”
b)
“La uno porque los reales son un espacio vectorial, la dos porque R^2 es espacio vectorial, la tres no porque su dominio es otro espacio de funciones, la cuatro no porque su codominio no son los reales y la cinco si es (es como las del curso).”

2)

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

Alejandro Melo Ponce 100749

$$\text{③}\quad J[x] = \int_0^3 \overbrace{(x\dot{x} - \dot{x}^2)}^{f(x,\dot{x},t)}\,dt, \quad x(0)=5, \quad \underline{x(3)\ \text{libre}}$$

1,75

$f_x = \dot{x}$ $\qquad f_{\dot{x}} = x - 2\dot{x}$

Es silla

$f_{xx} = 0$ $\qquad f_{\dot{x}\dot{x}} = -2$ $\qquad \therefore H_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad H=0,\ \det H = 0-1 = -1 < 0$ y $f_{\dot{x}\dot{x}} = -2 < 0$ $\quad$ -.25

$f_{x\dot{x}} = 1$ $\qquad f_{\dot{x}x} = 1$

$\therefore H_f$ es indeterminada porque $\underline{\det H = H_2 < 0}$

∴ ¿max? ¿min? ¿silla?

C.P.O

$$\dot{x} - \frac{d}{dt}(x - 2\dot{x}) = 0 \Rightarrow \cancel{\dot{x}} - \cancel{\dot{x}} + 2\ddot{x} = 0 \Rightarrow 2\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = A \Rightarrow \int dx = \int A\,dt$$

$$\dot{x} = A \qquad \Rightarrow x(t) = At + B$$

de la C. de Trans.

$$(f_{\dot{x}})_{t=T=3} = 0 \Rightarrow x(3) - 2\dot{x}(3) = 0$$

de $x(0) = 5 \Rightarrow x(0) = 5 = B$

$\therefore \underline{B = 5}$

$$\left.\begin{aligned} x(3) &= 3A + 5 \\ \dot{x}(3) &= A \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3A + 5 - 2A = 0$$

$\underline{A = -5}$

$$\therefore \underline{x(t) = -5t + 5 = 5(1-t)}$$

3)

Con relación a las condiciones suficientes de segundo orden, plantea su papel al responder a esta pregunta y (ver problema dos) en el problema que se le presenta para resolver, lleva a cabo las acciones de plantear una condición suficiente y aplicarla para determinar si la trayectoria es máxima o mínima, mostrando de esta manera que ha interiorizado dichas condiciones en un proceso que le permite

determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima para cualquier problema de variaciones de este tipo.

“a) Variaciones: signo de $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xx'} \\ f_{x'x} & f_{x'x'} \end{pmatrix}$ (como en opt. estática); Control: f (x, u, t) y g (x, u, t) cóncavas (convexas) en (x, u) para un max (min).

b) Para encontrar si el óptimo obtenido con las CPO es máximo o mínimo.”

4)

En lo que tiene que ver con las condiciones de transversalidad, en su respuesta a esta pregunta explica su papel y en el problema concreto que se le presentó para resolver (ver problema dos), plantea la condición de transversalidad y hace las acciones que permiten determinar la trayectoria única de una familia de trayectorias en un proceso que puede repetir para cualquier problema de variaciones de este tipo.

“Sirven en lugar de las condicones iniciales”

En resumen podemos suponer que este estudiante tiene una concepción tipo proceso de todos los conceptos: funcional, condiciones de primer orden en variaciones, condiciones suficientes de segundo orden y condiciones de transversalidad.

Revisando su trabajo en forma global, el estudiante, de sus respuestas nos hace suponer que su esquema de optimización dinámica está en un nivel Intra-estructura, pues aunque el estudiante es capaz de hacer procesos sobre todos los conceptos considerados, las relaciones entre los distintos elementos de su esquema no han sido coordinados entre sí como para considerar que ha empezado a construir una estructura. Se puede apreciar alguna coordinación entre las condiciones de primero y segundo orden, pero suponemos que es consecuencia de la generalización de dichas condiciones en sus cursos de cálculo (optimización estática). Sin embargo, la coordinación recién mencionada no es elemento suficiente para considerar que ha empezado a construir una estructura.

RESULTADOS EN FORMA MATRICIAL

Iniciales Est.	Funcional	C.N. 1er. O.	C.S. 2º. 0.	C. Transv
Er	1	2	1	2
Pa	1	2	2	2
Sa	1	2	2	2
Al	2	2	2	2

CLAVES

C.N. 1er. O.: Condiciones Necesarias de primer orden; 1: Tipo de concepción acción

C.S. 2º.O.: Condiciones Suficientes segundo orden; 2: Tipo de concepción proceso

C. Tranvs: Condiciones de Transversalidad; 3: Tipo de concepción objeto

7.5 ENTREVISTAS

Se llevaron a cabo un total de ocho entrevistas: cuatro en el grupo de M.A.E y cuatro en el grupo de Optimización.

Presentaremos primero las cuatro entrevistas al grupo de M.A.E., posteriormente las cuatro al grupo de Optimización y finalmente los resultados obtenidos, resumidos en forma matricial.

Nota: Con la finalidad de darle fluidez a la lectura, en esta sección presentaremos sólo un resumen de las Entrevistas, lo que consideramos suficiente para determinar el tipo de concepción de cada estudiante sobre cada concepto. Para ver las entrevistas completas ir al apéndice “C”.

ENTREVISTAS AL GRUPO DE M.A.E.

ENTREVISTA A MA (MC) Grupo: Matemáticas Aplicadas a la Economía

JC Entonces eh bueno como primera pregunta ¿Cuáles de las siguientes expresiones son funciones cuales son funcionales o cuales no son nada?, entonces justificando brevemente ¿no?
MC Si
JC La primera seria $f(x)=\int_0^x (5t^2+2)dt$. Sobre esta primera expresión que podríamos decir y ¿Por qué?
MC Bueno pues no es un funcional
JC ¿Por qué?
MC Bueno básicamente porque el funcional es una función que va de un espacio vectorial en R y depende de una variable y de su derivada
JC A ver otra: $f(x,y)=x^2+y^2$ ¿Qué es lo que es?
MC Es la ecuación de un círculo, bueno es una función también
JC ¿Qué representa esa función?
MC Mmm... un circulo
JC ¿En donde tiene su dominio?
MC Tiene su dominio ¿en R 2?
JC En R 2 exactamente
MC Si claro y es un punto que va a R 3
JC Y a cada punto de R 2 le asocia un punto en X Z
MC En X Z claro
JC O sea que la, eso es una superficie
MC Si
JC Y esa superficie si la hacemos con curvas de nivel ¿que nos da?
MC Eh, ¿con curvas de nivel?, eh nos da este ¿círculos en el plano?
JC Círculos o elipses ¿verdad?
MC Aja
MC SI
JC Es una función que va de
MC Que va de R 2 en R

JC De R 2 en R, ¿será funcional?
MC No
JC ¿Por qué?
MC Porque su dominio es R 2
JC Porque su dominio es R 2 y ¿que tiene que ver, para que sea funcional que se requiere?
MC Que su dominio sea un espacio vectorial
JC ¿Y R 2 no es espacio vectorial?
MC No
JC Eh a ver pon tres ejemplos de funcionales
MC ¿Cómo las que vimos en clase?
JC Como las que quieras, tres
MC Bueno
JC A ver si nos las vas diciendo, la primera ¿Cuál es?

MC $J(x, x', t) = \int_{t_1}^{t_2} \left(x'^2 + x' + t\right) dt$

JC OK, bueno la segunda

MC Seria, la segunda seria $J(x, x', t) = \int_{t_1}^{t_2} \left(x^2 + xx' + x + x'\right) dt$

JC Aja,

MC Y la tercera seria $J(x, x', t) = \int_{t0}^{10} \left(tx'^2 + x\right) dt$

JC O sea si tú te fijas en los ejemplos que me pusiste
MC Aja
JC Siempre usaste integrales y siempre aparece X y X prima
MC Aja
JC ¿Hay alguna razón?
MC Eh no se porque así lo identifico mejor
JC Son las que mas se ven en el curso ¿verdad?
MC Aja
JC O sea lo que es básico para ver si es funcional es que el dominio sea
MC Un espacio vectorial
JC Un espacio vectorial ¿y el rango?
MC Los reales

Por lo que respecta al concepto de funcional, podemos apreciar que aunque conoce la definición, considera (quizá por los ejemplos que vió en clase), que se requiere la presencia de una integral, una función y su derivada, para que una funcional pueda ser considerada como tal. Esta afirmación se ve confirmada cuando se le piden ejemplos de funcionales y da tres ejemplos con las características antes mencionadas. Ella misma responde que "asi lo identifico mejor", lo que nos lleva a suponer que se basa exclusivamente en la memoria para determinar si una expresión matemática es o no es funcional, por lo que suponemos tiene una concepción acción del concepto de funcional. Como observación, en sus respuestas podemos darnos cuenta que cuando aparecen los reales o algún espacio vectorial euclidiano no recuerda bien el concepto de Espacio Vectorial, que habíamos supuesto debería haber construído por lo menos con un tipo de concepción acción antes de iniciar este curso.

JC SI, pero a ver vamos a por partes a desglosar esto, bueno primero, ¿tu sabes como se expresa analíticamente una trayectoria?
MC ¿Analíticamente una trayectoria? Después de una función en el plano X Y
JC OK ahora, ¿tú sabes lo que es una integral de línea?

MC La integral de línea eh, si la he visto en algún momento pero no me acuerdo muy bien
JC No te acuerdas muy bien
MC Si

Sobre el concepto de Trayectoria o integral de línea no tiene ni siquiera una concepción tipo acción, puesto que ella misma reconoce no recordar este concepto.

JC Si, no pero si no te acuerdas bien no tiene caso, a ver a vamos a pasar a otra vamos a poner un problema de optimización, sea max $J(x)=\int_0^{10}\frac{-x'^2}{2}dt; \quad x(0)=20,\ x(20)=0$.
MC Aja
JC ¿podrías resolver esto?
MC Aja
JC Si nos vas diciendo lo que vas haciendo mejor ¿no?
MC Si por la ecuación de Euler
JC Aja
MC Sacamos primero la derivada de F respecto a X que es 0 después la derivada respecto a X punto que es menos X punto y después se saca la derivada este de la F de X punto sobre D T y esto es menos X bi. Prima
JC Aja
MC Y entonces seria F de X la derivada respecto a X menos la derivada de F X punto de sobre D T y eso da, bueno eso se tiene que igualar a 0 y entonces queda que X bi. prima es igual a 0
JC Aja y de ahí
MC De ahí se puede integrar X punto igual alguna constante K y X volverla a integrar quedaría K por T mas otra constante
JC Aja
MC Y entonces con las condiciones X en 0 igual a 20 entonces C es igual a 20 y X en 20 igual a 0, K es igual a menos 1
JC Podemos ponerle a la trayectoria óptima X estrella, aquí como quedaría entonces X estrella
MC X estrella es igual a menos T mas 20
JC OK, esa es la trayectoria optima
MC Aja
JC eso será máxima o minima
MC Depende, de podemos actuar es por la condición de Lagrange
JC ¿Que es lo que dice la condición de Lagrange?
MC X punto la derivada de la funcional dos veces respecto a X punto si es positiva es un mínimo y si es negativo es un máximo
JC Aja, pero en este caso que pasa
MC En este caso es menos 1 y entonces
JC A ver F R respecto a X prima cuanto vale
MC F, F respecto a X prima es menos X prima y luego volviendo a derivar respecto a X prima da menos 1 y como es negativo es un máximo
JC O sea es un máximo
MC Aja

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido

interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

En cuanto a las condiciones de segundo orden, en los problemsa que se le presentan para resolver, lleva a cabo las acciones de plantear una condición suficiente y aplicarla para determinar si la trayectoria es máxima o mínima, mostrando de esta manera que ha interiorizado dichas condiciones en un proceso que le permite determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima para cualquier problema de variaciones de este tipo.

JC Bueno, este a ver uno mas, a ver por ejemplo otra vez retomando este problema, minimizar la integral de D T 0 hasta T 1, de la raíz de 1 mas X prima al cuadrado D T, ya sabemos lo que es esta ya la discutimos
MC Si
JC Eh
MC Mmm
JC Ese problema como se puede expresar, esta en lenguaje de calculo de variaciones ¿no?
MC Si
JC ¿Cómo lo podemos expresar en el lenguaje de control?
MC Eh, se tiene en la parte de las condiciones iniciales eh, se sujeta a otra, a una función de control que seria, U igual a X punto puede ser
JC Mmm
MC Y se sustituye el funcionamiento
JC O sea escribiríamos ¿Cómo?, minimizar
MC Mmm, la integral de T 0 a T 1y la integral de 1 mas U cuadrada
JC Mmm
MC D T
JC Por la restricción ¿no?
MC Ah si, sujeto a las condiciones iguale s y U X punto
JC OK, ahora como se plan…, ¿como se resolverían esos problemas?, nada mas eh me interesa el planteamiento no la solución
MC Si
JC ¿Cómo, como se resolverían en calculo de variaciones y como en teoría de control?
MC Eh en cálculo de variaciones seria igual con la derivada respecto de X y luego la derivada respecto X punto, dos veces
JC ¿Dos veces?
MC Eh, bueno no la derivada respecto de X punto y luego la deriva de eso respecto D T
JC Igual a 0 seria la ecuación de Euler ¿no?
MC Aja la ecuación de Euler, si, y en el, la teoría de control se usaría el Hamiltoniano
JC ¿Cómo se escribiría ahí el Hamiltoniano?
MC El Hamiltoniano se escribe igual al funcional que es raíz de 1 mas U cuadrada mas landa por la, por este la funcional control que seria U.

Podemos apreciar que hace las acciones para pasar de un problema de Cálculo de Variaciones a un problema de control sin dificultad aparente, mostrando que ha interiorizado dichas acciones que le permiten distinguir si un problema es de Cálculo de Variaciones o de Teoría de Control en un proceso.

JC ¿Cómo puedes distinguir en un problema de control, cual es la variable d estado y cual es la de control?
MC Eh la variable de estado no seria la variable de control seria U porque este, no se, la estas es algo que, que lo puedes tomar y, bueno se dice que se lo puedes controlar de alguna manera y, y eso lo aplicas en el problema
JC Pero ¿como escogiste la variable de control?, en base a que
MC A que es, no se, es como la sustitución

No responde sobre la diferencia esencial entre ambas variables por lo que no podemos asegurar que haya interiorizado las acciones que permiten distinguir entre variables de estado y variables de control.

JC ¿Si sabes?, bueno primero las condiciones de transversalidad ¿de donde vienen, de donde surgen?
MC Eh pues surgen de que en las condiciones iniciales en algunas ocasiones no están dadas fijas
JC Mmm
MC Si no que se puede dejar el no se, puede ser que el tiempo sea libre o que el la X de determinado tiempo sea libre o que ambos sean libres
JC Mmm, y eso si se lo puedes graficar
MC Si
JC Todas con esas condiciones
MC Si, ¿lo grafico?
JC A ver como seria, rápido dinos algún ejemplo
MC Eh, con X de, con T libre, con T libre seria una frontera vertical, no horizontal perdón, y bueno se busca una trayectoria con el
JC Que llegue a un X D T A ¿no?
MC Igual que llegue a una X determinada X 1, y que llegue en algún momento a esa barrera eh, y luego con X de T igual a, bueno libre seria una barrera vertical
JC Si el tiempo esta dado ¿no?
MC Aja, cuando el tiempo esta dado, bueno no se, 10 o algo y entonces el tiempo aquí seria vertical y se busca una trayectoria.

En lo que tiene que ver con las condiciones de transversalidad, en su respuesta explica su papel y expone los distintos casos geométricos que les dan origen, mostrando que ha interiorizado las acciones que permiten ubicar el origen de las condiciones de transversalidad desde un punto de vista geométrico en un proceso.

En resúmen podemos suponer que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre los conceptos de trayectoria e integral de línea, una concepción acción del concepto de funcional y en el mejor de los casos del concepto Espacio Vectorial. En cuanto a las condiciones de primer orden (Ecuación de Euler) y las de segundo orden (condición de Lagrange) tiene una concepción tipo proceso, lo mismo en cuanto a las diferencias entre un problema de Cálculo de Variaciones y uno de Teoría de Control y sobre el origen de las Condiciones de Transversalidad.. Sin embargo, solamente tiene una concepción tipo acción sobre las diferencias entre variables de estado y variables de control. Por otro lado, no establece relaciones importantes entre los distintos conceptos que conforman su esquema de Funcional, por lo que podemos suponer que dicho esquema se encuentra a nivel Intra-estructura.

ENTREVISTA A Ar (AA) Grupo M.A.E.

JC Entonces la primera pregunta dice, dadas las siguientes expresiones determinar cuales son funcionales, cuales únicamente funciones o en el caso de ser relaciones también decirlo ¿no?, justificando brevemente, empezamos una por una, la primera seria $f(x)=\int_0^x (t^2+5)dt$, ¿es función, es funcional, no es ninguna de las dos y por que?
AA Este creo que es funcional, porque depende del tiempo
JC O sea cualquier cosa que dependa del tiempo ¿es funcional?
AA No, no es funcional porque no esta maximizando
JC O sea una funcional tiene que estar ligada al proceso de maximizar algo
AA O minimizar
JC Por qué no recordamos la definición de funcional a lo mejor nos ayuda, ¿Qué es una funcional?
AA Bueno una funcional es algo que en su dominio son como muchas funciones, podría ser como un recorrido, entre dos puntos, pero ese recorrido son muchas, contiene muchas trayectorias entonces lo que se quiere hacer con el funcional es encontrar la mejor trayectoria al resolver ese problema
JC Ese es el problema que tiene la optimización dinámica ¿no?
AA Exacto
JC Pero la optimización dinámica se basa en la funcional y la funcional como un objeto, existe independientemente de que se le quiera optimizar
AA Pues si
JC Entonces este a ver volviendo ala definición de funcional, ¿funcional es?
AA Es, podría ser como una función pero que depende…
JC Es una función
AA Pero que depende de varias variables y esas variables son el tiempo y puedes agregar mas ¿no?, ya sea X o Y
JC OK, a ver la que sigue seria, $f(x, x', t)=\sqrt{1+x'^2}$
AA Este si es funcional
JC Si es funcional ¿Por qué?
AA Porque ya entra el tiempo y la variable
JC O sea, entra X, y entra X’
AA Exacto
JC OK, de acuerdo, vamos a recordar algo, una funcional se define como una función que va de un espacio vectorial normado en los números reales.
JC Entonces lo mas importante para que sea funcional ¿es que?
AA Que su dominio sea un espacio vectorial
JC Exactamente que su dominio sea un espacio vectorial y su rango sean los reales, o este ahí, bueno en base a esto que acabamos de ver, que decisiones cambiarias con respecto a las primeras que hiciste
AA Respecto a las primeras, bueno la primera no. La segunda si, la tercera también, la cuarta no, la quinta si, la sexta no. (Nota: aquí emplea la definición que se le dio de Funcional)
JC Dar tres ejemplos de funcionales justificando que lo sean
AA podría ser una J de X, X’ T, y eso igual a la integral de 0 a 2, D X’ al cuadrado mas X por X’ mas T, todo eso dentro es D T

JC Si, OK, otro, uno en que no se use la integral
AA ¿Que no se use la integral?, este J de X
JC Mmm
AA J que depende de X, X’ y T es igual a X cúbica mas X’ mas X’ al cuadrado por X, este, es funcional
JC Mmm
AA Igual es un funcional, porque X se encuentra en un espacio vectorial normado y derivable, entonces X esta en reales y eso implica también que ya al resolver esta ecuación su rango va estar en reales.

En cuanto al concepto de funcional, plantea su definición y a partir de ésta lleva a cabo las acciones para determinar si una expresión matemática en general es o no es funcional mostrando que ha interiorizado dichas acciones en un proceso que le permite determinar si una expresión matemática en general es o no es funcional.

JC En general las trayectorias se expresan por medio de funciones que son parametricas, a ver ¿Cómo seria eso?
AA Puedo a representarla por medio de un funcional
JC A ver como ¿una trayectoria seria una funcional?
AA Bueno es que un funcional tiene muchas trayectorias
JC Lo que pasa es que una funcional va sobre un espacio vectorial, que pueden ser funciones, trayectorias
JC ¿Tu sabes lo que es un integral de línea?
AA Si
JC Si recuerdas haberlo visto
AA Si, si recuerdo haberlo visto, este es un, bueno es como un integral
JC Mmm
AA Que resuelve la inte…, bueno es como que, al resolver la integral es como una raíz cuadrada y una X o una función, pero que esa función es una derivada ¿no?
JC Ese es un caso particular ¿no?
AA Si
JC Pero en general una integral de línea
AA Pues si lo recuerdo haber visto, pero como que el concepto no lo tengo muy claro
JC O sea no muy claro, entonces no vamos a pedir ejemplos de integrales de línea.
AA No

Podemos suponer por lo visto en el párrafo anterior que no tiene ni siquiera una concepción tipo acción sobre los conceptos trayectoria e integral de línea.

JC Dada la funcional $J(x)=\int_0^{40}\left(\frac{-x'^2}{2}\right)dt$, sabiendo que X en 0 vale 20 y que X en 40 vale 0, ¿podrías maximizar esa funcional?, y si nos vas diciendo como
AA Pues lo resolvería con Euler, con la ecuación de Euler, primero derivo respecto de X
JC ¿Qué es la ecuación de Euler?
AA La ecuación de Euler este, nos sirve para encontrar un optimo, la mejor trayectoria del funcional
JC Mmm, y como se llega
AA O sea, sirve para optimizar funcionales
JC Aja, claro ¿y como se llega a la ecuación de Euler?

AA OK, este pues derivo respecto a X, porque bueno la ecuación de Euler se compone de la derivada de F de X menos la derivada de F respecto de X' respecto al tiempo y se iguala a 0
JC Entonces la trayectoria optima quedaría como
AA X mas, menos ½ D T mas 20
JC ¿Será máximo o mínimo?
AA El Hessiano, no va a funcionar, la función es cóncava o convexa, en este caso es cóncava
JC cóncava, o sea, debe ser un máximo ¿verdad?
AA Aja

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

Por lo que respecta a las condiciones suficientes de segundo orden, plantea más de una condición suficiente y lleva a cabo las acciones que permiten determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima mostrando que ha interiorizado dichas acciones en un proceso (un proceso para cada condición suficiente) mostrando coordinación entre ambos procesos (por ejemplo, menciona que no puede usar el Hessiano, pero puede determinar si la función es cóncava o convexa), lo que nos lleva a suponer que ha encapsulado dichos procesos en un objeto. Por lo tanto suponemos que puede escoger la condición suficiente y llevar a cabo los procesos necesarios para determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima.

JC A ver de qué cambios específicos al considerar el intervalo de tiempo en un problema de optimización dinámica surgen las condiciones de transversalidad
AA ¿De que cambios específicos?, pues
JC Se pueden dibujar los casos ¿eh?
AA Si, pues, cuando el tiempo tiene infinito
JC A ver hay que ver los casos que…
AA Cuando el tiempo tiene infinito y cuando queremos, vaya cuando queremos acortar el tiempo. A ver, cuando queremos acortar el tiempo ¿como serán las trayectorias?, ahí sobre esa recta paralela al eje y así se verían ¿verdad?, eso es cuando el tiempo esta dado y X de T es libre, otro caso es cuando el tiempo es libre y X de T esta dada
JC Efectivamente, de ahí surgen las condiciones de…
AA Transversalidad
JC Transversalidad ¿verdad?

En lo que tiene que ver con las condiciones de transversalidad, en su respuesta explica su papel y expone los distintos casos geométricos que les dan origen, mostrando que ha interiorizado las acciones que permiten ubicar el origen de las condiciones de transversalidad desde un punto de vista geométrico en un proceso.

JC Continuamos con Arlette la ultima parte, entonces vamos al problema de minimizar la integral desde T 0 hasta T 1, de la raíz de 1 mas X' al cuadrado, D T, suponiendo que X en T 0 es X 0, y X en T1 es X1, o sea son 2 puntos, ese esta en el lenguaje de calculo de variaciones ¿verdad?
AA Si

JC Expresarlo en el lenguaje de teoría de control
AA ¿De teoría de control?
JC ¿Cómo se expresaría eso en teoría de control?
AA Bueno en teoría de control, lo que hacemos es, pues eso ya lo expresaría como una función, minimizar 1 mas X' cuadrada, sujeto a…, es que ahorita no recuerdo muy bien teoría de control
JC ¿Cómo se plantearía la solución en el caso de cálculo de variaciones?
AA Pues, resolvería con ecuación de Euler
JC ¿Ecuación de Euler verdad?
AA Aja
JC ¿Y en teoría de control?
AA En teoría de control ya es como, vamos como con, parecido a un Lagrangiano por así decirlo, que, bueno, optimiza la función
JC Seria el Hamiltoneano
AA Aja, con el Hamiltoneano
JC ¿Y como se plantearía el Hamiltoneano?, si te acuerdas de esas condiciones
AA Este, pues optimizas una función con una restricción, este y ya, o sea haces las derivadas, es similar
JC O sea, cual seria el Hamiltoneano en este caso
AA 1 más X cuadrada
JC ¿1 mas X?
AA Mas X'
JC Y la X' como se llama en teoría de control
AA Este
JC Hay que ponerle otro nombre ¿no?, por ejemplo, U
AA Aja, U
JC Entonces seria que, a ver ¿Cómo se escribe el Hamiltoneano?
AA 1 mas U cuadrada
JC ¿Sin la raíz?
AA Con raíz
JC Mmm
AA Mas lamda, este…, es que no recuerdo como tenia la…
JC Pues la U es X' ¿no?
AA Sujeto a U cuadrada o a X', es que en teoria de control escoges una variable de control
JC OK y este en un problema de control como se puede saber cual es la variable de estado y cual es la de control
AA Pues la variable de estado es la que esta originalmente y la variable de control tu la eliges
JC Depende, en base a que
AA En base a la variable de estado
JC Pero como distingo la variable de estado con la de control
AA Pues la variable de control es la que ya utilizas al resolver el problema ¿no?, y va a ser en función a la variable de estado
JC O sea, ¿Cuál es la que tiene derivada la de estado o la de control?
AA La de control
JC O sea, X' esa seria la de control, el ritmo con eso se controla ¿verdad?
AA Aja

En su respuesta expone las acciones que deben llevarse a cabo para distinguir la variable de estado de la variable de control para cualquier problema de control, mostrando que ha

logrado interiorizar dichas acciones en un proceso para determinar si una variable es de estado o es de control.

Sin embargo, de sus respuestas en el párrafo anterior, no tenemos elementos suficientes para suponer que haya logrado interiorizar las acciones para determinar la equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y otro de Teoría de Control.

En resumen podemos suponer que tiene un tipo de concepción proceso en los conceptos de funcional, diferencia entre funcional y trayectoria, condiciones de primer orden para optimizar problemas en Cálculo de Variaciones, diferencia entre variable de estado y variable de contro y condiciones de transversalidad. En cuanto a los conceptos de trayectoria e integral de línea suponemos que no tiene ni siquiera una concepción tipo acción. Sobre la equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y uno en Teoría de Control, suponemos un tipo de concepción acción. Finalmente, suponemos que ha logrado encapsular en un objeto las condiciones suficientes de segundo orden. Por otro lado, no establece relaciones importantes entre los distintos conceptos que conforman su esquema de Funcional, por lo que podemos suponer que dicho esquema se encuentra a nivel Intra-estructura.

ENTREVISTA a Mi (MA) Grupo: M.A.E.

JC ¿Cuál es función, cual es funcional o cual ni siquiera es función ni funcional?
MA OK
JC ¿Si?, entonces anotamos la primera, seria, $f(x)=\int_0^x (t^2+2)dt$
MA Una función, porque va de, esta, esta una función que esta con respecto a T y de 0a X nada mas son los limites de integración se podría decir que esta, va la función aquí esta es X y esta es T, va la función hasta X tenemos que integrar respecto a T
JC ¿será funcional?
MA A ver una funcional, voy a incluir la función de funcional, pues no vemos aquí el cambio de X’, primero veo la X’ para dar la definición de funcional tuviera que ser una función
JC O sea que si no aparece la X’ no hay funcional
MA Este si
JC Entonces, vamos a recordar la definición de funcional, para ver si lo que hicimos esta bien ¿no?
MA Si
JC ¿Qué es una funcional?, ¿Cómo se define una funcional?
MA Una funcional, la funcional es un número en el que vamos, nos ayuda a definir una trayectoria minima,
JC Pero, ¿Qué es una funcional?
MA Es una, es un número
JC Un numero, o sea que su rango estaría en los reales, eso que si es un numero
MA Si
JC Su rango esta en los reales, ¿y su dominio?
MA ¿Su dominio?, esta junto a los, como se podría definir con X, X’…

JC ¿No te acuerdas bien de la definición de…?
MA No, no me acuerdo bien
JC Vamos a darlo, y a ver si con eso estudiamos con un poquito con más de cuidado esto
MA Mmm
JC Una funcional es una función, cuyo dominio es un espacio vectorial normado, y cuyo rango son los reales, o sea efectivamente una funcional es un numero real, pero el dominio de una funcional tiene que ser un espacio vectorial normado, ¿si?, entonces, por ejemplo, R N, puede ser R 2, R 3, lo que sea ¿no?, ¿es un espacio vectorial o no?
MA A ver, de nuevo la funcional, la funcional es una…
JC Una función
MA Una función,
JC Que a cada elemento de un espacio vectorial…
MA Le otorga un número
JC Eso es un número real
JC R N ¿es espacio vectorial?
MA No
JC Entonces en cuantas cambiaste tu opinión después de ver la definición
MA Bueno va a salir después ahí mejor mas claro, esta de hecho queda, yo dije que no era funcional
JC Mmm
MA En esta la segunda también la cambie, la tercera me dijo que bueno es un vector, esta si esta bien, esta también la cambie de opinión porque la pusimos después con la integral, aquí si esta, bueno ya es la funcional y aquí también cambie de opinión dije que era función y fue funcional
JC O sea la mayoría ¿verdad?
MA La mayoría
JC Eso quiere decir que es importante revisar la definición
JC Ya como quedo claro vamos a una segunda pregunta, dar ejemplos de tres funcionales justificando por que son funcionales

MA $J(x, x', t) = \int_{t_1}^{t_2} (x'^2 + x) dt$

MA Uno ya estuvo, otro que, bueno, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, es el que pensaba que era una función, que si es función pero también es funcional
MA Y el tercero…, una funcional de, con X, X' aunque no este T explícitamente, igual que es lo yo que hice hace un rato $f(x) = x'^{\frac{1}{3}}$

Por lo que tiene que ver con funcional, da su definición (parcialmente correcta desde un punto de vista matemático) y en base a dicha definición hace las acciones para determinar si una expresión matemática en general es o no es funcional, mostrando de esta manera que ha interiorizado dichas acciones en un proceso que permite determinar si una expresión matemática en general es o no es funcional. Hay que enfatizar, sin embargo, que si parte de una definición no correcta sus resultados desde un punto de vista matemático pueden ser erróneos, pero este aspecto no es el que nos interesa en el presente análisis.

JC ¿Cómo se puede distinguir analíticamente una trayectoria, como se escribiría analíticamente la trayectoria?
MA Bueno ahorita estamos aquí, pensando en esto, una trayectoria como lo vimos en una, con una, cuando minimizamos una funcional nos entrega nuevas trayectorias, luego quedan escritas

en, en, como ecuaciones diferenciales en X D T igual una constante por E a la alfa T ¿no?, que convergen hacia un punto…
JC ¿Eso es una trayectoria?, y en general una trayectoria se puede dar también parametricamente ¿no?
MA Si
JC ¿Cómo se escribiría parametricamente una trayectoria?
MA ¿En forma parametrica?, bueno es cuando tenemos mas componentes ¿no?
JC ¿Cómo podemos distinguir cuando una integral es una integral de línea?
MA ¿De línea?
JC ¿Si recuerdas las integrales de línea o no?
MA No
JC Entonces integral de línea no sabes
MA ¿Cómo es una integral de línea?

Podemos suponer que sobre el concepto de trayectoria y de integral de línea no tiene ni siquiera una concepción tipo acción.

JC Supongamos que $J(x)=\int_0^{20}\frac{-x'^2}{2}dt$, con X en 0 igual a 20 y X en 20 igual a 0, ¿podrías optimizar esa funcional
MA Muy bien
JC Si nos quieres ir comentando lo que haces mejor
MA Planteo, planteo el integrando o sea F de X, X' coma T es igual menos X' cuadrada entre 2, este es el integrando, F de X' es igual a menos 2 X entre 2, que es menos X', F de X, X' es igual a menos 1, entonces tenemos que, primero hay que sacar el, el teorema de Euler para maximizar
JC Y todo eso igual a 0 ¿no?
MA Todo esto igual a 0, donde F de X, no hay, F de X esto es 0 menos derivada con respecto a T, F de X', F D X' es menos X' entonces es, menos X'' igual a 0, entonces tenemos que X'' igual a 0, X' D T, es igual a T y X D T
JC Entonces, ¿Cómo queda la trayectoria óptima?, podemos ponerle X estrella
MA Me quedó X D T igual a menos 1
JC X D T igual a menos 1
MA Mmm
JC ¿Será máxima o minima?
MA Hay que ver la función del integrando ¿no? Es una parábola hacia abajo ¿no?
MA Así es, que va hacia abajo… Entonces estaríamos hablando de un máximo ¿no?
JC ¿De qué otra forma podría determinarse si la trayectoria es máxima o mínima?
MA Con el Hessiano o con el teorema de Legendre que dice que la segunda derivada respecto a X prima X prima si es positiva es mínima y si es negativa máxima.

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

Por lo que respecta a las condiciones suficientes de segundo orden, plantea más de una condición suficiente y lleva a cabo las acciones que permiten determinar si una trayectoria

óptima es máxima o mínima mostrando que ha interiorizado dichas acciones en un proceso (un proceso para cada condición suficiente) mostrando coordinación entre ambos procesos (por ejemplo, menciona el Hessiano y el teorema de Legendre), lo que nos lleva a suponer que ha encapsulado dichos procesos en un objeto. Por lo tanto suponemos que puede escoger la condición suficiente y llevar a cabo los procesos necesarios para determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima.

JC Supongamos que queremos el típico el de minimizar la integral de T 0 a T 1, de la raíz de 1 mas X' al cuadrado todo D T ¿si?
MA Mmm
JC Este problema esta escrito en lenguaje de cálculo de variaciones ¿verdad?
MA Si
JC ¿Cómo se podría escribir en lenguaje de control, de teoría de control?
MA ¿teoría de control, con el hamiltoneano?, bueno aquí, tenemos que definir cual es la de control ¿no?
MA Para plantear el Hamiltoneano
JC Mmm
MA El Hamiltoneano de la función D X, entre mas una lamda que es como un Hamiltoneano, por la función G D T, donde G D T es la variable de control A, prima igual a U mas, bueno U mas algo ¿no?, con la variable de control
JC Entonces ¿Cómo quedaría el Hamiltoneano?
MA 1 mas X' al cuadrado, raíz mas lamda por la U de control si es que la definió la X' igual a U
JC ¿Y sujeto a?
MA Sujeto a X' igual a U
JC ¿Sujeto a que perdón?
MA X' igual a U
JC X' igual a U, ahora ¿Cómo se plantearía la solución en calculo de variaciones y como se plantearía con el Hamiltoneano en teoría de control?
MA En el Hamiltoneano, razonamos el Hamiltoneano, con H D U iguala a 0 y resolvemos para que nos quede en este caso, resolvemos H D U, H D lamda y H D X, nos quedan regular, bueno, no, si, pero nos quedan las ecuaciones ya separados ya podemos aquí resolver este…
JC ¿Cuánto valdría H en lamda?
MA ¿H en lamda?, el control que es U y H D X, vale 0 no tenemos X
JC Y a ver si lo pudiéramos hacer
MA A muy bien, si, H D U, aunque no tuviera uso acá arriba, no importa ¿verdad?, H D U es 0, H D landa entonces es U…
JC H D U vale 0, a ver, lo que pasa es que en la original es raíz en lugar de 1, mas X' al cuadrado
MA Mmm
JC Seria 1 mas U cuadrado ¿no?
MA Claro, si, tenemos que X D U T es igual a la raíz de 1 mas U cuadrada prima y…
JC ¿U'?
MA Es X', no, X cuadrada, prima G es igual a U
JC Y con calculo de variaciones ¿como la resolverías?
MA ¿Con calculo de variaciones?
JC Nada más con que menciones como lo resolverías
MA Nada mas sacando las condiciones que son, nada mas planteando o sea, F de X, X' coma T, igual a la función que es 1 mas X' cuadrada raíz
JC Mmm
MA Este y sacando la condición de Euler
JC Y ya

MA La ecuación perdón, si

En cuanto a la equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y otro de Teoría de Control, lleva a cabo las acciones para determinar las condiciones necesarias en ambas ramas de la optimización dinámica mostrando que ha interiorizado dichas acciones en un proceso (un proceso para cada rama), coordinando ambos procesos y encapsulándolos en un objeto que permite establecer la equivalencia entre ambas ramas de la optimización dinámica.

JC OK, ahora en un problema de control ¿como distingues entre la variable de estado y la variable de control?
MA La variable de control en este caso es la que se mueve que es la U y la variable de estado es la que no cambia
JC O sea la que tiene la derivada siempre es
MA La que controla

De lo anterior no tenemos elementos suficientes para suponer que haya interiorizado las acciones para distinguir a las variables de estado de las de control en un proceso.

JC ¿Tu sabes de donde vienen las condiciones de transversalidad?, es decir cuando se cambia le intervalo del tiempo ¿Qué posibilidades hay?
MA Si, se bien este, exacto cuando no son ni las iniciales ni las finales ¿no?, las de transversalidad son las que tienes que ajustar para que se optimicen
JC ¿En base a que se dan?
MA El T dado
JC ¿Eso si lo sabes graficar?
MA Si
JC SI
MA Si, si, si, son tres casos cuando te dan, el tiempo que tu partes de un origen y debes llegar hasta acá, o cuando te dan algún objetivo
JC Mmm
MA Y te puedes llevar el tiempo necesario
JC Mmm
MA O cuando te dan libre el tiempo y libre la circunstancia
JC Mmm
MA Esto se puede ajustar con las trayectorias, con, con las condiciones de transversalidad

En lo que tiene que ver con las condiciones de transversalidad, en su respuesta explica su papel y expone los distintos casos geométricos que les dan origen, mostrando que ha interiorizado las acciones que permiten ubicar el origen de las condiciones de transversalidad desde un punto de vista geométrico en un proceso.

En resumen podemos suponer que tiene una concepción tipo proceso en los conceptos de funcional, condiciones de primer orden para optimizar en Cálculo de Variaciones, equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y otro de Teoría de Control, diferencia entre variables de estado y variables de control y las Condiciones de Transversalidad. Asimismo podemos suponer que ha encapsulado en un objeto el proceso para determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima. Respecto a los conceptos de Trayectoria o Integral de Línea podemos suponer que no tiene ni siquiera una concepción tipo acción y sobre Espacio Vectorial a lo más una concepción tipo acción. Por otro lado, no

establece relaciones importantes entre los distintos conceptos que conforman su esquema de Funcional, por lo que podemos suponer que dicho esquema se encuentra a nivel Intra-estructura.

ENTREVISTA: Ya (YC) Grupo: M.A.E.

JC Si, la primera es $f(x)=\int_0^x (t^2+5)dt$, ¿es funcional?
YC Funcional es como una función pero en vez de ir de los reales a, o sea, de R a R N, va como de R N a R, o sea, son mas bien como curvas de solución
JC De R N a R, en particular, mas generalmente podemos decir que va de un espacio vectorial a los numero reales, ¿si?, entonces la primera sera funcion o será funcional o ninguna de las 2
YC Pues no es funcional ¿o si?
JC No es funcional ¿Por qué?
YC Su dominio pues todos los reales ¿no?
JC OK, entonces es una función nada mas, bueno, numero tres, $f(x,x',t)=\sqrt{1+x'^2}$
YC Si es un funcional ¿no?
JC ¿Por qué?
YC Porque son las X es en T o sea, como, esta es longitud de una curva ¿no?
JC La longitud de una curva
YC Entonces es, esta se podría como optimizar no
JC Se podría optimizar
YC Si bueno, es un funcional, bueno, no se, si o sea yo digo que es un funcional
JC Pero ¿por qué aparece la x y la X'?
YC Mas bien por la T, bueno si porque, a ver, porque, bueno si para empezar porque es como la forma que usamos casi siempre y porque, aquí va como de X en T, y T es como si fuera R N o sea así
JC OK, entonces si seria funcional, a ver otra mas, $J(x)=\int_0^T (x^2+x'^2)dt$
YC Este yo diría que también es funcional
JC también es una funcional, ¿Por qué razón?
YC Pues primero igual la forma
JC Aparece X, X' y T
YC Aja y tiene T, o sea
JC Mmm, OK, entonces vamos a recordar la definición de una funcional es, ¿Cuál era?
YC Un espacio vectorial que va, que va, como una función
JC Una función que va de un espacio vectorial
YC A R
JC A los reales, OK, entonces vamos ir obteniendo el dominio y le rango de las expresiones que obtuvimos antes a ver si eso nos ayuda a ver si son funcionales o no
JC Bueno, que respuestas que se habían dado originalmente se cambiaron después de haber visto el dominio y el rango
YC La 4, si resulto que no era, la 1 no tenía respuesta entonces pues ya
JC Ya tiene respuesta, es decir ayudo el hecho de determinar el dominio y el rango
YC Si para asegurar además

JC Exactamente, entonces es bueno siempre el revisar la definición ¿verdad?, una funcional es entonces que cosa
YC Un conjunto de un campo de vectores que va este a los reales
JC Es decir es una función que esta definida sobre un espacio vectorial y que va a los reales, entonces es importante eso
JC Bueno entonces a ver, como un segundo ejercicio, dar tres ejemplos de funcionales justificando brevemente que lo sean
YC Aquí los escribo como quiera
YC Bueno el primero estoy usando la forma convencional o sea, bueno la que usamos normalmente
JC ¿Que dice?
YC X mas X' al cuadrado donde X depende de T, entonces ya

En lo que respecta al concepto de funcional podemos observar que las respuestas comienzan con una definición de funcional a partir de la cual se llevan a cabo las acciones necesarias para determinar si una expresión matemática es o no es funcional, mostrando así que ha logrado interiorizar dichas acciones en un proceso que permite distinguir funcionales de cualquier expresión matemática.

JC Puede ser un caso particular, pero si sabes que es una integral de línea en general
YC No
JC No, entonces no sabes calcular integrales de línea,
YC No, me acuerdo que era eso de, bueno de calcular longitudes con integral, o sea, la longitud de la curva con una integral
JC Mmm
YC Pero así no me acuerdo más
JC OK; y ¿cómo podemos saber analíticamente que una función es una trayectoria?, o como se vería una trayectoria analíticamente, ¿cómo se escribiría un ejemplo de una función que represente una trayectoria?
YC Se puede escribir como en forma vectorial
JC A ver ¿cómo?
YC Este…, esta la puedo escribir como una función que me de cómo la longitud o lo puedo escribir como un funcional ¿no?, también,
JC Pero ahorita lo que queremos es una trayectoria nada más, por ejemplo ¿cómo se puede escribir una circunferencia?
YC Ah, OK,
JC A ver ¿cómo se puede escribir como trayectoria?
YC Pues como que es X cuadrada más Y cuadrada igual a l
JC A R al cuadrado, pero, ¿cómo podríamos describirla ahora en forma parametrica?
YC En forma parametrica es como ecuación
JC Las ecuaciones de cada una de las incógnitas variables
YC Mmm,
JC O sea, no te acuerdas bien de las ecuaciones parametricas, muy bien

Del párrafo anterior, podemos suponer que no tiene ni siquiera un tipo de concepción acción sobre los conceptos trayectoria e integral de línea.

JC OK, otra pregunta, dada la siguiente funcional $J(x)=\int_0^{40}\frac{-x'^2}{2}dt$, y condiciones iniciales X en 0 es 20 y X en 40 es 0, ¿podrías optimizarla?
YC Si, tengo que decir lo que hago o esta bien si después lo describo
JC Seria bueno si fueras describiendo como llegas a la solución porque quiero en base a eso hacer otro ejercicio
YC OK, aplico la ecuación de Euler que es como la condición necesaria de primer orden. …Al simplificar me quedó que era menos ½ de T mas 20
JC Menos ½ de T mas 20, o sea, un recta, y la trayectoria solución pero la funcional es un numero ¿no?,
YC Mmm
JC ¿Que valor da con esa trayectoria la funcional?
YC De acuerdo a la integral de esto
JC Hay que sacar nada mas X' y sustituirlo ¿no?
YC Menos 5
JC OK, ahora será un máximo será optima en el sentido de máximo, o en mínimo la trayectoria
YC Si, entonces, aplicamos el Hessiano…ay es que… No se puede porque es 0
JC Entonces, ¿qué podemos hacer?
YC Bueno el integrando de la funcional es una función cóncava
JC cóncava, entonces el resultado debió de ser, que la trayectoria resulta un
YC Es un máximo
YC Si. Puede ser el Hessiano o como en este caso, determinando la concavidad o convexidad del integrando o como vimos en el curso por la condición de Legendre
JC ¿Qué dice esa condición?
YC Que si $f_{x'x'}$ es positivo es mínimo y si es negativo máximo
JC Sólo que esa condición no es suficiente. De todos modos, si la aplicas ¿qué obtienes?
YC También es máximo.

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

Por lo que respecta a las condiciones suficientes de segundo orden, plantea más de una condición suficiente y lleva a cabo las acciones que permiten determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima mostrando que ha interiorizado dichas acciones en un proceso (un proceso para cada condición suficiente) mostrando coordinación entre ambos procesos (por ejemplo, menciona el Hessiano, el teorema de Legendre o la concavidad/convexidad), lo que nos lleva a suponer que ha encapsulado dichos procesos en un objeto. Por lo tanto suponemos que puede escoger la condición suficiente y llevar a cabo los procesos necesarios para determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima.

JC Exactamente es el criterio bajo el cual debemos de optimizar, bueno, ¿de que cambios específicos al considerar el intervalo de tiempo en un problema de

optimización dinámica surgen las condiciones de transversalidad?, y hay que graficarlos casos ¿no?
YC OK,
JC O sea, que cambios puede haber en el intervalo de tiempo
YC Que el tiempo era acotado
JC ¿Cómo serian las trayectorias ahí?
YC Aquí pueden ser una aquí, pueden ser cualquiera
JC Mmm, con el tiempo acotado, y luego, todas parten de 0 o no
YC Pues pueden partir de 0
JC Bueno en caso particular parten de 0 ¿no?
YC Mmm, pero no necesariamente
JC No necesariamente
YC Luego puede, el tiempo puede ser libre y esta acotada la X
JC Mmm, ¿cómo serian ahí las trayectorias?
YC Igual así a cualquier T
JC Mmm, o que otras son
YC Ah pues las dos pueden ser libres es esto así
JC Si en el tercer caso en que fueran libres o que todo estuviera perfectamente acotado ¿no?, que T y X de T estuvieran dadas
YC Si

Por lo que tiene que ver con las condiciones de transversalidad, en su respuesta explica su papel y expone los distintos casos geométricos que les dan origen, mostrando que ha interiorizado las acciones que permiten ubicar el origen de las condiciones de transversalidad desde un punto de vista geométrico en un proceso.

JC Luego una mas, vamos a continuar con ese problema de minimizar, la integral de T 0 a T 1 de la raíz de 1 mas X’ al cuadrado, bueno ¿cómo lo resolverías con lenguaje de calculo de variaciones?
YC Pues igual, bueno, sacando la ecuación de Euler, y luego,
JC Ecuación de Euler
YC Bueno no hay condiciones
JC Bueno vamos a suponer que nos dieran las condiciones iniciales ¿no?
YC Si
JC ¿Cómo se podría expresar este problema como un problema de control?
YC Sacando el Hamiltoniano
JC ¿Cómo se escribiría?
YC Es como una (inaudible)¿verdad?
JC ¿Es qué? perdón
YC Es como un Lagrangeano
JC Es muy parecido si, nada mas que ahí las variables, X’ no entra como variable eh
YC Es que la otra no me acuerdo que era
JC En lugar de la X’ se usa otra letra
YC Ah si sustituimos con cualquier otra con U
JC Que es la variable de control ¿no?
YC Si, si
JC Mas lamda por U pusiste
YC Este es que no, no es que esta mal pero no me acordaba como se hace

JC Después de plantear el Hamiltoneano, así como en calculo de variaciones planteamos la ecuación de Euler, en teoría de control ¿Qué condiciones deben de plantearse?
YC No me acuerdo
JC No te acuerdas las condiciones de primer orden, OK, en un problema de control como puedes saber cual variable es la de estado y cual es la de control, porque las letras pueden cambiar ¿no?
YC Si, pues la de control, o sea, esta representada como derivada, la de control es la X' luego si esta representada como derivada
JC OK,
YC Y la otra es la de estado

Por lo recién visto podemos suponer que no ha interiorizado las acciones para establecer la equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y otro de Control en un proceso, sin embargo, podemos suponer que ha logrado interiorizar las acciones que permiten distinguir a las variables de estado de las variables de control en un proceso, ya que da criterios específicos para distinguirlas.

En resumen podemos suponer que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre los conceptos: Trayectoria, Integral de línea y de equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y uno de Teoría de Control, que tiene un tipo de concepción proceso sobre los conceptos: Funcional, Condiciones de primer orden para resolver problemas de optimización en Cálculo de Variaciones, relación entre el proceso de optimización de una funcional y el integrando asociado así como la diferencia entre Variables de Estado y Variables de Control. Finalmente, suponemos que tiene un tipo de concepción objeto en los conceptos: Condiciones Suficientes de segundo orden para determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima y en las Condiciones de Transversalidad. Por otro lado, no establece relaciones importantes entre los distintos conceptos que conforman su esquema de Funcional, por lo que podemos suponer que dicho esquema se encuentra a nivel Intra-estructura.

A continuación las entrevistas al grupo de Optimización:

Entrevista a Sa (SR) Grupo: Optimización

JC Dadas las siguientes expresiones determinar cuales son funcionales y cuales son únicamente funciones, o si no son funciones ni funcionales, también decirlo. La primera expresión seria $f(x)=\int_0^x \left(t^2+5\right)dt$
SR Si, no se, las funcionales este, en general no se, siento que dependen normalmente van de 2 parámetros ¿no?, como lo es en calculo de variaciones llevas X, X', U, variables de control, esta parece mas como en terreno fundamental de calculo, no se, yo pensaría la primera que es una función
JC O sea una manera de distinguir si es funcional seria con que aparezcan X y X' ¿ya con eso?

SR Pues yo así la diferenciaría, o sea si esta, lo primero que me viene a la mente es el teorema fundamental del calculo
JC Vamos a dar la definición formal de funcional
SR Si
JC ¿Tú te acuerdas de ella?
SR No, no mucho
JC A ver, una funcional es una función, que va de un espacio vectorial normado en los numero reales ¿si?
JC EN el primero
SR Ah en el primero, este
JC En el de…
SR El dominio de los reales
JC Aja
SR Y también es una integral que da los reales también en la imágen
JC Aja, ¿puede ser funcional?, cumple con la definición de funcional o no, o sea decimos que el dominio son los reales, ¿los reales son un espacio vectorial?
SR Si, ¿no?
JC Bueno los reales son un campo ¿no?
SR Si
JC Pero, ¿son un espacio vectorial?
SR Si ¿no?
JC En ¿cuales se cambiaron de opinión?
SR Cambie de opinión en la 2, en la 4 y en la 1 me quede con dudas
JC OK, entonces hubo un cambio de opinión (Nota: el cambio de opinión fue debido a la definición de funcional, mientras que las dudas se debieron a no poder determinar si el dominio era o no espacio vectorial)
SR Si
JC ¿Me puedes dar un ejemplo de 2 funcionales?
SR De 2 funcionales
JC Un ejemplo de 2 funcionales, y si nos vas diciendo fuerte lo que estas haciendo mejor
SR Me estoy tratando de acordar de la, ah ya me acorde, de uno de los casos así mas común, este seria
JC ¿Qué dice?, la integral…
SR $J(y)=\int_0^B \sqrt{1+y'^2}\,dt$. Es un funcional, o sea, escoges el espacio de funciones diferenciables y la conviertes a una integral ahora ya entiendo mucho, ahora ya entiendo porque siempre es una integral para que vayas a los reales
JC No es necesario que sea integral ¿no?
SR Si, no, no es necesario pero me refiero que ahora entiendo un poquito mas de
JC A ver entonces otro ejemplo
SR Otro ejemplo,
JC Entonces la expresión seria
SR $J(x)=3x+x'$

Por lo que tiene que ver con funcional, da su definición (parcialmente correcta desde un punto de vista matemático) y en base a dicha definición hace las acciones para determinar si una expresión matemática en general es o no es funcional, mostrando de esta manera que ha interiorizado dichas acciones en un proceso que

permite determinar si una expresión matemática en general es o no es funcional. Hay que enfatizar, sin embargo, que si parte de una definición no correcta sus resultados desde un punto de vista matemático pueden ser erróneos, pero este aspecto no es el que nos interesa en el presente análisis. En sus respuestas también podemos percibir que no ha logrado interiorizar todas las acciones que permiten distinguir a un Espacio Vectorial en un proceso contra lo que habíamos supuesto antes de iniciar el curso.

JC Si queremos maximizar o minimizar, encontrar el máximo o el mínimo de la siguiente funcional, $J(x)=\int_0^{40}\frac{-x^2}{2}\,dt$, sabiendo que X en 0 vale 20 y X en 40 vale 0, ¿podrás optimizar esta funcional?
SR Creo que si
JC ¿Qué s lo que harías?
SR Primero lo que decimos tomar el integrando, después busco la condición de primer orden a partir de la ecuación de Euler ¿verdad?, que es F de X menos D entre D T por F X punto igual a 0
JC Esa es la ecuación
SR De Euler
JC De Euler ¿verdad?, OK; es la condición necesaria
SR Es la condición necesaria, exacto, para poder hablar de un optimo ¿no? Entonces es relativamente sencillo encontrar esto ¿no?, es integrar X punto es igual a una constante X D T, ya seria a la constante por T mas una constante nuevamente de integración ya tienes las dos condiciones, entonces con dos condiciones y dos incógnitas vas a encontrar X, cuando X vale 0, tienes que vale 20 y que es C 1, y este cuando X vale 40sabes que es 0, entonces tienes que, ya sabes que C 1 es 20, entonces tienes 20 T 40 C es 0, entonces sabes que C 0 es igual a menos 20 entre 40 que es menos ½, entonces concluyes que la trayectoria optima que minimiza o maximiza el, la funcional va a ser X 0 es menos ½ D T mas 20, es una recta
SR Esta es la recta que maximiza o minimiza a
JC ¿Maximiza o minimiza?
SR Entonces voy a tener que sacar la derivada de, F respecto a X punto, X punto
JC ¿Lo vas a hacer con la condición de Legendre?
SR Este, si o sea, así lo calculas, pero nos explicaba la maestra pero es el criterio que uso para saber si es un máximo o un mínimo
JC ¿Qué harías si no funcionara este criterio?
SR Pues yo creo que checariamos la función ¿no?
JC ¿En qué sentido?
SR Si es cóncava o convexa. Si fuera X cuadrada y se sabe que s una parábola y si es un negativo, yo sabría que es un máximo
JC Entonces, en este caso, ¿que obtienes?
SR Por la condición de Lagrange es un máximo
JC ¿No funciona el Hessiano? ¿Verdad?
SR No funciona, porque la función es lineal.
JC¿ Que otro criterio se puede aplicar?
SR No se, puedes tantear
JC ¿Cómo?
SR Meterías la… Otras trayectorias

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

Por lo que respecta a las condiciones suficientes de segundo orden, plantea más de una condición suficiente y lleva a cabo las acciones que permiten determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima mostrando que ha interiorizado dichas acciones en un proceso (un proceso para cada condición suficiente) mostrando coordinación entre ambos procesos (por ejemplo, menciona el Hessiano, el teorema de Legendre, la concavidad/convexidad e incluso comparando con otras trayectorias), lo que nos lleva a suponer que ha encapsulado dichos procesos en un objeto. Por lo tanto suponemos que puede escoger la condición suficiente y llevar a cabo los procesos necesarios para determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima.

JC Bueno a ver uno mas, otra vez con el mismo problema, minimizar $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+x'^2}\,dt$
SR Si
JC Y las condiciones serian X en T 0, digamos que es X 0, y X en T 1, X 1, y eso nada más para que se vea que son dos puntos
SR Si
JC Bueno ya habíamos visto intuitivamente que el resultado cual es
SR La recta
JC La recta ¿no?, bueno este es un problema que se puede resolver pues con la ecuación de Euler otra vez
SR Mmm
JC En cálculo de variaciones ¿verdad?
SR Si
JC Pero también se podría pasar a un problema de control
SR En teoría de control
JC Si, como podríamos resolverlo como problema de control
SR Pues que metas a la X punto la definieras como U
JC Mmm, y ahora como se escribiría ya el problema, el Hamiltoniano, ¿como se escribiría?
SR Seria, U cuadrada mas uno, más lambda por U
JC ¿Y las condiciones?
SR Condiciones de primer orden tendrías que satisfacer optimizar el Hamiltoniano con respecto a U y aquí es H respecto a u igual a cero, lamda punto o sea igual a menos H de X y X punto o sea restricción o sea H de lamda
JC Mmm, y ya con eso se resuelve el problema ¿no?
SR Si

En cuanto a la equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y otro de Teoría de Control, lleva a cabo las acciones para determinar las condiciones necesarias en ambas ramas de la optimización dinámica mostrando que ha interiorizado dichas acciones en un proceso (un proceso para cada rama), coordinando ambos procesos y

encapsulándolos en un objeto que permite establecer la equivalencia entre ambas ramas de la optimización dinámica.

JC Muy bien, ¿como distingues la variable de estado de la de control?

SR Bueno es la que tú controlas ¿no?, el consumo, y ya a partir de tu consumo determinas tu capital

JC Y ¿analíticamente como se podría ver cual es la de estado y cual es la de control?

SR Justamente que es X punto, la derivada ¿no?, es decir, la derivada es el ritmo ¿no? Y el ritmo es con lo que se puede controlar, ya sea el ritmo de gasto, de consumo de pesca, de sacar el petróleo

JC De lo que sea ¿no?, entonces donde esta la derivada ahí esta la variable de control

SR OK

En cuanto a la diferencia entre variable de estado y variable de control, da la definición e indica distintas acciones que se pueden tomar para distinguirlas, mostrando que ha interiorizado dichas acciones en un proceso (varios procesos diferentes de acuerdo a las acciones tomadas) y que ha logrado coordinar dichos procesos en un objeto que permite distinguir en general entre ambas variables.

JC ¿Tu sabes de donde surgieron las condiciones de transversalidad?

SR Las condiciones de transversalidad

SR O sea una condición de transversalidad es bueno, yo quiero alcanzar ciertos puntos

JC Aja

SR Entonces cual es la trayectoria a partir de lo que tengo a lo que quiero llegar, cual es la trayectoria que me optimice, o minimice o maximice ¿no?

JC Ahí esta dado el tiempo ¿verdad?

SR El tiempo, ahora a lo mejor lo que no me interesa es el tiempo, a lo mejor el tiempo no es lo que me interesa,

JC Mmm

SR A lo mejor yo quiero llegar a un cierto nivel de capital sin importar el tiempo, entonces cual es la trayectoria que debemos seguir con respecto a mis decisiones

JC Para llegar a eso ¿no?, no me importa el tiempo

SR Libre que es lo que mejor optimizaría todo.

Por lo que tiene que ver con las condiciones de transversalidad, en su respuesta explica su papel a través de un ejemplo. Sin embargo, no nos proporciona elementos suficientes que nos permitan suponer que ha interiorizado las acciones que permiten ubicar el origen de las condiciones de transversalidad en un proceso.

JC Bueno y finalmente, ¿tú sabes lo que es una integral de línea?

SR Integral de línea, no

JC ¿Cuál es la representación analítica para una trayectoria?

SR Una función X de T. No sé más.

De lo anterior, podemos suponer que tanto el concepto de trayectoria como de integral de línea no forman parte de su esquema.

En resumen podemos suponer que tiene un tipo de concepción proceso en los conceptos: Funcional y Condiciones de primer orden para resolver problemas de Optimización

Dinámica. Suponemos que tiene un tipo de concepción objeto en los conceptos: Condiciones suficientes de segundo orden para determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima, equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y otro de Teoría de Control, así como para determinar la diferencia entre una Variable de Estado y una Variable de Control. Sin embargo, no podemos suponer que ha interiorizado todas las acciones para determinar un Espacio Vectorial ni las condiciones de transversalidad..

En cuanto a su nivel de Esquema de Funcional, suponemos un nivel Intra-estructura, pues no muestra relaciones entre los distintos conceptos que forman parte de su esquema de funcional.

ENTREVISTA a Pa Grupo: Optimización

JC En caso de que sean únicamente relaciones también se pueden mencionar ¿verdad?, entonces la primera seria $f(x)=\int_0^x (t^2+5)dt$

Pa OK esta seria una función no un funcional, y como lo pensé es que no tiene ningún concepto de derivadas o sea casi siempre que pienso en un funcional pienso que tiene que estar este en T en X y en X' y aquí no veo nada de X' aquí adentro

JC …, luego la numero 3 dice $f(x,x',t)=\sqrt{1+x'^2}$

Pa OK, este ya tiene un poquito mas claro de funcional por lo de que depende de x de su derivada y de t, nada mas que estoy acostumbrado yo a verlas de los funcionales como una integral entonces esto si me brincaría un poco

JC Entonces ¿Qué seria?

Pa A primera vista yo diría que si es un funcional, pero nada mas por esto primero aunque lo segundo no me convence del todo

JC Tu te acuerdas de la definición de funcional

Pa Funcional, era una no, no definición no

JC ¿Qué es una funcional?

Pa Es una función que va de algo a los reales pero todavía no..., que va de talvez de x de x' y de t a los reales

JC De que va en general de un espacio vectorial a los reales ¿no?

Pa Aja, exacto

Pa No, ya, ya dude más

JC O sea hay duda de que es funcional, y la dudad es ¿por que no aparece la integral?

Pa Porque no aparece la integral, eso es lo primero que me falto

JC Sin embargo una funcional si la definimos como una función que va

Pa De un espacio vectorial a los reales

JC De un espacio vectorial en los reales pues cualquier función de varias variables seria funcional ¿no?

Pa Talvez tiene que tener este concepto de cambios, porque, bueno cuando empezamos a estudiar funcionales lo que vimos primero que nada era como iba cambiando y las mejores trayectorias para, pues no se caídas de cuerpos y cosas de este tipo

JC …, la cuatro dice $J(x)=\left(\int_0^5 x(t)^2, \sqrt{1+x'^2}\right)$

Pa Por definición seria al revés más bien como de un vector a los reales entonces simplemente como no cae en los reales por eso yo ya diría que no es funcional
la numero 5, $J(x)=\int_0^T (x^2 + x'^2)dt$
Pa OK, bueno eso ya parece mas como un funcional de los que hemos usado en la clase
JC Mmm
Pa Porque va, puede ser del vector de la x y a las x' hacia el real que sale de esta integral
JC Entonces claramente esta si es una funcional
Pa Si esa si es funcional
JC OK, y en base a los dominios que se sacaron aquí, dominios y rangos
Pa Mmm
JC Eh, ¿cambiarias alguna de las decisiones que habías tomado en el ejercicio uno?
Pa Mm, la tres que la había dudado un poco que si era funcional o no
JC Mmm
Pa Ahorita ya me convenzo mas de que es funcional, porque si va de un espacio vectorial a los reales
Pa También la dos por la definición también como es de un espacio vectorial a los reales este también la podría talvez cambiar, bueno pues con la tres si me quedo, la primera no porque va de los reales a los reales y la cuarta tampoco porque va de los reales a un espacio vectorial, entonces si acaso serian la dos y la tres que había dicho que no eran funcionales, ahorita ya talvez consideraría mas
JC Ya con la definición, o sea si sirvió el hecho de recordar…
Pa Claro
JC La definición y…
Pa Si porque antes me limitaba como que solo cuando viera X y X' y cosas así me limitaba nada mas a eso, ya después de recordar la definición como es mas amplia pues ya como que caben el dos y el tres en eso

Por lo que tiene que ver con funcional, da su definición (parcialmente correcta desde un punto de vista matemático) y en base a dicha definición hace las acciones para determinar si una expresión matemática en general es o no es funcional, mostrando de esta manera que ha interiorizado dichas acciones en un proceso que permite determinar si una expresión matemática en general es o no es funcional. Hay que enfatizar, sin embargo, que en el transcurso de la entrevista corrige adecuadamente la definición de funcional. De cualquier forma, este punto no importa para nuestro estudio.

JC ¿A una expresión analítica que sea una trayectoria?
Pa Una expresión analítica, pues no se, X de T es igual a X' mas T, por ejemplo
JC ¿Necesariamente tiene que involucrar la derivada?
Pa Para que sea una trayectoria si
JC ¿Si?
Pa Si, porque justamente la derivada es lo que esta diciendo de los cambios en el tiempo, y como el tiempo es lo que vas a medir en las trayectorias…
JC ¿Qué es una integral de línea, tu sabes?
Pa ¿Integral de línea?, no

Podemos suponer que no tiene ni siquiera una concepción acción de Trayectoria y de Integral de Línea.

JC Supongamos que queremos minimizar, la integral desde T 0 hasta T segundo de la raíz de 1 mas X' al cuadrado D T, queremos minimizar esto, lo que esta adentro lo que es el integrando, no se si recuerdes ¿que era?
Pa No
JC Eso mide la longitud de la curva
Pa OK
JC ¿Es una funcional esta o no es una funcional?
Pa Esto yo creo que si
JC ¿Por qué es una funcional?
Pa OK, el resultado de esto evidentemente es un real
JC Mmm
Pa Y viene de el espacio vectorial de la X' puede ser
JC De las funciones derivables ¿no?
Pa Aja
JC OK, ¿Cuál seria la solución optima?
Pa Bueno aquí era con la ecuación de Euler
JC Pero aquí intuitivamente
Pa Intuitivamente aquí es la recta ¿no?
JC A ver si la puedes dibujar entre dos puntos, entre dos puntos cualesquiera la distancia mas corta…, es la recta ¿verdad?
Pa Mmm,
JC Esa es la trayectoria, o sea…
Pa Es la trayectoria optima OK
JC A ver, supongamos que tenemos ahora la funcional $J(x)=\int_0^{40}\frac{-x'^2}{2}dt$, sabiendo que X en 0 vale 20 X en 40 vale 0
JC ¿Podrías optimizar esta funcional?
Pa Si
JC Por lo menos dejar planteado como seria
Pa OK, se hace con la ecuación de Euler ¿no?, es F de X, bueno la parcial en X menos, la parcial de X', bueno mas bien la derivada con respecto a T, y la parcial de X', aquí como no hay nada con respecto a X pues es nada y esto seria…, y luego es esto con respecto a T entonces seria menos X' a la 4, OK
JC Y ¿eso igual a que?
Pa A 0, perdón claro
JC Y eso se podría ya resolver ¿no?
Pa Aja
JC O sea habría que integrar…
Pa Integramos este las veces pertinentes que serian 4 y luego con las condiciones de primer, ¿quiere que la resuelva entera?
JC No, no
Pa OK la integramos entonces este cada vez que la vayamos integrando nos van a dar constantes de integración, y al final cuando ya tenemos, no se, X y mas todas las mas X pues este A mas X B y quien sabe que, ponemos las este, las condiciones de primer, digo las condiciones iniciales y con eso despejamos las, las constantes que nos quedan y ya
JC $J(x)=\int_0^{2}\left(12tx+x'^2\right)dt$
Pa Mmm

Pa OK, aquí la ecuación de Euler seria, con respecto a X seria 12 T, X' seria 2 X', menos 2 X'' igual a 0, OK esto seria esto es uno de mas, ¿hay condiciones iniciales o no?
JC Si, X en 0 vale 1 y X en 2 vale 17
Pa OK entonces aquí seria 12 T es igual a 2 X'', es este, entonces integro de los dos lados, 1 es igual a 2 X' mas C, y luego volviendo a integrar esto seria, X es igual a 2por X mas C X, y ya de aquí con las dos condiciones iniciales, ¿lo hago lo termino o ya no?
JC Mmm
Pa X en 0 es igual a1 entonces X en 0 es 1, entonces 1 es igual a 2 por 1 mas C mas D, y X en 2 es igual a menos 3 igual a C mas D, y la otra X en 2 es 17
JC …, ¿es máxima o mínima?
Pa Tendríamos que ver si es cóncava o convexa ¿no? o con el Hessiano que es F de X, X, F de X Y con X, X', F de X', X, F de X', X',…, 2, ahora tenemos que sacar el si es este positiva definida o negativa definida pero, esto siempre tiene que ser 0 ¿no? para que podamos este diferir algo o ¿no?

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

Por lo que respecta a las condiciones suficientes de segundo orden, plantea más de una condición suficiente y lleva a cabo las acciones que permiten determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima mostrando que ha interiorizado dichas acciones en un proceso (un proceso para cada condición suficiente) mostrando coordinación entre ambos procesos (por ejemplo, menciona el Hessiano, la concavidad/convexidad), lo que nos lleva a suponer que ha encapsulado dichos procesos en un objeto. Por lo tanto suponemos que puede escoger la condición suficiente y llevar a cabo los procesos necesarios para determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima.

JC Mmm, ese fue un ejemplo particular si, OK, ¿de que cambios específicos al considerar el intervalo de tiempo en un problema de optimización dinámica surgen las condiciones de transversalidad?, vamos a suponer diferentes horizontes de tiempo
Pa Aja
JC Primero era dado el tiempo de T 0 a T1, de que cambios que se hagan ahí surgen necesariamente condiciones de transversalidad
Pa De si esta dado o no el tiempo final
JC A ver si pudiéramos dibujar
Pa OK, puede ser si esta dado el tiempo de principio del tiempo del final, o si esta dado nada mas el tiempo del principio pero y el tiempo del final pero no donde acaba pues aquí en al función, o sea puede ser así, puede ser también que lo que esta dado es donde termina, donde empieza pero no esta dado el tiempo final entonces puede ser así, o así nada mas hasta acá, o así pero siempre llegando hacia este punto, ¿a eso es a lo que se refiere?
JC Exactamente, de ahí surgen necesariamente las condiciones de transversalidad ¿no?

Por lo que tiene que ver con las condiciones de transversalidad, en su respuesta explica su papel y expone los distintos casos en forma geométrica que les dan origen, mostrando que ha interiorizado las acciones que permiten ubicar el origen de las condiciones de transversalidad desde un punto de vista geométrico en un proceso.

JC Eh, bueno en un problema de control ¿como puedes saber cual es la variable de estado y cual la de control?
Pa La de control es la que tiene que ver con derivadas, o sea con variaciones y con cambios ¿no?
JC A ver por ejemplo
Pa No se, aquí pudiera ser la de control U es igual a X'
JC Mmm, esa seria la de control
Pa Aja
JC La que esta midiendo el ritmo esta controlando el ritmo con el que puede cambiar la X ¿verdad?
Pa De hecho aja seria el control

En cuanto a la diferencia entre variable de estado y variable de control, da la definición e indica distintas acciones que se pueden tomar para distinguirlas, mostrando que ha interiorizado dichas acciones en un proceso (varios procesos diferentes de acuerdo a las acciones tomadas) y que ha logrado coordinar dichos procesos en un objeto que permite distinguir en general entre ambas variables.

En resumen podemos suponer que tiene una concepción tipo proceso en los conceptos de Funcional,Condiciones de Primero y Segundo orden en Cálculo de Variaciones, las Condiciones de Transversalidad,así como para determinar la diferencia entre variable de estado y variable de control y que no tiene ni siquiera una concepción tipo acción sobre las Condiciones de Primero y Segundo orden en Teoría de Control y en las diferencias entre Cálculo de Variaciones y Teoría de Control. Por otra parte, no establece relaciones importantes entre los distintos conceptos que conforman su esquema de Funcional, por lo que podemos suponer tiene un esquema de Funcional a nivel Intra-estructura.

ENTREVISTA a MF. Grupo: Optimización

JC Inciso A $f(x)=\int_0^x (t^2+5)dt$
MF Bueno este, bueno voy a decir como la entendí cuando, si fueran X y, Y los vectores, digo los ejes seria a cada X le corresponde una Y así de simple
JC A ver la tercera dice $f(x,x',t)=\sqrt{1+x'^2}$
MF ¿1 mas X' al cuadrado?
JC Aja, eso será función llegara a ser funcional o ninguna de las dos, aquí se trata de pensar fuerte eh, dilo, di lo que pienses
MF Me puede repetir otra vez
JC SI dada la expresión $f(x,x',t)=\sqrt{1+x'^2}$
MF Aja
JC ¿será función?, ¿ será funcional? o no será ni función ni funcional y nos gustaría oír lo que estas pensando
MF No pues, que pienso a ver finalmente no se como hallarle
JC O sea la dejamos en duda esa todavía

MF Si

JC A ver otra mas: $J(x)=\left(\int_0^5 (x(t)^2\,dt), \sqrt{1+x'^2}\right)$ es un vector con dos componentes, la primera componente es la integral desde 0 hasta 5, integral desde 0 hasta 5

MF Mmm

JC De X de T al cuadrado D T coma la segunda componente seria la raíz de 1 mas X' al cuadrado ya se cierra todo ¿no?, esto es una función es una funcional o ninguna de las dos

MF No se, digo este, esta tiene que ver con al primera digo con la anterior pregunta ¿no? de raíz de 1 mas X' al cuadrado

JC Aparece otra vez si

MF Este, si en dado caso es función tengo duda todavía

JC ¿Esa integral es un numero verdad?

MF Mmm

JC Es un numero, y lo que dice de raíz de 1 mas X' al cuadrado para cada T también es un numero ¿no?

MF Si

JC O sea para cada x…

MF Mmm

JC Que van a ser funciones en este caso son xd T

MF Si

JC Le va a corresponder un par de números

MF Aja

JC Una pareja ordenada, entonces la pregunta es ¿eso es una función?,… si no hay seguridad podemos pasar a otra

MF Este, es algo de que bueno no hay 100% seguridad pero también no hay tanta desconfianza

JC Que pasaría si dijéramos a ver una expresión más

MF Mmm

JC $J(x)=\int_0^T \left(x'^2+x^2\right)dt$

MF Mmm

JC …, Eso ¿a que se parece?

MF Se parece a igual a un número

JC ¿Esas expresiones no las vieron en clase?

MF Eh no, no, hemos visto

JC Bueno a ver una siguiente pregunta, ¿puedes darme dos ejemplos de funcionales?.., ya la habíamos definido una funcional es una función que va de un espacio vectorial normado en los números reales…, se puede pensar fuerte eh,…estas escribiendo.

MF $a_1x^m + a_nx^m + 1 + \dots$

JC Esas m ¿son exponentes o son órdenes de derivadas?

MF Son exponentes

JC Exponentes, y eso ¿Por qué es una funcional?

MF Porque, porque, porque tiene un dominio que va comprende a R N

JC ¿Comprende a R N?, O sea x a la m es un numero ¿no?,

MF Ah, es cierto, no, no lo puse ese mismo

Por lo visto hasta aquí, podemos suponer que no tiene ni siquiera un tipo de concepción acción sobre funcional, además de que muestra prácticamente una falta de coordinación

entre el concepto dominio de una función y la función en sí misma dentro de su esquema de función.

JC ¿Sabes lo que es una integral de línea?
MF No
JC ¿Tu sabes como se puede representar analíticamente una trayectoria?, ¿Cómo?
MF ¿Cómo?
JC Analíticamente una trayectoria
MF Aja
JC ¿Cómo se representa, como se puede representar analíticamente?, o ¿no?
MF No

Podemos suponer asimismo que no tiene ni siquiera un tipo de concepción acción sobre los conceptos trayectoria e integral de línea.

JC $J(x) = \int_0^{40} \left(\frac{-x'^2}{2} \right) dt$
MF Mmm
JC Sabemos que X en 0 vale 20 y X en 40 vale 0
MF Mmm
JC Entonces la pregunta es ¿podrás optimizarla?,… ¿Qué es lo que estas haciendo?
MF Este trato de, tratar de quitar la integral de, tratar de quitar la integral poniendo la derivada de J X con respecto de T igual a la derivada de la integral con respecto y ahorita …
JC ¿Te acuerdas de las ecuaciones, de las condiciones de primer orden?
MF Aja
JC Para resolver este tipo de funcionales, que generalmente se resumian con la ecuación de Euler, ¿vieron la ecuación de Euler?
MF Si
JC ¿Si?
MF Si
JC ¿Y por que no la aplicas?, o ¿no te acuerdas de la ecuación de Euler?
MF No, no es que no me acuerdo de la ecuación de Euler
JC ¿Es que perdón?
MF No, no me acuerdo
JC No te acuerdas del a ecuación de Euler
MF Si

Muestra también que no tiene ni siquiera una concepción tipo acción sobre las condiciones de primer orden en Cálculo de Variaciones.

JC OK, ¿tu te acuerdas, si sabes este de donde vienen las condiciones de transversalidad?, ¿de que problema surgen las condiciones de transversalidad?, tu sabes que por ejemplo a nosotros nos dan un intervalo de tiempo
MF Aja
JC Por ejemplo esta integral esta funcional que acabamos de definir dice de 0 a 40
MF Aja
JC Es un intervalo de tiempo ¿verdad?
MF Si
JC Pero el tiempo podría tener algunas variantes ¿no?

MF Mmm
JC Por ejemplo el tiempo podría estar fijo y la por ejemplo la X para esa T dada o el tiempo libre la X D T dada o la X D T libre y la T dada o las 2 libres, ¿si te acuerdas de eso o no?
MF Algo
JC Si, ¿cómo podrías dibujar las posibilidades?, las diferentes posibilidades entre T libre X D T dada etcétera ¿no?, o bien si quieres decirlo oralmente de donde vienen las condiciones de transversalidad nada mas
MF Eso ¿en que calculo lo vimos?

Por lo recién expresado podemos suponer que no tiene ni siquiera un tipo de concepción acción sobre las Condiciones de Transversalidad.

JC No te acuerdas o sea, este ¿tu sabes en un problema de control como distinguir a la variable de estado de la variable de control o no?
MF No
JC No, y sabes plantear un problema pasarlo de calculo de variaciones a teoría de control
MF Perdón no hemos visto teoría de control
JC No han visto teoría de control nada ¿han visto el Hamiltoniano?
MF No eso si no

Podemos suponer asimismo que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre la diferencia entre Cálculo de Variaciones y Teoría de Control o entre Variable de Estado y Variable de Control, ni sobre condiciones de primer orden en Teoría de Control.

En resumen podemos suponer que no tiene ni siquiera una concepción tipo acción en todos los conceptos que formarían su esquema de funcional, por lo que tal esquema no lo ha llegado a empezar a construir.

ENTREVISTA a Al Grupo: Optimización

En la respuesta a la primera pregunta, Al considera que para ser funcional se requiere únicamente que el dominio sea un espacio de funciones. Para corroborar esta apreciación le preguntamos: “¿tu sabes lo que es una funcional?”, su respuesta fue: “Si eh se podría decir en términos sencillos que es una función que tiene como argumento una función, en términos más formales es una, es una función que toma como elementos, eh,eh que toma como, perdón, que toma como argumentos elementos de un espacio vectorial, en este caso puede ser un espacio vectorial de dimensión infinita como es el caso de, de funciones continuas o no se el caso de eh, del espacio de funciones continuas por ejemplo.”De esta respuesta nos damos cuenta de que únicamente se fija en el dominio, sin embargo, ahí también solo considera espacios de funciones y no espacios vectoriales normados en general. Podríamos suponer que no recuerda bien la definición de funcional, pero recuerda ejemplos de funcionales vistas en clase.

Debido a que sólo se fija en el dominio para definir una funcional, en seguida le preguntamos: “Y el rango tiene alguna limitación, o basta con eso?”, su respuesta fue: “Eh, ¿el rango de la funcional?, pues puedes imponerle una limitación pero generalmente como, lo tomamos como hem en optimización dinámica es de que el rango de las funciones va de, el dominio tiene ciertos valores, este va de cierto valor a cierto valor y pues en términos generales eh, no no especificamos ningún rango para la funcional me parece”. Es decir, interpretamos que de los ejemplos de funcional que recuerda, le llevó a pensar que el dominio era un espacio de funciones y de éstas, conoce funciones con rango en los reales o en un espacio vectorial (euclidiano) por lo que piensa que una funcional no tiene ninguna restricción en su rango. Si observamos más lo que puede construir de lo que no puede, podemos reconocer que aunque evidentemente tiene problemas con la definición, también podemos suponer que al menos tiene una concepción acción del concepto de funcional porque sí establece una relación con el concepto de función y aunque de inicio comienza con casos particulares de espacios vectoriales (espacios de funciones). Por otra parte, el tratar de definir la funcional a través de los ejemplos vistos en clase, da evidencias de una acción sobre objetos específicos, pero también es cierto que no ha interiorizado estas acciones, pues no ha sido capaz de generalizar de los ejemplos particulares a la definición general.

Sin embargo, cuando se le recordó la definición formal de funcional como cualquier función con dominio un espacio vectorial normado y rango los números reales, su respuesta fue: “Ah entonces, perdón, ya entendí la pregunta, entonces si, generalmente sus rangos son los reales porque toma una a una, a su argumento lo mapea a los reales generalmente”. Pese a que recordamos la definición de funcional, Alejandro en su respuesta no muestra una concepción tipo proceso ya que al volver sobre el rango dice: “…generalmente sus rangos son los reales…”. Para profundizar en este punto le preguntamos: “¿A ver por ejemplo una función de varias variables podría ser funcional?”y su respuesta fue: “¿una función de varias variables?¿Así como de RM a R?”, le respondimos: “De RM en R”, a lo que respondió: Este, eh, no. Le reiteramos: “¿Esa no puede ser una funcional?”, su respuesta fue: “no”, insistimos: “¿Es decir que para que sea funcional necesariamente su dominio tiene que ser un espacio de funciones?”, a lo que respondió: “No, tiene que ser elementos de un espacio vectorial pero por ejemplo, ah bueno, pues toma una función de, eh si, si podría ser porque toma entonces elementos del espacio vectorial R y los manda a R una función de varias variables”, le aclaramos “R no es espacio vectorial”. De aquí supusimos que del concepto de funcional no tenía una concepción proceso y que trataba de dar explicaciones a través de los ejemplos que vio en clase. El tipo de concepción sobre el concepto de Espacio Vectorial es el que habíamos esperado cuando hablamos de los conceptos que un estudiante había construido. Un ejemplo en donde se muestra que no tiene una concepción proceso sobre el concepto de Espacio Vectorial es cuando se le pide: “determina si es funcional una integral (iterada) definida sobre un subconjunto de R2”y su respuesta es: “Eh no lo que pasa es que la razón por la que no es funcional es que no está tomando ningún elemento, de algún espacio vectorial…”, entonces le preguntamos: “¿El Plano no es espacio vectorial?”. Aquí podemos notar que no ha logrado interiorizar las acciones para determinar a un espacio vectorial lo que nos lleva a suponer que tiene una concepción acción sobre el concepto Espacio Vectorial. Aunque parcialmente (únicamente para espacios de funciones) relaciona correctamente el concepto de espacio vectorial con el de funcional (Con un tipo de concepción acción). Es importante mencionar este punto, ya que dentro de un esquema no sólo importa el tipo de concepción sobre cada concepto, sino las relaciones que el estudiante puede establecer entre ellos.

Para ver en función de qué estaba determinando si un objeto matemático era o no una funcional, le preguntamos: "¿En qué te estabas fijando tu para ver si era funcional?", respondió: "Pues básicamente que tomara este, independientemente de a donde lo mande, este que si tome, que el argumento o en este caso sea una función que sea un elemento de un espacio vectorial, o que, pues también en estos casos que cambie con respecto a otra variable T, por ejemplo"(puede apreciarse la no interiorización de las acciones que permiten distinguir funcionales en un proceso sobre el concepto funcional). Continuamos con una pregunta que tiene que ver con que para algunos estudiantes un objeto matemático es funcional si aparece la x y la x prima o aparece la integral respecto a t (tiempo). La pregunta que hicimos fue la siguiente: (continuación de la anterior: "¿En qué te estabas fijando tu para ver si era funcional?"): "O sea que aparezca por ejemplo la expresión X y la X prima", su respuesta fue: "Si que me de cuenta que realmente lo que está tomando como es una función o sea puede depender de t", entonces, reiteramos: "O sea como que eh para ti era funcional cuando aparecía X o X prima, pues había una función y su variación", a lo que respondió: "Eh, más bien que estuviera perfectamente claro que estoy tomando como elemento el espacio de funciones continuas o sea como espacio vectorial" (Vuelve a insistir en que el dominio sea un espacio de funciones), "por lo que si aparece X y X prima ayudaría a ver que estoy tomando un elemento del espacio de funciones".

Una observación interesante es que después de haber recordado y ejemplificado (con los ejercicios propuestos en la entrevista) el concepto de funcional, pudo primero cambiar correctamente algunas de las respuestas a la primera pregunta y fue capaz de dar ejemplos correctos de funcionales (en la pregunta tres) para poder corroborar (según el criterio dado en el mismo cuestionario) al menos un tipo de concepción acción del concepto de funcional. Es decir, como muchas veces sucede, el instrumento de validación se convirtió en un instrumento didáctico, que permitió observar durante la entrevista la modificación de la concepción del estudiantes, aunque en este caso, no se llegó a observar la interiorización de las acciones, sí algún indicio de que el estudiante pudiera estar en vías de interiorización. Se ha encontrado en otros estudios que algunos tipos de entrevista proporcionan oportunidades de reflexión a los estudiantes y se puede ver en ellos cómo los estudiantes aprenden de ellos. En términos de la Teoría APOE ayudan a interiorizar alguna acción en particular o a encapsular algún proceso.

Un concepto que cuando elaboramos la Descomposición Genética, pensamos que había sido construida por los estudiantes fue el concepto de Trayectoria. Preguntamos:"¿Tu sabes como se escribe analíticamente una trayectoria?", su respuesta fue: "Este, ¿ecuaciones polares?, digo, perdón ¿en ecuaciones paramétricas? En el caso de Alejandro, respondió de acuerdo a lo esperado sobre el concepto de trayectoria.

Otro concepto que supusimos que los estudiantes tenían construido es el de integral de línea, preguntamos: "Ahora este, ustedes, este, bueno, no sé si en este curso o en otro, ¿tu has visto alguna vez el concepto de integral de línea?, su respuesta fue: "Eh ¿integral de línea? Mmm…pues ahorita me viene vagamente, entonces preguntamos: "¿A ver dime que es una integral de línea?", a lo que respondió: "Bueno, lo que pasa es que en Cálculo "IV"vimos lo que son formas diferenciales, entonces sí, creo ahorita si estoy este conjeturando que una integral de línea podría ser la integral de una forma 1 sobre una variedad de este es la integral de una forma 1 sobre una variedad de dimensión 1", entonces preguntamos: "¿Alguna de las funcionales que vieron en el semestre las podrías asociar con una integral de línea?"a lo que respondió: "A ver si una diferencial si, si es más o menos eso que digo entonces una diferencial de una forma 1 sería una diferencial común y corriente de cualquier función y sería bajo una pues, pues yo creo que sí pero, es que no estaría muy seguro porque una integral de línea si es integral a una diferencial sobre una sobre una curva ¿no? En el espacio, este", interrumpimos: "Bueno, no te acuerdas ahorita bien", Alejandro asintió: "”No, no me acuerdo bien de eso ahorita. Como podemos apreciar, su comentario no revela ni siquiera la memorización de integral de línea. De aquí podemos suponer que no tiene ni siquiera una concepción acción de Integral de Línea.

En cuanto a resolver problemas de optimización, en lo referente a la aplicación de las condiciones necesarias de primer orden en Cálculo de Variaciones (Ecuación de Euler) la aplicó correctamente (de memoria), dijo que no sabría deducir la fórmula, pero que cuando se vió en clase entendió los argumentos. Según los criterios establecidos en la entrevista podríamos suponer una concepción acción de las condiciones de primer orden en el Cálculo de Variaciones. Por lo que respecta a las condiciones necesarias de primer orden en Teoría de control, escribió correctamente el Hamiltoniano, pero no recordaba del todo, las restricciones, por ejemplo, escribió: $¿-H_{\lambda} = \lambda'?$ Podríamos suponer una cognición acción de este concepto en base a los criterios de la entrevista. (Puede plantear y resolver en forma sólo memorística estos problemas).

Las condiciones suficientes de segundo orden fueron respondidas mostrando haber logrado interiorizar la acción de obtener la matriz Hessiana y clasificarla en términos de definida (semi-definida), positiva (negativa), análogamente a lo hecho en Cálculo. Además mencionó las condiciones de Legendre y dijo como aplicarlas sin recurrir a estímulo externo. Esto nos lleva a suponer una concepción proceso de este concepto según los criterios establecidos en la entrevista.

Con el fin de ejemplificar lo dicho sobre las condiciones necesarias de primer orden y las condiciones suficientes de segundo orden, podemos revisar las respuestas que dio Alejandro ante las siguientes preguntas: Empezamos pidiéndole que resolviera el siguiente ejercicio:

$Opt \int_0^{40} \left(\frac{x'^2}{2} \right) dt$. Entonces escribió correctamente la Ecuación de Euler y el sistema de ecuaciones diferenciales asociado y comentó: "Listo, es este la trayectoria óptima sería $\frac{-1}{2} t + 20$", entonces le preguntamos: "¿Cómo sabes si es máxima o mínima?"a lo que respondió: "No me dijo que, no me dijo que era, ¿verdad?", le respondimos:"No", Alejandro continuó: "No, entonces, o sea en este caso por la condición suficiente de segundo orden, me parece que es la condición de Legendre", preguntamos entonces: "¿Cuál es la condición de Legendre?", respondió: "Bueno que en este caso $f_{x'x'}$ lo determina…o nada más chequé el signo del Hessiano y como todos los menores principales me salieron de orden impar me salieron menores o iguales a cero y los de orden par me salieron mayores o iguales a cero", le preguntamos: "¿Da alguna información el Hessiano?", respondió: "Como es, este, negativa semidefinida, entonces bueno como esta matriz es negativa semidefinida entonces sería un máximo", preguntamos:"¿y con el otro criterio?", respondió: "Este, también, como chocando el signo de $f_{x'x'}$ que es negativo, pues vale -1, es máximo.

Sobre las condiciones de transversalidad mostró una concepción de tipo acción ya que mencionó que están relacionadas por las condiciones iniciales y finales. Sobre el origen de dichas condiciones respondió: “Pues de establecer condiciones tal que bajo esas, bueno esas cosas aquí no te restringen porque cada problema de las condiciones de transversalidad es un problema menos restringido este eh que al final de cuentas la trayectoria sigue siendo óptima ¿no? cuando la encuentres, te da condiciones, las condiciones de transversalidad te van a dar este las condiciones iniciales y finales tales que las trayectorias van a seguir siendo óptimas”.Podemos suponer en base a los criterios dados para la entrevista que, aunque no es muy claro en su respuesta, mencionó como dijimos al principio de este párrafo la relación existente entre dichas condiciones y las condiciones iniciales y finales, por lo que podemos suponer que tiene una concepción acción sobre las condiciones de transversalidad.

En cuanto a la diferencia entre variable de estado y variable de control, cuando preguntamos: “¿Tu sabes como distinguir la variable de estado de la de control?”, su respuesta fué: “Dependería del problema ¿no? que te pongan”y añadió: “Por la ecuación de transición, generalmente te van a poner que la variable de estado depende de la de control”. Aquí podemos apreciar una concepción tipo acción porque su reconocimiento depende de una acción sobre una señal externa: la ecuación de transición. De manera que si no tiene dicha ecuación, no sería posiblemente capaz de distinguirla.

Al considera que el concepto de funcional es más complicado de lo que había pensado antes de esta entrevista. Sugiere que en clase se vean muchos más ejemplos de lo que es y de lo que no es una funcional. Dice que los problemas de optimización tanto en Cálculo de Variaciones como en Teoría de Control los resuelve utilizando memorísticamente las fórmulas, pero que entendió la deducción de las mismas, pero no podría repetir ni las ideas detrás de la deducción. Considera que no tenía muy claro el concepto de funcional antes de esta entrevista, pero a través de ella pudo entender mejor este concepto.

En resumen, de los elementos que constituyen su esquema de funcional aparece el concepto de espacio vectorial en concepción tipo acción, la de funcional en concepción tipo acción, la de integral de línea ni siquiera como concepción tipo acción (es decir, ni siquiera forma parte de su esquema), las condiciones necesarias de primer orden con concepción tipo acción y las condiciones suficientes de segundo orden con un tipo de concepción proceso.

Sobre el concepto de Trayectoria podemos suponer una concepción proceso.

Además, por sus respuestas, podemos suponer que, las relaciones entre los conceptos que constituyen su esquema de funcional no están sólidamente relacionados entre sí, en el sentido de que Alejandro sabe que esas nociones entran en juego en la solución de problemas de optimización pero no entiende del todo cuál es el papel que juega cada uno de esos elementos en la solución del problema y por qué son necesarios, puesto que aparentemente puede resolver los problemas únicamente de manera memorística y no puede especificar claramente los elementos que entran en juego en esa solución. De ahí, que su esquema estaría a un nivel que podríamos denominar intra-estructura.

RESULTADOS ENTREVISTA EN FORMA MATRICIAL

GRUPOS M.A.E. Y OPTIMIZACIÓN

In. Est.	Func	C.P. O	C.S.O	C. Tran	Eq v y c	D. E. C.	T e I.L.
Ar	2	2	3	2	1	2	0
Mi	2	2	3	2	2	2	0
Ya	2	2	3	2	0	2	0
Ma	1	2	2	2	1	2	0
Pa	2	2	2	2	2	0	0
Sa	2	2	3	2	3	3	0
Al	1	1	2	1	2	2	0
MF	0	0	0	0	0	0	0

GRUPO M.A.E.

In. Est.	Func	C.P.O	C.S.O	C.Tran	Eq v c	D.E.C.	T e I.L.	Prom
Ar	2	2	3	2	1	2	0	1.71
Mi	2	2	3	2	2	2	0	1.86
Ya	2	2	3	2	0	2	0	1.57
Ma	1	2	2	2	1	2	0	1.43
Prom	1.75	2	2.75	2	1	2	0	1.72

GRUPO OPTIMIZACIÓN

In. Est.	Func	C.P.O	C.S.O	C.Tran	Eq v c	D.E.C.	T e I.L.	Prom
Pa	2	2	2	2	2	2	0	1.71
MF	0	0	0	0	0	0	0	0
Sa	2	2	3	2	3	3	0	2.14
Al	1	1	2	1	1	2	0	1.14
Prom	1.25	1.25	1.75	1.25	1.5	1.75	0	1.66

GRUPO M.A.E. (Tomando en cuenta a los tres mejores estudiantes)

In. Est.	Func	C.P.O	C.S.O	C.Tran	Eq v c	D.E.C.	T e I.L.	Prom
Ar	2	2	3	2	1	2	0	1.71
Mi	2	2	3	2	2	2	0	1.86
Ya	2	2	3	2	0	2	0	1.57
Prom	2	2	3	2	1	2	0	1.81

GRUPO OPTIMIZACIÓN (Tomando en cuenta a los tres mejores estudiantes)

In. Est.	Func	C.P.O	C.S.O	C.Tran	Eq v c	D.E.C.	T e I.L.	Prom
Pa	2	2	2	2	2	2	0	1.71
Sa	2	2	3	2	3	3	0	2.14
Al	1	1	2	1	1	2	0	1.14
Prom	1.67	1.67	2.33	1.67	2	2.33	0	1.66

CLAVES

C.N. 1er. O.: Condiciones Necesarias de primer orden ; 1: Tipo de concepción acción

C.S. 2º.O.: Condiciones Suficientes segundo orden; 2: Tipo de concepción proceso

C. Tranvs: Condiciones de Transversalidad; 3: Tipo de concepción objeto

7.6 ANÁLISIS MUESTRAL SOBRE LA EVOLUCIÓN DE LOS CONCEPTOS BAJO ESTUDIO

Este análisis pretende determinar la evolución del tipo de concepción de una muestra de cuatro estudiantes del grupo con el que se trabajó a lo largo del semestre sobre los cuatro conceptos fundamentales bajo estudio: Funcional, Condiciones Necesarias de primer orden, Condiciones Suficientes de segundo orden y Condiciones de Transversalidad.

Para alcanzar nuestro objetivo, a continuación presentamos un resumen de las respuestas que los cuatro estudiantes de la muestra (Yanaí, Arlette, Magali y Miguel) dieron sobre cada uno de los conceptos mencionados en los Cuestionarios y la Entrevista. Habría que señalar que en ocasiones sucedió que no hay ninguna pregunta sobre algún concepto en alguno de los Cuestionarios. Por ejemplo, las Condiciones Suficientes de segundo orden o las Condiciones de Transversalidad no se estudian al principio del curso por lo que aparecerán las respuestas sobre estos conceptos a partir del Segundo Cuestionario y la Entrevista.

Debido a que la Entrevista es un instrumento de análisis y por lo mismo sus resultados están reportados en “Análisis de la Entrevista”, en varias ocasiones no repetimos la respuesta textual que se dio a alguna pregunta (puede consultarse en el apartado recién mencionado) y únicamente mencionamos la conclusión que obtuvimos en dicha entrevista.

Es oportuno señalar también que la muestra utilizada para el presente análisis es la misma a la que se le realizó la Entrevista.

Al igual que hicimos con los anteriores cuestionarios, para facilitar la lectura, escribiremos a continuación todas las preguntas y luego sólo nos referiremos a ellas por su número. En este caso, cada número de pregunta corresponde al número de pregunta en cada cuestionario.

CUESTIONARIO

1) ¿Qué es una funcional? (Primer cuestionario)

Dadas 5 expresiones matemáticas justificar cuáles son funcionales y cuáles no. (Tercer cuestionario).

2) Condiciones Necesarias de Primer Orden en Cálculo de Variaciones

3) Condiciones Suficientes de segundo orden (Segundo cuestionario)

Condiciones Suficientes de segundo orden: a)¿Cuáles son ?, b) ¿Para qué sirven?, c) Aplicarlas al problema pedido. (Tercer cuestionario)

4) Condiciones de Transversalidad

Nota: Las preguntas que se hicieron en la entrevista junto con sus respuestas se colocarán al final de las preguntas a cada uno de los estudiantes cuando resulte oportuno.

A continuación las respuestas de los estudiantes a este cuestionario:

Nombre del estudiante: **Ya**

Aunque en su respuesta no dice nada acerca del rango y el dominio lo limita a curvas, de alguna forma está recordando la definición de funcional y dando algunas de sus características esenciales como son el hecho de ser función cuyo dominio (el que generalmente se estudia más en este tipo de cursos) es un conjunto de "curvas", por lo que podemos suponer que tiene una concepción acción sobre funcional.

Respuesta Primer Cuestionario:

"Un funcional es una función cuyo dominio está compuesto por curvas."

Respuesta Tercer Cuestionario:

Responde al concepto de funcional, aunque sin dar ejemplos o más explicaciones que la misma definición.
En el segundo inciso responde correctamente únicamente en dos respuestas por lo que no tenemos suficiente información para suponer que tiene más que un tipo de concepción acción sobre este concepto.

"Es una función que va de un campo vectorial a los reales."

Respuesta Entrevista:

JC Exactamente, entonces, ¿qué es una funcional?
YC Un conjunto de un campo de vectores que va este a los reales
JC Bueno entonces a ver, como un segundo ejercicio, dar tres ejemplos de funcionales justificando brevemente que lo sean
YC Aquí los escribo como quiera

En suma, podemos suponer que ha interiorizado las acciones en un proceso que le permite distinguir funcionales.

2) Condiciones Necesarias de Primer Orden en Cálculo de Variaciones

Primer Cuestionario

Hace acciones sobre la funcional para obtener la Ecuación de Euler e identifica ésta con las condiciones de primer orden. Identifica la ecuación resultante como una ecuación diferencial. Podemos suponer que el estudiante ha interiorizado estas acciones en un proceso que le permite identificar la ecuación diferencial que se

desprende del uso de la Ecuación de Euler para cualquier problema de optimización de este tipo.

Respuesta Primer Cuestionario:

“La Ecuación de Euler es una condición necesaria.”

(4) $V(x) = \int_0^2 (12t\,x + x'^2)\,dt$. s.a. $x(0)=0$ y $x(2)=17$

$f_x = 12t$ Ecuación de Euler: $12t - 2x'' = 0$

$f_{x'} = 2x'$ $12t = 2x''$

$\frac{df_{x'}}{dt} = 2x''$ $x'' = 6t$

Segundo cuestionario

Toma a la Ecuación de Euler como objeto y la relaciona con las condiciones necesarias de optimización, la plantea y hace acciones sobre la funcional para obtener la ecuación diferencial asociada, lo que nos lleva a suponer que ha interiorizado las acciones que entran en juego en la aplicación de cualquier problema de optimización dinámica en un proceso.

Respuesta Segundo Cuestionario:

“Es una condición necesaria.”

(2) $J[x(t)] = \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2 + 2xe^t)\,dt$

$f_x = 2x + 2e^t$ $f_{xx} = 2$

$f_{\dot{x}} = 2\dot{x}$ $f_{\dot{x}\dot{x}} = 2$

$\frac{df_{\dot{x}}}{dt} = 2\ddot{x}$ Ec. Euler: $2x + 2e^t - 2\ddot{x} = 0$

$\ddot{x} = x + e^t$

$\ddot{x} - x + e^t = 0$

Tercer cuestionario

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

Respuesta al Tercer Cuestionario:

$$f_x = 2x - 3t + 5\dot{x}$$

$$f_{\dot{x}} = -6\dot{x} + e^t + 5x$$

$$\frac{df_{\dot{x}}}{dt} = -6\ddot{x} + e^t$$

Ecuación de Euler: $2x - 3t + 5\dot{x} - (-6\ddot{x} + e^t) = 0$

$$f_x = 2x - 3t + 5\dot{x}$$

$$f_{\dot{x}} = -6\dot{x} + e^t + 5x$$

$$\frac{df_{\dot{x}}}{dt} = -6\ddot{x} + e^t$$

Ecuación de Euler: $2x - 3t + 5\dot{x} - (-6\ddot{x} + e^t) = 0$

En la entrevista nuestra conclusión fue: ***Podemos suponer que ha interiorizado las acciones para optimizar un problema en Cálculo de Variaciones en un proceso que ha logrado coordinar con el proceso de solución de la ecuación diferencial asociada y con el problema de control.***

3) Condiciones Suficientes de segundo orden

Segundo cuestionario

Plantea un tipo de condiciones suficientes de segundo orden y hace las acciones necesarias para aplicarlas al problema específico que se le planteó resolver, por lo que podemos suponer que tiene al menos una concepción acción sobre dichas condiciones.

Respuesta al Segundo Cuestionario:

b) $f_{xx} = 2 > 0$ y $f_{\dot{x}\dot{x}} = 2 > 0$

$|H| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \therefore x^*$ es un mínimo

Tercer Cuestionario

Plantea las condiciones suficientes de segundo orden y hace las acciones necesarias para aplicarlas a un problema de control, por lo que podemos suponer al menos una concepción acción sobre las condiciones suficientes de segundo orden.

Respuesta al Tercer Cuestionario

"Para determinar máximos o mínimos. $\begin{array}{l} H_u = x - 2u + \lambda \\ H_{uu} = -2 < 0 \Rightarrow x^* \end{array}$ es un máximo."

Respuesta Entrevista:

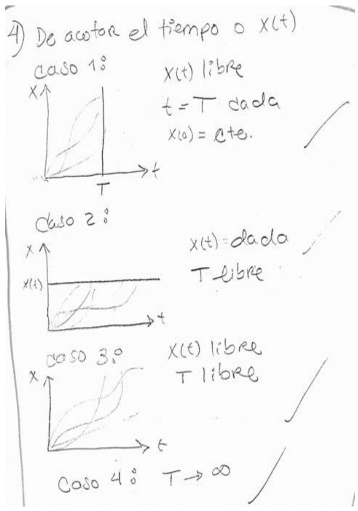
JC Entonces, ¿qué podemos hacer para determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima?
YC Si. Puede ser el Hessiano o como en este caso, determinando la concavidad o convexidad del integrando o como vimos en el curso por la condición de Legendre
JC ¿Qué dice esa condición?
YC Que si $f_{x'x'}$ es positivo es mínimo y si es negativo máximo
JC Sólo que esa condición no es suficiente. De todos modos, si la aplicas ¿qué obtienes?
YC También es máximo.

En cuanto a las condiciones suficientes de segundo orden plantea tres tipos equivalentes de condiciones (Hessiano, concavidad/convexidad y condición de Legendre) y hace las acciones necesarias para aplicarlas al problema que se le presenta para resolver, mostrando por un lado que ha interiorizado las acciones que le llevan a plantear y aplicar dichas condiciones en un proceso (uno por cada condición) y por otro lado, muestra una coordinación entre dichos procesos, que le permite decidir cuál de las condiciones suficientes aplicar ante cualquier problema de optimización de este tipo, encapsulando dichos procesos en un objeto.

4) Condiciones de Transversalidad

Responde graficando cada uno de los cuatro casos, asociándolos a sus respectivas representaciones analítica, coordinando de manera general los procesos geométrico y analítico para las condiciones de transversalidad, por lo que podemos suponer que ha encapsulado este proceso de coordinación en un objeto.

Respuesta al Segundo Cuestionario:



Tercer cuestionario

Después que en sus respuestas al cuestionario anterior desglosó dichas condiciones, en este cuestionario añade algo más sobre su papel. Si vemos sus respuestas desde un punto de vista global, podemos suponer que ha encapsulado el proceso de aplicación de las condiciones de transversalidad en un objeto que permite determinar propiedades del problema.

Respuesta al Tercer Cuestionario:

"Ayudan a determinar el valor de las constantes que resultan de resolver el problema de optimización."

Entrevista

JC ¿De que cambios específicos al considerar el intervalo de tiempo en un problema de optimización dinámica surgen las condiciones de transversalidad?, y hay que graficar los casos ¿no?
YC OK,
JC O sea, ¿qué cambios puede haber en el intervalo de tiempo?
YC Que el tiempo era acotado y X libre oel tiempo puede ser libre y esta acotada la X, o las dos pueden ser libres es esto así.

De todo lo dicho podemos suponer que ha interiorizado las acciones para determinar el papel de las Condiciones de Transversalidad en un proceso analítico que ha logrado coordinar con el proceso geométrico correspondiente y además ha logrado encapsular dichos procesos en un objeto que puede relacionar con la representación gráfica y que puede utilizar en la solución de problemas de optimización dinámica.

En suma podemos observar que a lo largo del curso el esquema de Y evolucionó de un esquema en el que las componentes estaban constituídas básicamente por acciones y procesos más o menos desligados entre sí (Nivel Intra-estructura) a un esquema en el que los componentes han pasado a ser procesos y objetos y en el que se observa mayor interrelación entre las componentes (Nivel Inter.-estructura).

Nombre del estudiante: **Al**

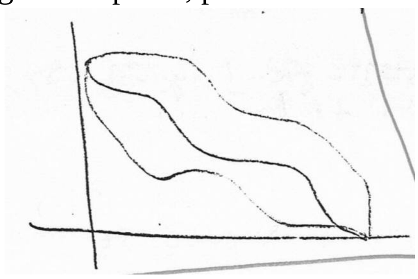
1)

Primer cuestionario

Por lo que respecta al concepto de funcional, establece su definición, pero no la aplica al no llevar a cabo las acciones que le permitirían determinar si una expresión matemática es funcional o no lo es. Ejemplos de dichas acciones serían en primer lugar observar dominios y rangos de las expresiones dadas, para poder determinar en base a la definición si dichas expresiones son o no son funcionales. Esto nos lleva a suponer que su respuesta al concepto de funcional está basada únicamente en la memoria, por lo que podemos suponer un tipo de concepción acción sobre este concepto.

Respuesta al primer Cuestionario:

"Un funcional $f\left(x(t)\right)J = \left[f\ t\ x + x\acute{}z\right]$ un funcional se encuentra en $\in$ V, cuyo dominio son curvas y el rango es un punto, puede estar en R^3, R etc. "



Tercer Cuestionario

Su respuesta involucra a todos los elementos esenciales de funcional y además en el segundo inciso reconoció correctamente 3 expresiones. Los errores que comete no dependen de su concepción de funcional.

Por lo anterior, podemos suponer que ha interiorizado las acciones para definir funcionales en un proceso.

Respuesta al Tercer Cuestionario:

"Una funcional es una función en la que su dominio se encuentra en un espacio vectorial normado como es por ejemplo un espacio de funciones y su rango está en los reales."

Entrevista: La conclusión que tuvimos en la entrevista respecto a este concepto fue:

Ha interiorizado las acciones para determinar cuándo una expresión matemática es o no funcional en un proceso, pese a que parte de sólo un caso particular de funcionales. Cuando se le da la definición completa de funcional, hace otras acciones que puede relacionar con las anteriores para determinar cuándo alguna expresión es funcional, por lo que podemos suponer que ha interiorizado las nuevas acciones para determinar funcionales en un proceso.

2)

Primer cuestionario

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

Respuesta al primer Cuestionario

"Si $J[x(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - 3x'^2 + x'e^t - 3tx + 5xx'\right)dt$ s.a.

$$x(0) = 1, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$f_x = 2x - 3t + 5x'$$

$$f_{x'} = -6x' + e^t + 5x$$

$$\frac{df_{x'}}{dt} = -6x'' + 5x' + e^t$$

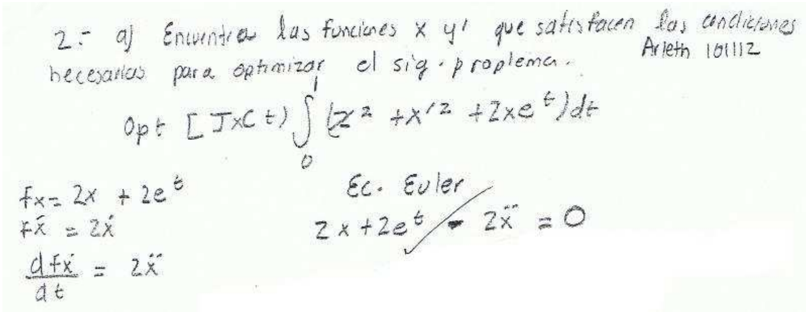
Ec. de Euler $\qquad f_x - \dfrac{df_{x'}}{dt} = 0$

$$6x'' + 2x - 3t + e^t = 0$$"

Segundo cuestionario

Podemos repetir lo dicho al primer cuestionario en cuanto a que el estudiante ha interiorizado las acciones que permiten determinar y utilizar a las condiciones necesarias de primer orden en un proceso.

Respuesta al Segundo Cuestionario:


2.- a) Encuentra las funciones x y' que satisfacen las condiciones necesarias para optimizar el sig. problema.

Arleth 101112

$$\text{Opt } [J x(t)] \int_0^1 (x^2 + x'^2 + 2xe^t)\,dt$$

$f_x = 2x + 2e^t$

$f_{\dot{x}} = 2\dot{x}$

$\frac{df_{\dot{x}}}{dt} = 2\ddot{x}$

Ec. Euler

$2x + 2e^t - 2\ddot{x} = 0$

Tercer cuestionario

Lo dicho referente a los dos primeros incisos es lo mismo que podemos decir ahora en cuanto a que el estudiante ha interiorizado las acciones que permiten determinar y utilizar a las condiciones necesarias de primer orden en un proceso.

Respuesta al Tercer Cuestionario:

$$\text{“Si } J[x(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - 3x'^2 + x'e^t - 3tx + 5xx'\right)dt \text{ s.a.}$$

$$x(0) = 1, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$f_x = 2x - 3t + 5x'$$

$$f_{x'} = -6x' + e^t + 5x$$

$$\frac{df_{x'}}{dt} = -6x'' + 5x' + e^t$$

$$\text{Ec. de Euler} \qquad f_x - \frac{df_{x'}}{dt} = 0$$

$$6x'' + 2x - 3t + e^t = 0\text{”}$$

En la entrevista pudimos percibir que:

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

3)

Segundo cuestionario

Plantea un tipo de condiciones suficientes de segundo orden y hace las acciones necesarias al ejercicio que se le planteó para resolver, por lo que podemos suponer que al menos tiene una concepción acción sobre dichas condiciones.

Respuesta al Segundo Cuestionario:

$f_x = 2x + 2c$

$f_{xx} = 2 \qquad f_{x\dot{x}} = 0$

$f_{\dot{x}} = 2\dot{x} \qquad f_{\dot{x}x} = 0$

$f_{\dot{x}\dot{x}} = 2$

$f_{\dot{x}\dot{x}} > \qquad \det H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{x\dot{x}} \\ f_{\dot{x}x} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{vmatrix}$

$\det H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$f_{xx} > 0 \qquad \det H = 4 > 0$

entonces es un mínimo.

Tercer cuestionario:

Plantea las condiciones suficientes y lleva las acciones necesarias para resolver el problema que se le propuso con lo que podemos suponer que tiene al menos una concepción tipo acción sobre dichas condiciones.

Respuesta al Tercer Cuestionario:

"b) Son las que sirven para determinar si es un máximo o un mínimo.
a) Son las condiciones de las segundas derivadas y con ayuda del Hessiano puedes averiguar si es un máximo o un mínimo.

$$\det\ H = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\det\ H < 0 \ \therefore \text{es un máximo.}$$

$\det H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{x\dot{x}} \\ f_{\dot{x}x} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = 12 - 10 = -22$

$\det H < 0 \ \therefore$ es un máximo.

No es suficiente

$H_{xx} = -2$

$H_{uu} = -2 \qquad \det H = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$

$H_{ux} = 1$

$H_{xu} = 1$

$\det H > 0 \Rightarrow$ es un mínimo

Entrevista

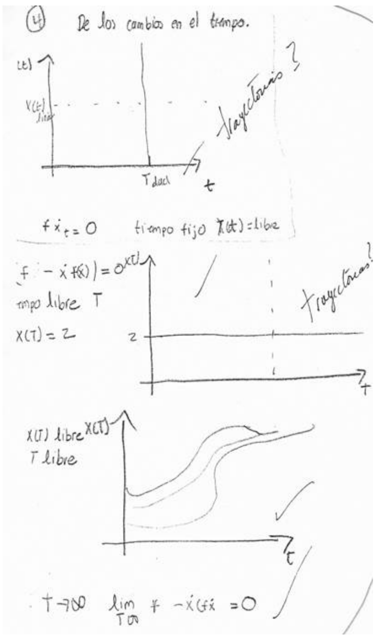
JC Menos 5 ¿será máximo o mínimo?
AA El Hessiano, no va a funcionar, la función es cóncava o convexa, en este caso es cóncava.
JC cóncava, o sea, debe ser un máximo ¿verdad?

Plantea las condiciones suficientes y las aplica al ejercicio que se le propuso para resolver por lo que confirmamos que tiene al menos una concepción tipo acción sobre dichas condiciones.

4)

En sus respuestas se aprecia que hace las acciones necesarias para determinar las condiciones de transversalidad correspondientes desde un punto de vista tanto analítico como geométrico mostrando que dichas acciones las había interiorizado en un proceso (analítico y geométrico, respectivamente) y coordinó ambos procesos encapsulándolo en un objeto.

Respuesta al Segundo Cuestionario:



Tercer Cuestionario

En su respuesta a este cuestionario enfatiza el papel que juegan las condiciones de transversalidad, pero del cuestionario anterior apreciamos que hace las acciones necesarias para determinar las condiciones de transversalidad correspondientes desde un punto de vista tanto analítico como geométrico mostrando que dichas acciones las

había interiorizado en un proceso (analítico y geométrico, respectivamente) y coordinó ambos procesos encapsulándolo en un objeto.

Respuesta al Tercer Cuestionario:

"Sirven para fijar las condiciones iniciales y de cierta manera ayudan a obtener los recorridos de los funcionales optimizados, es decir fijan o dejan libres a la x o a la t."

Entrevista

JC A ver, ¿de qué cambios específicos al considerar el intervalo de tiempo en un problema de optimización dinámica surgen las condiciones de transversalidad?
AA Cuando el tiempo tiene infinito y cuando queremos, vaya cuando queremos acortar el tiempo. A ver, cuando queremos acortar el tiempo como serán las trayectorias, ahí sobre esa recta paralela al eje y así se verían ¿verdad?, eso es cuando el tiempo esta dado y X de T es libre, otro caso es cuando el tiempo es libre y X de T esta dada.

De todo lo dicho podemos suponer que ha interiorizado las acciones para determinar el papel de las Condiciones de Transversalidad en un proceso analítico que ha logrado coordinar con el proceso geométrico correspondiente y además ha logrado encapsular dichos procesos en un objeto que puede relacionar con la representación gráfica y que puede utilizar en la solución de problemas de optimización dinámica.

Nombre del estudiante: **Ma**
1)

Primer cuestionario

Su respuesta contiene a todos los elementos esenciales de funcional. Además, en un ejemplo concreto ("…recorrer una distancia en el menor tiempo posible…") menciona un ejemplo concreto de funcional, por lo que podríamos suponer que ha interiorizado las acciones para distinguir a una funcional en un proceso.

Respuesta al primer Cuestionario:

"Funcional es $V \to R$
El problema de recorrer una distancia en el menor tiempo posible es un funcional. Tiene como dominio un conjunto de curvas que describen el recorrido y como dominio a los reales R y el tiempo total de recorrido (T)."

Tercer cuestionario

De su respuesta al primer inciso, aunque su respuesta es un caso particular importante (posiblemente el más visto en clase), contiene todos los elementos esenciales de funcional. Además, en el segundo inciso responde correctamente en 4 de 5 ocasiones cuando una expresión matemática es o no es una funcional, con lo que nos muestra que ha interiorizado las acciones para distinguir funcionales en un proceso que permite distinguir funcionales

Respuesta al tercer Cuestionario:

"$f: V \to R$, con V un espacio de funciones diferenciales"

Entrevista

JC Eh a ver pon tres ejemplos de funcionales
MC ¿Cómo las que vimos en clase?
JC Como las que quieras, tres
MC Bueno
JC A ver si nos las vas diciendo, la primera ¿Cuál es?
MC $J(x, x', t) = \int_{t_1}^{t_2} \left(x'^2 + x' + t\right)dt$
JC OK, bueno la segunda
MC Seria, la segunda seria $J(x, x', t) = \int_{t_1}^{t_2} \left(x^2 + xx' + x + x'\right)dt$
JC Aja,
MC Y la tercera seria $J(x, x', t) = \int_{t0}^{10} \left(tx'^2 + x\right)dt$

Ha interiorizado las acciones para determinar cuándo una expresión matemática es o no funcional en un proceso, pese a que parte de sólo un caso particular de funcionales.

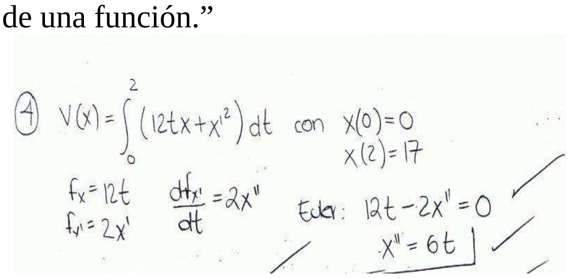
2)

Primer cuestionario

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

Respuesta al primer Cuestionario:

"La ecuación de Euler tiene el papel de la condición de primer orden que se tiene en una optimización estática de una función."


4 $V(x) = \int_0^2 \left(12tx + x'^2\right)dt$ con $x(0)=0$, $x(2)=17$

$f_x = 12t$ $\quad \frac{df_{x'}}{dt} = 2x''$ $\quad$ Euler: $12t - 2x'' = 0$

$f_{x'} = 2x'$ $\quad \boxed{x'' = 6t}$

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, al igual que en el primer cuestionario plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve también este problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

Respuesta al Segundo Cuestionario:

a) Condicion Nec. Ecuac. Euler

$f_x = 2x + 2e^t$ $\quad f_{\dot{x}} = 2\dot{x}$ $\quad \frac{df_{\dot{x}}}{dt} = 2\ddot{x}$

Ecuación Euler: $2x + 2e^t - 2\ddot{x} = 0$ $\quad \boxed{\ddot{x} - x = e^t}$

$\ddot{x} = x + e^t$

Tercer cuestionario

Su respuesta en este cuestionario es análoga a la dada en los dos primeros cuestionarios, por lo que podemos suponer que las acciones que hace para resolver un problema cualquiera de optimización han sido interiorizadas en un proceso que permite resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

Respuesta al Tercer Cuestionario:

a) $J[x(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 3\dot{x}^2 + \dot{x}e^t - 3tx + 5x\dot{x})dt$ $\quad x(0) = 1$, $x(\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{4}$

$f_x = 2x - 3t + 5\dot{x}$ $\quad f_{\dot{x}} = -6\dot{x} + e^t + 5x$

$\frac{df_{\dot{x}}}{dt} = -6\ddot{x} + e^t + 5\dot{x}$

Ecuación Euler: $2x - 3t + \cancel{5\dot{x}} + 6\ddot{x} - e^t - \cancel{5\dot{x}} = 0$

X $6\ddot{x} + 2x = e^t + 3t$

Entrevista

Sus respuestas en la Entrevista fueron análogas a las dadas en los Cuestionarios.

Nuestra hipótesis sobre su tipo de concepción respecto a este concepto después de la Entrevista fue entonces confirmar lo dicho para cuestionarios anteriores en el sentido que plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin

dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

3)

Segundo cuestionario:

En cuanto a las condiciones suficientes de segundo orden, plantea sólo una condición suficiente que podemos suponer representa una acción para buscar determinar si la trayectoria es máxima o mínima basada exclusivamente en la memoria, por lo que no podemos suponer mas que una concepción acción sobre este concepto.

Respuesta al Segundo Cuestionario:

$f_{x'x'} = 2 > 0$, por la condición de Legendre es un mínimo.

Tercer cuestionario

En cuanto a las condiciones suficientes de segundo orden plantea varios tipos equivalentes de condiciones y las aplica al problema que se le presenta para resolver, mostrando por un lado que ha interiorizado las acciones que le llevan a plantear y aplicar dichas condiciones en un proceso (uno por cada condición) y por otro lado, muestra una coordinación entre ambos procesos, que le permite decidir cuál de las condiciones suficientes aplicar ante cualquier problema de optimización de este tipo, encapsulando dichos procesos en un objeto.

Respuesta al Tercer Cuestionario:

"Cálculo de Variaciones:
Condición de Lagrange:

$$\begin{cases} f_{x'x'} > 0 \ mínimo \\ f_{x'x'} < 0 \ máximo \end{cases}$$

ó

$$\begin{cases} f_{xx'} > 0 \ y \ |H| > 0 \ mínimo \\ f_{xx'} < 0 \ y \ |H| < 0 \ máximo \end{cases}$$

Teoría de Control:

$$H_{uu} < 0 \ es \ un \ máximo$$

$$H_{uu} > 0 \ es \ un \ mínimo$$

Estas soluciones sirven para saber la solución de equilibrio que se ha obtenido es un máximo o un mínimo.

Condición de Lagrange:

$f_{x'x'} = -6 < 0 \Rightarrow$ es un máximo.

Condición de Lagrange:

$f_{x'x'} = -6 < 0 \Rightarrow$ es un máximo

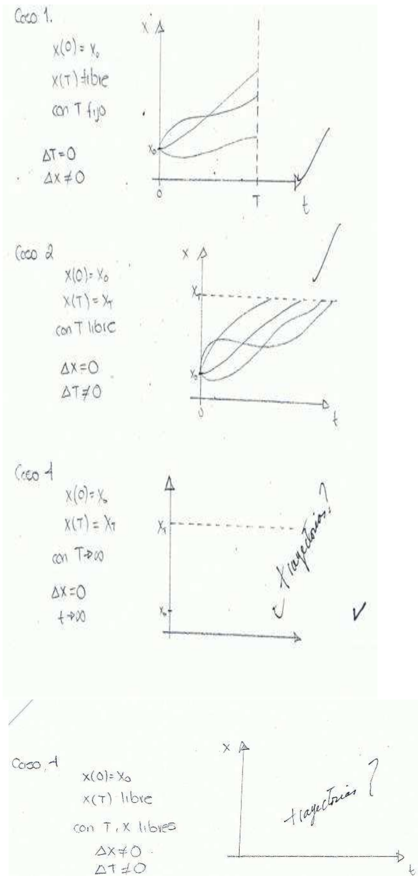
En la Entrevista contestó de manera análoga a la del tercer cuestionario lo que nos llevó a confirmar nuestra hipótesis recién dada.

4) Condiciones de Transversalidad

Segundo cuestionario

En su respuesta muestra que llevó a cabo las acciones necesarias para determinar las condiciones de transversalidad correspondientes desde un punto de vista tanto analítico como geométrico mostrando que dichas acciones las había interiorizado en un proceso (analítico y geométrico, respectivamente) y coordinó ambos procesos encapsulándolo en un objeto.

Respuesta al Segundo Cuestionario:



Tercer Cuestionario

En su respuesta a este cuestionario enfatiza el papel que juegan las condiciones de transversalidad, además pone un ejemplo concreto de los cuatro casos posibles con lo que muestra que puede llevar a cabo las acciones necesarias para determinar las condiciones de transversalidad correspondientes desde un punto de vista tanto analítico como geométrico mostrando que dichas acciones las había interiorizado en un proceso (analítico y geométrico, respectivamente) y coordinó ambos procesos encapsulándolo en un objeto. Respuesta al Tercer Cuestionario:

“Las condiciones de Transversalidad sirven para calcular las incógnitas constantes que resultan de la solución del problema de optimización cuando se tienen condiciones iniciales del tipo:

i) $x(1) = libre$

ii) $x(T) = 10, T\ libre$

iii) $x(T) = 10, con\ T \to \infty$

iv) $x(T) = libre\ con\ T, x \to \infty$”

En la Entrevista tuvo respuestas análogas que nos llevaron a la siguiente conclusión:

En cuanto a las condiciones de transversalidad es capaz de llevar a cabo las acciones desde un punto de vista gráfico así como las correspondientes acciones en su contexto analítico interiorizando cada una de dichas acciones en un proceso (un proceso para cada tipo de acciones) y ha logrado coordinar el proceso gráfico con el proceso analítico, por lo que podemos suponer que ha encapsulado dichos procesos en un objeto.

Nombre del estudiante: **Mi**

1)

Primer cuestionario

En su respuesta no da ninguna definición de funcional ni siquiera basado únicamente en la memoria, por lo que podemos suponer que no forma parte de su esquema.

Respuesta al primer cuestionario

“ $J(x) = \int_0^T f(x, x', t)dt$ nos ayuda a encontrar la trayectoria óptima (una ecuación diferencial) que garantiza que se maximiza o minimiza según el caso.”

Tercer Cuestionario

De la respuesta al primer inciso, podemos observar que involucra a todas las acciones que se requieren para determinar si una expresión dada es o no es funcional. Además, por el segundo inciso, sus respuestas (tres de cinco correctas) y las dos incorrectas por causas ajenas a su concepción de funcional, nos lleva a suponer que ha interiorizado dichas acciones en el proceso de distinguir funcionales de una expresión matemática dada.

Respuesta al tercer Cuestionario:

“Es una función que va de un espacio vectorial normado hacia los números reales”.

Entrevista:

JC: Dar ejemplos de tres funcionales justificando por que son funcionales.

MA $J(x, x\acute{}, t) = \int_{t_1}^{t_2} (x\acute{}^2 + x) dt$

JC OK

¿Si?, otra funcional

JC Entonces tres ejemplos de funcional, uno ya estuvo ¿verdad?

MA Uno ya estuvo, otro que, bueno, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, es el que pensaba que era una función, que si es función pero también es funcional

JC OK

MA Y el tercero…, una funcional de, con X, X’ aunque no este T, igual que es lo yo que hice hace un rato $f(x) = x\acute{}^{\frac{1}{3}}$

En sus respuestas muestra que es capaz de hacer las acciones para dar ejemplos de distintos tipos de funcionales, lo que nos lleva a suponer que ha interiorizado dichas acciones en el proceso de distinguir funcionales de una expresión matemática dada.

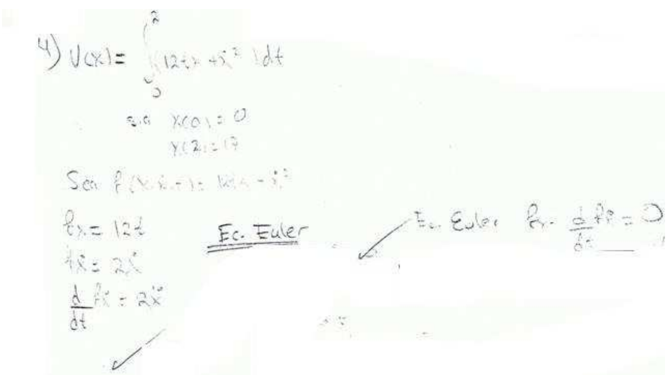
2)

Primer cuestionario

En cuanto a las condiciones necesarias de primer orden y la solución del problema de variaciones, plantea la Ecuación de Euler y la ecuación diferencial asociada, mostrando de esta manera que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como resuelve el problema sin dificultad, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

Respuesta al primer Cuestionario:

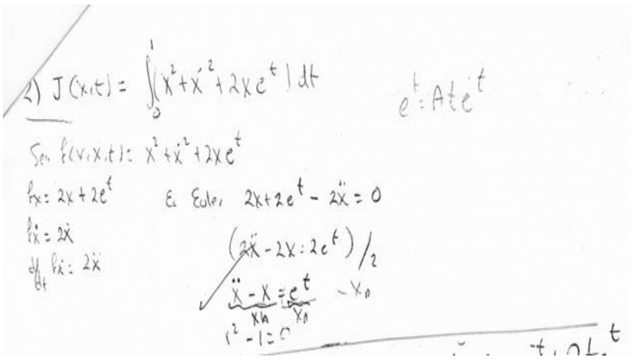
“La ecuación de Euler garantiza que la ecuación diferencial encontrada sea la mínima trayectoria.”



Segundo cuestionario

La respuesta dada en este cuestionario es análoga al del primer cuestionario, por lo que podemos suponer que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como también resuelve el problema sin dificultad aparente, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

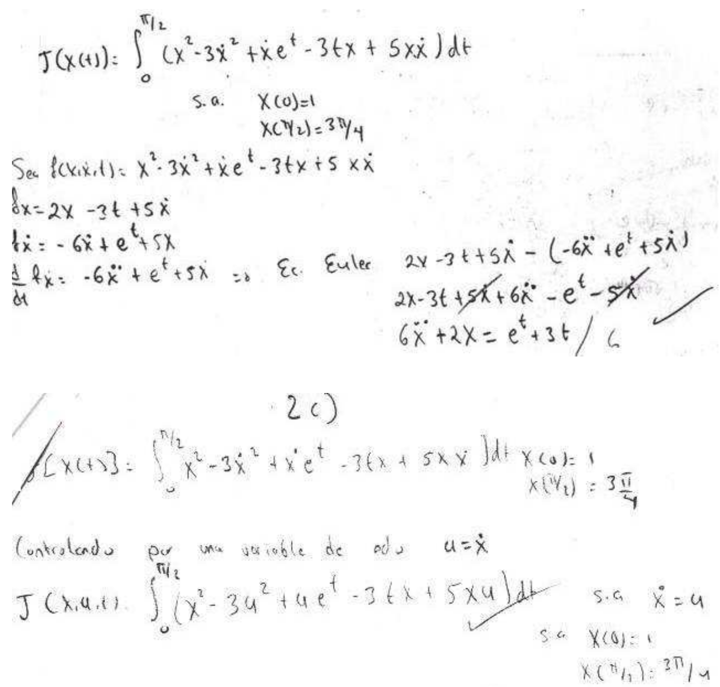
Respuesta al Segundo Cuestionario:



Tercer cuestionario

Una vez más, su respuesta en este cuestionario es análoga a la de los anteriores cuestionarios, por lo que podemos suponer que conoce a la Ecuación de Euler y puede hacer acciones sobre la funcional para llegar a las ecuaciones diferenciales. Como también resuelve el problema sin dificultad aparente, se puede considerar que estas acciones han sido interiorizadas en un proceso que facilita resolver cualquier problema de optimización por Cálculo de Variaciones.

Respuesta al Tercer Cuestionario



Entrevista

JC Ahora vamos a ver si queda mas claro de esta forma, supongamos que, con X en 0 igual a 20 y X en 20 igual a 0, ¿podrías optimizar esa funcional?
MA Muy bien
JC Si nos quieres ir comentando lo que haces mejor
MA Planteo, planteo el integrando o sea F de X, X' coma T es igual menos X' cuadrada entre 2, este es el integrando, F de X' es igual a menos 2 X entre 2, que es menos X', F de X, X' es igual a menos 1, entonces tenemos que, primero hay que sacar el, el teorema de Euler para maximizar ¿no?.., me calle porque me estaba olvidando, de entrada es F de X menos derivada con respecto T D F de X'… Mmm, X de vale 20 y aquí nos queda que la D vale 20 y X en 20 vale 0, entonces la C vale 20, la T vale 20 por C, es 20 C mas D igual a 0. Y ya 20 C igual a menos 20, C vale 1

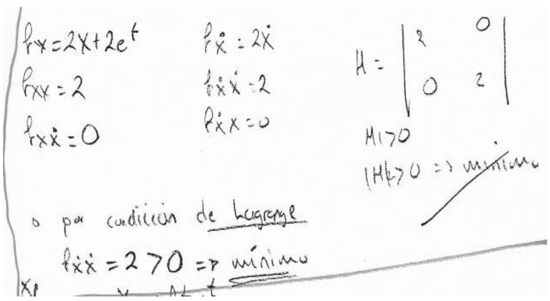
Observando lo hecho en el Tercer Cuestionario y luego en la Entrevista, podemos confirmar que ha logrado coordinar los procesos para aplicar las Condiciones Necesarias de primer orden en Cálculo de Variaciones y Teoría de Control, encapsulándolos en un objeto.

3) Condiciones Suficientes de segundo orden:

Segundo cuestionario

En cuanto a las condiciones suficientes de segundo orden plantea dos tipos equivalentes de condiciones y las aplica al problema que se le presenta para resolver, mostrando por un lado que ha interiorizado las acciones que le llevan a plantear y aplicar dichas acciones en un proceso (uno por cada condición) y por otro lado, muestra una coordinación entre ambos procesos, que le permite decidir cuál de las condiciones suficientes aplicar ante cualquier problema de optimización de este tipo, encapsulando dichos procesos en un objeto.

Respuesta al Segundo Cuestionario:



Tercer cuestionario

Las respuestas dadas a este cuestionario son análogas a las dadas en el segundo cuestionario, por lo que podemos suponer por un lado que ha interiorizado las acciones que le llevan a plantear y aplicar dichas acciones en un proceso (uno por cada condición) y por otro lado, muestra una coordinación entre ambos procesos, que

le permite decidir cuál de las condiciones suficientes aplicar ante cualquier problema de optimización de este tipo, encapsulando dichos procesos en un objeto.

Respuesta al Tercer Cuestionario

$$\text{“}H\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xx'} \\ f_{x'x} & f_{x'x'} \end{pmatrix}$$

Para determinar si es máximo o mínimo.

b)
$f_x = 2x - 3t + 5\dot{x}$
$f_{xx} = 2$
$f_{x\dot{x}} = 5$

$f_{\dot{x}} = -6\dot{x} + e^t + 5x$
$f_{\dot{x}\dot{x}} = -6$
$f_{\dot{x}x} = 5$

$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{x\dot{x}} \\ f_{\dot{x}x} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$

$H_1 = 2 > 0$
$H_2 = -12 - (10) = -22 < 0$
$\Rightarrow$ máximo

Se puede aplicar también la condición de Lagrange que dice

$$\begin{cases} f_{x'x'} > 0 \; \textit{mínimo} \\ f_{x'x'} < 0 \; \textit{máximo} \end{cases}$$

Entrevista

JC ¿Será máxima o minima?
MA Hay que ver la función del integrando ¿no? Es una parábola hacia abajo ¿no? Entonces es máxima.

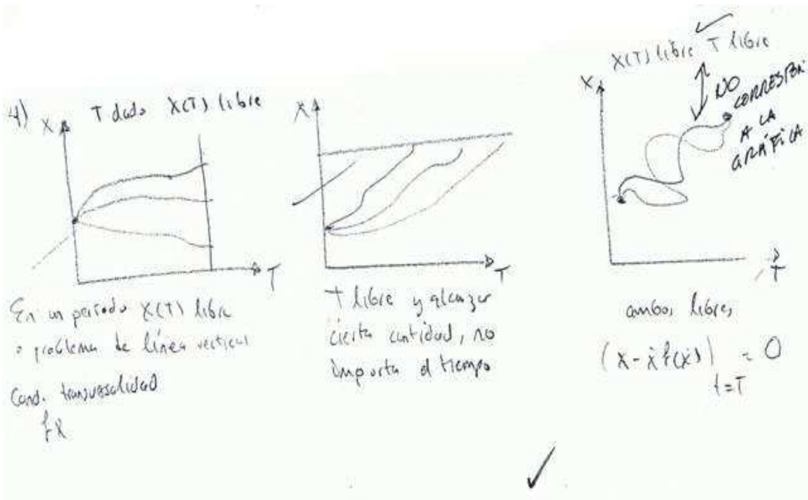
La respuesta dada en la entrevista no añade nada nuevo, sólo confirma lo que había respondido en los cuestionarios al mencionar la concavidad/convexidad. De aquí que podemos suponer que ha interiorizado las acciones que le llevan a plantear y aplicar dichas acciones en un proceso (uno por cada condición) y por otro lado, muestra una coordinación entre ambos procesos, que le permite decidir cuál de las condiciones suficientes aplicar ante cualquier problema de optimización de este tipo, encapsulando dichos procesos en un objeto.

4) Condiciones de Transversalidad.

Segundo cuestionario

En sus respuestas a este cuestionario, muestra que llevó a cabo las acciones necesarias para determinar las condiciones de transversalidad correspondientes desde un punto de vista tanto analítico como geométrico mostrando que dichas acciones las había interiorizado en un proceso (analítico y geométrico, respectivamente) y coordinó ambos procesos encapsulándolo en un objeto. En este cuestionario enfatiza el papel de dichas condiciones. Si consideramos globalmente sus rerspuestas podemos suponer que ha encapsulado el concepto condiciones de transversalidad en un objeto.

Respuesta al Segundo Cuestionario:



Tercer cuestionario

En el cuestionario anterior, llevó a cabo las acciones necesarias para determinar las condiciones de transversalidad correspondientes desde un punto de vista tanto analítico como geométrico mostrando que dichas acciones las había interiorizado en un proceso (analítico y geométrico, respectivamente) y coordinó ambos procesos encapsulándolo en un objeto. En este cuestionario enfatiza el papel de dichas condiciones. Si consideramos globalmente sus rerspuestas podemos suponer que ha encapsulado el concepto condiciones de transversalidad en un objeto.

Respuesta al Tercer Cuestionario:

“Las condiciones de Transversalidad no son condiciones iniciales sino condiciones finales. Se ocupan sobre el transcurso del problema y no al inicio”

Considerando sus respuestas a los Cuestionarios anteriormente mencionados, así como a la Entrevista que se le hizo, podemos suponer que ha encapsulado el proceso de explicar la función de las condiciones de transversalidad en un objeto.

.

RESULTADOS EN FORMA MATRICIAL

Iniciales Est.	Funcional			C.N. Ier. Orden				C.S. 2º. Orden			C. Transv		
	I	3	E	1	2	3	E	2	3	E	2	3	E
Ya	1	1	2	2	2	2	2	1	1	3	3	3	3
Ar	1	2	2	2	2	2	2	1	1	3	3	3	3
Ma	2	2	2	2	2	2	2	1	3	3	3	3	3
Mi	0	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3

CLAVES:

TIPOS DE CONCEPCIÓN

0: No forma parte de su Esquema, 1: Acción

2: Proceso, 3: Objeto

Debajo de cada concepto aparece el tipo de concepción que supusimos para cada estudiante en el Primer Cuestionario (I), Segundo Cuestionario (2), Tercer Cuestionario (3) y Entrevista (E).

7.7 ENTREVISTA PROFESORA DEL CURSO

A continuación presentamos la entrevista con la profesora del curso, llevada a cabo en mayo de 2009.

E: ¿Cómo sentiste en general el curso con esta metodología?
P: Lo sentí bien, me alcanzó el tiempo para cubrir todos los materiales…al principio pensaba que no me iba a dar tiempo pero en realidad los materiales se organizan mejor así y las cosas hacen más sentido para los estudiantes.
E: ¿Cómo viste el desarrollo de los estudiantes?
P: Al principio les sacó un poco de balance el empezar con los problemas de la primera actividad que son difíciles…aunque los problemas en sí les gustaron… trabajaron muy concentrados y sí les tuve que ayudar un poco al planteamiento, pero después, en la discusión de los mismos problemas, los sentí muy motivados y como ya habían pensado y discutido las cosas pudimos entre todos plantear los problemas ya en términos de optimización. A partir de ahí discutimos los elementos, las funcionales, la integral de línea, la diferencia con la optimización estática, etc. por primera vez…. A partir de ahí como que se fue dando todo bastante fácilmente, la introducción de las ecuaciones diferenciales con el cálculo de variaciones, después los sistemas con control … lo que me gustó es que como que con este método ves las cosas, te sigues con las actividades teóricas entras a las ecuaciones diferenciales y regresas a los problemas y esto una y otra vez y me parece que cada regreso los alumnos entienden un poco más las cosas, al menos lo relacionado con las ecuaciones diferenciales y los sistemas que están más cercanas al cálculo que conocen y un poco más también a los conceptos nuevos que son muy diferentes a lo que han visto.
E: ¿Con qué conceptos sentiste una dificultad particular y a qué lo atribuyes?
P: Sentí que no venían bien preparados ni de cálculo ni de álgebra lineal… bueno, siempre hay unos que sí, pero el grupo en general no muy bien. En cuanto a las ecuaciones diferenciales nos atoramos un poco con el análisis cualitativo, les costó trabajo pasar por ejemplo del campo de pendientes a la solución y más todavía cuando se trata de sistemas de ecuaciones. En lo de la optimización, si sufrieron o más bien sufrimos bastante con el concepto de funcional por una parte, porque no saben muy bien esto del espacio vectorial, lo han oído pero no entienden las implicaciones y sólo habían visto ejemplos de espacio vectorial en Rn, algunas matrices y unos poquitos polinomios, pero nunca con funciones, entonces pensar en una función cuyo dominio esta en un espacio vectorial normado, fue super difícil para mi de explicar y para ellos de entender. También tuvimos muchas dificultades con la comprensión de la integral de línea y de que la funcional asocia a una curva un número real y que para eso necesitas medir de alguna manera algo que está relacionado con la integral de línea, que no habían visto… Creo que sus problemas en estas cosas vienen más de que no han aprendido los conceptos de cálculo en general con suficiente profundidad… saben hacer cosas, pero muchas veces no saben por qué las hacen… también tienen dificultad con el uso de distintas representaciones, el paso de una a otra, sabemos que eso siempre es complicado para los alumnos, pero realmente se atoran bastante, entonces cuando explicaba el funcional y las condiciones de trasversalidad y todas esas cosas, como en términos del análisis era difícil que me entendieran por falta de bases, lo hacía mejor gráficamente y bueno, no sé qué tanto haya servido a que entendieran a fondo, pero al revisar los exámenes me pareció que si les dio al menos una primera idea de lo que se trata. Supongo que quienes llevan el otro curso, que se dedican todo el semestre a este

tema, tendrán muchas más oportunidades de reflexionar sobre esto y probablemente de aprenderlo con mayor profundidad.
E: Según te entiendo partimos de la hipótesis de que manejaban ciertos conceptos del álgebra lineal con una concepción al menos de acción y por lo visto en algunos casos ni siquiera forman parte de su esquema ¿Qué opinas de esto?
P: Creo que para entender mejor los conceptos de la optimización dinámica sí hacen falta los conceptos del álgebra lineal, sí deben ser prerrequisito. Tal vez es cierto que no los han construido más que, cuando mucho, en una concepción acción y eso inhibe su posibilidad de construir a partir de ellos otros conceptos porque si ya los manejaran en una concepción proceso, el hecho de definir una función con dominio en un espacio vectorial les presentaría la oportunidad de encapsular ese proceso de espacio vectorial como objeto al cual además le tienen que asociar algo más. Eso no lo podías saber antes de proponer tu propuesta, pero creo que en la próxima iteración de esta propuesta sería conveniente dejar a los alumnos de inicio algunas actividades que tengan que ver con espacio vectorial para tratar de que lo construyan como proceso al menos y ver si con esto se tienen menos dificultades con el concepto de funcional. Aunque también creo que hay conceptos de cálculo que merecerían un repaso pues sin ellos tampoco es posible avanzar mucho en la construcción de los conceptos relacionados con la optimización, por ejemplo, se me ocurre el de integral de línea, pero también el de curva en R3.
E: Según entiendo a ellos el concepto de funcional no les dice nada
P: Así en términos matemáticos, pues no, no les dice nada… creo que cuando mucho y creo que eso es mucho, a lo largo del curso y regresando una y otra vez al concepto aunque sea de manera cualitativa y gráfica, medio logran entender que se trata de una función especial, que tiene que ver con curvas, integrales, derivadas y cantidades y que pueden aplicar ciertos procedimientos, pero lo que vi en los exámenes fue que sí hubo un avance del principio del curso al final porque sí lograron, no coordinar estos elementos, pero sí lograron relacionar el problema de optimización dinámica con la idea de que se tiene una especie de trayectoria o proceso que describes como una curva matemáticamente y que a eso le estás asociando un valor y que buscas el mejor valor. Ya tu verás cuando analices los datos si estoy en lo correcto. Me gustaría también saber en qué se diferencia lo que mis alumnos logran entender de lo que los alumnos del otro grupo logran entender.
E: ¿Crees que la presentación de problemas abiertos en un contexto cercano a sus intereses les ayudaría más a darle significado a la funcional?
P: No sé… lo que yo ví fue que en los problemas de las actividades que no eran abiertos pero sí eran problemas que les interesaron, se metieron mucho a pensar a discutir y como que le echaron muchas ganas y ciertamente el poder ligar la idea de funcional con los procesos involucrados en los problemas, por ejemplo, los costos del lugar donde se pesca, la curva que se recorre en menos tiempo, la forma en que una empresa puede lograr una mejor producción, y esas cosas, sí les sirvió ya como base para entender lo que entendieron acerca de la funcional… y a mi me sirvió para hacer los dibujitos y tratar de representar de alguna manera esos procesos. Posiblemente el tener que pensar de inicio en todo el proceso de planteamiento del modelo les proporcione más elementos para llegar ellos mismos a la necesidad de pensar en la asociación entre un proceso completo para hacer algo y un número que representa su costo o su utilidad o algo así y a partir de ahí les haga más sentido introducir la funcional.
E: Me habías comentado sobre los conceptos más difíciles, ¿Cuáles fueron los más fáciles y por qué?

P: Creo que la materia, en general, no es fácil. Pero sí hubo algunas partes que no les costaron tanto trabajo y en parte puede ser también por la forma de introducirlas. Por ejemplo se me ocurre que en variaciones las ecuaciones de 2º orden salen de matera muy natural y después de que se aparecen en uno y otro problema llega un momento en que los alumnos ya quieren saber cómo se resuelven. Ahí ya entras a los métodos de solución que realmente no se les hacen difíciles. Cuando discutimos la forma de la solución me parece que les resultó bastante fácil proponer como solución una función exponencial, lo que sí no fue tan fácil, otra vez por culpa del álgebra lineal, fue que cuando encontramos con el polinomio característico dos soluciones, se necesitara incluir las dos en la solución general. El concepto de base no es su fuerte. También con sistemas de ecuaciones diferenciales pasó lo mismo, ya querían resolverlos porque aparecieron muchas veces en los problemas de control, y lo que hicimos fue primero convertir el sistema en ecuación de segundo orden y eso se les hizo más o menos fácil y después vimos las actividades para resolver los sistemas en forma vectorial y, aunque el procedimiento les resultó fácil y creo que aprendieron a hacerlo bastante bien, sufrieron sobre todo con las soluciones complejas. Otra cosa que les gustó y que les resultó más o menos fácil fue la clasificación de soluciones de equilibrio.
E. Hablamos hace rato de cómo se desarrollaron los alumnos y no me quedó claro que me contestaras sobre el desarrollo en sí.
P: Ya no me acuerdo qué te dije…pero bueno, creo que la idea es que con esta forma de dar el curso tomas problemas, los analizas, los trabajas junto con ellos, los dejas en un cierto punto y repites el procedimiento hasta que en un momento decides ya seguir con lo que sigue, pero ese trabajo en especie de espiral permite que refuercen ideas o que las reconsideren, así que tu dirás cuando veas los resultados de tu análisis, pero mi percepción es que sí avanzaron bastante en el curso y que sí creo que hay conceptos que aprendieron bastante bien y sobre todo creo que a pesar de que decimos que el funcional no lo aprendieron como quisiéramos, creo que sí lograron hacerse una idea clara de de qué se tratan los problemas de optimización dinámica y qué conceptos matemáticos están relacionados con ellos y por qué.
E: Respecto a experiencias anteriores ¿Cómo fue la construcción de los conceptos de optimización?
P: Creo que en este curso aprendieron francamente más… en los otros cursos, tardábamos mucho en llegar a la optimización, quedaba prácticamente confinada a las últimas semanas del semestre y se tenía que ver a la carrera. No creo que los alumnos de esos cursos hayan entendido para nada qué es una funcional y tampoco creo que les haya quedado muy claro de qué se trata la optimización dinámica. Creo que no pasaron de aprender la aplicación de las técnicas, un poco a ciegas, y ya… Incluso todo lo que se ve de ecuaciones diferenciales cobra sentido para ellos hasta que llegas a optimización y como ya es tan a la carrera ni siquiera creo que lograran establecer relaciones claras entre las ecuaciones diferenciales y el problema de optimización, más allá de saber que salen en el proceso de solución…. Siento que los alumnos de este curso lograron establecer más relaciones entre los conceptos y darle sentido a la aparición de las ecuaciones diferenciales, aunque también las usamos en problemas que no eran de optimización.
E: ¿Qué tanto crees que relacionaron los conceptos de optimización dinámica?
P: ¿Los de antes o los de la experiencia?
E: Los de la experiencia, …bueno, ambos.
P: Yo pensaría que tuvieron oportunidades suficientes para establecer relaciones entre los distintos conceptos. Como son conceptos difíciles y es la primera vez que los ven, no creo que se hayan construido muchas relaciones o muy profundas, pero creo que sí

relacionaron los conceptos. Cuando usen esto en economía tendrán, creo, una base sobre la cual trabajar y eso les permitirá construir más relaciones o más profundas. Creo que se sentaron las bases para esa construcción. En cambio, los anteriores, por el tipo de estructura que siguió el curso no tuvieron ese tipo de oportunidades… es por eso que dudo que hayan aprendido mucho más que las técnicas de solución de los problemas de optimización, pero no para nada tuvieron oportunidad de establecer relaciones entre los conceptos y no porque el maestro no lo haga, sino por el ritmo que sigue el curso dada su estructura en el temario.

E: Más allá de tu experiencia didáctica, ¿Cuál es tu opinión sobre la propuesta didáctica?

P: Pues… yo siempre había dado el curso en orden. Es cierto que siempre también he utilizado modelos en la clase pues me parece importante para introducir los conceptos y para motivar a los alumnos, pero sinceramente creo que después de esta experiencia, no volveré a dar el curso como lo daba antes. Definitivamente voy a repetir esta experiencia en mis cursos siguientes porque creo que los alumnos aprendieron más y mejor, le dieron más sentido a los conceptos y vimos con más calma lo importante. Creo que este hecho es independiente de que sea yo el profesor, cualquier profesor puede ir usando las actividades y guiando a los alumnos porque las actividades son muy claras y van permitiendo seguir una secuencia didáctica que es muy lógica. A mi me gustó y creo que al ver los resultados, hasta donde yo puedo ver sólo de la participación de los alumnos en la clase y en los exámenes, los resultados son bastante mejores que en semestres anteriores. Incluso creo que alguien que da por primera vez la materia se beneficiaría mucho con las actividades aun cuando el texto no siga el mismo orden.

E: ¿Qué sugerirías para el futuro?

P: El próximo curso lo voy a dar igual, con las mismas actividades pero supongo que con la experiencia de este, saldrá un poco mejor porque lo que sí voy a hacer es forzar a que repasen los conceptos de cálculo y de álgebra lineal que son indispensables para poderlos discutir en clase y que no afecten de manera tan negativa como en esta ocasión…. Pero creo que es importante ver qué sale en el análisis de tus resultados porque seguramente al analizar las construcciones de los alumnos vas a ver cosas que yo en la clase no puedo ver, ni a través de los exámenes. Ya con esos resultados se podrán modificar algunas actividades o incluir otras. También creo que la idea que mencionaste antes de usar problemas más abiertos puede apoyar la comprensión de los conceptos más importantes, aunque ahí siempre hay un juego que es medio difícil entre qué tantos modelos, o problemas abiertos usar y hasta qué punto por cuestiones de tiempo. El chiste es escoger bien el problema y trabajarlo bien con actividades que lo complementen para que el modelo de pié a los conceptos de interés y las actividades complementen el conocimiento formal matemático del curso.

7.8 DISCUSIÓN ACERCA DE LAS CONSTRUCCIONES HECHAS

A continuación presentaremos una discusión sobre los resultados obtenidos por los estudiantes de los grupos de M.A.E y Optimización respectivamente mediante los instrumentos de validación.

Para lograr dicho propósito de forma ordenada, dicha discusión se desarrollará de acuerdo a los siguientes puntos:

7.8.1 Eficacia de la Propuesta Didáctica

7.8.2 Comparación de los grupos

7.8.3 Valoración de las Actividades propuestas

7.8.4 Conclusiones y Propuestas

7.8.1 EFICACIA DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

La eficacia de la Propuesta Didáctica la podemos determinar principalmente en base a dos criterios: a) aprendizaje global y b) motivación de los estudiantes.

a) APRENDIZAJE GLOBAL

Según lo que podemos apreciar por las tablas de los apartados anteriores, el tipo de concepción de cada uno de los conceptos bajo estudio tuvieron un desarrollo ascendente para todos los estudiantes del grupo de M.A.E (ver tabla en página 232) en términos generales, puede apreciarse que el tipo de concepción de los estudiantes sobre cada uno de los conceptos involucrados llega a ser de tipo proceso o tipo objeto.

El concepto de funcional parece ser el más difícil para los estudiantes, pues menos de la mitad de los estudiantes construyó una concepción proceso de este concepto (ver tabla en pag. 156). Nuestra hipótesis sobre esta dificultad para los estudiantes es que por un lado, el concepto de funcional no lo ubican en ningún contexto conocido por ellos, es decir, el concepto de funcional a los estudiantes en general no les “dice”nada. Por otro lado como se puede apreciar en los resultados obtenidos por los instrumentos de validación el concepto de espacio vectorial no lo han llegado a construir ni siquiera con una concepción tipo acción. De aquí, que no pueden construir el concepto de funcional, puesto que no han construído el concepto de espacio vectorial sobre el cual se construye el concepto de funcional.

En contraste al resultado manifestado en el párrafo anterior, en la misma tabla de la página 156, podemos observar que en los conceptos: condiciones necesarias de primer orden y condiciones de transversalidad, la mayoría de los estudiantes llega a construir dichos conceptos con un tipo de concepción proceso y en algunos casos objeto.

Consideramos que, en particular sobre las construcciones que hicieron los estudiantes sobre los conceptos condiciones suficientes de segundo orden y condiciones de transversalidad, el problema que tuvimos tiene que ver en parte en que las preguntas que se hicieron en los respectivos cuestionarios no dieron lugar a respuestas más amplias por parte de algunos estudiantes por lo que no tenemos elementos suficientes para suponer que dichos estudiantes tienen un tipo de concepción ya sea proceso o en algunos casos objeto. Por ejemplo en la tabla de la página 156, podemos observar que una parte del grupo llega a tener una concepción objeto de condiciones de transversalidad, mientras que la otra parte tiene sólo una concepción tipo acción sobre dichas condiciones. Una explicación a este hecho puede ser, en parte, la mencionada al principio de este párrafo.

Estos resultados, obtenidos de las tablas que aparecen en los apartados anteriores se confirman con la percepción de la profesora del curso. En una parte de la entrevista que se le hizo manifestó lo siguiente sobre el aprendizaje de los estudiantes:

E. Hablamos hace rato de cómo se desarrollaron los alumnos y no me quedó claro que me contestaras sobre el desarrollo en sí.
P: Ya no me acuerdo qué te dije…pero bueno, creo que la idea es que con esta forma de dar el curso tomas problemas, los analizas, los trabajas junto con ellos, los dejas en un cierto punto y repites el procedimiento hasta que en un momento decides ya seguir con lo que sigue, pero ese trabajo en especie de espiral permite que refuercen ideas o que las reconsideren, así que tu dirás cuando veas los resultados de tu análisis, pero mi percepción es que sí avanzaron bastante en el curso y que sí creo que hay conceptos que aprendieron bastante bien y sobre todo creo que a pesar de que decimos que el funcional no lo aprendieron como quisiéramos, creo que sí lograron hacerse una idea clara de de qué se tratan los problemas de optimización dinámica y qué conceptos matemáticos están relacionados con ellos y por qué.

Sobre las principales dificultades y sus hipótesis de a qué pudieron deberse opinó:

E: ¿Con qué conceptos sentiste una dificultad particular y a qué lo atribuyes?
P: Sentí que no venían bien preparados ni de cálculo ni de álgebra lineal… bueno, siempre hay unos que sí, pero el grupo en general no muy bien. En cuanto a las ecuaciones diferenciales nos atoramos un poco con el análisis cualitativo, les costó trabajo pasar por ejemplo del campo de pendientes a la solución y más todavía cuando se trata de sistemas de ecuaciones. En lo de la optimización, si sufrieron o más bien sufrimos bastante con el concepto de funcional por una parte, porque no saben muy bien esto del espacio vectorial, lo han oído pero no entienden las implicaciones y sólo habían visto ejemplos de espacio vectorial en Rn, algunas matrices y unos poquitos polinomios, pero nunca con funciones, entonces pensar en una función cuyo dominio esta en un espacio vectorial normado, fue super difícil para mi de explicar y para ellos de entender. También tuvimos muchas dificultades con la comprensión de la integral de línea y de que la funcional asocia a una curva un número real y que para eso necesitas medir de alguna manera algo que está relacionado con la integral de línea, que no habían visto… Creo que sus problemas en estas cosas vienen más de que no han aprendido los conceptos de cálculo en general con suficiente profundidad… saben hacer cosas, pero muchas veces no saben por qué las hacen… también tienen dificultad con el uso de distintas representaciones, el paso de una a otra, sabemos que eso siempre es complicado para los alumnos, pero realmente se atoran bastante, entonces cuando explicaba el funcional y las condiciones de trasversalidad y todas esas cosas, como en términos del análisis era difícil que me entendieran por falta de bases, lo hacía mejor

gráficamente y bueno, no sé qué tanto haya servido a que entendieran a fondo, pero al revisar los exámenes me pareció que si les dio al menos una primera idea de lo que se trata. Supongo que quienes llevan el otro curso, que se dedican todo el semestre a este tema, tendrán muchas más oportunidades de reflexionar sobre esto y probablemente de aprenderlo con mayor profundidad.
E: Según te entiendo partimos de la hipótesis de que manejaban ciertos conceptos del álgebra lineal con una concepción al menos de acción y por lo visto en algunos casos ni siquiera forman parte de su esquema ¿Qué opinas de esto?
P: Creo que para entender mejor los conceptos de la optimización dinámica sí hacen falta los conceptos del álgebra lineal, sí deben ser prerrequisito. Tal vez es cierto que no los han construido más que, cuando mucho, en una concepción acción y eso inhibe su posibilidad de construir a partir de ellos otros conceptos porque si ya los manejaran en una concepción proceso, el hecho de definir una función con dominio en un espacio vectorial les presentaría la oportunidad de encapsular ese proceso de espacio vectorial como objeto al cual además le tienen que asociar algo más. Eso no lo podías saber antes de proponer tu propuesta, pero creo que en la próxima iteración de esta propuesta sería conveniente dejar a los alumnos de inicio algunas actividades que tengan que ver con espacio vectorial para tratar de que lo construyan como proceso al menos y ver si con esto se tienen menos dificultades con el concepto de funcional. Aunque también creo que hay conceptos de cálculo que merecerían un repaso pues sin ellos tampoco es posible avanzar mucho en la construcción de los conceptos relacionados con la optimización, por ejemplo, se me ocurre el de integral de línea, pero también el de curva en R3.
E: Según entiendo a ellos el concepto de funcional no les dice nada
P: Así en términos matemáticos, pues no, no les dice nada… creo que cuando mucho y creo que eso es mucho, a lo largo del curso y regresando una y otra vez al concepto aunque sea de manera cualitativa y gráfica, medio logran entender que se trata de una función especial, que tiene que ver con curvas, integrales, derivadas y cantidades y que pueden aplicar ciertos procedimientos, pero lo que vi en los exámenes fue que sí hubo un avance del principio del curso al final porque sí lograron, no coordinar estos elementos, pero sí lograron relacionar el problema de optimización dinámica con la idea de que se tiene una especie de trayectoria o proceso que describes como una curva matemáticamente y que a eso le estás asociando un valor y que buscas el mejor valor. Ya tu verás cuando analices los datos si estoy en lo correcto. Me gustaría también saber en qué se diferencia lo que mis alumnos logran entender de lo que los alumnos del otro grupo logran entender.

Debido a que todas las construcciones que se desprenden del análisis de las respuestas de los estudiantes están incluidas en la descomposición genética original, podemos afirmar que la descomposición genética es un buen modelo de la forma en que los estudiantes construyen los conceptos involucrados en el tema bajo estudio y que no requiere de refinamiento.

Las limitaciones más importantes que consideramos tiene nuestra propuesta tienen que ver con la construcción del concepto de funcional y ayudar más explícitamente a que los estudiantes logren coordinar los conceptos bajo estudio para empezar a construir su esquema de funcional que en general, consideramos está en un nivel intra-estructura.

Como podemos apreciar, los resultados de las tablas en los apartados anteriores coinciden en lo esencial con la percepción de la profesora del curso en el sentido de que el aprendizaje global podemos considerarlo muy positivo, ya que los resultados objetivos superan a los resultados obtenidos en semestres anteriores.

Lo dicho en el párrafo anterior, coincide también en lo esencial con la opinión de la profesora del curso, que en una parte de la entrevista que se le hizo afirmó:

E: Más allá de tu experiencia didáctica, ¿Cuál es tu opinión sobre la propuesta didáctica?
P: Pues… yo siempre había dado el curso en orden. Es cierto que siempre también he utilizado modelos en la clase pues me parece importante para introducir los conceptos y para motivar a los alumnos, pero sinceramente creo que después de esta experiencia, no volveré a dar el curso como lo daba antes. Definitivamente voy a repetir esta experiencia en mis cursos siguientes porque creo que los alumnos aprendieron más y mejor, le dieron más sentido a los conceptos y vimos con más calma lo importante. Creo que este hecho es independiente de que sea yo el profesor, cualquier profesor puede ir usando las actividades y guiando a los alumnos porque las actividades son muy claras y van permitiendo seguir una secuencia didáctica que es muy lógica. A mi me gustó y creo que al ver los resultados, hasta donde yo puedo ver sólo de la participación de los alumnos en la clase y en los exámenes, los resultados son bastante mejores que en semestres anteriores. Incluso creo que alguien que da por primera vez la materia se beneficiaría mucho con las actividades aun cuando el texto no siga el mismo orden.

b) MOTIVACION DE LOS ESTUDIANTES

De las respuestas dadas en la entrevista, muchos estudiantes del grupo de M.A.E manifestaron que el hecho de haberles presentado primero un estudio histórico-epistemológico del cálculo de variaciones y de la teoría de control y después dentro de las actividades propuestas algunos problemas que dieron origen a estas ramas de la optimización dinámica les había motivado positivamente.

De hecho, nuestra primera sugerencia que llevamos a cabo con el grupo de Matemáticas aplicadas a la Economía, con el que trabajamos a lo largo del semestre fue la de empezar presentando algunos problemas que aparecen en Optimización Dinámica y preguntando por su posible solución, para que a partir de la búsqueda de dicha solución fueran apareciendo de una forma más “natural”los conceptos de sistemas dinámicos requeridos para la solución de los problemas de Optimización Dinámica mencionados.

Según nuestra percepción, las respuestas dadas tanto por los estudiantes del grupo de MAE de la muestra tomada para la entrevista y de la profesora del curso, cuya opinión a este respecto resumiremos a continuación, ayudó para establecer relaciones entre sistemas dinámicos y conceptos de Optimización Dinámica, lo que consideramos un primer punto positivo.

A continuación presentamos opiniones de la Profesora a cargo del curso de M.A.E dentro de la entrevista que le hicimos:

E. Hablamos hace rato de cómo se desarrollaron los alumnos y no me quedó claro que me contestaras sobre el desarrollo en sí.
P: Ya no me acuerdo qué te dije…pero bueno, creo que la idea es que con esta forma de dar el curso tomas problemas, los analizas, los trabajas junto con ellos, los dejas en un cierto punto y repites el procedimiento hasta que en un momento decides ya seguir con lo que sigue, pero ese trabajo en especie de espiral permite que refuercen ideas o que las reconsideren, así que tu dirás cuando veas los resultados de tu análisis, pero mi percepción es que sí avanzaron bastante en el curso y que sí creo que hay conceptos que aprendieron bastante bien y sobre todo creo que a pesar de que decimos que el funcional no lo aprendieron como quisiéramos, creo que sí lograron hacerse una idea clara de de qué se tratan los problemas de optimización dinámica y qué conceptos matemáticos están relacionados con ellos y por qué.
En otra parte de la misma entrevista opinó:

E: Más allá de tu experiencia didáctica, ¿Cuál es tu opinión sobre la propuesta didáctica?
P: Pues… yo siempre había dado el curso en orden. Es cierto que siempre también he utilizado modelos en la clase pues me parece importante para introducir los conceptos y para motivar a los alumnos, pero sinceramente creo que después de esta experiencia, no volveré a dar el curso como lo daba antes. Definitivamente voy a repetir esta experiencia en mis cursos siguientes porque creo que los alumnos aprendieron más y mejor, le dieron más sentido a los conceptos y vimos con más calma lo importante. Creo que este hecho es independiente de que sea yo el profesor, cualquier profesor puede ir usando las actividades y guiando a los alumnos porque las actividades son muy claras y van permitiendo seguir una secuencia didáctica que es muy lógica. A mi me gustó y creo que al ver los resultados, hasta donde yo puedo ver sólo de la participación de los alumnos en la clase y en los exámenes, los resultados son bastante mejores que en semestres anteriores. Incluso creo que alguien que da por primera vez la materia se beneficiaría mucho con las actividades aun cuando el texto no siga el mismo orden.

Con todo lo dicho y en base a los dos criterios propuestos desde el principio podemos considerar muy positiva la eficacia de esta propuesta.

7.8.2 COMPARACIÓN DE LOS GRUPOS

En cuanto a la comparación entre el grupo de M.A.E y el de Optimización podemos obsrvar las tablas de las páginas 207 y 208 que representan los resultados arrojados por ambos grupos del último cuestionario que por haberse llevado a cabo al final del curso, es en este sentido el más representativo.

Desde luego, nos sorprendió el hecho de que en el grupo de Optimización en el que habían llevado un semestre de sistemas dinámicos y en este semestre únicamente temas de optimización, contra un solo semestre en que se ven ambos conceptos en el grupo de M.A.E., esencialmente no cambiaron las cosas. El tema que a ambos grupos les costó más trabajo fue el de Funcional y los que más se les facilitaron fueron el de condiciones suficientes de segundo orden y el de condiciones de transversalidad.

En cuanto a relaciones entre los distintos conceptos que forman parte del esquema de funcional, con la excepción de condiciones necesarias de primer orden con condiciones suficientes de segundo orden que suponemos habían construído en optimización estática, ninguno de los dos grupos establece relaciones entre los distintos conceptos del esquema. Esto nos refuerza la hipótesis que habíamos mencionado en el sentido de que la funcional "no tiene significado"para los estudiantes y que lo que hacen es usar la memoria y la analogía para resolver por ejemplo problemas de optimización donde aparecen funcionales. Sin embargo, debemos resaltar que este hecho se presenta esencialmente igual en ambos grupos.

De las tablas mostradas en las páginas 207 y 208, podemos observar que en general los números, por decirlo así, favorecen al grupo de M.A.E, en particular el promedio, aún tomando en cuenta a los mejores tres estudiantes de cada grupo, pues hubo un estudiante del grupo de optimización seleccionado aleatoriamente que por sus números contribuía negativamente al promedio de su grupo. Por la composición de los grupos, este resultado nos da un indicador muy positivo en favor de nuestra propuesta. Si bien es cierto, como apuntamos anteriormente, esencialmente los dos grupos hicieron las mismas construcciones y establecieron las mismas relaciones esencialmente entre los conceptos que forman parte de su esquema de funcional, el grupo de M.A.E. contra lo que supusimos al principio (debido al tiempo que tuvieron para estudiar temas de Optimización Dinámica en comparación con el grupo de Optimización) en los resultados que aparecen en las tablas (numéricamente) quedó mejor que el grupo de Optimización, lo que consideramos un indicador muy positivo a favor de nuestra propuesta.

7.8.3 VALORACIÓN DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

Las Actividades planeadas con el objetivo de ayudar a los estudiantes a construir los conceptos bajo estudio, tuvieron un papel muy positivo de acuerdo a los resultados mostrados en las tablas y de acuerdo a la opinión de la profesora del curso, quien opinó sobre este punto que: "El próximo curso lo voy a dar igual, con las mismas actividades pero supongo que con la experiencia de este, saldrá un poco mejor porque lo que sí voy a hacer es forzar a que repasen los conceptos de cálculo y de álgebra lineal que son indispensables para poderlos discutir en clase…"

Después de llevar un estudio histórico-epistemológico del Cálculo de Variaciones y Teoría de Control y basados en este estudio y la descomposición genética propuesta, se fueron desarrollando las Actividades que los estudiantes debían de realizar, en muchos casos en equipo, buscando tomar en cuenta la dimensión social del aprendizaje que queda explícitamente dada dentro de la metodología de la Teoría Apoe.

Así, empezamos presentando el problema que dio origen al cálculo de variaciones (problema de la baquistrócona) y otros problemas que dieron origen a ambas ramas de la optimización dinámica, logrando de esta forma motivar a los estudiantes y ayudarles a ubicar los problemas que dieron origen a dicha optimización.

En base a los resultados presentados en las tablas, dichas actividades fueron en términos generales muy positivas pues ayudaron a los estudiantes a construir los conceptos bajo estudio en la mayoría de los casos con un tipo de concepción tipo proceso y en algunos casos con una concepción tipo objeto. (Ver tablas al final de las primeras secciones del capítulo *VIII*).

Dentro de las limitaciones que tuvieron las mencionadas Actividades, están en primer lugar, que no resultaron suficientes para contribuir a la construcción del concepto de funcional con una concepción tipo proceso o incluso tipo objeto.

Sin embargo, la limitación que consideramos más importante es que no contribuyeron lo suficiente como para ayudar a los estudiantes a relacionar los conceptos que forman parte de su esquema de funcional. Esta falta de coordinación entre los distintos conceptos que forman parte de su esquema de funcional fue general, pues según los resultados obtenidos el nivel del esquema de cada estudiante es de intra-edstructura.

De cualquier forma, el hecho de que las Actividades propuestas permitieron construir los conceptos bajo estudio de una mejor manera (respecto de grupos anteriores y respecto al grupo de Optimización), según se puede apreciar en las respectivas tablas que aparecen a lo largo de este capítulo y que coinciden en lo esencial con las opiniones de la profesora del grupo (según consta en la entrevista que se le hizo), es un punto que consideramos también muy positivo de nuestra propuesta.

7.8.4 RESUMEN DE LA DISCUSIÓN

En resumen, podemos considerar la Propuesta Didáctica presentada en este trabajo como positiva desde un punto de vista global, aunque pudimos localizar algunas de las dificultades más serias que tuvieron los estudiantes, por ejemplo, en su construcción de su esquema de funcional y en establecer relaciones profundas entre los conceptos que forman el esquema de funcional.

Según nuestros resultados, las respuestas dadas por los estudiantes del grupo de MAE de la muestra tomada para la entrevista y según la opinión de la profesora del curso, este hecho ayudó para establecer relaciones entre sistemas dinámicos y conceptos de Optimización Dinámica, lo que consideramos un primer punto positivo.

Desde luego, que hubo dificultades fuertes en la construcción de los conceptos que forman parte del esquema de Funcional. Sin duda, el que causó mayores problemas fue la construcción del mismo concepto de Funcional. Hablamos sobre varias hipótesis al respecto.

A lo largo de nuestra experiencia docente, hemos podido constatar que el concepto de Espacio Vectorial es de los que cuestan más trabajo a los estudiantes. Sin embargo, antes del curso pensamos que la gran mayoría de los estudiantes tenían al menos un tipo de concepción acción de este concepto, así como de otros conceptos relacionados con él, como por ejemplo los conceptos de norma de un vector, espacio vectorial normado, concepto de trayectoria y de integral de línea.

Al revisar los resultados obtenidos, podemos darnos cuenta que el concepto de Espacio Vectorial no forma parte del esquema de los estudiantes, consecuentemente el concepto de Espacio Vectorial Normado menos formará parte de su esquema.

En conclusión, podemos decir que tenemos varios resultados positivos para la presente Propuesta Didáctica, entre los que destacan: i) El hecho de que el tipo de concepción sobre todos y cada uno de los conceptos de Funcional fuera en ascenso para todos y cada uno de los estudiantes de la muestra del grupo de M.A.E, ii) La aceptación general por los estudiantes de este grupo por la inclusión histórico-epistemológica en particular del Cálculo de Variaciones y de la Teoría de Control, iii) La comparación numérica con un grupo de Optimización del que podrían esperarse mejores resultados por llevar en 2 semestres consecutivos lo que el grupo de M.A.E lo hace en sólo un semestre. Aunque esencialmente sean capaces de hacer lo mismo ambos grupos, los resultados numéricos favorecen por buen márgen al grupo de M.A.E, iv) La percepción de la profesora del grupo de M.A.E con amplia experiencia en estos cursos es también ampliamente favorable a la presente Propuesta Didáctica. Esta conclusión la podemos mantener pese a que como comentamos hubo dificultades, principalmente de dos tipos: i) En la construcción del concepto de Funcional, debido en parte, según nuestro análisis a que por un lado falta conocimiento sobre el concepto de Espacio Vectorial y otros conceptos afines (Trayectoria e Integral de Línea) y por otro lado a que la Funcional no les dice nada a muchos estudiantes. Está fuera de sus contextos geométrico y económico, ii) La falta de relaciones profundas entre los distintos conceptos que forman el esquema de Funcional, tal como se evidenció en los distintos Instrumentos de Validación. Es cierto que esta afirmación se ve más clara en el caso del mismo concepto de Funcional, que según podemos ver en los distintos Instrumentos de Validación y en particular en las entrevistas, no logran relacionarlo con el concepto de Trayectoria ni de Integral de Línea que en general no forman parte de su esquema de Funcional. En cuanto a las Condiciones Necesarias de primer orden y las Condiciones Suficientes de segundo orden, las relacionan más, muy probablemente como supusimos en el análisis, debido a la experiencia previa que tienen en Optimización Estática (cursos de Cálculo).

Sin embargo, podríamos concluir que en general la evolución de su esquema de Funcional está en el nivel intra-estructura.

Si “cruzamos”la información obtenida de cada instrumento podemos observar que hay coherencia con las principales conclusiones presentadas en este apartado. Sin embargo, puede haber “matices”debido a varias razones que pueden ir desde la forma o el contenido de la pregunta en sí a condiciones subjetivas de parte del estudiante en el momento de dar sus respuestas.

Queremos enfatizar que estos resultados puedn considerarse como muy positivos dado lo ambicioso del temario del curso de Matemáticas Aplicadas a la Economía, que no era nuestro interés cambiar. El temario (ver anexo “B”) requiere de estudiar en un mismo semestre conceptos de sistemas dinámicos continuos y discretos y el tiempo para hacerlo es muy reducido. Es sobresaliente el hecho de que los estudiantes de este curso mostraron al final concepciones más avanzadas que aquéllos que cursaron un semestre completo de optimización dinámica.

7.9 CONCLUSIONES

Para poder presentar con mayor orden nuestras conclusiones, las dividiremos en los siguientes apartados:

i) Objetivos de nuestro trabajo de investigación

ii) Aportaciones y originalidad del trabajo de investigación

iii) Aspectos que quedan abiertos a la investigación

iv) Propuestas Didácticas a la luz de los resultados del estudio

7.9.1 OBJETIVOS DE NUESTRO TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

El objetivo central de este trabajo de investigación fue desarrollar una Propuesta Didáctica en torno al problema de optimización en cálculo de variaciones y teoría de control en el que un estudio histórico-epistemológico sobre dicho problema contribuyera a la descomposición genética y al desarrollo mismo del curso. Ver Objetivos (pag.8).

A lo largo de nuestra propuesta hemos desarrollado todos y cada uno de los puntos mencionados en el objetivo y los resultados presentados a lo largo del capítulo *VIII* muestran que tanto la descomposición genética (fruto del estudio histórico.epistemológico y de la respuesta a la primera pregunta de nuestros objetivos particulares, basados en nuestra particular experiencia) y las Actividades Didácticas (respuesta a la segunda pregunta de nuestros objetivos particulares, basada en nuestra descomposición genética) han funcionado (aunque se pueden mejorar) de acuerdo a los parámetros presentados en la discusión de resultados.

Según los resultados obtenidos, al haber logrado con muchos estudiantes del grupo piloto pasar de un tipo de concepción acción a un tipo de concepción proceso y en algunos casos objeto y con mejores resultados en general respecto al grupo de Optimización y otros grupos de Matemáticas aplicadas a la Economía de semestres anteriores, podemos concluir que esta propuesta didáctica cumplió con los objetivos planteados.

Por tanto, podemos concluir que esta propuesta didáctica cubrió los objetivos planteados al responder a nuestras preguntas de investigación.

7.9.2 APORTACIONES Y ORIGINALIDAD DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

En primer lugar y en base a los resultados obtenidos presentados a lo largo de este capítulo podemos concluir que nuestra Propuesta Didáctica funciona (aunque se puede mejorar) para un curso difícil en el que sólo se aprenden tradicionalmente procedimientos memorizados. En nuestra propuesta se ayuda a los estudiantes a construir los conceptos involucrados en el esquema de funcional asociándolos a contextos concretos (en nuestro caso de tipo económico) y procurando establecer relaciones entre los distintos conceptos que forman parte del esquema de funcional.

Las principales limitaciones de nuestra propuesta fueron mencioadas en particular en *8.6.3* y *8.6.4* tienen que ver con la construcción del concepto de funcional y las relaciones entre los distintos conceptos que forman parte del esquema de funcional.

Otra contribución de esta propuesta es la inclusión de un estudio histórico-epistemológico a la descomposición genética y al diseño del curso, presentando y planteando problemas tanto geométricos como económicos que dieron origen al cálculo de variaciones y a la teoría de control, respectivamente.

Una tercera contribución que consideramos importante de nuestra propuesta radica en el hecho de que la descomposición genética propuesta (que funcionó según los resultados obtenidos) puede apoyar a diseños futuros.

Respecto a la originalidad de nuestra propuesta, podemos decir que después de haber investigado en diferentes sitios y preguntado a diferentes especialistas en el tema (ver pag. 10) no encontramos ningún trabajo al respecto. Sin embargo, creemos que si aparecieran algún o algunos trabajos de investigación sobre el objetivo del presente trabajo, no le quitaría mucho de su presunta originalidad.

El hecho de que por un lado, la profesora del curso haya dicho en la entrevista que se le hizo (ver *8.5)* volvería a utilizar esta propuesta para cursos futuros porque cree que sus alumnos del curso piloto aprendieron más que otros alumnos de cursos anteriores y por otro lado, los resultados obtenidos por los estudiantes del curso piloto (M.A.E) fueron mejores en términos generales que los del grupo de Optimización, muestran la pertinencia de esta propuesta.

En resumen, en base a lo dicho en este apartado, podemos concluir que nuestra propuesta es original, pertinente y aporta al mejor desarrollo de los cursos de cálculo de variaciones y de teoría de control en los aspectos mencionados.

7.9. 3 ASPECTOS QUE QUEDAN ABIERTOS A LA INVESTIGACIÓN

Dentro de los aspectos que consideramos quedan abiertos a la investigación estarían muy específicamente los siguientes:

- Refinar la descomposición genética e investigar con nuevas actividades, diseñadas de acuerdo a este nuevo modelo, para intentar lograr que los estudiantes establezcan relaciones entre los distintos conceptos que forman parte de su esquema de funcional, buscando de esta manera la evolución de dicho esquema para cada uno de los estudiantes.

- Proponer problemas “abiertos”dentro de algún contexto (en nuestro caso el económico) buscando dotar de significado el concepto de funcional y analizar el impacto que tienen en el aprendizaje de los alumnos.

- Proponer actividades que ayuden a construir el concepto de espacio vectorial. En este punto, se podrían obtener de otros trabajos de investigación que han tenido como objeto de estudio a dicho concepto.

- Estudiar el papel que puede jugar la Modelación en un curso de esta naturaleza y cómo incluirlo.

Estos aspectos sugeridos para trabajos futuros, desde luego no son los únicos. Sin embargo, a la luz de los resultados obtenidos sobre las principales limitaciones de nuestra propuesta, dichas sugerencias ayudarían directamente a tratar de superar las mencionadas limitaciones.

Por otro lado y debido a que como hemos mostrado, nuestra propuesta funciona, sería importante tratar de convencer a más maestros para que la usaran. Una manera de lograrlo podría ser dando a conocer los resultados de este trabajo, pidiéndoles que usaran las actividades propuestas y las enriquecieran, poniendo a disposición de la comunidad de educación matemática, tanto las actividades propuestas originalmente como las que la vayan enriqueciendo.

7.9.4 PROPUESTAS DIDÁCTICAS A LA LUZ DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO

En base a las limitaciones de nuestra propuesta, recién mencionadas, deberíamos empezar con alguna actividad que contenga más acciones y procesos sobre el concepto de Espacio Vectorial, al igual que con el concepto de funcional y en relación a conceptos tales como: Trayectoria e Integral de Línea, con el fin de que los estudiantes sean capaces de llevar a cabo las construcciones perdichas por la descomposición genética que no se lograron hacer en esta puesta en práctica del diseño didáctico y así lograr una mayor evolución en los esquemas construídos. Posteriormente, deberíamos considerar actividades que sirvan tanto para ayudar a los estudiantes a relacionar los diferentes conceptos que forman parte de su esquema de funcional y a poder mirar el concepto de funcional dentro de algún contexto (en nuestro caso sería el contexto económico y la Actividad complementaria podría ser presentar problemas económicos “abiertos”de Optimización Dinámica).

Durante la entrevista con la Profesora del grupo de M.A.E. opinó al respecto lo siguiente:

E: ¿Crees que la presentación de problemas abiertos en un contexto cercano a sus intereses les ayudaría más a darle significado a la funcional?
P: No sé… lo que yo ví fue que en los problemas de las actividades que no eran abiertos pero sí eran problemas que les interesaron, se metieron mucho a pensar a discutir y como que le echaron muchas ganas y ciertamente el poder ligar la idea de funcional con los procesos involucrados en los problemas, por ejemplo, los costos del lugar donde se pesca, la curva que se recorre en menos tiempo, la forma en que una empresa puede lograr una mejor producción, y esas cosas, sí les sirvió ya como base para entender lo que entendieron acerca de la funcional… y a mi me sirvió para hacer los dibujitos y tratar de representar de alguna manera esos procesos. Posiblemente el tener que pensar de inicio en todo el proceso de planteamiento del modelo les proporcione más

elementos para llegar ellos mismos a la necesidad de pensar en la asociación entre un proceso completo para hacer algo y un número que representa su costo o su utilidad o algo así y a partir de ahí les haga más sentido introducir la funcional.

Más adelante, añadió:

E: ¿Qué sugerirías para el futuro?
P: El próximo curso lo voy a dar igual, con las mismas actividades pero supongo que con la experiencia de este, saldrá un poco mejor porque lo que sí voy a hacer es forzar a que repasen los conceptos de cálculo y de álgebra lineal que son indispensables para poderlos discutir en clase y que no afecten de manera tan negativa como en esta ocasión…. Pero creo que es importante ver qué sale en el análisis de tus resultados porque seguramente al analizar las construcciones de los alumnos vas a ver cosas que yo en la clase no puedo ver, ni a través de los exámenes. Ya con esos resultados se podrán modificar algunas actividades o incluir otras. También creo que la idea que mencionaste antes de usar problemas más abiertos puede apoyar la comprensión de los conceptos más importantes, aunque ahí siempre hay un juego que es medio difícil entre qué tantos modelos, o problemas abiertos usar y hasta qué punto por cuestiones de tiempo. El chiste es escoger bien el problema y trabajarlo bien con actividades que lo complementen para que el modelo de pié a los conceptos de interés y las actividades complementen el conocimiento formal matemático del curso.

De las conclusiones obtenidas, en particular suponiendo que la Descomposición Genética no requiere refinarse según lo visto en la discusión de resultados (ver pag. 239) y reforzadas con la opinión de la Profesora del Curso proponemos actividades que complementen las originalmente propuestas. (Ver anexo "D") Sin embargo, podría, como se sugiere en las perspectivas de investigaciones futuras, refinar la descomposición con el fin de lograr el establecimiento de relaciones más sólidas entre los conceptos que componen el esquema aquí propuesto.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1990). Épistémologie et Didactique. En Equipe Didirem, Université París (Ed.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 10, no. 23, (pp. 241-286).* París, France. Université de París Press.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, vol. X. No. 2, p. 117.*

Asiala, M., A. Brown, DeVries D., Dubinsky, E., Mathews D. y Thomas K. (1996). A Framework for Research and Currículum Development in Undergraduate Matemathics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education, Vol. II, número 3, pp. 1-32.*

Athans, M. (1976). Perspectives in Modern Control Theory. En E.I. Solkovitz (ed.), *Science, Technology, and the Modern Navy (p.143).* ONR Press.

Baratta A. y Rodellar eds. (1997). *Proceedings of the First European Conference on Structural Control.* Series on Stability, Vibration and Control of Systems. USA. World Scientific Press.

Beighter, Ch., Douglass, J. (1967). *Foundations of Optimization.* Englewood, N.J., USA. Ed. Prentice Hall, Inc.

Bellman, R. (1957). *Dynamic programming.* Princeton, New York, USA. Princeton University Press.

Bellman, R., R. Kalaba. (1965). *Dynamic programming and modern control theory.* New York, USA. Academic Press.

Bellman, R.E., S. E. Dreyfus (1962). *Applied dynamic programming.* Princeton, New York, USA. Princetone University Press.

Bennet, S. (1979). *A history of control engineering 1800-1930.* IEE Control Engineering Series 8. London, England. Peter Peregrinus Ltd. Press.

Bennet, S. (1993). *A history of control engineering 1930-1955.* IEE Control Engineering Series 47. London, England. Peter Peregrinus Ltd. Press.

Bernoulli, D. (1753). Reflexions et eclarcissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans las mémoires de l´Académie de 1747 et 1748. *Hist. de l´Acad. Roy. de Berlín, 9, pp. 147-172 y 173-195.*

Blume, L., Simon C. (1994). *Mathematics for Economists.* New York, USA. W.W. Norton & Company Inc. Press.

Bosch, M., García, F.J., Gascón, J., Ruiz, L.H. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Educación Matemática, México, Grupo Editorial Iberoamérica, Vol. 18, número 2, pp. 37-74.*

Brezis, H. (1983). *Análisis Funcional.* Madrid, España. Alianza Editorial.

Campero, J. (1991). Acerca del Rediseño del Discurso Matemático Escolar. Una experiencia didáctica en Cálculo de Varias Variables con estudiantes de Economía. *Memorias de la V Reunión Centroamericana y del Caribe. Tegucigalpa, Honduras 1991.*

Campero, J. (1992). Propuesta Metodológica para Optimización de Variables siguiendo la Serie de Taylor. *Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe. Cuernavaca, México, 1992.*

Campero, J. (1993). Perspectiva de una propuesta Metodológica para un curso de Cálculo siguiendo la Serie de Taylor. *Memorias de la VII Reunión Centroamericana y del Caribe. Panamá, Panamá, 1993.*

Campero, J. (1994). Hacia el rediseño del Discurso Matemático Escolar: Algunas ventajas, Obstáculos y Límites Cognitivos de la Serie de Taylor *Memorias de la VIII Reunión Centroamericana y del Caribe. San José, Costa Rica, 1994.*

Campero, J. (1995). Las Matemáticas en Contexto: Una experiencia Didáctica. *Memorias de la IX Reunión Centroamericana y del Caribe. La Habana, Cuba, 1995*

Cerdá, Emilio (2001). *Optimización Dinámica.* Madrid, España. Ed. Prentice Hall

Chiang, A.C., (1984). *Fundamental Methods of Mathematical Economics.* New York, USA. Ed. Mc. Graw-Hill.

Chiang, A.C., (1992). *Elements of dynamic optimization.* Heights, Illinois. Waveland Press, Inc.

Coddington, E.A., Levinson, N. (1955). *Theory of ordinary Differential Equations.* New York, USA. Ed. Mc. Graw Hill.

Costabel, P. Peiffer (eds.). (1998). *Bernoulli, Johann I der brief we chsel von Johann I Bernoulli. Band 2: Der brief wechsel mit Pierre Varignon: erster teil:1692-1702, die Gesammelten werk der mathematiker und physiker der familia Bernoulli.* Bassel, Swiss. University Press.

Courant R., Hilbert, D. (1962). *Methods of Mathematical Physics.* New York, USA. Ed. Interscience Publishers.

Craggs, J.W. (1973). *Cálculo de Variaciones.* Selección de problemas resueltos. México, D.F. Editorial Limusa, Vol 9.

De Vries, D.J. (2001). RUMEC / APOS. En D.J. DeVries (Ed.), *Theory Glossary.*USA. RUMEC Press.

Dorf, R.C. (1989). *Sistemas modernos de control.* México, D.F. Ed. Addison Wesley Iberoamericana.

Dubinsky, E. (1991, a). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123).* Germany. Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991, b). The Constructive Aspects of Rellective Abstraction in Advanced Mathematics. En L.P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences (pp. 135-148).* Nueva York, USA. Ed. Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1994). A Theory and Practice of Learning College Mathematics. En A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving (pp. 221-243).*. New York, USA. Ed. Hillsdale, Eribaum.

Dubinsky, E. (1996.a). Una aplicación de la perspectiva piageteana a la educación matemática postsecundaria. *Revista Educación Matemática, Vol. 8, número 3, pp. 24-25.*

Dubinsky, E. (1996.b). El Aprendizaje de los Conceptos Abstractos de la Matemática Avanzada. *Memorias de la décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, Puerto Rico, 1996, 1-9.*

Dubinsky, E. (1996.c). Aplicación de la Perspectiva Piageteana a la Educación Matemática Universitaria. *Revista Educación Matemática, vol.8., 31-36.*

Dubinsky, E. (1991.c). Constructive aspects of Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (*pp.231-250).*. Germany. Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., M. Mc. Donald (2001). APOS: a Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Research. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study (pp. 273-280).* Germany. Kluwer Academic Publishers.

Edwards, C.H., Penney, D.E. (2000). *Ecuaciones Diferenciales.* México, D.F. Ed. Pearson Educación.

Ekeland, I y Temam, R. (1974). *Analyse convexe et problems variationnels.* París, France. Ed. Dunnod.

Elsgoltz, L. (1977). *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional.* Moscú, Rusia. Editorial MIR.

Fattorini, H.O. (1999). Dynamic Optimization. En Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 62, (Ed.), *Infinite Dimensional Optimization and Control Theory.* Cambridge, England. Cambridge University Press.

Fuller, A.T. (1976). The early development of control theory. Parts I and II. *J. Dynamic Systems, measurements & Control, 98, pp. 109-118 y 224-235.*

Hall, H.R. (1907). *Governors and governing mechanisms.* Manchester, England. The Technical Publishing Co.2end ed.

Kalman, R.E. (1974). Optimization, mathematical theory of, control theory. En Encyclopaedia Británnica (Ed.), Fiftenth ed., *Optimization, mathematical theory of, control theory (pp. 636-638).* London, England. Encyclopaedia Britannica Press.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford, England. Oxford University Press.

Lenstra,J.K., Rinnoy, A., Schrijver, A. (1991). *History of Mathematical Programming. A collection of Personal Reminiscences.* Amsterdam, Holland. North Holland Press.

Lomelí, H., Rumbos, B. (2003). *Métodos Dinámicos en Economía. Otra búsqueda del tiempo perdido.* México, D.F. Editorial Thomson.

Mayr, O. (1970). *The origins of feedback control.* Cambridge, Ma, USA. MIT Press.

Meel, D.E. (2003). Pirie and Kieren´s model of understanding and Dubinsky APOS Theory. Examining shared and divergent elements. En A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel y F. Hitt (Eds), *Research in Collegiate Mathematics Education V (pp. 132-181).*. Providence, R.I. American Mathematical Society Press.

Nelly, A.E., Lesh, R.A. (2000). *Handbook of research design in Mathematics and Science Education.* Malwah, N.J., USA. Ed. Lawrence Eribaum Associates, Inc.

Ortega, J. (1986). Antología de obras de José Ortega y Gasset. En E. Inciarte (Ed.), *Una Educación para la vida (pp. 38-51).* México, D.F. Ed. de la S.E.P.

Piaget, J., R. García (1996). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México, D.F. Siglo Veintiuno Editores.

Pontryagin, L., Boltyansky, V., Gamkrelidze, R., Mishenko, E. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* New York, USA. Ed. Wiley-Interscience.

Salgado, H., Trigueros M. (2009).Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. *Revista Educación Matemática vol. 12 (pp. 27-48).*

Salgado, H.M. (2007). *Conteo: Una Propuesta Didáctica.* México D.F. Tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa. CICATA-IPN.

Seierstad, A., Sydsaeter, K. (1987). *Optimal control theory with economic applications.* Amsterdam, Holland. North-Holland Publishing.

Shone, R. (1997). *Economic Dynamics.* Cambridge, England. Cambridge University Press.

Solange, D. (2008). *Construcciones y Mecanismos mentales asociados al concepto de Transformación Lineal.* México, D.F. Tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.

Spiegel, M.R. (1981).*Applied differential equations.* New Jersey, USA. Prentice Hall, Inc.

Takayama, A. (1985). *Mathematical Economics.* Cambridge, England. Cambridge University Press.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Revista Educación Matemática, México, Grupo Editorial Iberoamérica, Vol. 17, número 1, pp. 5-31*

Trigueros, M., Oktac, A. (2005). Didactique et de Sciences Cognitives. En Annales de Didactique et de Sciences Cognitives (Ed.), Vol. 10, IREM, *La Theorie APOS et l´enseignement de l´Algèbre linèaire (p.p. 157-176).*. Université Louis Pasteur, Strasbourg. Ed. Université Louis Pasteur

Troutman, J.L. (1996). *Variational Calculus and Optimal Control.* New York, USA. Springer-Verlag Press.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I., Dubinsky, E. (2000). Learning Linear Algebra with ISETL. *http://www.ilstu.edu/ ifcottr/linear-alg/.* Recuperado el 19 de noviembre de 2008.

Weller, K., Clark, J.M., Dubinsky, E., Loch, S., Mc. Donald, M., Merkowsky, R., (2003). Research in collegiate Mathematics Education. En A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel y F. Hitt (Eds.), *Student Performance and Attitudes in courses based on APOS Theory and the ACE Teaching Cycle. (pp. 97-131)., vol. 5.* Providence, R.I., USA. American Mathematical Society Press.

Wilde, D.J., Beightler, Ch.S. (1967). *Foundations of optimization.* New Jersey, USA. Ed. Prentice Hall, Inc.

Zuazua, E. (2000). *Teoría Matemática del Control: Motor del desarrollo científico, tecnológico y social.* Madrid, España. Apuntes de clase, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense.

ANEXOS

ANEXO "B"

INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
TEMARIO
MATEMÁTICAS APLICAS A CIENCIAS ECONÓMICAS, I
(MAT- 24620)
2003-2008

OBJETIVOS: Introducir el análisis dinámico mediante el estudio de las ecuaciones diferenciales, y ecuaciones en diferencia haciendo énfasis en el análisis cualitativo. Dar los elementos de optimización dinámica en tiempo continuo mediante el estudio del cálculo en variaciones e introducir la teoría de control. Cubrir las técnicas básicas de la programación dinámica para los problemas en tiempo discreto.

1. **Ecuaciones Diferenciales**
   Ecuaciones lineales de primer orden
   Sistemas de ecuaciones con coeficientes constantes
   Ecuaciones de orden n con coeficientes constantes
   Análisis cualitativo
   Aplicaciones

2. **Ecuaciones en Diferencia**
   Ecuaciones de primer orden
   Sistema de Ecuaciones con coeficientes constantes
   Ecuaciones de orden n con coeficientes constantes
   Análisis cualitativo
   Aplicaciones

3. **Cálculo en Variaciones**
   Ecuación de Euler
   Condiciones de suficiencia
   Condiciones de transversalidad
   Aplicaciones

4. **Introducción a la Teoría de Control**
   Principio del Máximo
   Condiciones de suficiencia
   Condiciones de transversalidad
   Problemas con restricciones
   Aplicaciones

5. **Programación Dinámica en tiempo discreto**
   Ecuación de Bellman
   Fórmula de Benveniste-Scheinkamn
   Métodos de solución
   Aplicaciones

Bibliografía

Texto:

- Métodos Dinámicos en Economía
  Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos
  Thomson Learning
  Edición 2000

- Mathematical Methods for Economics
  M. Klein
  Addison –Wesley, 1997.

- Dynamic Optimization
  Alpha Chiang,

INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓMO DE MÉXICO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TEMARIO

OPTIMIZACIÓN

(MAT-22211)

2001 - 2007

El curso comprende una introducción general a la teoría matemática de la optimización y su aplicación en modelos económicos, tanto de tipo estático como dinámico. Se presenta las nociones fundamentales del análisis convexo, necesarias para su estudio. Asimismo, se presenta los elementos de la teoría de optimización dinámica y control óptimo, utilizados actualmente en modelos dinámicos de economía.

I. OPTIMIZACIÓN ESTÁTICA.

- I.1. Optimización diferenciable: Condiciones de optimalidad; criterios de primera y segunda derivada.
- I.2. Elementos de análisis convexo: Funciones y conjuntos convexos; hiperplanos separantes; teoremas de separación de convexos; criterios de convexidad y cuasiconvexidad. El concepto de subgradiente.
- I.3. Optimización restringida: Lagrangianos; dualidad y puntos silla; condiciones de Karush-Kühn-Tucker; el teorema de la envolvente. Aplicaciones económicas: la teoría del consumidor, la ecuación de Slutsky-Hicks, modelos de programación lineal en teoría de la producción, modelos de programación cuadrática en economía financiera (modelos de cartera).

II. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE VARIACIONES.

- 2.1. Preliminares.
- 2.2. Ecuación de Euler.
- 2.3. Modelo de Ramsey.
- 2.4. Extensiones a la ecuación de Euler: varias variables; derivadas de orden superior.
- 2.5. Condiciones de segundo orden.
- 2.6. Condiciones de transversalidad. Problemas con horizonte infinito. Un modelo de inversión.

III. TEORÍA DE CONTROL ÓPTIMO.

- 3.1. Introducción.
- 3.2. El principio del máximo y las ecuaciones de Hamilton-Jacobi.
- 3.3. Otras condiciones de transversalidad. Problemas con horizonte infinito.
- 3.4. Hamiltoniano en tiempo corriente.
- 3.5. Problemas con más de una variable. Un modelo monetario.
- 3.6. Interpretación económica del problema de control.
- 3.7. Una economía pequeña y abierta.

IV. ELEMENTOS DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

- 4.1 Introducción.
- 4.2 El principio de Bellman.
- 4.3 Elementos de optimización dinámica estocástica.

BIBLIOGRAFÍA

1. B. Rumbos y H. Lomelí, "En busca del tiempo perdido: métodos dinámicos en economía", 2001.
2. A.C. Chiang, "Métodos fundamentales de economía matemática", McGraw-Hill, 1987.
3. A.C. Chiang, "Elements of dynamic optimization", McGraw-Hill, 1992.
4. P.J. Lambert, "Advanced mathematics for economists. Static and dynamic optimization", Blackwell, 1985.
5. D.L. Ngo Van Long, "Optimal control theory and static optimization in economics", Cambridge University Press, 1992.
6. M.I. Kamien and N.L. Schwartz, "Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management", North Holland, olume 4,

Anexo “C”

ENTREVISTAS AL GRUPO DE M.A.E.

ENTREVISTA A MAGALI, Grupo: Matemáticas Aplicadas a la Economía (Revisada: María)

JC Entonces eh bueno como primera pregunta ¿Cuáles de las siguientes expresiones son funciones cuales son funcionales o cuales no son nada?, entonces justificando brevemente ¿no?
MC Si
JC La primera seria $f(x)=\int_0^x (5t^2+2)dt$. Sobre esta primera expresión que podríamos decir y ¿Por qué?
MC Bueno pues no es un funcional
JC ¿Por qué?
MC Bueno básicamente porque el funcional es una función que va de un espacio vectorial en R y depende de una variable y de su derivada
JC Una funcional es una función que va
MC De un espacio vectorial en R
JC En R, OK entonces esta ¿Por qué no es funcional?
MC Pues porque aquí tenemos solo una variable
JC O sea el dominio de eso ¿serian los reales?
MC Si
JC Y los reales ¿son espacio vectorial o no?
MC No, los reales no son un espacio vectorial
JC Entonces por eso no puede ser funcional
MC No, no puede ser funcional
JC ¿Es función o no?
MC Eh si podría ser una función
JC ¿Si es función?
MC Si es una función
JC ¿Por qué?
MC Porque esos dominios son los reales
JC A ver otra: $f(x,y)=x^2+y^2$ ¿Qué es lo que es?
MC Es la ecuación de un círculo, bueno es una función también
JC ¿Qué representa esa función?
MC Mmm... un circulo
JC Estamos en ¿de donde a donde va la función?
MC De los reales
JC ¿De los reales?, tiene dos variables ¿no?
MC ¿A una esfera? Es
JC O sea si tiene dos variables va de donde a donde
MC Este menos infinito a infinito ¿no? están son los reales
JC O sea están los reales
MC Para los dos, si porque es bueno X es los reales y, Y también es reales
JC Si pero son dos variables
MC Son dos variables si
JC Entonces en donde queda el dominio

MC Eh pues también en los reales
JC ¿En los reales queda el dominio?
MC Si
JC O sea ¿una función de dos variables tiene dominio en los reales?
MC Eh no
JC ¿En donde tiene su dominio?
MC Tiene su dominio ¿en R 2?
JC En R 2 exactamente
MC Si claro y es un punto que va a R 3
JC Y a cada punto de R 2 le asocia un punto en X Z
MC En X Z claro
JC O sea que la, eso es una superficie
MC Si
JC Y esa superficie si la hacemos con curvas de nivel ¿que nos da?
MC Eh, ¿con curvas de nivel?, eh nos da este ¿círculos en el plano?
JC Círculos o elipses ¿verdad?
MC Aja
MC SI
JC Es una función que va de
MC Que va de R 2 en R
JC De R 2 en R, ¿será funcional?
MC No
JC ¿Por qué?
MC Porque su dominio es R 2
JC Porque su dominio es R 2 y ¿que tiene que ver, para que sea funcional que se requiere?
MC Que su dominio sea un espacio vectorial
JC ¿Y R 2 no es espacio vectorial?
MC No
JC R 2 es espacio vectorial, a ver, entonces no es funcional ¿Por qué?
MC Porque su dominio es R2
JC ¿Y R 2 no es espacio vectorial?
MC No
JC ¿Seguro no es espacio vectorial?
MC Pues no por que en un punto en el plano le da un valor de X y un valor de Y te da un valor, bueno resultaría un valor en Z
JC Eso seria la función
MC Aja
JC Pero el plano R 2 ¿no es un espacio vectorial en si mismo?
MC A no, si
JC Entonces es una función que va de un espacio vectorial que es R 2
MC OK, aja
JC A los números reales
MC Exacto
JC ¿Entonces no es funcional?
MC Si
JC Si es funcional
MC Si es funcional
JC Entonces si es funcional y es función y no aparece ninguna integral por ahí, ni X prima si, o sea que deben ser funcionales particulares ¿no?, si que nos van a interesar pero son particulares
MC Aja

JC O sea lo que es básico para ver si es funcional es que el dominio sea
MC Un espacio vectorial
JC Un espacio vectorial ¿y el rango?
MC Los reales
JC Los reales, ¿si?
MC Si
JC A ver por ejemplo otra J de X es igual a la raíz de 1 mas X prima DT al cuadrado
MC X prima D T
JC Al cuadrado
MC ¿Así?
JC Aja, ¿eso que es?
MC Seria, una funcional
JC Permíteme tantito, entonces ¿es una funcional?
MC Si
JC ¿Por qué?
MC Porque es, es la línea de una función derivable y
JC Y esos son espacio vectorial ¿verdad?
MC Es un espacio vectorial
JC ¿Y el rango?
MC Y el rango serian los reales
JC Los reales entonces ya con eso cumple y ve que no hay integrales ahí
MC Si, no
JC ¿Si?
MC Si
JC Puede haber integrales puede aparecer X prima eso no indica nada, no nos indica mas, ahora hay algunas funcionales que tienen integral y tiene X prima esos son otro problema ¿no?
MC Si
JC A ver eh, $f(t)=\left(\int xdt,\int ydt,\int zdt\right)$ ¿eso es una función?
MC Eh, si, seria una función
JC ¿Por qué?
MC Eh, no seria una funcional ¿no? porque si las tres son a la vez una función de t y son derivables serian funcionales
JC Pero la t, ¿ que seria?
MC La variable independiente
JC Es decir numero real ¿no?
MC Aja
JC O sea que esa función va de los reales ¿A dónde?
MC A los reales
JC A cada t numero real ¿que le asocia?
MC Seria un punto en R 3
JC Un punto en R 3, o sea va de R en R 3
MC Aja
JC ¿Puede ser funcional eso?
MC No
JC No verdad
MC No, no es funcional
JC Porque ni el dominio es espacio vectorial ni el rango es R
MC Aja
JC Sin embargo, ¿puede ser función?
MC Pues si

JC A cada punto le asocia
MC Le asocia un punto en R 3
JC Eh a ver pon tres ejemplos de funcionales
MC ¿Cómo las que vimos en clase?
JC Como las que quieras, tres
MC Bueno
JC A ver si nos las vas diciendo, la primera ¿Cuál es?
MC $J(x, x', t) = \int_{t_1}^{t_2} (x'^2 + x' + t)dt$
JC OK, bueno la segunda
MC Seria, la segunda seria $J(x, x', t) = \int_{t_1}^{t_2} (x^2 + xx' + x + x')dt$
JC Aja,
MC Y la tercera seria $J(x, x', t) = \int_{t0}^{10} (tx'^2 + x)dt$
JC O sea si tú te fijas en los ejemplos que me pusiste
MC Aja
JC Siempre usaste integrales y siempre aparece X y X prima
MC Aja
JC ¿Hay alguna razón?
MC Eh no se porque así lo identifico mejor
JC Son las que mas se ven en el curso ¿verdad?
MC Aja

Por lo que respecta al concepto de funcional, podemos apreciar que aunque conoce la definición, considera (quizá por los ejemplos que vió en clase), que se requiere la presencia de una integral, una función y su derivada, para que una funcional pueda ser considerada como tal. Esta afirmación se ve confirmada cuando se le piden ejemplos de funcionales y da tres ejemplos con las características antes mencionadas. Ella misma responde que "asi lo identifico mejor", lo que nos lleva a suponer que tiene una concepción acción del concepto de funcional, podemos darnos cuenta que cuando aparecen los reales o algún espacio vectorial euclidiano no recuerda bien el concepto de Espacio Vectorial, que habíamos supuesto debería haber construído por lo menos con un tipo de concepción acción antes de iniciar este curso.

JC SI, pero a ver vamos a por partes a desglosar esto, bueno primero, ¿tu sabes como se expresa analíticamente una trayectoria?
MC ¿Analíticamente una trayectoria? Después de una función en el plano X Y
JC ¿Después de una función en un plano X Y?, a ver ¿como cual?
MC Bueno, eh bueno tomando en cuenta el funcional su dominio seria algún conjunto de curvas que describan las trayectorias
JC Es decir en estas funcionales el dominio son trayectorias
MC Son trayectorias
JC Eh
MC SI
JC En este caso, el dominio son trayectorias pero ya vimos que no siempre tienen que ser trayectorias ¿verdad?
MC Aja

JC Una trayectoria estas de acuerdo que parametricamente se puede escribir como lo hicimos arriba como F D T igual a X D T coma Y D T coma Z D T
MC Aja
JC Esa es forma parametrica pero en fin en estas funcionales como tu dices efectivamente el dominio son conjunto de trayectorias vamos a decir decentes, en el sentido que tienen derivada ¿no?
MC Si
JC OK ahora, ¿tú sabes lo que es una integral de línea?
MC La integral de línea eh, si la he visto en algún momento pero no me acuerdo muy bien
JC No te acuerdas muy bien
MC Si
JC Porque algunas de estas funcionales
MC Aja
JC Pueden ser un caso particular de una integral de línea ¿si?, el ruido que puede haber a lo mejor en optimización dinámica, no se si te paso
MC Aja
JC Es que por darle mucho énfasis a este tipo de funcionales que son muy importantes
MC Aja
JC Incluso se puede quedar uno con la idea que son las únicas que hay
MC Si creo que si
JC ¿Verdad?, y como que funcional tiene que tener integral una trayectoria y necesariamente y aparecer X y X prima ¿si?
MC Si
JC Esta claro que no necesariamente tiene que ser así, bueno tu dices integral de línea no te acuerdas bien y menos calcularla, menos calcularla eso una integral de línea
MC Si me la da puedo intentarlo tal vez

Sobre el concepto de Trayectoria o integral de línea no tiene ni siquiera una concepción tipo acció, puesto que ella misma reconoce no recordar este concepto..

JC Si, no pero si no te acuerdas bien no tiene caso, a ver a vamos a pasar a otra vamos a poner un problema de optimización, sea max $J(x) = \int_0^{10} \frac{-x'^2}{2} dt; \quad x(0) = 20, x(20) = 0$.
MC Aja
JC ¿podrías resolver esto?
MC Aja
JC Si nos vas diciendo lo que vas haciendo mejor ¿no?
MC Si por la ecuación de Euler
JC Aja
MC Sacamos primero la derivada de F respecto a X que es 0 después la derivada respecto a X punto que es menos X punto y después se saca la derivada este de la F de X punto sobre D T y esto es menos X bi. Prima
JC Aja
MC Y entonces seria F de X la derivada respecto a X menos la derivada de F X punto de sobre D T y eso da, bueno eso se tiene que igualar a 0 y entonces queda que X bi. prima es igual a 0
JC Aja y de ahí
MC De ahí se puede integrar X punto igual alguna constante K y X volverla a integrar quedaría K por T mas otra constante

JC Aja
MC Y entonces con las condiciones X en 0 igual a 20 entonces C es igual a 20 y X en 20 igual a 0, K es igual a menos 1
JC Podemos ponerle a la trayectoria óptima X estrella, aquí como quedaría entonces X estrella
MC X estrella es igual a menos T mas 20
JC OK, esa es la trayectoria optima
MC Aja
JC eso será máxima o minima
MC Depende, de podemos actuar es por la condición de Lagrange
JC ¿Que es lo que dice la condición de Lagrange?
MC X punto la derivada de la funcional dos veces respecto a X punto si es positiva es un mínimo y si es negativo es un máximo
JC Aja, pero en este caso que pasa
MC En este caso es menos 1 y entonces
JC A ver F R respecto a X prima cuanto vale
MC F, F respecto a X prima es menos X prima y luego volviendo a derivar respecto a X prima da menos 1 y como es negativo es un máximo
JC O sea es un máximo
MC Aja

En cuanto a las condiciones de primer orden representadas en la Ecuación de Euler, podemos suponer que ha interiorizado las acciones que permiten establecer la Ecuación de Euler en un proceso y que ha logrado coordinarlo con el proceso de solución del sistema dinámico asociado. De aquí, podemos suponer un tipo de concepción proceso sobre las condiciones de primer orden (Ecuación de Euler).

En cuanto a las condiciones de segundo orden, podemos análogamente suponer que ha interiorizado las acciones que permiten determinar si se trata de una trayectoria máxima ó mínima en un proceso.

JC Vamos a ver de que otra forma podemos aunque no demostrar si ir viendo que es un máximo,
MC Aja
JC Podemos dar distintas trayectorias y hemos de saber que esa debe ser la mejor ¿no?
MC Aja
JC A ver primero cuanto vale la funcional para la trayectoria optima
MC Menos C 1 X la literal seria 20 D menos X, X prima seria menos 1de menos, menos 1 al cuadrado entre 2 D T, entonces esto se va la integral menos ½ D T, ¿vale menos 10?
JC ¿Menos 10?
MC Aja
JC Bueno vamos a ver otra una muy sencilla, ¿Cuál podría ser una muy sencilla?, para probarla, ¿Cuánto vale la funcional para esta trayectoria?, una que este muy cerca
MC X igual a menos 2 T mas 10
JC A ver párteme uno
MC Menos 40
JC ¿Es mas grande o mas chico?
MC ¿Es mas chica?
JC Es mas chica ¿verdad?
MC Aja

JC A ver una muy sencilla ¿Qué pasa con X D T igual a T?
MC X de T igual a T
JC Aja
MC Menos 20
JC ¿Sigue siendo más chica, no?
MC Mm
JC Sigue siendo más chica
MC Si sigue siendo más chica
JC A ver una constante
MC Da 0
JC ¿0 es mas grande que menos 10?
MC Si, si
JC ¿Qué pasa ahí?
MC Eh ¿no hice bien algo?
JC O hubo un error ahí o ¿puede haber máximos negativos también aquí o no?
MC No
JC Aquí no hay máximos negativos, tienen que ser absolutos
MC Si
JC No puede ser para una T entre tal, tal valor
MC Si bueno si es así
JC Habría que ver ¿no?
MC Pues le estas dando un intervalo
JC Dentro de que vecindad puede ser máximo
MC Aja
JC ¿Si?
MC Si
JC ¿Este por qué las condiciones? este por ejemplo suficientes cuando nos dicen una función es cóncava o convexa ¿si? ¿Por que en el caso de funcionales también analizamos únicamente el integrando, por que razón?
MC ¿El integrando?
JC O sea viendo el integrando
MC Aja
JC Sabemos si una función es cóncava o convexa ¿no? utilizamos la matriz Hessiana
MC Si
JC O lo que sabemos de calculo ¿Por qué?
MC Es, bueno se usa análogamente lo que es una función
JC Aja
MC Eh también se usan las derivadas este
JC Pero ¿Por qué razón se puede?
MC Por pues también por la forma de funcional
JC ¿O sea quien determina la forma de la funcional?
MC Eh pues depende del integrando
JC A ver otro ejemplo vamos a volver al problema de minimizar la integral que va de T 0 a T 1 de la raíz de 1 mas X prima al cuadrado y luego es D T, ¿no? ¿Eso que representa?
MC La distancia mas corta de entre dos puntos
JC Entre dos puntos intuitivamente sabemos quien es ¿no?
MC Si
JC ¿Quien es?
MC La recta

JC Bueno estamos minimizando ese funcional la trayectoria mas corta si es una recta debe ser de la forma X estrella igual a, A por T más B ¿no?
MC Aja Aja
JC Esa debiera de ser
MC Si
JC Ahora para obtener ese mínimo implícitamente el criterio ¿donde queda expresado?
MC En la raíz
JC ¿En la raíz de 1 mas X prima al cuadrado?
MC Aja
JC La raíz de 1 mas X prima al cuadrado representa ¿Qué cosa?
MC Eh
JC ¿Te acuerdas cuando se decía que eran pedacitos de tangente?
MC Aja
JC Que se suman ¿no?
MC Si
JC Eso da toda la curva
MC Si
JC Pero entonces se minimiza en base a lo que ahí dice el integrando ¿no? lo que quedo en el integrando lo que dice el integrando
MC Si
JC Por ejemplo si en otra funcional nos pusieran minimizar la integral de 0 a T mayúscula de D T minúscula
MC De D T
JC Donde T es el tiempo
MC Aja
JC La integral de D T es el tiempo ¿no?
MC Mmm...
JC Ahí nos estarían pidiendo minimizar el tiempo que no necesariamente se minimiza con la recta ¿no?
MC No
JC ¿Si?
MC Mmm...
JC ¿Entonces bajo que criterio vamos a minimizar en este caso la funcional?
MC Pues depende de, o sea de o sea de la variable que se quiera maximizar o minimizar
JC Aja en este caso de que variable en termino de quien se quiere minimizar
MC Bueno en el segundo ejemplo seria el término del tiempo
JC Aja, y ¿donde queda donde se ve eso clarísimamente en la funcional?
MC En al X
JC En cualquier funcional ¿Dónde se ve ese criterio que, que es el que esta implícito lo que se quiere optimizar?
MC Pues en las variables que se usen
JC ¿En las variables así solas sueltas?, X prima T o lo que sea o en el integrando completito
MC En el integrando
JC En el integrando ¿no?
MC Si
JC O sea que el integrando es como el criterio bajo el cual vamos a optimizar una función
MC Si
JC Si en economía el integrando fuera una función de costos que entra X y X prima, queremos minimizar esa función de costos
MC Mmm

JC ¿Si? Y entonces eses el criterio bajo el cual se va a minimizar, esa integral, ¿Por qué nada mas nos fijamos en lo que esta adentro?, bueno porque la integral en realidad no cambia el orden de las cosas
MC Mmm
JC ¿Si?
MC Si
JC Y lo mismo para las condiciones de suficiente
MC Si
JC ¿Si se ve?
MC Mmm
JC Bueno, este a ver uno mas, a ver por ejemplo otra vez retomando este problema, minimizar la integral de D T 0 hasta T 1, de la raíz de 1 mas X prima al cuadrado D T, ya sabemos lo que es esta ya la discutimos
MC Si
JC Eh
MC Mmm
JC Ese problema como se puede expresar, esta en lenguaje de calculo de variaciones ¿no?
MC Si
JC ¿Cómo lo podemos expresar en el lenguaje de control?
MC Eh, se tiene en la parte de las condiciones iniciales eh, se sujeta a otra, a una función de control que seria, U igual a X punto puede ser
JC Mmm
MC Y se sustituye el funcionamiento
JC O sea escribiríamos ¿Cómo?, minimizar
MC Mmm, la integral de T 0 a T 1y la integral de 1 mas U cuadrada
JC Mmm
MC D T
JC Por la restricción ¿no?
MC Ah si, sujeto a las condiciones iguale s y U X punto
JC OK, ahora como se plan…, ¿como se resolverían esos problemas?, nada mas eh me interesa el planteamiento no la solución
MC Si
JC ¿Cómo, como se resolverían en calculo de variaciones y como en teoría de control?
MC Eh en cálculo de variaciones seria igual con la derivada respecto de X y luego la derivada respecto X punto, dos veces
JC ¿Dos veces?
MC Eh, bueno no la derivada respecto de X punto y luego la deriva de eso respecto D T
JC Igual a 0 seria la ecuación de Euler ¿no?
MC Aja la ecuación de Euler, si, y en el, la teoría de control se usaría el Hamiltoniano
JC ¿Cómo se escribiría ahí el Hamiltoniano?
MC El Hamiltoniano se escribe igual al funcional que es raíz de 1 mas U cuadrada mas landa por la, por este la funcional control que seria U
JC Y ¿Cuáles son las condiciones?
MC Mmm H de, H de U igual a 0, hay no me acuerdo muy bien, H de landa igual a X punto y H de X, H de X menos landa punto.

Podemos apreciar que puede pasar de un problema de Cálculo de Variaciones a un problema de control, por lo que podemos suponer que ha interiorizado las acciones que le permiten distinguir si un problema es de Cálculo de Variaciones o de Teoría de Control en un proceso.

JC Bueno no te acuerdas exactamente de las condiciones
MC Si
JC Pero ya sabes que existen unas condiciones y que las puedes repetir y hacerlo ¿no?
MC Si
JC ¿Cómo puedes distinguir en un problema de control, cual es la variable d estado y cual es la de control?
MC Eh la variable de estado no seria la variable de control seria U porque este, no se, la estas es algo que, que lo puedes tomar y, bueno se dice que se lo puedes controlar de alguna manera y, y eso lo aplicas en el problema
JC Pero ¿como escogiste la variable de control?, en base a que
MC A que es, no se, es como la sustitución
JC O sea donde queda la derivada, la derivada es el ritmo ¿no? que es con lo que se controlan las cosas
MC SI
JC Entonces la derivada lo que tiene la derivada eso seria la variable de control
MC Mmm

No responde sobre la diferencia esencial entre ambas variables por lo que no podemos asegurar que haya interiorizado las acciones que permiten distinguir entre variables de estado y variables de control.

JC OK, este bueno a ver unas preguntas ya abiertas finales,
MC Si
JC ¿Si sabes?, bueno primero las condiciones de transversalidad ¿de donde vienen, de donde surgen?
MC Eh pues surgen de que en las condiciones iniciales en algunas ocasiones no están dadas fijas
JC Mmm
MC Si no que se puede dejar el no se, puede ser que el tiempo sea libre o que el la X de determinado tiempo sea libre o que ambos sean libres
JC Mmm, y eso si se lo puedes graficar
MC Si
JC Todas con esas condiciones
MC Si, ¿lo grafico?
JC A ver como seria, rápido dinos algún ejemplo
MC Eh, con X de, con T libre, con T libre seria una frontera vertical, no horizontal perdón, y bueno se busca una trayectoria con el
JC Que llegue a un X D T A ¿no?
MC Igual que llegue a una X determinada X 1, y que llegue en algún momento a esa barrera eh, y luego con X de T igual a, bueno libre seria una barrera vertical
JC Si el tiempo esta dado ¿no?
MC Aja, cuando el tiempo esta dado, bueno no se, 10 o algo y entonces el tiempo aquí seria vertical y se busca una trayectoria.

Es capaz de explicar desde un punto de vista gráfico, los distintos casos que llevan a considerar a las Condiciones de Transversalidad, por lo que podemos suponer que ha interiorizado las acciones que permiten ubicar el origen de las condiciones de transversalidad desde un punto de vista geométrico en un proceso.

JC OK, ahora alguna pregunta este general

MC Si
JC Tu conoces las condiciones de primer orden la ecuación de Euler y
MC Mmm
JC El Hamiltoneano
MC Si
JC Las de segundo orden, o sea puedes resolver una funcional y determinar si la trayectoria optima es máxima o minima pero la pregunta es ¿tu puedes deducir las condiciones? para llegar a esas, puedes deducirlas o puedes o las entendiste clarísimamente o nada mas las aplicas ya una vez dadas
MC Eh bueno si las entendí porque la maestra nos dijo que era, era análogo a lo que sucede en una función normal
JC ¿Pero entendiste el procedimiento el proceso?
MC Eh si mas o menos
JC Si para llegar a el, ¿lo podrías repetir?
MC Eh no, ya no me acuerdo muy bien
JC O sea lo entendiste en su momento pero no lo puedes repetir ahora
MC Si
JC En una función si lo podrías repetir
MC No
JC En una función si lo podrías repetir
MC Si
JC Es mas difícil aquí ¿no?
MC Mmm, un poquito
JC Entonces aquí muchas veces un se conforma con el resultado y lo aplica ¿no?
MC Si
JC ES cierto o ¿no?
MC Pues si
JC Si verdad
MC Si
JC Entonces es, bueno y por otro lado en don de eh, ¿Cuál es la dificultad que tu consideras que has tenido para, lo que mas te costo para entender el concepto de funcional?
MC Eh no se creo que fue lo de campo vectorial, bueno si entendí que el dominio se da en curvas así lo entendí mejor
JC Tienen que ser curvas
MC Bueno no pero, bueno en los ejemplos que nos daba el primero que le dimos eh bueno ah si eran curvas
JC O sea las trayectorias entonces cuestan trabajo
MC Aja si
MC Bueno más que nada entender lo que es el concepto de campo vectorial
JC O sea el concepto de lo que es el espacio vectorial
MC Aja, si el espacio vectorial
JC Mmm, y la trayectoria, el concepto de trayectoria no crees que facilitaría mucho manejarlo para entender mejor un funcional, una funcional
MC Si yo creo que si, bueno al final de cuentas bueno ya sabemos que optimizando lo que es la funcional nos da la trayectoria optima ¿no?
JC Mmm, ¿que problema mas importante tuviste para entender el concepto de cómo resolver de la optimización de funcionales?
MC Pues no creo
JC ¿O eso fue mas fácil que el concepto de funcional?
MC Si creo que si fue mas fácil

JC O sea el concepto de funcional tu crees que es mas difícil
MC Si creo que si
JC Entenderlo
MC Si
JC ¿Lo manejas ya muy bien o todavía tienen dudas?
MC Eh creo que ya voy mejor respecto a eso
JC Mmm, y este que otra dificultad así importante tuviste en la parte de calculo de variaciones o teoría de control
MC Eh, lo que es en teoría de control, bueno las condiciones pues no, no hay problema pero después para resolverlos se tienen que resolver con matrices y, y bueno una serie un procedimiento creo yo mas largo y complicado
JC O sea pero ya fuera de lo que es cálculo de variaciones y teoría de control
MC Si, si
JC Que puede ser el sistema de ecuaciones diferenciales, como se resuelven
MC Si
JC Etcétera ¿verdad?, ¿que sugerirías para buscar un aprendizaje mas eficiente?
MC Eh, bueno creo que como lo estoy viendo con mi maestra esta bien, porque bueno nos había comentado que todo esto lo veían en tres semanas no se, algo así y creo que si debe de tomar su tiempo ¿no?, y muchos ejercicios mucha explicación y pues ya creo que sobre todo
JC OK
MC Explicar la teoría mas bien la si la teoría
JC Entonces muy importante a lo mejor ver la funcional ver muchos ejemplos de funcional
MC Si
JC Y ver que hay funcionales que son diferentes
MC Exacto
JC A las que se usan manejar un poco más eso
MC Si
JC Y bueno yo tengo una hipótesis pero ahí no se ¿si tu la compartas o no?
MC Mmm
JC De que el, el conocer ante lo que es una trayectoria, distintos tipos de trayectoria e integrales de línea, porque muchas veces hicieron funcionales con integrales de línea, pero saber como se resuelve eso podría ayudar a mejorar, o les va ayudar a entender mejor el concepto de funcional, no se tu que opines ahí
MC Pues yo no entendí bien, o sea lo entendí mejor con los ejemplos eh, pero no se o sea creo que lo entendí bien así
JC Mmm
MC Pero si nos explico unas cosas no se trayectorias, dependiendo de lo que se buscaba optimizar y si lo entendí bien así
JC Bueno pues te agradezco mucho Magali
MC Si
JC Que nos hayas ayudado
MC Si

En resúmen podemos suponer que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre los conceptos de trayectoria e integral de línea, una concepción acción del concepto de funcional y en el mejor de los casos del concepto Espacio Vectorial. En cuanto a las condiciones de primer orden (Ecuación de Euler) y las de segundo orden (condición de Lagrange) tiene una concepción tipo proceso, lo mismo en cuanto a las diferencias entre un problema de Cálculo de Variaciones y uno de Teoría de Control y sobre el origen de las Condiciones de Transversalidad.. Sin embargo, solamente tiene una concepción tipo acción sobre las

diferencias entre variables de estado y variables de control. Por otro lado, no establece relaciones importantes entre los distintos conceptos que conforman su esquema de Funcional, por lo que podemos suponer que dicho esquema se encuentra a nivel intra.

ENTREVISTA A Arlette. Grupo M.A.E.

JC Estamos a 28 de abril ¿verdad?, del 2008, tu nombre
AA Arlette
JC OK, entonces vamos a hacer algunas preguntas, el chiste esta en que pienses fuerte todo, digas todo lo que piensas, etcétera porque eso nos puede ayudar ¿no? Entonces la primera pregunta dice, dadas las siguientes expresiones determinar cuales son funcionales, cuales únicamente funciones o en el caso de ser relaciones también decirlo ¿no?, justificando brevemente, empezamos una por una, la primera seria $f(x)=\int_0^x (t^2+5)dt$, ¿es función, es funcional, no es ninguna de las dos y por que?
AA Este creo que es funcional, porque depende del tiempo
JC O sea cualquier cosa que dependa del tiempo ¿es funcional?
AA No, no es funcional porque no esta maximizando
JC O sea una funcional tiene que estar ligada al proceso de maximizar algo
AA O minimizar
JC Por qué no recordamos la definición de funcional a lo mejor nos ayuda, ¿Qué es una funcional?
AA Bueno una funcional es algo que en su dominio son como muchas funciones, podría ser como un recorrido, entre dos puntos, pero ese recorrido son muchas, contiene muchas trayectorias entonces lo que se quiere hacer con el funcional es encontrar la mejor trayectoria al resolver ese problema
JC Ese es el problema que tiene la optimización dinámica ¿no?
AA Exacto
JC Pero la optimización dinámica se basa en la funcional y la funcional como un objeto, existe independientemente de que se le quiera optimizar
AA Pues si
JC Entonces este a ver volviendo ala definición de funcional, ¿funcional es?
AA Es, podría ser como una función pero que depende…
JC Es una función
AA Pero que depende de varias variables y esas variables son el tiempo y puedes agregar mas ¿no?, ya sea X o Y
Entonces cual seria la diferencia de una función de las que ven en calculo y ahora este objeto que se llama funcional
AA Pues la diferencia es que aquí ya entra la variable tiempo, y que por ejemplo una función la resuelves y muchas veces va a ser, obtienes una solución de resolver un funcional puede cambiar através del tiempo, bueno es dinámico y una función es como estática ¿no?
JC Una función es estática o sea el tiempo no puede entrar en una función
AA Pues podría, pero, o sea, podrías manejar una función del tiempo también pero, en un funcional ya entran como periodos ¿no?, como ciclos
JC Mmm,
AA Bueno yo así lo veo
JC Entonces esta seria funcional o ¿no?

AA Si
JC ¿Si?
AA Si
JC Si porque entra el tiempo ¿verdad?
AA Este
JC ¿Qué representaría geométricamente esa integral?
AA Esa integral
JC Mmm, el integrando pues es de hecho, tiene una variable ¿no?, nada mas
AA Es que te quedaría como en términos de X
JC Aja
AA Y representa una función
JC La integral cuando, el integrando es positivo que representa
AA ¿Cuando el integrando es positivo?
JC Mmm
AA Un área ¿no?
JC Es el área
AA Un área bajo la curva
JC Podríamos decir que es el área bajo una curva
AA Exacto
JC La curva que esta en el integrando que representa como una parábola ¿no?
AA Si
JC ¿Y el área entre que y que esta dada?
AA Entre 0 y X
JC X puede ser cualquier número real ¿no?
AA X esta…
JC Puede ser positivo o negativo o 0, ¿pero puede ser cualquiera no?, o sea en lugar de fija al reves, seria variable seria cualquiera ¿no?
AA Pues si puede ser cualquiera, pero una vez que le das un valor a X ya esta fija
JC Ya seria fija, entonces ya seria el área nada mas desde 0 hasta esa X fija…
AA A algo
JC ¿verdad?, pero esa X fija puede ser la que sea, por eso es una función de X ¿no?
AA Si
JC Representa el área bajo la curva desde 0 hasta la X que uno fije, bueno entonces con eso podemos ver que ¿es función o no es función?
AA Si es función
JC Si es función, pero además es funcional, porque entra el tiempo ¿si?
AA SI
JC Bueno OK esta es la primera. Segunda $f(x,y)=\int_0^3\int_0^{x^2}\left(5x^3y+8x\right)dydx$ F de X coma Y, esto es una integral iterada, ¿Qué representa eso geométricamente?
AA Eso para mi, bueno ya es en tercera dimensión ¿no?
JC Mmm
AA Es una integral como las que vimos en cálculo 3, pero no para, no es un funcional
JC Mmm
AA Entonces esto representa el área de una función en tercera dimensión
JC ¿El área?
AA El volumen
JC Seria un volumen
AA Vendría siendo un volumen

JC ¿Cuál seria?, bueno el dominio ¿Dónde quedaría?
AA El dominio en los reales, no el dominio en R 2 y el rango va a los reales
JC ¿Y todo R 2?
AA Si
JC O entre…
AA Si porque el dominio es, o sea, la figura aquí ya es R 3 ¿no?, la figura se encuentra en R 3 y el dominio se encuentra en R 2
JC El dominio se encuentra en R 2 pero es todo R2, o es nada más una región dentro de R 2
AA Pues de acuerdo a los límites seria positivo siempre porque va de 0 a X cuadrada pues cualquier número elevado al cuadrado es positivo y del 0 al 3...
JC Mmm, es decir el dominio entonces seria una región en R 2, que esta delimitada por…
AA No, pero al resolverlo ya entrarían negativos ¿no?, al resolverlo como, para sacar la región…
JC Para la región, los primeros límites marcan curvas ¿no?
AA Si
JC Desde que Y es 0 hasta X cuadrada, Y igual a 0 es una recta, y, Y igual a X cuadrada es una curva ¿no?
AA Es una curva pero toma valor, esa curva…
JC Y luego la X va de donde a donde
AA De menos infinito a infinito
JC NO, ahí dice, en la segunda línea
AA Ah, de 0 a 3
JC Entonces donde se ve ahí de 0 a3
AA Si seria como esta parte
JC La de arriba o la de debajo de la parábola
AA La de abajo
JC La de abajo ¿verdad?, esa región esta en R 2, y se esta calculando un volumen
AA Si
JC Es una función eso o ¿no?
AA Si
JC ¿Por qué?
AA Porque, no se, de esta región depende el volumen que vamos a calcular
JC Mmm
AA Porque hay dependencia ¿no?, entre ellas
JC Mmm, si lo que quiero ver nada más que argumento podría ser ¿no?
AA Bueno
JC Porque es función o porque no es función, dices que es función porque hay dependencia
AA Mmm
JC OK, ¿será funcional?
AA No
JC ¿Por que no?
AA Porque al principio también cuando, bueno cuando se da el argumento si es funcional o algo aquí debería de poner el tiempo
JC Mmm
AA Aquí yo creo que debe ir expresado el tiempo, aunque acá no vaya
JC O sea como no entra el tiempo no es funcional
AA No, yo no lo veo como funcional, lo veo como una integral

JC OK, a ver la que sigue seria, $f(x, x', t) = \sqrt{1 + x'^2}$
AA Este si es funcional
JC Si es funcional ¿Por qué?
AA Porque ya entra el tiempo y la variable
JC O sea, entra X, y entra X'
AA Exacto
JC Por eso es funcional
AA Puedo, bueno corregir algo que me di cuenta
JC Si
AA El primero no es funcional
JC El primero no es funcional ¿Por qué?
AA No, es solamente una función porque ahí no esta explicita la X' ni la T. No, no es función porque un funcional tiene muchas trayectorias
JC OK, a ver uno mas, $J(x) = \left(\int_0^5 x(t)^2 dt, \sqrt{1 + x'^2} \right)$ ¿es una funcional?
AA Si
JC ¿Si?
AA Si
JC ¿Por qué?
AA Porque incluye a las variables de X' y…
JC O sea, porque aparecen X'
AA Y T
JC Y T, OK, función, ¿será función?
AA No
JC ¿No?
AA No
JC ¿Por qué no?
AA Este porque, porque ya la optimización es como que dinámica ¿no?
JC O sea no es función
AA No es función
JC A ver uno mas, $J(x) = \int_0^T (x^2 + x'^2) dt$ ¿qué será?
AA Un funcional
JC Una funcional, ¿Por qué otra vez?
AA Porque, bueno depende del tiempo
JC Depende del tiempo
AA Mmm
JC OK, a ver vamos a poner un ejemplo de algo que dependa también del tiempo a ver $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$, ¿es una función o no?
AA Pues es un vector, pero, bueno es que creo que no fui clara al explicar porque era funcional si depende del tiempo
JC Mmm
AA Sino mas que nada yo lo identifico por la variable X' y ya va el tiempo explicito
JC O, sea siempre X'…
AA El tiempo va implícito aja. Es como una acumulación con X' y el tiempo
JC OK, de acuerdo, vamos a recordar algo, una funcional se define como una función que va de un espacio vectorial normado en los números reales, por lo tanto cualquier función de varias variables que vaya de R N en R pues seria funcional ¿no?

AA Mmm
JC Porque R N es un espacio vectorial normado, las funciones que van de R en R N no, porque R no es espacio vectorial ¿no?, pero de R N en R si serian funcionales, caso particular de funcionales, serian funcionales serian funciones ¿si?, bueno entonces para determinar si algo es funcional hay que ver si es una función va de un espacio vectorial que puede ser un espacio de funciones, funciones continuas, derivables etcétera a los números reales, si el rango de esa función no son los reales ya no es funcional. Entonces, vamos a obtener el dominio y el rango de cada una de las expresiones anteriores, y a lo mejor cambiamos de opinión en algún caso, por ejemplo, la primera, la primera habías dicho que es función ¿verdad?
AA Mmm
JC ¿Cuál es el dominio de esa función?, en el de hasta arriba
AA El de T cuadrada más 5
JC Aja, ¿Cuál seria su dominio?
AA Los reales
JC Los reales, ¿y el rango?, o sea no cual es el rango sino donde estaría contenido el rango…, una integral es un numero ¿no?
AA Aja, pues a partir de 5 a infinito ¿no?
JC Si, no me importa cual es sino donde queda, quedaría en los reales también ¿no?, es una función que va de R en R, ¿podría ser funcional?, ahora vamos a verlo desde esta nueva perspectiva, para que sea funcional se requiere que su dominio sea un espacio vectorial
AA Exacto
JC ¿Los reales son espacio vectorial?, pues no ¿verdad?
AA No, o sea R N si
JC R N, si, con N mayor que 1
AA Aja
JC Entonces no puede ser
AA Funcional
JC Funcional, OK, la segunda
AA La segunda el dominio esta en R 2
JC Mmm
AA Y el rango esta en R
JC Mmm
AA En los reales
JC Mmm, ¿puede ser funcional o no?
AA No, pues que la figura esta en R 3 pero el rango va, según yo va a los reales
JC Mmm, pero una funcional es una función que va de un espacio vectorial a los reales
AA Entonces
JC Entonces si es o no es
AA podría ser, o sea, una funcional
JC Es una función que va de, que va de un espacio vectorial normado a los reales, R 2 es un espacio vectorial ¿no?, y va de R 2 a R
AA Si podría ser un funcional, pero ahorita me dijo que va de espacio vectorial normado a otro ¿no?
JC A los números reales
AA ¿ A los números reales?
JC A los números reales, o sea, el rango de una funcional siempre son los reales ¿si?
AA Mmm

JC O sea, mas importante que aparezca la X’ la T todo eso, lo mas importante es que vaya de un espacio vectorial normado a los números reales, ¿si?, entonces ¿esta seria o no seria?
AA Pues si, si seria
JC Si seria, la numero tres, ¿Cuál es el dominio?
AA Los reales
JC ¿Los reales?, aparece X y X’
AA No, es cierto hay X’
JC En la numero tres si aparece X y X’ ¿no?
AA Es raíz de 1 mas X’
JC 1 mas X’ al cuadrado
AA Mmm, 1 mas, si hizo falta el segundo
JC Y para que aparezca X’ el dominio tendría que ser un espacio vectorial ¿no?
AA Si
JC Un espacio de funciones derivables
AA Exacto, entonces ahí ya sabemos que es
JC Nada mas hay que ver el rango, ¿el rango si son los reales?, es la raíz de 1 mas X’ al cuadrado
AA Pues depende
JC La raíz cuadrada es un número real ¿no?
AA Si
JC Si, verdad y X’
AA Y X’ como esta al cuadrado si puede ser funcional
JC Para cada T
AA Aja
JC Va a ser un número
AA Si
JC Podemos decir que es una funcional
AA Si
JC La cuatro
AA Si,
JC Nada mas que la cuatro el dominio si es un espacio vectorial de funciones
AA Aja
JC Pero el rango
AA Este en la primera que es X cuadrada
JC El rango
AA Es que para empezar, ya es un vector
JC Es un vector
AA No es
JC No es entonces una funcional ¿verdad?, pese a que aparece X, X’ y T
AA Exacto, si
JC Entonces lo mas importante para que sea funcional ¿es que?
AA Que su dominio sea un espacio vectorial
JC Exactamente que su dominio sea un espacio vectorial y su rango sean los reales, o este ahí, bueno en base a esto que acabamos de ver, que decisiones cambiarias con respecto a las primeras que hiciste
AA Respecto a las primeras, bueno la primera no
JC La primera no es ¿verdad?
AA La segunda si, la tercera también, la cuarta no, la quinta si, la sexta no
JC Mmm, ¿la sexta?
AA La sexta no…

JC No verdad porque el dominio esta en los reales
AA Si, y es un vector
JC Y es un vector y con eso no se podría ¿verdad?, o sea, si se hicieron cambios en base a la definición
AA Si
JC O sea, que siempre sirve la definición ¿no?, bueno, ¿Cómo podrías distinguir analíticamente que algo entonces es una funcional?
AA Pues, no se, revisando tal vez, como es esa funcional y este ver rápidamente mas o menos darme una idea de cómo es el dominio y el rango y ya revisar si es espacio vectorial
JC O sea viendo el dominio y el rango básicamente ¿no?
AA Si
JC Lo que hay que checar, bueno a ver siguiente ejemplo, el dos, dar tres ejemplos de funcionales justificando que lo sea
AA Tres ejemplos
JC Si
AA podría ser una J de X, X' T, yeso igual a la integral de 0 a 2, D X' al cuadrado mas X por X' mas T, todo eso dentro es D T
JC Y por que es funcional
AA Es funcional porque la función, este, va en, de los reales a los reales, o sea,…
JC ¿Va de los reales a los reales?
AA Bueno su dominio se encuentra en los reales
JC O sea el dominio ¿Cuál es?, aparece X, X'
AA Y T
JC Y T, la T la T como variable independiente ¿no?
AA Si
JC Pero X y X' para que aparezca X' y la X ¿puede ser real?
AA Si la X puede ser real tiene que estar…
JC O tiene que ser un espacio vectorial
AA Si puede ser real
JC ¿Puede ser un número real?, entonces su derivada seria 0 ¿no?
AA Bueno elevado a algo, no elevado precisamente nada mas multiplicado por el
JC Pero ahí la X no se esta pensando como funciones X D T ¿no?
AA Mmm
JC O sea una función de T
AA Si, bueno es que todas estas variables como que ya tienen el tiempo ¿no?
JC Dependen del tiempo, entonces ¿el dominio seria?, un espacio vectorial que es el espacio de...
AA De tiempo
JC Funciones derivables
AA Si
JC Que depende de T
AA Si porque al asumir que ya hay una X' significa que en X ya eran derivables ¿no?
JC Mmm
AA tendría que haber puesto eso
JC Si, OK, otro, uno en que no se use la integral
AA ¿Que no se use la integral?, este J de X
JC Mmm
AA J que depende de X, X' y T es igual a X cúbica mas X' mas X' al cuadrado por X, este, es funcional
JC Mmm

AA Porque el dominio de X se encuentra en un espacio vectorial normado y derivable, entonces, y pues su rango por lo tanto también se encuentra en un espacio vectorial
JC ¿Su rango?
AA Bueno, su rango...
JC Al hacer las operaciones
AA Aja
JC Como son número reales en realidad
AA Pueden estar en los rangos
JC Han de ser reales ¿no?
AA Si
JC ¿Si?, porque X en T es un real
AA Si
JC ¿Si?, bueno 1 mas
AA Seria J que depende de X, X' y T que es igual a X a la cuarta mas X' mas X? cuadrada
JC Mmm
AA Igual es un funcional, porque X se encuentra en un espacio vectorial normado y derivable, entonces X esta en reales y eso implica también que ya al resolver esta ecuación su rango va estar en reales

De lo anterior podemos suponer que ha interiorizado las acciones para determinar que una expresión matemática es o no funcional en un proceso, pese a que parte de sólo un caso particular de funcionales. Cuando se le da la definición completa de funcional, toma otras acciones para determinar cuando alguna expresión es funcional, por lo que podemos suponer que ha interiorizado las nuevas acciones para determinar funcionales en un proceso.

JC Mmm, OK, bueno una tercera pregunta. ¿Cómo podemos saber analíticamente que una función en su representación geométrica es una trayectoria?
AA Una función…
JC Como vemos que si es una trayectoria, por ejemplo ¿Cómo seria la expresión de una circunferencia?, es una trayectoria una circunferencia, ¿Cómo la podemos escribir?, como función
AA Pues
JC Porque siempre se puede escribir como X cuadrad mas Y cuadrada igual a R cuadrada lo que sea ¿no?, pero ahí no esta expresada como función ¿si?, en general las trayectorias se expresan por medio de funciones que son parametricas, a ver ¿Cómo seria eso?
AA Puedo a representarla por medio de un funcional
JC A ver como ¿una trayectoria seria una funcional?
AA Bueno es que un funcional tiene muchas trayectorias
JC El funcional en si mismo, o el integrando del funcional puede ser
AA Bueno este lo que se busca con un funcional al resolver el problema es encontrar la mejor trayectoria
JC Mmm
AA A esa ecuación
JC Al optimizar
AA Al optimizar pero si solamente lo tienes así, me imagino que pues si realmente son varias trayectorias ¿no?
JC Lo que pasa es que una funcional va sobre un espacio vectorial, que pueden ser funciones, trayectorias
AA A otro espacio

JC Pero va a los reales
AA Aja
JC Entonces una trayectoria en si misma no se puede dar así, una trayectoria será por ejemplo como el último ejemplo de la página anterior
AA Tienes una función
JC Es una función que depende de T ¿no?
AA Exacto
JC Y esas son sus coordenadas, por ejemplo una circunferencia podemos escribirla así ¿no?
AA Mmm
JC Donde la primera seria por decir algo R coseno de T
AA Mmm
JC Y la siguiente seria, si le ponemos coma puede ser componente seria R seno ¿verdad?
AA R seno de T
JC Y eso seria igual a la función de T, R D T, pero es una R vectorial ¿verdad?, o sea cada tiempo le corresponden
AA Es que bueno para tener T de T podemos emplear vectores ¿no?
JC Exactamente, en general las funciones vectoriales
AA Y, ya, bueno, hay como curvas parametricas y todo eso
JC Si, si, si exactamente, es decir las trayectorias generalmente son funciones que van de R en R N, esas van a ser las trayectorias ¿si?
AA Si
JC Ahora hay algunas funcionales que se definen sobre trayectorias ¿si?
AA Si
JC Y es lo que seria el integral de línea, pero es un caso particular de funcional, no quiere decir que todas las funcionales sean esas ¿no?
AA Si
JC ¿Tu sabes lo que es un integral de línea?
AA Si
JC Si recuerdas haberlo visto
AA Si, si recuerdo haberlo visto, este es un, bueno es como un integral
JC Mmm
AA Que resuelve la inte…, bueno es como que, al resolver la integral es como una raíz cuadrada y una X o una función, pero que esa función es una derivada ¿no?
JC Ese es un caso particular ¿no?
AA Si
JC Pero en general una integral de línea
AA Pues si lo recuerdo haber visto, pero como que el concepto no lo tengo muy claro
JC O sea no muy claro, entonces no vamos a pedir ejemplos de integrales de línea.
AA No

Podemos suponer por lo visto en el párrafo anterior que no tiene ni siquiera una concepción tipo acción sobre los conceptos trayectoria e integral de línea.

JC OK, ¿Cuál es la diferencia entre una funcional y una trayectoria?
AA Lo primero que se me viene a la mente es que una funcional ya incluye varias trayectorias y en una trayectoria solo es una, y también que el dominio de las trayectorias no necesariamente a veces es un espacio vectorial
JC El dominio de las trayectorias pueden ser los números reales ¿no?
AA Bueno si los reales pero el rango no necesariamente
JC El rango de una trayectoria comúnmente es un espacio vectorial

AA Porque ya son como vectores
JC Si
AA Y una funcional es una ecuación, una trayectoria la puedes expresar con números y una funcional no
JC Una funcional es un numero ¿no?, en ultima instancia a cada trayectoria le estas asociando un numero ¿si o no?
AA Si
JC El otro es al revés a un numero le estas asociando un punto ¿no?, ¿si se ve?, lo que pasa es que hay funcionales que se definen sobre trayectorias y ahí puede haber confusión, es decir a cada trayectoria la funcional le asocia un numero bajo algún criterio, por ejemplo, le puedo asociar un numero bajo el criterio de la distancia minima ¿si?, de todas las trayectorias ¿Cuál es la mas corta entre dos puntos?, entonces la solución es una trayectoria, pero la funcional me da un numero, ese numero pues va a ser la distancia entre los dos puntos ¿si?, es diferente funcional que trayectoria, la funcional trabaja con trayectorias
AA Pero es un número real
JC Pero es un numero real ¿si?, entonces si se ve la diferencia y como se relaciona
AA Si

De lo anterior podemos suponer que ha interiorizado las acciones que permiten establecer la diferencia entre una funcional y una trayectoria en un proceso.

JC A ver otra pregunta, Cuando se ven máximos y mínimos en calculo de una o varias variables generalmente usamos dos hechos que nos ayudan mucho, uno el concepto de variación, donde hay un máximo o un mínimo, la variación no existe ¿verdad?
AA La derivada es 0
JC La derivada es 0, por ejemplo en el caso de una variable, y también hay otro hecho que es importante, si la función es cóncava en el punto donde la variación no existe podemos decir que es un
AA máximo
JC máximo
AA Y si es…
JC Y si es convexa vamos a decir que es un mínimo ¿verdad?, el coordinar esos dos hechos es muy importante porque es posible, cuando queremos saber si una funcional tiene máximo o mínimo o en otras palabras vemos si la funciona es cóncava o convexa ¿verdad?
AA Si
JC Pero si la funcional es cóncava o convexa por que únicamente nos fijamos en el integrando y no en toda la integral, la integral es un numero, ¿por que basta con ver el integrando para ver si es cóncava o convexa?
AA ¿Con ver el integrando?
JC Si, o sea, por ejemplo, si tomamos la integral, cualquiera de esas que están ahí, por ejemplo, la primera que escribiste ahí, por que decimos que es cóncava esa funcional únicamente viendo el integrando, es cóncava o convexa dependiendo de lo que sea el integrando
AA Pues, es que, a mi no me queda muy claro que solo viendo el integrando tendría…
JC Para ver si es cóncava o convexa, bueno lo que pasa es que en la funcional entra X’ ¿no?
AA Aja
JC Pero X’ es como si fuera Y, para efectos geométricos la X se puede marcar como X, la T no importa porque la T es variable independiente, supongamos que las variables son X y X’
AA Porque esta creciendo, podría ser de 0 a 2

JC O sea, ¿Cómo se graficaría esta?, por ejemplo, raíz de 1 mas X’ al cuadrado, si hacemos la X’ como Y, seria 1 mas Y cuadrada ¿no?, que es una superficie en R 3, pero 1 mas Y cuadrada pues seria como un cilindro ¿no?
AA Mmm
JC ¿Y hacia donde abre?
AA Pues seria como que para acá ¿no?
JC Tendríamos que ver las curvas de nivel, las trazas, etcétera, pero veríamos si es cóncava o convexa ¿de acuerdo?
AA Si
JC ¿Por que si el integrando es cóncavo o convexo, la funcional va a ser cóncava o convexa?
AA Porque depende del integrando
JC O sea, la integral, lo que pasa es que no hace nada o sea la integral…
AA Solamente...
JC La integral respeta el orden ¿verdad?, siempre respeta el orden
AA Aja, o sea, no cambiaria el funcional, solamente acortaría
JC Es decir la integral ya esta asociando un numero a algo pero en realidad la integral no cambia el orden de las cosas ¿no?
AA No
JC Si a es menor que B la integral de A va a ser menor que la integral de B ¿no?, si
AA Si
JC O sea, la deja igual ¿no?, OK; a ver otro mas, dada la funcional $J(x)=\int_0^{40}\left(\frac{-x'^2}{2}\right)dt$, sabiendo que X en 0 vale 20 y que X en 40 vale 0, ¿podrías maximizar esa funcional?, y si nos vas diciendo como

AA O sea, eso se integra respecto…
JC Respecto a T
AA Pues lo resolvería con Euler, con la ecuación de Euler, primero derivo respecto de X
JC ¿Qué es la ecuación de Euler?
AA La ecuación de Euler este, nos sirve para encontrar un optimo, la mejor trayectoria del funcional
JC Mmm, y como se llaga
AA O sea, sirve para optimizar funcionales
JC Aja, claro ¿y como se llega a la ecuación de Euler?
AA Pues derivando el integrando, o sea, derivando pues el funcional, bueno
JC Derivando el funcional ¿verdad?
AA La funcional, si
JC OK
AA OK, este pues derivo respecto a X, porque bueno la ecuación de Euler se compone de la derivada de F de X menos la derivada de F respecto de X’ respecto al tiempo y se iguala a 0
JC Aja
AA X’’ igual a 0 entonces no hay solución
JC ¿Pero por que no hay solución?, X’’ igual a 0 si se integra de los dos lados tendría que X’ es constante ¿no?
AA Mmm
JC Y X seria una constante por T mas otra constante eso es una recta ¿no?
AA Si
JC Nada más habrá que determinar las condiciones

AA Es que me quedaría aquí X es igual a 2 y que a la constante también es igual a 20, X es igual a 20
JC A ver como, o sea, la trayectoria debió haber sido X, vamos a ponerle X estrella para distinguirla como la optima, es igual a C por T mas D
AA Si tengo un error, cuando X vale 0
JC Mmm
AA Es igual a 20
JC X vale 0 es igual 20, o sea, la D vale 20
AA D vale 20…, y por la C me queda ahorita menos 10
JC Quedo menos 10
AA Mande
JC ¿menos 10?, o que, que no oí
AA Me da así como, me da menos ½ menos X cuarentavos
JC A ver otra vez, X quedo igual a que, C por T mas D ¿no?
AA Mmm
JC Si la T vale 0 la D vale 20 ¿no?
AA Si
JC No, si la T vale 0 la X vale 20 y por lo tanto la D vale 20
AA Si
JC ¿Si?, y luego la otra condición era que X en
AA 40, 40 es igual a 0
JC X en 40 vale0, o sea quedaría 0 es igual a C por 40
AA Menos 20
JC Mas 20¿no?
AA Aja
JC Entonces quedaría al despejar que la C es menos ½
AA Menos ½ si
JC Entonces la trayectoria optima quedaría como
AA X mas, menos ½ D T mas 20
JC X es igual entonces a menos ½ D T, entonces en una funcional si la queremos optimizar es una trayectoria, sin embargo cuanto vale ese trayecto, cuanto vale la funcional al seguir esa trayectoria
AA Menos ½ D T mas 20
JC Había que meterla en la integral ¿no?, y calcular la integral, la integral es menos X? al cuadrado entre 2 ¿pero cuanto vale X?, si la X vale eso cuanto vale X’
AA Menos ½
JC Menos ½
AA Aja
JC OK; entonces seria la cuadrado
AA Al cuadrado entre 2
JC Mmm y con signo menos ¿no?
AA Es, aja
JC Seria la integral desde 0 hasta 40 menos ¿Qué?, Y 8
AA Menos ½
JC Y esa integral a cuanto vale
AA menos 5
JC Menos 5 ¿será máximo o mínimo?
AA El Hessiano, no va a funcionar, la función es cóncava o convexa, en este caso es cóncava
JC cóncava, o sea, debe ser un máximo ¿verdad?

AA Aja
JC Vamos a ver que pasa si cambiamos la trayectoria, la trayectoria optima es esa que obtuvimos ¿verdad?
AA Aja
JC Que hubiera pasado si hubieramos puesto como trayectoria optima una muy sencilla X igual a T
AA X iguala T
JC Mmm, cuanto valdría para esa trayectoria la funcional
AA Pues seria menos T…, pues es el...
JC Una derivada vale 1
AA Bueno, seria menos ½
JC Seria menos ½ entre que y que, al integrar quedaría entre que y que
AA entre 0 y 40
JC Y eso cuanto vale
AA Menos 20
JC Menos 20, que es más chico que menos 5, bueno ahí si estamos viendo que es cierto, que pasaría si la trayectoria fuera una constante
AA ¿La trayectoria óptima?
JC Mmm
AA Puede ser, pues la funcional seria 0

En base a lo anterior, podemos suponer que ha interiorizado las condiciones de primer orden para optimizar un problema de Optimización Dinámica en un proceso y lo ha coordinado con el proceso de solución de la ecuación diferencial asociada. Podemos suponer que ha encapsulado el proceso de determinar si una trayectoria es máxima o mínima en un objeto, pues tiene diferentes procesos para lograrlo y muestra una coordinación entre ellos, así por ejemplo, menciona que no puede usar el Hessiano, pero puede determinar si la función es cóncava o convexa.
JC Bueno a ver otra, vamos a suponer que queremos resolver el problema de optimización, minimizar $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+x'^2}\,dt$ ¿que representa geométricamente?
AA ¿Geométricamente?
JC Es decir vimos un problema que era la distancia más corta entre dos puntos ¿verdad?
AA Aja, la integral de línea
JC Esa es integral no
AA Si
JC Es la distancia mas corta entre dos puntos geométricamente
AA Que es, vendría siendo como una recta, es una recta
JC Debe ser recta se debe graficar como una recta, cualquier otro tipo de curva…
AA Es más, es más
JC Va a dar una distancia mayor
AA Exacto
JC La menor nos va a dar la recta, nada mas, eso se puede ver claramente, ahora estamos optimizando esa funcional ¿si?, si sustituimos en X una trayectoria que no sea la recta nos va a dar algo mas grande un numero real ¿si?, entonces el integrando realmente es el que determina el máximo o el mínimo ¿no?
AA Si
JC Por ejemplo, si yo quiero minimizar el tiempo para que trayectoria el tiempo es un mínimo, a ver ponemos, minimizar la integral de T 0 a T 1 D, como se minimiza el tiempo,

el tiempo se puede poner como la integral de T minúscula D T ¿no?, y digamos que va desde un lugar de T 0 a T 1 es de 0 a T mayúscula, para que se vea mas claro ¿si?, ya no necesariamente la curva que minimiza el tiempo es la recta ¿no?, puede ser otra trayectoria, entonces quien nos dice que es lo que hay que minimizar, lo que hay que minimizar, en una funcional en donde se ve
AA Pues en el integrando
JC En el integrando, es decir el integrando es como un criterio para minimizar, en el caso de la primera el criterio era la distancia mas corta
AA Si
JC En la segunda era
AA El tiempo
JC El tiempo mas corto ¿verdad?, bueno, ¿por que pueden aplicarse las condiciones suficientes también en la funcional, las que se estudiaban en el cálculo?
AA ¿Las condiciones suficientes?
JC Si el Hessiano, el ver si la función es cóncava o convexa nada mas por mirar el integrando
AA Pues porque el funcional es una, bueno el integrando de funcional es una función ¿no?, finalmente
JC Mmm
AA Bueno si utilizamos los mismos criterios con los que trabajamos una función son validos para el funcional ¿no?
JC Pero por que, otra vez la misma que fue en la 4 ¿no?, la integral respeta el orden ¿no?
AA Si
JC La integral de algo mayor pues es mas grande que la integral de un numero menor ¿no?, entonces se va a respetar eso y en base a eso esta esa respuesta ¿no?
AA Si
JC A ver de qué cambios específicos al considerar el intervalo de tiempo en un problema de optimización dinámica surgen las condiciones de transversalidad
AA ¿De que cambios específicos?, pues
JC Se pueden dibujar los casos ¿eh?
AA Si, pues, cuando el tiempo tiene infinito
JC A ver hay que ver los casos que…
AA Cuando el tiempo tiene infinito y cuando queremos, vaya cuando queremos acortar el tiempo
A ver, cuando queremos acortar el tiempo como serán las trayectorias, ahí sobre esa recta paralela al eje y así se verían ¿verdad?, eso es cuando el tiempo esta dado y X de T es libre, otro caso es cuando el tiempo es libre y X de T esta dada
JC Efectivamente, de ahí surgen las condiciones de…
AA Transversalidad
JC Transversalidad ¿verdad?

Del párrafo anterior, podemos suponer que Arlette ha encapsulado el proceso para explicar el origen de las Condiciones de Transversalidad en un objeto, pues explica desde un punto de vista geométrico todos los casos que dieron origen a las condiciones de Transversalidad.

(Fin del primer casete)

JC Continuamos con Arlette la ultima parte, entonces vamos al problema de minimizar la integral desde T 0 hasta T 1, de la raíz de 1 mas X’ al cuadrado, D T, suponiendo

que X en T 0 es X 0, y X en T1 es X1, o sea son 2 puntos, ese esta en el lenguaje de calculo de variaciones ¿verdad?
AA Si
JC Expresarlo en el lenguaje de teoría de control
AA ¿De teoría de control?
JC ¿Cómo se expresaría eso en teoría de control?
AA Bueno en teoría de control, lo que hacemos es, pues eso ya lo expresaría como una función, minimizar 1 mas X’ cuadrada, sujeto a…, es que ahorita no recuerdo muy bien teoría de control
JC ¿ Cómo se plantearía la solución en el caso de cálculo de variaciones?
AA Pues, resolvería con ecuación de Euler
JC ¿Ecuación de Euler verdad?
AA Aja
JC ¿Y en teoría de control?
AA En teoría de control ya es como, vamos como con, parecido a un Lagrangiano por así decirlo, que, bueno, optimiza la función
JC Seria el Hamiltoneano
AA Aja, con el Hamiltoneano
JC ¿Y como se plantearía el Hamiltoneano?, si te acuerdas de esas condiciones
AA Este, pues optimizas una función con una restricción, este y ya, o sea haces las derivadas, es similar
JC O sea, cual seria el Hamiltoneano en este caso
AA 1 más X cuadrada
JC ¿1 mas X?
AA Mas X’
JC Y la X’ como se llama en teoría de control
AA Este
JC Hay que ponerle otro nombre ¿no?, por ejemplo, U
AA Aja, U
JC Entonces seria que, a ver ¿Cómo se escribe el Hamiltoneano?
AA 1 mas U cuadrada
JC ¿Sin la raíz?
AA Con raíz
JC Mmm
AA Mas lamda, este…, es que no recuerdo como tenia la…
JC Pues la U es X’ ¿no?
AA Sujeto a U cuadrada o a X’, es que en teoria de control escoges una variable de control
JC Mmm, quien es la variable de control
AA U, en este caso, para este caso es U
JC Seria lamda por U
AA Aja, lamda por U
JC Y cuales son las condiciones
AA Pues la derivada del Hamiltoneano con respecto a U, la derivada…
JC Esa debe ser igual a que
AA Igual a 0
JC Igual a 0
AA La derivada de control respecto a landa igual a 0
JC OK y este en un problema de control como se puede saber cual es la variable de estado y cual es la de control

AA Pues la variable de estado es la que esta originalmente y la variable de control tu la eliges
JC Depende, en base a que
AA En base a la variable de estado
JC Pero como distingo la variable de estado con la de control
AA Pues la variable de control es la que ya utilizas al resolver el problema ¿no?, y va a ser en función a la variable de estado
JC O sea, ¿Cuál es la que tiene derivada la de estado o la de control?
AA La de control
JC O sea, X' esa seria la de control, el ritmo con eso se controla ¿verdad?
AA Aja

Podemos suponer que ha interiorizado las acciones para diferenciar las variables de estado de las variables de control en un proceso. Sin embargo, por lo dicho en el párrafo anterior, no podemos suponer que haya logrado interiorizar las acciones para determinar la equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y otro de Teoría de Control.

JC ¿Qué es lo que mas se te ha dificultado para entender el concepto de funcional?
AA Pues pasar de lo estático a lo dinámico
JC Mmm, pero en que sentido
AA En el sentido geométrico otra vez un poco
JC geométrico
AA Geométricamente y pues el concepto en si, creo que es mas complicado
JC El concepto de trayectoria, de integral de línea, esas no acaban de estar muy claras ¿verdad?
AA No
JC ¿Crees que ayudaría saber bien integral de línea, trayectorias para ver esto?, porque yo siento que a veces hay confusión entre lo que es funcional y lo que es la trayectoria
AA Si o sea tal vez los conceptos por lo que se me dificulten no es del curso sino como antes del curso
JC Mmm, OK
AA Como que si tal vez hubiese tenido más frescos todos esos conceptos
JC Mmm, problemas importantes para resolver problemas de optimización
AA Mande
JC Para resolver problemas de optimización con funcionales, mecánicamente hay algún problema
AA No
JC ¿Mecánicamente no hay problema?
AA No
JC Y con control tampoco, mecánicamente
AA Mecánicamente no
JC Es decir es mas bien la expresión geométrica que es lo que se esta haciendo
AA Aja, o la teoría talvez ahí un poco
JC Un poco ¿de que?
AA O talvez un poco que en matemáticas tendemos a hacerlo mecánicamente y a veces no tenemos muy claro en la cabeza lo que estamos haciendo
JC Lo que esta pasando, lo que esta pasando atrás, entonces tú por ejemplo, cuando dan un teorema lo entiendes o simplemente ubicas más o menos que es y aplicas el resultado mecánicamente, o ¿Cómo es?

AA Pues trato de entenderlo pero no se, para mi en cuestiones de utilizar como que todo mas formal la verdad
JC Es decir tratas de entenderlo y si no lo entiendes
AA Pues trato de entender el problema de alguna u otra manera la mecánica como se hace
JC La parte mecánica
AA Aja
JC O sea, aplicarlo directamente; esta es la ecuación de Euler, esto es lo que se aplica y ya esta
AA Si
JC ¿Si?, del calculo de variaciones y teoría de control alguna cosa que te haya costado especial trabajo
AA Siento que es, bueno, por lo poco que estudie siento que es más fácil teoría de control
JC Mmm
AA Que calculo en variaciones, porque, bueno, de los dos lo que se me dificulta a mi mucho es hacer análisis colectivo cuando dos ecuaciones no se pueden resolver, que sacar para donde van y todo eso
JC Mmm, pero eso más bien es ya con ecuaciones diferenciales ¿no?, con sistemas
AA Bueno si con sistemas
JC Pero en control y teoría y calculo de variación algo en especial o es mas o menos lo que has dicho de que la interpretación lo que va por atrás
AA Si como entender bien la teoría
JC Mmm, OK, bueno pues muchas gracias Arlette
AA No de que, gracias a usted

En resumen podemos suponer que tiene un tipo de concepción proceso en los conceptos de funcional, diferencia entre funcional y trayectoria, condiciones de primer orden para optimizar problemas en Cálculo de Variaciones, diferencia entre variable de estado y variable de control. En cuanto a los conceptos de trayectoria e integral de línea suponemos que no tiene ni siquiera una concepción tipo acción. Sobre la equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y uno en Teoría de Control, suponemos un tipo de concepción acción. Finalmente, suponemos que ha logrado encapsular en un objeto las condiciones suficientes de segundo orden y las condiciones de transversalidad.

ENTREVISTA a Miguel. Grupo: M.A.E.

JC ¿Hoy que es?
MA 29 de abril del 2008
JC 29 del 2008, vamos a hacerle unas preguntas ¿a?
MA Miguel Ángel Reyes Retana
JC Entonces vamos a empezar con la siguiente. En primer lugar de todas las expresiones que vamos a decir ahora, ¿cuál es función, cual es funcional o cual ni siquiera es función ni funcional?
MA OK
JC ¿Si?, entonces anotamos la primera, seria, $f(x)=\int_0^x (t^2+2)dt$
MA Si
JC Entonces ¿eso será una función o no será función?

MA Es una función
JC ¿Por qué es una función?
MA Una función, porque va de, esta, esta una función que esta con respecto a T y de 0a X nada mas son los limites de integración se podría decir que esta, va la función aquí esta es X y esta es T, va la función hasta X tenemos que integrar respecto a T
JC ¿Qué representaría geométricamente esto?
MA T cuadrada, T cuadrada mas 2 es debe ser, viéndolo, ah, X, puede ser si T es el origen o si fuera hasta X esta viendo las, los lim…, las, los ejes es una parábola, si lo hubiéramos con la T acá
JC Pero si la x esta en el eje X
MA Si la x esta en el eje X aquí esta seria T, T saldría de aquí ¿no?, mas 2 una T, una función
JC Entonces es una función
MA Una función
JC ¿será funcional?
MA A ver una funcional, voy a incluir la función de funcional, pues no vemos aquí el cambio de X', primero veo la X' para dar la definición de funcional tuviera que ser una función
JC O sea que si no aparece la X' no hay funcional
MA Este si
JC ¿Si?
MA Si, a primera impresión si
JC OK, una segunda expresión, vamos a suponer que decimos $f(x,y)=\int_0^3\int_0^{x^2}\left(3x^2y+5x\right)dydx$, ¿será función, no es función, es funcional, es un numero es una relación?
MA La integral en dos áreas, es una función
JC ¿Área?,
MA Bueno, lo podemos sacar una área, sacando la doble integral y viendo lo que yo pienso que es geométricamente, ¿lo puedo resolver?
JC Si, pero si ves la interpretación geométrica inmediatamente te puedes dar cuenta de que es ¿no?
MA Bueno es un volumen ¿no?
JC Es un volumen, bajo ¿que superficie?
MA X Y
JC Sobre la superficie ¿Cuál?
MA Sobre el plano
JC ¿Sobre todo el plano o sobre una región del plano?
MA Sobre una región del plano
JC ¿Esa región quien la determina?
MA X y, Y, y por, bueno, aquí no tenemos Z pero nada mas esta un inicio de X y, Y
JC ¿Y como sabemos que región es?
MA Donde esta…
JC ¿O puede ser todo el plano X Y?
MA Pues no es todo el plano X Y, pero aquí esta de X va a 0 3, y de Y va de 0 a X cuadrada, así, es una curva ¿no?
JC Aja,
MA Esta delimitado por una curva
JC Es decir los limites de integración…
MA Son los que nos da el limite…
JC Nos limita la región en el plano
MA así es
JC Y luego la superficie que esta en R 3, ¿Cuál seria?
MA ¿Qué estuviera en R 3?

JC Mmm
MA Bueno debiéramos que tener aquí el limite de Z ¿no?
JC ¿Y si no lo tenemos?
MA Si no lo tenemos podemos expresar en X Y, Z no es un, bueno si no lo tenemos es en dos nada mas
JC ¿Qué es el integral?
MA ¿De aquí?, tenemos que sacar las curvas de nivel ver donde corta, la primera impresión es un cilindro, bueno ver donde corta delimitado por X cuadrada hacia 5 X pueda ser como un plano, 5 X, donde corta X que es por ejemplo el 3, luego saco en Y, Y es lo que va creciendo por eso maximiza que esta dibujado en R 3
JC Entonces este habría que dibujar el integrando
MA Así es
JC Y el integrando es una superficie
MA SI
JC En R 3, y el volumen que estamos calculando seria el que esta entre la superficie y la región ¿verdad?
MA Si
JC OK, ¿es una función, es una funcional no es ni función ni funcional que es?
MA Es una función
JC Es una función, ¿Por qué?
MA Aquí igual es una, hay una relación entre X Y este, es una función porque esta entre los reales y en X y, Y
JC OK, ¿funcional?
MA ¿Funcional?, por lo mismo anterior no, estamos sacando aquí con Y con X no tenemos el tiempo que es lo que necesitamos
JC O sea porque no aparece otra vez la X, X'…
MA Los cambios, que es lo que…
JC A ver otra $J(x)=\left(\int_0^5 x(t)^2\,dt, \sqrt{1+x'^2}\right)$
MA OK,
JC Y ahí se cierra ya el paréntesis, ¿eso que seria?
MA Esto es una funcional
JC Es una funcional ¿Por qué?
MA Esta definida en, aquí están los componentes X, X' coma T en total esta explícitamente si esta moviendo el cambio porque esta la X', que esta con respecto a
MA Es eso aparecen X y X' y nada mas respecto a T
JC Mmm, al ser funcional tiene que ser función también ¿no?
MA Si
JC también es una función
MA Si, si
JC ¿De cuantas variables será la función?
MA Aquí esta de dos variables
JC De dos variables, ¿Quiénes serian?
MA X y X'
JC Otra, $J(x)=\sqrt{1+x'^2}$ ¿Eso que seria?
MA también es una funcional
JC Una funcional
MA Si
JC ¿Por qué?

MA Porque estamos igual viendo el cambio con respecto de X
JC Mmm
MA Bueno, aquí lo que me causa ahorita primera impresión la cuestión de la integral ¿no?
JC No aparece la integral
MA Que no aparece la integral
JC Pero si aparece X'
MA Aparece X' y estamos que hay cambios con respecto al tiempo
JC Aja, entonces, ¿es funcional?
MA Es…, bueno la funcional nos da de aquí para acá nos entrega un numero que es una trayectoria, que por la integral sabemos que es mínimo, entonces aquí podemos ver los cambios pero esto podría ser, igual nos da un cambio pero es una ecuación diferencial, tengo la duda si es una…
JC O sea el hecho de que no aparezca la integral es lo que esta…
MA La integral me hace dudar la cuestión
JC OK, a ver otra mas, $J(x) = \int_0^T \sqrt{1 + x'^2}\,dt$
MA Mmm, ¿D T?
JC Mmm, D T
MA D T, esto si es una funcional, no, si es una funcional
JC Ahí entra la integral
MA Aquí esta la integral, estamos viendo que va la trayectoria de 0 a T mayúscula, que llega hasta acá, entonces esta es la trayectoria que se quiere minimizar
JC Mmm
MA Y ya la vamos a ver, lo que me causo confusión fue que aquí que no había limites hasta donde yo…
JC OK, a ver, otra, $f(x, y) = x^2 + y^2$, ¿eso que es?
MA Esto es una función
JC Es una función, ¿de cuantas variables?
MA De dos variables
JC De dos variables, es una función que va
MA De los reales…
JC ¿De los reales, con dos variables?
MA Aquí tengo los reales
JC Si tiene dos variables debe ser de R 2 ¿no?
MA Si, de R 2
JC De R 2 en R
MA De R 2 en R
JC Pues es una función de varias variables ¿no?
MA Mmm
JC Que es el paraboloide, elíptico famoso ¿no?
MA Mmm
JC ¿Es funcional?
MA No, porque no estamos aquí viendo el cambio nada mas…
JC Es una función nada mas
MA Si
JC Bueno, vamos a ver si podemos verificar todo lo que hemos dicho
MA Mmm, si
JC Entonces, vamos a recordar la definición de funcional, para ver si lo que hicimos esta bien ¿no?
MA Si
JC ¿Qué es una funcional?, ¿Cómo se define una funcional?

MA Una funcional, la funcional es un número en el que vamos, nos ayuda a definir una trayectoria minima,
JC Bueno eso si lo queremos optimizar ¿no?
MA Si, claro
JC Pero, ¿Qué es una funcional?
MA Es una, es un número
JC Un numero, o sea que su rango estaría en los reales, eso que si es un numero
MA Si
JC Su rango esta en los reales, ¿y su dominio?
MA ¿Su dominio?, esta junto a los, como se podría definir con X, X'…
JC ¿No te acuerdas bien de la definición de…?
MA No, no me acuerdo bien
JC Vamos a darlo, y a ver si con eso estudiamos con un poquito con más de cuidado esto
MA Mmm
JC Una funcional es una función, cuyo dominio es un espacio vectorial normado, y cuyo rango son los reales, o sea efectivamente una funcional es un numero real, pero el dominio de una funcional tiene que ser un espacio vectorial normado, ¿si?, entonces, por ejemplo, R N, puede ser R 2, R 3, lo que sea ¿no?, ¿es un espacio vectorial o no?
MA A ver, de nuevo la funcional, la funcional es una…
JC Una función
MA Una función,
JC Que a cada elemento de un espacio vectorial…
MA Le otorga un número
JC Eso es un número real
MA Mmm
JC ¿Si?
MA Si
JC R N ¿es espacio vectorial?
MA No
JC ¿no?
MA No, porque le es, si, si
JC Si es ¿verdad?, R no
MA No, R no
JC Pero R 2, R 3, R N, si es espacio vectorial, bueno, entonces, si volteamos a la pagina, en donde decía F de X coma Y, igual a X cuadrada mas Y cuadrada, esta ahí arriba perdón, eso es una función, pues si es una función de dos variables ¿no?
MA De dos variables
JC Sin embargo, es una función que va de un espacio vectorial en los reales
MA Mmm
JC Es decir va de R 2 en R ¿no?
MA Si
JC Por lo tanto es una funcional
MA Si
JC Esa también es funcional, o sea, funcional no quiere decir entonces que necesariamente tenga que tener integrales ni X', sino que sea una función que va de un espacio vectorial normado en los números reales, ahora nos interesa mucho en optimización dinámica que ese espacio vectorial normado sea un espacio de funciones derivables en particular, y por eso aparecen las X'
MA OK

JC ¿Si?, bueno, en base a esta definición vamos a revisar a ver si cambiamos de opinión en algunas de ellas empezando por la primera ¿no? La primera era una función de una variable, bajo esta perspectiva, esta definición de funcional, ¿puede ser funcional?
MA Si
JC ¿Cuál es el dominio de este?
MA El dominio son los reales
JC Los reales, si el dominio son los reales ¿puede ser funcional?
MA No
JC No porque tiene que ser un espacio vectorial
MA Los reales no son espacio vectorial
JC Exactamente entonces esa queda…
MA Los reales son a partir de R 2 ¿no?
JC Exactamente, ese o cualquier espacio vectorial normado ya más general como espacios de funciones.
MA Mmm
JC ¿Si?, bueno entonces la primea queda en función. La segunda pues una integral literada pues en realidad, es una manera de calcular una integral doble ¿no?
MA Si
JC Una interpretación si es positivo todo es el volumen bajo esa superficie ¿no?
MA Mmm
JC Pero, es un número ¿no?
MA Si, que viene de…
JC ¿es función?.., eso ya es un numero ¿no?, ya esta dado todo
MA Si
JC Entonces ni función va a ser ¿no?
MA Si
JC Luego la numero tres, ¿Qué era?
MA La de X T cuadrada y X' cuadrada
JC Mmm
MA La integral 0 a 5 con un vector
JC Es decir ahí el dominio ¿es?
MA Igual, los reales
JC Es, es este J de X pero ahí la x la estamos pensando que sea no real sino función
MA Sino función
JC Es X D T ¿no?
MA SI
JC Y aparece por ahí una X' ¿no?
MA Mmm
JC Entonces quiere decir que es el conjunto de funciones por lo menos derivables ¿no?
MA Si
JC Para que aparezca X'
MA Si
JC Si el dominio es, es conjunto de funciones derivables con ciertas características, ¿eso es un espacio vectorial o no?
MA Si
JC Si ¿verdad?, ¿es entonces funcional?
MA Si porque nos otorga igual el numero
JC Ahora el problema esta que el resultado da un vector ¿no?
MA Mmm
JC Es un vector, o sea va de un espacio vectorial normado

MA Si
JC A un vector
MA A un vector
JC Tiene dos componentes
MA Que es una función
JC ¿Pero eso puede ser funcional? Funcional es una función que va de un espacio vectorial normado a
MA Los reales
JC Un numero real, esta va de un espacio vectorial normado, pero su rango es una función, digo un vector
MA Un vector
JC ¿Puede ser funcional eso?, si el rango no es un numero real ¿puede ser funcional?
MA Sin un numero real, no
JC No ¿verdad?, entonces eso no puede ser funcional
MA Esto no es funcional
JC Ese es un ejemplo donde aparece X'
MA Y no es funcional
JC Aparece T, aparece por ahí una integral y no es funcional
MA No es funcional por la cuestión de que sino estuviera a lo mejor 1 si seria ¿no?
JC Si tuviera 1 si
MA Nos otorga 1 y ya no es un vector
JC Exactamente
MA Es un numero
JC Si fuera un numero real si, si seria ¿si? Y luego el que sigue ¿Cuál era?
MA J de X igual a X, X' T D T
JC Aja, ¿ese seria o no?
MA Este es una funcional porque va de, el resultado da un numero, y va de espacio
JC Y esa si es funcional
MA Esa si es funcional
JC Luego ¿cual sigue?
MA J de X igual a raíz de 1 mas X' al cuadrado
JC Ahí no entra la integral
MA Mmm
JC Sin embargo vamos a revisar de acuerdo a la definición de funcional
MA De funcional
JC ¿Cuál es el dominio?
MA El dominio es los reales
JC ¿Los reales?
MA Un numero real
JC ¿Aunque aparece X'?
MA Ah pero es X' ¿verdad?, entonces no es una funcional porque nada mas entrega un numero X'…
JC Es decir el dominio debe ser un elemento de un espacio vectorial
MA Mmm, en el, exacto
JC Pero si es una función, si X D T es una función derivable si es un espacio vectorial ¿no?
MA Si
JC Entonces va de un espacio vectorial a ¿donde?, la raíz cuadrada es un número ¿no?
MA Si
JC A un numero, son los reales, esa es una funcional aunque no tenga integral
MA OK
JC ¿Si?

MA Si, si, si cierto, aplicarle la raíz al, existe un espacio vectorial
JC Mmm
MA Lo convierte en número
JC Para cada T va a ser un número, es J de X D T
MA Mmm
JC Si
MA Exacto
JC O sea el dominio es ese espacio vectorial, ¿de que nos estamos dando cuanta ahora?
MA De que…
JC Para ser funcional, no necesariamente tiene que aparecer la X' o la integral, porque una función de varias variables es funcional
MA Cierto
JC Para que sea funcional, puede aparecer la X' y no la integral, o puede aparecer la integral…
MA Y sin X'
JC Y no la X', pero pueden aparecer la X' y la integral y no ser funcional
MA Si por que esta, como aquí ¿no?
JC Entonces en cuantas cambiaste tu opinión después de ver la definición
MA Bueno va a salir después ahí mejor mas claro, esta de hecho queda, yo dije que no era funcional
JC Mmm
MA En esta la segunda también la cambie, la tercera me dijo que bueno es un vector, esta si esta bien, esta también la cambie de opinión porque la pusimos después con la integral, aquí si esta, bueno ya es la funcional y aquí también cambie de opinión dije que era función y fue funcional
JC O sea la mayoría ¿verdad?
MA La mayoría
JC Eso quiere decir que es importante revisar la definición
MA De funcional
JC De funcional, ¿ya quedo claro el concepto de funcional?
MA Ya si ya
JC Ya como quedo claro vamos a una segunda pregunta, dar ejemplos de tres funcionales justificando por que son funcionales
MA ¿La escribo aquí?
JC Mmm
MA Esta es una funcional, porque nos da, nos cambia de, nos entrega un numero en el rango y que viene de un espacio vectorial de dos funciones y el integrando X mas…
JC ¿Cómo dice?
MA Nos entrega un número que regresa a los reales
JC ¿Pero como dice la funcional?, J de X es que no llego a leer
MA $J(x, x', t) = \int_{t_1}^{t_2} (x'^2 + x)dt$
JC OK
¿Si?, otra funcional
JC Entonces tres ejemplos de funcional, uno ya estuvo ¿verdad?
MA Uno ya estuvo, otro que, bueno, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, es el que pensaba que era una función, que si es función pero también es funcional
JC OK
MA Y el tercero…, una funcional de, con X, X' aunque no este T, igual que es lo yo que hice hace un rato $f(x) = x'^{\frac{1}{3}}$
JC Mmm, OK, ¿entonces ya se ve claro el concepto de funcional?

MA Ya más claro

Podemos apreciar que la definición que toma al principio de funcional es parcialmente cierta, por lo que si la expresión matemática no coincidía con dicha definición, no la consideraba como funcional. Sin embargo, cuando se le da una definición completa de funcional, puede determinar sin mayores problemas cuando una expresión dada es funcional lo que nos hace suponer que ya había interiorizado las acciones para determinar a una funcional en un proceso, y que al generalizar la definición que ya tenía de funcional no tuvo mayores problemas para determinar las expresiones que eran funcionales. También pudimos percibir que no ha interiorizado las acciones para determinar a un Espacio Vectorial en un proceso, como supusimos antes de empezar el curso.

JC OK, vamos con una tercera pregunta, ¿Cómo se puede distinguir analíticamente una trayectoria, como se escribiría analíticamente la trayectoria?
MA ¿En calculo de variaciones?
JC En general
MA General
JC Puede ser en cálculo
MA Bueno ahorita estamos aquí, pensando en esto, una trayectoria como lo vimos en una, con una, cuando minimizamos una funcional nos entrega nuevas trayectorias, luego quedan escritas en, en, como ecuaciones diferenciales en X D T igual una constante por E a la alfa T ¿no?, que convergen hacia un punto…
JC ¿Eso es una trayectoria?, y en general una trayectoria se puede dar también parametricamente ¿no?
MA Si
JC ¿Cómo se escribiría parametricamente una trayectoria?
MA ¿En forma parametrica?, bueno es cuando tenemos mas componentes ¿no?
JC Mmm
MA Que es, si tenemos X Y, de un vector a parametrico, con X D T y con Y D T, igual este en dos trayectorias a parte, una constante
JC Mmm
MA E a la N T y esto seri…
JC Parametricamente una
MA Si
JC Una trayectoria va a ser una función que va de R en R N ¿no?
MA Mmm
JC ¿Si?, bueno, ¿Cómo podemos distinguir cuando una integral es una integral de línea?
MA ¿De línea?
JC ¿Si recuerdas las integrales de línea o no?
MA No
JC No, entonces calcularlas esta también difícil ¿no?
MA ¿Cuando es una, cuando el integrando es lineal?
JC Es decir cuando la integral se hace sobre una trayectoria, que eso se hace mucho en funcionales, en las funcionales cuando aparece trayectorias es una integral de línea lo que se esta haciendo, lo que pasa es que no, a veces este, uno lo hace sin ser consciente de que es una integral de línea ¿no?
MA Si
JC A veces pasa, entonces integral de línea no sabes
MA No
JC Es que yo creo que la integral de línea es algo que se debiera de repasar…
MA ¿Cómo es una integral de línea?

JC Para que quede clarísimo, como las que han hecho, algunas funcionales que han hecho, son algunas funcionales
MA OK
JC Son, se pueden ver como una integral de línea, desde luego no toda funcional tiene que ser así ¿no?, pero son las que mas están usando….
MA Las que más vemos ¿no?..
JC Entonces necesitamos ver integral de línea para que esto quede mas claro ¿si?
MA Si, porque no recuerdo…

Podemos suponer que sobre el concepto de trayectoria y de integral de línea no tiene ni siquiera una concepción tipo acción.

JC Eso es lo que pasa. A ver que otra pregunta sencilla, entonces integral de línea no, ¿Cuál es la relación y cual es la diferencia entre una funcional y una trayectoria?
MA La relación es que ambas este, ambas salen del origen y llegan hacia un destino ¿no?, cuando vemos una funcional, cuando la definimos con integrales sabemos donde empieza y donde termina, como una trayectoria, si pero cuando la, como dijimos ahorita o mejor dicho mas claro una funcional aquí nos otorga el numero que no necesariamente es una línea no se si me explico
JC ¿Que representa ese número?, lo que es la funcional ¿que representara?
MA ¿Con lo que otorga el numero?, pues una, como una trayectoria puede verse como una trayectoria
JC A ver vamos a ver un ejemplo concreto ¿no?, a ver vamos a suponer que queremos minimizar
MA Mmm
JC La integral de T 0 a T 1 de la raíz cuadrada de 1 mas X’ al cuadrado todo D T, eso que representa geométricamente, ya lo hemos visto en varias veces ¿no?
MA Si, ¿quedamos de T 0 a T 1?
JC Mmm
MA Quieres encontrar la minima trayectoria que te lleve de T 0 a T 1, que es así ¿no?
JC ¿Cuál es la trayectoria mas corta no?
MA la trayectoria más corta
JC Entre dos puntos
MA Entre si…
JC Intuitivamente pues
MA Intuitivamente seria una recta ¿no?
JC Es la recta, exactamente
MA Esto nos da la funcional una minima trayectoria
JC Mmm, entonces quien este es así como lo que nos dice que, ¿que es lo que hay que minimizar en este caso?
MA ¿Cómo que quien nos dice?
JC ¿Qué es lo que hay que minimizar?, la distancia ¿no?
MA La distancia
JC ¿Y donde viene eso implícitamente dentro de la funcional?
MA Aquí en el integrando
JC En el integrando ¿verdad?, por ejemplo si nos dijeran minimizar la integral de 0 a T mayúscula de D T minúscula, la integral de D T es T ¿no?, es el tiempo,
MA Si
JC O sea ahí nos esta pidiendo minimizar el tiempo
MA Si
JC ¿Si?, que no necesariamente es en línea recta
MA No

JC ¿Verdad?, ahí puede ser otra trayectoria la solución
MA Aja
JC Pero ¿quien nos indica lo que hay que minimizar?, otra vez
MA Igual aquí…
JC El integrando, entonces podemos decir que el integrando en una funcional es de alguna forma el criterio bajo el cual vamos a optimizar o vamos a minimizar, ¿verdad?
MA así es
JC En economía, muchas veces viene adentro como parte del integrando por ejemplo los costo o las utilidades
MA O maximizar ¿no?
JC Es lo que queremos maximizar, pero el criterio es el integrando
MA El integrando
JC Y el integrando puede representar muchas trayectorias de solución, y la optima es bajo ese criterio
MA Es la que nos da aquí ¿no?
JC Si
MA Entonces la diferencia viene siendo el criterio que ocupa
JC Mmm
MA ¿No?, porque en la trayectoria la funcional ambas pues son…
JC Si van a ser trayectorias ¿verdad?
MA La diferencia entonces en la pregunta seria el criterio que se ocupa para…
JC El criterio, bajo que criterio queremos la mejor
MA OK
JC Ahora vamos a ver si queda mas claro de esta forma, supongamos que $J(x) = \int_0^{20} \frac{-x'^2}{2} dt$, con X en 0 igual a 20 y X en 20 igual a 0, ¿podrías optimizar esa funcional?
MA Muy bien
JC Si nos quieres ir comentando lo que haces mejor
MA Planteo, planteo el integrando o sea F de X, X' coma T es igual menos X' cuadrada entre 2, este es el integrando, F de X' es igual a menos 2 X entre 2, que es menos X', F de X, X' es igual a menos 1, entonces tenemos que, primero hay que sacar el, el teorema de Euler para maximizar ¿no?.., me calle porque me estaba olvidando, de entrada es F de X menos derivada con respecto T D F de X'…
JC Y todo eso igual a 0 ¿no?
MA Todo esto igual a 0, donde F de X, no hay, F de X esto es 0 menos derivada con respecto a T, F de X', F D X' es menos X' entonces es, menos X'' igual a 0, entonces tenemos que X'' igual a 0, X' D T, es igual a T y X D T
JC ¿X' es T?
MA No, X' es una constante y X D T igual a C por T mas otra constante D, y por los valores iniciales, X en 0 es igual a 20, se tiene que T se va a 0, entonces nos queda que D es 20, y el punto 20 va a 0, entonces nos queda que T vale 20, 20 C mas 20 y D vale 20 es igual a 0, C es igual a 0
JC Entonces, ¿Cómo queda la trayectoria óptima?, podemos ponerle X estrella
MA X estrella
JC X estrella D T
MA Me quedo 0
JC ¿0?
MA Mmm, ¿algo hice mal?, a ver, reviso, X D 0 D vale 20entonce con X D 20 es 20 C mas D
JC X en 0, o sea que la D vale 20 ¿no?
MA Si D vale 20, entonces aquí es D T es 1
JC ¿Y luego X en que?, en 20 vale 0

MA Mmm, X de vale 20 y aquí nos queda que la D vale 20 y X en 20 vale 0, entonces la C vale 20, la T vale 20 por C, es 20 C mas D igual a 0
JC Mmm
MA Y ya 20 C igual a menos 20, C vale 1
JC ¿C vale 1?
MA Si
JC Entonces la trayectoria optima ¿Cuál es?
MA No quedo X D T igual a menos 1
JC X D T igual a menos 1
MA Mmm
JC ¿Será máxima o minima?
MA Hay que ver la función del integrando ¿no?
JC ¿Por qué función del integrando nada mas?
MA Porque es lo que acabamos de platicar es lo que se maximiza y minimiza ¿no?, la trayectoria
JC O sea la integral como que preserva el orden ¿no?
MA Si
JC Las magnitudes, entonces básicamente lo que esta adentro
MA Hay que ver el integrando a ver si es lo que nos da ¿no?, el integrando es menos X cuadrada entre 2
JC Mmm
MA Es una parábola hacia abajo ¿no?
JC Mmm
MA Entonces queremos aquí maximizar, si estuviera al revés buscaríamos un mínimo o depende de que nos pidiera ¿no?, digo menos 1 si nos quedar aquí abajo
JC Pero como queda el integrando, ¿cóncavo o convexo?
MA El integrando es
JC Es como si pusiéramos X' igual a Y
MA Mmm
JC Una función de una variable
MA Si
JC Seria menos Y cuadrada entre 2
MA Si
JC ¿Qué seria eso?
MA Es una parábola que va hacia abajo
JC Aja
MA Es cóncavo convexo
JC Y como estamos en dos variables con una X y X' seria como un cilindro ¿verdad?
MA Así es, que va hacia abajo…
JC Entonces estaríamos hablando de un máximo ¿no?
MA Mmm
JC A ver si damos otra trayectoria, vamos a ver cuanto vale la integral, ¿Cuánto vale la integral con esa trayectoria optima?
MA Mmm
JC Que es lo que es la funcional ¿no?
MA Estoy sustituyendo los valores, la integral nos vale menos 10
JC Vamos a ver con otra trayectoria que se nos ocurriera, por ejemplo una muy sencilla es X D T igual a T ¿no?
MA Mmm
JC ¿Cuánto valdría la integral con esa trayectoria?
MA X D T, X', hay que, como nos pide X' hay que

JC X’ pues seria 1 ¿no?
MA Exacto, entonces nos queda integral de 0 a 20 de 1 a T
JC ¿Con signo no?, signo menos
MA Menos, entonces es menos T integral de 20 a 0, queda menos 20
JC Pero a ver era, como era, la integral era X’ cuadrada entre 2 ¿no?
MA Aja, entonces X’, X’ vale 1 entre 2 menos ½ menos 10, también
JC Entonces que pasa, ahí hay que checar, aparentemente, es decir, que debía de pasar dentro de una cierta vecindad ¿no?
MA Mmm
JC Que esa fuera la trayectoria para la cual la funcional tuvo o tomara un valor mas alto ¿si?
MA Si
JC Pero aquí nos esta apareciendo…
MA Que es el mismo
JC El mismo valor, entonces a ver eso habría que verlo ¿no?, pero si se ve la idea que deberíamos de seguir
MA Si
JC Para ver si es máximo, seria cosa de checar si no hay algún error por ahí ¿no?, a ver otro problema

De lo anterior podemos suponer que ha interiorizado las acciones para optimizar funcionales en un proceso que ha coordinado con el proceso de resolver ecuaciones diferenciales. En cuanto a las condiciones de segundo orden suponemos que además de haber interiorizado las acciones para determinar si la trayectoria es máxima o mínima en un proceso ha logrado coordinar formas diferentes para determinar una trayectoria óptima encapsulando este proceso en un objeto.

JC Supongamos que queremos el típico el de minimizar la integral de T 0 a T 1, de la raíz de 1 mas X’ al cuadrado todo D T ¿si?
MA Mmm
JC Este problema esta escrito en lenguaje de cálculo de variaciones ¿verdad?
MA Si
JC ¿Cómo se podría escribir en lenguaje de control, de teoría de control?
MA ¿teoría de control, con el hamiltoneano?, bueno aquí, tenemos que definir cual es la de control ¿no?
JC Mmm
MA Para plantear el Hamiltoneano
JC Mmm
MA El Hamiltoneano de la función D X, entre mas una lamda que es como un Hamiltoneano, por la función G D T, donde G D T es la variable de control A, prima igual a U mas, bueno U mas algo ¿no?, con la variable de control
JC Entonces ¿Cómo quedaría el Hamiltoneano?
MA 1 mas X’ al cuadrado, raíz mas lamda por la U de control si es que la definió la X’ igual a U
JC ¿Y sujeto a?
MA Sujeto a X’ igual a U
JC ¿Sujeto a que perdón?
MA X’ igual a U
JC X’ igual a U, ahora ¿Cómo se plantearía la solución en calculo de variaciones y como se plantearía con el Hamiltoneano en teoría de control?
MA En el Hamiltoneano, razonamos el Hamiltoneano, con H D U iguala a 0 y resolvemos para que nos quede en este caso, resolvemos H D U, H D lamda y H D X, nos quedan regular, bueno, no, si, pero nos quedan las ecuaciones ya separados ya podemos aquí resolver este…

JC ¿Cuánto valdría H en lamda?
MA ¿H en lamda?, el control que es U y H D X, vale 0 no tenemos X
JC Y a ver si lo pudiéramos hacer
MA A muy bien, si, H D U, aunque no tuviera uso acá arriba, no importa ¿verdad?, H D U es 0, H D landa entonces es U…
JC H D U vale 0, a ver, lo que pasa es que en la original es raíz en lugar de 1, mas X' al cuadrado
MA Mmm
JC Seria 1 mas U cuadrado ¿no?
MA Claro, si, tenemos que X D U T es igual a la raíz de 1 mas U cuadrada prima y…
JC ¿U'?
MA Es X', no, X cuadrada, prima G es igual a U
JC Mmm
MA Entonces ahora si ya H de U es igual a 2 U, entre 2 raíz de 1 mas U cuadrada, es U entre la raíz de 1 mas U cuadrada, h de U
JC ¿Y no queda nada más?
MA ¿Mm?
JC ¿No queda una lamda por ahí también?
MA Mas lamda, H de lamda es igual a U, y H de X, ¿es H D U H D lamda y H D X verdad?, H D X no tenemos X ese 0, entonces ahora ya nada mas resolvemos…, listo
JC ¿Qué salio H respecto de lamda?
MA H respecto de lamda, es igual a U
JC En tu U
MA H D U nos quedo U entre 1 mas U cuadrada raíz, mas lamda igual a 0
JC Entonces ahí hay que despejar lamda ¿no?
MA Mmm, lamda es igual menos U entre raíz de 1 mas U cuadrada
JC Y por otro lado te da la segunda
MA H de lamda nos queda como U
JC Aja
MA Es igual a 0, no, no es igual a 0, ¿Qué es?,
JC O sea a lo mejor ahorita no te acuerdas bien de las condiciones
MA No, no me acuerdo con mucha precisión de las condiciones
JC Pero ya se ve por donde va la solución,
MA Mmm
JC O sea repasando las condiciones si lo puedes resolver
MA Si, es que es igual a H D U igual a 0 H de lamda igual a algo, H D X igual algo, no las tengo
JC Y con calculo de variaciones ¿como la resolverías?
MA ¿Con calculo de variaciones?
JC Nada más con que menciones como lo resolverías
MA Nada mas sacando las condiciones que son, nada mas planteando o sea, F de X, X' coma T, igual a la función que es 1 mas X' cuadrada raíz
JC Mmm
MA Este y sacando la condición de Euler
JC Y ya
MA La ecuación perdón, si

Podemos suponer que ha interiorizado las acciones para determinar la equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y otro de Teoría de Control en un proceso que puede coordinar con los procesos de solución en ambas ramas de la Optimización Dinámica, encapsulando dicho proceso en un objeto.

JC OK, ahora en un problema de control ¿como distingues entre la variable de estado y la variable de control?
MA La variable de estado ahí me confundo un poco, la variable de estado es la que, la variable de control en este caso es la que se mueve que es la U
JC Mmm
MA Y la variable de estado es la que no cambia
JC O sea la que tiene la derivada siempre es
MA La que controla
JC La de control ¿no?
MA Mmm
JC Y la otra es la de estado
MA La de estado

De lo anterior no podemos suponer que haya interiorizado las acciones para distinguir a las variables de estado de las de control en un proceso.

JC OK, a ver preguntas ya muy generales abiertas, ¿Cuáles crees que sean las principales dificultades por las cuales este, o sea para entender el concepto de funcional?
MA ¿De funcional, a mi que es lo que me costo?
JC Mmm
MA Creo que se me hizo un poco complicado cuando empiezan a definir funcional, el curso se me hizo, se me ha hecho un poco cargado, que creo que cuando llegamos a definir funcional de por si, voy a hablar del curso en general, el cambio de calculo a mate, me costo trabajo la cuestión de que si no llevas bien las bases desde mate cero en lo que son definiciones que sobre todo dominio rango todo lo que eso conlleva cuando entras a calculo en ecuaciones diferenciales es otra manera de pensar que regularmente no analizas o no habías visto lo que es…
JC ¿Otra manera de pensar en que sentido?
MA En la cuestión de que yo toda mi vida había visto como integrales, derivadas, sumas restas pero una ecuación diferencial es cuando entras al curso es difícil ver, a mi me costo trabajo el ver como cambia una variable intuitivamente se oye lógico, pero ya en el papel me costo trabajo ver como se solucionaba una ecuación diferencial incluso que representaba, si llevas el hueco desde ahí que me paso en el curso, cuando ves lo de la funcional y ves lo de la trayectoria, te vas a veces, a mi me paso que me iba por la cuestión que estaba viendo una ecuación diferencial si ya traía las lagunas y no me había informado cuando llegas a funcional vas como que endeble a esa parte, ya con, valdría la pena talvez un repaso como el que vi hoy, este de que redefine así con ejemplos talvez mas prácticos, esto es una funcional, esto si es esto no es, igual aplicar un test antes de cada, definir antes de cada tema lo básico, una función un dominio un rango, que bueno ya lo sabemos, pero igual a veces se nos falla en esa parte ¿no?, el rango en dos variables, como pasas una variable, si es una funcional cuando si es, y cuando no es, con un test yo creo que puede quedar mucho mas claro, por eso digo que ahorita me aclaro muchas dudas para mi examen, este si
JC El concepto de trayectoria, integral de línea, ¿tu crees que ayuda?
MA Seguro que si
JC Y algún problema así especifico muy concreto para el concepto de funcional o para resolver problemas de optimización
MA ¿De optimización?, creo que falta el apoyo del libro, el libro no se me ha hecho tan didáctico, tal vez falta un material alternativo el explicar por ejemplo para, repito la definición de funcional talvez un manualito, para que te vayan llevando un poco mas de la mano, en esta parte, que domines bien el concepto y con esta ocasión ya vi bien que es una funcional y entiendes mucho mas para no mas llegar, porque te aprendes la formula y es rápido resolver a veces ¿no?, una funcional, minimizas pero cuando no dominas ese concepto llegas al examen y PUM, cambian algo

y es donde yo me cuesta trabajo verlo, es fácil entenderlo cuando uno lo explica ¿no?, así, entiendes el, se minimiza la ecuación de Euler, encuentras condición sabes por variación de calculo que es lo mismo que minimizas con derivadas o de los cambios y tal vez valdría el, donde yo me he confundido en los exámenes cuando cambia un poco tal vez la notación, yo creo que va mas que nada por la notación,

JC La notación

MA Necesitas acostumbrarte un poco mas

JC Tu entiendes bien la deducción del, por ejemplo de la ecuacion de Euler, de la transversalidad y de ese tipo de teoremas o mas bien las aplicas

MA Mas bien las aplico, me ha costado trabajo entender las, demostraciones

JC La deducción es más complicada

MA Si me ha costado trabajo

JC O sea lo que haces es pragmáticamente dices aquí esta la condición de Euler con esto se resuelve el problema de optimización

MA Mmm

JC Aplicando los resultados pragmáticamente

MA Aplicas los resultados pragmáticos y ya cuando resuelves ejercicios te va a funcionar, el problema es cuando te cambian alguna notación que no viene en el libro, porque en el libro viene un esquema de ejercicios que en el examen puede cambiar un poco, incluso la anotación, recuerdo que en un examen este cambio la anotación de ecuación diferencial se me complico bastante, cuando vi la solución dije, no puede ser eso si lo se hacer, pero a veces cambia la anotación creo que se ocupa anotación ¿no?, para poder explicar lo que, de física ¿no?, no es como lo que tu ves pero entre el nervio del examen y a veces las prisas y desde luego responsabilidad del alumno ¿ no? Que a veces no estudias cual debe de ser lo puedes confundir un poco

JC ¿Tu sabes de donde vienen las condiciones de transversalidad?, es decir cuando se cambia le intervalo del tiempo ¿Qué posibilidades hay?

MA Si, se bien este, exacto cuando no son ni las iniciales ni las finales ¿no?, las de transversalidad son las que tienes que ajustar para que se optimicen

JC ¿En base a que se dan?

MA El T dado

JC ¿Eso si lo sabes graficar?

MA Si

JC SI

MA Si, si, si, son tres casos cuando te dan, el tiempo que tu partes de un origen y debes llegar hasta acá, o cuando te dan algún objetivo

JC Mmm

MA Y te puedes llevar el tiempo necesario

JC Mmm

MA O cuando te dan libre el tiempo y libre la circunstancia

JC Mmm

MA Esto se puede ajustar con las trayectorias, con, con las condiciones de transversalidad

JC Y las condiciones de transversalidad otra vez, me imagino que las aplicas mecánicamente

MA Las se aplicar entiendo intuitivo pero, así como poder demostrar no

JC La deducción

MA No

JC OK

Podemos suponer de lo anterior que ha interiorizado las acciones que determinan las Condiciones de Transversalidad en un proceso.

MA Yo creo que sabe porque, por la cuestión de que el curso esta bastante cargado, es bastante material terminas la ultima parte corriendo, yo creo que vas dos semanas tres, vas al corriente pero si te atrasas una clase otra clase o te pierdes a veces una demostración o no la entiendes perfecto los ejercicios empiezan a salir porque son mecánicos ¿no?, pero ya cuando cambia algo en el examen que no llevas bien las bases ahí truena todo, yo creo que es en parte porque el curso esta muy condensado, es bastante

JC Este a ti te gusto el cambio que hubo en el curso de que ahora se empieza con problemas de optimización, para que se vea que la intención es que se vea que existe optimización dinámica y se que va a requerir para ir a ecuaciones diferenciales ¿no?

MA A mi si

JC ¿Si?

MA Si me gusto, noto entre mis compañeros que van un poco perdidos por la cuestión de que no van el orden del libro y bueno no es fácil el cambio

JC Como que siempre requieren una guía de texto ¿no?

MA Mmm, si, si, si, oye porque no vamos acá y estamos acá, vimos teoría de control, calculo de variaciones pero no vimos las condiciones en un principio de transversalidad, luego ya de ahí de teoría de control aprendimos ecuaciones diferenciales que esa parte estuvo bien ya cuando vimos ecuaciones diferenciales pues ya sabes mas o menos de que estas hablando, a mi si me pareció bien

JC Perfecto

MA Creo que tienen razón en la parte de que poner al final ecuaciones en diferencias es mas sencillo

JC De acuerdo MA Si eso si estuvo bien

JC Pues te agradezco mucho tu colaboración

MA No pues de que

En resumen podemos suponer que tiene una concepción tipo proceso en los conceptos de funcional, condiciones de primer orden para optimizar en Cálculo de Variaciones, equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y otro de Teoría de Control, diferencia entre variables de estado y variables de control y las Condiciones de Transversalidad. Asimismo podemos suponer que ha encapsulado en un objeto el proceso para determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima. Respecto a los conceptos de Trayectoria o Integral de Línea podemos suponer que no tiene ni siquiera una concepción tipo acción y sobre Espacio Vectorial a lo más una concepción tipo acción.

ENTREVISTA: Yanaí. Grupo: M.A.E.

JC Bueno es día 24 de abril del 2008 y estamos con

YC Yanai Contreras

JC Yanai Contreras, entonces te vamos a hacer otra vez unas preguntas y lo que quisiéramos es que en la respuesta no hubiera ningún silencio en el proceso de pensamiento para tratar de captar toda la idea ¿si?, entonces, bueno, primero dice, dadas las siguientes expresiones determinar cuales son funcionales, cuales son únicamente funciones, justificándolo brevemente, entonces vamos una por una ¿si?

YC Las escribo

JC Si, la primera es $f(x)=\int_0^x (t^2+5)dt$, ¿es funcional?

YC Funcional es como una función pero en vez de ir de los reales a, o sea, de R a R N, va como de R N a R, o sea, son mas bien como curvas de solución
JC De R N a R, en particular, mas generalmente podemos decir que va de un espacio vectorial a los numero reales, ¿si?, entonces la primera sera funcion o será funcional o ninguna de las 2
YC Pues no es funcional ¿o si?
JC No es funcional ¿Por qué?
YC Porque,
JC ¿Cuál es su dominio?
YC Su dominio pues todos los reales ¿no?
JC Mmm
YC Este pues, porque va, hay es que, como depende de T, a ver T es igual como en todos los reales no entonces, seria,
JC Bueno ahí podríamos considerar la T como variable muda, y lo que esta adentro seria una especie de parábola ¿no?, y entonces queremos la integral, bueno si la parábola es positiva como es este el caso, la integral representa ¿que cosa?, geométricamente
YC Es este como el área
JC El área ¿verdad?, bajo la curva, bajo la parábola
YC Aja, bajo la parábola
JC De donde a donde
YC 0 a X
JC La X puede variar ¿no?
YC Si
JC Entonces va midiendo el área hacia un lado o hacia el otro, entonces el dominio si son las X ¿no?, en todos los reales
YC Si
JC ¿Y el rango?
YC Pues todos los valores que puede tomar T
JC En donde estaría, o sea, que puede tomar T o que puede tomar la integral
YC Bueno, si la integral a pues a entonces si es un funcional
JC ¿Si es una funcional?
YC Si no, porque seria como
JC Su dominio es un espacio vectorial
YC Ay creo que tengo confusión de conceptos, este pues ay, pues si porque es como la forma de la parábola ¿no?, ah no porque esta…
JC A ver vamos a ver otro ¿no?
YC Si mejor
JC Segundo $f(x,y)=\int_0^3\int_0^{x^2}\left(5x^3y+8x\right)dydx$
YC Esto si es una función ¿no?
JC¿ Es una función?
YC Si
JC ¿Será funcional?
YC No, solo depende de X y de Y ¿no?
JC OK, entonces es una función nada mas, bueno, numero tres, $f(x,x',t)=\sqrt{1+x'^2}$
YC Si es un funcional ¿no?
JC ¿Por qué?
YC Porque son las X es en T o sea, como, esta es longitud de una curva ¿no?

JC La longitud de una curva
YC Entonces es, esta se podría como optimizar no
JC Se podría optimizar
YC Si bueno, es un funcional, bueno, no se, si o sea yo digo que es un funcional
JC Pero¿ por que aparece la x y la X'?
YC Mas bien por la T, bueno si porque, a ver, porque, bueno si para empezar porque es como la forma que usamos casi siempre y porque, aquí va como de X en T, y T es como si fuera R N o sea así
JC OK, luego la que sigue $J(x)=\left(\int_0^5 x(t)^2\,dt, \sqrt{1+x'^2}\right)$
YC Ay esta si es un funcional ¿no?
JC ¿Por qué?
YC Es como una, bueno para empezar esta formada de vector entonces este, si es un vector que va en los reales entonces es un funcional ¿no?
JC OK, entonces si seria funcional, a ver otra mas, $J(x)=\int_0^T \left(x^2+x'^2\right)dt$
YC Este yo diría que también es funcional
JC también es una funcional, ¿Por qué razón?
YC Pues primero igual la forma
JC Aparece X, X' y T
YC Aja y tiene T, o sea
JC Mmm, OK, entonces vamos a recordar la definición de una funcional es, ¿Cuál era?
YC Un espacio vectorial que va, que va, como una función
JC Una función que va de un espacio vectorial
YC A R
JC A los reales, OK, entonces vamos ir obteniendo el dominio y le rango de las expresiones que obtuvimos antes a ver si eso nos ayuda a ver si son funcionales o no, a ver en la primera, ¿Cuál es el dominio?
YC No me acuerdo
JC Es la que escribimos al mero principio de la hoja
YC Dominio este, la X depende de T verdad ¿o no?
JC La T se puede considerar como una variable muda
YC A, OK,
JC geométricamente ya vimos que se interpreta ¿como?, el área bajo una curva de 0 a X donde la X varia ¿no?
YC A, OK, si, si entonces el dominio X pues de, pues es R ¿no?
JC Esta en R
YC Aja
JC Y el rango
YC El rango
JC La X puede ser cualquier número positivo, negativo o 0 ¿no?
YC Entonces este el rango es de, 5 a infinito
JC Basta con que se diga esta contenido en los reales o no, no sabemos si son todos los reales pero esta contenido en los reales ¿no?, o sea, que seria una función que va de R en R
YC OK
JC ¿Eso encaja con la definición de funcional?
YC No

JC No, ¿verdad?, entonces no es funcional, luego la segunda, ¿cual es el dominio de la segunda?
YC Es pues, R 2 positivo
JC Seria en una región del plano, pero todo R 2, todo R 2 positivo
YC En R 2 positivo
JC ¿Todo R 2 positivo?, para que sirven los limites de integración ahí
YC Pues para definirla
JC Definir una región ¿no?
YC Si
JC Bueno es una región efectivamente pero que esta en R 2 eso si es cierto
YC Si
JC Y luego, o sea, su dominio esta contenido en R 2, que es lo que nos importa ahorita y, el rango
YC Este, el rango pues seria igual ¿no?, positivo o sea, es R positivo
JC ¿Quedaría donde en los reales o en R 2?
YC En R 2
JC ¿En R 2?
YC Si
JC Entonces la función iría de R 2 en R 2
YC A no, perdón de R 2 en R
JC De R 2 en R OK, ahora, bueno ahí habría que pensar si es funcional o no
YC Este las dos
JC El dominio por ejemplo en la dos es R 2 un trazo de R 2, ¿R 2 se puede considerar espacio vectorial o no?
YC Si, ¿no?
JC Si R 2 es un espacio vectorial, entonces es una función que va de un espacio vectorial en R
YC Ah, entonces si se ajusta a la definición ¿no?
JC Entonces según eso si seria funcional, pero habría que pensar en realidad el dominio no es todo R 2 y no necesariamente es un espacio vectorial, habría que ver si esa región es un espacio vectorial o no,
YC Si
JC ¿O no habría que considerar eso?
YC Si, si
JC Si habría que considerar
YC Si o sea comprobar que si
JC Que es un espacio vectorial, en ese caso si seria si no, bueno luego la tercera
YC Esta, pues, si la función si va como de
JC X es una función X’ es su derivada ¿no?
YC Si
JC Entonces esta definida digamos en un conjunto de funciones derivables
YC Si
JC ¿Es un espacio vectorial?
YC Si
JC Si verdad, y
YC Y va
JC El rango donde esta
YC En T, o sea, en los reales
JC En los reales, OK, ¿entonces seria funcional o no?
YC Si es funcional,

JC Si seria, luego la cuarta,
YC Pues aquí ya esta definida como vector igual va en los reales
JC O sea, su domino quedaría también digamos en un espacio de funciones derivable, que es espacio vectorial
YC Si
JC Sin embargo el rango de esta función cual es, se le esta asociando un vector ¿no?, o sea, tiene dos componentes o sea el paréntesis se cierra hasta el final, es un paréntesis que abre y tiene dos componentes, o sea es un vector
YC Si, la primera componente si va en los reales y la segunda
JC Cada una va en los reales ¿no?
YC Si
JC Cada componente, pero son dos componentes por lo tanto ¿el rango donde esta?
YC En R 2
JC En R 2, y si el rango esta en R 2 ¿eso puede ser funcional?
YC No
JC ¿Aunque aparezca la X y la X'?
YC OK, si
JC Y la última
YC La ultima, ah esto si va de un espacio vectorial que va en R
JC Si es una funcional que va de un espacio vectorial que serian las funciones derivables en
YC R
JC En los reales ¿verdad?
YC En los reales
JC Esa claramente es funcional
YC Si
JC Bueno, que respuestas que se habían dado originalmente se cambiaron después de haber visto el dominio y el rango
YC La 4, si resulto que no era, la 1 no tenía respuesta entonces pues ya
JC Ya tiene respuesta, es decir ayudo el hecho de determinar el dominio y el rango
YC Si para asegurar además
JC Exactamente, entonces es bueno siempre el revisar la definición ¿verdad?, una funcional es entonces que cosa
YC Un conjunto de un campo de vectores que va este a los reales
JC Es decir es una función que esta definida sobre un espacio vectorial y que va a los reales, entonces es importante eso
YC Si
JC Bueno entonces a ver, como un segundo ejercicio, dar tres ejemplos de funcionales justificando brevemente que lo sean
YC Aquí los escribo como quiera
JC Los que sean
YC Bueno el primero estoy usando la forma convencional o sea, bueno la que usamos normalmente
JC Aunque ya vimos que puede haber
YC Si, si, si
JC Esa forma y no aparecen las funcionales
YC Si,
JC Esa por que es funcional
YC Porque va de un espacio vectorial a los reales
JC A los reales, muy bien

YC Este va de R en R, en R verdad
JC A menos de que se diga X es un, no van a tomar a X como un elemento del espacio de funciones derivables o lo que sea ¿no?, y entonces si se puede definir así
YC OK, entonces
JC Tendríamos que si X representa un número real pues evidentemente que no es, ¿tiene que tener integral necesariamente?
YC Este…
JC ¿Que dice?
YC X mas X' al cuadrado donde X depende de T, entonces ya
JC X depende de T, que es X
YC Una función
JC Eso es importante ¿verdad?, porque si X no es función, X es un numero real, claro que ahí aparece su derivada no, pero de todas maneras, X tiene que ser una función derivable. OK, entonces son tres ejemplos de funcionales, a ver una tercera pregunta, ¿tu sabes que es una integral de línea?

Del párrafo anterior, podemos suponer que ha interiorizado las acciones que le permiten distinguir funcionales en un proceso, solo que partió de una definición parcial de funcional. Cuando se le da una definición completa de funcional y debido al mecanismo de interiorización mencionado,lo completa utilizando la definición formal de funcional, por lo que podemos suponer que ha interiorizado las acciones para distinguir una funcional en un proceso.

YC Es que no me acuerdo, es en la que determinamos la longitud de la curva
JC Puede ser un caso particular, pero si sabes que es una integral de línea en general
YC No
JC No, entonces no sabes calcular integrales de línea,
YC No, me acuerdo que era eso de, bueno de calcular longitudes con integral, o sea, la longitud de la curva con una integral
JC Mmm
YC Pero así no me acuerdo más
JC OK; y ¿cómo podemos saber analíticamente que una función es una trayectoria?, o como se vería una trayectoria analíticamente, ¿cómo se escribiría un ejemplo de una función que represente una trayectoria?
YC Se puede escribir como en forma vectorial
JC A ver ¿cómo?
YC Este…, esta la puedo escribir como una función que me de cómo la longitud o lo puedo escribir como un funcional ¿no?, también,
JC A ver como…, eso que representa que trayectoria representaría
YC De A, a B, pero como en línea recta, seria como la distancia de A-B
JC Seria como una longitud de la curva
YC Si
JC Pero ahorita lo que queremos es una trayectoria nada más, por ejemplo ¿cómo se puede escribir una circunferencia?
YC Ah, OK,
JC A ver ¿cómo se puede escribir como trayectoria?
YC Pues como que es X cuadrada más Y cuadrada igual a l
JC A R al cuadrado, pero, ¿cómo podríamos describirla ahora en forma parametrica?
YC En forma parametrica es como ecuación
JC Las ecuaciones de cada una de las incógnitas variables

YC Mmm,
JC O sea, no te acuerdas bien de las ecuaciones parametricas, muy bien, luego. ¿Como podemos saber analíticamente que una expresión es una funcional?, como le hacíamos para ver si era una funcional o no
YC Con el dominio
JC Con el dominio y
YC El rango
JC El rango ¿no?, básicamente, o sea que una funcional es una función pero una función que en realidad es un numero real ¿verdad?
YC Si

Del párrafo anterior, podemos suponer que no tiene ni siquiera un tipo de concepción acción sobre los conceptos trayectoria e integral de línea.

JC Ahora otra pregunta, cuando se ve optimización en cálculo el hecho de que una función sea cóncava o convexa nos ayuda mucho para determinar si un punto donde no hay variaciones es máximo o mínimo ¿no?
YC Si
JC ¿Si?, en el caso de las funcionales en el curso se generalizó ese proceso, pero la pregunta es, ¿por que si queremos determinar si una funcional es cóncava o convexa, únicamente nos fijamos en el integrando?
YC Si
JC Y vemos si es cóncava o convexa, pero, ¿por qué?
YC Porque o sea, porque es como, porque es como la parte que, lo que tiene como forma ¿no?, entonces no, no se como explicarlo, es como, pues si es lo que varia, o sea la R, como va en R, pues no se, o sea, T siempre va a tomar cualquier valor y lo que varia es la función
JC O sea esa función, el integrando es lo que le da forma
YC Aja
JC Y por eso podemos decir si el integrando es cóncavo o convexo la función va a ser cóncava o convexa es así
YC Si
JC OK, otra pregunta, dada la siguiente funcional $J(x)=\int_0^{40}\frac{-x'^2}{2}dt$, y condiciones iniciales X en 0 es 20 y X en 40 es 0, ¿podrías optimizarla?
YC Si, tengo que decir lo que hago o esta bien si después lo describo
JC Seria bueno si fueras describiendo como llegas a la solución porque quiero en base a eso hacer otro ejercicio
YC OK, aplico la ecuación de Euler que es como la condición necesaria de primer orden. …Al simplificar me quedó que era menos ½ de T mas 20
JC Menos ½ de T mas 20, o sea, un recta, y la trayectoria solución pero la funcional es un numero ¿no?,
YC Mmm
JC ¿Que valor da con esa trayectoria la funcional?
YC De acuerdo a la integral de esto
JC Hay que sacar nada mas X’ y sustituirlo ¿no?
YC Menos 5
JC OK, ahora será un máximo será optima en el sentido de máximo, o en mínimo la trayectoria

YC Ah, este, bueno sacando, sabiendo si esta, pero es una recta, bueno no es ni cóncava ni convexa
JC Ya habíamos dicho que el integrando también tiene que ver con las condiciones de suficiencia ¿no?,
YC Si, entonces, aplicamos el Hessiano…ay es que… No se puede porque es 0
JC Entonces, ¿qué podemos hacer?
YC Bueno el integrando de la funcional es una función cóncava
JC cóncava, entonces el resultado debió de ser, que la trayectoria resulta un
YC Es un máximo
JC máximo, bueno vamos a ver si es cierto, si pasamos a otra trayectoria, el valor con esa nueva trayectoria debe ser mas chico, ¿no?, debía ser mas chico, a ver propón otra trayectoria, una muy simple puedes buscar
YC O sea, en lugar de esta
JC En lugar de esa, y cual fue la trayectoria que salio, una recta ¿no?
YC Si ah esta
JC Esta, en lugar de esa, una mas sencilla, que puede ser la misma recta pero X de T igual a T nada mas para hacerlo mas sencillo, que pasaría si ponemos X de T igual a T ¿Cuánto valdría la integral?
YC Menos 20
JC O sea concuerda con que sea máximo ¿verdad?
YC Si
JC ¿Que podrías hacer, aunque no sea formal, para seguir dándote cuenta de que si es un máximo, si la trayectoria es optima si es un máximo, que debe de pasar con cualquier otra trayectoria vecina que sustituyamos ahí?
YC Debe ser un número mas chico
JC Un numero mas chico, entonces lo que tenemos que hacer es probar con varias ¿no?,
YC Si
JC ¿Si?, ese seria el camino aunque no es formal, formal tenemos que ver las condiciones de suficiencia ¿verdad?
YC Si. Puede ser el Hessiano o como en este caso, determinando la concavidad o convexidad del integrando o como vimos en el curso por la condición de Legendre
JC ¿Qué dice esa condición?
YC Que si $f_{x'x'}$ es positivo es mínimo y si es negativo máximo
JC Sólo que esa condición no es suficiente. De todos modos, si la aplicas ¿qué obtienes?
YC También es máximo.

Por lo dicho en el párrafo anterior podemos suponer que ha interiorizado las acciones para optimizar un problema en Cálculo de Variaciones en un proceso que ha logrado coordinar con el proceso de solución de la ecuación diferencial asociada. En cuanto a las Condiciones Suficientes de segundo orden suponemos que ha logrado encapsular en un objeto el proceso de determinar si una trayectoria es máxima o mínima al presentar distintas acciones y procesos para lograr su meta, coordinando dichas acciones y procesos entre sí.

JC Bueno a ver otra pregunta, si se quisiera resolver el problema de minimizar la integral desde T 0 hasta T 1 de la raíz de 1 mas X’ al cuadrado D T, ya la habíamos visto ¿no?, eso representa, la longitud de una curva ¿no?
YC Si

JC Estamos suponiendo que hay dos puntos un punto P que su abcisa es T 1 y su ordenada es X de T 1 y otro punto Q cuya abcisa es T 2 y su ordenada X de T 2 ¿no?, bueno aquí si podemos dibujar los puntos ¿no?, ¿cuales serian por ejemplo los puntos? ¿cual será la trayectoria optima intuitivamente?
YC Pues una recta ¿no?
JC Es la recta verdad, infinitas soluciones puede haber, son cualquier trayectoria que pase por esos dos puntos ¿no?
YC Si
JC Si, pero la recta va a ser la solución optima, ahora que tiene que ver la solución optima con el integrando, bueno una pregunta vamos por partes, ¿cómo se relacionaría el integrando con el valor optimo?, o sea ¿cómo se relaciona el integrando con el valor optimo de la funcional?
YC Este, es como el criterio para optimizar.
JC Exactamente
JC A ver vamos a poner otro problema, supongamos que queremos ahora minimizar, $\int_0^T dt$ donde t es el tiempo.
YC Un área
JC Puede ser un área pero que otra cosa puede ser, si T es el tiempo que representa
YC Como una recta, no se
JC geométricamente la solución es una recta, pero se puede interpretar como el tiempo transcurrido ¿no?,
YC Ah, si, es el tiempo total entre 0 y T, lo que queremos minimizar
JC El tiempo, estamos minimizando el tiempo que es lo que viene dentro del integrando ¿no?, en la anterior, en la funcional anterior que estábamos minimizando
YC La trayectoria en el tiempo
JC estábamos minimizando la trayectoria más corta
YC OK
JC Entonces que es el integrando en general, ¿que representa el integrando en general?, en una funcional, en un caso fue, la distancia mas corta, en otro el tiempo mas corto, por ejemplo, en economía, que tal si el integrando fuera los costos que aparecen en X y en X’, estaríamos minimizando los costos verdad,
YC Si
JC Es decir el integrando que seria
YC Es como el criterio para minimizar algo
JC ¿Podemos decir que es lo que queremos minimizar?
YC Sí

Por lo dicho en los párrafos anteriores, ha logrado interiorizar las acciones que permiten relacionar la optimización de una funcional con el integrando en un proceso.

JC Exactamente es el criterio bajo el cual debemos de optimizar, bueno, ¿de que cambios específicos al considerar el intervalo de tiempo en un problema de optimización dinámica surgen las condiciones de transversalidad?, y hay que graficarlos casos ¿no?
YC OK,
JC O sea, que cambios puede haber en el intervalo de tiempo
YC Que el tiempo era acotado

JC ¿Cómo serian las trayectorias ahí?
YC Aquí pueden ser una aquí, pueden ser cualquiera
JC Mmm, con el tiempo acotado, y luego, todas parten de 0 o no
YC Pues pueden partir de 0
JC Bueno en caso particular parten de 0 ¿no?
YC Mmm, pero no necesariamente
JC No necesariamente
YC Luego puede, el tiempo puede ser libre y esta acotada la X
JC Mmm, ¿cómo serian ahí las trayectorias?
YC Igual así a cualquier T
JC Mmm, o que otras son
YC Ah pues las dos pueden ser libres es esto así
JC Si en el tercer caso en que fueran libres o que todo estuviera perfectamente acotado ¿no?, que T y X de T estuvieran dadas
YC Si

De lo recién dicho podemos suponer que ha interiorizado las acciones para determinar el origen de las Condiciones de Transversalidad en un proceso que ha logrado coordinar con el proceso geométrico de explicar el origen de dichas Condiciones por lo que suponemos que ha logrado encapsular el proceso sobre determinar el origen de las Condiciones de Transversalidad en un objeto.

JC Luego una mas, vamos a continuar con ese problema de minimizar, la integral de T 0 a T 1 de la raíz de 1 mas X’ al cuadrado, bueno ¿cómo lo resolverías con lenguaje de calculo de variaciones?
YC Pues igual, bueno, sacando la ecuación de Euler, y luego,
JC Ecuación de Euler
YC Bueno no hay condiciones
JC Bueno vamos a suponer que nos dieran las condiciones iniciales ¿no?
YC Si
JC ¿Cómo se podría expresar este problema como un problema de control?
YC Sacando el Hamiltoniano
JC ¿Cómo se escribiría?
YC Es como una (inaudible)¿verdad?
JC ¿Es qué? perdón
YC Es como un Lagrangeano
JC Es muy parecido si, nada mas que ahí las variables, X’ no entra como variable eh
YC Es que la otra no me acuerdo que era
JC En lugar de la X’ se usa otra letra
YC Ah si sustituimos con cualquier otra con U
JC Que es la variable de control ¿no?
YC Si, si
JC Mas lamda por U pusiste
YC Este es que
JC OK, OK
YC No, no es que esta mal pero no me acordaba como se hace
JC O sea, se escribe el Hamiltoneano, primero viene la función objetivo mas lamda que seria la variable como se le llama a la lamda, la variable de, de co-estado ¿no?,
YC Ah si
JC Y luego viene la restricción

YC Si pero en la restricción no es, ya no me acuerdo como se escribe la restricción
JC No era U
YC Es que
JC Después de plantear el Hamiltoneano, así como en calculo de variaciones planteamos la ecuación de Euler, en teoría de control ¿Qué condiciones deben de plantearse?
YC No me acuerdo
JC No te acuerdas las condiciones de primer orden, OK, en un problema de control como puedes saber cual variable es la de estado y cual es la de control, porque las letras pueden cambiar ¿no?
YC Si, pues la de control, o sea, esta representada como derivada, la de control es la X' luego si esta representada como derivada
JC OK,
YC Y la otra es la de estado

Por lo recién visto podemos suponer que no ha interiorizado las acciones para establecer la equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y otro de Control en un proceso, sin embargo, podemos suponer que ha logrado interiorizar las acciones que permiten distinguir a las variables de estado de las variables de control en un proceso, ya que da criterios específicos para distinguirlas.

JC Muy bien, a ver unas dos preguntitas más, ya generales, una dentro del curso ¿qué es lo que mas se te ha dificultado primero para entender el concepto de funcional?
YC El primero cuando solo te lo ponen como de R N en R, como que no es algo que se pueda imaginar entonces, ya, o sea ya que te dan mas ejemplos y te, o sea primero te dicen que es una curva entonces ya es como mas fácil entenderlo no se
JC Y ¿qué es lo mas difícil?
YC Pues primero que te den la definición así abstracta como que no o sea no la entiendes
JC Se tiene que llegar por medio de ejemplos de generalizaciones ¿no?
YC Si
JC Y así se hizo ¿no?
YC Si
JC Luego numero dos este, para resolver problemas de optimización con funcionales, tuviste algún problema
YC Pues es que como empezamos haciendo este, primero puros ejemplos entonces pues ya no, o sea
JC O ya lo hiciste mecánicamente dijiste ecuación de Euler y ya
YC Si yo creo más bien es eso
JC Lo que esta atrás esta muy claro como se llego a la ecuación de Euler o no,
YC No
JC O sea, se usa
YC Si
JC La ecuación de Euler y punto
YC Entiendo de dónde se obtiene y la aplico.
JC Y luego para las condiciones de transversalidad si se entiende el concepto de porque surgen esas condiciones
YC Ah eso si, porque, pues si porque, bueno gráficamente es como mas fácil
JC O sea en base a las variaciones en el tiempo
YC Aja

JC Y esas, este, la deducción de las condiciones de transversalidad ¿se vieron claras?
YC Si, geométricamente se entiende muy bien de dónde surgieron.
JC En general que parte del cálculo de variaciones o de teoría de control te ha resultado más difícil y por que
YC Pues ahorita los sistemas de ecuaciones, como que no me queda claro
JC Pero sistemas de ecuaciones diferenciales
YC Aja
JC Pero bueno ahorita me refería básicamente a cálculo de variaciones
YC Ah OK,
JC Desde luego calculo de variaciones para resolver problemas de optimización hay que saber resolver sistemas de ecuaciones ¿no?
YC Si, si este, muy difícil, hay bueno pues la verdad todos los métodos que nos enseñan como que me confunden mucho o sea no
JC ¿Como que método?
YC Este es que a ver como, me enseñaron, e ver cuando las ecuaciones no son este, hay como se llaman autónomas
JC Pero esos son problemas con ecuaciones diferenciales mas con ecuaciones diferenciales que con calculo de variación
YC Si más o menos
JC Con calculo de variaciones o teoría de control algún problema especifico, cual es el peor que puedas considerar
YC Pues creo que yo mas bien como que aplico
JC Y para eso a lo mejor no se tu que opinarías, si tu conocieras lo que es una integral de línea, una trayectoria, ¿crees que ayudaría?
YC Si porque
JC Por lo menos a ubicar y relacionar mejor el problema
YC Si como que si, como que entender bien de donde surgen
JC Aja
YC O sea eso no lo se muy bien
JC Mas bien es aplicar las cosas directamente no, con la formula
YC Pues si
JC OK, bueno pues te agradezco mucho
YC Si
JC Si me entregas también tus, pues muchas gracias eh
YC Si

En resumen podemos suponer que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre los conceptos: Trayectoria, Integral de línea y de equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y uno de Teoría de Control, que tiene un tipo de concepción proceso sobre los conceptos: Funcional, Condiciones de primer orden para resolver problemas de optimización en Cálculo de Variaciones, relación entre el proceso de optimización de una funcional y el integrando asociado así como la diferencia entre Variables de Estado y Variables de Control. Finalmente, suponemos que tiene un tipo de concepción objeto en los conceptos: Condiciones Suficientes de segundo orden para determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima y en las Condiciones de Transversalidad.

A continuación las entrevistas al grupo de Optimización:

A continuación las entrevistas al grupo de Optimización:

ENTREVISTA a Alejandro Grupo: Optimización (Rev. María)

En la respuesta a la primera pregunta, Alejandro considera que para ser funcional se requiere únicamente que el dominio sea un espacio de funciones. Para corroborar esta apreciación le preguntamos: “¿tu sabes lo que es una funcional?”, su respuesta fue: “Si eh se podría decir en términos sencillos que es una función que tiene como argumento una función, en términos más formales es una, es una función que toma como elementos, eh,eh que toma como, perdón, que toma como argumentos elementos de un espacio vectorial, en este caso puede ser un espacio vectorial de dimensión infinita como es el caso de, de funciones continuas o no se el caso de eh, del espacio de funciones continuas por ejemplo.”De esta respuesta nos damos cuenta de que únicamente se fija en el dominio, sin embargo, ahí también solo considera espacios de funciones y no espacios vectoriales normados en general. Podríamos suponer que no recuerda bien la definición de funcional, pero recuerda ejemplos de funcionales vistas en clase.

Debido a que sólo se fija en el dominio para definir una funcional, en seguida le preguntamos: “Y el rango tiene alguna limitación, o basta con eso?”, su respuesta fue: “Eh, ¿el rango de la funcional?, pues puedes imponerle una limitación pero generalmente como, lo tomamos como hem en optimización dinámica es de que el rango de las funciones va de, el dominio tiene ciertos valores, este va de cierto valor a cierto valor y pues en términos generales eh, no no especificamos ningún rango para la funcional me parece”. Es decir, interpretamos que de los ejemplos de funcional que recuerda, le llevó a pensar que el dominio era un espacio de funciones y de éstas, conoce funciones con rango en los reales o en un espacio vectorial (euclidiano) por lo que piensa que una funcional no tiene ninguna restricción en su rango. Si observamos más lo que puede construir de lo que no puede, podemos reconocer que aunque evidentemente tiene problemas con la definición, también podemos suponer que al menos tiene una concepción acción del concepto de funcional porque sí establece una relación con el concepto de función y aunque de inicio comienza con casos particulares de espacios vectoriales (espacios de funciones). Por otra parte, el tratar de definir la funcional a través de los ejemplos vistos en clase, da evidencias de una acción sobre objetos específicos, pero también es cierto que no ha interiorizado estas acciones, pues no ha sido capaz de generalizar de los ejemplos particulares a la definición general.

Sin embargo, cuando se le recordó la definición formal de funcional como cualquier función con dominio un espacio vectorial normado y rango los números reales, su respuesta fue: “Ah entonces, perdón, ya entendí la pregunta, entonces si, generalmente sus rangos son los reales porque toma una a una, a su argumento lo mapea a los reales generalmente”. Pese a que recordamos la definición de funcional, Alejandro en su respuesta no muestra una concepción tipo proceso ya que al volver sobre el rango dice: “…generalmente sus rangos son los reales…”. Para profundizar en este punto le preguntamos: “¿A ver por ejemplo una función de varias variables podría ser funcional?”y su respuesta fue: “¿una función de varias variables?¿Así como de RM a R?”, le respondimos: “De RM en R”, a lo que respondió: Este, eh, no. Le reiteramos: “¿Esa no puede ser una funcional?”, su respuesta fue: “no”, insistimos: “¿Es decir que para que sea funcional necesariamente su dominio tiene que ser un espacio de funciones?", a lo que respondió: "No, tiene que ser elementos de un espacio vectorial pero por ejemplo, ah bueno, pues toma una función de, eh si, si podría ser porque toma entonces elementos del espacio vectorial R y los manda a R una función de varias variables", le aclaramos "R no es espacio vectorial". De aquí supusimos que del concepto de funcional no tenía una concepción proceso y que trataba de dar explicaciones a través de los ejemplos que vio en clase. El tipo de concepción sobre el concepto de Espacio Vectorial es el que habíamos esperado cuando hablamos de los conceptos que un estudiante había construido. Un ejemplo en donde se muestra que no tiene una concepción proceso sobre el concepto de Espacio Vectorial es cuando se le pide: "determina si es funcional una integral (iterada) definida sobre un subconjunto de R2"y su respuesta es: "Eh no lo que pasa es que la razón por la que no es funcional es que no está tomando ningún elemento, de algún espacio vectorial…", entonces le preguntamos: "¿El Plano no es espacio vectorial?". Aquí podemos notar que no ha logrado interiorizar las acciones para determinar a un espacio vectorial lo que nos lleva a suponer que tiene una concepción acción sobre el concepto Espacio Vectorial. Aunque parcialmente (únicamente para espacios de funciones) relaciona correctamente el concepto de espacio vectorial con el de funcional (Con un tipo de concepción acción). Es importante mencionar este punto, ya que dentro de un esquema no sólo importa el tipo de concepción sobre cada concepto, sino las relaciones que el estudiante puede establecer entre ellos.

Para ver en función de qué estaba determinando si un objeto matemático era o no una funcional, le preguntamos: "¿En qué te estabas fijando tu para ver si era funcional?", respondió: "Pues básicamente que tomara este, independientemente de a donde lo mande, este que si tome, que el argumento o en este caso sea una función que sea un elemento de un espacio vectorial, o que, pues también en estos casos que cambie con respecto a otra variable T, por ejemplo"(puede apreciarse la no interiorización de las acciones que permiten distinguir funcionales en un proceso sobre el concepto funcional). Continuamos con una pregunta que tiene que ver con que para algunos estudiantes un objeto matemático es funcional si aparece la x y la x prima o aparece la integral respecto a t (tiempo). La pregunta que hicimos fue la siguiente: (continuación de la anterior: "¿En qué te estabas fijando tu para ver si era funcional?"): "O sea que aparezca por ejemplo la expresión X y la X prima", su respuesta fue: "Si que me de cuenta que realmente lo que está tomando como es una función o sea puede depender de t", entonces, reiteramos: "O sea como que eh para ti era funcional cuando aparecía X o X prima, pues había una función y su variación", a lo que respondió: "Eh, más bien que estuviera perfectamente claro que estoy tomando como elemento el espacio de funciones continuas o sea como espacio vectorial" (Vuelve a insistir en que el dominio sea un espacio de funciones), "por lo que si aparece X y X prima ayudaría a ver que estoy tomando un elemento del espacio de funciones".

Una observación interesante es que después de haber recordado y ejemplificado (con los ejercicios propuestos en la entrevista) el concepto de funcional, pudo primero cambiar correctamente algunas de las respuestas a la primera pregunta y fue capaz de dar ejemplos correctos de funcionales (en la pregunta tres) para poder corroborar (según el criterio dado en el mismo cuestionario) al menos un tipo de concepción acción del concepto de funcional. Es decir, como muchas veces sucede, el instrumento de validación se convirtió en un instrumento didáctico, que permitió observar durante la entrevista la modificación de la concepción del estudiantes, aunque en este caso, no se llegó a observar la interiorización de las acciones, sí algún indicio de que el estudiante pudiera estar en vías de interiorización. Se ha encontrado en otros estudios que algunos tipos de entrevista proporcionan oportunidades de reflexión a los estudiantes y se puede ver en ellos cómo los estudiantes aprenden de ellos. En términos de la Teoría APOE ayudan a interiorizar alguna acción en particular o a encapsular algún proceso.

Un concepto que cuando elaboramos la Descomposición Genética, pensamos que había sido construida por los estudiantes fue el concepto de Trayectoria. Preguntamos:"¿Tu sabes como se escribe analíticamente una trayectoria?", su respuesta fue: "Este, ¿ecuaciones polares?, digo, perdón ¿en ecuaciones paramétricas? En el caso de Alejandro, respondió de acuerdo a lo esperado sobre el concepto de trayectoria.

Otro concepto que supusimos que los estudiantes tenían construido es el de integral de línea, preguntamos: "Ahora este, ustedes, este, bueno, no sé si en este curso o en otro, ¿tu has visto alguna vez el concepto de integral de línea?, su respuesta fue: "Eh ¿integral de línea? Mmm…pues ahorita me viene vagamente, entonces preguntamos: "¿A ver dime que es una integral de línea?", a lo que respondió: "Bueno, lo que pasa es que en Cálculo "IV"vimos lo que son formas diferenciales, entonces sí, creo ahorita si estoy este conjeturando que una integral de línea podría ser la integral de una forma 1 sobre una variedad de este es la integral de una forma 1 sobre una variedad de dimensión 1", entonces preguntamos: "¿Alguna de las funcionales que vieron en el semestre las podrías asociar con una integral de línea?"a lo que respondió: "A ver si una diferencial si, si es más o menos eso que digo entonces una diferencial de una forma 1 sería una diferencial común y corriente de cualquier función y sería bajo una pues, pues yo creo que sí pero, es que no estaría muy seguro porque una integral de línea si es integral a una diferencial sobre una sobre una curva ¿no? En el espacio, este", interrumpimos: "Bueno, no te acuerdas ahorita bien", Alejandro asintió: "”No, no me acuerdo bien de eso ahorita. Como podemos apreciar, su comentario no revela ni siquiera la memorización de integral de línea. De aquí podemos suponer que no tiene ni siquiera una concepción acción de Integral de Línea.

En cuanto a resolver problemas de optimización, en lo referente a la aplicación de las condiciones necesarias de primer orden en Cálculo de Variaciones (Ecuación de Euler) la aplicó correctamente (de memoria), dijo que no sabría deducir la fórmula, pero que cuando se vió en clase entendió los argumentos. Según los criterios establecidos en la entrevista podríamos suponer una concepción acción de las condiciones de primer orden en el Cálculo de Variaciones. Por lo que respecta a las condiciones necesarias de primer orden en Teoría de control, escribió correctamente el Hamiltoniano, pero no recordaba del todo, las restricciones, por ejemplo, escribió: ¿$-H_\lambda = \lambda'$? Podríamos suponer una cognición acción de este concepto en base a los criterios de la entrevista. (Puede plantear y resolver en forma sólo memorística estos problemas).

Las condiciones suficientes de segundo orden fueron respondidas mostrando haber logrado interiorizar la acción de obtener la matriz Hessiana y clasificarla en términos de definida (semi-definida), positiva (negativa), análogamente a lo hecho en Cálculo. Además mencionó las condiciones de Legendre y dijo como aplicarlas sin recurrir a estímulo externo. Esto nos lleva a suponer una concepción proceso de este concepto según los criterios establecidos en la entrevista.

Con el fin de ejemplificar lo dicho sobre las condiciones necesarias de primer orden y las condiciones suficientes de segundo orden, podemos revisar las respuestas que dio Alejandro ante las siguientes preguntas: Empezamos pidiéndole que resolviera el siguiente ejercicio:

$Opt \int_0^{40} \left(\frac{x'^2}{2} \right) dt$. Entonces escribió correctamente la Ecuación de Euler y el sistema de ecuaciones diferenciales asociado y comentó: "Listo, es este la trayectoria óptima sería $\frac{-1}{2} t + 20$", entonces le preguntamos: "¿Cómo sabes si es máxima o mínima?"a lo que respondió: "No me dijo que, no me dijo que era, ¿verdad?", le respondimos:"No", Alejandro continuó: "No, entonces, o sea en este caso por la condición suficiente de segundo orden, me parece que es la condición de Legendre", preguntamos entonces: "¿Cuál es la condición de Legendre?", respondió: "Bueno que en este caso $f_{x'x'}$ lo determina…o nada más chequé el signo del Hessiano y como todos los menores principales me salieron de orden impar me salieron menores o iguales a cero y los de orden par me salieron mayores o iguales a cero", le preguntamos: "¿Da alguna información el Hessiano?", respondió: "Como es, este, negativa semidefinida, entonces bueno como esta matriz es negativa semidefinida entonces sería un máximo", preguntamos:"¿y con el otro criterio?", respondió: "Este, también, como chocando el signo de $f_{x'x'}$ que es negativo, pues vale -1, es máximo.

Sobre las condiciones de transversalidad mostró una concepción de tipo acción ya que mencionó que están relacionadas por las condiciones iniciales y finales. Sobre el origen de dichas condiciones respondió: "Pues de establecer condiciones tal que bajo esas, bueno esas cosas aquí no te restringen porque cada problema de las condiciones de transversalidad es un problema menos restringido este eh que al final de cuentas la trayectoria sigue siendo óptima ¿no? cuando la encuentres, te da condiciones, las condiciones de transversalidad te van a dar este las condiciones iniciales y finales tales que las trayectorias van a seguir siendo óptimas".Podemos suponer en base a los criterios dados para la entrevista que, aunque no es muy claro en su respuesta, mencionó como dijimos al principio de este párrafo la relación existente entre dichas condiciones y las condiciones iniciales y finales, por lo que podemos suponer que tiene una concepción acción sobre las condiciones de transversalidad.

En cuanto a la diferencia entre variable de estado y variable de control, cuando preguntamos: "¿Tu sabes como distinguir la variable de estado de la de control?", su respuesta fué: "Dependería del problema ¿no? que te pongan"y añadió: "Por la ecuación de transición, generalmente te van a poner que la variable de estado depende de la de control". Aquí podemos apreciar una concepción tipo acción porque su reconocimiento depende de una acción sobre una señal externa: la ecuación de transición. De manera que si no tiene dicha ecuación, no sería posiblemente capaz de distinguirla.

Alejandro considera que el concepto de funcional es más complicado de lo que había pensado antes de esta entrevista. Sugiere que en clase se vean muchos más ejemplos de lo que es y de lo que no es una funcional. Dice que los problemas de optimización tanto en Cálculo de Variaciones como en Teoría de Control los resuelve utilizando memorísticamente las fórmulas, pero que entendió la deducción de las mismas, pero no podría repetir ni las ideas detrás de la deducción. Considera que no tenía muy claro el concepto de funcional antes de esta entrevista, pero a través de ella pudo entender mejor este concepto.

En resumen, de los elementos que constituyen su esquema de funcional aparece el concepto de espacio vectorial en concepción tipo acción, la de funcional en concepción tipo acción, la de integral de línea ni siquiera como concepción tipo acción (es decir, ni siquiera forma parte de su esquema), las condiciones necesarias de primer orden con concepción tipo acción y las condiciones suficientes de segundo orden con un tipo de concepción proceso.

Sobre el concepto de Trayectoria podemos suponer una concepción proceso.

Además, por sus respuestas, podemos suponer que, las relaciones entre los conceptos que constituyen su esquema de funcional no están sólidamente relacionados entre sí, en el sentido de que Alejandro sabe que esas nociones entran en juego en la solución de problemas de optimización pero no entiende del todo cuál es el papel que juega cada uno de esos elementos en la solución del problema y por qué son necesarios, puesto que aparentemente puede resolver los problemas únicamente de manera memorística y no puede especificar claramente los elementos que entran en juego en esa solución. De ahí, que su esquema estaría a un nivel que podríamos denominar intra-funcional.

ENTREVISTA a Saulo Grupo: Optimización

mplos concretos, para ver, por ejemplo, en economía, vamos a suponer que una empresa quiere minimizar
SR Sus costos
JC Sus costos ¿no?, pero no quieren, o sea sus costos están variando de un instante a otro
SR Si
JC Entonces lo que quiere es minimizar la suma de los costos que eso se expresa como una integral ¿no?
SR Mmm
JC Entonces ahí se expresaría, minimizar la integral
SR Dentro de la trayectoria de, como van variando los costos
JC De donde a donde no se, el intervalo de tiempo que sea y de una función de costos, pero esa función de costos generalmente implica la X y la X’ ¿no?
SR Si, dependen normalmente sus costos de cuanto este, de cuanto estés produciendo ¿no?
JC Exactamente, entonces de ahí se ve que lo que puede interesar son esas integrales por esa razón ¿no?
SR Si
JC O por ejemplo una empresa quiere maximizar el valor presente de sus utilidades, y entonces a la función de utilidades además hay que multiplicarla por un factor de descuento ¿verdad?, porque siempre se hace con valor presente y esa suma que ahorita escribiste ahí, la sigma griega, esa, a ver donde quedo la sigma griega, ahorita la escribiste por aquí, esa cuando esta cambiando continuamente se cambia por
SR Una integral
JC La S latina ¿no?, que es la integral, entonces por eso esas funcionales van a ser muy importantes para nosotros ¿verdad?

SR Si
JC Sin embargo queda claro que para ser funcional no es necesario
SR No necesitas si, si, si, mmm...
JC Que entre una integral
SR Mmm
JC Si no que son las que a nosotros nos convienen
SR Si, te tienes que fijar entonces en la definición un poquito mas
JC Exactamente
SR Normalmente, o sea tu la diferencias por, yo creo, o sea es la practica
JC Exactamente
SR Estas acostumbrado
JC Si
SR No lo piensas tan…
JC A ver otro
SR Si

De lo anterior, podemos suponer que desde el principio había logrado interiorizar las acciones para determinar funcionales en un proceso, sólo que había partido de una definición parcial. Cuando se le dio la definición completa y debido al mecanismo de interiorización recién mencionado, no le causó problemas la interiorización de las acciones para determinar una funcional a partir de la definición completa en un nuevo proceso. Podemos suponer también que no ha logrado interiorizar todas las acciones que permiten distinguir a un Espacio Vectorial en un proceso contra lo que habíamos supuesto antes de iniciar el curso.

JC Vamos a suponer que queremos resolver el problema de, minimizar

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1+x'^2}\,dt$$

SR Si, si
JC De la raíz de 1 mas X' al cuadrado D T, esta ya la hemos visto varias veces aquí, bueno esta que esta aquí ¿Qué representa?, ¿Qué representación geométrica podemos darle a esto?
SR Es minimizar el área ¿no?
JC ¿El área?, fíjate que aparece una X'
SR Si, o sea vas a poner un instante, o sea quieres minimizar
JC A ver si no te acordaras te lo puedo decir, esa integral representa la longitud de una curva
SR Mmm
JC Entonces queremos minimizar, ¿Qué trayectoria minimiza la distancia, o minimiza la longitud?, intuitivamente tu me puedes decir cual es ¿no?
SR Si, creo
JC ¿Cuál?
SR La recta
JC La recta, entonces fíjate que ahí en esa funcional queremos minimizar pero que es lo que queremos minimizar en este caso
SR Si, por supuesto esto no es este
JC ¿Qué es lo que queremos minimizar, quien nos dice lo que queremos minimizar?
SR Esto
JC El integrando

SR El integrando

JC Por ejemplo, otro problema, si nos dicen ahora minimizar $\int_0^T dt$, es el tiempo ¿no?

SR Si
JC Si lo que queremos minimizar es el tiempo la trayectoria que nos permite minimizar el tiempo no necesariamente es la recta ¿verdad?
SR No
JC La recta minimiza…
SR La distancia
JC La distancia, pero no el tiempo
SR Si
JC Pero otra vez en la funcional cuál es ese criterio, por decirlo en alguna forma de minimización o de maximización donde queda escrito ese criterio, así como en el anterior dijiste en el integrando, aquí es donde queda, ¿queda también en el integrando o no?, ¿Qué es lo queremos minimizar?
SR El tiempo
JC El tiempo, y esta ahí ¿no?
SR Si
JC Entonces otra vez queda en el integrando
SR Si
JC Y en el que planteábamos antes en economía
SR ¿El de la tasa de descuento?
JC Puede ser la tasa de descuento, o la utilidad o el costo
SR Aja
JC Con los costos por ejemplo que son muy, muy fácil ¿Qué es lo que queremos minimizar?, queremos minimizar una integral que contiene la función de costos, ¿pero quien es el criterio, donde queda el criterio?
SR Con la función de costos
JC En el integrando
SR Si en el integrando
JC ¿Verdad?, y por que usamos integrales pues por esta razón
SR Es lo que decimos ¿no?
JC Porque en aplicaciones se usan mucho esas funcionales
SR Si, si, si
JC ¿Si?, a ver otro problema supongamos que nos dicen,
JC Si, maximizar o minimizar, encontrar el máximo o el mínimo de la siguiente funcional, $J(x)=\int_0^{40}\frac{-x^2}{2}dt$, sabiendo que X en 0 vale 20 y X en 40 vale 0, ¿podrás optimizar esta funcional?
SR Creo que si
JC ¿Qué s lo que harías?
SR Primero lo que decimos tomar el integrando, después busco la condición de primer orden a partir de la ecuación de Euler ¿verdad?, que es F de X menos D entre D T por F X punto igual a 0
JC Esa es la ecuación
SR De Euler
JC De Euler ¿verdad?, OK; es la condición necesaria
SR Es la condición necesaria, exacto, para poder hablar de un optimo ¿no?

JC Mmm
SR Ya después lo checamos
JC Una pregunta nada mas así ahorita que salio esta condición necesaria, esta condición necesaria ¿tú la podrías deducir?, es decir podrías llegar a ella
SR así sin haberla visto nunca, no
JC No o sea, según lo que ya se ha visto si ahorita te dijera puedes deducir esa, por que esa es la condición necesaria podrías decir por que es la condición necesaria…, podrías decírmelo, o mas bien te acuerdas de la formula y ya
SR Pues, más bien se la formula
JC Te sabes la formula, si la vieron en clase
SR Si, la demostramos
JC La demostraron se entendió perfectamente esa demostración o
SR La demostración, si, si me acuerdo mas o menos
JC Pero lo que si es un hecho es que entendiste aunque sea globalmente la demostración
SR Si, si o sea, si entiendo porque salio esto, o sea, vi este punto como se iba manejando la integral y eso si

JC Pero ahorita no lo puedes repetir ni siquiera así a nivel esquema, global
SR No, no me acuerdo
JC OK, bueno, si quieres continuamos con la solución
SR Entonces normalmente empiezo a trabajarla ¿no?, defines la función este sacas F de X, es 0 no hay, aquí la trabajas, aunque sabes que todas dependen de T aquí no se trabaja D T, aquí la trabajas con una variable independiente totalmente de T, entonces sacas F de X es igual a 0, F de X punto igual a menos X punto entonces ya tienes la ecuación de Euler ya de aquí de esta condición ya vas a poder trabajar con lo que tu sepas de 0 menos la derivada de T con respecto F de X punto que es menos X punto es igual a 0, aquí ya sabes que esto este que ya puedes trabajarlo ya metiendo la T, sabes que X punto vale D T, tu sabes que X punto menos X punto entonces seria menos X dos puntos igual a 0, X dos puntos igual a 0
JC Mmm
SR Entonces es relativamente sencillo encontrar esto ¿no?, es integrar X punto es igual a una constante X D T, ya seria a la constante por T mas una constante nuevamente de integración ya tienes las dos condiciones, entonces con dos condiciones y dos incógnitas vas a encontrar X, cuando X vale 0, tienes que vale 20 y que es C 1, y este cuando X vale 40sabes que es 0, entonces tienes que, ya sabes que C 1 es 20, entonces tienes 20 T 40 C es 0, entonces sabes que C 0 es igual a menos 20 entre 40 que es menos ½, entonces concluyes que la trayectoria optima que minimiza o maximiza el, la funcional va a ser X 0 es menos ½ D T mas 20, es una recta
JC Mmm
SR Esta es la recta que maximiza o minimiza a
JC ¿Maximiza o minimiza?
SR Entonces voy a tener que sacar la derivada de, F respecto a X punto, X punto
JC ¿Lo vas a hacer con la condición de Lagrange?
SR Este, si o sea, así lo calculas, pero nos explicaba la maestra pero es el criterio que uso para saber si es un máximo o un mínimo
JC ¿Qué harías si no funcionara este criterio?
SR Pues yo creo que checariamos la función ¿no?
JC ¿En qué sentido?
SR Si es cóncava o convexa. Si fuera X cuadrada y se sabe que s una parábola y si es

un negativo, yo sabría que es un máximo
JC Entonces, en este caso, ¿ que obtienes?
SR Por la condición de Lagrange es un máximo
JC¿ No funciona el Hessiano? ¿verdad?
SR No funciona, porque la función es lineal.
JC¿ Que otro criterio se puede aplicar?
SR No se, puedes tantear
JC ¿Cómo?
SR Meterías la…
JC Otras trayectorias
SR Otra trayectoria, aja,
JC A ver cuanto valdría la funcional para esa trayectoria
SR Exacto primero partes de se valor ¿no?
JC Mmm
SR Entonces este pues ya la metes 0 40 de menos X punto, cuanto vale X punto, X punto es 0 menos ½, si menos 1/2, menos ½ al cuadrado entre 2 esto es igual a la integral de 0 a 40 de menos ½ por ¼ si, da menos 5
JC Da menos 5 y ahora con que podrías comparar, con que otra trayectoria,
SR Una trayectoria mayor
JC Tu sabes lo que es trayectorias vecinas, así como los números reales se decía punto dentro de una vecindad, tu como dirías que trayectorias son vecinas, intuitivamente
SR Según yo nada mas como que las recorrieramos ¿no?
JC A ver vamos a tomar otra ¿no?, si fue lineal ¿verdad?
SR Si fue lineal
JC A ver vamos a tomar la más sencilla lineal X de T iguala T y ¿cuanto valdría su funcional?
SR Menos 20
JC Menos 20 y la otra valió
SR Menos 5
JC Es decir la otra fue más grande
SR Si
JC Es decir
SR Entonces estas maximizando
JC Entonces debería ser un máximo también ve el integrando, si el integrando en lugar de poner X y X’, pusiéramos X y, Y, y a la X’ le pusiéramos Y, quedaría menos Y cuadrada entre dos
SR Si fue lo que
JC Es una parábola
SR Una parábola
JC No es una parábola porque estamos en dos variables
SR Si
JC Pero seria como un cilindro parabólico recto
SR Si
JC Que abre hacia abajo
SR Hacia abajo aja entonces seria
JC Seria un máximo ¿verdad?
SR Un máximo, concavidad
JC Es otra forma de verlo con concavidad o convexidad en el integrando, pero a ver que pasaría si la trayectoria fuera una constante la que te guste
SR La que me guste, claro

De lo anterior podemos suponer que ha logrado interiorizar las acciones para obtener una trayectoria óptima en un proceso que ha logrado coordinar con el proceso de solución de ecuaciones diferenciales. En cuanto a las condiciones suficientes de segundo orden, manifestó el conocimiento de varios tipos de criterios, que van desde la Condición de Lagrange, el Hessiano, análisis de la concavidad / convexidad del integrando y la comparación con trayectorias intuitivamente "cercanas", por lo que podemos suponer ha logrado encapsular este concepto en un objeto.

JC Bueno a ver uno mas, otra vez con el mismo problema, minimizar $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+x'^2}\,dt$
SR Si
JC Y las condiciones serian X en T 0, digamos que es X 0, y X en T 1, X 1, y eso nada más para que se vea que son dos puntos
SR Si
JC Bueno ya habíamos visto intuitivamente que el resultado cual es
SR La recta
JC La recta ¿no?, bueno este es un problema que se puede resolver pues con la ecuación de Euler otra vez
SR Mmm
JC En cálculo de variaciones ¿verdad?
SR Si
JC Pero también se podría pasar a un problema de control
SR En teoría de control
JC Si, como podríamos resolverlo como problema de control
SR Pues que metas a la X punto la definieras como U
JC Mmm
SR Y tu lo, que es precisamente lo que no se, X punto tu pudieras verla como la velocidad, entonces no se,
entonces tu como te podrías controlar precisamente
JC Pero como se escribiría la solución, como la plantearíamos pues
SR Uno más U cuadrada
JC Sujeto a
SR A claro sujeto a X punto es igual a U
JC Mmm, y ahora como se escribiría ya el problema, el Hamiltoniano, ¿como se escribiría?
SR Seria, U cuadrada mas uno, más lambda por U
JC ¿Y las condiciones?
SR Condiciones de primer orden tendrías que satisfacer optimizar el Hamiltoniano con respecto a U y aquí es H respecto a u igual a cero, lamda punto o sea igual a menos H de X y X punto o sea restricción o sea H de lamda
JC Mmm, y ya con eso se resuelve el problema ¿no?
SR Si

De lo anterior, podemos suponer que ha logrado encapsular el proceso de pasar de

un problema de Cálculo de Variaciones a otro de Teoría de Control en un objeto.

JC Muy bien, ¿como distingues la variable de estado de la de control?
SR Bueno es la que tú controlas ¿no?, el consumo, y ya a partir de tu consumo determinas tu capital
JC Y¿ analíticamente como se podría ver cual es la de estado y cual es la de control?
SR Justamente que es X punto, la derivada ¿no?, es decir, la derivada es el ritmo ¿no? Y el ritmo es con lo que se puede controlar, ya sea el ritmo de gasto, de consumo de pesca, de sacar el petróleo
JC De lo que sea ¿no?, entonces donde esta la derivada ahí esta la variable de control
SR OK

Por la definición y los ejemplos dados, podemos suponer que ha encapsulado el proceso para distinguir entre variables de estado y variables de control en un objeto.

JC ¿Tu sabes de donde surgieron las condiciones de transversalidad?
SR Las condiciones de transversalidad
JC Ya sea en cálculo de variaciones o en teoría de control, por que surgieron las condiciones de transversalidad
SR Si, porque son los limites ¿no?
JC Mmm
SR O sea una condición de transversalidad es bueno, yo quiero alcanzar ciertos puntos
JC Aja
SR Entonces cual es la trayectoria a partir de lo que tengo a lo que quiero llegar, cual es la trayectoria que me optimice, o minimice o maximice ¿no?
JC Ahí esta dado el tiempo ¿verdad?
SR El tiempo, ahora a lo mejor lo que no me interesa es el tiempo, a lo mejor el tiempo no es lo que me interesa,
JC Mmm
SR A lo mejor yo quiero llegar a un cierto nivel de capital sin importar el tiempo, entonces cual es la trayectoria que debemos seguir con respecto a mis decisiones
JC Para llegar a eso ¿no?, no me importa el tiempo
SR Libre que es lo que mejor optimizaría todo

También podemos suponer por lo dicho en el párrafo anterior que ha interiorizado las acciones para determinar el origen de las Condiciones de Transversalidad en un proceso.

JC Perfecto, este bueno ya, preguntas ya muy generales ¿no?
SR Si
JC Que es lo que se te ha dificultado más o se te dificulto más para entender el concepto de funcional
SR de funcional, pues ahorita haciendo las pruebas este, me doy cuenta que por ejemplo, la definición no la conocía del todo bien, o sea, ya cuando al dijo, dices ah si claro por supuesto, pero o sea que en la practica realmente mas bien como ves definida tu dices ah si es funcional o no es, yo creo que por ejemplo, este tipo de casos o el de acá, este sobre todo me sorprendieron, o sea, creo que si un poquito mas la definición formal te ayudaría, trabajarlos creo que es mucho mas sencillo, tienen una dinámica en general todos, las condiciones de transversalidad que son un poquito lo que te puede como que atorar, o te puede hacer otra complicación lo puedes trabajar, pues ya tienes

ciertas definiciones para conforme si X T es libre, si X T es fijo en horizonte infinito
JC Eso las entendiste también bien
SR Si, eso si
JC Pero generalmente esas condiciones las puedes deducir igual que los principio del máximo o mas bien dices las entendí y las aplico
SR Creo que va un poquito más a la ecuación de Euler, porque igual las demostraciones de esas condiciones de transversalidad son lo mismo, desarrollas una integral, igual partes del mismo planteamiento y llegas a cierto punto donde tienes que x punto este más…
JC O sea las entiendes bien pero no las podrías ahorita por ejemplo deducir
SR No,
JC O sea en un problema ya las aplicas tal cual te las aprendes de memoria ¿no?
SR Si exacto me la aprendo
JC ¿Y si te piden deducirlas?
SR Es que precisamente estas condiciones salen o sea de la lógica llegas a estas 2 multiplicaciones
JC Mmm,
SR Entonces tu sabes si te están diciendo que una es libre la otra debe ser 0 entonces de ahí sale
JC Para resolver problemas de optimización¿ tuviste algún problema o ya después de ver los principios resolver los problemas son mecánicos?
SR Pues la mayoría son como que mecánicos y hay que ver los casos particulares hay unos que se dificultan mas, en el curso por ejemplo, lo que medio me costo, pero ese ya es como un problema aparte, el problema de que tienes que ver aquí mucho sistemas dinámicos
JC Mmm, o sea, los sistemas dinámicos
SR Y es algo repetitivo en el ITAM que es el peor curso que se esta dando
JC Ah si
SR O sea porque lo dan muchos profesores entonces todo mundo sabe cosas muy diferentes vemos cosas muy diferentes
JC O sea sistemas dinámicos
SR Sufrimos ahí con el curso y Lorena le paso que hay los políticos porque es como materia para teoría no se lleva, no les piden de requisito eso si no les piden requisito de análisis, este ya llevo sistemas dinámicos 2 entonces si estoy mucho mejor para ciertas cosas ¿no?, pero hay unos que están mejores en otras partes de dinámicos que otros
JC Bueno y finalmente, ¿tú sabes lo que es una integral de línea?
SR Integral de línea, no
JC Algunas de las funcionales que haces con integral son integrales de línea
SR Si
JC O sea, a lo mejor serviría si se manejaran mejor las integrales de línea para aprender el concepto de funcional ¿no?
SR Si seguramente, si, ya había oído el concepto y seguramente si lo he de haber leído en alguna vida
JC ¿Qué relación y que diferencia ves entre funcional y trayectoria?
SR Como que una trayectoria es lo que se busca en una funcional ¿no?, o sea, como que la funcional es
JC Se busca en que en resolver un problema de optimización
SR Aja, si, siempre que tu optimizas una funcional tu buscas una trayectoria, una trayectoria es una curva que describes a partir de un parámetro, o sea son como que conceptos diferentes, como que la funcional es como que, como va variando esa

trayectoria como puedes irla variando en diferentes puntos, esa trayectoria, y la trayectoria es como que esta dada ¿no?, por un parámetro independiente de todo eso ¿no?
JC OK, bueno pues te agradezco mucho tu colaboración
SR No a usted

En resumen podemos suponer que tiene un tipo de concepción proceso en los conceptos: Funcional, Condiciones de primer orden para resolver problemas de Optimización Dinámica y Condiciones de Transversalidad. Suponemos que tiene un tipo de concepción objeto en los conceptos: Condiciones suficientes de segundo orden para determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima, equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y otro de Teoría de Control, así como para determinar la diferencia entre una Variable de Estado y una Variable de Control. Sin embargo, no podemos suponer que ha interiorizado todas las acciones para determinar un Espacio Vectorial.

En cuanto a su nivel de Esquema de Funcional, suponemos un nivel intra, pues no muestra relaciones entre los distintos conceptos que forman parte de su esquema de funcional.

JC Pero ahorita no lo puedes repetir ni siquiera así a nivel esquema, global
SR No, no me acuerdo
JC OK, bueno, si quieres continuamos con la solución
SR Entonces normalmente empiezo a trabajarla ¿no?, defines la función este sacas F de X, es 0 no hay, aquí la trabajas, aunque sabes que todas dependen de T aquí no se trabaja D T, aquí la trabajas con una variable independiente totalmente de T, entonces sacas F de X es igual a 0, F de X punto igual a menos X punto entonces ya tienes la ecuación de Euler ya de aquí de esta condición ya vas a poder trabajar con lo que tu sepas de 0 menos la derivada de T con respecto F de X punto que es menos X punto es igual a 0, aquí ya sabes que esto este que ya puedes trabajarlo ya metiendo la T, sabes que X punto vale D T, tu sabes que X punto menos X punto entonces seria menos X dos puntos igual a 0, X dos puntos igual a 0
JC Mmm
SR Entonces es relativamente sencillo encontrar esto ¿no?, es integrar X punto es igual a una constante X D T, ya seria a la constante por T mas una constante nuevamente de integración ya tienes las dos condiciones, entonces con dos condiciones y dos incógnitas vas a encontrar X, cuando X vale 0, tienes que vale 20 y que es C 1, y este cuando X vale 40sabes que es 0, entonces tienes que, ya sabes que C 1 es 20, entonces tienes 20 T 40 C es 0, entonces sabes que C 0 es igual a menos 20 entre 40 que es menos ½, entonces concluyes que la trayectoria optima que minimiza o maximiza el, la funcional va a ser X 0 es menos ½ D T mas 20, es una recta
JC Mmm
SR Esta es la recta que maximiza o minimiza a
JC ¿Maximiza o minimiza?
SR Entonces voy a tener que sacar la derivada de, F respecto a X punto, X punto
JC ¿Lo vas a hacer con la condición de Lagrange?
SR Este, si o sea, así lo calculas, pero nos explicaba la maestra pero es el criterio que uso para saber si es un máximo o un mínimo
JC ¿Qué harías si no funcionara este criterio?

SR Pues yo creo que checariamos la función ¿no?
JC ¿En qué sentido?
SR Si es cóncava o convexa. Si fuera X cuadrada y se sabe que s una parábola y si es un negativo, yo sabría que es un máximo
JC Entonces, en este caso, ¿ que obtienes?
SR Por la condición de Lagrange es un máximo
JC¿ No funciona el Hessiano? ¿verdad?
SR No funciona, porque la función es lineal.
JC¿ Que otro criterio se puede aplicar?
SR No se, puedes tantear
JC ¿Cómo?
SR Meterías la…
JC Otras trayectorias
SR Otra trayectoria, aja,
JC A ver cuanto valdría la funcional para esa trayectoria
SR Exacto primero partes de se valor ¿no?
JC Mmm
SR Entonces este pues ya la metes 0 40 de menos X punto, cuanto vale X punto, X punto es 0 menos ½, si menos 1/2, menos ½ al cuadrado entre 2 esto es igual a la integral de 0 a 40 de menos ½ por ¼ si, da menos 5
JC Da menos 5 y ahora con que podrías comparar, con que otra trayectoria,
SR Una trayectoria mayor
JC Tu sabes lo que es trayectorias vecinas, así como los números reales se decía punto dentro de una vecindad, tu como dirías que trayectorias son vecinas, intuitivamente
SR Según yo nada mas como que las recorrieramos ¿no?
JC A ver vamos a tomar otra ¿no?, si fue lineal ¿verdad?
SR Si fue lineal
JC A ver vamos a tomar la más sencilla lineal X de T iguala T y ¿cuanto valdría su funcional?
SR Menos 20
JC Menos 20 y la otra valió
SR Menos 5
JC Es decir la otra fue más grande
SR Si
JC Es decir
SR Entonces estas maximizando
JC Entonces debería ser un máximo también ve el integrando, si el integrando en lugar de poner X y X', pusiéramos X y, Y, y a la X' le pusiéramos Y, quedaría menos Y cuadrada entre dos
SR Si fue lo que
JC Es una parábola
SR Una parábola
JC No es una parábola porque estamos en dos variables
SR Si
JC Pero seria como un cilindro parabólico recto
SR Si
JC Que abre hacia abajo
SR Hacia abajo aja entonces seria
JC Seria un máximo ¿verdad?
SR Un máximo, concavidad

JC Es otra forma de verlo con concavidad o convexidad en el integrando, pero a ver que pasaría si la trayectoria fuera una constante la que te guste
SR La que me guste, claro

De lo anterior podemos suponer que ha logrado interiorizar las acciones para obtener una trayectoria óptima en un proceso que ha logrado coordinar con el proceso de solución de ecuaciones diferenciales. En cuanto a las condiciones suficientes de segundo orden, manifestó el conocimiento de varios tipos de criterios, que van desde la Condición de Lagrange, el Hessiano, análisis de la concavidad / convexidad del integrando y la comparación con trayectorias intuitivamente "cercanas", por lo que podemos suponer ha logrado encapsular este concepto en un objeto.

JC Bueno a ver uno mas, otra vez con el mismo problema, minimizar $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+x'^2}\,dt$
SR Si
JC Y las condiciones serian X en T 0, digamos que es X 0, y X en T 1, X 1, y eso nada más para que se vea que son dos puntos
SR Si
JC Bueno ya habíamos visto intuitivamente que el resultado cual es
SR La recta
JC La recta ¿no?, bueno este es un problema que se puede resolver pues con la ecuación de Euler otra vez
SR Mmm
JC En cálculo de variaciones ¿verdad?
SR Si
JC Pero también se podría pasar a un problema de control
SR En teoría de control
JC Si, como podríamos resolverlo como problema de control
SR Pues que metas a la X punto la definieras como U
JC Mmm
SR Y tu lo, que es precisamente lo que no se, X punto tu pudieras verla como la velocidad, entonces no se,
entonces tu como te podrías controlar precisamente
JC Pero como se escribiría la solución, como la plantearíamos pues
SR Uno más U cuadrada
JC Sujeto a
SR A claro sujeto a X punto es igual a U
JC Mmm, y ahora como se escribiría ya el problema, el Hamiltoniano, ¿como se escribiría?
SR Seria, U cuadrada mas uno, más lambda por U
JC ¿Y las condiciones?
SR Condiciones de primer orden tendrías que satisfacer optimizar el Hamiltoniano con respecto a U y aquí es H respecto a u igual a cero, lamda punto o sea igual a menos H de X y X punto o sea restricción o sea H de lamda
JC Mmm, y ya con eso se resuelve el problema ¿no?

SR Si

De lo anterior, podemos suponer que ha logrado encapsular el proceso de pasar de un problema de Cálculo de Variaciones a otro de Teoría de Control en un objeto.

JC Muy bien, ¿como distingues la variable de estado de la de control?
SR Bueno es la que tú controlas ¿no?, el consumo, y ya a partir de tu consumo determinas tu capital
JC Y¿ analíticamente como se podría ver cual es la de estado y cual es la de control?
SR Justamente que es X punto, la derivada ¿no?, es decir, la derivada es el ritmo ¿no? Y el ritmo es con lo que se puede controlar, ya sea el ritmo de gasto, de consumo de pesca, de sacar el petróleo
JC De lo que sea ¿no?, entonces donde esta la derivada ahí esta la variable de control
SR OK

Por la definición y los ejemplos dados, podemos suponer que ha encapsulado el proceso para distinguir entre variables de estado y variables de control en un objeto.

JC ¿Tu sabes de donde surgieron las condiciones de transversalidad?
SR Las condiciones de transversalidad
JC Ya sea en cálculo de variaciones o en teoría de control, por que surgieron las condiciones de transversalidad
SR Si, porque son los limites ¿no?
JC Mmm
SR O sea una condición de transversalidad es bueno, yo quiero alcanzar ciertos puntos
JC Aja
SR Entonces cual es la trayectoria a partir de lo que tengo a lo que quiero llegar, cual es la trayectoria que me optimice, o minimice o maximice ¿no?
JC Ahí esta dado el tiempo ¿verdad?
SR El tiempo, ahora a lo mejor lo que no me interesa es el tiempo, a lo mejor el tiempo no es lo que me interesa,
JC Mmm
SR A lo mejor yo quiero llegar a un cierto nivel de capital sin importar el tiempo, entonces cual es la trayectoria que debemos seguir con respecto a mis decisiones
JC Para llegar a eso ¿no?, no me importa el tiempo
SR Libre que es lo que mejor optimizaría todo

También podemos suponer por lo dicho en el párrafo anterior que ha interiorizado las acciones para determinar el origen de las Condiciones de Transversalidad en un proceso.

JC Perfecto, este bueno ya, preguntas ya muy generales ¿no?
SR Si
JC Que es lo que se te ha dificultado más o se te dificulto más para entender el concepto de funcional
SR de funcional, pues ahorita haciendo las pruebas este, me doy cuenta que por ejemplo, la definición no la conocía del todo bien, o sea, ya cuando al dijo, dices ah si claro por supuesto, pero o sea que en la practica realmente mas bien como ves definida tu dices ah si es funcional o no es, yo creo que por ejemplo, este tipo de casos o el de acá, este sobre todo me sorprendieron, o sea, creo que si un poquito mas la definición

formal te ayudaría, trabajarlos creo que es mucho mas sencillo, tienen una dinámica en general todos, las condiciones de transversalidad que son un poquito lo que te puede como que atorar, o te puede hacer otra complicación lo puedes trabajar, pues ya tienes ciertas definiciones para conforme si X T es libre, si X T es fijo en horizonte infinito
JC Eso las entendiste también bien
SR Si, eso si
JC Pero generalmente esas condiciones las puedes deducir igual que los principio del máximo o mas bien dices las entendí y las aplico
SR Creo que va un poquito más a la ecuación de Euler, porque igual las demostraciones de esas condiciones de transversalidad son lo mismo, desarrollas una integral, igual partes del mismo planteamiento y llegas a cierto punto donde tienes que x punto este más…
JC O sea las entiendes bien pero no las podrías ahorita por ejemplo deducir
SR No,
JC O sea en un problema ya las aplicas tal cual te las aprendes de memoria ¿no?
SR Si exacto me la aprendo
JC ¿Y si te piden deducirlas?
SR Es que precisamente estas condiciones salen o sea de la lógica llegas a estas 2 multiplicaciones
JC Mmm,
SR Entonces tu sabes si te están diciendo que una es libre la otra debe ser 0 entonces de ahí sale
JC Para resolver problemas de optimización¿ tuviste algún problema o ya después de ver los principios resolver los problemas son mecánicos?
SR Pues la mayoría son como que mecánicos y hay que ver los casos particulares hay unos que se dificultan mas, en el curso por ejemplo, lo que medio me costo, pero ese ya es como un problema aparte, el problema de que tienes que ver aquí mucho sistemas dinámicos
JC Mmm, o sea, los sistemas dinámicos
SR Y es algo repetitivo en el ITAM que es el peor curso que se esta dando
JC Ah si
SR O sea porque lo dan muchos profesores entonces todo mundo sabe cosas muy diferentes vemos cosas muy diferentes
JC O sea sistemas dinámicos
SR Sufrimos ahí con el curso y Lorena le paso que hay los políticos porque es como materia para teoría no se lleva, no les piden de requisito eso si no les piden requisito de análisis, este ya llevo sistemas dinámicos 2 entonces si estoy mucho mejor para ciertas cosas ¿no?, pero hay unos que están mejores en otras partes de dinámicos que otros
JC Bueno y finalmente, ¿tú sabes lo que es una integral de línea?
SR Integral de línea, no
JC Algunas de las funcionales que haces con integral son integrales de línea
SR Si
JC O sea, a lo mejor serviría si se manejaran mejor las integrales de línea para aprender el concepto de funcional ¿no?
SR Si seguramente, si, ya había oído el concepto y seguramente si lo he de haber leído en alguna vida
JC ¿Qué relación y que diferencia ves entre funcional y trayectoria?
SR Como que una trayectoria es lo que se busca en una funcional ¿no?, o sea, como que la funcional es
JC Se busca en que en resolver un problema de optimización

SR Aja, si, siempre que tu optimizas una funcional tu buscas una trayectoria, una trayectoria es una curva que describes a partir de un parámetro, o sea son como que conceptos diferentes, como que la funcional es como que, como va variando esa trayectoria como puedes irla variando en diferentes puntos, esa trayectoria, y la trayectoria es como que esta dada ¿no?, por un parámetro independiente de todo eso ¿no?
JC OK, bueno pues te agradezco mucho tu colaboración
SR No a usted

En resumen podemos suponer que tiene un tipo de concepción proceso en los conceptos: Funcional, Condiciones de primer orden para resolver problemas de Optimización Dinámica y Condiciones de Transversalidad. Suponemos que tiene un tipo de concepción objeto en los conceptos: Condiciones suficientes de segundo orden para determinar si una trayectoria óptima es máxima o mínima, equivalencia entre un problema de Cálculo de Variaciones y otro de Teoría de Control, así como para determinar la diferencia entre una Variable de Estado y una Variable de Control. Sin embargo, no podemos suponer que ha interiorizado todas las acciones para determinar un Espacio Vectorial.

En cuanto a su nivel de Esquema de Funcional, suponemos un nivel intra, pues no muestra relaciones entre los distintos conceptos que forman parte de su esquema de funcional.

ENTREVISTA a Mauricio Grupo: Optimización

JC Esta primera entrevista la estamos llevando acabo el día 24 de
MA De abril
JC De abril de 2008, y vamos a hacerle la entrevista a Mauricio, le pedimos que, no se quede con nada callado sino que todo lo que piense incluso que lo diga fuerte. Empezamos con la primera pregunta que dice, bueno dadas las siguientes expresiones voy ir dándolas una por una
MA Mmm
JC Determinar cuales son funcionales, y cuales son únicamente funciones
MA OK
JC En caso de que sean únicamente relaciones también se pueden mencionar ¿verdad?, entonces la primera seria $f(x)=\int_0^x (t^2+5)dt$
MA OK esta seria una función no un funcional, y como lo pensé es que no tiene ningún concepto de derivadas o sea casi siempre que pienso en un funcional pienso que tiene que estar este en T en X y en X’ y aquí no veo nada de X’ aquí adentro
JC Entonces decimos que es una función
MA Esto es una función
JC ¿De cuantas variables es la función?
MA De una variable
JC De una variable, ¿quien es la variable?
MA t

JC ¿La t o la x?
MA A no x porque estamos hablando de F de x
JC Exactamente, bueno la segunda, la segunda pregunta dice, la segunda expresión seria $f(x,y)=\int_0^3\int_0^{x^2}(5x^3y+8x)dydx$, es decir, esta es una integral
MA Doble
JC Iterada ¿verdad?
MA OK, aja, bueno aquí tampoco es un funcional y es una función de dos variables que esta en X y en Y
JC Es una función de dos variables, ¿que representaría el dominio, quien seria el dominio?
MA Fue primero con respecto de, OK el dominio es este las X y las Y todos los conjuntos de X y, Y
JC ¿Todos los puntos del plano?
MA Me parece que es un volumen las dobles integrales pero no estoy seguro
JC Mmm, es un volumen, pero el dominio, bueno si quieres ahorita vemos el dominio, luego la numero 3 dice $f(x,x',t)=\sqrt{1+x'^2}$
MA Mmm
MA OK, este ya tiene un poquito mas claro de funcional por lo de que depende de x de su derivada y de t, nada mas que estoy acostumbrado yo a verlas de los funcionales como una integral entonces esto si me brincaría un poco
JC Entonces ¿Qué seria?
MA A primera vista yo diría que si es un funcional, pero nada mas por esto primero aunque lo segundo no me convence del todo
JC Tu te acuerdas de la definición de funcional
MA Funcional, era una no, no definición no
JC ¿Qué es una funcional?
MA Es una función que va de algo a los reales pero todavía no..., que va de talvez de x de x' y de t a los reales
JC De que va en general de un espacio vectorial a los reales ¿no?
MA Aja, exacto
JC Y en este caso
MA Entonces si podría ser un funcional porque así como esta definido aquí cada valor de x' si iría a los reales y va del vector x, x' t, entonces si, si podría ser un funcional
JC x, x' t constituyen un…
MA Un vector, el vector del dominio
JC ¿Un espacio vectorial?
MA No se, tendría que hacer la prueba, con lo que si esta cerrado bajo la suma y con la multiplicación escalar, eso seria
JC Pero en principio dices que si seria funcional
MA En principio yo diría que si, ¿si es o no es?
JC OK, aquí estamos suponiendo que x y x' son variables independientes, o sea que se podrían llamar de otra forma, se podrían llamar x y, y ¿no?,
MA OK, si porque nunca esta dando una relación con x y x'
JC Mmm
MA O sea de que es la derivada una de la otra, si, en ese sentido entonces no es funcional
JC ¿No es funcional?
MA No, ya, ya dude más
JC O sea hay duda de que es funcional, y la dudad es ¿por que no aparece la integral?
MA Porque no aparece la integral, eso es lo primero que me falto

JC Sin embargo una funcional si la definimos como una función que va
MA De un espacio vectorial a los reales
JC De un espacio vectorial en los reales pues cualquier función de varias variables seria funcional ¿no?
MA Talvez tiene que tener este concepto de cambios, porque, bueno cuando empezamos a estudiar funcionales lo que vimos primero que nada era como iba cambiando y las mejores trayectorias para, pues no se caídas de cuerpos y cosas de este tipo
JC Mmm
MA Entonces ahí tiene que tener el concepto de cambios, si nada mas es este no se varias variables que son independientes entre si pues no tiene ese concepto
JC Mmm, bueno seguimos la cuatro dice $J(x)=\left(\int_0^5 x(t)^2,\ \sqrt{1+x'^2}\right)$
MA Mmm
JC Es un vector
MA Mmm
MA OK…, o sea esto es como que esta yendo de los reales hacia un vector
JC No de los reales, de un espacio vectorial
MA De alguna función, aja
JC x puede ser una función ¿no?, de un espacio vectorial pero efectivamente va a un vector en R 2 ¿eso puede ser funcional?
MA Por definición seria al revés más bien como de un vector a los reales entonces simplemente como no cae en los reales por eso yo ya diría que no es funcional
JC Así ya no es funcional ¿verdad?, y por ultimo un numero 5, $J(x)=\int_0^T \left(x^2+x'^2\right)dt$
MA OK, bueno eso ya parece mas como un funcional de los que hemos usado en la clase
JC Mmm
MA Porque va, puede ser del vector de la x y a las x' hacia el real que sale de esta integral
JC Entonces claramente esta si es una funcional
MA Si esa si es funcional
JC Desde luego es función pero es funcional
MA Mmm
JC OK, ahora dentro de esas mismas expresiones que escribimos
MA Mmm
JC ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de ellas?
MA OK el dominio de la primera yo diría que va de los reales a los reales, o sea dominio este reales y rango reales
JC El rango va también a los reales ¿dominios reales?
MA Aja
JC Los limites de integración no tienen que ver
MA A bueno desde 0 hasta X entonces el dominio va desde 0 hasta X y el rango…
JC Digo no se si se vea claro pero esta dentro de los reales ¿verdad?
MA Aja
JC Ahora
MA Pero eso si va el dominio si va de 0 a X acá
JC De 0 a X pero la X puede ser positiva o negativa ¿no?
MA OK
JC Podríamos decir que va de los reales a los reales ¿no?
MA Mmm
JC ¿El segundo?

MA Bueno el segundo va de un conjunto de de, o sea de un par de reales que son X y, Y hacia este reales o sea como de algo de dimensión 2 hacia algo de dimensión 1
JC ¿Y como podríamos determinar ese conjunto que seria el dominio?
MA Pueden ser todos los pares de reales o sea, o cualquier par de reales
JC ¿En el plano cualquiera?
MA Si, a no este ¿cuales eran los limites de integración? que no los anote
JC Va de 0 a X cuadrada la Y, y la X de 0 a 3
MA OK, entonces va de 0 a 3 y de 0 a 9
JC ¿Los dos son numero, los dos numero?
MA No, no otra vez no, de 0 a3 uno si es numero pero el otro que es X cuadrada es de los reales, entonces el que va de 0 a 3 que me parece que fue X
JC X
MA Y el otro si va de 0 a los reales, bueno en todos los reales puede ser X positiva X negativa como lo queramos…
JC OK, y luego el tercero
MA OK, el tercero va del vector X, X' T hacia los reales
JC Mmm, ¿va de R 2 a R?, la T es independiente
MA Si porque la T esta implícita en la X, entonces si va de R 2 a R
JC OK, luego la cuatro
MA La cuatro, ¿la J X la definimos como, como un vector o?
JC L a X es una función
MA Aja
JC Que puede ser, bueno una función integrable debe de ser
MA Mmm
JC Derivable incluso
MA Aquí según yo va de los reales y la otra, ¿el límite de integración era del 0 al 5 verdad?
JC Si
MA Entonces va de los reales hasta del 0 al 5, o sea a los reales, de los reales a ¿un subconjunto los reales?
JC Nada más que el rango J D X es un vector
MA Aja
JC Tiene dos componentes la primera componente si es una integral
MA Mmm, a claro si es cierto, es que no vi. que eran los, si no entonces va de los reales a R en este caso
JC ¿Y la última?
MA Y la última va de un espacio vectorial a los reales
JC Mmm, OK. Ahora después de haber determinado el dominio y rango de cada una de estas expresiones y de haber recordado la definición de funcional, ¿Qué habíamos dicho que era funcional?
MA Es este una función, mas bien es una transformación lineal que va de un espacio vectorial a los reales
JC OK, y en base a los dominios que se sacaron aquí, dominios y rangos
MA Mmm
JC Eh, ¿cambiarias alguna de las decisiones que habías tomado en el ejercicio uno?
MA Mm, la tres que la había dudado un poco que si era funcional o no
JC Mmm
MA Ahorita ya me convenzo mas de que es funcional, porque si va de un espacio vectorial a los reales
JC Mmm

MA También la dos por la definición también como es de un espacio vectorial a los reales este también la podría talvez cambiar, bueno pues con la tres si me quedo, la primera no porque va de los reales a los reales y la cuarta tampoco porque va de los reales a un espacio vectorial, entonces si acaso serian la dos y la tres que había dicho que no eran funcionales, ahorita ya talvez consideraría mas

JC Ya con la definición, o sea si sirvió el hecho de recordar…

MA Claro

JC La definición y…

MA Si porque antes me limitaba como que solo cuando viera X y X' y cosas así me limitaba nada mas a eso, ya después de recordar la definición como es mas amplia pues ya como que caben el dos y el tres en eso

JC OK, ahora este por ultimo en este ejercicio, dada una expresión analítica como las das en este ejemplo ¿Cómo se puede determinar si es una función nada mas o si es una funcional o incluso si nada mas es una relación, como se le puede hacer para eso?

MA Pues para que sea función tiene que ir este o sea tiene que estar de uno a uno la relación o sea no se pueden repetir los valores del rango según yo ¿si o no?

JC Mmm

MA Y luego para que sea una relación pues no importa o sea se pueden repetir puede ir…, bueno si quiere apunto acá, de varios puntos hacia uno o de uno hacia varios o lo que sea nada mas la relación nada mas es un ordenamiento no tiene nada que ver o sea, mas bien la función, la relación es como un subconjunto de las funciones, y lo de funcional es, de hecho la funcional es una función porque también va de, de el dominio que es el espacio vectorial hacia uno solo que va siendo cada uno de los reales

JC Hasta los reales, OK.El ejemplo dos dice, dar tres ejemplos de funcionales, justificando que sean funcionales

MA OK, entonces podría ser, uno podría ser este, es un poco parecido al de arriba

JC Es 1 mas ¿Qué?

MA Es 1 mas X cuadrada raíz de D T, va del, eh bueno con J X que seria J de X, X' T, que va del campo de los vectores hacia un real, otro ya con la definición mas amplia podría ser también F de X Z es igual a Z al cuadrado mas 5 X, igual va de un espacio vectorial hacia los reales y otro puede ser no se F de X Y Z es igual a z mas X nada mas, igual va de un espacio vectorial hacia los reales

JC O sea no importa que el espacio vectorial sea parte de R N

MA No, no importa o en la definición no recuerdo ninguna restricción para que…

JC Mmm, un ejemplo de alguna que no tuviera como dominio R N

MA ¿Y que fuera un espacio vectorial?

JC Y que fuera espacio vectorial

MA Pues nada mas no se, igual F de X o sea también este, las funciones son espacio un vectorial hasta donde se, entonces puede ser nada mas F de X igual a X cuadrada se podría ver como un funcional, si va de, F de X puede ser un espacio vectorial y esto seguro es un real

JC Si, pero el…

MA O ya estoy abusando de…

JC Si digo uno que no tenga, bueno aquí en este caso esta bien, pusiste un ejemplo de una funcional que va de un espacio vectorial a los números reales

MA Mmm

Podemos apreciar que había logrado interiorizar las acciones que llevan a distinguir a una funcional desde una definición no correcta de funcional. Sin embargo, en el momento en que se le dio la definición correcta de funcional pudo determinar para cada expresión que se le dio las que eran funcionales, además de haber dado ejemplos de funcionales. Esto nos

lleva a suponer que ha interiorizado las acciones que llevan a determinar cuando dada una expresión es funcional utilizando ahora una correcta definición de funcional.

JC OK, eh, ¿Cómo podemos este, saber analíticamente que una función en su representación geométrica es una trayectoria?
MA OK para que sea una trayectoria tiene que depender del tiempo, entonces su representación geométrica tiene que ir aquí el eje de las T y aquí pues de los valores de las otras no se X o X’ que depende por ejemplo
JC ¿A una expresión analítica que sea una trayectoria?
MA Una expresión analítica, pues no se, X de T es igual a X’ mas T, por ejemplo
JC ¿Necesariamente tiene que involucrar la derivada?
MA Para que sea una trayectoria si
JC ¿Si?
MA Si, porque justamente la derivada es lo que esta diciendo de los cambios en el tiempo, y como el tiempo es lo que vas a medir en las trayectorias…
JC ¿Y si hubiera mas de una variable por ejemplo X Y Z?
MA también se podría pues nada mas seria si fuera no se con dos X y, Y pues va así variando no se pude ser una espiral en el tiempo o algo así o pues ya de mas dimensiones pues quien sabe como seria también se puede, no veo porque no podría
JC Mmm, ¿Qué es una integral de línea, tu sabes?
MA ¿Integral de línea?, no
JC ¿No sabes lo que es una integral de línea?, entonces tampoco lo sabes calcular
MA No el integral, si me suena un poco igual si lo he hecho alguna vez pero ahorita no me viene a la mente
JC Por ejemplo cuando en el curso se daban integrales, funcionales que se definían como una integral

Podemos suponer que no tiene ni siquiera una concepción acción de Trayectoria y de Integral de Línea.

MA Aja
JC La parte de adentro ¿Qué era?, el integrando la F
MA Este, no ahí si le fallo, ¿integral de línea no será como la longitud de la curva de cierto punto a cierto punto, o no?, no entonces no
JC Pero si te acuerdas de las integrales que vieron en el curso, las funcionales
MA Si o sea como esta que puse acá por ejemplo
JC Mmm
MA ¿Esta no seria integral de línea?
JC ¿ Que seria lo que esta adentro?
MA ¿Lo que esta adentro?
JC Lo que es el integrando, ¿Qué representa el integrando?, bueno vamos a verlo de otra forma, ahorita un poquito mas adelante. ¿Cómo podemos saber analíticamente ya que una expresión es una funcional?
MA ¿Analíticamente?
JC Mmm
MA Pues si su dominio cae en los reales ¿no?, otra vez
JC ¿Nada mas con que el dominio caiga en los reales?
MA Y que el, perdón, el dominio, el rango caiga en los reales y que el dominio sea un espacio vectorial

JC OK, ¿de que manera se puede relacionar una funcional con una trayectoria?
MA OK, es que la funcional este, es la, o sea, cuando haces esta derivada, creo que ya me estoy acordando como era, un poco…, este era como la el máximo o la minima el real o sea la distancia de esa trayectoria
JC A ver vamos a poner un ejemplo para que a ver si te queda más claro
MA A ver
JC Supongamos que queremos minimizar, la integral desde T 0 hasta T segundo de la raíz de 1 mas X' al cuadrado D T, queremos minimizar esto, lo que esta adentro lo que es el integrando, no se si recuerdes ¿que era?
MA No
JC Eso mide la longitud de la curva
MA OK
JC ¿Es una funcional esta o no es una funcional?
MA Esto yo creo que si
JC ¿Por qué es una funcional?
MA OK, el resultado de esto evidentemente es un real
JC Mmm
MA Y viene de el espacio vectorial de la X' puede ser
JC De las funciones derivables ¿no?
MA Aja
JC OK, ¿Cuál seria la solución optima?
MA Bueno aquí era con la ecuación de Euler
JC Pero aquí intuitivamente
MA Intuitivamente aquí es la recta ¿no?
JC A ver si la puedes dibujar entre dos puntos, entre dos puntos cualesquiera la distancia mas corta…, es la recta ¿verdad?
MA Mmm,
JC Esa es la trayectoria, o sea…
MA Es la trayectoria optima OK
JC La solución de esa funcional es una trayectoria ¿si? Bueno que tiene que ver la solución optima con la funcional asociada, ¿podría ser que la trayectoria optima estuviera en el lugar geométrico y que representa el integrando o no tiene nada que ver?
MA O sea que la trayectoria óptima estuviera ¿aquí?
JC Aja, ¿tiene que estar ahí o no tiene nada que ver eso?
MA Pues si no, o sea seguro tiene que haber alguna relación entre esto y esto
JC Pero la trayectoria ¿tiene que estar ahí?
MA O sea ¿que esta trayectoria sea esto?
JC Este dentro esa figura de esa superficie o lo que sea
MA No, más bien esta en la integral de esta superficie
JC Mmm, en la integral, pero la integral de esa superficie es un numero ¿no?, ¿Qué relación habrá entre el integrando y el problema de optimización?, ¿Qué es lo que minimizamos ahí?
MA Aquí estamos minimizando la T
JC O sea en el problema en general la funcional
MA A en la funcional estamos minimizando este tiempo ¿no?
JC O sea la distancia ¿no?
MA Aja
JC La distancia entre esos dos puntos habíamos dicho que era la línea recta ¿si?, ¿Qué tiene que ver eso con el integrando de esa funcional?, ¿Qué representa el integrando de la funcional?
MA Todas las posibles trayectorias que pueda haber de acá a acá ¿no?
JC Mmm, o sea mide que cosa

MA Las diferentes distancias entre por ejemplo esto
JC Esas, exactamente podemos dibujar varias
MA Aja, variando pues el contenido de aquí
JC Y la minima fue la recta
MA Aja
JC Entonces en general en una funcional que nos dieran como esta nada mas que con un integrando diferente ¿que significaría el integrando?
MA Todas las posibles trayectorias entre dos puntos
JC ¿Necesariamente tiene que ser trayectoria entre dos puntos?
MA Bueno no porque podría ser entre un punto y el infinito, o sea había diferentes tipos las que estudiamos, que era no se, que sabíamos donde empieza pero no donde acaba, o si sabíamos donde acaba de tiempo pero no de altura o todas esa tipos de diferencias, o sea entre dos puntos no siempre conocidos
JC A ver vamos a escribir un ejemplo mas, minimizara la integral desde 0 hasta T mayúscula de T minúscula D T
MA OK
JC ¿Eso que seria?
MA Entonces seria, desde acá
JC ¿Qué es lo que estamos minimizando?
MA De 0 a T o sea si sabemos donde acaba porque acaba aquí en T mayúscula estamos minimizando todas las posibles para T las posibles trayectorias, de T ¿no?
JC O sea ¿pero que es lo que minimizamos?
MAO sea esta distancia pero puede…
JC ¿La distancia otra vez?
MA Según yo si, la distancia
JC O el tiempo
MA Bueno, talvez en este caso el tiempo porque solo esta dependiendo de T, nada más
JC Estamos minimizando el tiempo, en el problema anterior estábamos minimizando
MA La distancia
JC La distancia, entonces en general ¿que representa el integrando de una función?, ¿Cómo que representara?
MA Aquí era la distancia y esto es le tiempo, aquí la distancia también esta como midiendo el tiempo que se va de acá a acá ¿no?
JC Si porque la X depende de T claro
MA Entonces siempre esta minimizando el tiempo
JC Pero en ese problema lo que nos interesaba era minimizar, de todas las trayectorias…
MA Mmm
JC ¿Cuál es la trayectoria cuya distancia es minima?, y es la recta, en el otro problema lo que queremos minimizar es el tiempo, de todas las trayectorias cual es la que, porque trayectoria el tiempo es mínimo, no necesariamente tiene que ser la recta ¿verdad?
MA Mmm
JC Y en general pues si a mi me dan una funcional donde adentro quede por ejemplo una función en X y X’, que puede representar por ejemplo el costo de una empresa, lo que queremos minimizar es ese costo ¿verdad?
MA Entonces lo que se quiere es minimizar algún valor en los reales no tiene que ser o sea, estar limitado a…
JC ¿Quién seria el criterio que me dice que es lo quiero minimizar?
MA Lo que esta aquí adentro ¿no?
JC Exactamente, lo que esta en el integrando entonces podemos decir que es el criterio bajo el cual se maximiza o se minimiza

MA OK
JC ¿Si se ve eso?
MA Si, si ahorita ya lo veo claro con ese otro ejemplo de los costos
JC OK, luego, en el problema que vimos ahí, del primero donde la distancia de minimizar la distancia
MA Mmm
JC ¿Cómo sabemos que la distancia efectivamente es minima?
MA Bueno
JC Geométricamente, ¿Cómo se puede ver?
MA ¿Geométricamente?
JC Mmm
MA Pues es que, simplemente porque entre dos puntos la distancia más corta siempre ha sido la recta
JC Exactamente entonces geométricamente así lo podríamos ver
MA Mmm
JC A ver ¿Por qué si queremos determinar si una funcional es cóncava o convexa, la concavidad y convexidad nos sirven mucho para ver máximos y mínimos no?
MA Aja
JC Porque si nosotros vemos que una función es cóncava por ejemplo, y su variación es 0 ¿seria que?, si la función es cóncava y su variación es 0
MA Seria un máximo ¿no?
JC máximo, y si fuera convexa
MA mínimo
JC Seria un mínimo, bueno pero eso pasa con funciones de una variable o varias variables
MA Aja
JC Y esto lo queremos generalizar lo que, de hecho lo tratamos de generalizar a funcionales
MA Mmm
JC Y la pregunta seria ahora ¿Por qué si queremos determinar si una funcional es cóncava o convexa únicamente nos fijamos en el integrando?
MA Porque justamente es esto lo que queremos maximizar o minimizar, ya si vemos este o sea si lo vemos con la integral y todo esto nos va a dar un real entonces no tendría sentido hablar de concavidad o convexidad en un punto o mas bien ni siquiera en un punto en un valor real, en cambio si lo vemos con este, con lo que queremos maximizar ya sabemos lo que va a ser cóncavo o convexo ¿no?
JC A ver, supongamos que tenemos ahora la funcional $J(x)=\int_0^{40}\frac{-x'^2}{2}dt$, sabiendo que X en 0 vale 20 X en 40 vale 0
JC ¿Podrías optimizar esta funcional?
MA Si
JC Por lo menos dejar planteado como seria
MA OK, se hace con la ecuación de Euler ¿no?, es F de X, bueno la parcial en X menos, la parcial de X’, bueno mas bien la derivada con respecto a T, y la parcial de X’, aquí como no hay nada con respecto a X pues es nada y esto seria…, y luego es esto con respecto a T entonces seria menos X’ a la 4, OK
JC Y ¿eso igual a que?
MA A 0, perdón claro
JC Y eso se podría ya resolver ¿no?
MA Aja
JC O sea habría que integrar…

MA Integramos este las veces pertinentes que serian 4 y luego con las condiciones de primer, ¿quiere que la resuelva entera?
JC No, no
MAOK la integramos entonces este cada vez que la vayamos integrando nos van a dar constantes de integración, y al final cuando ya tenemos, no se, X y mas todas las mas X pues este A mas X B y quien sabe que, ponemos las este, las condiciones de primer, digo las condiciones iniciales y con eso despejamos las, las constantes que nos quedan y ya
JC Mmm, OK, en este mismo ejercicio, bueno vamos a tratar de terminarlo vamos a ver por que razón
MA Muy bien…, ah si, ¿si lo acabo?
JC Si vamos a terminar
MA OK, entonces menos…, si creo que ya ¿hasta aquí si he estado bien no?, o ¿no?.., es que aquí ya se me fue completamente, pero no esto ya no tiene sentido o ¿si?
JC O sea X cuarta igual a 0, al integrar, quedaría que X cúbica eh, la tercera derivada seria una constante ¿no?
MA Aja, pero es que a lo que voy es que aquí es X, ya, ya vi mi error, OK, esta desde acá es que aquí cuando integre, digo cuando derive, derive mal desde acá, porque OK, es menos X' al cuadrado entre 2 y eso con respecto a T entonces seria, aquí es regla de la cadena lo que esta es al cuadrado entonces, estaba tomando mal los exponentes como si fueran ordenes de integración, entonces, hijole ya me puse nervioso eh, ya la regué
JC Con calma no hay prisa
MA Ahora si ya tiene mas sentido, hijole ahora tengo que integrar esto pero si no tengo idea de cómo integrar esto
JC ¿Qué es X''?
MA Aja, es X' al cuadrado por X'' igual a 0, es que aquí lo que hice fue regla de la cadena en esto aquí fue la derivada de poder o sea de esto, que seria 2 X' por la derivada de esto de acá que es X''
JC A ver vamos a la ecuación de Euler ¿Cuál es?
MA La ecuación de Euler es menos la derivada con respecto a T de menos X, ah, OK, desde ahí estoy mal, la derivada con respecto a X'' es menos 2, menos 2 entre 2 eso es menos 1, ya desde ahí estaba mal, OK, pero entonces llego ahí a una contradicción ¿no?
JC A ver
MA Menos 1 igual a 0
JC Estamos derivando respecto de T y hay que ver otra vez como se aplico la segunda parte en la ecuación de Euler
MA ¿Entonces si estaba bien en eso que escribí abajo?
JC ¿A ver como era?
MA Era menos X, era ½ por menos 2 X'' por X'', si era así o ¿no?
JC Mmm
MA Es lo que, bueno, este se va con este y todo esto es igual a 0, nada mas que lo que ya no se integrar es este X' X'', eso no tengo ni idea como integrarlo
JC ¿Qué pasa si X' por X'' es 0?
MA ¿Si X' por X'' es 0?, no se
JC Lo que sucede es que aplicas la regla de la cadena y en la Ecuación de Euler hay que derivar respecto a x primero, luego respecto a x´ y solamente después de haber obtenido esta derivada se deriva respecto del tiempo. A ver ponemos otra a ver si esta mas fácil,
MA Si
JC $J(x) = \int_0^2 \left(12tx + x'^2\right)dt$

MA Mmm
MA OK, aquí la ecuación de Euler seria, con respecto a X seria 12 T, X' seria 2 X', menos 2 X'' igual a 0, OK esto seria esto es uno de mas, ¿hay condiciones iniciales o no?
JC Si, X en 0 vale 1 y X en 2 vale 17
MA OK entonces aquí seria 12 T es igual a 2 X'', es este, entonces integro de los dos lados, 1 es igual a 2 X' mas C, y luego volviendo a integrar esto seria, X es igual a 2por X mas C X, y ya de aquí con las dos condiciones iniciales, ¿lo hago lo termino o ya no?
JC Mmm
MA X en 0 es igual a1 entonces X en 0 es 1, entonces 1 es igual a 2 por 1 mas C mas D, y X en 2 es igual a menos 3 igual a C mas D, y la otra X en 2 es 17, aquí ya no estoy seguro si lo estoy haciendo bien
JC En general cómo quedo la, sin condiciones iniciales ¿cuál seria la trayectoria optima?
MA Aquí despejaría nada mas X, entonces seria X D T es igual a 2 X mas X mas D entonces es X…, seria X D T es igual a D entre -1 –C
JC Pues es una constante
MA Si
JC Una constante, a ver ¿Cuánto valdría la integral si fuera constante?
MA ¿Si fuera constante?
JC Mmm
MA La integral de una constante pues X por esto ¿no?, o sea mas bien 0, ¿O sea esta integral cuanto valdría de esta constante?
JC Si, hay que sustituir lo que salio de X
MA Mmm
JC Que podemos ponerle K, una constante K
MA Mmm
JC En la integral y ¿Cuánto valdría?
MA De 0 a 2 ¿no?
JC Mmm
MA Constante K, 0 menos, OK menos dos veces esto ¿no?, menos 2 por D menos 1 menos C, ¿esto?
JC O sea si ponemos la constante como K
MA Mmm
JC Y la sustituimos en el integrando
MA Mmm
JC Seria la integral desde 0a 2 de 12 K por T ¿no?
MA ¿12 K por T?
JC Si ¿no?, y la derivada pues vale 0 ¿no?
MA Mmm
JC ¿Cuánto valdría la integral de 12 K por T de 0 a 2?
MA 12 K por T con respecto D T, este es K T cuadrado
JC Desde 0 a 2
JC De 0 a 2, 0 ¿24 K?
JC 24 K, ahora que pasaría, ¿es un máximo o un mínimo?
MA Tendríamos que ver si es cóncavo o convexo ¿no?
JC Mmm
MA Pero desde, de esto de acá arriba
JC Mmm
MA Nada más que ahí si ya no me acuerdo, con el Hessiano tal vez se podría ver
JC A ver

MA F de X, X, seria, el Hessiano es F de X, X, F de X Y con X, X’, F de X’, X, F de X’, X’,…, 2, ahora tenemos que sacar el si es este positiva definida o negativa definida pero, esto siempre tiene que ser 0 ¿no? para que podamos este diferir algo o ¿no?
JC Mmm, ¿no se puede ver nada más de la concavidad de la función?
MA No, bueno ahí yo no lo veo muy claro
JC Bueno vamos a probar con otra trayectoria, ¿qué pasaría si la trayectoria fuera X igual a T?, ¿cuánto valdría la integral?
MA ¿La trayectoria X igual a T?
JC Mmm, esta fue X igual K ¿no?, una constante
MA Mmm
JC Ahora vamos a ver que pasaría si fuera X igual a T
MA OK, ahí según yo es este
JC Habría que sustituir en el integrando ¿no?
MA Mmm
JC Y seria la integral de 0 a 2 de 12 T cuadrada mas
MA 0 a 2 de 12 T cuadrada, ¿cómo?, ya no entendí que estamos haciendo
JC Si estamos sustituyen en el integrando…
MA A OK en lugar de esta K una T
JC Aja
MA OK, entonces nada más de 12 T cuadrada o ¿no?
JC ¿Y falta aquí no?, ¿cuánto vale X’?
MA OK, mas, ¿1?
JC Mmm, y todo eso D T
MA Bueno aquí si se ve claramente que es un convexo porque es una parábola, no pero es así, no si es una parábola es convexo entonces seria un máximo ¿no?
JC Pero esta es otra trayectoria no es la optima ¿no?
MA Aja
JC ¿Cuánto vale la integral?
MA ¿La integral de aquí?
JC Mmm
MA 6 T cúbica…, 0…, 4 8 mas 2 ¿34 no?
JC ¿34?
MA Mmm
JC Aquí el problema entonces es que si necesitamos ver la K ¿verdad?
MA Mmm
JC Sacar K para ver que es más grande que es más chico
MA Si
JC Ese es el proceso ¿no? para ver…
MA OK, aja, ya entendí a lo que vamos o sea era como poner otro punto a ver si esta mas abajo mas chico, entonces ya podemos saber si es mas, si estaba este punto que era el optimo si esta mas abajo para ver la convexidad así
JC Mmm, y podríamos aplicar varias trayectorias ¿no?
MA Aja
JC Y en base a eso ya tenemos una suposición que podemos confirmar metiéndonos a la concavidad o convexidad de la curva ¿no?
MA Mmm
JC Ahora, ¿Por qué pueden aplicarse las condiciones suficientes de segundo orden; el Hessiano, la concavidad y convexidad que se estudian que se estudian en el cálculo también a funcionales?
MA Porque la funcional es una función también que es derivable ¿no?

JC Pero ¿por qué se puede aplicar lo mismo?, o sea únicamente nos fijamos otra vez en el integrando ¿no?
MA Porque el integrando lo podemos ver como una función de varias variables
JC Mmm
MA Entonces podemos aplicar toda la teoría que ya teníamos de función de varias variables
JC Mmm, ¿y la integral no hace nada?
MA ES que cuando vemos que es lo que vamos a maximizar o minimizar
JC Mmm
MA Lo único que nos debe de interesar es el integrando, entonces ya de ahí ¿no?
JC ¿Y por que nada mas el integrando?
MA Porque es en si lo que se maximiza, ya con los límites de integración y con la integral es como nada más para dar la longitud de la curva ¿no?

Podemos apreciar que ha interiorizado las condiciones de primer orden en un proceso que ha logrado coordinar con la solución de sistemas dinámicos. Análogamente ha interiorizado las acciones para determinar si con dicha trayectoria se puede alcanzar un máximo o un mínimo. Puede coordinar distintas estrategias para determinar máximos y mínimos.

JC Mmm, ese fue un ejemplo particular si, OK, ¿de que cambios específicos al considerar el intervalo de tiempo en un problema de optimización dinámica surgen las condiciones de transversalidad?, vamos a suponer diferentes horizontes de tiempo
MA Aja
JC Primero era dado el tiempo de T 0 a T1, de que cambios que se hagan ahí surgen necesariamente condiciones de transversalidad
MA De si esta dado o no el tiempo final
JC A ver si pudiéramos dibujar
MA OK, puede ser si esta dado el tiempo de principio del tiempo del final, o si esta dado nada mas el tiempo del principio pero y el tiempo del final pero no donde acaba pues aquí en al función, o sea puede ser así, puede ser también que lo que esta dado es donde termina, donde empieza pero no esta dado el tiempo final entonces puede ser así, o así nada mas hasta acá, o así pero siempre llegando hacia este punto, ¿a eso es a lo que se refiere?
JC Exactamente, de ahí surgen necesariamente las condiciones de transversalidad ¿no?
MA Mmm

Podemos suponer que ha interiorizado en un proceso las acciones que permiten distinguir el origen de las Condiciones de Transversalidad.

JC Ahora, este si a mi me dan, otra vez vamos al mismo problema que hemos visto varias veces
MA Mmm
JC Minimizar la integral de T 0 a T 1, de la raíz cuadrada de 1 mas X’ al cuadrado, suponiendo que X en T 0 es X 0 y X en T 1 es X 1, ¿cómo le podrías hacer para expresar este problema que esta en lenguaje de calculo de variaciones en lenguaje de teoría de control?
MA No, ni idea, es que teoría de control ahorita si no lo tengo nada fresco
JC O se no sabrías pasar de…
MA No
JC A teoría de control
MA No, y si lo hicimos en clase pero la verdad no losengo nada fresco
JC Bueno, entonces aquí la siguiente pregunta seria, plantear sin resolver la soluciones del problema del inciso anterior, es decir aquí me imagino que en calculo de variaciones si puedes plantear la solución ¿no?

MA Aquí si
JC Que es la…
MA La recta
JC Que es la recta y que se obtiene en base a la ecuación de Euler ¿no?
MA La ecuación de Euler aja
JC Pero lo otro te acuerdas como se resuelve
MA No, ni idea
JC En control no
MA No

Podemos suponer que no tiene ni siquiera una concepción tipo acción sobre las condiciones de primero y segundo orden en Teoría de Control.

JC Eh, bueno en un problema de control ¿como puedes saber cual es la variable de estado y cual la de control?
MA La de control es la que tiene que ver con derivadas, o sea con variaciones y con cambios ¿no?
JC A ver por ejemplo
MA No se, aquí pudiera ser la de control U es igual a X'
JC Mmm, esa seria la de control
MA Aja
JC La que esta midiendo el ritmo esta controlando el ritmo con el que puede cambiar la X ¿verdad?
MA De hecho aja seria el control

Por lo anterior podemos suponer que ha interiorizado las acciones que permiten distinguir a las Variables de Estado de las Variables de Control en un proceso
.
JC OK, ¿Qué es lo que mas se te ha dificultado para entender por ejemplo el concepto de funcional?
MA Pues ahorita y después de ir viendo todo esto, que como que siempre vemos funcionales nada mas de un tipo que son como las integrales y entonces como que queda en el subconsciente no se, de que si es funcional tiene que ser a fuerzas una integral de tal a tal o lo que sea entonces este como que nunca hasta ahorita nunca había pensado que un funcional podría ser nada mas, o sea, como la definición mas amplia de los espacio vectorial a los reales entonces eso como que ahorita me brinco mucho
JC Mmm. ¿Y para resolver problemas de optimización con funcionales?
MA Hay algunas integrales que luego me cuestan trabajo
JC O sea, pero es la parte algebraica
MA Aja
JC ¿de la parte teórica?
MA así de lo conceptual, pues no según yo si le agarre bastante bien
JC Mmm, ¿y para determinar las condiciones de transversalidad?
MA Esas también las agarre bastante bien, o sea así como nos lo explicaron gráficamente
JC Mmm
MA Pues, luego, luego hasta si no te acuerdas bien, bien nada mas lo pintas pones aquí el T 0 o el C el X 0 y todo eso y de ahí las sacas
JC Y en general que parte del curso de calculo de variaciones y teoría de control te ha resultado mas difícil de entender y ¿Por qué?
MA Lo ultimo de control como que lo siento muy abstracto todavía, o sea estaría bien no se, echarnos unos problemas como con mas aplicación
JC De control

MA Aja de control, igual es por que también es lo ultimo que vi y es lo que menos he estudiado, entonces igual…
JC Y faltaría ver el examen final a ver si has estudiado
MA Si
JC Ahí podríamos evaluar entonces lo de teoría de control. Bueno pues eso es básicamente todo, no se si quieras añadir algo o algún comentario
MA Pues no esta bueno el curso a mi me ha gustado bastante
JC Y esta difícil el contenido de calculo
MA Lo de integrales, pero integrales a mi siempre se me ha dificultado o sea no es de que…
JC Lo que es trayectoria, integral de línea
MA Aja
JC Ese tipo de cosas…
MA Algunos conceptos si no los traigo…
JC Que habría que verlos, y este que otra cosa podría ser, eh, no se si con el cambio de orden en la presentación del curso, claro que tu no lo habías llevado antes ¿verdad?
MA No
JC Este, te pareció que el, antes bueno, se veía ecuaciones diferenciales primero ecuaciones sin diferencia, y luego se veía calculo en variación, en este curso se empezó con calculo en variaciones
MA Aja
JC ¿Por qué?, para que se viera es un problema de optimización dinámica, que se ayuda de las ecuaciones diferenciales, no se si a ti te quedo clara esa idea, o, no mucho
MA No yo ni sabía que se había cambiado
JC Bueno no, no en cuanto al orden pero en cuanto a que el cálculo en variaciones como que se va auxiliar a las ecuaciones diferenciales pero que es independiente de, o sea que no es este, es decir se aplican las ecuaciones diferenciales para resolver problemas de optimización
MA Si, eso si
JC ¿Quedo claro eso?
MA Si, eso si
JC ¿Si quedo claro?
MA De que, si de que las ecuaciones en variaciones van para problemas de optimización si, y de hecho hemos visto varias modelos en clase
JC Aunque las ecuaciones diferenciales también tienen otras aplicaciones ¿no?
MA Esas no me las se todavía
JC ¿No?
MA No ¿Cómo cuales?, ah claro como física y todo esto si
JC Mmm
MA Aja
JC Hay muchos modelos ¿no?
MA Si, si, si
JC Bueno, pues este muchas gracias
MA No, hay de que
JC Ponle nada mas tu nombre, nada mas con que diga.

En resumen podemos suponer que tiene una concepción tipo proceso en los conceptos de Funcional,Condiciones de Primero y Segundo orden en Cálculo de Variaciones, las Condiciones de Transversalidad,así como para determinar la diferencia entre variable de estado y variable de control y que no tiene ni siquiera una concepción tipo acción sobre las Condiciones de Primero y Segundo orden en Teoría de Control y en las diferencias entre Cálculo de Variaciones y Teoría de Control. Por otra parte, no establece relaciones

importantes entre los distintos conceptos que conforman su esquema de Funcional, por lo que podemos suponer tiene un esquema de Funcional a nivel intra.

ENTREVISTA a Mauricio F. Grupo: Optimización

MF Estamos a 7 de mayo del 2008, mi nombre es Mauricio Gabriel Flores Pérez
JC Entonces este habíamos quedado que yo iba a hacer unas preguntas y que las contestaras sin pensar, o sea pensando mas bien fuerte las respuestas ¿no?, bueno la primera dice así dadas las siguientes expresiones determinar cuales son funcionales, cuales son únicamente funciones y cuales no son ni siquiera funciones, justificando brevemente ¿no?
MF Si
JC Inciso A $f(x)=\int_0^x (t^2+5)dt$
MF Bueno este, bueno voy a decir como la entendí cuando, si fueran X y, Y los vectores, digo los ejes seria a cada X le corresponde una Y así de simple
JC Entonces una integral como esta es una función, ¿si o no?
MF No
JC ¿No es función?
MF No, si
JC O no esta muy claro
MF A no si, si, si es función, si es función, si es función,
JC Si es función ¿Por qué?
MF Si, si por lo mismo, este la como se llama la constante solo a cada x le corresponde una y y eso lo
JC ¿O esta en duda?, la dejamos en duda para mas adelante ¿no?
MF OK la dejamos en duda
JC A ver la tercera dice $f(x,x',t)=\sqrt{1+x'^2}$
MF ¿1 mas X' al cuadrado?
JC Aja, eso será función llegara a ser funcional o ninguna de las dos, aquí se trata de pensar fuerte eh, dilo, di lo que pienses
MF Me puede repetir otra vez
JC SI dada la expresión $f(x,x',t)=\sqrt{1+x'^2}$
MF Aja
JC ¿será función?, ¿ será funcional? o no será ni función ni funcional y nos gustaría oír lo que estas pensando
MF No pues, que pienso a ver finalmente no se como hallarle
JC O sea la dejamos en duda esa todavía
MF Si
JC A ver otra mas: $J(x)=\left(\int_0^5 (x(t)^2 dt), \sqrt{1+x'^2}\right)$ es un vector con dos componentes, la primera componente es la integral desde 0 hasta 5, integral desde 0 hasta 5
MF Mmm
JC De X de T al cuadrado D T coma la segunda componente seria la raíz de 1 mas X' al cuadrado ya se cierra todo ¿no?, esto es una función es una funcional o ninguna de las dos
MF No se, digo este, esta tiene que ver con al primera digo con la anterior pregunta ¿no? de raíz de 1 mas X' al cuadrado
JC Aparece otra vez si
MF Este, si en dado caso es función tengo duda todavía

JC Mmm
MF Pero si esa fuera función y la la integral de x dt al cuadrado también
JC ¿Esa integral es un numero verdad?
MF Mmm
JC Es un numero, y lo que dice de raíz de 1 mas X' al cuadrado para cada T también es un numero ¿no?
MF Si
JC O sea para cada x…
MF Mmm
JC Que van a ser funciones en este caso son xd T
MF Si
JC Le va a corresponder un par de números
MF Aja
JC Una pareja ordenada, entonces la pregunta es ¿eso es una función?,… si no hay seguridad podemos pasar a otra
MF Este, es algo de que bueno no hay 100% seguridad pero también no hay tanta desconfianza
JC A ver entonces
MF Es raro, digo que no es función como van a quedar
JC ¿Cómo van a quedar?.., funcional ¿se ve como que pueda ser o no?
MF Este
JC Que pasaría si dijéramos a ver una expresión más
MF Mmm
JC $J(x)=\int_{0}^{T}\left(x'^{2}+x^{2}\right)dt$
MF Mmm
JC …, Eso ¿a que se parece?
MF Se parece a igual a un número
JC ¿Esas expresiones no las vieron en clase?
MF Eh no, no, hemos visto
JC No han visto de eso
MF No ahorita en lo que vamos mate aplicadas no
JC No, bueno de todas esas puedes determinar el dominio y el rango de alguna de ellas, o esta complicado
MF No, bueno de la anterior el dominio es de 0 a 5
JC ¿Y cual es la anterior?
MF Digo de J de X la integral de 0 a 5 de X cuadrada
JC A pero esa es la primera componente ¿no?, eran dos componentes y el dominio queda, habíamos dicho que eran funciones ¿no? funciones derivables para que existiera x', entonces va haber un conjunto en un espacio vectorial que son las funciones derivables a donde, donde esta el rango, tiene dos componentes, si son dos componentes ¿que es? cada una es real ¿no?
MF Si
JC Mmm
MF Si es cierto
JC Bueno a ver una siguiente pregunta, ¿puedes darme dos ejemplos de funcionales?.., ya la habíamos definido una funcional es una función que va de un espacio vectorial normado en los números reales…, se puede pensar fuerte eh,…estas escribiendo.
MF $a_1x^m + a_nx^m + 1 + \ldots$
JC Esas m ¿son exponentes o son órdenes de derivadas?
MF Son exponentes

JC Exponentes, y eso ¿Por qué es una funcional?
MF Porque, porque, porque tiene un dominio que va comprende a R N
JC ¿Comprende a R N?, O sea x a la m es un numero ¿no?,
MF Ah, es cierto, no, no lo puse ese mismo
JC O sea si hubieras puesto $(x_1, x_2, ...x_n)$ el dominio si esta en R N ¿no?, como si ponemos (x,y,z) estamos en R 3 ¿no?
MF Si es cierto
JC ¿Verdad?, entonces poniendo a f$(x_1, x_2, ...x_n)= \ a_1 x \ + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ bueno eso ya tendría como dominio R N y el rango si estaría en los reales en el sentido de que todo eso es un real, ¿no?,
MF Mmm
JC Bueno es una función de varias variables ¿no?, que es un caso particular de funcional, alguna otra
MF ¿Cuantas llevamos?
JC Una. Otro ejemplo ¿no?
MF seria
JC Digo que fuera diferente
MF Nada similar
JC Esencialmente diferente
MF OK, este…,
JC Si no se le ocurre rápido podemos pasar a la siguiente y luego podemos regresar
MF Si, no

Por lo visto hasta aquí, podemos suponer que no tiene ni siquiera un tipo de concepción acción sobre funcional, además de que muestra prácticamente una falta de coordinación entre el concepto dominio de una función y la función en sí misma dentro de su esquema de función.

JC ¿Sabes lo que es una integral de línea?
MF No
JC ¿Tu sabes como se puede representar analíticamente una trayectoria?, ¿Cómo?
MF ¿Cómo?
JC Analíticamente una trayectoria
MF Aja
JC ¿Cómo se representa, como se puede representar analíticamente?, o ¿no?
MF No

Podemos suponer asimismo que no tiene ni siquiera un tipo de concepción acción sobre los conceptos trayectoria e integral de línea.

JC No, bueno, a ver una funcional te voy a dar una funcional
MF Mmm
JC $J(x) = \int_0^{40} \left(\frac{-x'^2}{2} \right) dt$
MF Mmm
JC Sabemos que X en 0 vale 20 y X en 40 vale 0
MF Mmm
JC Entonces la pregunta es ¿podrás optimizarla?,… ¿Qué es lo que estas haciendo?
MF Este trato de, tratar de quitar la integral de, tratar de quitar la integral poniendo la derivada de J X con respecto de T igual a la derivada de la integral con respecto y ahorita …

JC ¿Te acuerdas de las ecuaciones, de las condiciones de primer orden?
MF Aja
JC Para resolver este tipo de funcionales, que generalmente se resumian con la ecuación de Euler, ¿vieron la ecuación de Euler?
MF Si
JC ¿Si?
MF Si
JC ¿Y por que no la aplicas?, o ¿no te acuerdas de la ecuación de Euler?
MF No, no es que no me acuerdo de la ecuación de Euler
JC ¿Es que perdón?
MF No, no me acuerdo
JC No te acuerdas del a ecuación de Euler
MF Si

Muestra también que no tiene ni siquiera una concepción tipo acción sobre las condiciones de primer orden en Cálculo de Variaciones.

JC OK, ¿tu te acuerdas, si sabes este de donde vienen las condiciones de transversalidad?, ¿de que problema surgen las condiciones de transversalidad?, tu sabes que por ejemplo a nosotros nos dan un intervalo de tiempo
MF Aja
JC Por ejemplo esta integral esta funcional que acabamos de definir dice de 0 a 40
MF Aja
JC Es un intervalo de tiempo ¿verdad?
MF Si
JC Pero el tiempo podría tener algunas variantes ¿no?
MF Mmm
JC Por ejemplo el tiempo podría estar fijo y la por ejemplo la X para esa T dada o el tiempo libre la X D T dada o la X D T libre y la T dada o las 2 libres, ¿si te acuerdas de eso o no?
MF Algo
JC Si, ¿cómo podrías dibujar las posibilidades?, las diferentes posibilidades entre T libre X D T dada etcétera ¿no?, o bien si quieres decirlo oralmente de donde vienen las condiciones de transversalidad nada mas
MF Eso ¿en que calculo lo vimos?
JC O sea las condiciones de transversalidad surgen de estos cambios en el tiempo
MF Mmm
JC Y se ven en calculo de variaciones o en teoría de control
MF Aja
JC Pero no se si lo vieron ustedes o no,
MF No me acuerdo

Por lo recién expresado podemos suponer que no tiene ni siquiera un tipo de concepción acción sobre las Condiciones de Transversalidad.

JC No te acuerdas o sea, este ¿tu sabes en un problema de control como distinguir a la variable de estado de la variable de control o no?
MF No
JC No, y sabes plantear un problema pasarlo de calculo de variaciones a teoría de control
MF Perdón no hemos visto teoría de control
JC No han visto teoría de control nada ¿han visto el Hamiltoniano?

MF No eso si no

Podemos suponer asimismo que no tiene ni siquiera una concepción acción sobre la diferencia entre Cálculo de Variaciones y Teoría de Control o entre Variable de Estado y Variable de Control, ni sobre condiciones de primer orden en Teoría de Control.

JC No lo han visto entonces pues ahí si ni hablar, bueno unas preguntas abiertas
MF OK
JC ¿Qué es lo que mas se te ha dificultado para entender el concepto de funcional?
MF No pues el funcional realmente no me acuerdo en que calculo lo vimos en segundo, este si lo vi., no fue muy relevante, bueno al menos con los profesores que lleve no lo vieron o si lo vieron no lo pusieron así en los exámenes
JC Eso se ve en esta, en la materia de mate aplicada
MF A OK, no pues funcional, que es funcional, no pues no se le ha dado tanta relevancia
JC No, no lo viste así como
MF No, últimamente la a utilizado profe pero así dos tres veces pero bueno
JC O sea apenas los están viendo
MF Si
JC OK, entonces por ahí puede empezar la dificultad ¿no?
MF Si
JC Que apenas los están empezando a dar, bueno pues te agradezco mucho tu participación
MF OK
JC Y vamos a tomar en cuenta las respuestas.

En resumen podemos suponer que no tiene ni siquiera una concepción tipo acción en todos los conceptos que formarían su esquema de funcional, por lo que tal esquema no lo ha llegado a construir.

Anexo “D”

PROPUESTAS DE ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

En base a los resultados obtenidos mediante los instrumentos de validación, recién comentados, sería conveniente reforzar en los próximos instrumentos didácticos (Actividades) los siguientes conceptos:

i) Funcional que fue uno de los conceptos que más trabajo les costó a los estudiantes.

ii) Presentación de problemas abiertos en contexto, con el fin de ayudar a que el concepto de funcional tenga sentido concreto para los estudiantes (en particular de Economía)

iii) Trayectoria e Integral de Línea

iv) Relación entre los distintos conceptos que forman parte del esquema de funcional.

El desarrollo de estos puntos deberá llevarse a cabo en próximos estudios. Unicamente con el fin de ejemplificar algún punto propondríamos las siguientes Actividades complementarias:

Comenzaremos proponiendo ejercicios que ayuden a mejorar la construcción del concepto de Funcional.

PRIMERA ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA SOBRE EL CONCEPTO DE FUNCIONAL

1)

i) ¿Qué quiere decir que un conjunto sea un Espacio Vectorial?

ii) ¿Qué quiere decir que un conjunto sea un Espacio Vectorial normado?

iii) Da tres ejemplos de Espacios Vectoriales normados, esencialmente diferentes. Justificando cada respuesta.

iv) El conjunto de funciones diferenciables (de una variable), ¿serán un Espacio Vectorial normado? Justifica la respuesta.

v) En caso de respuesta afirmativa al inciso anterior, da el ejemplo de una norma particular para dicho Espacio Vectorial.

2)

d) ¿Qué es una funcional?

e) ¿Cuáles de las siguientes son funcionales y por qué? Justifica cada respuesta

i) $f(x)=\int_0^x \left(2t^2+5\right)dt$; ii) $f(x,y)=x^2+y^2$; iii) $f(x,x',t)=\sqrt{1+x'^2}$

iv) $J(x)=\left(\int_0^5 x^2(t)dt, \sqrt{1+x'^2}\right)$; v) $J(x)=\int_0^T \left(x^2+x'^2\right)dt$

3)

i) Determinar los dominios y rangos de todas las expresiones del ejercicio anterior.

ii) De los dominios determinados en el inciso anterior, ¿cuáles son espacios vectoriales? Justifica cada respuesta.

iii) De los espacios vectoriales determinados en el inciso anterior, ¿cuáles son normados? Justifica cada respuesta.

iv) Para cada espacio vectorial normado determinado en el inciso anterior, asígnale una norma, justificando que efectivamente se trate de una norma en cada respuesta.

v) De los rangos determinados en el primer inciso del presente ejercicio, ¿cuáles son los reales? Justifica cada respuesta.

4) Recordando que una funcional es una función con dominio en un espacio vectorial normado y rango en los reales, ¿cambiarías alguna de tus respuestas del segundo inciso de la primera pregunta? Concretamente: ¿Cuáles cambiarías y por qué? Justifica cada respuesta.

5) Da tres ejemplos de funcional de tipo diferente. De preferencia, alguno de ellos que no hayas visto en clase.

SEGUNDA ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA SOBRE EL CONCEPTO DE TRAYECTORIA

1) En general, cuando una partícula se mueve a través del espacio tridimensional durante un intervalo de tiempo I, podemos determinar la posición de dicha partícula de manera eficiente a través de sus coordenadas que son funciones que dependen del tiempo. Así, mediante una función $f: R \to R^n$ definida como $\bar{r}(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ o escrita de otra manera: $\bar{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, donde suponemos que las funciones $x(t),y(t),z(t)$ son por lo menos diferenciables, en general van a tener derivadas de todos los ordenes, podemos ubicar la posición

de la partícula en el espacio tridimensional para cualquier instante de tiempo t dentro del intervalo I.

Uniendo los puntos correspondientes a diferentes valores de tiempo t, obtendremos la curva o trayectoria seguida por la partícula dentro del intervalo I de tiempo considerado.

En base a lo dicho anteriormente dibujar las curvas (trayectorias) en el plano R^2 correspondientes a los siguientes vectores de posición:

i) $\bar{r}(t) = (sen(t), \cos(t))$, dentro del intervalo de tiempo $I = (0, 2\pi)$. ¿Qué trayectoria representa? Justifica la respuesta.

ii) $\bar{r}(t) = (t, t^2 + 1)$, dentro del intervalo de tiempo $I = \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. ¿Qué trayectoria representa? Justifica la respuesta.

2) Escribir las funciones vectoriales del ejercicio anterior como funciones entre x, y. (Sugerencia: eliminar el parámetro o buscar alguna identidad o relación entre las coordenadas). Respuesta no dada a los estudiantes: i) $x^2 + y^2 = 1$, ii) Parte de la parábola $y = x^2 + 1$.

3) La misma pregunta del ejercicio anterior, solo que ahora son curvas (trayectorias) en el espacio R^3:

i) $\bar{r}(t) = (\cos(t), sen(t), k)$, $k \in R$, dentro del intervalo de tiempo $I = (0, 2\pi)$.

ii) $\bar{r}(t) = (\cos(t), sen(t), t)$, dentro del intervalo de tiempo $I = (0, 2\pi)$.

iii) $\bar{r}(t) = (t, t, t)$, para cualquier tiempo t.

5) Escribir las funciones vectoriales del ejercicio anterior como funciones entre x, y, z. (Sugerencia: eliminar el parámetro o buscar alguna identidad o relación entre las coordenadas).

Los demás puntos mencionados en este apartado se sugieren para próximos trabajos didácticos sobre Optimización Dinámica para continuar y mejorar la presente Propuesta Didáctica.

ANEXO “E”

CUESTIONARIO DE DIAGNOSTICO PARA PRUEBA PILOTO

El Cuestionario que se planeó aplicar durante el segundo semestre de 2007 para ayudarnos a llevar a cabo una Descomposición Genética original, es el siguiente:

La primera pregunta pretende determinar el tipo de concepción de un estudiante sobre Optimización Dinámica.

1)¿Qué relación existe entre la optimización que viste en tus cursos de Cálculo y la que se estudió en este curso?

*Para ver en forma detallada los criterios para determinar el tipo de concepción de un estudiante ante un concepto determinado, ver instrumentos de validación en el capítulo VII.

Si un estudiante responde de memoria que la diferencia entre la optimización vista en Cálculo no entra el tiempo (es estática), mientras que en la optimización vista en este curso el tiempo juega un papel importante, podríamos suponer que tiene una cognición acción sobre Optimización Dinámica. Si además menciona que la solución de los problemas de optimización en Cálculo se expresa como una cantidad discreta de puntos, mientras que en la optimización vista en este curso dicha solución es una trayectoria que depende del tiempo, podríamos suponer que dicho estudiante ha logrado interiorizar la acción recién mencionada en proceso para determinar cuando un problema es de Optimización Dinámica. Si además menciona que en el caso de que la funcional se represente en forma de integral, en el integrando se encuentra el criterio de optimización, podríamos suponer que ha encapsulado el proceso anteriormente descrito en un objeto.

La segunda pregunta busca determinar el tipo de cognición de un estudiante sobre las condiciones necesarias de primer orden en Cálculo de Variaciones y Teoría de Control.

2)¿Qué papel juegan la Ecuación de Euler y el Principio del Máximo en Cálculo de Variaciones y en Teoría de Control óptimo respectivamente?

Si un estudiante responde memorísticamente que son las condiciones necesarias de primer orden para resolver problemas de optimización en Cálculo de Variaciones y en Teoría de Control respectivamente, podríamos suponer que tiene un tipo de cognición acción sobre este concepto. Si además, puede escribir la Ecuación de Euler y el Principio del Máximo y menciona que de cada una de las anteriores se asocia un sistema de ecuaciones diferenciales, podríamos suponer que ha interiorizado la acción de determinar el papel que juegan las condiciones necesarias del Cálculo de Variaciones o Teoría de Control respectivamente en un proceso. Si además puede explicar la diferencia entre ambos conceptos y en qué casos conviene más escribir el problema de optimización asociado en una forma o en la otra, podríamos suponer que ha encapsulado el proceso recién mencionado en un objeto sobre el papel que juegan dichos conceptos. Es posible que un estudiante tenga un tipo de concepción acción, proceso o incluso objeto sobre el papel que juega la Ecuación de Euler y ningún tipo de concepción sobre el Principio del Máximo o al revés. Se pueden dar todas las combinaciones posibles sobre el tipo de cognición de ambos conceptos.

En las siguientes preguntas se busca determinar el tipo de concepción de un estudiante sobre la solución de un problema de Optimización Dinámica. El problema tres se refiere a un problema de optimización en Teoría de Control, el problema cuatro es sobre un problema de control singular en Teoría de Control y el problema cinco es sobre optimización en Cálculo de Variaciones.

3) Max $\int_0^T \left(x - x^2 - \frac{u^2}{2} \right) dt$ sujeta a $x' = u - \frac{x}{2} \quad x(0) = 0, \quad u(T) = 5$.

4)Max V = $\int_0^4 (3y - 2u)dt$ sujeta a $y' = y + u$, $y(0) = 4, \quad u(t) \in U = [0,3]$

5)Max $\int_0^T \left(3y - 4y^2 - 3y'^2 + 4y'\right)dt$ sujeta a $y(0) = 0, \quad y(T) = 5, \quad T \ libre$. Nota: En este caso proporciona UNICAMENTE la solución GENERAL, que incluye la condición de transversalidad, PERO NO calcules las constantes ni la T .

Las soluciones de los problemas anteriores requieren que el estudiante utilice correctamente la ecuación de Euler o el Principio del Máximo (Condiciones necesarias de primer orden). Si el estudiante utiliza la condición necesaria correspondiente de manera memorística y no muestra señales de comprensión de su significado matemático, y si, por otro lado, resuelve la ecuación diferencial que resulta de la aplicación de dicha condición necesaria de manera memorística, se considerará que la concepción que muestra el estudiante acerca del proceso de optimización es de tipo acción. Si el estudiante muestra comprensión del significado de la condición necesaria correspondiente y del proceso de solución de la ecuación diferencial resultante, se considerará que el estudiante tiene una concepción proceso del algoritmo de solución del problema de optimización. Puede ser que el estudiante de muestras de tener una concepción proceso de la solución de la ecuación diferencial pero no de la solución del problema de optimización (condición necesaria correspondiente) o viceversa. En tal caso se considerará que el estudiante tiene una concepción acción de un concepto y concepción proceso del otro. En el caso de que incluso comente acerca de diferentes formas de resolver el problema de optimización (por ejemplo, comentando cómo se resolvería un problema de Cálculo de Variaciones con el enfoque de Teoría de Control o al revés, y mencione algún criterio para elegir el método más adecuado para resolver el problema dado), podríamos suponer que el estudiante ha encapsulado el proceso de optimización en un objeto sobre el cual puede hacer nuevas acciones o el cual puede ser desencapsulado en el proceso que le dio origen.. Análogamente en el caso de solución del sistema de ecuaciones diferenciales al que dan lugar las condiciones necesarias de primer orden. Si comenta diferentes formas de resolver dicho sistema y elige la que por alguna razón conviene al sistema dado, podríamos suponer que tiene una concepción objeto de la noción de solución de tales sistemas.