Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
relime@clame.org.mx
ISSN (Versión impresa): 1665-2436
MÉXICO

2007
Avenilde Romo / Asuman Oktaç
HERRAMIENTA METODOLÓGICA PARA EL ANÁLISIS DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN EL EJERCICIO DE LA INGENIERÍA
Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, marzo, año/vol. 10, número 001
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, México
pp. 117-143

Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal

Universidad Autónoma del Estado de México

http://redalyc.uaemex.mx

Relime Vol. 10, Núm. 1, marzo, 2007, pp.117-143

Herramienta metodológica para el análisis de los conceptos matemáticos en el ejercicio de la ingeniería[1]

Avenilde Romo[2]
Asuman Oktaç[3]

RESUMEN

Este trabajo surge por el interés de observar el papel que desempeñan los conceptos matemáticos en la resolución de proyectos de ingeniería. A fin de efectuar un análisis sistemático, proponemos una metodología –vinculada al marco teórico de los pensamientos teórico y práctico– que permite observar y dar cuenta de fenómenos producidos cuando los conceptos matemáticos son usados en la resolución de dichos proyectos. Bajo el uso de esta metodología hemos analizado cuatro proyectos de ingeniería que conforman cuatro tesis de maestría en Ingeniería de Sistemas; aunque fueron producidas en el mismo espacio académico, resuelven problemáticas distintas de situaciones reales. En este artículo presentamos el análisis de una tesis, que permite mostrar los fenómenos encontrados a través de la herramienta metodológica.

• **PALABRAS CLAVE:** Contexto de ingeniería, matemáticas en uso, herramienta metodológica, pensamiento teórico, pensamiento práctico.

ABSTRACT

This research stems from an interest in observing the role that mathematical concepts play in carrying out engineering projects. In order to perform a systematic analysis, we propose a methodology to observe and realize phenomena that are produced when mathematical concepts are used in carrying out these projects. The methodology employed is related to the theoretical framework of theoretical and practical modes of thinking. By using this methodology we have analyzed four en gineering projects within the context of four master's theses in Systems Engineering. These theses were produced in the same institution, but they concern different problems related to real situations. In this article we present the analysis of on of these theses, which allow us to

Fecha de recepción: 4 de abril de 2006 / Fecha de aceptación: 24 de noviembre de 2006.

[1] Este trabajo forma parte del proyecto Conacyt 2002-C01-41726S.

[2] Université Paris 7 Denis Diderot. París, Francia.

[3] Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

illustrate the phenomena that we observed by means of the methodological tool that we designed.

• **KEY WORDS:** Ingineering context, mathematics in use, methodological too, theoretical thinking, practical thinking.

RESUMO

Este trabalho surge do interesse em observar o papel que desempenham os conceitos matemáticos na resolução de projetos de engenharia. A fim de realizar uma análise sistemática, propomos uma metodologia que permite observar e dar conta dos fenômenos produzidos, quando os conceitos matemáticos são utilizados na resolução desses projetos. A metodologia empregada está vinculada ao marco teórico dos pensamentos teórico e prático. Com essa metodologia analisamos quatro projetos de engenharia, que resultaram de quatro dissertações de mestrado em Engenharia de Sistemas. Essas dissertações foram produzidas no mesmo espaço acadêmico, porém, resolveram problemáticas diferentes, de situações reais. Nesse artigo apresentamos a análise de uma das dissertações, que permite mostrar os fenômenos encontrados através da ferramenta metodológica que planejamos.

• **PALAVRAS CHAVE:** Contexto de engenharia, matemática em uso, ferramenta metodológica, pensamento teórico, pensamento prático.

RÉSUMÉ

Ce travail est motivé dans l'intérêt d'observer le rôle que jouent les concepts mathématiques dans le développement de projets d'ingénierie. Afin de réaliser une analyse systématique, nous proposons une méthodologie pour observer et rendre compte des phénomènes produits lors de l'utilisation des concepts mathématiques dans le développement de ces projets. La méthodologie développée est associée au cadre théorique des modes de la pensée théorique et pratique. En utilisant cette méthodologie nous avons analysé quatre projets d'ingénierie qui font partie de quatre thèses de maîtrise d'Ingénierie de Systèmes. Les thèses ont été développées dans la même Institution, mais elles rendent solution aux problématiques réelles très différentes. Dans cet article nous présentons l'analyse d'une thèse, pour montrer les phénomènes trouvés à travers l'utilisation de l'outil méthodologique que nous avons développé.

• **MOTS CLÉS:** Contexte d'ingénierie, mathématiques en usage, outil méthodologique, pensée théorique, pensée pratique.

1. INTRODUCCIÓN

El trabajo que presentamos surge por la reflexión sobre la naturaleza del trabajo del ingeniero, así como por la necesidad teórica de la ingeniería cuando debe resolver problemas reales de manera práctica. Más precisamente, nos interesa saber el nivel teórico de los conceptos matemáticos que son usados en la resolución de un problema de ingeniería en la vida real. Algunas preguntas que esbozan de manera general esta reflexión son: ¿Qué tipo de conocimientos matemáticos son usados por el ingeniero? ¿Cómo justifica la elección de una herramienta matemática? ¿Qué características tienen los usos de los elementos matemáticos? ¿Se utilizan a nivel de herramientas para resolver un problema, o bien para realizar y justificar hipótesis, procedimientos y encontrar resultados? ¿Qué papel juegan estos conceptos en el trabajo del ingeniero?

Para dar respuesta a algunas preguntas, nuestra investigación considera como objetos de análisis a tesis de ingeniería que tienen un carácter académico, pues explicitan objetivos, hipótesis, maneras de resolver, herramientas y métodos. Asimismo, presentan la resolución de un problema de ingeniería de la vida real, en la que intervienen elementos matemáticos.

Un objetivo de nuestra investigación es conocer cuál es el papel que dichos elementos desempeñan en la resolución de problemas de ingeniería. Para ello, se requiere de una metodología que permita analizar el contenido matemático usado en la resolución de un problema de ingeniería. Debido a las características de los objetos de estudio, así como a la naturaleza de nuestra investigación, proponemos una herramienta metodológica que analice tesis de ingeniería, teniendo como objetivo determinar el rol de los elementos matemáticos que son utilizados en la resolución de proyectos de ingeniería, a partir del uso de dicha metodología.

En nuestro trabajo analizamos cuatro tesis de ingeniería:

1) Diseño y simulación de una red neuronal aplicada al problema de distribución óptima de planta.

2) Método numérico para el sistema m/g(0,c)/1 con distribución uniforme en tiempo de servicio.

3) Modelación de sistemas de producción mediante redes de Petri.

4) Optimización de la molienda de empacadores permanentes en las operaciones de reparación de pozos petroleros.

A fin de poder presentar de manera significativa nuestro trabajo, en este artículo mostraremos sólo el análisis de una de las tesis, pero en el apartado de resultados daremos a conocer los cuatro análisis que realizamos[4].

[4] Esta decisión se basa en el hecho de que cada tesis de ingeniería resuelve una problemática distinta; presentar sólo partes del análisis de las cuatro tesis nos parecía dejar fuera de contexto al lector. Para evitar esto, decidimos presentar un análisis completo que permitiera contextualizar al lector en la problemática de la tesis. En cuanto a los resultados, si mostrábamos los del análisis aquí presentado, estaríamos dando una mínima parte y quizás no representativa. Por ello, presentamos el análisis como prototipo de los cuatro y los resultados de los cuatro análisis.

2. ANTECEDENTES

Se han desarrollado diversos trabajos que estudian la naturaleza de la ingeniería desde diferentes enfoques, preocupaciones y objetivos. Algunos centran su estudio en las características del entorno donde se desarrolla un ingeniero en su práctica profesional (Kent & Noss, 2002), o el perfil que las condiciones de este siglo le exigen para realizarla (Rugarcia, et al., 2000). Otros se enfocan en observar y estudiar la enseñanza de las matemáticas en la formación de ingenieros, en las problemáticas que se le asocian (Molina, 1999) o en el estudio de la naturaleza del conocimiento matemático aplicado en esta disciplina (Camarena, 1999).

En esta última investigación, Camarena caracteriza la naturaleza de lo que ha llamado *saber de aplicación: "Un contenido de saber a enseñar que está destinado a utilizarse en la ingeniería sufre a partir de entonces un conjunto de trasformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para las aplicaciones en esa ingeniería, al cual se le llamará saber de aplicación. Así, el saber didáctico se extrae del dominio escolar para insertarse en el ámbito de la ingeniería, convirtiéndose en saber de aplicación. Al conjunto de las transformaciones que sufre un saber para pasar del saber a enseñar* [5] *al saber de aplicación*[6] *se le denominará* ***transposición contextualizada****"* (Camarena, 1999, p. 159). Este acercamiento se basa en la transposición didáctica, noción introducida por Chevallard (1985).

A partir de dicho planteamiento, nos preguntamos: ¿Cuáles son las características de este saber de aplicación? ¿Cuál es el papel que desempeña en la resolución de un problema de ingeniería y cuáles son las características del pensamiento que se presentan o se asocian con su uso?

Por otra parte, la investigación de Kent & Noss (2002), realizada con el fin de observar la abstracción matemática en el uso que se hace de las matemáticas en la práctica de la ingeniería, se remitió a observar la práctica de los ingenieros civiles en una pequeña empresa; es decir, en un escenario real. Dentro de esa empresa, los ingenieros usan las matemáticas basándose en los *códigos de práctica*, entre los que se encuentran recomendaciones para realizar diseños estructurales de acero, concreto, madera, etc. Cuando se requiere de conocimientos matemáticos avanzados, se consulta a *un especialista analítico*, un ingeniero cuya actividad se centra en la resolución de problemas matemáticos que los otros no logran resolver. Sin embargo, los ingenieros a quienes se les resuelven los problemas matemáticos alcanzan un nivel de entendimiento sobre la solución del problema matemático, pues son capaces de usar los resultados.

A partir de su observación sobre el trabajo de los ingenieros, estos investigadores determinaron tres componentes en el desarrollo de sus actividades, que forman un ciclo: *diseño, análisis y revisión*. También notaron los cambios que ocurren en el proceso cuando se va de la componente de análisis a la de diseño, un fenómeno al que le atribuyen la noción de *interfaces*. Por ejemplo, en la *interfase* diseñador-especialista aparece una ca-

[5] El cual se localiza en el ámbito escolar.

[6] En el ámbito de la ingeniería se encuentra este saber.

racterística similar al aspecto de *entender a través del uso* (Kent & Noss, 2002), ya que el especialista resuelve un problema complejo a través de la actividad matemática, y el resultado es entregado al diseñador en forma de modelo general de ingeniería, quien lo puede comprender por sus conocimientos matemáticos y llega a modificarlo al alterar parámetros o realizar ajustes.

El sustento teórico de esta investigación se basa en otro trabajo de Kent & Noss, *Situated abstraction and layering*, donde la abstracción se define como "conocimiento-en-uso, observable como la invariancia de relaciones" (Kent & Noss, 2001). A la luz de estudio, se obtiene un resultado importante:

> *"El usuario del procedimiento es quien opera más abstractamente que el programador; a diferencia del usuario de matemáticas, el ingeniero es menos abstracto que el especialista analítico o el matemático"* (Kent & Noss, 2002).

Los resultados de esta investigación permiten observar la complejidad de la actividad matemática del ingeniero. Asimismo, muestran que para abordar esta complejidad se requiere de la construcción y desarrollo de herramientas teóricas específicas que permitan estudiarla y analizarla.

Nuestro trabajo considera también el estudio de una actividad profesional del ingeniero, pero desde una perspectiva distinta, ya que analizamos tesis de ingeniería que resuelven un problema de la vida real; es decir, analizamos una actividad profesional del ingeniero, pero no en el tiempo ni en las condiciones reales en las que fue desarrollada, sino en el reporte académico que da cuenta de ello. Poder generar un método que permita acercarnos a la naturaleza de la matemática en un contexto de ingeniería deberá, posteriormente, favorecer una didáctica de la matemática en la formación de ingenieros que pueda ofrecer a los estudiantes de ingeniería, desde su formación, una herramienta teórica para su práctica.

Para analizar el uso de conceptos matemáticos en el desarrollo de los proyectos de ingeniería hemos considerado que pueden ser estudiados a partir de la consideración de la caracterización del pensamiento matemático. Bajo esta hipótesis, presentamos las consideraciones teóricas en las que se basa la herramienta metodológica que hemos diseñado con el fin de analizar las tesis.

3. CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Nuestra investigación se circunscribe al marco teórico de los modos de pensamiento teórico y práctico, desarrollado por Sierpinska, et al. (2002). A partir de este modelo, diseñamos una herramienta metodológica que consideró las características de los elementos matemáticos (descritas en las categorías del pensamiento teórico y práctico), con la intención de definir los posibles usos que podían ejercer en las tesis de ingeniería. Dichas características, junto con el análisis de la tesis, nos permitieron estudiar los rasgos que pueden tener los elementos matemáticos empíricos surgidos en la práctica de la ingeniería, así como en el tipo de pensamiento que se asocia a estos usos. Presentamos a continuación el modelo de los pensamientos teórico y práctico:

3.1. Pensamiento teórico y pensamiento práctico

El pensamiento práctico se distingue del teórico en su objetivo, objeto, preocupaciones principales y resultados:

- El pensamiento teórico es el que se produce en el hecho puro de pensar; tiene como objeto a los sistemas de conceptos; estudia las relaciones y características entre conceptos y sistemas de conceptos.

- El pensamiento práctico es el que se genera con el fin de obtener algo en concreto; está asociado a objetos, hechos o fenómenos particulares; se centra en el significado de acciones (Sierpinska, 1994, p. 24), mientras que su validez depende de lo factible.

3.2. Caracterización del pensamiento teórico

El pensamiento teórico se distingue por tres categorías principales: reflexivo, sistémico y analítico. Empero, Sierpinska, et al (2002) consideraron necesario identificar en estas categorías a otros rasgos más específicos, en términos de comportamientos observables. Cabe mencionar que tales comportamientos corresponden a la naturaleza de la entrevista que se hizo[7] y no son exhaustivas. No obstante, las categorías generales establecidas se relacionan con la caracterización del pensamiento.

Reflexivo: El pensamiento teórico es pensamiento por el afán de pensar. Dentro de esta característica se consideran tres comportamientos observables: los modos para resolver y encontrar una o varias soluciones posibles a los problemas matemáticos, que atañen a *inferir, conjeturar y trabajar de manera sistemática* la consideración del significado intrínseco de los conceptos y el uso del discurso relacional.

Sistémico: El pensamiento teórico se circunscribe a los sistemas de conceptos, cuyo significado es establecido por sus relaciones con otros conceptos, no con cosas particulares o eventos. Las subcategorías del pensamiento sistémico son *definicional, demostrativo e hipotético*, y en cada una se consideran comportamientos asociados.

Definicional: Los significados de los conceptos se establecen mediante definiciones. Los compartimientos asociados son el uso de categorización formal; la referencia al contexto algebraico o gráfico, cuando se decide sobre significados, así como el reconocimiento del estatus de la definición de un concepto, independientemente de los contextos y representaciones.

Demostrativo: El pensamiento teórico está relacionado con la coherencia interna de sistemas conceptuales. Los comportamientos asociados son la actividad de demostración como medio para justificar y validar; refutar un enunciado general mediante la contradicción, y el razonamiento axiomático.

Hipotético: El pensamiento teórico es **consciente** del carácter condicional de

[7] Esta entrevista (en el sentido genérico del término) de tipo clínico fue realizada en el marco de la investigación Sierpinska, et al (2002). Se pedía a los estudiantes la resolución de ciertos problemas especialmente diseñados para permitir la identificación de las características de un pensamiento teórico, práctico o mixto. La entrevista era la herramienta metodológica que permitía ahondar en el pensamiento usado por el estudiante al momento de trabajar dichos problemas.

sus enunciados, ya que busca descubrir las suposiciones implícitas y estudiar todos los casos lógicos posibles. Aquí, el comportamiento asociado es reconocer el carácter condicional de los enunciados matemáticos.

Analítico: El pensamiento teórico tiene una aproximación analítica a los signos. Esta categoría presenta dos subcategorías y sus comportamientos asociados:

a) *Sensitividad lingüística*: ser sensible a la notación simbólica formal.

b) *Sensitividad metalingüística*: Reconocer la distancia entre signos y objetos, así como el significado de los cuantificadores universales y los conectivos lógicos.

El marco teórico que hemos descrito refiere las características del pensamiento matemático en su propia disciplina, considerando en específico una de sus ramas: el álgebra lineal. Cabe mencionar que Sierpinska, et al. (2002) creen en la necesidad de ambos modos de pensamiento para comprender las teorías matemáticas: *"Las matemáticas se desarrollaron debido a que algunos individuos empezaron a ver patrones generales en actividades prácticas y empezaron a desarrollar maneras sofisticadas de representar estos patrones"*.

Consideramos que estos modos de pensamiento juegan un papel específico en la ingeniería, pues es una ciencia de naturaleza práctica que se constituye para obtener productos, procesos u obras concretas, dependiendo de la especialidad a la que se haga referencia. Asimismo, soluciona problemas que se originan en la vida real, o bien ofrece productos que posibilitan una mejora de algún proceso, de una obra civil, etc. El pensamiento práctico tiene una función primordial y central dentro del quehacer de la ingeniería, ya que privilegia la acción sobre cosas o hechos concretos.

Al reflexionar sobre la presencia del pensamiento práctico en la ingeniería y estimar que las matemáticas que conforman la ingeniería tienen un carácter de aplicación, nos preguntamos: ¿Qué tipo de pensamiento se presenta cuando se aplica un concepto matemático? Si este pensamiento es el práctico, ¿cuáles son sus características?

Pensamos que puede haber distintos tipos y niveles de aplicación de un concepto, entendiendo que el hecho de aplicar un concepto no es inferior al de crear un concepto, sino que estos diferentes hechos tienen una naturaleza distinta, que nos interesa estudiar. Además, las aplicaciones pueden dar lugar a la creación de nuevos conocimientos o a la organización del conocimiento mediante experiencias que retroalimentan la teoría.

El marco de los modos de pensamiento nos permite considerar que hay diferentes modos de pensamiento relacionados con la actividad matemática, como la creación de conocimiento matemático, el entendimiento y uso de los conceptos matemáticos, y los diferentes usos y niveles de estos elementos matemáticos que, a su vez, están relacionados con su propia naturaleza.

4. METODOLOGÍA

4.1. Las tesis de ingeniería, objeto de estudio

Nuestros objetos de estudio son tesis de ingeniería en sistemas de nivel maestría, que estudian y dan solución a problemáticas de alguna empresa o industria[8]. Tal característica las hace sumamente interesantes porque el uso de la matemática no está considerado dentro de un problema artificial, sino se ocupa para estudiar y dar solución a una problemática real, donde el factor tiempo tiene un peso distinto que en una situación problemática artificial. Por otro lado, el reporte sobre la solución de dicha problemática es académico, ofrece una argumentación de la solución que exige justificaciones, ya sea en cuanto al uso de herramientas, métodos o fórmulas.

La elección de las tesis se basó en dos aspectos:

1) **Contenido matemático.** Las tesis debían comportar en su desarrollo un contenido matemático importante que nos permitiera, en la fase de análisis, poder estudiar el papel que desempeñaba.

2) **Problemática abordada.** La problemática abordada fue otro aspecto a considerar, ya que elegimos tesis que no abordaran lo mismo, a fin de tener un espectro mínimo de problemáticas para nuestro análisis.

4.2. La herramienta de análisis

Como las tesis abordaban problemáticas distintas, juzgamos que para efectuar su análisis la primera fase debía comportar el estudio y comprensión de la problemática, mientras que en la siguiente fase se debía identificar las características del contenido matemático que fueran invariantes o pudieran considerarse regulares en las cuatro tesis. Para ello, era necesario hacer lecturas analíticas sobre cada una de las tesis que nos permitieran identificar posibles categorías del uso del contenido matemático, seguido de un proceso de afinación sobre las mismas. Así, nuestra metodología partió de un análisis de las tesis para identificar un posible modelo que pudiera darnos pistas sobre el papel del contenido matemático.

Este primer análisis de las tesis nos enfrentó a la naturaleza del contenido matemático en el contexto de un proyecto de ingeniería. Debido a la naturaleza de nuestro trabajo, que se centraba en el análisis de las tesis y en la literatura que referían, nuestro objetivo no consistía en determinar las adaptaciones que el contenido matemático había sufrido en tanto saber escolar y saber de aplicación, sino en analizar su rol en la solución del proyecto, según los términos que se redefinían los elementos matemáticos, para devenir en una herramienta práctica, a pesar de que en la solución del proyecto fungían como elementos teóricos.

Por otra parte, discurrir de entrada que el contenido matemático de los proyectos es un saber escolar que ha sufrido adaptaciones supone negar la existencia de elementos matemáticos surgidos en la práctica de la ingeniería. Era, en parte, apreciar que el conocimiento matemático presente en un proyecto de ingeniería pasa naturalmente por el ciclo de vida *saber sabio, saber escolar y saber de aplicación*. Si bien en nuestro estudio distinguimos a las características del

[8] Los autores de las tesis, estudiantes de la maestría en Sistemas del Instituto Politécnico Nacional, en general han laborado en alguna empresa o industria. Al ingresar a la maestría, gran parte de ellos logra mantener sus puestos de trabajo, a cambio de que consideren en sus tesis una problemática de la empresa o de la industria en la que han laborado, con el objetivo de estudiarla y darle solución.

elemento matemático como parte de la teoría matemática, y de manera más precisa a las descritas en el modelo del pensamiento teórico –no de manera exhaustiva–, también era claro que nos interesaba tomar en cuenta a los elementos matemáticos empíricos que podrían surgir en la práctica de la ingeniería.

El otro elemento a considerar para proponer un método de análisis era el carácter académico de las tesis, ya que nos permitía acceder a los argumentos que el ingeniero –autor de la tesis– daba para elegir una herramienta matemática, un método, un modelo, una fórmula; en suma, cómo el modelo matemático servía para el estudio y solución a la problemática abordada. Más que interesarnos en las distintas características y clases de los modelos que podían ser utilizados, como los reportados en Camarena (2001), nuestro método debía permitirnos dar cuenta de la naturaleza de la matemática que se usaba en los proyectos, de los modelos matemáticos utilizados, del empleo que se hacía de ellos, del pensamiento matemático que pudiera estar asociado a este uso.

Para ello, elaboramos una herramienta metodológica que distingue cuatro categorías: 1) uso del concepto; 2) componente matemático; 3) relación entre los conceptos matemáticos y los conceptos propios de la ingeniería, y 4) condición del elemento matemático. Dichas categorías se enfocan en el contenido matemático y su uso.

La propuesta de tales categorías se basa en la distinción que establece el acercamiento teórico entre los modos de pensamiento teórico y práctico. Consideramos que el uso del concepto matemático de manera práctica o teórica puede darle nuevos significados a los términos teórico y práctico; en ese sentido, hablamos del *uso conceptual* y del *uso técnico* de un concepto matemático. Asimismo, que si dentro de un proyecto de ingeniería hay un contenido matemático, el papel que desempeña puede ser de diferentes niveles.

Al hablar de un contenido matemático usado en un contexto de ingeniería, era pertinente observar las conexiones entre los conceptos matemáticos y los de ingeniería. Por otro lado, creemos que los conceptos de las matemáticas se modifican al momento de utilizarse en un proyecto de ingeniería por la naturaleza misma de la ingeniería. El estudio de tales cambios nos interesa como un elemento que nos permita referir la vida de un contenido matemático en un contexto de ingeniería.

Definimos a continuación cada una de las categorías que integran nuestro método de análisis.

1) Uso del concepto

El uso del concepto es la función que desempeña el concepto matemático dentro del proyecto. Aquí, consideramos dos diferentes usos:

Uso conceptual: En este rubro reparamos en dos posibilidades

- El concepto es utilizado haciendo referencia a su definición, al cuerpo teórico que pertenece y a las conexiones que mantiene con otros conceptos matemáticos.

- El concepto es utilizado como modelo, ya que para poder modelar un fenómeno necesitan ser conocidas las características y propiedades que definen al concepto matemático, de manera que se pueda elegir como modelo de un fenómeno, elemento, etc.

Uso técnico: Se usa como resultado la técnica, el algoritmo del concepto, la aplicación de un método o modelo de manera sistemática; es decir, se emplea un tipo específico de modelos para un tipo específico de problemas.

2) Componente matemático

El componente matemático del proyecto de ingeniería alude al conformado por los conceptos, modelos, algoritmos, fórmulas o métodos vistos en conjunto, percibidos como un solo ente. Tal aspecto nos permite considerar el nivel de importancia del contenido matemático, atendiendo a su requerimiento para la constitución del proyecto.

Identificamos dos tipos de componentes matemáticos, de acuerdo con su importancia en la constitución del proyecto:

Componente matemático esencial: Ocurre cuando el contenido matemático es parte medular del proyecto, en el que se estructura y consolida. Aquí hacemos referencia, por ejemplo, al uso de modelos matemáticos que al ser aplicados en el proyecto lo fundamentan.

Componente matemático facilitador: Se da cuando el contenido matemático es un elemento que facilita la constitución del proyecto, pero su presencia no es determinante para su realización. Aquí contemplamos a las fórmulas, los métodos y los algoritmos, que sin duda son herramientas que posibilitan la obtención de resultados, mas no sostienen de manera importante el proyecto.

3) Relación entre conceptos matemáticos y conceptos propios de la ingeniería

Sabemos que cualquier concepto matemático de manera natural tiene conexiones con otros conceptos matemáticos dentro de la teoría a la que pertenece. Pretendemos observar cómo son las relaciones entre los conceptos matemáticos y los de la ingeniería que están en el proyecto, pues tal vínculo nos permitirá caracterizar el rol que juega allí el concepto matemático.

4) Condición del elemento matemático

El concepto matemático tiene características específicas dentro de la teoría matemática. Nos preguntamos si son las mismas cuando es aplicado a un proyecto específico; en este caso, uno de ingeniería. Por ello, trataremos de observar si sufre alguna trasformación al ser aplicado; es decir, si evoluciona, si contribuye a la teoría matemática o aparece sólo como un elemento inmutable de ella. En suma, apreciar la naturaleza del elemento matemático aplicado en la ingeniería a través de su presencia en el proyecto.

5. ANÁLISIS DE LAS TESIS

5.1. Condiciones para el análisis

A fin de determinar el papel del contenido matemático hicimos el análisis de las tesis, considerando tres partes:

objetivos, cuerpo y conclusiones. Cada una define una parte importante del trabajo, aunque en diferente sentido.

Los objetivos constituyen en cierta medida la dirección del trabajo; por ello, observamos si plantean el uso de conceptos matemáticos y cómo lo hacen, valiéndose de la categoría *uso del concepto*.

El cuerpo de la tesis, parte central del trabajo, integra el planteamiento del problema y el desarrollo de su resolución. Para analizar cómo funge el contenido matemático, empleamos las cuatro categorías de análisis que describimos anteriormente.

Las conclusiones enmarcan los resultados de la tesis. Aquí, nos interesa ver si es tomado en cuenta el *componente matemático*, si el autor considera que influyó o determinó los resultados o si los resultados constituyen un logro matemático y una contribución a la teoría matemática.

En nuestro trabajo, a cada análisis de tesis antecedió una descripción general de la problemática abordada. Luego, aparecieron 1) el análisis de los objetivos, utilizando la categoría *uso del concepto*; 2) el análisis del cuerpo de la tesis, empleando las cuatro categorías que conforman nuestro método, y 3) el análisis de las conclusiones, recurriendo a la categoría *componente matemático*. Presentamos a continuación el análisis de la tesis como prototipo de los otros análisis y como ejemplo.

5.2. Presentación de la tesis: *Diseño y simulación de una red neuronal aplicada al problema de distribución óptima de planta* (Martínez, 2002)

Síntesis de la tesis

El problema a resolver dentro del proyecto es el de distribución de planta. Consiste en tener un área donde se requiere ubicar un conjunto de elementos, que pueden ser departamentos, máquinas u otros de manera óptima, con el fin de obtener el mayor beneficio posible, ya sea en términos de costos o utilidades.

Ahora bien, este tipo de problema ha sido estudiado por mucho tiempo, debido a la importancia que tiene para la industria. Y aunque se han desarrollado modelos matemáticos que han empleado múltiples métodos, no se ha encontrado ninguna aproximación que garantice una solución óptima. Dentro del proyecto se presentan algunos de los más utilizados, así como una metodología, técnicas y herramientas para resolver el problema de distribución de planta. Se enfatiza en este trabajo la aproximación del Problema de Asignación Cuadrática (QAP), que fue elegido para representar el problema.

Para definir los problemas de optimización cuadráticos, donde se enmarca el QAP, se hace referencia a la siguiente cita:

> *En general, los problemas de optimización cuadráticos son problemas de optimización no lineal en los cuales una función cuadrática*

> *debe minimizarse o maximizarse, sujeta a restricciones lineales y usualmente a restricciones no negativas en las variables de diseño* (Cicjocki y Unbehauen, 1993[9], cit. en Martínez, 2002, p. 23).

Luego se presenta el problema de asignación cuadrático y la forma en que soluciona el problema de distribución.

> *En el problema de asignación cuadrático en particular existen n departamentos que serán ubicados o distribuidos en n sitios; es decir, el espacio a distribuir se divide en n áreas o sitios exactamente iguales por restricción* (Martínez, 2002, p. 23).

Tal situación se representa mediante la siguiente figura:

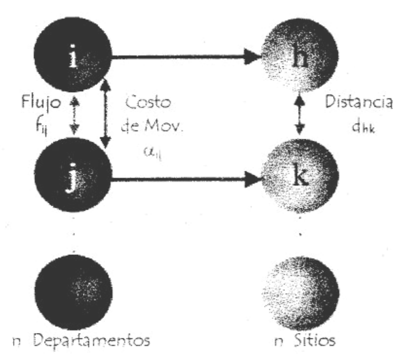


Figura 2.4. Representación del Problema de Asignación Cuadrática
(tomada de Martínez, 2002, p. 26).

Se considera el flujo que hay entre personas, la información y los materiales entre dos departamentos, donde también se marca una distancia determinada del problema, recurriendo a la distancia rectilínea entre sus centroides. Se presenta la siguiente figura:

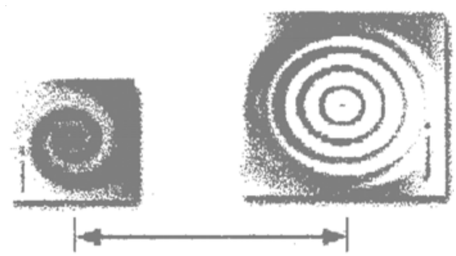


Figura 2.5*.* Distancia rectilínea entre centroides de dos departamentos
(tomada de Martínez, 2002, p. 26).

También se considera el costo de movimiento para cada elemento que se mueve entre los departamentos (material, maquinaria o personal).

El objetivo del problema se enmarca de la manera siguiente:

> *El objetivo del problema es minimizar el costo total de la distribución. Dicho costo puede calcularse de la siguiente manera: para cada distribución posible se multiplica el costo de movimiento entre el par de departamentos, por el flujo entre ellos, por la distancia entre los sitios asignados y se suma cada uno de estos costos.* (Martínez, 2002).

El modelo matemático se presenta así:

Minimizar:

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\sum_{h=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq h}}^{N} c_{ihjk}\,x_{ih}\,x_{jk}$$

[9] Cicjocki, A. & Unbehauen, R. (1993). *Neural networks for optimization an signal processing*. UK: Wiley.

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ih} = 1 \text{ para toda } h$$

$$\sum_{h=1}^{N} x_{ih} \leq 1 \text{ para toda } i$$

$$x_{ih} \in \{0,1\}$$

Donde:

C_{ijhk} = $á_{ij}$ f_{ij} d_{hk} = Costo de asignar los departamentos i y j a los sitios h y k, respectivamente.

f_{ij} = Flujo de material entre los departamentos i y j.

d_{hk} = Distancia entre los sitios h y k.

α_{ij} = Costo de mover una unidad de material una unidad de distancia entre los departamentos i y j.

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{Si el departamento } i \text{ es asignado al departamento } k \\ 0 & \text{De otra manera} \end{cases}$$

Para solucionar el QAP, se propone como herramienta de solución a las redes neuronales.

Una red neuronal puede definirse como un conjunto de elementos interconectados jerárquicamente, que se comportan como sus análogos biológicos. Su funcionamiento se puede describir en términos generales como sigue: la red recibe información del entorno o de otras neuronas artificiales, o bien por medio de una función, que es llamada *función de entrada*; la información es trabajada por una función de procesamiento que corresponde a esta neurona y la información obtenida es entregada como *función de salida*.

Para la solución del modelo se ocupa la máquina de Boltzmann, ya que el fin consiste en minimizar el costo de la distribución. Los problemas de optimización cuadráticos están representados por una función cuadrática (que es su función objetivo), y será simbolizada por la función de energía[10] de la red, pues ésta, al llegar a los estados estables mínimos, encontrará el costo mínimo del problema.

Mostramos la función de energía de la red:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_{ij} s_i s_j + \sum_{i=1}^{N} \theta_i s_i$$

Donde:

w_{ij}= Peso de la conexión entre las neuronas i y j, respectivamente.

s_i = Valor de la salida de la neurona i.

s_j = Valor de la salida de la neurona j.

$è_i$ = Valor del umbral de la función de activación de la neurona i.

(Martínez, 2002, p. 51)

También es importante señalar que las máquinas de Boltzmann pueden represen-

[10] En el proyecto se hace referencia a la cita de Tagliarini et al. (1991), Optimization using neural networks. *IEEE Trans. Computers 40* (12), 1347-1358. "Para significar la función de energía, aclarando que está basado en una analogía entre el comportamiento de la red neuronal y el de ciertos sistemas físicos: así como éstos evolucionan hacia un estado de equilibrio, una red de neuronas siempre evolucionará hacia un mínimo de la función de energía; por lo que los estados estables de una red corresponden al mínimo local de la función de energía, el número de mínimos corresponde al número de informaciones de entrada que se hayan proporcionado" (Martínez, 2002, p. 46).

tarse con un arreglo bidimensional, donde para determinar que una salida de la red corresponda a una solución del problema se definirá que cada fila represente un sitio y cada columna un departamento.

El problema de QAP está representado por una función objetivo, mientras que la red neuronal –máquina de Boltzmann– se simboliza por la función de energía para que la máquina de Boltzmann sea la que dé solución al problema QAP.

Se considera necesario representar de manera equivalente la función de energía y la función objetivo del QAP. Para lograrlo, hay que mostrar la función objetivo sin restricciones, en forma de función de energía, con el fin de que al utilizarla los mínimos favorezcan aquellos estados que beneficien que:

1. Los departamentos se ubiquen en un solo sitio.

2. Se obtenga el costo menor, dependiendo de la distancia mínima entre los pares de departamentos y el flujo entre ellos (Martínez, 2002, p. 57).

Para eliminar las restricciones de la función objetivo se utiliza el método de funciones de castigo que, al ser aplicado, da la función de energía correspondiente al problema QAP, que es expresada de la siguiente manera:

$$E = A\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{h=1}^{N} x_{ih} - 1\right)^2 + B\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{h=1}^{N} x_{ih} - 1\right)^2 + \\ + C\sum_{i=1}^{N}\sum_{h=1}^{N} x_{ih}(1 - x_{ih}) + D\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{h=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_{ijhk} x_{ih} x_{jk}$$

con las constantes de castigo A>0, B>0, C>0, D>0 (Martínez, 2002, p. 58).

Esta función de energía corresponde al problema QAP, y al ser minimizada ofrecerá los mínimos del problema. Sin embargo, falta establecer la manera para que cada término de la función sea mínimo, por lo cual se establecen los pesos de la red (cada término de la función de energía) con el siguiente procedimiento:

> *Para obtener los pesos pueden considerarse por separado cada uno de los términos de la expresión anterior*[11]*. El primer término será mínimo cuando la suma de las salidas en cada fila, asociada con sitios, sea uno. El segundo término de la ecuación será mínimo cuando la suma de las salidas en cada columna, asociada con departamentos, sea uno. El tercer término ocasiona que la red favorezca los estados 0 y 1 de las neuronas que están en uno u otro estado; dicho término ejerce influencia en todas las neuronas de la red* (Martínez, 2002, p. 59).

Los pesos se pueden obtener específicamente mediante la expresión matemática:

$$W_{ijhk} = A\delta_{ij}(1-\delta_{hk}) - B\delta_{hk}(1-\delta_{ij}) - C$$

y $\theta_i = -CN$, donde δ_i es la función delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

(Martínez, 2002, p. 59)

[11] Función de energía correspondiente al problema QAP

En esta ecuación de los pesos falta por considerar el último término de la función de energía del QAP, que está relacionado con el costo de la asignación. Para determinarlo, se hace el siguiente planteamiento:

> Para intentar minimizar de alguna forma este término puede considerarse preferir sitios que involucren el menor costo; es decir, preferir la inhibición de la selección de sitios adyacentes en proporción al costo entre ellos calculado por la distancia y el flujo entre esos sitios.
>
> Esto podría expresarse con la siguiente magnitud:
>
> $$-D\, d_{hk}\, f_{ij}\, (\delta_{ji+1} + \delta_{ji-1})$$
>
> donde d_{hk} representa la distancia entre el sitio h y el sitio k, y f_{ij} es el flujo entre los departamentos i y j. Para una fila j, los dos términos delta aseguran que se hagan conexiones inhibitorias sólo con las neuronas de filas adyacentes, sitios que se encuentren cercanos al de la fila j. El término $-D\, d_{hk}\, f_{ij}$ asegura que las neuronas que representen a las asignaciones con más costo reciban la mayor señal inhibitoria.
>
> Por lo que la expresión para los pesos es:
>
> $$W_{ijhk} = A\Delta_{ij}(1-\Delta_{hk}) - B\Delta_{hk}(1-\Delta_{ij}) - \\ - C - D\, d_{hk}\, f_{ij}\, (\Delta_{ji+1} + \Delta_{ji-1})$$
>
> (Martínez, 2002, p. 61)

Posteriormente, se implementa la red mediante una simulación computacional para obtener una respuesta inmediata y con costos mínimos.

5.3. Análisis de la tesis

La primera parte del análisis está hecha sobre los objetivos de la tesis. Aquí, se utilizan las categorías *uso del concepto* y *componente matemático* para dar cuenta de cómo es visualizado el contenido matemático.

5.3.1. Objetivos

En la tesis hay un objetivo general y siete objetivos específicos. Consideramos tres de ellos, ya que enuncian el elemento matemático:

> Modelar el problema de distribución de planta como un problema de optimización matemática (Martínez, 2002, p. XII).
>
> Presentar como una alternativa de solución para problemas de optimización matemática a las redes neuronales (Martínez, 2002, p. XII).
>
> Diseñar una red neuronal que resuelva –un modelo de optimización– el problema de distribución de planta (Martínez, 2002, p. XII).

Dichos objetivos establecen la manera de resolver el problema: convertirlo en uno de índole matemática. La forma de buscar la solución al problema de la distribución de planta (problema principal a resolver en este proyecto) está proponiéndose bajo un modelo matemático.

Consideramos que el contenido matemático está visualizándose como un *componente esencial* en el proyecto, al ser el eje sobre el que se gira el desarrollo de la tesis.

Además de que se intenta resolver el problema de distribución de planta bajo un modelo de optimización matemática, se propone ampliar las soluciones a los problemas de optimización matemática mediante la herramienta *redes neuronales*, de manera que no está pensada para tener un *uso técnico* porque se pretende ampliarla y evolucionarla. Para ello, se requiere de la consideración de la teoría a la que pertenece.

Por tanto, se concibe un *uso conceptual* de la optimización matemática.

5.3.2. Cuerpo de la tesis

La segunda parte del análisis comprende el cuerpo de la tesis. Aquí, se emplean las cuatro categorías de la herramienta metodológica: *uso del concepto, componente matemático, relación entre conceptos matemáticos y conceptos propios de la ingeniería y condición del elemento matemático.*

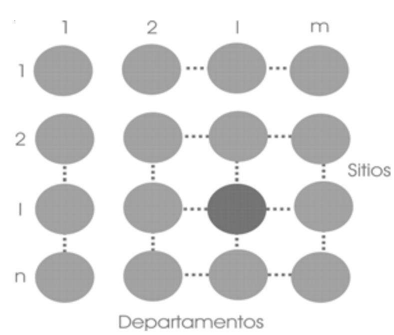
Uso del concepto

Uno de los conceptos que son manejados en la resolución de este proyecto es el de *matriz*. A continuación, analizaremos su uso.

El elemento matemático de la matriz es requerido en diferentes partes del proyecto. Aparece en el diseño de la red, mas no se hace referencia explícita a su definición ni a la teoría a la que pertenece. Por ello, es considerada como un arreglo bidimensional e incluso podríamos decir que su uso no es conceptual. Lo que sí es explícito es su significación como representación de la red neuronal.

> Las redes de Hopfield y las máquinas de Boltzmann pueden representarse de manera gráfica como un arreglo. En el caso del QAP, para determinar que una salida de la red corresponda a una solución del problema puede definirse que cada fila represente un sitio, y cada columna represente un departamento (Martínez, 2002, p. 56).

> ... se utilizan n^2 neuronas, donde n es el número de departamentos, cada uno a un sitio. Se hace una representación en dos dimensiones de las neuronas que forman la red, lo que en la programación[12] es representado con una matriz o un arreglo de dos dimensiones; es decir, cada elemento del arreglo representa una neurona con dos índices. El primer índice representa el departamento y el segundo índice el número del sitio donde debe colocarse cada departamento (Martínez, 2002, p. 63).



[12] Se implementó la red mediante una simulación, para lo cual eligieron modificar un simulador existente; dentro de la programación de este simulador se utilizó el concepto de matriz.

> ... el círculo más oscuro representa que la neurona correspondiente a la fila i y columna j está encendida, lo cual significa que su hipótesis[13] correspondiente es verdadera (Martínez, 2002, p. 56).
>
> Según este arreglo, al llegar a una solución se obtendría que solamente una neurona (o elemento del arreglo), por cada fila y por cada columna, tendría un valor de 1 o encendido (Martínez, 2002, p. 64).
>
> Donde a_{ij} representa que el departamento j se ubica en el sitio i.
>
> La salida respectiva para esta solución en forma de matriz sería la siguiente:
>
> $$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$
>
> Departamento 1 en Sitio 4
>
> Departamento 2 en Sitio 1
>
> Departamento 3 en Sitio 3
>
> Departamento 4 en Sitio 2
>
> (Martínez, 2002, p. 64)

La matriz funge como el modelo que representa a la red neuronal. Sin embargo, nos preguntamos: ¿qué conocimiento debe tenerse de un concepto para usarlo como modelo? Es decir, si no se conoce su definición, propiedades ni características que lo conforman, ¿cómo puede pensarse que simboliza cierto problema, concepto o elemento?

En este caso, la matriz representa una red neuronal que debe asignar un departamento a cada sitio; para ello, se deberá tener una matriz con un único uno por renglón y columna, de forma que se encuentre sólo un departamento para cada sitio. Un elemento necesario a considerar es la distancia entre departamentos, en el que caben dos posibilidades con la ayuda de la programación: construir una matriz de distancias o que el programa las calcule a partir de la posición de los departamentos.

Para la primera opción, es preciso conocer las relaciones que designan a los elementos de una matriz. Mostramos cómo las obtienen:

> Los pesos de la red se representan mediante un arreglo de cuatro dimensiones porque dichos pesos se forman de la siguiente manera:
>
> W_{ihjk} es el peso entre el par de neuronas ih (fila i y columna h) y jk (fila j y columna k).
>
> El cálculo de los pesos se hace del siguiente modo:
>
> $$W_{ihjk} = -A\Delta_{ij}\left(1-\Delta_{hk}\right) - B\Delta_{hk}\left(1-\Delta_{ij}\right) - \\ - C - Dd_{hk} f_{ij}\left(\Delta_{ji+1} + \Delta_{ji-1}\right)$$
>
> $$\text{y} \quad \theta_i = -CN$$
>
> donde Δ_{ij} es la función delta de Kronecker:

[13] La regla se basa en el hecho de que cada neurona en la red representa una hipótesis. Cuando una neurona se encuentra en estado ON, es decir, *encendida*, en el momento que la red alcanza un estado estable significa que su hipótesis es verdadera (Martínez, 2002, p. 55).

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{si} \;\; i = j \\ 0 & \textit{de lo contrario} \end{cases}$$

y A, B, C y D son *parámetros de castigo* (Martínez, 2002, p. 65).

Al emplear una matriz para calcular las distancias, deben ser conocidas sus características y propiedades que la definen para poder tener esta aplicación. El uso de la matriz a este nivel es *conceptual*.

La segunda opción es que el programa recurra a una función preestablecida, ocupando el siguiente algoritmo:

1. *Determinar la matriz de distancias, la matriz de flujos y la matriz de costos de movimiento* (Martínez, 2002, p. 65).

El *uso* de la matriz en el algoritmo anterior es *técnico*, ya que tiene como objetivo encontrar un resultado, por lo cual no se requiere conocer la definición ni las características del concepto.

Componente matemático

El componente matemático es *esencial*, debido a que el problema de distribución de planta es formado a través de un modelo matemático de optimización cuadrática, por lo que se torna en el eje del proyecto. Darle solución al problema de optimización significa resolver el problema de distribución de planta que justifica la conformación del proyecto.

> Una de las representaciones del *problema de distribución de planta* es un modelo de optimización matemática. El modelo que se eligió en este trabajo fue el *problema de asignación cuadrática* (Martínez, 2002, p. 37).
>
> Se ha planteado resolver el problema de distribución óptima de planta modelado a través del problema de asignación cuadrática, y elaborando una red neuronal del tipo máquina de Boltzmann (Martínez, 2002, p. 63).

Relación entre conceptos matemáticos y conceptos propios de la Ingeniería

En este proyecto el concepto de ingeniería de mayor importancia es la *red neuronal,* que se relaciona estrechamente con el contenido matemático, pues su propósito es dar solución al modelo de optimización matemático usado.

> Las redes de Hopfield y las máquinas de Boltzmann se aplican básicamente con dos propósitos: como memorias asociativas o para resolver problemas de optimización (Martínez, 2002, p. 52).
>
> En general, una red neuronal resuelve satisfactoriamente un problema específico de optimización combinatoria si es capaz de encontrar una solución cercana a la óptima, aunque no sea necesariamente ésta (Martínez, 2002, p. 52).

Dentro de la teoría matemática, específicamente de la *optimización matemática*, la red neuronal no es un concepto matemático propio; sin embargo, dentro del proyecto dará solución al problema de optimización matemática, se convertirá en parte de él.

Para el diseño de la red, se requiere de un arreglo matricial que modele el comportamiento de la matriz, y cada uno de sus elementos tendrá un significado para la solución del problema. El elemento matemático no se utiliza como tal, sino se convierte en la representación de la red.

> Las redes de Hopfield y las máquinas de Boltzmann pueden representarse de manera gráfica como un arreglo. En el caso del QAP, para determinar que una salida de la red corresponda a una solución del problema puede definirse que cada fila represente un sitio y cada columna un departamento (Martínez, 2002, p. 56).

La relación entre el modelo matemático y el de la red neuronal dentro del proyecto es tan estrecha que no se visualizan como elementos distintos, sino se conforman como un solo ente, definiéndose nuevamente. Pero su conformación desaparece fuera del problema específico; ahí se diferencian y reconocen por separado; es decir, en el proyecto el modelo QAP se soluciona mediante redes neuronales, más no su definición matemática. Fuera del proyecto son elementos diferenciados uno del otro.

> Las redes neuronales pueden utilizarse como herramienta para resolver problemas de optimización matemática combinatorios como el problema presentado aquí, obteniendo resultados aceptables que se acercan al óptimo. La base principal es encontrar la manera de representar una solución del problema con las salidas de la red neuronal (Martínez, 2002, p. 76).

Condición del elemento matemático

El modelo matemático sufre una adecuación que sin duda lo transforma, ya que sus condiciones y características se modifican en su significación. Si presentamos el modelo matemático, cumple ciertas características como expresión en lenguaje matemático, claridad, coherencia interna, generalidad. Sin embargo, al hacer su adecuación toma significados específicos, pues cada uno de sus elementos representa algún componente del fenómeno que simboliza. Es decir, se condiciona a otra representación, sus conexiones se establecen con conceptos diferentes a los matemáticos.

Concepto matemático matriz n x n

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}.\cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{4n} \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{nn}
\end{array}$$

Adecuación del concepto

> … se muestra un grupo de neuronas. La neurona 23 está encendida y se va a analizar su influencia sobre la neurona 24, que está en la misma fila y en distinta columna. Esta neurona 24, así como las demás de la fila 2, no deberían encenderse, puesto que no debe resultar más de una neurona encendida por fila (Martínez, 2002, p. 60).
>
> Según el primer término de la expresión de los pesos para las filas $i = 2$ y $j = 2$ y las columnas $h = 3$ y $k = 4$:
>
> $$\begin{aligned} -A\Delta_{ij}(1-\Delta_{hk}) &= -A\Delta_{22}(1-\Delta_{34}) \\ &= -A(1)(1-0) \\ &= -A(1) \\ &= -A \end{aligned}$$
>
> Por tanto, cuando la neurona 23 está encendida ejercerá una inhibición de magnitud A sobre la neurona 24 para evitar que se encienda.
>
> Por otra parte, para evaluar la influencia de la neurona 23 sobre ella misma, se tiene que $i = 2$ y $j = 2$ y las columnas $h = 3$ y $k = 3$:
>
> $$\begin{aligned} -A\Delta_{ij}(1-\Delta_{hk}) &= -A\Delta_{22}(1-\Delta_{33}) \\ &= -A(1)(1-1) \\ &= -A(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$
>
> Lo que indica que la neurona 23, cuando está encendida, evita inhibirse a sí misma (Martínez, 2002, p. 60).

5.3.3. Conclusiones

La tercera parte del análisis comprende las conclusiones de la tesis. Aquí, se utiliza la categoría *componente matemático.*

Dentro de las conclusiones, podemos reparar que el componente matemático es *esencial* porque hacen consideraciones específicas hacia él. El papel del elemento de ingeniería es visualizado en torno al matemático.

> Las redes como método de resolución de problemas de optimización es una opción aceptable (Martínez, 2002, p. 77).
>
> ... se presentó la red de Hopfield como una herramienta para resolver problemas de optimización matemática y una variante de ella, la máquina de Boltzmann (Martínez, 2002, p. 78).

También se propone una aportación a la teoría matemática, involucrando un elemento de ingeniería.

> Los resultados de esta tesis pueden sugerir el desarrollo de una metodología para resolver problemas de optimización matemática (Martínez, 2002, p. 79).

6. ALGUNOS RESULTADOS

Los resultados que presentamos corresponden a los análisis de las cuatro tesis, aplicando la herramienta metodológica. Aquí, los presentamos como fenómenos que dan cuenta de la actividad matemática del ingeniero en su ejercicio, aunque su identificación no fue de manera global, sino a partir de cierta categoría del método de análisis; nos servimos de ella para describir lo que el autor documentaba en su tesis sobre su *hacer* y su *cómo hacer*.

Por ejemplo, cuando usamos la categoría *componente matemático* identificamos cómo el autor se sirvió de los elementos matemáticos para resolver la problemática de su proyecto; si este *servirse* de la matemática resultaba fundamental en la solución de la tesis, entonces se daba cuenta de que el contenido matemático era el eje en la solución del proyecto.

Cada una de las categorías de la metodología nos permitieron identificar dichos fenómenos, y algunos aparecieron en más de una de las tesis. Debido a sus características, clasificamos en cuatro categorías:

1) Contribución de la matemática en la resolución de un problema.
2) Aportación a la matemática.
3) Cambio en el contenido matemático.
4) Teoría de la práctica.

Para mostrar los fenómenos identificados nos servimos de tablas. En la primera columna consignamos al fenómeno identificado, en la segunda a la evidencia del fenómeno, que concierne a su descripción en la tesis –cuyo título pusimos entre paréntesis–, mientras que en la tercera a la categoría del método de análisis que nos permitió identificarlo.

6.1. Relación entre los fenómenos encontrados y la categoría

Contribución de la matemática a la resolución de un problema

Fenómeno	Evidencia del fenómeno	Categoría en la que se presenta
Contenido matemático como eje de un proyecto de ingeniería	Se encuentra que los elementos matemáticos son los que permiten realizar el estudio del fenómeno, además de dar solución al problema central del proyecto mediante un modelo matemático (*Optimización de la molienda de empacadores permanentes en las operaciones de reparación de pozos petroleros*)	Componente matemático

Aportación matemática

Fenómeno	Evidencia del fenómeno	Categoría en la que se presenta
Un elemento de ingeniería como parte de un modelo matemático.	La red neuronal resuelve el modelo matemático QAP (*Diseño y simulación de una red neuronal aplicada al problema de distribución óptima de planta*)	Relación entre conceptos matemáticos y conceptos propios de la ingeniería.
Aportanción a la teoría matemática.	Se propone el desarrollo de una metodología para resolver problemas de optimización matemática; la propuesta se basa en los resultados de la tesis (*Diseño y simulación de una red neuronal aplicada al problema de distribución óptima de planta*)	Componente matemático
Aportación a la teoría matemática.	Localizamos que pueden surgir teorías matemáticas motivadas por el estudio de un fenómeno con el fin de optimizarlo, como es el caso de la teoría de colas. (*Método numérico para el sistema m/g(0,c)/1 con distribución uniforme en tiempo de servicio*)	Condición del elemento matemático.

Cambio en el elemento matemático

Fenómeno	Evidencia del fenómeno	Categoría en la que se presenta
Adecuación del modelo mediante la resignificación de los elementos matemáticos de modelo en términos del fenómeno o proceso en estudio.	El modelo QAP se resignifica en términos de la función de energía de la red neuronal. La matriz se resignifica de manera que sus elementos representan neuronas y éstas, a su vez, a un departamento que se ubica en un sitio (*Diseño y simulación de una red neuronal aplicada al problema de distribución óptima de planta*). El modelo de las redes de Petri se adecua, puesto que sus elementos se resignifican en términos de significados específicos del fenómeno en estudio (*Modelación de sistemas de producción mediante redes de Petri*).	Condición del elemento matemático.
Significación del elemento matemático.	Los elementos estadísticos son definidos, pero no en términos estrictamente matemáticos, sino que en los del fenómeno al que son aplicados (*Optimización de la molienda de empacadores permanentes en las operaciones de reparación de pozos petroleros*).	Condición del elemento matemático.

Un fenómeno similar al que presentamos a continuación fue observado en Sierpinska, et al. (2002), donde un estudiante mostraba la necesidad de ejemplos particulares para entender resultados más teóricos.

Teoría de la práctica

Fenómeno	Evidencia del fenómeno	Categoría en la que se presenta
Conocimiento de un modelo mediante la manipulación del mismo.	El autor no establece que para ese conocimiento él haga referencia a la definición del modelo, sino que parece conocerlo por la manipulación del mismo. (*Modelación de sistemas de producción mediante redes de Petri*).	Uso del concepto.

Los fenómenos identificados por las categorías de la metodología nos permitieron apreciar diferentes niveles de aplicación de los conceptos matemáticos, que llamamos *usos*. Notamos que el *uso* que se hace de los conceptos matemáticos, en su mayoría, es para modelar un fenómeno. Ahora bien, los modelos utilizados no siempre son creados por el ingeniero que estudia el fenómeno.

Asimismo, hallamos la creación de modelos y estructuras matemáticas que se establecen como herramientas para solucionar cierto tipo de problemas, en las que se vislumbra la necesidad de que el modelo sea de fácil aplicación. De igual manera, la eficacia en términos de tiempo es un factor importante en la elección de los modelos.

Cada una de las categorías instituidas en la metodología nos permitió conocer rasgos del conocimiento matemático que se aplica en la ingeniería. Vistas en conjunto, propiciaron que tuviéramos un primer acercamiento a la naturaleza del contenido matemático en un contexto de ingeniería. Esto se debió a que cada una de las categorías considera de manera sistemática la naturaleza del conocimiento matemático y del pensamiento asociado a éste, mientras que en conjunto hacen que se conozca de manera sistémica la naturaleza del contenido matemático en la tesis.

Bajo el uso de esta herramienta metodológica, notamos diferentes fenómenos que refieren cómo vive el contenido matemático dentro de un proyecto de investigación en ingeniería:

- **Significación del elemento matemático:** Se percibe la necesidad de resignificar el elemento matemático en términos de elementos que pertenecen al fenómeno o proceso que se estudia.

- **Adecuación del modelo:** El modelo sufre una adecuación en el sentido de que cada elemento matemático se resignifica en términos de los que atañen al fenómeno o proceso que se modela.

- **Elementos de ingeniería como parte de un modelo matemático:** Un elemento de ingeniería se emplea como solución de un modelo matemático, considerando que este elemento de ingeniería define su actividad mediante una función matemática.

- **Contribución a la teoría matemática:** Ante un problema que requiere de la optimización matemática, pero no se encuentra una herramienta adecuada para resolverlo, se propone el desarrollo de una herramienta dentro de la teoría matemática que permita hallar una solución óptima.

El uso de la herramienta metodológica nos permitió abordar fenómenos que caracterizan al conocimiento matemático aplicado para resolver problemas de ingeniería. De igual manera, el análisis efectuado a la tesis en tres partes resulta útil, pues logra que se sustente la identificación del fenómeno.

Los fenómenos identificados hacen que se puedan conocer algunos elementos de la naturaleza de la actividad matemática en la ingeniería. No sólo encontramos una aplicación directa de elementos matemáticos como conceptos, modelos o métodos, sino que éstos, al involucrarse en el estudio de un fenómeno, en la solución de un problema o en la conformación de un modelo que describe un fenómeno tienen constitución y vida propia. El contenido matemático no se inserta de manera directa en la ingeniería, sino toma forma propia, ya que los problemas de la vida real que la ingeniería resuelve provocan también la creación de conocimiento matemático.

Creemos que el análisis de cuatro tesis de un programa de maestría en Ingeniería de Sistemas no permite hablar de resultados generales, pero estimamos que la herramienta metodológica posibilita la realización de otros trabajos que puedan dar cuenta de resultados más generales.

Sin embargo, a partir de este análisis consideramos necesario reflexionar sobre los modos de pensamiento y su relación con la actividad matemática del ingeniero. Es pertinente hacer una reinterpretación de los modos de pensamiento teórico y práctico con base en el análisis que nos permitió observar el pensamiento del ingeniero asociado al *uso* que hace del contenido matemático en su ejercicio.

Al analizar los fenómenos que surgen en ese *uso,* identificamos dos niveles: el de aplicación y el de creación. En el nivel de aplicación se requiere de la experiencia y habilidad para elegir y adoptar los métodos adecuados; en el de creación se precisa de un trabajo teórico motivado por la práctica.

Esta identificación nos hace reparar en una posible modificación para explicar el pensamiento del ingeniero, que explicamos a continuación:

6.2. Pensamiento teórico y práctico en la ingeniería

Los fenómenos que hemos identificado refieren la naturaleza de la actividad matemática que se desarrolla en la ingeniería. Consideramos que el pensamiento que se asocia a esta actividad tiene una naturaleza específica, ya que si reflexionamos en el modelo de pensamiento de partida, los fenómenos identificados y los *usos* mencionados en el apartado anterior, podríamos observar que el modelo de pensamiento no corresponde con los *usos* ni con los fenómenos, e incluso con las tareas que pueden considerarse teóricas. La motivación práctica es el motor que los genera; en este sentido, el pensamiento teórico no puede ser el pensamiento por el afán de pensar.

A partir de lo anterior, con base en nuestro análisis sobre las tesis de ingeniería con la metodología que definimos y sustentamos en la perspectiva de los modos de pensamiento teórico y práctico, mostramos a continuación características del pensamiento que consideramos importantes, cuales están asociadas a la actividad matemática en el ejercicio de la ingeniería. Cabe aclarar que nos referimos al pensamiento en ingeniería basado en el uso de herramientas matemáticas, no a todo el pensamiento en ingeniería.

El pensamiento en el ejercicio de la ingeniería propicia la creación de conocimiento y modelos generales, aunque puede ser iniciado por consideraciones teóricas. Tiene un carácter mixto debido al carácter práctico de la ciencia: es difícil encontrar un pensamiento teórico sin un pensamiento práctico. Ambos se mezclan en su objetivo, objeto, preocupaciones principales y resultados.

Ahora bien, el objeto del pensamiento en el ejercicio de la ingeniería son los sistemas de conceptos matemáticos, que son aplicados para modelar un fenómeno real. Esto concierne al significado de los conceptos matemáticos, definidos en términos de los elementos del fenómeno.

El enfoque del pensamiento en el ejercicio de la ingeniería es el estudio de las relaciones que se describen entre las variables de un fenómeno, a través de las relaciones establecidas entre los conceptos matemáticos y su caracterización en un sistema de conceptos. En los análisis de las tesis, cada vez que un elemento matemático era usado como modelo, había que redefinirlo en términos del fenómeno. Por ende, hay una relación entre cada elemento matemático y cada elemento que es redefinido en términos del fenómeno.

¿Qué características del pensamiento surgen en la práctica del ingeniero? Con base en lo anterior, y a los análisis hechos, proponemos ciertas características que podrían dar cuenta del pensamiento que surge en la práctica de un ingeniero.

6.3. Pensamiento que surge de la práctica de un ingeniero

Operacional: El pensamiento en el ejercicio de la ingeniería es el que permite dar solución a problemas que surgen en la práctica, incluso los que requieren de una solución urgente, lo cual propicia una habilidad para el *uso* de herramientas que otorguen la solución.

Sistemático: El pensamiento en el ejercicio de la ingeniería es el que propicia la aplicación sistemática de resultados matemáticos como fórmulas, algoritmos, métodos, etc.

Resolutivo: El pensamiento en el ejercicio de la ingeniería está preocupado por aplicar herramientas matemáticas que han sido creadas para resolver un tipo de problemas, más que por la reflexión sobre el problema y la naturaleza de la herramienta.

Eficiente: El pensamiento en el ejercicio de la ingeniería se asocia a la aplicación sistemática de un modelo o de un método, en la que el fundamento matemático se visualiza como un instrumento de validación de la herramienta aplicada.

Decisivo: El pensamiento en el ejercicio de la ingeniería es el que propicia juicios valorativos sobre la elección de la herramienta matemática a utilizar, referidos a la complejidad o simplicidad de su uso más que a definición, estructura y relaciones entre los elementos que la conforman.

Los resultados que hemos presentado refieren ciertos fenómenos producidos por el uso de conceptos y elementos matemáticos en el desarrollo de proyectos de ingenieria al igual que ciertos rasgos del pensamiento asociado a la actividad matemática en el ejercicio del ingeniero. La herramienta que diseñamos fue un primer método para poder acercarnos a la naturaleza de la matemática que vive en la ingeniería.

Este estudio de caso, donde hemos puesto a prueba la herramienta metodológica, muestra una perspectiva mediante la cual se aborda el rol de las matemáticas en la ingeniería, que tienen su propia naturaleza. Estudiar y caracterizar dicha naturaleza con el fin de proponer una didáctica de las matemáticas en la formación de ingenieros es una tarea que la matemática educativa, en tanto disciplina científica, debe continuar.

BIBLIOGRAFÍA

Camarena, P. (2001). La matemática en el contexto de las ciencias. *Antologías 11*, 149-169.

Camarena, P. (1999). *Las funciones generalizadas en ingeniería, construcción de una alternativa didáctica.* Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Hurtado, R. (2001). *Optimización de la molienda de empacadores permanentes en las operaciones de reparación de pozos petroleros*. Tesis de maestría no publicada, SEPI-ESIME, México.

Kent, P. & Noss, R. (2002). The mathematical components of engineering expertise: The relationship between doing and understanding mathematics. Conferencia presentada en *IEE Second Annual Symposium on Engineering Education*. London, UK. Obtenido de http://k1.ioe.ac.uk/rnoss/MCEE/Kent-Noss-EE2002-preprint.pdf.

Kent, P. & Noss, R. (2001). *Investigating the mathematical components of engineering expertise.* Obtenido de http://k1.ioe.ac.uk/rnoss/MCEE/MCEE-poster-for-PME25.pdf.

Lagunes, J. (1999). *Modelación de sistemas de producción mediante redes de Petri.* Tesis de maestría no publicada, SEPI-ESIME, México.

Martínez, C. (2002). *Diseño y simulación de una red neuronal aplicada al problema de distribución óptima de planta.* Tesis de maestría no publicada, SEPI-ESIME, México.

Molina, A. (1999). Problemática actual en la enseñanza de la ingeniería: una alternativa para su solución. *Ingenierías 2*(3), 10-15.

Rugarcia, A., Felder, R., Woods, D. & Stice, J. (2000). The future of engineering education. A vision for a new century. *Chemical Engineering Education 34*(1), 16-25.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. & Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra.* Reporte de investigación, Universidad de Concordia, Canadá. Obtenido de http://alcor.concordia.ca/~sierp/downloadpapers.html.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London, UK: The Falmer Press Ltd.

Trueba, B. (2002). *Método numérico para el sistema m/g(0,c)/1 con distribución uniforme en tiempo de servicio*. Tesis de maestría no publicada, SEPI-ESIME, México.

Avenilde Romo
Université Paris 7 Denis Diderot
París, Francia

Email: romo@math.jussieu.fr.

Asuman Oktaç
Departamento de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

Email: oktac@cinvestav.mx.